11
2 ej.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

TEORIA LOCAL DE LOS CONJUNTOS.

TESIS PROFESIONAL

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

M A T E M A T I C A

P R E S E N T A

SANDRA MARIA CHIMAL GARMA

CD. UNIVERSITARIA 1992

INDICE

CAPITULO 0

(CONOCIMIENTOS GENERALES)

A lo largo de esta tesis se hará uso de resultados referentes a los topos, que a continuación se mencionarán.

Un topos es una categoría que puede ser considerada como la "generalización" de *Set*. Por ello se cita la noción de subobjeto en *Set* para extenderla a los topos.

SUBOBJETOS Y CLASIFICADOR DE SUBOBJETOS.

En *Set*, el morfismo inclusión $m:B\hookrightarrow A$ de un subconjunto B en un conjunto A es siempre mónico. Inversamente, todo mónico $n:C\rightarrowtail A$ en *Set* es "casi" una inclusión en tanto exista un isomorfismo $i:C\cong B$ para un subconjunto $B\subseteq A$ tal que $m\circ i=n$.

Extendemos estas ideas a una categoría arbitraria C, decimos que dos monomorfismos $m:B\rightarrowtail A$ y $n:C\rightarrowtail A$ son equivalentes, se escribe $m\simeq n$, si existe un isomorfismo $i:C\cong B$ tal que $m\circ i=n$. $\simeq$ es una relación de equivalencia en la clase de todos los monomorfismos en C con codominio A; Sea $[m]$ la clase de equivalencia del monomorfismo m. Una entidad de la forma $[m]$ es llamada un subobjeto de A. Cuando no se preste a confusión se usará m para $[m]$ y algunas veces para el dominio B de m. Así un subobjeto de un objeto A puede ser - considerado como un monomorfismo con codominio A o como el dominio de tal monomorfismo. Se escribirá Sub(A) para la clase de subobjetos de A. Dados los monomorfismos $m:B\rightarrowtail A$, $n:C\rightarrowtail A$, se escribirá $m\le n$ y se dirá que m esta incluido en n si existe un morfismo $f:B\rightarrowtail C$ tal que $n\circ f=m$. Evidentemente "$\le$" es un preorden en la clase de monomorfismos con codominio A. Más aún $m\le n$ y $n\le m$ sii $m\simeq n$. Se extiende la noción de inclusión a subobjetos de A por definición $[m]\le[n]$ sii $m\le n$; "$\le$" es ahora un orden parcial en Sub(A).

En *Set* los subobjetos pueden ser descritos mediante funciones características. La función característica de un subconjunto B de un conjunto A es el morfismo $\chi=\chi_B$ de A al conjunto 2 consistente de dos "valores de verdad" 0 y 1 con $\chi(x)=1$ cuando $x\in B$ y $\chi(x)=0$ cuando $x\notin B$. Más generalmente, dado un monomorfismo $m:B\rightarrowtail A$, defínese la función característica de m como el morfismo $\chi_m:A\longrightarrow 2$ tal que $\chi_m(x)=1$ cuando $x\in m[B]$ y $\chi_m(x)=0$ cuando $x\notin m[B]$. Dado otro monomorfismo $n:C\rightarrowtail A$ se tiene $m\simeq n$ sii $\chi_m=\chi_n$; se puede decir entonces que χ_m es la función característica del subobjeto $[m]$. Así la asignación $[m]\mapsto\chi_m$ relaciona cada subobjeto de A con una única función característica.

Inversamente, dada un morfismo $u:A\to 2$ se puede usar la técnica del producto fibrado para relacionar un único subobjeto de A con u. Tomese el subconjunto $1=\{0\}\subseteq 2$ y el monomorfismo $T:1\rightarrowtail 2$, el cual envía 0 a 1, y formando en *Set* el producto fibrado

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r] \arrow[d, "m"] & 1=\{0\} \arrow[d, "T"] \\ A \arrow[r, "u"'] & 2 \end{tikzcd}$$

La función característica del subobjeto $[m]$ de A es la dada por el morfismo u.

En conclusión se tiene una correspondencia biyectiva entre subobjetos de un conjunto A y funciones características en A.

Se extiende esta idea a una categoría arbitraria C con objeto terminal. Un clasificador de subobjetos en tal categoría C es un objeto Ω de C junto con un monomorfismo $T:1\to\Omega$, llamado "morfismo verdad", del objeto terminal 1 de C tal que

(*i*) para cada monomorfismo $m:B\rightarrowtail A$ $\exists!$morfismo $\chi(m):A\to\Omega$, llamado la característica de m (o de B), tal que el diagrama

(0.1)
$$\begin{tikzcd} B \arrow[r] \arrow[d, "m"] & 1 \arrow[d, "T"] \\ A \arrow[r, "\chi(m)"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

es un producto fibrado; e inversamente

(*ii*) todo diagrama de la forma $u:A\to\Omega\leftarrow 1:T$ tiene un producto fibrado. (Notese que todo morfismo con dominio en 1 es mónico).

Por analogía con *Set*, $\chi(m)$ puede ser también considerado como la función característica en A determinada por m.

A lo largo de este capítulo se considera a la categoría C con objeto terminal 1 y clasificador de subobjetos (Ω,T).

Para cada C-morfismo $u:A\to\Omega$ escogemos un monomorfismo ker(u) con codominio A tal que el siguiente diagrama es un producto fibrado

(0.2)
$$\begin{tikzcd} \mathrm{dom}(\ker(u)) \arrow[r] \arrow[d, "\ker(u)"] & 1 \arrow[d, "T"] \\ A \arrow[r, "u"'] & \Omega \end{tikzcd} \qquad \text{P. F.}$$

(La existencia de ker(u) esta garantizada por la condición (ii)) ker(u) es llamado el núcleo de u. Será conveniente suponer que $\ker(\chi(1_A))=1_A$ para todo objeto A.

0.3 LEMA. Sea A objeto de C, m y n C-morfismos con codominio A y sea $u:A\longrightarrow\Omega$ un morfismo en C. Entonces
(i) $u=\chi(\ker(u))$
(ii) $\ker([\chi(m)])=[m]$
(iii) $[m]=[n] \leftrightarrow \chi(m)=\chi(n)$ ■

Se sigue que el morfismo $[m]\mapsto\chi(m)$ es una biyección entre la clase Sub(A) de subobjetos de A y el conjunto $C(A,\Omega)$ de C-morfismos $A\longrightarrow\Omega$.

Definase para $u,v\in C(A,\Omega)$

$$\begin{aligned} u\leq v &\leftrightarrow [m]\leq[n] \text{ con } \chi(m)=u,\ \chi(n)=v \\ &\leftrightarrow [\ker(u)]\leq[\ker(v)] \\ &\leftrightarrow \ker(u)=\ker(v) \\ &\leftrightarrow \text{ para algun morfismo } f:\mathrm{dom}(\ker(u))\longrightarrow\mathrm{dom}(\ker(v)), \\ &\qquad \ker(u)=\ker(v)\circ f \end{aligned}$$

De aquí "$\leq$" es un orden parcial de Sub(A), "$\leq$" es un orden parcial de $C(A,\Omega)$, y $(\mathrm{Sub}(A),\leq)\cong(C(A,\Omega),\leq)$.

Para todo morfismo $u:A\longrightarrow\Omega$ se llamará $[\ker(u)]$ el subobjeto de A clasificado por u.

Sea m un monomorfismo con codominio A y sea $f:C\longrightarrow A$. Se define la imagen inversa de $f^{-1}(m)$ de m bajo f por

(0.4) $f^{-1}(m)=\ker(\chi(m)\circ f)$

Así $f^{-1}(m)$ es caracterizado por el producto fibrado del diagrama

(0.5)
$$\begin{tikzcd} \mathrm{dom}(f^{-1}(m)) \arrow[r] \arrow[d, "f^{-1}(m)"] & 1 \arrow[d, "T"] \\ C \arrow[r, "\chi(m)\circ f"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

De esto se sigue que el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathrm{dom}(f^{-1}(m)) \arrow[rr] \arrow[dd, "f\circ f^{-1}(m)"'] \arrow[dr, "f'"] & & 1 \arrow[d] \\ & \mathrm{dom}(m) \arrow[r] \arrow[d, "m"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{P.F.}"] & 1 \arrow[d, "T"] \\ A \arrow[r] & A \arrow[r] & \Omega \end{tikzcd}$$ conmuta.

$\chi(m)$

$\therefore\ \exists! f':\mathrm{dom}(f^{-1}(m))\longrightarrow\mathrm{dom}(m)$ tal que $f\circ f^{-1}(m)=m\circ f'$, es decir, tal que el diagrama

$$
(0.6)\qquad
\begin{tikzcd}
\mathrm{dom}(f^{-1}(m)) \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "f^{-1}(m)"'] & \mathrm{dom}(m) \arrow[d, "m"] \\
C \arrow[r, "f"'] & A
\end{tikzcd}
\quad \text{conmuta.}
$$

Así el producto fibrado de (0.5) puede ser escrito como una composición de cuadrados conmutativos:

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{dom}(f^{-1}(m)) \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "f^{-1}(m)"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{II}"] & \mathrm{dom}(m) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{I}"] & 1 \arrow[d, "T"] \\
C \arrow[r, "f"'] & A \arrow[r, "\chi(m)"'] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

pero I es producto fibrado, así II también.

Por tanto en una categoría con clasificador de subobjetos, todo monomorfismo tiene un producto fibrado, o imagen inversa bajo algun morfismo.

(0.4) puede ser escrito:

$$(0.7)\qquad \chi(f^{-1}(m))=\chi(m)\circ f.$$

0.8 PROPOSICION.

Para todo monomorfismo m, n con codominio A, C respectivamente y todo $f:C\longrightarrow A$, son equivalentes:

(i) $n\simeq f^{-1}(m)$;

(ii) $\chi(n)=\chi(m)\circ f$;

(iii) $\exists g:\mathrm{dom}(n)\longrightarrow\mathrm{dom}(m)$ tal que

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{dom}(n) \arrow[r, "g"] \arrow[d, "n"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{P.F.}"] & \mathrm{dom}(m) \arrow[d, "m"] \\
C \arrow[r, "f"'] & A
\end{tikzcd}
$$

■

0.9 PROPOSICION.

Son equivalentes:

(i) $n\leq f^{-1}(m)$;

(ii) $\exists g:\mathrm{dom}(n)\longrightarrow\mathrm{dom}(m)$ tal que

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{dom}(n) \arrow[r, "g"] \arrow[d, "n"'] & \mathrm{dom}(m) \arrow[d, "m"] \\
C \arrow[r] & A
\end{tikzcd}
\quad \text{conmuta} \ ■
$$

0.10 PROPOSICION.

Pata todo monomorfismo m, n con codominio A y toda $f:C\longrightarrow A$, se tiene:

$$m\leq n \Rightarrow f^{-1}(m)\leq f^{-1}(n). \blacksquare$$

Dado un objeto A, se define el morfismo diagonal es dado por $\Delta_A=\langle 1_A,1_A\rangle:A\longrightarrow A\times A$. Δ_A es siempre mónico.

0.11 PROPOSICION.

Dado un diagrama formado por $n:dom(n)\rightarrowtail C$, $f:C\longrightarrow A$ y $g:C\longrightarrow A$, con n monomorfismo, entonces

$$f\circ n=g\circ n \Leftrightarrow n\leq\langle f,g\rangle^{-1}(\Delta_A).$$

Sean m, n monomorfismos con codominio A, se forma el producto fibrado

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, tail, "n^{-1}(m)"] \arrow[d, "m^{-1}(n)"'] & dom(m) \arrow[d, "n"] \\ dom(n) \arrow[r, tail, "m"'] & A \end{tikzcd} \qquad (*)$$

La composición $m\circ m^{-1}(n)$ (o, equivalentemente, $n\circ n^{-1}(m)$) es entonces un monomorfismo con codominio A; se denota este por $m\wedge n$ y se llama la intersección de m y n. Se sigue de (*) que, para todo monomorfismo p con codominio A,

(0.12) $p\leq m\wedge n \Leftrightarrow p\leq m$ y $p\leq n$.

Esto implica que $[m\wedge n]$ es el infimo del conjunto de subobjetos $\{[m],[n]\}$; de aquí $(Sub(A),\leq)$ es semilatis, esto es, un conjunto ordenado parcialmente en el cual todo par de elementos tiene un infimo.

Más aún, la intersección es preservada bajo imagen inversa, en el sentido siguiente, sea $f:C\longrightarrow A$,

(0.13) $f^{-1}(m\wedge n)\simeq f^{-1}(m)\wedge f^{-1}(n)$.

Los resultados obtenidos pueden ser reformulados en términos de las funciones características. Así por ejemplo, considerese (0.9). Dado $u:C\longrightarrow\Omega$, $v:A\longrightarrow\Omega$, $f:C\longrightarrow A$, se pone $n=ker(u)$, $m=ker(v)$ en (0.9) y se usa (0.7), que da

(0.14) $u\leq v\circ f \Leftrightarrow \exists g:dom(ker(u))\longrightarrow dom(ker(v))$ tal que

$$ker(v)\circ g=f\circ ker(u).$$

Ahora considerese (0.10). Tomamos funciones características y (0.3) junto con la definición de $\leq$,

$$\chi(m)\leq\chi(n) \Rightarrow \chi(f^{-1}(m))\leq\chi(f^{-1}(n)).$$

Escribimos $u=\chi(m)$, $v=\chi(n)$, se sigue de (0.7) que para todo $u,v:A\longrightarrow\Omega$ y todo $f:C\longrightarrow A$,

(0.15) $u\leq v \Rightarrow u\circ f\leq v\circ f$.

Regresamos a (0.11), primero se define $eq_A:A\times A\longrightarrow\Omega$ por $eq_A=\chi(\Delta_A)$. Dado $u:C\longrightarrow\Omega$ y $f,g:C\longrightarrow A$, tomamos $n=ker(u)$ en (0.11) y usamos (0.7) con (0.3), se obtiene

$$\begin{aligned} f\circ ker(u)=g\circ ker(u) &\Leftrightarrow ker(u)\leq\langle f,g\rangle^{-1}(\Delta_A) \\ &\Leftrightarrow u\leq\chi(\langle f,g\rangle^{-1}(\Delta_A)) \\ &\quad =\chi(\Delta_A)\circ\langle f,g\rangle \\ &\quad =eq_A\circ\langle f,g\rangle \end{aligned}$$

de aquí (0.16) $f\circ ker(u)=g\circ ker(u)$ sii $u\leq eq_A\circ\langle f,g\rangle$.

Se define $u\wedge v$ de dos morfismos $u,v:A\longrightarrow\Omega$ por $u\wedge v=\chi(ker(u)\cap ker(v))$.

Entonces (0.12) está dado, para todo morfismo $w:A\longrightarrow\Omega$,

(0.17) $w \leq u\wedge v \Leftrightarrow w \leq u$ y $w \leq v$,

y (0.13) viene a ser, para todo $f:C\longrightarrow A$ morfismo,

(0.18) $(u\wedge v)\circ f=u\circ f\wedge v\circ f$.

Se sigue de (0.17) que $u\wedge v$ es el <u>infimo</u> del conjunto $\{u,v\}$ con $\leq$, así que $(C(A,\Omega),\leq)$ es una semilatis. En particular, "$\wedge$" satisface las leyes de conmutatividad y asociatividad:

$u\wedge v=v\wedge u$ y $(u\wedge v)\wedge w=u\wedge(v\wedge w)$.

Tenemos también, para $u_1,..,u_n\in C(A,\Omega)$, $u_1\wedge..\wedge u_n$ el infimo de $\{u_1,..,u_n\}$.

Se define la función característica <u>maxima</u> T_A en A por $T_A=\chi(1_A):A\longrightarrow\Omega$. (Se escribirá T para T_A cuando A se sobre entienda). Note que $ker(T_A)=1_A$. T_A es llamada maxima porque se tiene el caso $u\leq T_A$ para todo $u:A\longrightarrow\Omega$.

0.19 PROPOSICION.

Sean $u,v:A\longrightarrow\Omega$ y $f,g:C\longrightarrow A$. Entonces

(*i*) $T_C=v\circ f\Leftrightarrow\exists g:C\longrightarrow dom(ker(v))$ tal que $f=ker(v)\circ g$.

(*ii*) $T=v\circ ker(u)\Leftrightarrow u\leq v$

(*iii*) $T_C=eq_A\circ\langle f,g\rangle\Leftrightarrow f=g$. ■

OBJETOS POTENCIA.

Continuamos con la analogía con *Set*. Sea A un conjunto, se puede formar su "conjunto potencia" PA, el conjunto de todos los subconjuntos de A. La correspondencia $Y \longmapsto \chi_Y$ entre subconjuntos de A y funciones características en A establece una biyección entre PA y la esponencial 2^A.

2^A está caracterizada por la siguiente propiedad. Para todo morfismo $f:A\times B\longrightarrow 2$, $\exists! f^{\wedge}:B\longrightarrow 2^A$ tal que

$$\begin{tikzcd} A\times B \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1_A\times f^{\wedge}"'] & 2 \arrow[d] \\ A\times 2^A \arrow[r, "e_A"'] & 2 \end{tikzcd}$$

conmuta, donde ev_A es el morfismo evaluación. Por tanto $PA\cong 2^A$, se sigue que PA satisface la misma condición, esto es, para todo conjunto A existe una función $e_A:A\times PA\longrightarrow 2$ tal que, para toda función $f:A\times B\longrightarrow 2$ $\exists! f^{\wedge}:B\longrightarrow PA$ con

$$\begin{tikzcd} A\times B \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1_A\times f^{\wedge}"'] & 2 \arrow[d] \\ A\bullet PA \arrow[r, "e_A"'] & 2 \end{tikzcd}$$

conmutativo. (Explicitamente, e_A está dado por $e_A(a,X)=1$ sii $a\in X$ y $f^{\wedge}$ está dado por $f^{\wedge}(b)=\{a\in A: f(a,b)=1\}$).

Ahora se extiende la idea para categorías en general. Sea C una categoría con productos finitos y clasificador de subobjetos Ω. Dado un C-objeto A, un objeto potencia para A es un par (PA,e_A) que consiste de un C-objeto A y un morfismo $e_A:A\times PA\longrightarrow\Omega$ (llamado el morfismo evaluación de A) tal que para todo $f:A\times B\longrightarrow\Omega$ $\exists! f^{\wedge}:B\longrightarrow PA$ (llamado la transpuesta de f) tal que

$$
\begin{tikzcd}
A\times B \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1_A\times f^\wedge"'] & \Omega \arrow[d] \\
A\times PA \arrow[r, "e_A"'] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

conmuta. (Por abuso de lenguaje, también se llamará PA al objeto potencia de A.) De aquí PA, si existe, es la exponencial Ω^A y es único salvo isomorfismo en el sentido usual. Entonces se dice que C tiene objetos potencia si (PA,e_A) existe para cada C-objeto A.

Notese que, para todo $g:B\longrightarrow PA$, se tiene

(0.20) $g=(e_A\circ(1_A\times g))^\wedge$

También que PA, como la exponencial Ω^A, puede ser descrito por la afirmación que, para todo B, existe un isomorfismo $C(A\times B,\Omega)\cong C(B,PA)$. Pero de aquí $C(A\times B,\Omega)\cong Sub(A\times B)$, se obtiene un isomorfismo $Sub(A\times B)\cong C(B,PA)$.

Se da a continuación la definición de topos.

DEFINICION. Un topos es una categoría con productos finitos, un clasificador de subobjetos y objetos potencia.

CAPITULO 1

TEORIA LOCAL DE LOS CONJUNTOS

En esta tesis se formulará una generalización de la teoría clásica de los conjuntos, la teoría local de los conjuntos; con la cual se puede construir una ''categoría de conjuntos'', exactamente igual que en el caso clásico, y demostrar además que dicha categoría, es un topos.

El objetivo principal de la tesis es demostrar que cada topos es equivalente a la categoría de los conjuntos, que corresponde a una teoría local de los conjuntos. Sin embargo, se obtienen también otros teoremas que son importantes por si mismos: Se introducirán a los conceptos de <u>interpretación</u> de una teoría local de los conjuntos, y de <u>validez</u> de una afirmación de dicha teoría (bajo una interpretación). Se verá, entonces, que tales interpretaciones son <u>confiables</u>, en el sentido de que todo teorema de una teoría local de los conjuntos es válida, bajo las interpretaciones que hacen válidos a sus axiomas. Y se verá también, que las interpretaciones son <u>completas</u>; en el sentido de que toda afirmación, de una teoría local de conjuntos, válida bajo toda interpretación, que haga válidos a sus axiomas, es necesariamente un teorema de la teoría.

Se hace referencia a un resultado de lógica:

Cualquier afirmación del lenguaje de una teoría de primer orden, es verdadera en todos los modelos de la teoría, si y sólo si la afirmación es teorema de la teoría.

En la teoría local de los conjuntos, el concepto de conjunto, que en la teoría clásica es un concepto primitivo, es remplazado por la noción de <u>tipo</u>. Los tipos son la formalización de clases naturales, o especies de los cuales los conjuntos pueden ser vistos como subespecies. La teoría de conjuntos resultante es local, en el sentido, de que la relación de inclusión es una relación binaria parcial, sólo se tendrá entre conjuntos del mismo tipo, es decir, se tendrá unicamente entre subespecies de la misma especie.

DEFINICION:

Un lenguaje local es un lenguaje que se construye con los mismos símbolos primitivos =, $\in$, {:} como la teoría clásica de conjuntos, en la cual las operaciones de productos y potencias de tipos pueden ser representadas, y la cual en suma contiene un tipo de "valor verdad" actuando como el rango de valores de " funciones características" en los tipos.

Una teoría local de los conjuntos queda determinada cuando se especifica una colección de axiomas, formulados dentro de un lenguaje local. A continuación, daremos los detalles.

Un lenguaje local $\mathcal{L}$ está determinado por las siguientes clases de símbolos

(S1) El símbolo 1, que se llamará tipo unitario, el símbolo Ω, que será llamado el tipo de los valores de verdad .

(S2) El tipo unitario, y el tipo de los valores de verdad son tipos básicos, pero podría haber otros tipos básicos: A, B, C, etcétera.

(S3) Una colección de símbolos (quizá vacía) f, g, h, ..., llamados símbolos funcionales.

Los símbolos llamados tipos de $\mathcal{L}$ se definen recursivamente como sigue:

(TS1) Todo tipo básico es un tipo.

(TS2) Si A_1, $A_2, \ldots, A_n$ son tipos, también lo es $A_1 \times \ldots \times A_n$, se entiende que si n=1, entonces $A_1 \times \ldots \times A_n$ es A_1, y si n=0, entonces $A_1 \times \ldots \times A_n$ es el tipo 1.

(TS3) Si A es un tipo, también lo es PA.

Los tipos $A_1 \times \ldots \times A_n$ y PA son llamados el <u>producto</u> de $A_1, \ldots, A_n$ y la <u>potencia</u> de A, respectivamente. Un tipo de la forma PA es llamado un de tipo potencia.

Para cada tipo A se supone que $\mathcal{L}$ contiene un conjunto de símbolos x_A, y_A, $z_A, \ldots$ llamados variables de tipo A. $\mathcal{L}$ contiene el símbolo $\star$.

Cada símbolo funcional de $\mathcal{L}$ es asignado a una <u>signatura</u> de la forma $A \longrightarrow B$, donde A y B son tipos. Suponemos que la colección de símbolos funcionales, correspondientes a una signatura dada, forman un conjunto.

Ahora se puede definir recursivamente a los términos de $\mathcal{L}$, y a sus tipos asociados, como sigue:

(T1) * es un término de tipo 1.

(T2) Para cada tipo A, las variables x_A, y_A, ... son términos de tipo A.

(T3) Si f es un símbolo funcional de signatura $A \longrightarrow B$, y τ es un término de tipo A, entonces $f(\tau)$ es un término de tipo B.

(T4) Si $\tau_1, \ldots, \tau_n$ son términos de tipos $A_1, \ldots, A_n$, entonces $<\tau_1, \ldots, \tau_n>$ es un término de tipo $A_1 \times \ldots \times A_n$, si n=1, entonces $<\tau_1, \ldots, \tau_n>$ es τ_1, mientras que si n=0, entonces $<\tau_1, \ldots, \tau_n>$ es *.

(T5) Si τ es un término de tipo $A_1 \times \ldots \times A_n$, y $1 \le i \le n$, entonces $(\tau)_i$ es un término de tipo A_i.

(T6) Si α es un término de tipo Ω, y x_A es una variable de tipo A, entonces $\{x_A : \alpha\}$ es un término de tipo PA.

(T7) Si σ, τ son términos del mismo tipo, entonces $\sigma = \tau$ es un término de tipo Ω.

(T8) Si σ, τ son términos de tipos A y PA respectivamente, entonces $\sigma \in \tau$ es un término de tipo Ω.

Un término de tipo Ω es llamado una fórmula.

Algunas veces, un término será introducido como $\tau(x)$; esto se hace para llevar la atención hacia la variable x, pero no implica que x ocurre necesariamente en τ.

Una presencia de una variable x en un término τ esta ligada cuando está aparece dentro de un contexto de la forma $\{x : \alpha\}$; de lo contrario la presencia es libre. Un término sin variables libres, se llama cerrado; una fórmula cerrada es llamada enunciado. Si τ y σ son términos, y x es una variable, del mismo tipo que σ, entonces escribimos $\tau(x/\sigma)$ (algunas veces $\tau(\sigma)$) para los términos obtenidos de τ, mediante la sustitución de cada presencia libre de x por σ. El término σ es libre para x en τ, si para toda variable libre y en σ, toda presencia libre de y en σ es una presencia libre de y en $\tau(x/\sigma)$. Si Γ es algún conjunto de fórmulas, se escribirá $\Gamma(x\ \sigma)$ para denotar a la colección de fórmulas de la forma $\tau(x/\sigma)$ con τ en Γ, y se dirá que σ es libre para x en Γ, si σ es libre para x, en toda fórmula en Γ. Sin embargo, también se dirá que x es libre en Γ si ésta es libre en algún miembro de Γ. Similarmente, para todas las variables $x_1,\ldots,x_n$ y términos $\sigma_1,\ldots,\sigma_n$ de los tipos apropiados, se escribirá $\tau(x_1/\sigma_1,\ldots,x_n/\sigma_n)$ o resumiendo $\tau(x / \sigma)$, para el resultado de sustituir σ_i por x_i en τ, para $1\le i\le n$. Esta notación se extiende naturalmente a $\Gamma(x_1/\sigma_1,\ldots,x_n/\sigma_n)$ o a $\Gamma(x / \sigma)$.

Las operaciónes lógicas se definen como sigue:

(L1) $\alpha \Leftrightarrow \beta$ para $\alpha = \beta$.

(L2) verdad para $* = *$.

(L3) $\alpha \wedge \beta$ para $\langle\alpha,\beta\rangle = \langle \text{verdad},\text{verdad}\rangle$.

(L4) $\alpha \Rightarrow \beta$ para $(\alpha \wedge \beta) = \alpha$.

(L5) $\forall x\alpha$ para $\{x :\alpha\} = \{x :\text{verdad}\}$.

(L6) falso para $\forall w.w$.

(L7) $\neg\alpha$ para $\alpha \Rightarrow$ falso.

(L8) $\alpha\vee\beta$ para $\forall w\ [(\alpha\Rightarrow w \wedge \beta\Rightarrow w)\Rightarrow w\ ]$.

(L9) $\exists x\alpha$ para $\forall w\ [\forall x(\alpha\Rightarrow w)\Rightarrow w\ ]$.

±Usualmente se escribirá $\forall x.\alpha$, $\exists x.\alpha$, para $\forall x\alpha$, $\exists x\alpha$.

En (L8) y (L9) w es una variable de tipo Ω que no ocurre en α o en β .

Un secuente (en $\mathcal{L}$) es una expresión de la forma $\Gamma:\alpha$ donde α es una fórmula y Γ es un (posiblemente vacío) conjunto finito de fórmulas. Se escribirá:

$\Gamma,\Delta:\alpha$ para $\Gamma\cup\Delta:\alpha$

$\beta,\Gamma:\alpha$ ó $\Gamma,\beta:\alpha$ para $\Gamma\cup \beta :\alpha$

$\beta_1,\ldots,\beta_n:\alpha$ para $\beta_1,\ldots,\beta_n :\alpha$

$:\alpha$ para $\emptyset:\alpha$.

Los axiomas básicos para la teoría local de los conjuntos son los siguientes:

t-Tautología $\alpha:\alpha$

u-Unidad $:x_1=*$

i-Igualdad $x=y,\ \alpha(z/x):\alpha(z/y)$ con x y y libres para z en α

p-Productos $:(\langle x_1,\ldots,x_n\rangle)_i=x_i$

$x=\langle(x)_1,\ldots,(x)_n\rangle$

c-Comprensión $:x\in\{x:\alpha\}\Leftrightarrow\alpha$

Las reglas de inferencia son:

Debilitamiento $\dfrac{\Gamma:\alpha}{\beta,\ \Gamma:\alpha}$ .....(de)

1

Corte $\dfrac{\Gamma:\alpha \quad \alpha,\ \Gamma:\beta}{\Gamma:\beta}$ (Toda variable libre de α es libre en Γ ó β), (co)

Sustitución $\dfrac{\Gamma:\beta}{\Gamma(x/\tau):\alpha(x/\tau)}$ (τ libre para x en Γ y α) (su)

Extensión $\dfrac{\Gamma:x\epsilon\sigma \leftrightarrow x\epsilon\tau}{\Gamma:\sigma=\tau}$ (x no es libre en Γ,σ, y τ) (ex)

Equivalencia $\dfrac{\alpha,\Gamma:\beta \quad \beta,\Gamma:\alpha}{\Gamma:\alpha\leftrightarrow\beta}$ (eq)

Si $\mathscr{S}$ es una colección de secuentes. Una "prueba" de $\mathscr{S}$ es un árbol finito donde los vértices son los secuentes correlacionados en tal forma que:

i) Todo secuente del principio es un axioma o miembro de $\mathscr{S}$ y el último secuente es llamado "conclusión" de la prueba.

ii) Todo secuente en el interior de la prueba es consecuencia directa de una de las reglas de inferencia asociada con secuentes inmediatamente anteriores a este.

Se dice que el secuente $\Gamma:\alpha$ es derivable de $\mathscr{S}$, y se escribe $\Gamma \vdash_{\mathscr{S}}\alpha$ probando que existe una prueba de $\mathscr{S}$ de la cual el secuente $\Gamma:\alpha$ es la conclusión. También se escribirá $\Gamma\vdash \alpha$ para $\Gamma\vdash_{\emptyset}$ y se dice que es $\Gamma:\alpha$ un <u>secuente válido</u>. Cuando $\emptyset\vdash_{\mathscr{S}}\alpha$ se escribirá $\vdash_{\mathscr{S}}\alpha$ y se dice que α es <u>probable</u> de $\mathscr{S}$. Si $\mathscr{S}\subseteq\mathscr{H}$ entonces $\vdash_{\mathscr{S}}\alpha$ implica $\vdash_{\mathscr{H}}\alpha$.

Aplicaciones sucesivas de la regla de corte serán escritas en la forma $\Gamma\vdash_{\mathscr{S}}\alpha_1\vdash_{\mathscr{S}}\alpha_2\ldots\vdash_{\mathscr{S}}\alpha_n$ produciendo $\Gamma\vdash_{\mathscr{S}}\alpha_n$.

Una teoría de conjuntos locales o teoría, en $\mathscr{L}$ es ahora formalmente definido como una colección $\mathscr{S}$ de secuentes la cual es cerrada bajo derivación. Esto es:

$\mathscr{S}$ es una teoría local si, para todo secuente $\Gamma:\alpha$, $\Gamma\vdash_{\mathscr{S}}\alpha$ si y solo si $(\Gamma:\alpha)$ esta en $\mathscr{S}$.

Toda colección de secuentes genera na teoría de conjuntos locales $\mathscr{S}$ dada por

$(\Gamma:\alpha)$ estan en $\mathscr{S}$ si y solo si $\Gamma\vdash_{\mathscr{S}}\alpha$.

$\mathscr{S}$ es un conjunto de axiomas para una teoría local de conjuntos $\mathscr{H}$ si $\mathscr{S}=\mathscr{H}$.

Dadas dos teorías locales $\mathscr{S}$, $\mathscr{H}$ en $\mathscr{L}$, $\mathscr{H}$ es una extensión de $\mathscr{S}$ si para todo secuente $\Gamma:\alpha$ de $\mathscr{L}$, $\Gamma\vdash_{\mathscr{S}}\alpha \Rightarrow \Gamma\vdash_{\mathscr{H}}\alpha$.

Una teoría local de los conjuntos es <u>consistente</u> si no se tiene $\vdash_{\mathscr{S}}$falso, es decir, falso no es probable de $\mathscr{S}$.

La teoría local en $\mathscr{L}$ generada por el conjunto vacío de axiomas es llamada <u>teoría de conjuntos locales pura</u> en $\mathscr{L}$ y se denota por L.

El lenguaje local sin tipos básicos o símbolos funcionales es llamado <u>lenguaje local puro</u> y es denotado por $\mathscr{L}_0$. La teoría local de los conjuntos pura en $\mathscr{L}_0$ es denotada por L_0.

LOGICA EN UNA TEORIA LOCAL DE LOS CONJUNTOS

(a) $\alpha=\beta\vdash\beta=\alpha$

Prueba:

$:\alpha=(\alpha)_1$

$$\dfrac{\dfrac{:\alpha=\alpha\ \ (p)}{\alpha=\beta:\alpha=\alpha\ \ (de)}\qquad \dfrac{\alpha=\beta,\phi(z)\equiv z=\alpha}{\alpha=\beta,\alpha=\alpha:\beta=\alpha\ \ (i)}}{\alpha:\beta:\beta=\alpha\ \ (co)}$$

(b) $\alpha=\beta,\beta=\gamma\vdash\alpha=\gamma$ (transitividad)

Prueba:

$$\dfrac{\alpha=\beta,\text{por(a) } \beta=\alpha,\phi(z)\equiv\gamma}{\beta=\alpha,\beta=\gamma:\alpha=\gamma\ \ (i)}$$ ■

1 CONJUNCION

1.1) $x=x',\ y=y'\vdash \langle x,y\rangle=\langle x',y'\rangle$

Demostración:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{:\langle x,y\rangle=\langle x,y\rangle\ \ (p)}{x=x':\langle x,y\rangle=\langle x,y\rangle\ \ (de)}\qquad x=x',\langle x,y\rangle=\langle x,y\rangle:\langle x,y\rangle=\langle x',y\rangle\ \ (i)}{x=x':\langle x,y\rangle=\langle x',y\rangle\ \ (co)}}{x=x',y=y':\langle x,y\rangle=\langle x',y\rangle\ \ (de)}\qquad \dfrac{\text{ANALOGO}}{x=x',y=y,\langle x,y\rangle=\langle x',y\rangle:\langle x,y\rangle=\langle x',y'\rangle}}{x=x',\ y=y':\langle x,y\rangle=\langle x',y'\rangle\ \ (co)}$$ ■

1.2.*i*) $\langle x,y\rangle=\langle x',y'\rangle\vdash x=x'$

Prueba:

$\gamma(z)\equiv x=(z)_1$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\langle x,y\rangle=\langle x',y'\rangle,\gamma(z/\langle x,y\rangle):\gamma(z/\langle x',y'\rangle)}{\langle x,y\rangle=\langle x',y'\rangle,x=(\langle x,y\rangle)_1:x=(\langle x',y'\rangle)_1}}{\langle x,y\rangle=\langle x',y'\rangle,x=x:x=x'\ \ (i)}\qquad \dfrac{\dfrac{:x=(\langle x\rangle)_1}{:x=x\ \ (p)}}{\langle x,y\rangle=\langle x',y'\rangle:x=x\ \ (de)}}{\langle x,y\rangle=\langle x',y'\rangle:x=x'\ \ (co)}$$ ■

1.2.*ii*) $<x,y>=<x',y'>\vdash y=y'$

Prueba: Análoga a la anterior. ■

1.3) $\alpha\vdash\alpha$

Prueba:

$\alpha:\alpha \quad (t)$ ■

1.4) $\vdash$verdad

Prueba:

$$\dfrac{:*=* \quad (\text{unidad})}{:\text{verdad} \quad (L2)}$$ ■

1.5.*i*) $\alpha\vdash\alpha=\text{verdad}$

Prueba:

$$\dfrac{\dfrac{\alpha:\alpha \quad (t)}{\text{verdad},\alpha:\alpha \quad (de)} \qquad \dfrac{:\text{verdad} \quad (1.4)}{\alpha,\alpha:\text{verdad} \quad (de)}}{\dfrac{\alpha:\alpha\Leftrightarrow\text{verdad} \quad (eq)}{\alpha:\alpha=\text{verdad} \quad (L1)}}$$ ■

1.5.*ii*) $\alpha=\text{verdad}\vdash\alpha$

Prueba:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{l}\gamma(z)=z\\ \gamma(z/\text{verdad}):\gamma(z/\alpha)\end{array}}{\alpha=\text{verdad},\text{verdad}:\alpha} \qquad \dfrac{:\text{verdad} \quad (1.4)}{\alpha=\text{verdad}:\text{verdad} \quad (de)}}{\alpha=\text{verdad}:\alpha \quad (co)}$$ ■

1.6) $\dfrac{\Gamma:\alpha \qquad \Gamma:\beta}{\Gamma:\alpha\wedge\beta}$

Prueba:

$$\dfrac{:<\alpha,\beta>=<(<\alpha,\beta>)_1,(<\alpha,\beta>)_2>}{:<\alpha,\beta>=<\alpha,\beta> \quad (p)}$$

$$\vdots$$

$$\dfrac{\beta=\text{verdad},\alpha=\text{verdad}:<\alpha,\beta>=<\alpha,\beta> \quad (de)}{\vdots}$$

$$\dfrac{\begin{array}{l}\alpha=\text{verdad},\beta=\text{verdad},\gamma(z_1,z_2)\equiv<\alpha,\beta>=<z_1,z_2>\\ \alpha=\text{verdad},\beta=\text{verdad},<\alpha,\beta>=<\alpha,\beta>:<\alpha,\beta>=<\text{verdad},\text{verdad}> \quad (i)\end{array}}{\dfrac{\alpha=\text{verdad},\beta=\text{verdad}:<\alpha,\beta>=<\text{verdad},\text{verdad}> \quad (co)}{\underline{\alpha=\text{verdad},\beta=\text{verdad}:\alpha\wedge\beta \quad (L)}}}$$

$\alpha=\text{verdad},\alpha,\beta=\text{verdad}:\alpha\wedge\beta$ (de)

$\alpha:\alpha=\text{verdad}$ (1.5.ι)

$\beta=\text{verdad},\alpha:\alpha=\text{verdad}$ (de)

$\alpha,\beta=\text{verdad}:\alpha\wedge\beta$ (co)

$\alpha,\beta,\beta=\text{verdad}:\alpha\wedge\beta$ (de)

$\beta:\beta=\text{verdad}$ (1.5.ι)

$\alpha,\beta:\beta=\text{verdad}$ (de)

$\alpha,\beta:\alpha\wedge\beta$ (co)

$\alpha,\beta,\Gamma:\alpha\wedge\beta$ (de)

$\Gamma:\alpha$ (hipótesis)

$\beta,\Gamma:\alpha$ (de)

$\Gamma,\beta:\alpha\wedge\beta$ (co)

$\Gamma:\beta$ (hipótesis)

$\Gamma:\alpha\wedge\beta$ (co)

■

1.7.ι) $\dfrac{\alpha,\Gamma:\gamma}{\alpha\wedge\beta,\Gamma:\gamma}$

Prueba:

$:\text{verdad}$ (1.4)

$\alpha,\langle\alpha,\beta\rangle=\langle\text{verdada},\text{verdad}\rangle:\text{verdad}$ (de)

$\gamma(z)\equiv(z)_1$

$\langle\text{verdad},\text{verdad}\rangle=\langle\alpha,\beta\rangle,\text{verdad}:\alpha$

$\langle\alpha,\beta\rangle=\langle\text{verdad},\text{verdad}\rangle:\alpha\leftrightarrow\text{verdad}$ (eq)

$\langle\alpha,\beta\rangle=\langle\text{verdad},\text{verdad}\rangle:\alpha=\text{verdad}$ (ex)

$\alpha\wedge\beta:\alpha=\text{verdad}$ (L3)

$\alpha=\text{verdad}:\alpha$ (1.5.ι)

$\alpha\wedge\beta:\alpha=\text{verdad}$ (L3)

$\alpha\wedge\beta,\alpha=\text{verdad}:\alpha$ (de)

$\alpha\wedge\beta:\alpha$ (co)

$\Gamma,\alpha\wedge\beta:\alpha$ (de)

$\alpha,\Gamma:\gamma$ (hip)

$$\dfrac{\alpha\wedge\beta,\Gamma,\alpha:\gamma\ \ (\text{de})}{\alpha\wedge\beta,\Gamma:\gamma\ \ (\text{co})}$$

■

1.7.ii) $\dfrac{\beta,\Gamma:\gamma}{\alpha\wedge\beta,\Gamma:\gamma}$

Prueba:Análoga a (1.7.i) ■

2.IMPLICACION

2.1) $\dfrac{\alpha,\Gamma:\beta}{\Gamma:\alpha\Rightarrow\beta}$

Prueba:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha:\alpha\ \ (\text{ta})}{\Gamma,\alpha:\alpha\ \ (\text{de})}}{\alpha\wedge\beta,\Gamma:\alpha\ \ (1.7.i)} \qquad \dfrac{\dfrac{\alpha:\alpha\ \ (\text{ta})}{\alpha,\Gamma:\alpha\ \ (\text{de})} \qquad \alpha,\Gamma:\beta\ \ (\text{hip})}{\alpha,\Gamma:\alpha\wedge\beta\ \ (1.6)}}{\dfrac{\Gamma:\alpha\wedge\beta\Leftrightarrow\alpha\ \ (\text{eq})}{\Gamma:\alpha\Rightarrow\beta\ \ (\text{L4})}}$$

■

2.2.i) $\dfrac{\Gamma:\alpha \qquad \beta,\Gamma:\gamma}{\alpha\Leftrightarrow\beta,\Gamma:\gamma}$

Prueba:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma:\alpha\ \ (\text{hip})}{\alpha\Leftrightarrow\beta,\Gamma:\alpha\ \ (\text{de})} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha=\beta,\phi(z)\equiv z}{\alpha=\beta,\alpha:\beta\ \ (\text{ig})}}{\alpha\Leftrightarrow\beta,\alpha:\beta\ \ (\text{L1})}}{\alpha\Leftrightarrow\beta,\Gamma,\alpha:\beta\ \ (\text{de})}}{\alpha\Leftrightarrow\beta,\Gamma:\beta\ \ (\text{co})} \qquad \dfrac{\beta,\Gamma:\gamma\ \ (\text{hip})}{\alpha\Leftrightarrow\beta,\beta,\Gamma:\gamma\ \ (\text{de})}}{\alpha\Leftrightarrow\beta,\Gamma:\gamma\ \ (\text{co})}$$

■

2.2.ii) Análogo ■

2.3.i) $\dfrac{\Gamma:\alpha \qquad \beta,\Gamma:\gamma}{\alpha\to\beta,\Gamma:\gamma}$

Prueba:

$$\dfrac{\Gamma:\alpha\ \text{(hip)} \qquad \dfrac{\beta,\Gamma:\gamma\ \text{(hip)}}{\alpha\wedge\beta,\Gamma:\gamma\ \ (1.7.ii)}}{\dfrac{\alpha\wedge\beta\leftrightarrow\alpha,\Gamma:\gamma\ \ (2.2.ii)}{\alpha\to\beta,\Gamma:\gamma\ \ \text{(L4)}}} \qquad \blacksquare$$

2.3.ii) $\dfrac{\Gamma:\alpha\to\beta}{\Gamma,\alpha:\beta}$

Prueba:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma:\alpha\to\beta\ \text{(hip)}}{\Gamma,\alpha:\alpha\to\beta\ \ \text{(de)}} \qquad \dfrac{\dfrac{\alpha:\alpha\ \ \text{(ta)}}{\Gamma,\alpha:\alpha\ \ \text{(de)}} \qquad \dfrac{\beta:\beta\ \ \text{(ta)}}{\Gamma,\alpha,\beta:\beta\ \ \text{(de)}}}{\alpha\to\beta,\Gamma,\alpha:\beta\ \ (2.3.i)}}{\Gamma,\alpha:\beta\ \ \text{(co)}} \qquad \blacksquare$$

3.CONJUGACION (continuación)

3.1.i) $\dfrac{\alpha,\beta:\gamma}{\alpha\wedge\beta:\gamma}$

Prueba:

$$\dfrac{\dfrac{\alpha:\alpha\ \ \text{(ta)}}{\alpha\wedge\beta:\alpha\ \ (1.7.i)} \qquad \begin{matrix}\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\beta:\beta\ \ \text{(ta)}}{\alpha\beta:\beta\ \ (1.7.ii)\ (\Gamma=\emptyset)} \qquad \dfrac{\dfrac{\alpha,\beta:\gamma\ \text{(hip)}}{\beta:\alpha\to\gamma\ \ (2.1)}}{\alpha\beta,\beta:\alpha\to\gamma\ \ \text{(de)}}}{\begin{matrix}\vdots\\ \alpha\beta:\alpha\to\Gamma\ \ \text{(co)}\end{matrix}}}{\alpha,\alpha\wedge\beta:\alpha\to\gamma\ \ \text{(de)}} \qquad \dfrac{\dfrac{\alpha:\alpha\ \ \text{(ta)} \qquad \dfrac{\gamma:\gamma\ \ \text{(ta)}}{\gamma,\alpha:\gamma\ \ \text{(de)}}}{\alpha\to\gamma,\alpha:\gamma\ \ (2.3.i)}}{\alpha\wedge\beta,\alpha\to\gamma,\alpha:\gamma\ \ \text{(de)}}}{\alpha\wedge\beta,\alpha:\gamma\ \ \text{(co)}}\\ \vdots\end{matrix}}{\alpha\wedge\beta:\gamma\ \ \text{(co)}} \qquad \blacksquare$$

3.1.*ii*) $\dfrac{\alpha\wedge\beta:\gamma}{\alpha,\beta:\gamma}$

Prueba:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha:\alpha\ \text{(ta)}}{\alpha,\beta:\alpha\ \text{(de)}} \qquad \dfrac{\beta:\beta\ \text{(ta)}}{\alpha,\beta:\beta\ \text{(de)}}}{\alpha,\beta:\alpha\wedge\beta\ \text{(1.6)}} \qquad \dfrac{\dfrac{\alpha\wedge\beta:\gamma\ \text{(hip)}}{\alpha,\alpha\wedge\beta:\gamma\ \text{(de)}}}{\alpha,\beta,\alpha\wedge\beta:\gamma\ \text{(de)}}}{\alpha,\beta:\gamma\ \text{(co)}}$$

■

Si $\Gamma=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$ se escribe $\alpha_1\wedge\ldots\wedge\alpha_n$ para $(\alpha_1\wedge(\alpha_2\wedge(\ldots\wedge(\alpha_{n-1}\wedge\alpha_n)\ldots)$.

3.2.*i*) $\dfrac{\Gamma:\alpha}{\wedge\Gamma:\alpha}$

Prueba: Por inducción sobre la cardinalidad de Γ

i) Para un solo elemento, la prueba esta dada por la tautología.

ii) Suponemos válido para menores que n, es decir, se cumple para el conjunto $\Gamma'=\{\alpha_2,\ldots,\alpha_n\}$, por demostrar para $\Gamma=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$

Prueba:

$$\begin{array}{l}
\Gamma:\alpha\ \text{(hip)}\\ \hline
\alpha_1,\Gamma':\alpha\ \text{(def)}\\ \hline
\Gamma':\alpha_1\to\alpha\ \text{(2.1)}\\ \hline
\wedge\Gamma':\alpha_1\to\alpha\ \text{(h. ind.)}\\ \hline
\alpha_1,\wedge\Gamma':\alpha\ (2.3.ii)\\ \hline
\alpha_1\wedge\wedge\Gamma':\alpha\ (3.1.i)\\ \hline
\wedge\Gamma:\alpha\ \text{(def)}
\end{array}$$

■

3.2.*ii*) $\dfrac{\wedge\Gamma:\alpha}{\Gamma:\alpha}$

Prueba: por inducción sobre la cardinalidad de Γ.

i) Para un solo elemento, la prueba esta dada por la tautología.

ii) Suponemos válida la afirmación para menores que n, es decir, se cumple para Γ' dada en la afirmación anterior, por demostrar para Γ también de la afirmación anterior.

Prueba:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\wedge\Gamma:\alpha \ \text{(hip)}}{\alpha_1\wedge\wedge\Gamma':\alpha \ \text{(def)}}}{\alpha_1,\wedge\Gamma':\alpha \ (3.1.\mathcal{U})}}{\wedge\Gamma':\alpha_1\Rightarrow\alpha \ (2.1)}}{\Gamma':\alpha_1\Rightarrow\alpha \ \text{(h.i.)}}}{\alpha_1,\Gamma':\alpha \ (2.3.\mathcal{U})}}{\Gamma:\alpha \ \text{(def)}} \quad \blacksquare$$

4. CUANTIFICADOR UNIVERSAL

4.1) $$\dfrac{\Gamma:\alpha\Leftrightarrow\beta}{\Gamma:\{x:\alpha\}=\{x:\beta\}}$$

Prueba:

$\gamma(z)\equiv(\ )_1$

$$\dfrac{\dfrac{\alpha=\beta,\alpha:\beta \ \text{(i)}}{\alpha=\beta,\Gamma,\alpha:\beta \ \text{(de)}} \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma:\alpha\Leftrightarrow\beta}{\Gamma:\alpha=\beta \ \text{(L1)}}}{\Gamma,\alpha:\alpha=\beta \ \text{(de)}}}{\Gamma,\alpha:\beta \ \text{(co)}}$$

.
.
.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{:x\in\{x:\alpha\}\Leftrightarrow\alpha \ \text{(c)}}{:x\in\{x:\alpha\}=\alpha \ \text{(L1)}}}{x\in\{x:\alpha\}:x\in\{x:\alpha\}=\alpha \ \text{(de)}} \qquad \begin{array}{c}\gamma(z)\equiv z \ \text{(i)}\\ x\in\{x:\alpha\}=\alpha,x\in\{x:\alpha\}:\alpha\end{array}}{x\in\{x:\alpha\}:\alpha \ \text{(co)}}$$

.
.
.

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma,\alpha:\beta}{x\in\{x:\alpha\},\Gamma,\alpha:\beta \ \text{(de)}} \qquad \dfrac{x\in\{x:\alpha\}:\alpha}{x\in\{x:\alpha\},\Gamma:\alpha \ \text{(de)}}}{x\in\{x:\alpha\},\Gamma:\beta \ \text{(co)}}$$

.
.
.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{:x\in\{x:\beta\}\Leftrightarrow\beta \ \text{(c)}}{:x\in\{x:\beta\}=\beta \ \text{(L1)}}}{:\beta=x\in\{x:\beta\} \ \text{(a)}}}{\beta:\beta=x\in\{x:\beta\} \ \text{(de)}} \qquad \begin{array}{c}\gamma(z)\equiv z \ \text{(i)}\\ \beta=\in\{x:\beta\},\beta:x\in\{x:\beta\}\end{array}$$

$\beta : x\in\{x:\beta\}$ (co)

$x\in\{x:\alpha\}, \Gamma, \beta : x\in\{x:\beta\}$ (de)

$x\in\{x:\alpha\}, \Gamma : x\in\{x:\beta\}$ (co)

ANALOGO

$x\in\{x:\beta\}, \Gamma : x\in\{x:\alpha\}$ (co)

$\Gamma : x\in\{x:\alpha\} \leftrightarrow x\in\{x:\beta\}$ (eq)

$\Gamma : \{x:\alpha\}=\{x:\beta\}$ (ex) ■

4.2) $\dfrac{\Gamma:\alpha}{\Gamma:\forall x\alpha}$

Prueba:
i) x no libre en Γ

$\alpha:\alpha=\text{verdad}$ (1.5.i)

$\alpha:\alpha\leftrightarrow\text{verdad}$ (L1)

$\Gamma,\alpha:\alpha\leftrightarrow\text{verdad}$ (de) $\qquad$ $\Gamma:\alpha$ (hip)

$\Gamma:\alpha\leftrightarrow\text{verdad}$ (co)

$\Gamma:\{x:\alpha\}=\{x:\text{verdad}\}$ (4.1)

$\Gamma:\forall x\alpha$ (L5)

ii) x no libre en α. v nueva variable

$\Gamma:\alpha$ (hip) $\qquad$ $\alpha:\alpha=\text{verdad}$ (1.5.i)

$\Gamma(x/v):\alpha(x/v)$ (s) $\qquad$ $\alpha:\alpha\leftrightarrow\text{verdad}$ (L1)

$\Gamma(x/v):\alpha$ (x no libre en α) $\qquad$ $\Gamma(x/v),\alpha:\alpha\leftrightarrow\text{verdad}$ (de)

$\Gamma(x/v):\alpha\leftrightarrow\text{verdad}$ (co)

$\Gamma(x/v):\{x:\alpha\}=\{x:\text{verdad}\}$ (4.1)

$\Gamma(x/v):\forall x\alpha$ (L5)

$\Gamma:\forall x\alpha$ (cambio a la variable original)

■

4.3) $\dfrac{\Gamma:\{x:\alpha\}=\{x:\beta\}}{\Gamma:\alpha\leftrightarrow\beta}$

Prueba:
Probando que x libre en almenos una de α, o β

$:x\in\{x:\beta\}\leftrightarrow\beta$ (c)

$:x\in\{x:\beta\}=\beta$ (L1)

$\gamma(z)\equiv z$

$x\in\{x:\beta\}:x\in\{x:\beta\}=\beta$ (de) $\quad x\in\{x:\beta\}=\beta, x\in\{x:\beta\}:\beta$ (i)

$x\in\{x:\beta\}:\beta$ (co)

$\{x:\alpha\}=\{x:\beta\}, x\in\{x:\alpha\}, x\in\{x:\beta\}:\beta$ (de)

$\gamma(z)\equiv x\in z$

$\{x:\alpha\}=\{x:\beta\}, x\in\{x:\alpha\}:x\in\{x:\beta\}$ (i)

$\{x:\alpha\}=\{x:\beta\}, x\in\{x:\alpha\}:\beta$ (co)

$\{x:\alpha\}=\{x:\beta\}, \alpha, x\in\{x:\alpha\}:\beta$ (de)

$:x\in\{x:\alpha\}\leftrightarrow\alpha$ (co)

$:x\in\{x:\alpha\}=\alpha$ (L1)

$:\alpha=x\in\{x:\alpha\}$

$\gamma(z)\equiv z$

$\alpha:\alpha=x\in\{x:\alpha\}$ (de) $\quad \alpha=x\in\{x:\alpha\}, \alpha:x\in\{x:\alpha\}$ (i)

$\alpha:x\in\{x:\alpha\}$ (co)

$\{x:\alpha\}=\{x:\beta\}, \alpha:x\in\{x:\alpha\}$ (de)

$\{x:\alpha\}=\{x:\beta\}, \alpha:\beta$ (co)

ANALOGO

$\{x:\alpha\}=\{x:\beta\}, \beta:\alpha$

$\{x:\alpha\}=\{x:\beta\}:\alpha\leftrightarrow\beta$ (eq)

$\Gamma:\{x:\alpha\}=\{x:\beta\}$ (hip) $\quad \Gamma, \{x:\alpha\}=\{x:\beta\}:\alpha\leftrightarrow\beta$ (de)

$\Gamma:\alpha\leftrightarrow\beta$ (co)

■

4.4) $\forall x\alpha\vdash\alpha$

Prueba: Probando x libre en α

$\alpha:\alpha=\text{verdad}$ (1.5.*i*)

$\forall x\alpha:\forall x\alpha$ (ta) $\quad \forall x\alpha=\forall x\alpha, \alpha:\alpha=\text{verdad}$ (de) $\quad \alpha=\text{verdad}:\alpha$ (1.5.*ii*)

$\forall x\alpha:\alpha=\text{verdad}$ (co) $\quad \forall x\alpha, \alpha=\text{verdad}:\alpha$ (de)

$\forall x\alpha:\alpha$ (co) ■

4.5) $\vdash\forall u\alpha(x/u)\leftrightarrow\forall x\alpha$

Prueba:u es libre para x (i.e. x es sustituible por u) y no libre en α

$:x\in\{u:\alpha(x/u)\}\leftrightarrow\alpha(x/u)$ (c)

$:x\in\{u:\alpha(x/u)\}\leftrightarrow\alpha$ (su)

$:x\in\{u:\alpha(x/u)\}=\alpha$ (L1)

$:x\in\{x:\alpha\}\leftrightarrow$ (c)

$:x\in\{x:\alpha\}=\alpha$ (L1)

$:x\in\{u:\alpha(x/u)\}=x\in\{x:\alpha\}$ (b)

$:x\in\{u:\alpha(x/u)\}\leftrightarrow x\in\{x:\alpha\}$ (L1)

$:\{u:\alpha(x/u)\}=\{x:\alpha\}$ (ex)

$\vdots$

$\forall x\alpha:\forall x\alpha$ (ta)

$\{x:\alpha\}=\{x:\text{verdad}\}:\{x:\alpha\}=\{x:\text{verdad}\}$

$:[\{u:\alpha(x/u)\}=\{u:\text{verdad}\}]=[\{x:\alpha=\{x:\text{verdad}\}]$

$:\forall u\alpha(x/u)=\forall x\alpha$ (L5)

$:\forall u\alpha(x/u)\leftrightarrow\forall x\alpha$ (L1) ■

4.6) $\dfrac{\Gamma:\alpha(x/u)}{\Gamma:\forall x\alpha}$

Prueba:
i)x es sustituible por u en α y no sustituible en Γ y no $\forall x\alpha$

$:\forall u\alpha(x/u)\leftrightarrow\forall x\alpha$ (4.5.i)

$:\forall u\alpha(x/u)=\forall x\alpha$ (L1)

$\forall u\alpha(x/u):\forall u\alpha(x/u)=\forall x\alpha$ (de)

$\gamma(z)\equiv z$

$\forall x\alpha(x/u)=\forall x\alpha,\forall u\alpha(x/u):\forall x\alpha$ (i)

$\forall u\alpha(x/u):\forall x\alpha$ (co)

$\vdots$

$\Gamma:\alpha(x/u)$ (hip)

$\Gamma:\forall u(x/u)$ (4.2.ii)

$\Gamma:\forall x\alpha$ (b)

ii)x no libre en α . u no libre en α. Dado por (4.2.ii) ■

4.7) $\dfrac{\alpha(x/\tau),\Gamma:\beta}{\forall x\alpha,\Gamma:\beta}$

(a)x sustituible por τ en α
(b)x libre en α y para toda variable lire de τ es libre en $\forall x\alpha$, Γ, β

Prueba:

$$\dfrac{\dfrac{\forall x\alpha:\alpha\ (4.4)}{\forall x\alpha:\alpha(x/\tau)\ (\text{sus}\ (\alpha))}\qquad \alpha(x/\tau),\Gamma:\beta\ (\text{hip})}{\forall x\alpha,\Gamma:\beta\ \ (\text{b})}\qquad \blacksquare$$

5.NEGACION

5.1) $\text{falso}\vdash\alpha$

Prueba:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{falso}:\text{falso}\ (\text{ta})}{\text{falso}:\forall w.w\ (\text{L6})}}{\text{falso}:w\ (4.4)}}{\text{falso}:\alpha}\qquad \blacksquare$$

5.2) $\dfrac{\alpha,\Gamma:\text{falso}}{\Gamma:\neg\alpha}$

Prueba:

$$\dfrac{\dfrac{\alpha,\Gamma:\text{falso}\ (\text{hip})}{\Gamma:\alpha\to\text{falso}\ (2.1)}}{\Gamma:\neg\alpha\ \ (\text{L7})}\qquad \blacksquare$$

5.3) $\dfrac{\Gamma:\alpha}{\neg\alpha,\Gamma:\text{falso}}$

Prueba:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma:\alpha\ (\text{hip})\qquad \dfrac{\text{falso}:\text{falso}\ (\text{ta})}{\text{falso},\Gamma:\text{falso}\ (\text{de})}}{\alpha\to\text{falso},\Gamma:\text{falso}\ (2.3.\iota)}}{\neg\alpha,\Gamma:\text{falso}\ (\text{L7})}\qquad \blacksquare$$

6.DISYUNCION

6.1) $\dfrac{\alpha,\Gamma:\gamma\qquad \beta,\Gamma:\gamma}{\alpha\vee\beta,\Gamma:\gamma}$

Prueba:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha,\Gamma:\gamma\ (\text{hip})}{\Gamma:\alpha\to\gamma\ (2.1)} \qquad \dfrac{\beta,\Gamma:\gamma\ (\text{hip})}{\Gamma:\beta\to\gamma\ (2.1)}}{\Gamma:\alpha\to\gamma\wedge(\beta\to\gamma)\ (1.6)} \qquad \dfrac{\gamma:\gamma\ (\text{ta})}{\Gamma,\gamma:\gamma\ (\text{de})}}{\dfrac{[(\alpha\to\gamma)\wedge(\beta\to\gamma)]\to\gamma,\Gamma:\gamma\ (2.3.i)}{\alpha\vee\beta,\Gamma:\gamma\ (\text{L8})}}$$ ■

6.2.i) $\dfrac{\Gamma:\alpha}{\Gamma:\alpha\vee\beta}$

Prueba:

$$\dfrac{\Gamma:\alpha\ (\text{hip}) \qquad w:w\ (\text{ta})}{\dfrac{\alpha\to w,\Gamma:w\ (2.3.i)}{\dfrac{(\alpha\to w)\wedge(\beta\to w),\Gamma:w\ (1.7.i)}{\dfrac{\Gamma:((\alpha\to w)\wedge(\beta\to w))\to w\ (2.1)}{\Gamma:\alpha\vee\beta\ (\text{L8})}}}}$$ ■

6.2.ii) $\dfrac{\Gamma:\beta}{\Gamma:\alpha\vee\beta}$

Prueba:Análoga a (6.2.i) ■

7.CUANTIFICACION EXISTENCIAL

7.1) $\alpha\vdash\exists x\alpha$ x libre en α

Prueba:

$$\dfrac{\alpha:\alpha\ (\text{ta}) \qquad w:w\ (\text{ta})}{\dfrac{\alpha\to w,\alpha:w\ (2.3.i)}{\dfrac{\forall x(\alpha\to w),\alpha:w\ (4.7)}{\dfrac{\alpha:\forall x(\alpha\to w)\to w\ (2.1)}{\alpha:\exists x\alpha\ (\text{L9})}}}}$$ ■

7.2) $\dfrac{\alpha,\Gamma:\beta}{\exists x\alpha,\Gamma:\beta}$ i)x no libre en Γ ó β
ii)x no libre en α

Prueba:

i)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha,\Gamma:\beta\ \text{(hip)}}{\Gamma:\alpha\to\beta\ \text{(2.1)}}}{\Gamma:\forall x(\alpha\to\beta)\ \text{(4.6)}} \qquad \dfrac{\beta:\beta\ \text{(ta)}}{\Gamma,\beta:\beta\ \text{(de)}}}{\forall x(\alpha\to\beta)\to\beta,\Gamma:\beta\ (2.3.\iota)}}{\exists x\alpha,\Gamma:\beta\ \text{(L9)}}$$

ii) u variable nueva. Entonces:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha,\Gamma:\beta\ \text{(hip)}}{\alpha,\Gamma(x/u):\beta(x/u)\ \text{(su)}} \qquad \alpha:\exists x\alpha\ \text{(7.1)}}{\exists x\alpha,\Gamma(x/u):\beta(x/u)}}{\exists x\alpha,\Gamma:\beta\ \text{(su)}}$$ ■

7.3) $\dfrac{\alpha(x/u),\Gamma:\beta}{\exists x\alpha,\Gamma:\beta}$

i) x sustituible por u en α y no libre en Γ ó β
ii) x no libre en α

Prueba:

i) $$\dfrac{\alpha(x/u),\Gamma:\beta}{\exists x\alpha(x/u),\Gamma:\beta}$$

ii) $$\dfrac{\exists x\alpha:\exists x\alpha(x/u)\ \text{(su)} \qquad \dfrac{\alpha(x/u),\Gamma:\beta\ \text{(hip)}}{\exists u\alpha(x/u),\Gamma:\beta\ \text{(7.2)}}}{\exists x\alpha,\Gamma:\beta\ \text{(b)}}$$ ■

7.4) $\dfrac{\Gamma:\alpha(x/\tau)}{\Gamma:\exists x\alpha}$

x sustituible por τ en α, x libre en α y para toda variable libre de τ es libre en Γ ó $\exists x\alpha$.

Prueba:

$$\dfrac{\Gamma:\alpha(x/\tau)\ \text{(hip)} \qquad \dfrac{\alpha:\exists x\alpha\ \text{(7.1)}}{\alpha(x/\tau):\exists x\alpha\ \text{(su)}}}{\Gamma:\exists x\alpha\ \text{(ta)}}$$ ■

7.5) $\vdash \exists u\alpha(x/u)\leftrightarrow\exists x\alpha$

i) u libre para x
ii) u no libre para α.

Prueba:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha(x/u):\alpha(x/u)\ \text{(ta)}}{\alpha(x/u):\exists x\alpha\ \text{(7.4)(i)}}}{\exists u\alpha(x/u):\exists x\alpha\ \text{(7.2)(ii)}} \qquad \dfrac{\dfrac{\alpha:\alpha(x/u)(x/u)\ \text{(ta)}}{\alpha:\exists u\alpha(x/u)\ \text{(7.4)}}}{\exists x\alpha:\exists u\alpha(x/u)\ \text{(7.2)}}}{:\exists u\alpha(x/u)\leftrightarrow\exists x\alpha\ \text{(eq)}} \qquad ■$$

7.6) $\vdash\exists x(\alpha\wedge\beta)\leftrightarrow\alpha\wedge\exists x\beta$ i) x libre en β
ii) x no libre en α.

Prueba:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha:\alpha\ \text{(ta)}}{\alpha\wedge\beta:\alpha\ \text{(1.7.i)}}}{\exists x(\alpha\wedge\beta):\alpha\ \text{(7.2)}} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\beta:\beta\ \text{(ta)}}{\alpha\wedge\beta:\beta\ \text{(1.7.ii)}} \qquad \dfrac{\beta:\beta\ \text{(ta)}}{\beta:\exists x\beta\ \text{(7.4)}}}{\alpha\wedge\beta:\exists x\beta\ \text{(b)}}}{\exists x(\alpha\wedge\beta):\exists x\beta\ \text{(7.2)}}}{\exists x(\alpha\wedge\beta):\alpha\wedge\exists x\beta\ \text{(1.6)}}$$

$$\dfrac{\begin{matrix}\exists x(\alpha\wedge\beta):\alpha\wedge\exists x\beta\ \text{(1.6)}\\ \vdots\end{matrix} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha:\alpha\ \text{(ta)}}{\beta,\alpha:\alpha\ \text{(de)}} \qquad \dfrac{\beta:\beta\ \text{(ta)}}{\alpha,\beta:\beta\ \text{(de)}}}{\alpha,\beta:\alpha\wedge\beta\ \text{(1.6)}}}{\alpha,\beta:\exists x(\alpha\wedge\beta)\ \text{(7.4)}}}{\alpha,\exists x\beta:\exists x(\alpha\wedge\beta)\ \text{(7.2)(ii)}}}{\alpha\wedge\exists x\beta:\exists x(\alpha\wedge\beta)\ \text{(3.1.i)}}}{:\exists x(\alpha\wedge\beta)\leftrightarrow\alpha\wedge\exists x\beta\ \text{(eq)}} \qquad ■$$

7.7)
$$\dfrac{\Gamma:\alpha \qquad \alpha,\Gamma:\beta}{\exists x_1(x_1=x_1),\ldots,\exists x_n(x_n=x_n),\Gamma:\beta}$$

$x_1,\ldots,x_n$ variables libres de α las cuales no tienen ocurrencias libres en Γ o β.

Prueba:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma:\alpha\ \text{(hip)}}{x_1=x_1,\ldots,x_n=x_n,\Gamma:\alpha\ \text{(de)}} \qquad \dfrac{\alpha,\Gamma:\beta\ \text{(hip)}}{x_1=x_1,\ldots,x_n=x_n,\alpha,\Gamma:\beta\ \text{(de)}}}{x_1=x_1,\ldots,x_n=x_n,\Gamma:\beta\ \text{(co)}}}{\exists x_1(x_1=x_1),\ldots,\exists x_n(x_n=x_n),\Gamma:\beta\ \text{(7.2)(n-veces)}} \qquad ■$$

7.8) $\dfrac{\Gamma:\alpha \quad \alpha,\Gamma:\beta}{\Gamma:\beta}$

Siempre que Λ es el tipo de una variable libre de α con ocurrencias no libres en Γ ó β, existe un término cerrado de tipo Λ.

Sea $x_1,\dots,x_n$ variables libres de α con ocurrencias no libres en Γ ó β, y sean $\Lambda_1,\dots,\Lambda_n$ sus respectivos tipos. Sea $\tau_1,\dots,\tau_n$ términos cerrados de tipos $\Lambda_1,\dots,\Lambda_n$. Entonces:

$:\tau=\tau$

Prueba:

$$\dfrac{\dfrac{\tau:\tau\ (ta) \qquad \tau:\tau\ (ta)}{:\tau\leftrightarrow\tau\ (eq)}}{:\tau=\tau\ (L1)}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{:\tau_1=\tau_1,\dots,:\tau_n=\tau_n\ (a)}{:\exists x_1(x_1=x_1),\dots,:\exists x_n(x_n=x_n)\ (7.4)}}{\Gamma:\exists x_1(x_1=x_1)\wedge\dots\wedge\exists x_n(x_n=x_n)} \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma:\alpha \qquad \alpha,\Gamma:\beta\ (hip)}{\exists x_1(x_1=x_1),\dots,\exists x_n(x_n=x_n),\Gamma:\beta}}{\exists x_1(x_1=x_1)\wedge\dots\wedge\exists x_n(x_n=x_n),\Gamma:\beta}}{\Gamma:\beta\ (a)}$$

■

a) $\vdash\alpha\rightarrow\neg\neg\alpha$

Prueba:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha:\alpha\ (ta)}{\neg\alpha,\alpha:\text{falso}\ (5.3)}}{\alpha:\neg\alpha\rightarrow\text{falso}\ (2.1)}}{\alpha:\neg(\neg\alpha)\ (L7)}}{:\alpha\rightarrow\neg(\neg\alpha)\ (5.3)}$$ ■

b.i) $\alpha\leftrightarrow\beta\vdash(\alpha\rightarrow\beta)\wedge(\beta\rightarrow\alpha)$

Prueba:

$\gamma(z)=z$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha=\beta,\alpha:\beta\ (i)}{\alpha=\beta:\alpha\rightarrow\beta\ (2.1)} \qquad \dfrac{\alpha=\beta,\beta:\alpha\ (i)}{\alpha=\beta:\beta\rightarrow\alpha\ (2.1)}}{\alpha=\beta:(\alpha\rightarrow\beta)\wedge(\beta\rightarrow\alpha)\ (1.6)}}{\alpha\leftrightarrow\beta:(\alpha\rightarrow\beta)\wedge(\beta\rightarrow\alpha)\ (L1)}$$ ■

b.*ii*) $(\alpha\to\beta)\wedge(\beta\to\alpha) \vdash \alpha\leftrightarrow\beta$

$\gamma(z)=z$ (i)

$(\alpha\wedge\beta)=\alpha, \alpha:(\alpha\wedge\beta)$ $\qquad$ $(\alpha\wedge\beta)=\beta, (\alpha\wedge\beta):\beta$ (i)

$(\alpha\wedge\beta)=\alpha, (\alpha\wedge\beta)=\beta, \alpha:(\alpha\wedge\beta)$ (de) $\qquad$ $\alpha, (\alpha\wedge\beta)=\alpha, (\alpha\wedge\beta)=\beta, (\alpha\wedge\beta):\beta$ (de)

$(\alpha\wedge\beta)=\alpha, (\alpha\wedge\beta)=\beta, \alpha:\beta$ (co)

$(\alpha\wedge\beta)\leftrightarrow\alpha, (\alpha\wedge\beta)\leftrightarrow\beta, \alpha:\beta$ (L1)

$\alpha\to\beta, \beta\to\alpha, \alpha:\beta$ (L4)

$(\alpha\to\beta)\wedge(\beta\to\alpha), \alpha:\beta$ (3.1.*i*)

ANALOGO

$(\alpha\to\beta)\wedge(\beta\to\alpha), \beta:\alpha$

$(\alpha\to\beta)\wedge(\beta\to\alpha):\alpha\leftrightarrow\beta$ (eq) ■

otra forma del b.*ii*)

$\alpha\to\beta:\alpha\to\beta$ (ta) $\qquad$ $\beta\to\alpha:\beta\to\alpha$ (ta)

$\alpha\to\beta, \alpha:\beta$ (2.3.*ii*) $\qquad$ $\beta\to\alpha, \beta:\alpha$

$(\alpha\to\beta)\wedge(\beta\to\alpha), \alpha:\beta$ (1.7.*i*) $\qquad$ $(\alpha\to\beta)\wedge(\beta\to\alpha), \beta:\alpha$

$(\alpha\to\beta)\wedge(\beta\to\alpha):\alpha\leftrightarrow\beta$ (eq) ■

b.*iii*) $:[(\alpha\to\beta)\wedge(\beta\to\alpha)]=\alpha\leftrightarrow\beta$

$(\alpha\to\beta)\wedge(\beta\to\alpha):\alpha\leftrightarrow\beta$ (b.*ii*) $\qquad$ $\alpha\leftrightarrow\beta:(\alpha\to\beta)\wedge(\beta\to\alpha)$ (b.*i*)

$:[(\alpha\to\beta)\wedge(\beta\to\alpha)]\leftrightarrow[\alpha\leftrightarrow\beta]$ (eq)

$:[(\alpha\to\beta)\wedge(\beta\to\alpha)]=[\alpha\leftrightarrow\beta]$ (L1) ■

c) $p, p\to q:q$

Prueba:

$p\to q:p\to q$ (ta)

$p, p\to q:q$ (2.3.*ii*) ■

1) $:\alpha\wedge\beta=\beta\wedge\alpha$

Prueba:

$\beta:\beta$ (ta) $\quad \alpha:\alpha$ (ta) $\quad \alpha:\alpha \quad \beta:\beta$

$\alpha,\beta:\alpha,\beta$ (ta) $\quad \alpha,\beta:\beta$ (de) $\quad \alpha,\beta:\alpha$ (de) $\quad \beta,\alpha:\beta,\alpha \quad \beta,\alpha:\alpha \quad \beta,\alpha:\beta$

$\alpha\wedge\beta:\alpha,\beta$ (3.1.ι) $\quad \alpha,\beta:\beta\wedge\alpha$ (1.6) $\quad \beta\wedge\alpha:\beta,\alpha \quad \beta,\alpha:\alpha\wedge\beta$

$\alpha\wedge\beta:\beta\wedge\alpha$ (b) $\quad \beta\wedge\alpha:\alpha\wedge\beta$ (b)

$\alpha\wedge\beta\leftrightarrow\beta\wedge\alpha$ (eq)

$\alpha\wedge\beta=\beta\wedge\alpha$ (L1) ■

2) $:(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma=\alpha\wedge(\beta\wedge\gamma)$

Prueba:

$\alpha,\beta,\gamma:\alpha,\beta,\gamma$ (ta) $\quad \beta:\beta$ (ta) $\quad \gamma:\gamma$ (ta)

$\alpha,\beta,\gamma:\alpha\wedge\beta\wedge\gamma$ (3.1.ι) $\quad \beta,\gamma:\beta$ (de) $\quad \beta,\gamma:\gamma$ (de)

$\alpha,\beta:\gamma\rightarrow(\alpha\wedge\beta\wedge\gamma)$ (2.1) $\quad \alpha:\alpha$ (ta) $\quad \beta,\gamma:\beta\wedge\gamma$ (1.6)

$\alpha\wedge\beta:\gamma\rightarrow(\alpha\wedge\beta\wedge\gamma)$ (3.1.ι) $\quad \beta,\gamma,\alpha:\alpha$ (de) $\quad \beta,\gamma,\alpha:\beta\wedge\gamma$ (de)

$(\alpha\wedge\beta),\gamma:\alpha\wedge\beta\wedge\gamma$ (2.3.$\mathcal{U}$) $\quad \beta,\gamma,\alpha:\alpha\wedge(\beta\wedge\gamma)$ (1.6)

$(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma:\alpha\wedge\beta\wedge\gamma$ (3.1.ι) $\quad \alpha\wedge\beta\wedge\gamma:\alpha\wedge(\beta\wedge\gamma)$ (3.1.ι) $\quad$ ANALOGO

$(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma:\alpha\wedge(\beta\wedge\gamma)$ (b) $\quad \alpha\wedge(\beta\wedge\gamma):(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma$ (b)

$(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma\leftrightarrow\alpha\wedge(\beta\wedge\gamma)$ (eq)

$(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma=\alpha\wedge(\beta\wedge\gamma)$ (L1) ■

3) $:\alpha\wedge(\alpha\vee\beta)=\alpha$

Prueba:

$\alpha:\alpha$ (ta)

$\alpha:\alpha$ (ta) $\quad \alpha:\alpha$ (ta) $\quad \alpha:\alpha\vee\beta$ (6.2.ι)

$\alpha\wedge(\alpha\vee\beta):\beta$ (1.7.ι) $\quad \alpha:\alpha\wedge(\alpha\vee\beta)$ (1.6)

$:\alpha\wedge(\alpha\vee\beta)\leftrightarrow$ (eq)

$:\alpha\wedge(\alpha\vee\beta)=\alpha$ (L1) ■

1') $:\alpha\vee\beta=\beta\vee\alpha$

Prueba:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha:\alpha\ (ta)}{\alpha:\beta\vee\alpha\ (6.2.\mathit{ii})} \qquad \dfrac{\beta:\beta\ (ta)}{\beta:\beta\vee\alpha\ (6.2.\mathit{i})}}{\alpha\vee\beta:\beta\vee\alpha\ (6.1)} \qquad \dfrac{\dfrac{\beta:\beta\ (ta)}{\beta:\alpha\vee\beta\ (6.2.\mathit{ii})} \qquad \dfrac{\alpha:\alpha\ (ta)}{\alpha:\alpha\vee\beta\ (6.2.\mathit{i})}}{\beta\vee\alpha:\alpha\vee\beta\ (6.1)}}{:\alpha\vee\beta\leftrightarrow\beta\vee\alpha\ (eq)}}{:\alpha\vee\beta=\beta\vee\alpha\ (L1)} \qquad \blacksquare$$

2'): $(\alpha\vee\beta)\vee\gamma=\alpha\vee(\beta\vee\gamma)$

Prueba:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha:\alpha\ (ta)}{\alpha:\alpha\vee(\beta\vee\gamma)\ (6.2.\mathit{i})} \qquad \dfrac{\dfrac{\beta:\beta\ (ta)}{\beta:\beta\vee\gamma\ (6.2.\mathit{i})}}{\beta:\alpha\vee(\beta\vee\gamma)\ (6.2.\mathit{ii})}}{\alpha\vee\beta:\alpha\vee(\beta\vee\gamma)\ (6.1)} \qquad \dfrac{\dfrac{\gamma:\gamma\ (ta)}{\gamma:\beta\vee\gamma\ (6.2.\mathit{ii})}}{\gamma:\alpha\vee(\beta\vee\gamma)\ (6.2.\mathit{ii})}}{\vdots}}{(\alpha\vee\beta)\vee\gamma:\alpha\vee(\beta\vee\gamma)\ (6.1)} \qquad \dfrac{\text{ANALOGO}}{\alpha\vee(\beta\vee\gamma):(\alpha\vee\beta)\vee\gamma}}{\dfrac{(\alpha\vee\beta)\vee\gamma\leftrightarrow\alpha\vee(\beta\vee\gamma)\ (eq)}{(\alpha\vee\beta)\vee\gamma=\alpha\vee(\beta\vee\gamma)\ (L1)}} \qquad \blacksquare$$

3'): $\alpha\vee(\alpha\wedge\beta)=\alpha$

Prueba:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha:\alpha\ (ta) \qquad \dfrac{\alpha:\alpha\ (ta)}{\alpha\wedge\beta:\alpha\ (1.7.\mathit{i})}}{\alpha\vee(\alpha\wedge\beta):\alpha\ (6.1)} \qquad \dfrac{\alpha:\alpha\ (ta)}{\alpha:\alpha\vee(\alpha\wedge\beta)\ (6.2.\mathit{i})}}{\alpha\vee(\alpha\wedge\beta)\leftrightarrow\alpha\ (eq)}}{\alpha\vee(\alpha\wedge\beta)=\alpha\ (L1)} \qquad \blacksquare$$

11. PROPOCICION

11.i) $\vdash X=Y\leftrightarrow\forall x(x\in X\leftrightarrow X\in Y)$

Prueba:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{X=Y,\alpha(z)=x\in Z}{X=Y,x\in X:x\in Y\ (i)} \quad \dfrac{Y=X,\alpha(z)=x\in Z}{X=Y,x\in Y:x\in X\ (i)}}{X=:x\in X\leftrightarrow x\in Y\ (eq)}}{X=Y:\forall x(x\in X\leftrightarrow x\in Y)\ (4.2)} \quad \dfrac{\dfrac{x\in X\leftrightarrow x\in Y:x\in X\leftrightarrow x\in Y\ (ta)}{x\in X\leftrightarrow x\in Y:X=Y\ (ex)}}{\forall x(x\in X\leftrightarrow x\in Y):X=Y\ (4.7)}
$$

$$
\overline{:[X=Y]\leftrightarrow\forall x(x\in X\leftrightarrow x\in Y)\ (eq)} \quad \blacksquare
$$

11.ii.a) $\vdash X\subseteq X$

Prueba:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{x\in X:x\in X\ (ta)}{:x\in X\rightarrow x\in X\ (2.1)}}{:\forall x(x\in X\rightarrow x\in X)\ (4.2.ii)}}{:\forall x\in X.x\in X\ (def)} \quad \blacksquare
$$

11.ii.b) $\vdash(X\subseteq Y\wedge Y\subseteq X)\rightarrow X=Y$

Prueba:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x\in X\rightarrow x\in Y:x\in X\rightarrow x\in Y\ (ta)}{\forall x(x\in X\rightarrow x\in Y):x\in X\rightarrow x\in Y\ (4.7)}}{X\subseteq Y:x\in X\rightarrow x\in Y\ (10.i)}}{X\subseteq Y\wedge Y\subseteq X:x\in X\rightarrow x\in Y\ (1.7.i)}}{X\subseteq Y\wedge Y\subseteq X,x\in X:x\in Y\ (2.3.ii)} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x\in Y\rightarrow x\in X:x\in Y\rightarrow x\in X\ (ta)}{\forall x(x\in Y\rightarrow x\in Y):x\in Y\rightarrow x\in X\ (4.7)}}{Y\subseteq X:x\in Y\rightarrow x\in X\ (10.i)}}{X\subseteq Y\wedge Y\subseteq X:x\in Y\rightarrow x\in X\ (1.7.i)}}{X\subseteq Y\wedge Y\subseteq X,x\in Y:x\in X\ (2.3.ii)}
$$

$$
\dfrac{\dfrac{\overline{X\subseteq Y\wedge Y\subseteq X:x\in X\leftrightarrow x\in Y\ (eq)}}{X\subseteq Y\wedge Y\subseteq X:X=Y\ (ex)}}{:(X\subseteq Y\wedge Y\subseteq X)\rightarrow X=Y\ (2.1)} \quad \blacksquare
$$

11.ii.c) $\vdash(X\subseteq Y\wedge Y\subseteq Z)\rightarrow X\subseteq Z$

Prueba:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{x\in X\rightarrow x\in Y:x\in X\rightarrow x\in Y\ (ta)}{x\in X,x\in X\rightarrow x\in Y:x\in Y\ (2.3.ii)}}{x\in Y\rightarrow x\in Z,x\in X,x\in X\rightarrow x\in Y:x\in Y\ (de)} \quad \dfrac{\dfrac{x\in Y\rightarrow x\in Z:x\in Y\rightarrow x\in Z\ (ta)}{x\in Y,x\in Y\rightarrow x\in Z:x\in Z\ (2.3.ii)}}{x\in X,x\in Y,x\in Y\rightarrow x\in Z,x\in X\rightarrow x\in Y:x\in Z\ (de)}}{x\in X\rightarrow x\in Y,x\in Y\rightarrow x\in Z,x\in X:x\in Z\ (co)}
$$

$$\frac{\frac{\frac{\frac{(x\in X\Rightarrow x\in Y),(x\in Y\Rightarrow x\in Z):x\in X\Rightarrow x\in Z \quad (2.1)}{:(x\in X\Rightarrow x\in Y\wedge x\in Y\Rightarrow x\in Z)\Rightarrow(x\in X\Rightarrow x\in Z) \quad (2.1)}}{(x\in X\Rightarrow x\in Y)\wedge(x\in Y\Rightarrow x\in Z):x\in X\Rightarrow x\in Z \quad (2.3.ii)}}{(x\in X\Rightarrow x\in Y),(x\in Y\Rightarrow x\in Z):\forall x(x\in X\Rightarrow x\in Z) \quad (4.6)(3.1.ii)}}{\forall x(x\in X\Rightarrow x\in Y),\forall x(x\in Y\Rightarrow x\in Z):X\subseteq Z \quad (4.7)}$$

$$\frac{\frac{\frac{\forall x\in X.x\in Y,\forall x\in Y.x\in Z:X\subseteq Z \quad (\text{def})}{X\subseteq Y,Y\subseteq Z:X\subseteq Z \quad (10.i)}}{X\subseteq Y\wedge Y\subseteq Z:X\subseteq Z \quad (3.1.i)}}{:(X\subseteq Y\wedge Y\subseteq Z)\Rightarrow X\subseteq Z \quad (2.1)} \quad \blacksquare$$

11.*iii*) $\vdash Z\subseteq X\cap Y\Leftrightarrow Z\subseteq X\wedge Z\subseteq Y$

Prueba:

$$\frac{\frac{\frac{x\in X:x\in X \quad (\text{ta})}{x\in X,x\in Y,x\in Z:x\in X \quad (\text{de})}}{x\in X\wedge x\in Y,x\in Z.x\in X \quad (3.1.i)}}{x\in X\cap Y,x\in Z:x\in X \quad (10.ii)}$$

$$\frac{\frac{\frac{\frac{x\in Z:x\in Z \quad (\text{ta}) \qquad x\in X\cap Y,x\in Z:x\in X \quad (10.ii)}{x\in Z\Rightarrow x\in X\cap Y,x\in Z:x\in X \quad (2.3.i)}}{x\in Z\Rightarrow x\in X\cap Y:x\in Z\Rightarrow x\in X \quad (2.1)}}{\forall x\in Z.x\in X\cap Y:\forall x\in Z.x\in X \quad (4.6)(4.7)}}{Z\subseteq X\cap Y:Z\subseteq X} \qquad \frac{\text{ANALOGO}}{Z\subseteq X\cap Y:Z\subseteq Y}$$

$$\frac{Z\subseteq X\cap Y:Z\subseteq X \qquad Z\subseteq X\cap Y:Z\subseteq Y}{Z\subseteq X\cap Y:Z\subseteq X\wedge Z\subseteq Y \quad (1.6)\ (*)}$$

$$\frac{\frac{\frac{x\in Z.x\in X:x\in Z.x\in X \quad (\text{ta})}{x\in Z.x\in X,x\in Z:x\in x \quad (2.3.ii)}}{x\in Z.x\in X,x\in Z.x\in Y,x\in Z:x\in X \quad (\text{de})} \qquad \frac{\text{ANALOGO}}{x\in Z.x\in X,x\in Z.x\in Y,x\in Z:x\in Y}}{x\in Z.x\in X,x\in Z.x\in Y,x\in Z:x\in X\wedge x\in Y \quad (1.6)}$$

$$\frac{\frac{\frac{x\in Z.x\in X,x\in Z.x\in Y,x\in Z:x\in X\wedge x\in Y \quad (1.6)}{x\in Z.x\in X,x\in Z.x\in Y:x\in Z.x\in X\wedge x\in Y \quad (2.1)}}{x\in Z.x\in X,x\in Z.x\in Y:x\in Z.x\in X\cap Y \quad (\text{def})}}{\frac{x\in Z.x\in X,x\in Z.x\in Y:\forall x\in Z.x\in X\cap Y \quad (4.6)}{\forall x\in Z.x\in X,\forall x\in Z.x\in Y:Z\subseteq X\cap Y \quad (4.7)(10.i)}}$$

$Z\subseteq X, Z\subseteq Y : Z\subseteq X\cap Y$ (10.ι)

$Z\subseteq X\wedge Z\subseteq Y : Z\subseteq X\cap Y$ (3.1.ι) $Z\subseteq X\cap Y : Z\subseteq X\wedge Z\subseteq Y$ (*)

$: Z\subseteq X\cap Y \leftrightarrow Z\subseteq X\wedge Z\subseteq Y$ (eq) ■

11.ιv) $\vdash X\cup Y\subseteq Z\leftrightarrow X\subseteq Z\wedge Y\subseteq Z$

Prueba:

$x\in X : x\in X$ (ta)

$x\in X : x\in X\vee x\in Y$ (6.2) $x\in Z : x\in Z$ (ta)

$x\in X : x\in X\cup Y$ (def) $x\in Z, x\in X : x\in Z$ (de)

$x\in X\cup Y . x\in Z, x\in X : x\in Z$ (2.3.ι)

$x\in X\cup Y . x\in Z : x\in X . x\in Z$ (2.1)

$\forall x\in X\cup Y . x\in Z : \forall x\in X . x\in Z$ (4.6)(4.7)   ANALOGO

$X\cup Y\subseteq Z : X\subseteq Z$ (10.ι) $X\cup Y\subseteq Z : Y\subseteq Z$

$X\cup Y\subseteq Z : X\subseteq Z\wedge Y\subseteq Z$ (1.6) (*)

$x\in X . x\in Z : x\in X . x\in Z$ (ta)

$x\in X, x\in X . x\in Z : x\in Z$ (2.3.$\iota\iota$) $x\in Y, x\in Y . x\in Z : x\in Z$ (mp)

$x\in X, x\in X . x\in Z, x\in Y . x\in Z : x\in Z$ (de) $x\in Y, x\in X . x\in Z, x\in Y . x\in Z : x\in Z$ (de)

$x\in X . x\in Z, x\in Y . x\in Z, x\in X\vee x\in Y : x\in Z$ (6.1)

$x\in X . x\in Z, x\in Y . x\in Z, x\in X\cup Y : x\in Z$ (10.$\iota\iota\iota$)

$x\in X . x\in Z, x\in Y . x\in Z : x\in X\cup Y . x\in Z$ (2.1)

$\forall x\in X . x\in Z, \forall x\in Y . x\in Z : \forall x\in X\cup Y . x\in Z$ (4.6)(4.7)

$X\subseteq Z, Y\subseteq Z : X\cup Y\subseteq Z$ (10.ι)

$X\subseteq Z\wedge Y\subseteq Z : X\cup Y\subseteq Z$ (3.1.ι) $X\cup Y\subseteq Z : X\subseteq Z\wedge Y\subseteq Z$ (*)

$: X\cup Y\subseteq Z\leftrightarrow X\subseteq Z\wedge Y\subseteq Z$ (eq) ■

11.v) $\vdash x_A\in\mathcal{U}_A$

Prueba:

$x_A\in\{x_A : \text{verdad}\} : x_A\in\{x_A : \text{verdad}\}$ (ta)

$\text{verdad}, x_A\in\{x_A : \text{verdad}\} : x_A\in\{x_A : \text{verdad}\}$ (de)

$:\text{verdad}\ (1.4)$

$x_A\in\{x_A:\text{verdad}\}:\text{verdad}\ (\text{de})$

$x_A\in\{x_A:\text{verdad}\},x_A\in\{x_A:\text{verdad}\}:\text{verdad}$

$x_A\in\{x_A:\text{verdad}\}:x_A\in\{x_A:\text{verdad}\}\leftrightarrow\text{verdad}\ (\text{eq})$

$x_A\in\{x_A:\text{verdad}\}:x_A\in\{x_A:\text{verdad}\}=\text{verdad}\ (\text{ex})$

$x_A\in\{x_A:\text{verdad}\}:x_A\in\{x_A:\text{verdad}\}\ (\text{ta})$

$x_A\in\{x_A:\text{verdad}\}:x_A\in\{x_A:\text{verdad}\}=\text{verdad}\wedge x_A\in\{x_A:\text{verdad}\}$

$x_A\in\{x_A:\text{verdad}\}:x_A\in\{x_A:\text{verdad}\}\ (\text{ta})$

$x_A\in\{x_A:\text{verdad}\}=\text{verdad}\wedge x_A\in\{x_A:\text{verdad}\}:x_A\in\{x_A:\text{verdad}\}$

$(x_A\in\{x_A:\text{verdad}\}=\text{verdad})\wedge(x_A\in\{x_A:\text{verdad}\})\leftrightarrow x_A\in\{x_A:\text{verdad}\}$

$:x_A\in\{x_A:\text{verdad}\}\leftrightarrow\text{verdad}\ (\text{c})$ $\quad :x_A\in\{x_A:\text{verdad}\}=\text{verdad}\rightarrow x_A\in\{x_A:\text{verdad}\}$

$:x_A\in\{x_A:\text{verdad}\}=\text{verdad}\ (\text{ex})$ $\quad x_A\in\{x_A:\text{verdad}\}=\text{verdad}:x_A\in\{x_A:\text{verdad}\}$

$:x_A\in\{x_A:\text{verdad}\}\ (\text{co})$

$:x_A\in\mathcal{U}_A\ (10.iv)$ ■

11.vi) $\vdash\neg(x_A\in\emptyset_A)$

Prueba:

$:x_A\in\{x_A:\text{falso}\}\leftrightarrow\text{falso}\ (\text{c})$

$:x_A\in\{x_A:\text{falso}\}=\text{falso}\ (\text{ex})$

$x_A\in\{x_A:\text{falso}\}:x_A\in\{x_A:\text{falso}\}=\text{falso}\ (\text{de})$

$x_A\in\{x_A:\text{falso}\}=\text{falso},x_A\in\{x_A:\text{falso}\}:\text{falso}\ (\text{i})$

$x_A\in\{x_A:\text{falso}\}:\text{falso}\ (\text{co})$

$x_A\in\emptyset_A:\text{falso}\ (10.ii)$

$:x_A\in\emptyset_A\rightarrow\text{falso}\ (2.1)$

$:\neg(x_A\in\emptyset_A)\ (L7)$ ■

11.vii) $\vdash X\in PY\leftrightarrow X\subseteq Y$

Prueba:

$$\dfrac{\dfrac{:x\in\{x:x\subseteq Y\}\leftrightarrow x\subseteq Y\ \ (c)}{:X\in\{x:x\subseteq Y\}\leftrightarrow X\subseteq Y\ \ (su)}}{:X\in PY\leftrightarrow X\subseteq Y\ \ (def)}\qquad\blacksquare$$

11.viii) $\vdash X\subseteq\cap\mathcal{U}\leftrightarrow\forall u\in\mathcal{U}.X\subseteq u$

Prueba:

$$\dfrac{\dfrac{\forall u\in\mathcal{U}.X\subseteq u:\forall u\in\mathcal{U}.X\subseteq u\ \ (ta)}{X\subseteq\cap\mathcal{U}:\forall u\in\mathcal{U}.X\subseteq u\ \ (10.viii)}\qquad\dfrac{\forall u\in\mathcal{U}.X\subseteq u:\forall u\in\mathcal{U}.X\subseteq u\ \ (ta)}{\forall u\in\mathcal{U}.X\subseteq u:X\subseteq\cap\mathcal{U}\ \ (10.viii)}}{:X\subseteq\cap\mathcal{U}\leftrightarrow\forall u\in\mathcal{U}.X\subseteq u\ \ (eq)}\qquad\blacksquare$$

11.ix) $\vdash\cup\mathcal{U}\subseteq X\leftrightarrow\forall u\in\mathcal{U}.u\subseteq X$

Prueba:

$$\dfrac{\dfrac{:\cup\mathcal{U}\in PX=\cup\mathcal{U}\subseteq Y\ \ (11.vii)(L1)\qquad :\forall u\in\mathcal{U}.u\subseteq X=\cup\mathcal{U}\in PX\ \ (def)(L1)}{:\cup\mathcal{U}\subseteq X=\forall u\in\mathcal{U}.u\subseteq X\ \ (c)}}{:\cup\mathcal{U}\subseteq X\leftrightarrow\forall u\in\mathcal{U}.u\subseteq X\ \ (L1)}\qquad\blacksquare$$

11.x) $\vdash x\in\{y\}\leftrightarrow x=y$

Prueba:

$:x\in\{x:(x=y)\}\leftrightarrow(x=y)\ \ (c)$ $\blacksquare$

11.xi) $\vdash\alpha\rightarrow\tau\in\{\tau:\alpha\}$

Prueba:

$$\dfrac{\dfrac{:\tau\in\{\tau:\alpha\}\leftrightarrow\alpha\ \text{(c)}}{\alpha:\tau\in\{\tau:\alpha\}\leftrightarrow\alpha\ \text{(ex)(de)}} \qquad \tau\in\{\tau:\alpha\}=\alpha,\alpha:\tau\in\{\tau:\alpha\}\ \text{(i)}}{\dfrac{\alpha:\tau\in\{\tau:\alpha\}\ \text{(co)}}{:\alpha\to\tau\in\{\tau:\alpha\}\ \text{(2.1)}}} \qquad \blacksquare$$

Aquí (*i*) es el Axióma de Extensión, (*iv*) el Axióma de Uniones Binarias; (*vi*) el Axióma del Conjunto Vacío, (*vii*) el Axióma del Conjunto Potencia, (*ix*) el Axióma de Uniomes y (x) el Axióma del Singulete. Estos , juntos con el Axióma de Comprensión forman los Axiómas del núcleo para la teoría de conjuntos en $\mathcal{L}$. La teoría de conjuntos es local porque algunas de las operaciones conjunto-teóricas, es decir, intersección y unión, pueden solo ser representado en conjuntos del mismo tipo (localmente), más aun, las variables son restringidas al rango solo sobre tipos dados, en contraste con la situación en la teoría de conjuntos clásica, donde se les permite un rango (alcance) global sobre un universo de discurso.

LA CATEGORIA DE CONJUNTOS DETERMINADA POR UNA TEORIA LOCAL DE LOS CONJUNTOS

Ahora se demostrará que toda teoría local de los conjuntos $\mathcal{S}$ determina una categoría $\mathcal{C}(\mathcal{S})$, esencialmente de la misma forma que la teoría de los conjuntos clásica determina a la categoría $\mathcal{S}et$ de conjuntos. Como en el caso clásico, la categoría asociada $\mathcal{C}(\mathcal{S})$ se resulta un topos.

Sea $\mathcal{S}$ una teoría local de los conjuntos en un lenguaje local $\mathcal{L}$. Definimos la relación $\approx_{\mathcal{S}}$ en la colección de $\mathcal{L}$-conjuntos por $X \approx_{\mathcal{S}} Y$ si y sólo si $\vdash_{\mathcal{S}} X=Y$.

$\approx_{\mathcal{S}}$ es una relación de equivalencia. Un $\mathcal{S}$-conjunto está definido como una clase de equivalencia $[X]_{\mathcal{S}}$ de $\mathcal{L}$-conjuntos bajo la relación $\approx_{\mathcal{S}}$. Usualmente se identificará al ℓ-conjunto X con el correspondiente $\mathcal{S}$-conjunto $[X]_{\mathcal{S}}$. (Así un $\mathcal{S}$-conjunto a menudo se llamará un conjunto) Nótese entonces que X=Y (es decir, X y Y denotarán el mismo $\mathcal{S}$-conjunto) si y sólo si $\vdash_{\mathcal{S}} X=Y$.

Un $\mathcal{S}$-morfismo $X \longrightarrow Y$ es una terna de $\mathcal{S}$-conjuntos (f,X,Y) con $\vdash_{\mathcal{S}} f \in Y^X$. Simplemente se escribirá f para (f,X,Y), y se llamará f un $\mathcal{S}$-morfismo. X y Y son respectivamente, el dominio y codominio de f, que se denotan mediante dom(f) y el cod(f). Un $\mathcal{S}$-morfismo será llamado un morfismo. Ahora se mostrará que la colección de $\mathcal{S}$-conjuntos, y los morfismos, forman una categoría.

12. LEMA Sea $f:X \longrightarrow Y$, $g:X \longrightarrow Y$. Entonces
$f=g$ si sólo si $\vdash_{\mathcal{S}} \langle x,y\rangle \in f \leftrightarrow \langle x,y\rangle \in g$
Demostración:$\Rightarrow$] Supongamos: $f=g$,es decir, $\vdash_{\mathcal{S}} f=g$

$$\dfrac{:f=g\ (\text{hip}) \qquad \dfrac{f=g,\langle x,y\rangle\in f:\langle x,y\rangle\in g\ (\text{i}) \quad f=g,\langle x,y\rangle\in g:\langle x,y\rangle\in f\ (\text{i})}{f=g:\langle x,y\rangle\in f\leftrightarrow\langle x,y\rangle\in g\ (\text{eq})}}{:\langle x,y\rangle\in f\leftrightarrow\langle x,y\rangle\in g\ (\text{b})}$$

$\leftarrow]$

$$\dfrac{:\langle x,y\rangle\in f\leftrightarrow\langle x,y\rangle\in g}{:f=g\ (\text{ex})} \qquad \blacksquare$$

13. LEMA (i) $g\circ f:X\longrightarrow Z$

$y\in Y\wedge z\in Z : y\in Y\wedge z\in Z$ (ta)

$z\in Z : z\in Z \qquad y\in Y\wedge z\in Z,\ z\in Z : y\in Y\wedge z\in Z$ (de)

$z\in Z,\ z\in Z\rightarrow y\in Y\wedge z\in Z : y\in Y\wedge z\in Z$ (2.3)

$z\in Z,\ z\in Z\rightarrow y\in Y\wedge z\in Z,\ y\in Y,\ y\in Y\rightarrow x\in X\wedge y\in Y : y\in Y\wedge z\in Z$ (de)

$\vdots$

ANALOGO

$y\in Y,\ y\in Y\rightarrow x\in X\wedge y\in Y : x\in X\wedge y\in Y$ (2.3)

$y\in Y,\ y\in Y\rightarrow x\in X\wedge y\in Y,\ z\in Z,\ z\in Z\rightarrow y\in Y\wedge z\in Z : x\in X\wedge y\in Y$ (de)

$\vdots$

$z\in Z,\ z\in Z\rightarrow y\in Y\wedge z\in Z,\ y\in Y,\ y\in Y\rightarrow x\in X\wedge y\in Y : y\in Y\wedge z\in Z\wedge x\in X\wedge y\in Y$ (1.6)

$\vdots \qquad x\in X\wedge z\in Z : x\in X\wedge z\in Z$ (ta)

$x\in X\wedge y\in Y\wedge z\in Z : x\in X\wedge z\in Z$ (de)

$z\in Z,\ z\in Z\rightarrow y\in Y\wedge z\in Z,\ y\in Y,\ y\in Y\rightarrow x\in X\wedge y\in Y : x\in X\wedge z\in Z$ (b)

$y\in Y,\ y\in Y\rightarrow \langle x,y\rangle\in X\times Y,\ z\in Z,\ z\in Z\rightarrow \langle y,z\rangle\in Y\times Z : \langle x,Z\rangle\in X\times Z$ (def)

$y\in Y(y\in Y\rightarrow \langle x,y\rangle\in X\times Y)\wedge\forall w((w\in Y\rightarrow \langle x,w\rangle\in X\times Y)\rightarrow w=y)$,
$z\in Z(z\in Z\rightarrow \langle y,z\rangle\in Y\times Z\wedge\forall w'((w\in Z\rightarrow \langle y,w'\rangle\in Y\times Z)\rightarrow w'=z) : x\in X\wedge z\in Z$ (de)

$\forall x\in X\exists y\in Y[y\in Y(y\in Y\rightarrow \langle x,y\rangle\in X\times Y)\wedge\forall w((w\in Y\rightarrow \langle x,w\rangle\in X\times Y)\rightarrow w=y)]$,
$\forall y\in Y\exists z\in Z[z\in Z(z\in Z\rightarrow \langle y,z\rangle\in Y\times Z\wedge\forall w'((w'\in Z\rightarrow \langle y,w'\rangle\in Y\times Z)\rightarrow w'=z)] : x\in X\wedge z\in Z$
(7.2) (4.7)

$\forall x\in X\exists! y(y\in Y\rightarrow \langle x,y\rangle\in X\times Y)\wedge\forall y\in Y\exists! z(z\in Z\rightarrow \langle y,z\rangle\in Y\times Z) : \langle x,z\rangle\in X\times Z$ (def)

$\forall x\in X\exists! y\in Y.\langle x,y\rangle\in X\times Y\wedge\forall y\in Y\exists! z\in Z.\langle y,z\rangle\in Y\times Z : \langle x,z\rangle\in X\times Z$ (def)

$\langle x,y\rangle\in f\wedge\langle y,z\rangle\in g : \langle x,z\rangle\in X\times Z$ (def)

$\exists y(\langle x,y\rangle\in f\wedge\langle y,z\rangle\in g) : \langle x,z\rangle\in X\times Z$ (7.2)

$\langle x,z\rangle\in g\circ f : \langle x,z\rangle\in X\times Z$ (def)

$: \langle x,z\rangle\in g\circ f\rightarrow\langle x,z\rangle\in X\times Z$ (2.1)

$: \forall\langle x,z\rangle(\langle x,z\rangle\in g\circ f\rightarrow\langle x,z\rangle\in X\times Z)$ (4.2)

$: \forall\langle x,z\rangle\in g\circ f.\langle x,z\rangle\in X\times Z$ (def)

$: g\circ f\subseteq X\times Z$ (def) ■

(ii) • Es asociativa

Demostración:

(ii) $h\circ(g\circ f)=\{<x,w>:\exists z(<x,z>\in(g\circ f)\wedge<z,w>\in h)\}$

$=\{<x,w>:\exists z(\exists y(<x,y>\in f\wedge<y,z>\in g)\wedge<z,w>\in h)\}$

$=\{<x,w>:\exists z\exists y(<x,y>\in f\wedge<y,z>\in g\wedge<z,w>\in h)\}$

$=\{<x,w>:\exists z\exists y(<x,y>\in f\wedge<y,z>\in g\wedge<z,w>\in h)\}$

$=\{<x,w>:\exists y(<x,y>\in f\wedge<y,w>\in(h\circ g))\}$

Dado un $\mathscr{S}$-conjunto X, se define $\Delta_X=\{<x,x>:x\in X\}$ y $1_X=(\Delta_X,X,X)$. Δ_X es la diagonal en X y 1_X el morfismo identidad en X.■

14. LEMA (i) $1_X:X\longrightarrow X$

$\vdash 1_X\in X^X$ si y sólo si $\vdash 1_X\in\{u:u\subseteq X\times X\wedge\forall x\in X\exists!x\in X.<x,x>\in u\}$

si y sólo si $\vdash 1_X\in\Delta_X$

(ii) Para todo X Y, Z X, $f\circ 1_X=f$, $1_X\circ g=g$.

$f\circ 1_X=\{<x,y>:\exists x'(<x,x'>\in 1_X\wedge<x',y>\in f)\}$

$1_X\circ g=\{<z,x>:\exists x(<z,x'>\in g\wedge<x',x>\in 1_X)\}$

$=\{<z,x>:<z,x>\in g\wedge<x,x>\in 1_X\}$

$=\{<z,x>:<z,x>\in g\}=g$ ■

Los lemas 13 y 14 demuestran que la colección de $\mathscr{S}$-conjuntos y funciones forman una categoría. Se denotará esta categoría por $\mathscr{C}(\mathscr{S})$, y se llamará la "categoría de los $\mathscr{S}$-conjuntos (y funciones)", o la "categoría asociada con $\mathscr{S}$".

Nuestro próximo objetivo es demostrar que $\mathscr{C}(\mathscr{S})$ es un topos.

Para hacer ésto, primero se demostrará que todo término en $\mathscr{L}$ da orígen a una función (es decir, un conjunto) en $\mathscr{C}(\mathscr{S})$; éste es otro aspecto por el cual la teoría de conjuntos es local, en contraste con la teoría de conjuntos clásica, en cuyos términos se producen operaciones definidas globalmente las cuales no son, en general, conjuntos.

Supongamos que τ es un término tal que $<x_1,\ldots,x_n>\in X\vdash_{\mathscr{S}}\tau\in Y$; se escribirá: $\begin{array}{c} X\longrightarrow Y \\ <x_1,\ldots,x_n>\longmapsto\tau \end{array}$ ó $(<x_1,\ldots,x_n>\longrightarrow\tau)$

ó $(x\longrightarrow\tau)$ para $\{<<x_1,\ldots x_n>,\tau>:<x_1,\ldots,x_n>\in X\}$.

Es fácil ver que, si $x_1,\ldots,x_n$ incluyen todas las variables libres de τ y, X y Y son $\mathscr{S}$-conjuntos, entonces $\begin{array}{c} X\longrightarrow Y \\ <x_1,\ldots,x_n>\longmapsto\tau \end{array}$ es una $\mathscr{S}$-función, algunas veces se escribirá $X\xrightarrow{\tau}Y$ para está función.

Si f es un símbolo funcional, algunas veces se escribirá f para la función $x\longmapsto f(x)$.

15. LEMA

$(<y_1,\ldots,y_n>\longmapsto\tau)\circ(<x_1,\ldots,x_n>\longmapsto<s_1,\ldots,s_n>) = (<x_1,\ldots,x_n>\longmapsto\tau(y/s))$

con s_i libre para y_i en τ para cada i. $1\leq i\leq n$.

Demostración:

Sea $y=<y_1,\ldots,y_n>$, $x=<x_1,\ldots,x_n>$, $s=<s_1,\ldots,s_n>$, entonces

$(y\longmapsto\tau)\circ(x\longmapsto s)=\{x,\tau>:\exists z(<x,z>\in(x\longmapsto s)\wedge<z,\tau>\in(y\longmapsto\tau)\}$ (def $\circ$)

Donde z es y sustituida por s (y/s) en τ, por tanto

$=\{<x,\tau>:<x,\tau>\in(x\longmapsto\tau(y/s))\}$ ■

16. TEOREMA

Para toda teoría de conjuntos local $\mathscr{S}$, la categoría $\mathfrak{C}(\mathscr{S})$ es un topos.

Demostración:

Procede verificando que $\mathfrak{C}(\mathscr{S})$ tiene las propiedades apropiadas.

Para ello se demuestran los siguientes puntos:

16.1) $\mathfrak{C}(\mathscr{S})$ tiene objeto terminal.

Prueba:

Sea 1 el $\mathcal{U}_1$. Para todo $\mathcal{Y}$-conjunto X, considerar $X \xrightarrow{*} 1$

$x \longmapsto *$

Si $X \xrightarrow{f} 1$ entonces $(x \in X \vdash_{\mathcal{Y}} \langle x,*\rangle \in f)$ de (12) tenemos $f=(x \longmapsto *)=*$ si y sólo si $\vdash_{\mathcal{Y}} \langle x,*\rangle \in f \leftrightarrow \langle x,*\rangle \in f$. Por lo tanto:

$X \xrightarrow{*} 1$ si y sólo si $\vdash_{\mathcal{Y}} * \in \{\langle x,*\rangle : x \in X\}$ si sólo si $X \xrightarrow{f} 1$

De aquí para todo X $\exists!$ $\mathcal{Y}$-función $X \longrightarrow 1$, así que 1 es el objeto términal en $\mathcal{E}(\mathcal{Y})$. ■

16.2 $\mathcal{E}(\mathcal{Y})$ TIENE PRODUCTOS BINARIOS.

Demostración:

Sea X,Y $\mathcal{Y}$-conjuntos. Se define $X \times Y \xrightarrow{\pi_1} X$, $X \times Y \xrightarrow{\pi_2} Y$, como sigue: $\pi_1=(\langle x,y\rangle \longmapsto x)$, $\pi_2=(\langle x,y\rangle \longmapsto y)$. Entonces si $X \xrightarrow{f} Z \xrightarrow{g} Y$, se define $\langle f,g\rangle=\{\langle z,\langle x,y\rangle\rangle : \langle z,x\rangle \in f \wedge \langle z,y\rangle \in g\}$ para $Z \xrightarrow{\langle f,g\rangle} X \times Y$.

Por demostrar que $\pi_1 \circ \langle f,g\rangle=f$ y $\pi_2 \circ \langle f,g\rangle=g$ (demostración análoga)

$$\begin{aligned}\pi_1 \circ \langle f,g\rangle &=\{\langle z,x\rangle : \exists(\langle z,\langle x,y\rangle\rangle \in \langle f,g\rangle \wedge \langle\langle x,y\rangle,x\rangle \in \pi_1)\}\\ &=\{\langle z,x\rangle : \exists y(\langle z,x\rangle \in f \wedge \langle z,y\rangle \in g \wedge \langle\langle x,y\rangle,x\rangle \in \pi_1)\}\\ &=\{\langle z,x\rangle : \langle z,x\rangle \in f \wedge \exists y(\langle z,y\rangle \in g \wedge \langle\langle x,y\rangle,x\rangle \in \pi_1)\}\end{aligned}$$

Entonces basta con demostrar $\vdash \exists y(\langle z,y\rangle \in g \wedge \langle\langle x,y\rangle,x\rangle \in \pi_1) \leftrightarrow$ verdad

Prueba:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{:\text{verdad (1.4)}}{\langle z,y\rangle \in g \wedge \langle\langle x,y\rangle,x\rangle \in \pi_1 : \text{verdad (de)}}}{\exists y(\langle z,y\rangle \in g \wedge \langle\langle x,y\rangle,x\rangle \in \pi_1 : \text{verdad (7.2)}} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{:\langle z,y\rangle \in g \text{ (hip)}}{\text{verdad}:\langle z,y\rangle \in g \text{(de)}} \quad \text{verdad}:\langle\langle x,y\rangle,x\rangle \in \pi_1}{\text{verdad}:\langle z,y\rangle \in g \wedge \langle\langle x,y\rangle,x\rangle \in \pi_1 \text{(1.6)}}}{\text{verdad}:\exists y(\langle z,y\rangle \in g \wedge \langle\langle x,y\rangle,x\rangle \in \pi_1) \text{ (7.4)}}}{:\exists y(\langle z,y\rangle \in g \wedge \langle\langle x,y\rangle,x\rangle \in \pi_1) \leftrightarrow \text{verdad (eq)}}$$

Si $Z \xrightarrow{h} X \times Y$ satisface $\pi \circ h=f$ y $\pi \circ h=g$ entonces

$\vdash \langle z,\langle x,y\rangle\rangle \in h \leftrightarrow (\langle z,x\rangle \in f \wedge \langle z,y\rangle \in g)$

Prueba:

$$
\begin{array}{l}
\langle z,\langle x,y\rangle\rangle\in h:\langle z,\langle x,y\rangle\rangle\in\langle\pi_1\circ h,\pi_2\circ h\rangle \\
\hline
\langle z,\langle x,y\rangle\rangle\in h:\langle z,x\rangle\in\pi_1\circ h\wedge\langle z,y\rangle\in\pi_2\circ h \\
\hline
\langle z,\langle x,y\rangle\rangle\in h:\langle z,x\rangle\in f\wedge\langle z,y\rangle\in g
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
:\langle z,\langle x,y\rangle\rangle\in\langle\pi_1\circ h,\pi_2\circ h\rangle=\langle z,\langle x,y\rangle\rangle\in h \\
\hline
\langle z,\langle x,y\rangle\rangle\in\langle\pi_1\circ h.\pi_2\circ h\rangle:\langle z,\langle x,y\rangle\rangle\in\langle\pi_1\circ h,\pi_2\circ h\rangle=\langle z,\langle x,y\rangle\rangle\in h
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
\langle z,\langle x,y\rangle\rangle\in\langle\pi_1\circ h,\pi_2\circ h\rangle=\langle z,\langle x,y\rangle\rangle\in h, \\
\langle z,\langle x,y\rangle\rangle\in\langle\pi_1\circ h,\pi_2\circ h\rangle:\langle z,\langle x,y\rangle\rangle\in h
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
\hline
\langle z,\langle x,y\rangle\rangle\in\langle\pi_1\circ h,\pi_2\circ h\rangle:\langle z,\langle x,y\rangle\rangle\in h \\
\hline
\langle z,x\rangle\in\pi_1\circ h\wedge\langle z,y\rangle\in\pi_2\circ h:\langle z,\langle x,y\rangle\rangle\in h \\
\hline
\langle z,x\rangle\in f\wedge\langle z,y\rangle\in g:\langle z,\langle x,y\rangle\rangle\in h \\
\hline
:\langle z,\langle x,y\rangle\rangle\in h\leftrightarrow(\langle z,x\rangle\in f\wedge\langle z,y\rangle\in g) \\
\hline
:\langle z,\langle x,y\rangle\rangle\in h\leftrightarrow(\langle z,\langle x,y\rangle\rangle\in\langle f,g\rangle)
\end{array}
$$

$\langle f,g\rangle=h.$ ■

16.3 UNA $\mathcal{Y}$-FUNCION f ES MONICA SI SOLO SI $\langle x,z\rangle\in f,\langle y,z\rangle\in f\vdash_{\mathcal{Y}}x=y$

Demostación:Supongase que $Y\xrightarrow{f}Z$ es mónica.

Sea $R=\{\langle x,y\rangle:\exists z(\langle x,z\rangle\in f\wedge\langle y,z\rangle\in f\}$ $\mathcal{Y}$-conjunto $R\xrightarrow{g}Y$, $R\xrightarrow{\quad}Y$

$\langle x,y\rangle\longmapsto x \quad \langle x,y\rangle\longmapsto y$

Entonces tenemos:

→] $f\circ g=\{\langle\langle x,y\rangle,z\rangle:\exists y(\langle\langle x,y\rangle,y'\rangle\in g\wedge\langle y',z\rangle\in f)\}$

$=\{\langle\langle x,y\rangle,z\rangle:\exists y(\exists z'(\langle x,z'\rangle\in f\wedge\langle y,z'\rangle\in f\wedge\langle\langle x,y\rangle,y\rangle\in g)\wedge\langle y,z\rangle\in f)\}$

$=\{\langle\langle x,y\rangle,z\rangle:\langle x,z\rangle\in f\wedge\langle y,z\rangle\in f\}$

$=f\circ g$

Como f mónico por hipótesis tenemos g=h, por tanto $\langle x,z\rangle\in f,\langle y,z\rangle\in f\vdash_{\mathcal{Y}}x=y$

←]Supóngase $\langle x,z\rangle\in f\wedge\langle y,z\rangle\in f\vdash_{\mathcal{Y}}x=y$, y $f\circ g=f\circ h$

$$:\langle x,z\rangle\in f\circ g \ \text{(hip)} \qquad :\langle x,z\rangle\in f\circ h \ \text{(hip)}$$

$$:\langle x,z\rangle\in f\circ g\wedge\langle x,z\rangle\in f\circ h$$

$$:\exists u(\langle x,u\rangle\in g\wedge\langle u,z\rangle\in f)\wedge\exists v(\langle x,v\rangle\in h\wedge\langle v,z\rangle\in f) \ \text{(def)}$$

$$:\exists u\exists v(\langle x,u\rangle\in g\wedge\langle x,v\rangle\in h\wedge\langle u,z\rangle\in f\wedge\langle v,z\rangle\in f)$$

$$\exists u\exists v(\langle x,u\rangle\in g\wedge\langle x,v\rangle\in h\wedge\langle u,z\rangle\in f\wedge\langle v,z\rangle\in f: \langle x,u\rangle\in g\langle x,v\rangle\in h\langle u,z\rangle\in f\langle v,z\rangle\in f$$

$$:\langle x,u\rangle\in g\wedge\langle x,v\rangle\in h\wedge\langle u,z\rangle\in f\wedge\langle v,z\rangle\in f \ \text{(b)}$$

$$\langle x,u\rangle\in g\wedge\langle x,v\rangle\in h:\langle x,u\rangle\in g\wedge\langle x,u\rangle\in h$$

$$\langle x,u\rangle\in g\wedge\langle x,v\rangle\in h\wedge\langle u,z\rangle\in f\wedge\langle v,z\rangle\in f:\langle x,u\rangle\in g\wedge\langle x,v\rangle\in h$$

$$:\langle x,u\rangle\in g\wedge\langle x,v\rangle\in h$$

$$:\langle x,u\rangle\in g\wedge\langle x,u\rangle\in h \ \text{(su)}$$

$$\langle x,u\rangle\in g:\langle x,u\rangle\in g$$

$$\langle x,u\rangle\in g\wedge\langle x,u\rangle\in h:\langle x,u\rangle\in g$$

$$:\langle x,u\rangle\in g$$

$$\langle x,u\rangle\in h:\langle x,u\rangle\in g$$

$$\langle x,u\rangle\in h:\langle x,u\rangle\in h$$

$$\langle x,u\rangle\in g\wedge\langle x,u\rangle\in h:\langle x,u\rangle\in h$$

$$\langle x,u\rangle\in g:\langle x,u\rangle\in h$$

$$\langle x,u\rangle\in g:\langle x,u\rangle\in h$$

$$\langle x,u\rangle\in g\longleftrightarrow\langle x,u\rangle\in h \ \text{(eq)}$$

Por tanto g=f, por lo que se tiene f mónica.∎

Por consiguiente $f^*(x)$ puede ser pensada como el "valor" de f en x. La siguente proposición es entonces una consecuencia inmediata.

16.4) i) $X\longrightarrow \mathcal{U}_\Omega = f\mathcal{U})\ \vdash_{\mathcal{Y}} (\langle x,\ldots,x\rangle\longmapsto\alpha)^*(\langle x,\ldots,x\rangle)\longleftrightarrow\alpha$

$x\longmapsto f^*(x)$

Prueba de i):

Sea $\phi=(x\longmapsto f^*(x))$ p.d. $\phi=f$, es decir, $\vdash\langle x,f^*(x)\rangle\in\phi\longleftrightarrow\langle x,f^*(x)\rangle\in f$

$$\dfrac{\dfrac{:\langle x,f^*(x)\rangle\in f\ \text{(hip)}}{\langle x,f^*(x)\rangle\in\phi : \langle x,f^*(x)\rangle\in f\ \text{(de)}} \qquad \dfrac{:\langle x,f^*(x)\rangle\in\phi\ \text{(def)}}{\langle x,f^*(x)\rangle\in f : \langle x,f^*(x)\rangle\in\phi\ \text{(de)}}}{\langle x,f^*(x)\rangle\in f\leftrightarrow\langle x,f^*(x)\rangle\in\phi\ \text{(eq)}}$$

Prueba de $\mathcal{U}$)

Sea $(\langle x_1,\ldots,x_2\rangle\longmapsto\alpha)^*=\Psi$ por tanto $\Psi(\langle x_1,\ldots,x_2\rangle)=\alpha$, ya que

$$\dfrac{:\Psi(\langle x,\ldots,x\rangle)=\alpha\ \text{(hip)}}{:\Psi(\langle x,\ldots,x\rangle)\leftrightarrow\alpha\ \text{(L1)}}\ \blacksquare$$

Ahora sea Ω para $\mathcal{U}_\Omega$ y $1\xrightarrow{T}\Omega$ para $1\longrightarrow\Omega$

$x\longmapsto \text{verdad}$

16.5 Un diagrama en $\mathcal{C}(\mathcal{S})$ dado por $Y\xrightarrow{!}1\xrightarrow{T}\Omega$, y $Y\xrightarrow{m}X\xrightarrow{h}\Omega$, donde m es mónico, es un producto fibrado si y sólo si $h=(x\longmapsto\exists y\langle y,m\rangle\in m)$

Demostración:

$\Leftarrow$]Suponemos $h=(x\longmapsto\exists y.\langle y,x\rangle\in m)$, por demostrar el cuadrado que forman las funciones conmuta, es decir, $h\circ m=T\circ !_Y$

$:\exists x(\langle z,x\rangle\in m\wedge w=\exists y.\langle y,x\rangle\in m)\leftrightarrow w=\text{verdad}$ (A)

Prueba:

Si $Y=\varnothing$ entonces el diagrama conmuta por vacuidad.

Si $Y\neq\varnothing$ entonces $\langle y,x\rangle\in m$

$$\dfrac{\dfrac{:\langle z,x\rangle\in m}{w=\text{verdad}:\langle z,x\rangle\in m} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{:\langle y,x\rangle\in m}{:\exists y.\langle y,x\rangle\in m}}{w=\text{verdad},w:\exists y.\langle y,x\rangle\in m} \qquad \dfrac{w=\text{verdad}:w}{w=\text{verdad},\exists y.\langle y,x\rangle\in m:w}}{w=\text{verdad}:w\leftrightarrow\exists y.\langle y,x\rangle\in m}}{w=\text{verdad}:w=\exists y.\langle y,x\rangle\in m}}{w=\text{verdad}:\exists x(\langle z,x\rangle\in m\wedge w=\exists y.\langle y,x\rangle\in m)\ \text{(1)}}$$

$$\underline{\langle y,x\rangle \in m}$$

$$\underline{:\text{verdad}} \qquad \underline{:\exists y.\langle y,x\rangle \in m}$$

$$\underline{\exists y\langle y,x\rangle \in m:\text{verdad} \qquad \text{verdad}:\exists y.\langle y,x\rangle \in m}$$

$$:\exists y.\langle y,x\rangle \in m \leftrightarrow \text{verdad} \quad (2)$$

$$\underline{w:w=\text{verdad}}$$

$$\underline{\langle z,x\rangle \in m \wedge w=\exists y.\langle y,x\rangle \in m \wedge w:w=\text{verdad}}$$

$$\underline{\langle z,x\rangle \in m \wedge w=\exists y.\langle y,x\rangle \in m:w=\text{verdad} \quad (2)}$$

$$\exists x(\langle z,x\rangle \in m \wedge w=\exists y.\langle y,x\rangle \in m):w=\text{verdad} \quad (3)$$

Aplicando equivalencia a (1) y (3) obtenemos (A)

$$:\langle z,w\rangle \in h\circ m \leftrightarrow \exists x(\langle z,x\rangle \in m \wedge w=\exists y.\langle y,x\rangle \in m) \quad (B)$$

Prueba:

$$\underline{w:w}$$

$$\underline{\forall x\exists w.\langle x,w\rangle \in h:w}$$

$$\underline{:\langle y,z\rangle \in m} \qquad \underline{\langle z,w\rangle \in h\circ m:\langle x,w\rangle \in h \qquad \langle x,w\rangle \in h:w}$$

$$\underline{\langle z,w\rangle \in h_{m},w:\langle y,x\rangle \in m} \qquad \underline{\langle z,w\rangle \in h\circ m:w}$$

$$\underline{:\langle z,x\rangle \in m} \qquad \underline{\langle z,w\rangle \in h\circ m,w:\exists y.\langle y,x\rangle \in m \qquad \langle z,w\rangle \in h\circ m,\exists y.\langle y,x\rangle \in m:w}$$

$$\underline{\langle z,w\rangle \in h\circ m:\langle z,x\rangle \in m \qquad \langle z,w\rangle \in h\circ m:w=\exists y.\langle y,x\rangle \in m}$$

$$\langle z,w\rangle \in h\circ m:\exists x(\langle z,x\rangle \in m \wedge w=\exists y.\langle y,x\rangle \in m \quad (1')$$

$$\underline{:\langle z,w\rangle \in h\circ m}$$

$$\underline{\langle z,x\rangle \in m \wedge w=\exists y.\langle y,x\rangle \in m:\langle z,w\rangle \in h\circ m}$$

$$:\exists x(\langle z,x\rangle \in m \wedge w=\exists y.\langle y,x\rangle \in m):\langle z,w\rangle \in h\circ m \quad (2')$$

Aplicando equivalencia a (1') y (2') obtenemos (B). Ahora se aplicará equivalecia a (A) y (B), por lo que se obtiene lo siguiente

$$:\langle z,w\rangle \in h\circ m \leftrightarrow w=\text{verdad} \quad (C)$$

$$:w=\text{verdad} \leftrightarrow \langle z,w\rangle \in T\circ ! \quad (D)$$

Prueba:

$$\dfrac{\dfrac{:\langle z,w\rangle\in T\circ !}{w=\text{verdad}:\langle z,w\rangle\in T\circ !}\qquad \dfrac{\dfrac{:w=\exists y.\langle y,x\rangle\in m \qquad :\exists y.\langle y,x\rangle\in m=\text{verdad}}{:w=\text{verdad}}}{\langle z,w\rangle\in T\circ !:w=\text{verdad}}}{:w=\text{verdad}\leftrightarrow\langle z,w\rangle\in T\circ !\ \ (D)}$$

Por transitividad de (C) y (D) se tiene: $\langle z,w\rangle\in h\circ m\leftrightarrow\langle z,w\rangle\in T\circ !$ si y sólo si $h\circ m=T\circ !$, por tanto el diagrama conmuta.

Para ver que el diagrama es un producto fibrado se supondrá que $Z\xrightarrow{f}X$, f hace conmutar el diagrama ($h\circ f=T\circ !$). Sea $g=\{\langle z,x\rangle:\exists x(\langle z,x\rangle\in f\wedge\langle y,x\rangle\in m)\}$

Afirmación: g es $\mathcal{Y}$-función

Demostración:

Si $Z\neq\varnothing\neq Y$ entonces $g\neq\varnothing$ como f hace conmutar se tiene

$$\begin{aligned} h\circ f&=\{\langle z,w\rangle:\exists x(\langle z,x\in f\wedge\langle x,\exists y.\langle y,x\rangle\in m\rangle\in m)\}\\ &=\{\langle z,w\rangle:\langle z,*\rangle\in !\wedge\langle *,\text{verdad}\rangle\in T\}\\ &=T\circ ! \end{aligned}$$

Por tanto $:\exists y.\langle y,x\rangle\in m\leftrightarrow\text{verdad}$, como f función $:\langle z,x\rangle\in f$, por lo que $g\neq\varnothing$

$:y\in Y \qquad :\langle z,y\rangle\in g$

$:y\in Y\wedge\langle z,y\rangle\in g$

$z\in Z:y\in Y\wedge\langle z,y\rangle\in g$ (de) (*)

$\langle z,y\rangle\in g\wedge\langle z,u\rangle\in g:\langle z,y\rangle\in g\wedge\langle z,u\rangle\in g$

$:\exists x(\langle z,x\rangle\in f\wedge\langle y,x\rangle\in m)\wedge\exists x(\langle z,x\rangle\in f\wedge\langle u,x\rangle\in m)$

$:\exists x(\langle z,x\rangle\in f\wedge\langle y,x\rangle\in m\wedge\langle u,x\rangle\in m)$

$:\langle z,x\rangle\in f\wedge\langle y,x\rangle\in m\wedge\langle u,x\rangle\in m$

$\vdots \qquad \langle y,x\rangle\in m\wedge\langle u,x\rangle\in m:y=u$ (m-momo)

$\vdots \qquad \langle z,x\rangle\in f\wedge\langle y,x\rangle\in m\wedge\langle u,x\rangle\in m:y=u$ (de)

$\langle z,y\rangle\in g\wedge\langle z,u\rangle\in g:y=u$ (b)

$\langle z,y\rangle\in g\wedge u\in Y\wedge\langle z,u\rangle\in g:y=u$ (de)

$\langle z,y\rangle\in g:u\in Y\wedge\langle z,u\rangle\in g\rightarrow y=u$ (2.1)

$\langle z,y\rangle\in g:\forall u(u\in Y\wedge\langle z,u\rangle\in g\rightarrow y=u)$ (4.6) $\qquad :\langle z,y\rangle\in g$ (hip)

$z\in Z:\forall u(u\in Y\wedge\langle z,u\rangle\in g\rightarrow y=u)$ (b)(de)

$z\in Z:y\in Y\wedge\langle z,y\rangle\in g\wedge\forall u(u\in Y\wedge\langle z,u\rangle\in g\rightarrow y=u)$ (1.6)(*)

$z\in Z:\exists y(y\in Y\wedge\langle z,y\rangle\in g\wedge\forall u(u\in Y\wedge\langle z,u\rangle\in g\rightarrow y=u))$ (7.4)

$:z\in Z\rightarrow\exists y(y\in Y\wedge\langle z,y\rangle\in g\wedge\forall u(u\in Y\wedge\langle z,u\rangle\in g\rightarrow y=u))$ (2.1)

$:\forall z(z\in Z\rightarrow\exists y(y\in Y\wedge\langle z,y\rangle\in g\wedge\forall u(u\in Y\wedge\langle z,u\rangle\in g\rightarrow y=u)))$ (4.6)

$:\forall z(z\in Z\rightarrow\exists! y(y\in Y\wedge\langle z,y\rangle\in g))$

$:\forall z(z\in Z\rightarrow\exists! y\in Y.\langle z,y\rangle\in g)$

$:\forall z\in Z.\exists! y\in Y.\langle z,y\rangle\in g$

Por tanto g es $\mathcal{Y}$-función.

Más aun $m\circ g=f$, $g=\{\langle z,y\rangle:\exists x(\langle z,x\rangle\in f\wedge\langle y,x\rangle\in m)\}$

$m\circ g=\{\langle z,x\rangle:\exists y(\langle z,y\rangle\in g\wedge\langle y,x\rangle\in m)\}$

$=\{\langle z,x\rangle:\exists y(\exists x(\langle z,x\rangle\in f\wedge\langle y,x\rangle\in m)\wedge\langle y,x\rangle\in m)\}$

$=\{\langle z,x\rangle:\exists(\langle z,x\rangle\in f\wedge\langle y,x\rangle\in m)\}$

$=\{\langle z,x\rangle:\exists y.\langle z,x\rangle\in f\wedge\exists.\langle y,x\rangle\in m\}$ (por ser $:\exists y.\langle y,x\rangle\in m\leftrightarrow$ verdad)

$=\{\langle z,x\rangle:\exists y.\langle z,x\rangle\in f\}$

$=f$

Si $m\circ h'=f$, entonces $h'=g$, por tanto m-mono

$m\circ h'=f$ si y sólo si $:\langle z,x\rangle\in m\circ h'\leftrightarrow\langle z,x\rangle\in f$ como $m\circ g=f$ si sólo si $:\langle z,x\rangle\in m\circ g\leftrightarrow\langle z,x\rangle\in f$, por tanto $:\langle z,x\rangle\in m\circ h'\leftrightarrow\langle z,x\rangle\in m\circ g$ si sólo si $m\circ h'=m\circ g$

P. d. $h'=g$ (es decir $:\langle z,y\rangle\in h'\leftrightarrow\langle z,y\rangle\in g$

$m\circ g=\{\langle z,x\rangle:\exists y(\langle z,y\rangle\in g\wedge\langle y,x\rangle\in m)\}$

$=\{\langle z,x\rangle:\exists y(\langle z,y\rangle\in h'\wedge\langle y,x\rangle\in m)\}$

$=m\circ h'$

Por tanto $\{\langle z,y\rangle\in g\}=\{\langle z,y\rangle\in h'\}$

Por tanto $g=h'$

Otra forma:

$$\dfrac{:\langle z,x\rangle\in m\circ h'\leftrightarrow\langle z,x\rangle\in m\circ g\ (\text{hip})}{:\langle z,x\rangle\in m\circ h'=\langle z,x\rangle\in m\circ g\ (\text{L1})}$$

$$\dfrac{\langle z,x\rangle\in m\circ h'=\langle z,x\rangle\in m\circ g,\ \langle z,x\rangle\in m\circ h':\langle z,x\rangle\in m\circ g\ (\text{i})}{\langle z,x\rangle\in m\circ h':\langle z,x\rangle\in m\circ g\ (\text{co})}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\langle z,x\rangle\in m\circ h':\langle z,x\rangle\in m\circ h'}{\langle z,x\rangle\in m\circ h':\exists y(\langle z,y\rangle\in h'\wedge\langle y,x\rangle\in m)}}{\langle z,x\rangle\in m\circ h':\langle z,y\rangle\in h'\wedge\langle y,x\rangle\in m}\qquad \langle z,y\rangle\in h'\wedge\langle y,x\rangle\in m:\langle z,y\rangle\in h'}{\langle z,y\rangle\in g,\ \langle z,x\rangle\in m\circ g\wedge\langle z,x\rangle\in m\circ h':\langle z,y\rangle\in h'\ (\text{b})(\text{de})\ (*)}$$

Análogamente $\langle z,x\rangle\in m\circ g:\langle z,y\rangle\in g$
$\langle z,x\rangle\in m\circ g\wedge\langle z,x\rangle\in m\circ h'\wedge\langle z,y\rangle\in h':\langle z,y\rangle\in g$ $(*')$, de $(*)$ y $(*')$ se tiene

$$\dfrac{\dfrac{:\langle z,x\rangle\in m\circ g\ (\text{hip})\qquad :\langle z,x\rangle\in m\circ h'\ (\text{hip})}{:\langle z,x\rangle\in m\circ g\wedge\langle z,x\rangle\in m\circ h'}\qquad \begin{array}{c}\langle z,x\rangle\in m\circ g\wedge\langle z,x\rangle\in m\circ h':\langle z,y\rangle\in g\leftrightarrow\langle z,y\rangle\in h'\\ \vdots\end{array}}{\langle z,y\rangle\in g\leftrightarrow\langle z,y\rangle\in h'\ (\text{b})}$$

Por tanto $h'=g$

Por tanto m-mono. Por lo que el diagrama es un producto fibrado

$\leftarrow$] Inversamente.

Supóngase que el cuadrado es un producto fibrado. De aquí que conmuta el diagrama, formado por $Y \xrightarrow{!_Y} 1 \xrightarrow{T} \Omega$, y $Y \xrightarrow{m} X \xrightarrow{h} \Omega$.

Dando $h\circ m = T\circ !_Y$

$h\circ m=\{\langle y,w\rangle:\exists x(\langle y,x\rangle\in m\wedge\langle x,w\rangle\in h)\}$

$\quad =\{\langle y,w\rangle:\langle y,*\rangle\in !_Y\langle *,\text{verdad}\rangle\in T\}$

$\vdash_y \langle y,w\rangle\in h\circ m \leftrightarrow w=\text{verdad}$

$\langle y,w\rangle\in h\circ m \vdash_y w=\text{verdad}$ (i)(b)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\langle y,w\rangle\in h\circ m:\langle y,w\rangle\in h\circ m}{\exists x(\langle y,x\rangle\in m\wedge\langle x,w\rangle\in h):\langle y,w\rangle\in h\circ m}}{\langle y,x\rangle\in m\wedge\langle x,w\rangle\in h:\langle y,w\rangle\in h\circ m}\qquad \langle y,w\rangle\in h\circ m:w=\text{verdad}}{\langle y,x\rangle\in m\wedge\langle x,w\rangle\in h:w=\text{verdad}\ (b)}}{\langle y,x\rangle\in m:\langle x,w\rangle\in h\to w=\text{verdad}}\quad \vdots\quad \dfrac{w=\text{verdad},\langle x,w\rangle\in h:\langle x,\text{verdad}\rangle\in h}{\langle x,w\rangle\in h\to w=\text{verdad}:\langle x,\text{verdad}\rangle\in h}}{\langle y,x\rangle\in m:\langle x,\text{verdad}\rangle\in h}}{\langle y,x\rangle\in m:h^*(x)\ (\text{def})}}{\exists y.\langle y,x\rangle\in m:h^*(x)\ (7.3)(i)}$$

Sea $Z=\{x:h^*(x)\}$ y sea $Z \xrightarrow{h^-} X$ tal que $h^-=(x\longmapsto x)$. Entonces el diagrama conmuta.

P.d. $h\circ h^-=T\circ !_Z$, es decir p.d. $:\exists y.\langle x,y\rangle\in f\leftrightarrow\text{verdad}$, ya que se tiene:

$h\circ h^-=\{\langle z,w\rangle:\exists x(\langle z,x\rangle\in h^-\wedge\langle x,\text{verdad}\rangle\in h)\}$

$T\circ !_Z=\{\langle z,x\rangle:\langle z,*\rangle\in !_Z\wedge\langle *,w\rangle\in T\wedge(w=\text{verdad})\}$

Prueba:

$$\dfrac{\dfrac{:\text{verdad}}{\exists y.\langle x,y\rangle\in f:\text{verdad}}\qquad \dfrac{\dfrac{:\langle x,y\rangle\in f}{:\exists y.\langle x,y\rangle\in f}}{\text{verdad}:\exists y.\langle x,y\rangle\in f}}{:\exists y.\langle x,y\rangle\in f\leftrightarrow\text{verdad}}$$

$$\underline{:\langle x,y\rangle\in f \qquad :\langle y,x\rangle\in m}$$

$$\underline{:\langle x,y\rangle\in f\wedge\langle y,x\rangle\in m}$$

$$\underline{:\exists y(\langle x,y\rangle\in f\wedge\langle y,x\rangle\in m)}$$

$$\underline{:\exists y.\langle y,x\rangle\in m}$$

$$\underline{h^*(x):\exists y.\langle y,x\rangle\in m \ (de) \qquad \exists y.\langle y,x\rangle\in m:h^*(x)\ (i)}$$

$$\underline{:h^*(x)=(\exists y.\langle y,x\rangle\in m)}$$

$$\underline{:\langle x,\text{verdad}\rangle\in h\leftrightarrow\exists y.\langle y,x\rangle\in m (16.4)}$$

$$:\langle x,\exists y\langle y,x\rangle\in m\rangle\in h \quad \blacksquare$$

16.6 $\mathfrak{E}(\mathcal{S})$ TIENE CLASIFICADOR DE SUBOJETOS, LLAMADO (Ω,T).

Demostración: Sea m un monomorfismo tal que $Y\xrightarrow{m}X$ en $\mathfrak{E}(\mathcal{S})$. Defínase $X\xrightarrow{\chi_m}\Omega$ como $\chi_m=(x\longmapsto\exists y.\langle y,x\rangle\in m)$. Entonces por (16.5), χ_m es la única aplicación de $X\longrightarrow\Omega$ tal que el diagrama formado por $Y\longrightarrow 1$ $1\xrightarrow{T}\Omega$, $Y\rightarrowtail^{m} X\xrightarrow{\chi_m}\Omega$, es un producto fibrado.

Inversamente. Dado $X\xrightarrow{h}\Omega$ se define

$Z=\{x:h^*(x)\}=\{x:\langle x,\text{verdad}\rangle\in h\}$ y $Z\xrightarrow{h^-}X$ por $h^-=(x\longmapsto x)$.

Entonces: $\chi_{h^-}=(x\longmapsto\exists y.\langle y,x\rangle\in h^-)$

$=(x\longmapsto\langle x,x\rangle\in h^-)$

$=(x\longmapsto\langle x,\text{verdad}\rangle\in h)$

$=(x\longmapsto h^*(x))$

$=h$ por (16.4) $\blacksquare$

Así (Ω,T) es un clasificador de subobjetos en $\mathfrak{E}(\mathcal{S})$.

16.7 $\mathfrak{E}(\mathcal{S})$ TIENE EXPONENCIACION (OBJETO POTENCIA).

Demostración: Sea X un $\mathcal{S}$-conjunto, se afirma que PX es el objeto potencia de X. Primero se definirá $X\times PX \xrightarrow{e_X} \Omega$ por $e_X=(\langle x,z\rangle \longmapsto x\in z)$. Entonces, si $X\times Y \xrightarrow{f} \Omega$, $f^\wedge: Y\longrightarrow PX$ por $f^\wedge=(y\longmapsto \{x: f^*(\langle x,y\rangle)\})$, entonces $e_X\circ(1_X\times f^\wedge)=(\langle x,y\rangle\longmapsto x\in y)$.

Definición: $1_X\times f^\wedge=\langle 1_X\circ\pi_1, f^\wedge\circ\pi_2\rangle$

$$
\begin{aligned}
e_X\circ(1_X\times f^\wedge)(\langle x,y\rangle) &= e_X(\langle \pi_1, f^\wedge\circ\pi_2\rangle(\langle x,y\rangle))\\
&= e_X(\langle \pi_1(\langle x,y\rangle), f^\wedge(\pi_2(\langle x,y\rangle))\rangle)\\
&= e_X(\langle x, f^\wedge(y)\rangle)\\
&= x\in f^\wedge(y)\\
&= f^*(\langle x,y\rangle)\\
&= f(\langle x,y\rangle) \quad (16.4)
\end{aligned}
$$

$\therefore\ e\circ(1\times f^\wedge)=f$ ■

Si $Y \xrightarrow{g} PY$ satisface $e_X\circ(1_X\times g)=f$ entonces

$\vdash f^*(\langle x,y\rangle)=\exists w\in PX.(x\in w\wedge\langle y,w\rangle\in g)$

Prueba:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{:w\in PX \quad :x\in w}{:w\in PX\wedge x\in w} \quad :\langle y,w\rangle\in g}{:w\in PX\wedge x\in w\wedge\langle y,w\rangle\in g}}{f^*(\langle x,y\rangle):w\in PX\wedge x\in w\wedge\langle y,w\rangle\in g}}{f^*(\langle x,y\rangle):\exists w(w\in PX\wedge x\in w\wedge\langle y,w\rangle\in g)}}{:\exists w\in PX.(x\in w\wedge\langle y,w\rangle\in g)}
\qquad
\dfrac{\dfrac{:\langle\langle x,y\rangle,\text{verdad}\rangle\in f}{:f^*(\langle x,y\rangle)}}{\exists w(w\in PX\wedge x\in w\wedge\langle y,w\rangle\in g):f^*(\langle x,y\rangle)}
$$

También se tiene $\vdash\langle y,z\rangle\in f^\wedge\leftrightarrow z=\{x:f^*(\langle x,y\rangle)\}$, por definición $\langle y,\{x:f^*(\langle x,y\rangle)\}\rangle\in f^\wedge$

$\therefore$ (1) $\vdash\langle y,z\rangle\in f^\wedge\leftrightarrow z=\{x:\exists w\in PX.(x\in w\wedge\langle y,w\rangle\in g)\}$, pero

(a) $\vdash\exists! w\in PX.\langle y,w\rangle\in g$

Prueba:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{:w\in PX \qquad :\langle y,w\rangle\in g}{:w\in PX\wedge\langle y,w\rangle\in g} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{:w=v}{:v\in PX,\langle v,w\rangle\in g:w=v}}{:v\in PX\wedge\langle y,w\rangle\in g\Rightarrow w=v}}{:\forall v(v\in PX\wedge\langle y,w\rangle\in g\Rightarrow w=v}}{:w\in PX\wedge\langle y,w\rangle\in g\wedge\forall v(v\in PX\wedge\langle y,v\rangle\in g\Rightarrow w=v)}}{:\exists w(w\in PX\wedge\langle y,w\rangle\in g\wedge\forall v(v\in PX\wedge\langle y,v\rangle\in g\Rightarrow w=v)}}{:\exists! w(w\in PX\wedge\langle y,w\rangle\in g)}}{:\exists! w\in PX.\langle y,w\rangle\in g}
$$

Por 9 se tiene (*b*) $\vdash\exists! w\in PX.\langle y,w\rangle\in g\vdash\langle y,z\rangle\in g$

$\vdash\langle y,z\rangle\in g$ (transitividad de *a* y *b*)

(2) $\vdash\langle y,z\rangle\in g\leftrightarrow z=\{x:\exists w\in PX(x\in w\wedge\langle y,w\rangle\in g\}$

$\therefore$ $\vdash\langle y,z\rangle\in f^{\wedge}\leftrightarrow\langle y,z\rangle\in g$ (transitividad de 1 y 2)

$\therefore$ $f^{\wedge}=g$

Esto completa la prueba del teorema 16 ($\mathbb{C}(\mathscr{S})$ es un topos). Un topos de la forma de $\mathbb{C}(\mathscr{S})$ será llamado un topos "lingüistico",por derivarse de un "lenguaje".■

INTERPRETACION DE UN LENGUAJE LOCAL EN UN TOPOS:

TEOREMA DE VALIDEZ.

Se mostrará como un lenguaje local puede ser interpretado en un topos arbitrario. Esto da origen a una noción de validez para fórmulas la cual se establecerá como propiedad: la derivabilidad en una teoría local de los conjuntos pura implica la validez en todo topos.

Sea $\mathscr{L}$ un lenguaje local, y $\mathbb{E}$ un topos. Suponemos que han sido especificados los productos, potencias, objeto terminal y clasificador de subobjetos en $\mathbb{E}$.

Una *Interpretación* I de $\mathcal{L}$ en $\mathbb{E}$ es una asignación

(i) Para cada tipo A de un $\mathbb{E}$-objeto A_I es tal que :

$(A_1\times\ldots\times A_n)_I=(A_1)_I\times\ldots\times(A_n)_I$

$(PA)_I=P(A_I)$

$1_I=1$, el objeto términal de $\mathbb{E}$

$\Omega_I=\Omega_{\mathbb{E}}$

(ii) Para cada simbólo funcional f con signatura $A\longrightarrow B$ de un $\mathbb{E}$-morfismo $f_I:A_I\longrightarrow B_I$.

Más generalmente, una interpretación de $\mathcal{L}$ es un par $(\mathbb{E},I)$ que consiste de un topos $\mathbb{E}$, y de una interpretación I de $\mathcal{L}$ en $\mathbb{E}$.

A menudo se escribirá $A_{\mathbb{E}}$ o A para A_I.

Dada una interpretación $(\mathbb{E},I)$ de $\mathcal{L}$, se extiende I a todos los términos de $\mathcal{L}$.

Sea τ un término de tipo B y sean $x_1,\ldots,x_n$ variables distintas de tipos $A_1,\ldots,A_n$ incluyendo todas las variables libres de τ. Se escribirá $\mathbf{x}$ para la sucesión $(x_1,\ldots,x_n)$.

Se define un $\mathbb{E}$-morfismo $\|\tau\|_{I,x_1,\ldots,x_n}: A_1\times\ldots\times A_n\longrightarrow B$ a menudo escrito como $\|\tau\|_{I,\mathbf{x}}$ o $\|\tau\|$ recursivamente como sigue.

(I1) $\|*\|_{\mathbf{x}}=!$ único morfismo $A_1\times\ldots\times A_n\longrightarrow 1$ en $\mathbb{E}$.

(I2) $\|x_i\|_{\mathbf{x}}=\pi_i$, la proyección $A_1\times\ldots\times A_n\longrightarrow A_i$

(I3) $\|f(\tau)\|_{\mathbf{x}}=f_I\circ\|\tau\|_{\mathbf{x}}$

(I4) $\|<\tau,\ldots,\tau>\|_{\mathbf{x}}=<\|\tau\|_{\mathbf{x}},\ldots,\|\tau\|_{\mathbf{x}}>$

(I5) $\|(\tau)_i\|_{\mathbf{x}}=\pi_i\circ\|\tau\|_{\mathbf{x}}$

(I6) $\|\{y:\alpha\}\|_{\mathbf{x}}=(\|\alpha(y/u)\|_{u\mathbf{x}}\circ\mathrm{can})\hat{}$

Donde u no es uno de los $x_1,\ldots,x_n$, pero es libre para y en α, y es de tipo C (tal que B es PC),"can" es el isomorfismo canónico $C\times(A_1\times\ldots\times A_n)\cong C\times A_1\times\ldots\times A_n$ y $f\hat{}$ esta dado por los diagramas:

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] \arrow[d] & & 1 \arrow[d, "\|\alpha(y/u)\|"] \\
C\times(A_1\times\ldots\times A_n)\cong C\times A_1\times\ldots\times A_n \arrow[rr] & & \Omega
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
C\times(A_1\times\ldots\times A_n) \arrow[r] \arrow[d, "f^{\wedge}\times 1"'] & \Omega \arrow[d, "1"] \\
PC\times A_1\times\ldots\times A_n \arrow[r, "e_{PC}"'] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{f}$$

(I7) $\|\sigma=\tau\|_x = eq_C \circ \|\langle\sigma,\tau\rangle\|_x$ donde σ, τ son de tipo C.

$eq_C: C\times C \longrightarrow \Omega \; eq_C = \chi(\Delta_C)$,

Δ_C es la diagonal

(I8) $\|\sigma\in\tau\| = e_C \circ \|\langle\sigma,\tau\rangle\|$ donde σ es de tipo C. e_C es el morfismo evaluación

Si τ es un término cerrado de tipo B, entonces x puede ser tomada como la sucesión vacía $\emptyset$. Escribiendo $\|\tau\|$ para $\|\tau\|_{I,\emptyset}$,es evidente que $\|\tau\|$ es un E-elemento de B,(porque no se hizo ninguna sustitución ya que no tiene presencias de variables libres). En particular, si τ es un conjunto $\{y:\alpha\}$ de tipo PC, entonces $\|\{y:\alpha\}\|$ es un E-elemento de PC, el cual corresponde (vía la transposición potencia) a un "subobjeto" de C.

17. $\|verdad\| = T$

Prueba:

$\|verdad\|_x =_{I2} \|*=*\|_x =_{I7} eq_1 \circ \|\langle *,*\rangle\|_x =_{I4} eq_1 \circ \langle \|*\|_x, \|*\|_x \rangle =$

$= eq_1 \circ \langle !, ! \rangle = eq_1 \circ \langle 1, 1\rangle \circ ! =_{(*)} T$

(*)

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "!"] \arrow[d, "\Delta_1"'] & 1 \arrow[d, "T"] \\
1\times 1 \arrow[r, "eq_1"'] & 1
\end{tikzcd}
\quad \text{conmuta}
$$

■

Para establecer el próximo resultado es necesario el siguiente lema técnico.

18. LEMA: Sea $\mathbb{C}$ una categoria con productos finitos y sean B, $A_1,\ldots,A_n,B_1,\ldots,B_m$ los $\mathbb{C}$-objetos. Se escribirá can, can* para los isomorfismos canónicos

$B\times(A_1\times\ldots\times A_n)\cong_{can}B\times A_1\times\ldots\times A_n$, $B\times(B_1\times\ldots\times B_m)\cong_{can*}B\times B_1\times\ldots\times B_m$,

$proj=\pi_2\circ can^{-1}$, donde $\pi_2:B\times(A_1\times\ldots\times A_n)\longrightarrow A_1\times\ldots\times A_n$ y $\pi_1:B\times A_1\times\ldots\times A_n\longrightarrow B$. Entonces para todos los morfismos f_i $\forall i=1,..,m$ de la forma:

$$f_i:A_1\times\ldots\times A_n\longrightarrow B_i$$

Se tiene:

$$<\pi_1,f_1\circ proj,\ldots,f_m\circ proj>\circ can=can^*\circ(1_B\times<f_1,\ldots,f_m>).$$

Demostración:

$<\pi_1,f_1\circ proj,\ldots,f_m\circ proj>\circ can=$

$=<\pi_1\circ can,f_1\circ proj\circ can,\ldots,f_m\circ proj\circ can>$

$=<\pi_1\circ can,f_1\circ\pi_2\circ can^{-1}\circ can,\ldots,f_m\circ\pi_2\circ can^{-1}\circ can>$

$=<\pi_1\circ can,f_1\circ\pi_2,\ldots,f_m\circ\pi_2>$

$=<1_B\circ\pi_1,<f_1,\ldots,f_m>\circ\pi_2>$

$=can^*\circ(1_B\times<f_1,\ldots,f_m>)$ ■

19. LEMA EN VARIABLES SUPERFLUAS.

Sea τ en término con variables libres, entre $x_1,\ldots,x_n$. Supóngase que $1<p_1<\ldots<p_n<n$ y $x_{p_1},\ldots,x_{p_n}$ incluye todas las variables libres de τ. Entonces escribiendo $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n)$ y $\mathbf{x}'=(x_{p_1},\ldots,x_{p_m})$, se tiene para una interpretación de $\mathcal{L}$ en un topos $\mathbb{E}$ lo siguiente:

$\|\tau\|_{\mathbf{x}}=\|\tau\|_{\mathbf{x}'}\circ\|<x_{p_1},\ldots,x_{p_m}>\|_{\mathbf{x}}$

Demostración: Por inducción en la formación de términos.

Sea x_i de tipo A_i y x_{p_i} de tipo A_{p_i} $\forall i=1,\ldots,n,m$

i) $\tau\equiv *$

$$\|\tau\|_{\mathbf{x}}=\|*\|_{\mathbf{x}}=!_{A_1\times\ldots\times A_n}$$

$$=!_{A_{p_1}\times\ldots\times A_{p_m}}\circ<\pi_{p_1},\ldots,\pi_{p_m}>$$

$$=!_{A_{p_1}\times\ldots\times A_{p_m}}\circ<\|x_{p_1}\|_{\mathbf{x}},\ldots,\|x_{p_m}\|_{\mathbf{x}}>$$

$$=\|*\|_{\mathbf{x}'}\circ\|<x_{p_1},\ldots,x_{p_m}>\|_{\mathbf{x}}$$

ii) $\tau\equiv x_i$

$$\|\tau\|_{\mathbf{x}}=\|x_i\|_{\mathbf{x}}=\pi_i$$

$$\|x_i\|_{x_i}\circ\|<x_i>\|=\|x_i\|_{x_i}\circ<\|x_i\|>$$

$$=\|x_i\|_{x_i}\circ<\pi_i>=_{T4}\|x_i\|_{x_i}\circ\pi_i$$

$$=1_{x_i}\circ\pi_i=\pi_i$$

iii) $\tau'\equiv f(\tau)$

$$\|\tau'\|_{\mathbf{x}}=\|f(\tau)\|_{\mathbf{x}}=f_I\circ\|\tau\|_{\mathbf{x}}$$

$$=_{HI}f_I\circ\|\tau\|_{\mathbf{x}'}\circ\|<x_{p_1},\ldots,x_{p_m}>\|_{\mathbf{x}}$$

$$=\|f(\tau)\|_{\mathbf{x}'}\circ\|<x_{p_1},\ldots,x_{p_m}>\|_{\mathbf{x}}$$

$$=\|\tau'\|_{\mathbf{x}'}\circ\|<x_{p_1},\ldots,x_{p_m}>\|_{\mathbf{x}}$$

iv) $\tau\equiv<\tau_1,\ldots,\tau_n>$

$$\|\tau\|_{\mathbf{x}}=\|<\tau_1,\ldots,\tau_n>\|_{\mathbf{x}}=<\|\tau_1\|_{\mathbf{x}},\ldots,\|\tau_n\|_{\mathbf{x}}>$$

$$=_{HI}<\|\tau_1\|_{\mathbf{x}'}\circ\|<x_{p_1},\ldots,x_{p_m}>\|_{\mathbf{x}},\ldots,\|\tau_n\|_{\mathbf{x}'}\circ\|<x_{p_1},\ldots,x_{p_m}>\|_{\mathbf{x}}$$

$$=<\|\tau_1\|_{\mathbf{x}'},\ldots,\|\tau_n\|_{\mathbf{x}'}>\circ\|<x_{p_1},\ldots,x_{p_m}>\|_{\mathbf{x}}$$

$$=\|<\tau_1,\ldots,\tau_n>\|_{\mathbf{x}'}\circ\|<x_{p_1},\ldots,x_{p_m}>\|_{\mathbf{x}}$$

$$=\|\tau\|_{\mathbf{x}'}\circ\|<x_{p_1},\ldots,x_{p_m}>\|_{\mathbf{x}}$$

v) $\tau'\equiv(\tau)_i$

$$\|\tau'\|_{\mathbf{x}}=\|(\tau)_i\|_{\mathbf{x}}=\pi_i\circ\|\tau\|_{\mathbf{x}}$$

$$=_{HI}\pi_i\circ\|\tau\|_{\mathbf{x}'}\circ\|<x_{p_1},\ldots,x_{p_m}>\|_{\mathbf{x}}$$

$=||(\tau)_i||_{\mathbf{x}'}\circ||<x_{p_1},\ldots,x_{p_m}>||_{\mathbf{x}}$

$=||\tau'||_{\mathbf{x}'}\circ||<x_{p_1},\ldots,x_{p_m}>||_{\mathbf{x}}$

vi) $\tau'\equiv\sigma=\tau$ donde σ,τ de tipo C

$||\tau'||_{\mathbf{x}}=||\sigma=\tau||_{\mathbf{x}}=eq_C\circ||<\sigma,\tau>||_{\mathbf{x}}$

$=eq_C\circ<||\sigma||_{\mathbf{x}},||\tau||_{\mathbf{x}}>$

$=_{HI}eq_C\circ<||\sigma||_{\mathbf{x}'}\circ||<x_{p_1},\ldots,x_{p_m}>||_{\mathbf{x}},||\tau||_{\mathbf{x}'}\circ||<x_{p_1},\ldots,x_{p_m}>||_{\mathbf{x}}>$

$=eq_C\circ<||\sigma||_{\mathbf{x}'},||\tau||_{\mathbf{x}'}>\circ||<x_{p_1},\ldots,x_{p_m}>||_{\mathbf{x}}$

$=eq_C\circ||<\sigma,\tau>||_{\mathbf{x}'}\circ||<x_{p_1},\ldots,x_{p_m}>||_{\mathbf{x}}$

$=||\sigma=\tau||_{\mathbf{x}'}\circ||<x_{p_1},\ldots,x_{p_m}>||_{\mathbf{x}}$

$=||\tau'||_{\mathbf{x}'}\circ||<x_{p_1},\ldots,x_{p_m}>||_{\mathbf{x}}$

vii) $\tau'\equiv\sigma\epsilon\tau$, donde σ de tipo C y τ de tipo PC

$||\tau'||_{\mathbf{x}}=||\sigma\epsilon\tau||_{\mathbf{x}}=e_C\circ||<\sigma,\tau>||_{\mathbf{x}}$

$=e_C\circ<||\sigma||_{\mathbf{x}},||\tau||_{\mathbf{x}}>$

$=_{HI}e_C\circ<||\sigma||_{\mathbf{x}'}\circ||<x_{p_1},\ldots,x_{p_m}>||_{\mathbf{x}},||\tau||_{\mathbf{x}'}\circ||<x_{p_1},\ldots,x_{p_m}>||_{\mathbf{x}}>$

$=e_C\circ<||\sigma||_{\mathbf{x}'},||\tau||_{\mathbf{x}'}>\circ||<x_{p_1},\ldots,x_{p_m}>||_{\mathbf{x}}$

$=e_C\circ||<\sigma,\tau>||_{\mathbf{x}'}\circ||<x_{p_1},\ldots,x_{p_m}>||_{\mathbf{x}}$

$=||\sigma\epsilon\tau||_{\mathbf{x}'}\circ||<x_{p_1},\ldots,x_{p_m}>||_{\mathbf{x}}$

$=||\tau'||_{\mathbf{x}'}\circ||<x_{p_1},\ldots,x_{p_m}>||_{\mathbf{x}}$

viii) $\tau\equiv\{y:\alpha\}$ y de tipo B, τ de tipo PB

$||\tau||_{\mathbf{x}}=||\{y:\alpha\}||_{\mathbf{x}}=(||\alpha(y/u)||_{\mathbf{x}}\circ can)^{\wedge}$

$=_{HI}(||\alpha(y/u)||_{u\mathbf{x}'}\circ||<u,x_{p_1},\ldots,x_{p_m}>||_{u\mathbf{x}}\circ can)^{\wedge}$

$=(||\alpha(y/u)||_{u\mathbf{x}'}\circ<||u||_{u\mathbf{x}},||x_{p_1}||_{u\mathbf{x}},\ldots,||x_{p_m}||_{u\mathbf{x}}>\circ$

$<\pi_1,\pi_1\circ\pi_2,\ldots,\pi_n\circ\pi_2>)^{\wedge}$

$=(||\alpha(y/u)||_{u\mathbf{x}'}\circ<\pi_1,||x_{p_1}||_{u\mathbf{x}},\ldots,||x_{p_m}||_{u\mathbf{x}}>\circ$

$<\pi_1,\pi_1\circ\pi_2,\ldots,\pi_n\circ\pi_2>)^{\wedge}$

$=_{HI}(\|\alpha(y/u)\|_{uX'}\circ<\pi_1,\|x_{p_1}\|_X\circ\|<x_1,...,x_n>\|_{uX},....,$

$\|x_{p_m}\|_X\circ\|<x_1,...x_n>\|_{uX}>\circ<\pi_1,\pi_1\circ\pi_2,...,\pi_n\circ\pi_2>)\hat{}$

$=(\|\alpha(y/u)\|_{uX'}\circ<\pi_1,\|x_{p_1}\|_X\circ<\|x_1\|_{uX},...,\|x_n\|_{uX}>,....,$

$\|x_{p_m}\|_X\circ<\|x_1\|_{uX},...,\|x_n\|_{uX}>\circ<\pi_1,\pi_1\circ\pi_2,...,\pi_n\circ\pi_2>)\hat{}$

$=(\|\alpha(y/u)\|_{uX'}\circ<\pi_1,\|x_{p_1}\|_X\circ<\pi_2,...,\pi_{n+1}>,....,$

$\|x_{p_m}\|_X\circ<\pi_2,...,\pi_{n+1}>>\circ<\pi_1,\pi_1\circ\pi_2,...,\pi_n\circ\pi_2>)\hat{}$

$=_{18}\|\alpha(y/u)\|_{uX'}\circ<\pi_1,\pi_1\circ\pi_2,...,\pi_m\circ\pi_2>\circ(1_B\times<\|x_{p_1}\|_X,...,\|x_{p_m}\|_X>))\hat{}$

$_{0.20}=(e_B\circ(1_B\times(\|\alpha(y/u)\|_{uX'}\circ can^*)\hat{})\circ(1_B\times\|<x_{p_1},...,x_{p_m}>\|_X))\hat{}$

$=(e_B\circ 1_B\times((\|\alpha(y/u)\|_{uX'}\circ can^*)\hat{}\circ\|<x_{p_1},...,x_{p_m}>\|_X)\hat{}$

$=_{16}(e_B\circ 1_B\times\|\{y:\alpha\}\|_{X'}\circ\|<x_{p_1},...,x_{p_m}>\|_X)\hat{}$

$=_{0.20}\|\{y:\alpha\}\|_{X'}\circ\|<x_{p_1},...,x_{p_m}>\|_X$

$=\|\tau\|_{X'}\circ\|<x_{p_1},...,x_{p_m}>\|_X$ ■

20. LEMA DE SUSTITUCION.

Sea τ un término con variables libres entre $z_1,...,z_m$ y sea $\sigma_1,...,\sigma_m$ términos tal que σ_i es libre para z_i en τ para cada $i=1,...,m$. Entonces para toda interpretación de $\mathcal{L}$ en un topos $\mathbb{E}$, se tiene $\|\tau(z/\sigma)\|_X=\|\tau\|_Z\circ\|<\sigma_1,...,\sigma_m>\|_X$ (donde x incluye todas las variables libres de $\sigma_1,...,\sigma_m$).

Demostración: Por inducción sobre la formación de τ.

Sea x_i de tipo A_i $\forall i=1,...,n$ y sea z_j, σ_j de tipo B_j $\forall j=1,...,m$.

i) $\tau\equiv *$

$\|\tau\|_Z\circ\|<\sigma_1,...,\sigma_m>\|_X=\|*\|_Z\circ\|<\sigma_1,...,\sigma_m>\|_X$

$=\|*\|_Z\circ<\|\sigma_1\|_X,...,\|\sigma_m\|_X>$

$=!_{B_1\times..\times B_m}\circ<\|\sigma_1\|_X,...,\|\sigma_m\|_X>$

$$=!_{A_1 \times \ldots \times A_n}$$
$$=||*||_X$$
$$=||*(z/\sigma)||_X$$
$$=||\tau(z/\sigma)||_X$$

ii) $\tau \equiv z_1$

$$||\tau||_Z \circ ||<\sigma_1, \ldots, \sigma_m>||_X = ||z_1||_Z \circ <||\sigma_1||_X, \ldots, ||\sigma_m||_X>$$
$$=\pi_1 \circ <||\sigma_1||_X, \ldots, ||\sigma_m||_X>$$
$$=||\sigma_1||_X$$
$$=||z_1(z/\sigma)||_X$$
$$=||\tau(z/\sigma)||_X$$

iii) $\tau' \equiv f(\tau)$

$$||\tau'||_Z \circ ||<\sigma_1, \ldots, \sigma_m>||_X = ||f(\tau)||_Z \circ ||<\sigma_1, \ldots, \sigma_m>||_X$$
$$=_{13} f_I \circ ||\tau||_Z \circ ||<\sigma_1, \ldots, \sigma_m>||_X$$
$$=_{HI} f_I \circ ||\tau(z/\sigma)||_X$$
$$=||f(\tau)(z/\sigma)||_X$$
$$=||\tau'(z/\sigma)||_X$$

iv) $\tau \equiv <\tau_1, \ldots, \tau_m>$

$$||\tau||_Z \circ ||<\sigma_1, \ldots, \sigma_m>||_X = ||<\tau_1, \ldots, \tau_m>||_Z \circ ||<\sigma_1, \ldots, \sigma_m>||_X$$
$$=_{14} <||\tau_1||_Z, \ldots, ||\tau_m||_Z> \circ ||<\sigma_1, \ldots, \sigma_m>||_X$$
$$=<||\tau_1||_Z \circ ||<\sigma_1, \ldots, \sigma_m>||_X, \ldots, ||\tau_m||_Z \circ ||<\sigma_1, \ldots, \sigma_m>||_X>$$
$$=_{HI} <||\tau_1(z/\sigma)||_X, \ldots, ||\tau_m(z/\sigma)||_X>$$
$$=||<\tau_1(z/\sigma), \ldots, \tau_m(z/\sigma)>||_X$$
$$=||<\tau_1, \ldots, \tau_m>(z/\sigma)||_X$$
$$=||\tau(z/\sigma)||_X$$

v) $\tau' \equiv (\tau)_1$

$$||\tau'||_Z \circ ||<\sigma_1, \ldots, \sigma_m>||_X = ||(\tau)_1||_Z \circ ||<\sigma_1, \ldots, \sigma_m>||_X$$
$$=_{15} \pi_1 \circ ||\tau||_Z \circ ||<\sigma_1, \ldots, \sigma_m>||_X$$
$$=\pi_1 \circ ||\tau(z/\sigma)||_X$$

$=||(\tau)_1(z/\sigma)||_X$

$=||\tau'(z/\sigma)||_X$

vi) $\tau''\equiv\sigma'=\tau'$, donde σ', τ' son de tipo C

$||\tau''||_Z\circ||<\sigma_1,\ldots,\sigma_m>||_X=||\sigma'=\tau'||_Z\circ||<\sigma_1,\ldots,\sigma_m>||_X$

$=_{I7}eq_C\circ||<\sigma',\tau'>||_Z\circ||<\sigma_1,\ldots,\sigma_m>||_X$

$=eq_C\circ<||\sigma'||_Z\circ||<\sigma_1,\ldots,\sigma_m>||_X,||\tau'||_Z\circ||<\sigma_1,\ldots,\sigma_m>||_X>$

$=_{HI}eq_C\circ<||\sigma'(z/\sigma)||_X,||\tau'(z/\sigma)||_X>$

$=eq_C\circ||<\sigma',\tau'>(z/\sigma)||_X$

$=||(\sigma'=\tau')(z/\sigma)||_X$

$=||\tau''(z/\sigma)||_X$

vii) $\tau''\equiv\sigma'\epsilon\tau'$, σ' de tipo C

$||\tau''||_Z\circ||<\sigma_1,\ldots,\sigma_m>||_X=||\sigma'\epsilon\tau'||_Z\circ||<\sigma_1,\ldots,\sigma_m>||_X$

$=_{I8}e_C\circ||<\sigma',\tau'>||_Z\circ||<\sigma_1,\ldots,\sigma_m>||_X$

$=e_C\circ<||\sigma'||_Z\circ||<\sigma_1,\ldots,\sigma_m>||_X,||\tau'||_Z\circ||<\sigma_1,\ldots,\sigma_m>||_X>$

$=_{HI}e_C\circ<||\sigma'(z/\sigma)||_X,||\tau'(z/\sigma)||_X>$

$=e_C\circ||<\sigma',\tau'>(z/\sigma)||_X$

$=||(\sigma'\epsilon\tau')(z/\sigma)||_X$

$=||\tau''(z/\sigma)||_X$

viii) $\tau\equiv\{y:\alpha\}$ donde y es de tipo B, τ de tipo PB

i) y no esta entre $z_1,\ldots,z_m$. Entonces:

$||\tau(z/\sigma)||_X=||\{y:\alpha\}(z/\sigma)||_X$

$=||\{y:\alpha(z/\sigma)\}||_X$

$=_{I6}(||\alpha(z/\sigma)(y/u)||_{uX}\circ can)^\wedge$

$=(||\alpha(y/u)(z/\sigma)||_{uX}\circ can)^\wedge$

$=_{HI}(||\alpha(y/u)||_Z\circ||<u,\sigma_1,\ldots,\sigma_m>||_{uX}\circ can)^\wedge$

$=(||\alpha(y/u)||_Z\circ<\pi_1,||\sigma_1||_{uX},\ldots,||\sigma_m||_{uX}>\circ<\pi_1,\pi_1\circ\pi_2,\ldots,\pi_m\circ\pi_2>)^\wedge$

ii) y está entre $z_1,\ldots,z_m$. En este caso podemos escribir $z=yz'$, $\sigma=\rho\sigma'$. Entonces u de tipo B', x_i de tipo A_i.

En ambos casos se tiene una arbitraria z, usando la hipótesis de inducción (HI) y adoptando la notación de (18):

$$
\begin{aligned}
&=_{19}(\|\alpha(y/u)\|_{\mathbf{z}}\circ\langle\pi_1,\|\sigma_1\|_{\mathbf{x}}\circ\|\langle x_1,\ldots,x_n\rangle\|_{u\mathbf{x}},\ldots,\\
&\qquad \|\sigma_m\|_{\mathbf{x}}\circ\|\langle x_1,\ldots,x_n\rangle\|_{u\mathbf{x}}\rangle\circ\mathrm{can})^{\wedge}\\
&=(\|\alpha(y/u)\|_{\mathbf{z}}\circ\langle\pi_1,\|\sigma_1\|_{\mathbf{x}}\circ\langle\|x_1\|_{u\mathbf{x}},\ldots,\|x_n\|_{u\mathbf{x}}\rangle,\ldots\\
&\qquad \|\sigma_m\|_{\mathbf{x}}\circ\langle\|x_1\|_{u\mathbf{x}},\ldots,\|x_n\|_{u\mathbf{x}}\rangle\rangle\circ\mathrm{can})^{\wedge}\\
&=(\|\alpha(y/u)\|_{\mathbf{z}}\circ\langle\pi_1,\|\sigma_1\|_{\mathbf{x}}\circ\langle\pi_2,\ldots,\pi_{n+1}\rangle,\ldots,\\
&\qquad \|\sigma_m\|_{\mathbf{x}}\circ\langle\pi_2,\ldots,\pi_{n+1}\rangle\rangle\circ\mathrm{can})^{\wedge}\\
&=_{18}(\|\alpha(y/u)\|_{\mathbf{z}}\circ\mathrm{can}^*\circ(1_B\times\|\langle\sigma_1,\ldots,\sigma_m\rangle\|_{\mathbf{x}}))^{\wedge}.\\
&=(\|\alpha(y/u)\|_{\mathbf{z}}\circ\langle\pi_1,\pi_1\circ\pi_2,\ldots,\pi_m\circ\pi_2\rangle(1_B\times\|\langle\sigma_1,\ldots,\sigma_m\rangle\|_{\mathbf{x}}))^{\wedge}\\
&=(e_B\circ(1_B\times\|\alpha(y/u)\|_{\mathbf{z}}\circ\mathrm{can}^*)^{\wedge}\circ(1_B\times\|\langle\sigma_1,\ldots,\sigma_m\rangle\|_{\mathbf{x}}))^{\wedge}\\
&=(e_B\circ(1_B\times\|\{y:\alpha\}\|_{\mathbf{z}})\circ(1_B\times\|\langle\sigma_1,\ldots,\sigma_m\rangle\|_{\mathbf{x}}))^{\wedge}\\
&=(e_B\circ(1_B\times\|\{y:\alpha\}\|_{\mathbf{z}}\circ\|\langle\sigma_1,\ldots,\sigma_m\rangle\|_{\mathbf{x}}))^{\wedge}\\
&=_{0.20}\|\{y:\alpha\}\|_{\mathbf{z}}\circ\|\langle\sigma_1,\ldots,\sigma_m\rangle\|_{\mathbf{x}}\\
&=\|\tau\|_{\mathbf{z}}\circ\|\langle\sigma_1,\ldots,\sigma_m\rangle\|_{\mathbf{x}}\ \blacksquare
\end{aligned}
$$

21. LEMA DE INDEPENDENCIA.

Si u es libre para x y no libre en un término τ, entonces para toda interpretación $\mathcal{L}$, $\|\tau(x/u)\|_{u\mathbf{y}}=\|\tau\|_{x\mathbf{y}}$

Demostración:

Sea $\mathbf{y}=(y_1,\ldots,y_n)$, y_i de tipo A_i $\forall i$, u y x de tipo B.

$\|\tau(x/u)\|_{u\mathbf{y}}=_{20}\|\tau\|_x\circ\|\langle u\rangle\|_{u\mathbf{y}}=\|\tau\|_x\circ\|u\|_{u\mathbf{y}}=\|\tau\|_x\circ\pi_1=_{19}\|\tau\|_x\circ\|x\|_{x\mathbf{y}}=\|\tau\|_{x\mathbf{y}}$ $\blacksquare$

Ahora se introducirá la noción de validez de una fórmula en un topos. Dada una interpretación I de $\mathcal{L}$ en un topos $\mathbf{E}$, para todo conjunto finito $\Gamma=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_m\}$ de fórmulas se escribe

$$
\|\Gamma\|_{I,\mathbf{x}} \text{ para } \begin{cases} \|\alpha_1\|_{I,\mathbf{x}}\wedge\ldots\wedge\|\alpha_m\|_{I,\mathbf{x}} & \text{si } m>0 \\ \text{(orden irrelevante)} & \\ T & \text{si } m=0 \end{cases}
$$

Dada una fórmula β, sea $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n)$ todas las variables libres en $\Gamma\cup\{\beta\}$;

22. SE ESCRIBE $\Gamma\models_I\beta$ ó $\Gamma\models_{\mathcal{E}}\beta$ PARA $\|\Gamma\|_{I,X}\leq\|\beta\|_{I,X}$.

Si $\Gamma\models_I\beta$, se dice que el secuente $\Gamma:\beta$ es verdad bajo la interpretación I (o en el topos $\mathcal{E}$).

Se tienen los siguientes hechos básicos concernientes al concepto de validez.

23.1 $\models_I\alpha$ si y sólo si $\|\alpha\|_X=T$

Demostración:

$\Leftarrow]$ $\|\alpha\|_X=T \Rightarrow T=\|\emptyset\|_X=\|\alpha\|_X \Rightarrow \|\emptyset\|_X\leq\|\alpha\|_X \Rightarrow \emptyset\models_I\alpha \Rightarrow\models_I\alpha$

$\Rightarrow]$ $\models_I\alpha \Rightarrow \emptyset\models_I\alpha \Rightarrow T=\|\emptyset\|_X\leq\|\alpha\|_X$ pero $\|\alpha\|_X\leq T$ por ser T máximo $\Rightarrow \|\alpha\|_X=T$ ∎

De 23.1 se sigue que, si I es una interpretación en un topos degenerado (todo objeto es isomorfo al objeto terminal "1"), entonces $\models_I\alpha$ $\forall\alpha$, fórmula α.

Si u es tal que $cod(u)=\Omega$, ker(u) denota el núcleo de u.

23.2. $\Gamma\models_I\alpha$ sii $\|\alpha\|_X\circ ker(\|\Gamma\|_X)=T$

Demostración:

$\Gamma\models_I\alpha$ sii $\|\Gamma\|_{I,X}\leq\|\alpha\|_{I,X}$ $\text{sii}_{I.19.ii}$ $\|\alpha\|_X\circ ker(\|\Gamma\|_X)=T$ ∎

23.3. $\Gamma\models_I\sigma=\tau$ sii $\|\sigma\|_X\circ ker(\|\Gamma\|_X)=\|\tau\|_X\circ ker(\|\Gamma\|_X)$

Demostración:

$\Gamma\models_I\sigma=\tau$ sii $\|\Gamma\|_X\leq\|\sigma=\tau\|_X$

sii $\|\sigma=\tau\|_X\circ\|\Gamma\|_X=T$ (por 23.2)

sii $eq_B\circ\|<\sigma,\tau>\|_X\circ ker(\|\Gamma\|_X)=T$ (I8) (σ,τ de tipo B)

sii $eq_B\circ<\|\sigma\|_X,\|\tau\|_X>\circ ker(\|\Gamma\|_X)=T$

sii $eq_B\circ<\|\sigma\|_X\circ ker(\|\Gamma\|_X,\|\tau\|_X\circ ker(\|\Gamma\|_X)>=T$

sii $\|\sigma\|_X\circ ker(\|\Gamma\|_X)=\|\tau\|_X\circ ker(\|\Gamma\|_X)$ (0.19.iii) ∎

Se necesita establecer los hechos concernientes al comportamiento de variables superfluas bajo una interpretación.

Supongase para 24 que x no es libre en Γ o x no libre en α.

24.1. $\|\Gamma\|_{xy}=\|\Gamma\|_y\circ\pi_2\circ can^{-1}$

$\|\Gamma\|_{xy}=\|\Gamma\|_y\circ\pi_2\circ<\pi_1,<\pi_2,\ldots,\pi_{n+1}>>=\|\Gamma\|_y\circ<\pi_2,\ldots,\pi_{n+1}>$

Demostración:

$\|\Gamma\|_{xy}=\|\Gamma\|_y\circ\|<y_1,\ldots,y_n>\|_{xy}$ (19)

$=\|\Gamma\|_y\circ<\pi_2,\ldots,\pi_{n+1}>$ ■

24.2. $\|\Gamma\|_y\leq\|\alpha\|_y$ implica $\|\Gamma\|_{xy}\leq\|\alpha\|_{xy}$

Demostración:

Supongase $\|\Gamma\|_y\leq\|\alpha\|_y$,

entonces $\|\Gamma\|_{xy}\circ<\pi_2,\ldots,\pi_{n+1}>\leq\|\alpha\|_y\circ<\pi_2,\ldots,\pi_{n+1}>$

entonces (por 24.1) $\|\Gamma\|_{xy}\leq\|\alpha\|_{xy}$ ■

24.3. $ker(\|\Gamma\|)\simeq can\circ(1\times ker(\|\Gamma\|))$, donde $\simeq$ denota equivalencia de monoides.

Demostración:

Considerando los diagramas conmutativos.

Sea $y=(y_1,\ldots,y_n)$, y_i de tipo A_i y $\pi_2\circ can^{-1}=<\pi_2,\ldots,\pi_{n+1}>$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d, "ker(\|\Gamma\|_y)"'] & 1 \arrow[d, "T"] \\
A_1\times\cdots\times A_n \arrow[r, "\|\Gamma\|_y\simeq\chi(ker(\|\Gamma\|_y))"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
X\times A \arrow[r] \arrow[d, "1_X\times ker(\|\Gamma\|_y)"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{I}"] & A \arrow[d, "ker(\|\Gamma\|_y)"] \\
X\times(A_1\times\cdots\times A_n) \arrow[r] \arrow[d, "can"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{II}"] & A_1\times\cdots\times A_n \arrow[d, "1"] \\
X\times A_1\times\cdots\times A_n \arrow[r, "\pi_2\circ can^{-1}"'] & A_1\times\cdots\times A_n
\end{tikzcd}$$

$$
\begin{tikzcd}
Y \arrow[drrr, bend left] \arrow[ddr, bend right, "\ker(\|\Gamma\|_{xy})"'] & & & \\
& X\times A \arrow[r, "\pi_2'"] \arrow[d, "\mathrm{can}\circ(1_X\times\ker(\|\Gamma\|_y)"'] & A \arrow[r, "!_A"] \arrow[d, "1\circ\ker(\|\Gamma\|_y)"'] & 1 \arrow[d, "T"] \\
& X\times A_1\times\ldots\times A_n \arrow[r, "\pi_2\circ\mathrm{can}^{-1}"'] \arrow[rr, bend right, "\chi(\mathrm{can}\circ(1_X\times\ker(\|\Gamma\|_y)))"'] & A_1\times\ldots\times A_n \arrow[r, "\|\Gamma\|_y"'] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

I, II son productos fibrados

$\therefore$ el rectángulo es un producto fibrado.

Por 2.8 se tiene

$$
\begin{aligned}
\chi(\mathrm{can}\circ(1\times\ker(\|\Gamma\|_y))) &= \chi(\ker(\|\Gamma\|_y))\circ<\pi_2,\ldots,\pi_{n+1}> \\
&= \|\Gamma\|_y\circ<\pi_2,\ldots,\pi_{n+1}> \\
&=_{(24.1)} \|\Gamma\|_{xy}
\end{aligned}
$$

$\therefore_{(2.3)}$ $\ker(\|\Gamma\|_{xy}) \simeq \mathrm{can}\circ(1\times\ker(\|\Gamma\|_y))$ ■

Ahora se escribirá

$\Gamma\models\alpha$ para $\Gamma\models_I\alpha$ para toda interpretación I de $\mathcal{L}$;

$\dfrac{\Gamma_1\models_I\alpha_1,\ldots,\Gamma_n\models_I\alpha_n}{\Delta\models_I\beta}$ para $\Gamma_1\models_I\alpha_1,\ldots,\Gamma_n\models_I\alpha_n$ implica $\Delta\models_I\beta$;

$\dfrac{\Gamma_1\models\alpha_1,\ldots,\Gamma_n\models\alpha_n}{\Delta\models\beta}$ para $\dfrac{\Gamma_1\models_I\alpha_1,\ldots,\Gamma_n\models_I\alpha_n}{\Delta\models_I\beta}$ para toda interpretación I.

Para toda teoría local de conjuntos $\mathcal{S}$ en $\mathcal{L}$, una interpretación I de $\mathcal{L}$ (en un topos $\mathbb{E}$) es llamada un modelo de $\mathcal{S}$ (en $\mathbb{E}$) si todo axioma de $\mathcal{S}$ es válido bajo I, se escribe $\Gamma\models\alpha$. Si $\Gamma\models\alpha$ para todo modelo I de $\mathcal{S}$. Note que si $\mathbb{E}$ es degenerado, entonces por 23.1 toda interpretación en $\mathbb{E}$ es un modelo de la teoría inconsistente.

25. TEOREMA DE VALIDEZ.

(*i*) $\Gamma - \alpha$ implica $\Gamma \vdash \alpha$

(*ii*) $\dfrac{\Gamma:\alpha,\ldots,\Gamma:\alpha}{\Delta:\beta}$ implica $\dfrac{\Gamma\vdash\alpha,\ldots,\Gamma\vdash\alpha}{\Delta\vdash\beta}$

(*iii*) $\Gamma - \alpha$ implica $\Gamma \vdash \alpha$.

Para probar (*i*) y (*ii*) del teorema de validez, basta con establecer la validez bajo una interpretación I de los axiomas y reglas de inferencia de una teoría local de conjuntos pura. Esto es lo que se hará primero. Para probar (*iii*) se observa que si $\Gamma - \alpha$, entonces

$$\frac{\Gamma_1:\alpha_1,\ldots,\Gamma_n:\alpha_n}{\Gamma:\alpha}$$

para algunos axiomas $\Gamma_1:\alpha_1,\ldots,\Gamma_n:\alpha_n$ de $\mathscr{S}$ y se aplica (*ii*) del teorema.

Ahora se verificará la validez de los axiomas y reglas de la teoría de conjuntos local pura.

Sea $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n)$, x_i de tipo A_i

25.1 (*i*) TAUTOLOGIA $\alpha\vdash_I\alpha$

Prueba: $\alpha\vdash_I\alpha$ sii $\|\alpha\|_{I,\mathbf{x}}\leq\|\alpha\|_{I,\mathbf{x}}$ ■

(*ii*) UNIDAD $\vdash x_1=*$, x_1 de tipo $\mathbf{1}$

Prueba: $\vdash x_1=*$ sii$_{(23.3)}$ $\|x_1\|_{\mathbf{x}}\circ\ker(\|\emptyset\|_{\mathbf{x}})=\|*\|_{\mathbf{x}}\circ\ker(\|\emptyset\|_{\mathbf{x}})$

sii$_{(1)}$ $\|x_1\|_{\mathbf{x}}=\|*\|_{\mathbf{x}}=!_{A_1\times\ldots\times A_n}=\|x\|_{\mathbf{x}}$

(1)

$$\begin{array}{ccc} A_1\times\ldots\times A_n & \longrightarrow & 1 \\ \downarrow \ker(\|\emptyset\|_x) & & \downarrow T \\ A_1\times\ldots\times A_n & \longrightarrow & \Omega \end{array}$$

$x=(x_1,\ldots,x_n)$ donde x_i de tipo A_i

conmuta

$\|\emptyset\|_x\circ 1_{A_1\times..\times A_n}=T\circ !_{A_1\times..\times A_n}=T_{A_1\times..\times A_n}$ ■

25.2 IGUALDAD.

(i) $\vdash_I x=x$

Prueba: $\vdash_I x=x$ sii$_{(23.3)}$

$$\|x\|_x\circ 1_{A_1\times..\times A_n}=\|x\|_x\circ 1_{A_1\times..\times A_n}\quad (x_i \text{ de tipo } A_i \text{ o } A_i)$$

otra forma

$\vdash_I x=x$ sii $T_{A_1\times..\times A_n}=\|\emptyset\|_x\leq\|x=x\|_x$

sii $T_{A_1\times..\times A_n}\leq eq_A\circ<\|x\|_x,\|x\|_x>=eq_A\circ<1_A,1_A>=T_{A_1\times..\times A_n}$

(ii) $x=y,\ \alpha(z/x)\vdash_I\alpha(z/y)$, x,y libres para z en α

Prueba:

Supongase x, y distintas a la z, y que ni x, ni y son libres en α. Los casos considerados son probados similarmente o triviales.

Sea $z,v_1,\ldots,v_n$ variables de α, $v=(v_1,\ldots,v_n)$

Por demostrar $\|x=y,\alpha(z/x)\|_x\leq\|\alpha(z/y)\|_x$

sii $\|x=y\|_x\wedge\|\alpha(z/x)\|_x\leq\|\alpha(z/y)\|_x$

Supongase $u\leq\|x=y\|_{xyv}\wedge\|\alpha(z/x)\|_{xyv}$

entonces$_{(0.17)}$ $u\leq\|x=y\|_{xyv}$ y $u\leq\|\alpha(z/x)\|_{xyv}$

$u\leq eq\circ<\|x\|_{xyv},\|y\|_{xyv}>$ (1) y $u\leq\|\alpha\|_{zv}\circ\|<x,v_1,..,v_n>\|$ (2) (lema sust.),

$\|x\|_{xyv}\circ\ker(u)=\|y\|_{xyv}\circ\ker(u)$ (3) (por (1) y (0.16)),

además, por (2) y (0.14) $\exists h$ en $\mathbb{E}$ tal que:

$$\ker(\|\alpha\|_{zv})\circ h=\|<x,v_1,\ldots,v_n>\|_{xyv}\circ\ker(u)$$

$$=<\|x\|_{xyV}\circ ker(u),...,\|v_n\|_{xyV}\circ ker(u)>$$

$$=_{(3)}<\|y\|_{xyV}\circ ker(u),...,\|v\|_{xyV}\circ ker(u)>$$

$$=\|<y,v_1,...,v_n>\|_{xyV}\circ ker(u)$$

Usando otra vez (0.14)

$$u\leq\|\alpha\|_{zV}\circ\|<y,v_1,...,v_n>\|_{xyV}$$

$$u\leq\|\alpha(z/y)\|_{xyV} \text{ (por lema de sustitución)}$$

Como u arbitraria

$$\|x=y\|_{xyV}\wedge\|\alpha(z/x)\|_{xyV}\leq\|\alpha(z/y)\|_{xyV} \blacksquare$$

25.3 PRODUCTOS.

(*i*) $\vdash_I(<x_1,...,x_n>)_i=x_i$

Prueba:

$\vdash_I(<x_1,..,x_n>)_i=x_i$ sii $\|(<x_1,..,x_n>)_i\|_{\mathbf{x}}\circ 1_{A_1\times..\times A_n}=\|x_i\|_{\mathbf{x}}\circ 1_{A_1\times..\times A_n}$

sii $\pi_i\circ 1_{A_1\times..\times A_n}=\pi_i\circ 1_{A_1\times..\times A_n}$

(*ii*) $\vdash_I x=<(x)_1,...,(x)_n>$ donde $x=(x_1,...,x_n)$, x_i de tipo A_i

Prueba:

$\vdash_I x=<(x)_1,...,(x)_n>$

sii$_{(23.3)}$ $\|x\|_{\mathbf{x}}\circ 1_{A_1\times..\times A_n}=\|<(x)_1,...,(x)_n>\|_{\mathbf{x}}\circ 1_{A_1\times..\times A_n}$

sii $1_{\mathbf{x}}\circ 1_{A_1\times..\times A_n}=<\|(x)_1\|_{\mathbf{x}},...,\|(x)_n\|_{\mathbf{x}}>\circ 1_{A_1\times..\times A_n}$

sii $1_{A_1\times..\times A_n}=<\pi_1,...,\pi_n>\circ 1_{A_1\times..\times A_n}$

sii $1_{A_1\times..\times A_n}=1_{A_1\times..\times A_n}\blacksquare$

25.4 COMPRENSION.

$\vdash_I x\in\{x:\alpha\}\leftrightarrow\alpha$ para su demostración se requiere

LEMA: Sea $can':A\times(A\times A_1\times..\times A_n)\longrightarrow A\times A\times A_1\times..\times A_n$ isomorfismo, $can'=<\pi_1,\pi_1\circ\pi_2,\pi_2\circ\pi_2,...,\pi_{n+1}\circ\pi_2>$

$\eta=\langle\pi_1,\pi_3,\ldots,\pi_{n+2}\rangle\circ can':A\times(A\times A_1\times\ldots\times A_n)\longrightarrow A\times A_1\times\ldots\times A_n$

$\xi=\langle\pi_2,\pi_3,\ldots,\pi_{n+1}\rangle:A\times A_1\times\ldots\times A_n\longrightarrow A_1\times\ldots\times A_n$

$can=\langle\pi_1,\pi_1\circ\pi_2,\ldots\pi_n\circ\pi_2\rangle:A\times(A_1\times\ldots\times A_n)\longrightarrow A\times A_1\times\ldots\times A_n$ isomorfismo

$can^{-1}=\langle\pi_1,\langle\pi_2,\ldots,\pi_{n+1}\rangle\rangle$

Entonces $\forall g:A=A_1\times\ldots\times A_n\longrightarrow\Omega$ se tiene $(g\circ\eta)^{\wedge}=(g\circ can)^{\wedge}\circ\xi$.

Demostración:

Dada cualquier $h:A_1\times\ldots\times A_n\longrightarrow X$ se tiene:

(1) $(1_A\times h)\circ can^{-1}\circ\eta=1_A\times(h\circ\xi)$

$(1_A\times h)\circ can^{-1}\circ\eta=$

$=\langle\pi_1,h\circ\pi_2\rangle\circ\langle\pi_1,\langle\pi_2,\ldots,\pi_{n+1}\rangle\rangle\circ\langle\pi_1,\pi_3,\ldots,\pi_{n+2}\rangle\circ\langle\pi_1,\pi_1\circ\pi_2,\ldots,\pi_{n+1}\circ\pi_2\rangle$

$=\langle\pi_1,h\circ\pi_2\rangle\circ\langle\pi_1,\langle\pi_2,\ldots,\pi_{n+1}\rangle\rangle\circ\langle\pi_1,\pi_2\circ\pi_2,\ldots,\pi_{n+1}\circ\pi_2\rangle$

$=\langle\pi_1,h\circ\pi_2\rangle\circ\langle\pi_1,\langle\pi_2\circ\pi_2,\ldots,\pi_{n+1}\circ\pi_2\rangle\rangle$

$=\langle\pi_1,h\circ\langle\pi_2\circ\pi_2,\ldots,\pi_{n+1}\circ\pi_2\rangle\rangle$

$=\langle\pi_1,h\circ\langle\pi_2,\ldots,\pi_{n+1}\rangle\circ\pi_2\rangle=\langle\pi_1,h\circ\xi\circ\pi_2\rangle$

$=1_A\times(h\circ\xi)$

Así tomando $h=(g\circ can)^{\wedge}$, se tiene:

$(1_A\times(g\circ can)^{\wedge})\circ can^{-1}\circ\eta=1_A\times(g\circ can)^{\wedge}\circ\xi$. De aquí

$$
\begin{aligned}
e_A\circ(1_A\times(g\circ can)^{\wedge}\circ\xi)&=e_A\circ(1_A\times(g\circ can)^{\wedge})\circ can^{-1}\circ\eta\\
&=g\circ can\circ can^{-1}\circ\eta\\
&=g\circ\eta
\end{aligned}
$$

$\therefore(g\circ\eta)^{\wedge}=(g\circ can)^{\wedge}\circ\xi_{\blacksquare}$

Prueba (25.4):

Sea x de tipo A (A) y v_1 de tipo A_1 entonces

$$
\begin{aligned}
\|x\in\{x:\alpha\}\|_{xV}&=_{I8}e_A\circ\|\langle x,\{x:\alpha\}\rangle\|_{xV}\\
&=e_A\circ\langle\|x\|_{xV},\|\{x:\alpha\}\|_{xV}\rangle\\
&=_{I6}e_A\circ\langle\|x\|_{xV},(\|\alpha(x/u)\|_{uxV}\circ can')^{\wedge}\rangle\\
&=e_A\circ\langle\pi_1,(\|\alpha\|_{xV}\circ\|\langle u,v_1,\ldots,v_n\rangle\|_{uxV}\circ can')^{\wedge}\rangle \quad \text{(lema sust.)}\\
&=e_A\circ\langle\pi_1,(\|\alpha\|_{xV}\circ\langle\|u\|_{uxV},\|v_1\|_{uxV},\ldots,\|v_n\|_{uxV}\rangle\circ can')^{\wedge}\rangle\\
&=e_A\circ\langle\pi_1,(\|\alpha\|_{xV}\circ\langle\pi_1,\pi_3,\ldots,\pi_{n+2}\rangle\circ can')^{\wedge}\rangle
\end{aligned}
$$

$=e_A\circ<\pi_1,(||\alpha||_{xV}\circ\eta)^\wedge>$

$=e_A\circ<\pi_1,(||\alpha||_{xV}\circ can)^\wedge\circ\xi>$ (lema sust.)

$=e_A\circ(1_A\times(||\alpha||_{xV}\circ can)^\wedge)\circ<\pi_1,\xi>$

$=||\alpha||_{xV}\circ can\circ<\pi_1,\xi>$

$=||\alpha||_{xV}\circ<\pi_1,\pi_1\circ\pi_2,\ldots,\pi_n\circ\pi_2>\circ<\pi_1,<\pi_2,\ldots,\pi_{n+1}>>$

$=||\alpha||_{xV}\circ<\pi_1,\ldots\pi_{n+1}>$

$=||\alpha||_{xV}$

$\therefore\ \vdash_I x\in\{x:\alpha\}\leftrightarrow\alpha$ (por 23.3) ■

25.5. DEBILITAMIENTO $\dfrac{\Gamma\vdash_I\alpha}{\beta,\Gamma\vdash_I\alpha}$

Prueba: Si $\Gamma\vdash_I\alpha$ entonces (por definición) $||\Gamma||_x\leq||\alpha||_x$ entonces (por 24.2) $||\Gamma||_{xy}\leq||\alpha||_{xy}$ donde $y=(y_1,\ldots,y_n)$ son las variables libres de β. Por tanto $||\beta||_{xy}\wedge||\Gamma||_{xy}\leq||\alpha||_{xy}$ entonces $||\beta,\Gamma||_{xy}\leq||\alpha||_{xy}$ entonces (por definición) $\beta,\Gamma\vdash_I\alpha$ ■

25.6. CORTE $\dfrac{\Gamma\vdash_I\alpha \qquad \alpha,\Gamma\vdash_I\beta}{\Gamma\vdash_I\beta}$ Las variables en α son libres en Γ o β.

Prueba: Supongase $||\Gamma||_x\leq||\alpha||_x$ y $||\alpha||_{xy}\wedge||\Gamma||_{xy}\leq||\beta||_{xy}$ donde $y_1,\ldots,y_n$ variables libres de β. Por (24.2) $||\Gamma||_{xy}\leq||\alpha||_{xy}$.

$\therefore||\Gamma||_{xy}=||\Gamma||_{xy}\wedge||\alpha||_{xy}\leq||\beta||_{xy}$

$\therefore||\Gamma||_{xy}\leq||\beta||_{xy}$

$\therefore\ \Gamma\vdash_I\beta$ ■

25.7. SUSTITUCION $\dfrac{\Gamma\vdash_I\alpha}{\Gamma(x/\tau)\vdash_I\alpha(x/\tau)}$ τ libre para x en Γ y τ libre para x en α.

Prueba: $\Gamma\models_I\alpha$ sii $\|\Gamma\|_{xy}\leq\|\alpha\|_{xy}$

Supóngase x es libre en Γ o α, de otra forma el resultado es trivial. Supóngase entonces $\|\Gamma\|_{xy}\leq\|\alpha\|_{xy}$.

Entonces $\|\Gamma\|_{xy}\circ\|<\tau,y_1,\ldots,y_n>\|_{zy}\leq\|\alpha\|_{xy}\circ\|<\tau,y_1,\ldots,y_n>\|_{zy}$ donde $z=(z_1,\ldots,z_n)$ variables libres de τ.

Entonces $\|\Gamma(x/\tau)\|_{zy}\leq\|\alpha(x/\tau)\|_{zy}$ (por lema de sust.(20))

sii $\Gamma(x/\tau)\models_I\alpha(x/\tau)$■

25.8. EXTENSIONALIDAD $\dfrac{\Gamma\models_I x\epsilon\sigma\leftrightarrow x\epsilon\tau}{\Gamma\models_I\sigma=\tau}$ x no libre en Γ,σ o τ.

Prueba: Supóngase $\Gamma\models_I x\epsilon\sigma\leftrightarrow x\epsilon\tau$ sii $\Gamma\models_I x\epsilon\sigma=x\epsilon\tau$ sii$_{(23.3)}$ $\|x\epsilon\sigma\|_{xz}\circ\ker(\|\Gamma\|_{xz})=\|x\epsilon\tau\|_{xz}\circ\ker(\|\Gamma\|_{xz})\ldots(1)$.

Si x de tipo A entonces por (24.3) existe i-isomorfismo que hace que el diagrama siguiente conmute.

$\ker(\|\Gamma\|_z):X\longrightarrow A_1\times\ldots\times A_n,\|\Gamma\|_z:A_1\times\ldots\times A_n\longrightarrow\Omega$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d] & 1 \arrow[d] \\
A_1\times..\times A_n \arrow[r] & \Omega
\end{tikzcd}$$

$\ker(\|\Gamma\|_{xz}):A\times X\longrightarrow A\times A_1\times..\times A_n, i:A\times X\longrightarrow A\times X, 1_A\times\ker(\|\Gamma\|_z):A\times X\longrightarrow A\times A_1\times..\times A_n$ y can forman el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
A\times X \arrow[r] \arrow[d] & A\times X \arrow[d] \\
A\times A_1\times..\times A_n & A\times(A_1\times..\times A_n) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

$$\|x\epsilon\sigma\|_{xZ}\circ\ker(\|\Gamma\|_{xZ})=e_A\circ\|<x,\sigma>\|_{xZ}\circ\ker(\|\Gamma\|_{xZ})$$
$$=e_A\circ<\|x\|_{xZ},\|\sigma\|_{xZ}>\circ\ker(\|\Gamma\|_{xZ})$$
$$=_{(0,24.1)}e_A\circ<\pi_1,\|\sigma\|_Z\circ\pi_2\circ can^{-1}>\circ can\circ(1_A\times\ker(\|\Gamma\|_Z))\circ i$$
$$=e_A\circ(1_A\times\|\sigma\|_Z)\circ(1_A\times\ker(\|\Gamma\|_Z))\circ i$$
$$=e_A\circ(1_A\times\|\sigma\|_Z\circ\ker(\|\Gamma\|_Z))\circ i$$

Análogo para $\|x\epsilon\tau\|\circ\ker(\|\Gamma\|)$ en (1) se tiene:

$$e_A\circ(1_A\times\|\sigma\|_Z\circ\ker(\|\Gamma\|_Z))\circ i=e_A\circ(1_A\times\|\tau\|_Z\circ\ker(\|\Gamma\|_Z))\circ i$$
$$e_A\circ(1_A\times\|\sigma\|_Z\circ\ker(\|\Gamma\|_Z))=e_A\circ(1_A\times\|\tau\|_Z\circ\ker(\|\Gamma\|_Z))$$
$$\|\sigma\|_Z\circ\ker(\|\Gamma\|_Z)=\|\tau\|_Z\circ\ker(\|\Gamma\|_Z)$$
$$\Gamma\models_I\sigma=\tau \text{ (por 23.3)} \blacksquare$$

25.9. EQUIVALENCIA $\dfrac{\alpha,\Gamma\models_I\beta \qquad \beta,\Gamma\models_I\alpha}{\Gamma\models_I\alpha\leftrightarrow\beta}$

Prueba:

Supóngase $\alpha,\Gamma\models_I\beta$ y $\beta,\Gamma\models_I\alpha$ sii$_{(def.)}$
$\|\alpha\|_x\wedge\|\Gamma\|_x\leq\|\beta\|_x$ y $\|\beta\|_x\wedge\|\Gamma\|_x\leq\|\alpha\|_x$ **para $x=(x_1,\ldots,x_n)$, x_i de tipo A_i**

$\therefore$ $\|\alpha\|_x\wedge\|\Gamma\|_x\leq\|\beta\|_x\wedge\|\Gamma\|_x$ y $\|\beta\|_x\wedge\|\Gamma\|_x\leq\|\alpha\|_x\wedge\|\Gamma\|_x$

$\therefore$ $\|\alpha\|_x\wedge\|\Gamma\|_x=\|\beta\|_x\wedge\|\Gamma\|_x$ (1)

entonces $\|\alpha\|_x\circ\ker(\|\Gamma\|_x)=(\|\alpha\|_x\circ\ker(\|\Gamma\|_x)\wedge T_{A_1\times\ldots\times A_n}$
$$=(\|\alpha\|_x\circ\ker(\|\Gamma\|_x))\wedge(\|\Gamma\|_x\circ\ker(\|\Gamma\|_x))$$
$$=_{(0.18)}(\|\alpha\|_x\wedge\|\Gamma\|_x)\circ\ker(\|\Gamma\|_x)$$
$$=_{(1)}(\|\beta\|_x\wedge\|\Gamma\|_x)\circ\ker(\|\Gamma\|_x)$$
$$=_{(0.18)}(\|\beta\|_x\circ\ker(\|\Gamma\|_x))\wedge(\|\Gamma\|_x\circ\ker(\|\Gamma\|_x))$$
$$=(\|\beta\|_x\circ\ker(\|\Gamma\|_x))\wedge T$$
$$=\|\beta\|_x\circ\ker(\|\Gamma\|_x)$$
$$\therefore\ \Gamma\models_I\alpha\leftrightarrow\beta \text{ (por 23.3)} \blacksquare$$

Esto completa la prueba del teorema de validez.

26. COROLARIO.

TODA TEORIA LOCAL DE CONJUNTOS PURA ES CONSISTENTE.

Demostración:

Sea $\mathcal{L}$ lenguaje local y L la correspondiente teoría local de conjuntos pura (es decir, L esta generada por el conjunto vacío de axiomas, es decir, $:\alpha \in L$ sii $\vdash_{\mathcal{L}}\alpha$).

Sea I una interpretación de $\mathcal{L}$ en el topo *FINSET* de conjuntos finitos. Se tiene que 1_Ies $1=\{0\}$, Ω_I es $2=\{0,1\}$, y para todo tipo básico A de $\mathcal{L}$, A_I es un conjunto finito arbitrario no vacío. I es entonces extendida a tipos arbitrarios en forma recursiva: $(PA)_I$ es $P(A_I)$ y $(A_1\times..\times A_n)_I$ es $(A_1)_I\times..\times(A_n)_I$. Finalmente, I es extendida a símbolos funcionales como sigue: para todo símbolo funcional f de signatura $A \longrightarrow B$, f_I para todo morfismo de A_I a B_I.

Ahora si L es inconsistente (se da el caso $\vdash_L$falso, falso es probable de L) se tiene $\vdash$falso y $\vdash\alpha$, por el Teorema de Validez, $\vdash_I\alpha$ para toda fórmula α. Sean u,v variables de tipo P1, entonces

$\vdash_I u=v$ sii$_{(23.3)}$ $\|u\|_{uv}\circ\ker(\|\emptyset\|_{uv})=\|v\|_{uv}\circ\ker(\|\emptyset\|_{uv})$.

$$\ker(\|\emptyset\|_{uv})=1_{P1\times P1}$$

sii $\|u\|_{uv}=\|v\|_{uv}$

sii $\pi_1=\pi_1$, donde $\pi_i : P1\times P1 \longrightarrow P1$ i=1,2 en *FINSET*!.

$P1=2=\{0,1\}$, $\pi_1=\|u\|_{uv}$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d] & 1=\{0\} \arrow[d, "T"] \\
P1\times P1 \arrow[r, "\pi_1"'] & \Omega=2
\end{tikzcd}$$

Observación. (Restricción de variables libres en la regla de corte).

Esta restricción no puede ser suprimida si el Teorema de Validez está establecido, porque da la posibilidad de interpretaciones vacías de tipos. Por ejemplo, supóngase que I es una interpretación en *Set* de un lenguaje local $\mathscr{L}$, tal que $A_I=\emptyset$ para algun tipo A. Si x es variable de tipo A, se tiene que para toda fórmula α, $\|\alpha\|_{xy}=(0\longrightarrow 2)$ donde $y=(y_1,..,y_n)$, y_i de tipo A_i y $0=\emptyset$

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[d] \\ \emptyset=\emptyset\times A_1\times..\times A_n \arrow[r, "\|\alpha\|_{xy}"'] & \Omega=2 \end{tikzcd} \qquad \therefore\ \|\alpha\|_{xy}=(0\longrightarrow 2) \quad \forall\alpha \text{ fórmula.}$$

En particular, si $\alpha\equiv x=x$, $(0\longrightarrow 2)=\|x=x\|_{xy}\leq\|\alpha\|_{xy}$, es decir,

$$x=x\vdash_I\alpha \quad \text{pero} \quad \vdash_I x=x,$$

si la regla de corte sin alguna restricción en variables libres fue válido., se sigue que $\vdash_I\alpha$ para toda fórmula α. Entonces por el argumento en (26) se tiene que $\pi_1=\pi_2:2\times 2\longrightarrow 2$ en *Set* !. (En efecto, esta situación no puede originarse si $A_I\neq\emptyset$,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & \{0\} \arrow[d] \\ A\times A_1\times..\times A_n \arrow[r, "\|\alpha\|_{xy}"'] & 2 \end{tikzcd}$$

o más generalmente, cada vez que I es una interpretación en un topo $\mathbb{E}$ para el cual A_I tiene un $\mathbb{E}$-elemento. Esto es la base de la prueba para el problema propuesto por Fourman (1977).).

Nótese que, se puede dejar la restricción en variables libres en la regla de corte sin perder de vista la prueba. Para este fin, se

Observación. (Restricción de variables libres en la regla de corte).

Esta restricción no puede ser suprimida si el Teorema de Validez está establecido, porque da la posibilidad de interpretaciones vacías de tipos. Por ejemplo, supóngase que I es una interpretación en *Set* de un lenguaje local $\mathcal{L}$, tal que $A_I=\emptyset$ para algun tipo A. Si x es variable de tipo A, se tiene que para toda fórmula α, $\|\alpha\|_{xy}=(0\longrightarrow 2)$ donde $y=(y_1,\ldots,y_n)$, y_i de tipo A_i y $0=\emptyset$

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[d] \\ \emptyset=\emptyset\times A_1\times\ldots\times A_n \arrow[r, "\|\alpha\|_{xy}"'] & \Omega=2 \end{tikzcd} \qquad \therefore\ \|\alpha\|_{xy}=(0\longrightarrow 2) \qquad \forall\alpha \text{ fórmula.}$$

En particular, si $\alpha\equiv x=x$, $(0\longrightarrow 2)=\|x=x\|_{xy}\leq\|\alpha\|_{xy}$, es decir,

$$x=x\models_I\alpha \quad \text{pero} \quad \models_I x=x,$$

si la regla de corte sin alguna restricción en variables libres fue válido., se sigue que $\models_I\alpha$ para toda fórmula α. Entonces por el argumento en (26) se tiene que $\pi_1=\pi_2:2\times 2\longrightarrow 2$ en *Set* !. (En efecto, esta situación no puede originarse si $A_I\neq\emptyset$,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & \{0\} \arrow[d] \\ A\times A_1\times\ldots\times A_n \arrow[r, "\|\alpha\|_{xy}"'] & 2 \end{tikzcd}$$

o más generalmente, cada vez que I es una interpretación en un topo $\mathbb{E}$ para el cual A_I tiene un $\mathbb{E}$-elemento. Esto es la base de la prueba para el problema propuesto por Fourman (1977).).

Nótese que, se puede dejar la restricción en variables libres en la regla de corte sin perder de vista la prueba. Para este fin, se escribe, para todo secuente $\Gamma:\alpha$, y toda interpretación I,

$$\Gamma\models_{IX}\alpha \qquad \text{para} \qquad \|\Gamma\|_X\leq\|\alpha\|_X,$$

La prueba de (25.6) demuestra que la inferencia

$$\frac{\alpha,\Gamma\models_{IX}\beta \qquad \Gamma\models_{IX}\alpha}{\Gamma\models_{IX}\beta}$$

es válida. Así, si se define una nueva relación probable. $\Gamma\vdash_X\alpha$ por $\Gamma\vdash_X\alpha$ sii $\Gamma\models_{IX}\alpha$ para todas las interpretaciones I, $\vdash_X$ satisface la regla de corte 'no restringida'.

$$\frac{\alpha,\Gamma\vdash_X\beta \qquad \Gamma\vdash_X\alpha}{\Gamma\vdash_X\beta}$$

ésta es, en efecto, la proposición establecida por LAMBEK Y SCOTT (1986).

TEOREMA DE COMPLETEZ.

Ahora se establecerá el inverso para el teorema de validez -el teorema de completez. Dada una teoría local de conjuntos $\mathscr{S}$ en un lenguaje local $\mathscr{L}$ en $C(\mathscr{S})$- de $\mathscr{L}$ en $C(\mathscr{S})$ por:

$A_{C(\mathscr{S})}=U_A$ para cada símbolo de tipo A

$f_{C(\mathscr{S})}=U_A\longrightarrow U_B$ para cada símbolo funcional f de signatura $A\longrightarrow B$.
$x\longmapsto f(x)$

Para cada término τ, se escribe $\|\tau\|_X$ para $\|\tau\|_{C(\mathscr{S}),X}$. Entonces se tiene:

27. PROPOSICION.

$$\|\tau\|_{\mathbf{x}}=(\mathbf{x}\longmapsto\tau)$$

Prueba: Por inducción en la formación de τ.

Sea $\mathbf{x}=(x_1,..,x_n)$ donde x_i de tipo A_i.

i) $\tau\equiv*$

$\|\tau\|=\|*\|=!_{U_{A_1}\times..\times U_{A_n}}$ por otro lado $*$ es de tipo 1

$\therefore\ (\mathbf{x}\longmapsto*)=!_{U_{A_1}\times..\times U_{A_n}}$

ii) $\tau\equiv x_i$

$$\|\tau\|_{\mathbf{x}}=\|x_i\|_{\mathbf{x}}=\pi_i$$
$$=(<x_1,...,x_n>\longmapsto x_i)$$
$$=(\mathbf{x}\longmapsto x_i)$$
$$=(\mathbf{x}\longmapsto\tau)$$

iii) $\tau'\equiv f(\tau)$

$$\|\tau'\|_{\mathbf{x}}=\|f(\tau)\|_{\mathbf{x}}=f_{C(\mathcal{Y})}\circ\|\tau\|_{\mathbf{x}}$$
$$\underset{HI}{=}f_{C(\mathcal{Y})}\circ(\mathbf{x}\longmapsto\tau)$$
$$=(\mathbf{x}\longmapsto f_{C(\mathcal{Y})}(\tau))$$
$$=(\mathbf{x}\longmapsto\tau')$$

iv) $\tau\equiv<\tau_1,...,\tau_n>$

$$\|\tau\|_{\mathbf{x}}=\|<\tau_1,...,\tau_n>\|_{\mathbf{x}}$$
$$=<\|\tau_1\|_{\mathbf{x}},...,\|\tau_n\|_{\mathbf{x}}>$$
$$\underset{HI}{=}<(\mathbf{x}\longmapsto\tau_1),...,(\mathbf{x}\longmapsto\tau_n)>$$
$$=(\mathbf{x}\longmapsto<\tau_1,..,\tau_n>)$$
$$=(\mathbf{x}\longmapsto\tau)$$

v) $\tau'\equiv(\tau)_i$

$$\|\tau'\|_{\mathbf{x}}=\|(\tau)_i\|_{\mathbf{x}}=\pi_i\circ\|\tau\|_{\mathbf{x}}$$
$$\underset{HI}{=}\pi_i\circ(\mathbf{x}\longmapsto\tau)$$
$$=(\mathbf{x}\longmapsto\pi_i(\tau))$$

$=(x \longmapsto (\tau)_1)$

$=(x \longmapsto \tau')$

vi) $\tau' \equiv \sigma = \tau$ $\quad \sigma, \tau$ de tipo $\mathbb{C}$

$\|\tau'\|_x = \|\sigma=\tau\|_x = eq_C \circ <\|\sigma\|_x, \|\tau\|_x>$

$=_{HI} eq_C \circ <(x \longmapsto \sigma), (x \longmapsto \tau)>$

$= eq_C \circ (x \longmapsto <\sigma, \tau>)$

$=(x \longmapsto eq_C \circ <\sigma, \tau>)$

$=(x \longmapsto \sigma=\tau)$

vii) $\tau' \equiv \sigma \in \tau$, σ de tipo $\mathbb{C}$

$\|\tau'\|_x = \|\sigma\in\tau\|_x = e_C \circ \|<\sigma, \tau>\|_x$

$= e_C \circ <\|\sigma\|_x, \|\tau\|_x>$

$=_{HI} e_C \circ <(x \longmapsto \sigma), (x \longmapsto \tau)>$

$= e_C \circ (x \longmapsto <\sigma, \tau>)$

$=(x \longmapsto e_C \circ <\sigma, \tau>)$

$=(x \longmapsto \sigma\in\tau)$

(viii) $\tau \equiv \{x:\alpha\}$, $z=(z_1, ..z_n)$ y $y=(y_1, ..., y_n)$

$\|\{x:\alpha\}\|_z = (\|\alpha(x/u)\|_{uz} \circ can)^\wedge$

$=[(<u, z_1, ..., z_n> \longmapsto \alpha(x/u)) \circ (<x,y> \longmapsto <x, y_1, ..., y_n>)]^\wedge$

$=[<x,y> \longmapsto \alpha(z_1/y_1)..(z_n/y_n)]^\wedge$

$=(y \longmapsto \{x:\alpha(z_1/y_1)..(z_n/y_n)\})$

$=(z \longmapsto \{x:\alpha\})$ ∎

28. COROLARIO. $\Gamma \vdash_{C(\mathscr{S})} \alpha$ sii $\Gamma \vdash_{\mathscr{S}} \alpha$

Prueba:

Sea $x=(x_1, ..., x_n)$, donde x_i de tipo A_i

Caso particular.

$\vdash_{C(\mathscr{S})} \alpha$ sii $\|\emptyset\|_{C(\mathscr{S})x} \leq \|\alpha\|_{C(\mathscr{S})x}$

sii $T \leq \|\alpha\|_{C(\mathscr{S})x} \leq T$, T maxima sii $\|\alpha\|_X=T$

sii$_{(27)}$ $(x\longrightarrow\alpha)=(x\longrightarrow \text{verdad})$

sii$_{(1)}$ $\vdash_{\mathcal{S}}\alpha=\text{verdad}$

sii

$$\dfrac{\text{verdad} \qquad\qquad \dfrac{:\alpha=\text{verdad}, \quad \alpha=\text{verdad},\text{verdad}:\alpha\ (i)}{\text{verdad}:\alpha\ (b)}}{:\alpha\ (b)}$$

sii $\vdash_{\mathcal{S}}\alpha$

(1)

$\|\alpha\|_X\circ\ker(\|\alpha\|_X)=T_X,\ \ (x\longrightarrow\alpha)\circ\ker(\|\alpha\|_X)=T_X,\ \ (x\longrightarrow T)\circ\ker(\|\alpha\|_X)=T_X$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d] & 1 \arrow[d, "T"] \\
A_1\times\ldots\times A_n \arrow[r, "\|\alpha\|_X"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

Caso general

$\Gamma\vdash_S\alpha$ sii$_{(3.2.1)}$ $\wedge\Gamma\vdash_{\mathcal{S}}\alpha$

sii$_{(2.1)}$ $\vdash_{\mathcal{S}}\wedge\Gamma\Rightarrow\alpha$

sii$_{(\text{caso particular})}$ $\models_{C(\mathcal{S})}\wedge\Gamma\Rightarrow\alpha$

sii$_{(\text{teo. validez})}$ $\wedge\Gamma\models_{C(\mathcal{S})}\alpha$

sii $\Gamma\models_{C(\mathcal{S})}\alpha$■

Así, (28) dice que $C(\mathcal{S})$ puede ser considerado como un modelo cánonico de $\mathcal{S}$.

29. TEOREMA DE COMPLETUD.

(*i*) $\Gamma\models\alpha$ implica $\Gamma\vdash\alpha$

(*ii*) $\dfrac{\Gamma_1\models\alpha_1,\ldots,\Gamma_n\models\alpha_n}{\Delta\models\beta}$ implica $\dfrac{\Gamma_1:\alpha_1,\ldots,\Gamma_n:\alpha_n}{\Delta:\beta}$

(iii) $\Gamma\models_S\alpha$ implica $\Gamma\vdash_S\alpha$.

Prueba:

(i) Si $\Gamma\models\alpha$, entonces en particular $\Gamma\models_{C(L)}\alpha$ así que $\Gamma\vdash\alpha$ por (28).

(ii) $S=\{\Gamma_1:\alpha_1,..,\Gamma_n:\alpha_n\}$ conjunto de secuentes.

$$\Delta\vdash_S\beta \text{ sii } \frac{\Gamma_1:\alpha_1,..,\Gamma_n:\alpha_n}{\Delta:\beta} \quad (1)$$

$$\text{y} \qquad \Gamma_1\vdash_S\alpha_1,..,\Gamma_n\vdash_S\alpha_n \quad (2)$$

$$\text{supóngase } \frac{\Gamma_1\models\alpha_1,..,\Gamma_n\models\alpha_n}{\Delta\models\beta} \quad (3)$$

Entonces por (2) y (28) se tiene $\Gamma_1\models_{C(S)}\alpha_1,..,\Gamma_n\models_{C(S)}\alpha_n$ (4)
por (4) y (3) se tiene $\Delta\models_{C(S)}\beta$, de esto y (28) se obtiene $\Delta\vdash_S\beta$.

$$(1) \text{ implica } \frac{\Gamma_1:\alpha_1,..,\Gamma_n:\alpha_n}{\Delta:\beta}$$

(iii) Por (28), C(S) es un modelo de S, y usando otra vez (28), $\Gamma\models_S\alpha$ implica $\Gamma\models_{C(S)}\alpha$ implica $\Gamma\vdash_S\alpha$∎

TEOREMA DE EQUIVALENCIA.

Se demostrará que todo topo es equivalente a un topo 'linguístico'. Para hacer esto se tomará un topo $\mathbb{E}$ y se construirá una teoría Th($\mathbb{E}$) la cual determinará $\mathbb{E}$ bajo la equivalencia.

Sea $\mathbb{E}$ un topo con objeto terminal específico $1_{\mathbb{E}}$, clasificador de subobjetos $\Omega_{\mathbb{E}}$, productos y objeto potencia. Se define el Lenguaje Local $\mathscr{L}(\mathbb{E})$ determinado por $\mathbb{E}$ (también llamado el Lenguaje 'Interno' de $\mathbb{E}$) como sigue.

Para cada $\mathbb{E}$-objeto A, $\mathscr{L}(\mathbb{E})$ tiene un correspondiente símbolo básico **A**.

Para especificar los símbolos funcionales de $\mathscr{L}(\mathbb{E})$, se asocia con cada símbolo de tipo **A** el $\mathbb{E}$-objeto $\mathbf{A}_{\mathbb{E}}$ recursivamente como sigue:

$\mathbf{A}_{\mathbb{E}}=A$ para todo símbolo básico **A**

$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})_{\mathbb{E}}=\mathbf{A}_{\mathbb{E}}\times\mathbf{B}_{\mathbb{E}}$

$(\mathbf{PA})_{\mathbb{E}}=P(\mathbf{A}_{\mathbb{E}})$

Ahora los símbolos funcionales de $\mathscr{L}(\mathbb{E})$ son ternas $(f,\mathbf{A},\mathbf{B})$ donde **A**, **B** son símbolos de tipo de $\mathscr{L}(\mathbb{E})$ y $f:\mathbf{A}_{\mathbb{E}}\longrightarrow\mathbf{B}_{\mathbb{E}}$ en $\mathbb{E}$. La signatura de $(\mathbf{f},\mathbf{A},\mathbf{B})$ es $\mathbf{A}\longrightarrow\mathbf{B}$.

A menudo se escribe **f** para $(f,\mathbf{A},\mathbf{B})$ cuando no hay confusión. En este caso **f** será llamado el símbolo funcional asociado al morfismo f.

La interpretación natural -denotada por E- de $\mathscr{L}(\mathbb{E})$ en $\mathbb{E}$ esta determinada por las asignaciones.

$\mathbf{A}_E=A$ para todo símbolo básico **A**.

$\mathbf{f}_E=f$ para todo símbolo funcional **f**.

La teoría local de conjuntos $Th(\mathbb{E})$ -la teoría local de conjuntos asociada de $\mathbb{E}$- esta definida para ser la Teoría en $\mathscr{L}(\mathbb{E})$ cuyos axiomas son todos los secuentes $\Gamma:\alpha$ tal que $\Gamma\models_E\alpha$ bajo la interpretación natural de $\mathscr{L}(\mathbb{E})$ en $\mathbb{E}$.

30. PROPOSICION

$$G\vdash_{Th(\mathbb{E})}\alpha \text{ sii } \Gamma\models_E\alpha \qquad \text{por el teorema de validez.}$$

Prueba:

Sea τ un término de $\mathcal{L}(\mathbb{E})$ de tipo B con variables libres entre $x_1,..,x_n$ de tipos $A_1,..,A_n$ respectivamente. Entonces $||\tau||_{E,\mathbf{x}}$ (el cual se abrevia $||\tau||_{\mathbf{x}}$) es un $\mathbb{E}$-morfismo; se escribirá $\lambda\mathbf{x}.\tau$ para el símbolo funcional $(||\tau||_{\mathbf{x}},A_1\times..\times A_n,B)$ en $\mathcal{L}(\mathbb{E})$. Notese entonces que $\lambda\mathbf{x}.\tau$ tiene signatura $A_1\times..\times A_n \longrightarrow B$, y que $(\lambda\mathbf{x}.\tau)_E=||\tau||_{\mathbf{x}}$.

Como consecuencia, se tiene el siguiente resultado, el cual asegura que, en Th($\mathbb{E}$), todo término de $\ell(\mathbb{E})$ esta "representado" por un símbolo funcional.

31. PROPOSICION.

$$\vdash_{Th(\mathbb{E})}\tau=\lambda\mathbf{x}.\tau(<x_1,..,x_n>).$$

Prueba:

$||\tau||_{\mathbf{x}}=||\tau||_{\mathbf{x}}\circ||<x_1,..,x_n>||_{\mathbf{x}}$

$_{(def.)}=||\lambda\mathbf{x}.\tau(<x_1,..,x_n>)||_{\mathbf{x}}$

$_{(23.3)}\Rightarrow\ \vdash_E\tau=\lambda\mathbf{x}.\tau(<x_1,..,x_n>)$

$_{(30)}\Rightarrow\ \vdash_{Th(\mathbb{E})}\tau=\lambda\mathbf{x}.\tau(<x_1,..,x_n>)$ ∎

La proposición (31) demuestra que los símbolos funcionales en Th($\mathbb{E}$) son extendidos.

32. PROPOSICION

$$\vdash_{Th(\mathbb{E})}f(x)=g(x) \text{ sii } f=g.$$

Prueba:

$\vdash_{Th(\mathbb{E})}f(x)=g(x)$ sii$_{(30)}$ $\vdash_E f(x)=g(x)$

sii$_{(Def.)}$ $||f(x)=g(x)||_x=T$

sii$_{(17)}$ $eq\circ<f,g>=T$

sii$_{(0.19.iii)}$ $f=g$ ∎

Se caracterizan los monomorfismos en $\mathbb{E}$.

33. PROPOSICION

$$f \text{ es mono sii } f(x)=f(y) \vdash_{Th(\mathbb{E})} x=y.$$

Prueba:

$\rightarrow$] Supónemos f mono

tenemos $f(x)=f(y) \vdash_{Th(\mathbb{E})} f(x)=f(y)$ (ta)

(por 31) $f(x)=f(y) \vdash_{Th(\mathbb{E})} f(\lambda xy.x(<x,y>))=f(\lambda xy.y(<x,y>))$

(por 30) $f(x)=f(y) \vdash_{\mathbb{E}} f(\lambda xy.x(<x,y>))=f(\lambda xy.y(<x,y>))$

(por 23.3) $\|f(\lambda.xy.x(<x,y>))\|_{xy}\circ \ker(\|f(x)=f(y)\|_{xy})=$

$=\|f(\lambda xy.y(<x,y>))\|_{xy}\circ \ker(\|f(x)=f(y)\|_{xy})$

$f\circ\|\lambda.xy.x(<x,y>)\|_{xy}\circ \ker(\|f(x)=f(y)\|_{xy})=$

$=f\circ\|\lambda xy.y(<x,y>))\|_{xy}\circ \ker(\|f(x)=f(y)\|_{xy})$

$f\circ\|x\|_{xy}\circ\|<x,y>\|_{xy}\circ \ker(\|f(x)=f(y)\|_{xy})=$

$=f\circ\|y\|_{xy}\circ\|<x,y>\|_{xy}\circ \ker(\|f(x)=f(y)\|_{xy})$

(por ser f mono) $\|x\|_{xy}\circ \ker(\|f(x)=f(y)\|_{xy})=\|y\|_{xy}\circ \ker(\|f(x)=f(y)\|_{xy})$

(por 23.3) $f(x)=f(y) \vdash_{\mathbb{E}} x=y$

(por 30) $f(x)=f(y) \vdash_{Th(\mathbb{E})} x=y$

$\leftarrow$] Supónemos $f(x)=f(y) \vdash x=y$ (*') y $f\circ g=f\circ h$ entonces

(por 32) $\vdash_{Th(\mathbb{E})} f(g(x))=f(h(x))$

(por 30) $\vdash_{\mathbb{E}} f(g(x))=f(h(x))$ (*)

(de (*') y 30) $f(x)=f(y) \vdash_{\mathbb{E}} x=y$

(por (*)) $\vdash_{\mathbb{E}} g(x)=h(x)$

(por 30) $\vdash_{Th(\mathbb{E})} g(x)=h(x)$

(por 32) $g=h$

$\therefore$ f es mono. ■

El objetivo ahora es demostrar que Th(E) satisface la eliminación de descripciones de todas las fórmulas. Para ello los siguientes lemas.

34. LEMA. Son equivalentes:

(i) $\vdash_{Th(\mathbb{E})} \alpha(y_1/\tau_1,..,y_n/\tau_n)$

(ii) $\|\alpha\|_{\mathbf{y}} \circ f = \|<\tau_1,..,\tau_n>\|_{\mathbf{x}}$ para todo morfismo f, donde $\mathbf{y}=(y_1,..,y_n)$, $y_1,..,y_n$ son variables libres de α y τ_i es libre para y_i en α para cada i.

Prueba:

$\vdash_{Th(\mathbb{E})} \alpha(y_1/\tau_1,..,y_n/\tau_n)$ sii$_{(30)}$ $\vdash_{\mathbb{E}} \alpha(y_1/\tau_1,..,y_n/\tau_n)$

sii $\|\alpha(y_1/\tau_1,..,y_n/\tau_n)\| = T_{A_1\times..\times A_n}$

para cada x_i de tipo A_i

sii$_{(20)}$ $\|\alpha\|_{\mathbf{y}} \circ \|<\tau_1,..,\tau_n>\|_{\mathbf{x}}$

sii$_{(0.19.1)}$ $\exists f$ tal que

$\ker(\|\alpha\|_{\mathbf{y}}) \circ f = \|<\tau_1,..,\tau_n>\|_{\mathbf{x}}$ ∎

35. LEMA. Si m mono en $\mathbb{E}$, entonces $\vdash_{Th(\mathbb{E})} \chi(m)(x) \leftrightarrow \exists y.x=m(y)$.

Prueba:

De $\vdash_{Th(\mathbb{E})} \exists(m(z)=m(y))$ y (34) $\exists f$ morfismo tal que

$\ker(\|\exists y.x=m(y)\|_x) \circ f = \|m(z)\|_z$

$= m$ (por ser la interpretación)

$\cong \ker(\chi(m))$

$= \ker(\|\chi(m)(x)\|_x)$

entonces

$\|\chi(m)(x)\|_x \leq \|\exists y.x=m(y)\|_x$

$\chi(m)(x) \vdash_{\mathbb{E}} \exists y.x=m(y)$

$\chi(m)(x) \vdash_{Th(\mathbb{E})} \exists y.x=m(y)$ (por 30)

por otro lado

de $\chi(m)\circ m = T$ y (23.1) se tiene

$\vdash_{\mathbb{E}} \chi(m)(m(y))$ sii$_{(30)}$ $\vdash_{Th(\mathbb{E})} \chi(m)(m(y))$

y de $x=m(y) \vdash_{Th(\mathbb{E})} \chi(m)(x)$, se tiene

$$\exists y.x=m(y)\vdash_{Th(\mathbb{E})}\chi(m)(x)$$

y por equivalencia tenemos el resultado deseado. ■

36. TEOREMA (Eliminación de descripción en Th($\mathbb{E}$)).

Si $\vdash_{Th(\mathbb{E})}\exists!y\alpha$, entonces $\exists!$ $\mathbb{E}$-morfismo f tal que $\vdash_{Th(\mathbb{E})}\alpha(y/f(<x_1,..,x_n>))$ donde $x_1,..,x_n,y$ son variables libres de α.

Prueba:

Supóngase $\vdash_{Th(\mathbb{E})}\exists!y\alpha$.

$\Rightarrow\ \vdash_{Th(\mathbb{E})}\exists z.\{y:\alpha\}=\{z\}$

$_{(31)}\Rightarrow\ \vdash_{Th(\mathbb{E})}\exists z[\{y:\alpha\}=\lambda z.\{z\}(z)]_{(1)}$

$_{(33)}\Rightarrow\ \|\{z\}\|_z$ es mono $[\{z\}(x)=\{z\}(y)\vdash_{Th(\mathbb{E})}x=y]$

$_{(35)(1)}\Rightarrow$ se puede escribir m para $\|\{z\}\|_z$ entonces m es $\lambda z.\{z\}$,

$\vdash_{Th(\mathbb{E})}\chi(m)(\{y:\alpha\})$

$_{(34)}\Rightarrow\ \exists h$ morfismo tal que $ker(m)\circ h=\|\{y:\alpha\}\|_x \therefore ker(m)\cong m$

$\Rightarrow\ \exists f$ morfismo tal que $m\circ f=\|\{y:\alpha\}\|_x$

pero $m\circ f=\|\{f(<x_1,..,x_n>)\}\|_x$ y así $\|\{y:\alpha\}\|_x=\|\{f(<x_1,..,x_n>)\}\|_x$

$\therefore\ \vdash_{\mathbb{E}}\{y:\alpha\}=\{f(<x_1,..,x_n>)\}$

$_{(30)}\Rightarrow\ \vdash_{Th(\mathbb{E})}\{y:\alpha\}=\{f(<x_1,..,x_n>)\}$

$\therefore\ \vdash_{Th(\mathbb{E})}y=f(<x_1,..,x_n>)\leftrightarrow\alpha$

$\vdash_{Th(\mathbb{E})}\alpha(y/f(<x_1,..,x_n>))$

Si g satisface $\vdash_{Th(\mathbb{E})}\alpha(y/g(<x_1,..,x_n>))$, entonces

$$\vdash_{Th(\mathbb{E})}g(<x_1,..,x_n>)=f(<x_1,..,x_n>)$$

$\Rightarrow f=g$ ■

37. TEOREMA DE EQUIVALENCIA.

Para todo topo $\mathbb{E}$, $\mathbb{E}\cong\mathbb{C}(Th(\mathbb{E}))$.

Prueba:

Se define $F:\mathbb{E}\longrightarrow\mathbb{C}(Th(\mathbb{E}))$ como $F(A)=U_A$ para $\mathbb{E}$-objeto A, y si

$f:A \longrightarrow B$ es un morfismo de $\mathbb{E}$, $F(f)=(x \longmapsto f(x)):U_A \longrightarrow U_B$.

F es un funtor porque:

$F(g\circ f)=\{<x,z>:g(f(x))=z\}$ $F(1_A)=\{<x,y>:x=y\}$

$=\{<x,z>:\exists y(f(x)=y\wedge g(y)=z)\}$ $=(x \longmapsto 1_A(x)):U_A \longrightarrow U_A$

$=Fg\circ Ff$ $=1_{U_A}=1_{F(A)}$

Deseamos que F sea una equivalencia de categorias. Para hacer esto se contruye un casi inverso (1.15) $G:\mathbb{C}(Th(\mathbb{E})) \longrightarrow \mathbb{E}$ para F.

Dado $X=\{x:\alpha\}$ de tipo PA en $\mathbb{C}(Th(\mathbb{E}))$, se define $GX=dom(ker(\|\alpha\|_x))$ en $\mathbb{E}$. Si $f:X=\{x:\alpha\} \longrightarrow Y=\{y:\beta\}$ en $\mathbb{C}(Th(\mathbb{E}))$ se define $Gf:GX \longrightarrow GY$ en $\mathbb{E}$ como sigue. Escribiendo i para el $\mathbb{E}$-morfismo $ker(\|\alpha\|_x)$ se tiene:

$ker(\|\alpha\|_x)\circ 1_{GX}=i=\|i(u)\|_u$,

(34)$\Rightarrow$ $\vdash_{Th(\mathbb{E})}\alpha(x/i(u))$, (1) donde u variable de tipo GX.

$\Rightarrow$ $\alpha(x)\vdash_{Th(\mathbb{E})}\exists!<x,y>\in f$ donde por sustitución en x y transitividad se tiene $\vdash_{Th(\mathbb{E})}\exists!y<i(u),y>\in f$

Sea j para $ker(\|\beta\|)$. Por tanto j es mono

$\Rightarrow\vdash_{Th(\mathbb{E})}\exists!y<i(u),y>\in f$

$\Rightarrow$ $\vdash_{Th(\mathbb{E})}\exists!v<i(u),j(v)>\in f$ (por biyección entre variables)

(v de tipo GY)

(33)$\Rightarrow$ $j(v)=j(y)\vdash_{Th(\mathbb{E})}v=y$ y es única por (33)

(36)$\Rightarrow$ $\exists!g:GX \longrightarrow GY$ tal que $\vdash_{Th(\mathbb{E})}<i(u),j(g(u))>\in f$ (2)

Se define $G(f)=g=Gf$

De la definición de GX, el diagrama siguiente es un producto fibrado:

$$\begin{tikzcd} GX \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & 1 \arrow[d, "T"] \\ A \arrow[r, "\|x\in X\|_x"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

y de (2), para toda $f\colon X\longrightarrow Y$ en $\mathbb{C}(Th(\mathbb{E}))$, Gf es el único morfismo $GX\longrightarrow GY$ tal que $\vdash_{Th(\mathbb{E})}<i(u),(j\circ Gf)(u)>\in f$ (3) (obtenido de sustituir g por Gf en (2)).

Si $g:Y=\{y:\beta\}\longrightarrow Z=\{z:\gamma\}$ en $\mathbb{C}(Th(\mathbb{E}))$, sea k para el $\mathbb{E}$-morfismo $ker(\|\gamma\|_z)$ entonces se tiene $ker(\|\gamma\|_z)\circ 1_{GZ}=k=\|k(w)\|_w$. Entonces

por (3) $\vdash_{Th(\mathbb{E})}<i(u),(k\circ Gg\circ Gf)(u)>\in g\circ f$,

$\therefore G(g\circ f)=Gg\circ Gf$.

Más aún $\vdash_{Th(\mathbb{E})}<i(u),i(u)>\in 1_X$,

$\therefore G1_X=1_{GX}$. G es un funtor .

por (1) $\vdash_{Th(\mathbb{E})}i(u)\in X$,

Sea $FGX=U_{GX}=\{x_{GX}:verdad\}$ y $\eta_X:U_{GX}\longrightarrow X$ en $\mathbb{C}(Th(\mathbb{E}))\longrightarrow\mathbb{E}$,
$u\longmapsto i(u)$

$X=\{x:\alpha\}\xrightarrow{f}Y=\{y:\beta\}\xrightarrow{g}Z=\{z:\gamma\}$, $GX=dom(ker(\|\alpha\|_x))$, $GY=dom(ker(\|\beta\|_y))$ y $GZ=dom(ker(\|\gamma\|_z))$ en $\mathbb{E}$. Se definen $Gf:GX\longrightarrow GY$ y $Gg:GY\longrightarrow GZ$ como sigue. Escribiendo para los $\mathbb{E}$-morfismos:

i para $ker(\|\alpha\|_x)$ mono se tiene $ker(\|\alpha\|_x)\circ 1_{GX}=i=\|i(u)\|_u$.

j para $ker(\|\beta\|_y)$ mono se tiene $ker(\|\beta\|_y)\circ 1_{GY}=j=\|j(v)\|_v$.

k para $ker(\|\gamma\|_z)$ mono se tiene $ker(\|\gamma\|_z)\circ 1_{GZ}=k=\|k(w)\|_w$.

por (34) $\vdash_{Th(\mathbb{E})}\alpha(x/i(u))$ (1.1)

$\vdash_{Th(\mathbb{E})}\beta(y/j(v))$

$\vdash_{Th(\mathbb{E})}\gamma(z/k(w))$

$\alpha(x)\vdash_{Th(\mathbb{E})}\exists!z<x,z>\in g\circ f$

$\alpha(x/i(u))\vdash_{Th(\mathbb{E})}\exists!z<x/i(u),z>\in g\circ f$

$\vdash_{Th(\mathbb{E})}\exists!z<i(u),z>\in g\circ f$ (b)

$\vdash_{Th(\mathbb{E})}\exists!z(\exists!y(<i(u),y>\in f\wedge<y,z>\in g))$

$\vdash_{Th(\mathbb{E})}\exists!z(\exists!v(<i(u),j(v)>\in f\wedge(j(v),z>\in g))$

(biyección entre variables)

$\vdash_{Th(\mathbb{E})}\exists!w(\exists!v(<i(u),j(v)>\in f\wedge<j(v),k(w)>\in g))$

$$\vdash_{Th(\mathbb{E})} \exists! w(<i(u), j(g'(u))> \in f \wedge <j(g'(u)), k(w)> \in g)$$

por (36) $\exists! g': GX \longrightarrow GY$

$$\vdash_{Th(\mathbb{E})} (<i(u), j(g'(u))> \in f \wedge <j(g'(u)), k(h(g'(u))> \in g)$$

por (36) $\exists! h: GY \longrightarrow GZ$

$$\vdash_{Th(\mathbb{E})} (<i(u), k(h \circ g'(u))> \in g \circ f$$

$\therefore\ G(g \circ f) = Gg \circ Gf$

por otro lado

$$\alpha(x) \vdash_{Th(\mathbb{E})} <x, x> \in 1_X$$

$$\vdash_{Th(\mathbb{E})} <i(u), i(u)> \in 1_X$$

$$\vdash_{Th(\mathbb{E})} <i(u), i(1_{GX}(u))> \in 1_X$$

$\therefore\ G1_X = 1_{GX}$

$\therefore$ G funtor.

$GF(A) = G(U_A)$ A es un $\mathbb{E}$-objeto

$= G(\{x_A : \text{verdad}\})$

$= \text{dom}(\ker(\|\text{verdad}\|_{x_A}))$

$= \text{dom} 1_A$

$= A$

$GF(f) = GF(A \longrightarrow B)$

$= G(U_A \longrightarrow U_B)$

$\quad x \longmapsto f(x)$

$= (GU_A \longrightarrow GU_B)$

$= (A \longrightarrow B) = f$

$\quad x \longmapsto f(x)$

$\therefore\ GF = 1_{\mathbb{E}}$

(3)$\Rightarrow$ el $\mathbb{C}(Th(\mathbb{E}))$-diagrama conmuta,

$$\begin{array}{ccc} FGX & \xrightarrow{FGf} & FGY \\ \downarrow \eta_X & & \downarrow \eta_Y \\ X & \xrightarrow{} & Y \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} u & \longmapsto & GF(u) \quad (\text{por } 3) \\ \downarrow & & \downarrow \\ i(u) & \longrightarrow & j \circ Gf(u) = f(i(u)) \end{array}$$

Así que $\eta = \eta_X$ es una transformación natural.

$\therefore FG \cong 1_{\mathbb{C}(Th(\mathbb{E}))}$

Se quiere que η sea un isomorfismo natural. Para ello se demuestra que el $Th(\mathbb{E})$-conjunto $h_X = \{<x,u>: i(u)=x\}$ es el inverso de η_X.

i es mono, y $\chi(i)$ es $\lambda x.\alpha$, se tiene:

(35) $\vdash_{Th(\mathbb{E})} \lambda x.\alpha(x) \leftrightarrow \exists ! u(i(u)=x)$

(31) $\vdash_{Th(\mathbb{E})} \alpha \leftrightarrow \lambda x.\alpha(x)$

$\vdash_{Th(\mathbb{E})} \alpha \leftrightarrow \exists ! u(i(u)=x)$

$\alpha \vdash_{Th(\mathbb{E})} \exists ! u(i(u)=x)$

$\alpha \vdash_{Th(\mathbb{E})} \exists ! u(<x,u> \in h)$, $\qquad U_X = FGX$

$\therefore h_X : X \longrightarrow U_{GX}$ en $\mathbb{C}(Th(\mathbb{E}))$.

AFIRMACION: η_X y h_X son mutuamente inversas.

Prueba:

$\eta_X : U_{GX} \longrightarrow X$, u variable de tipo GX.

$u \longmapsto i(u)$

$(h_X \circ \eta_X)(u) = h_X(\eta_X(u)) = h_X(i(u)) = h_X(x) = u \therefore h_X \circ \eta_X = 1_{U_{GX}}$

$\eta_X \circ h_X = \{<x, i(v)> : \exists u(<x,u> \in h_X \wedge <u, i(v)> \in \eta_X)\}$

$= \{<x, i(v)> : <x,u> \in h_X \wedge <u, i(x)> \in \eta_X \wedge i(v) = i(u) = x\}$ (por def. η, h)

$= \{<x, i(v)> : <x,u> \in h_X \wedge <u, x> \in \eta_X\}$

$= 1_X$ ■

η_X es un isomorfismo y η es un isomorfismo natural.

Por tanto G es casi-inverso de F por lo que el teorema esta probado. ■

38.PROPOSICION $F: \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{C}(Th(\mathbb{E}))$ es un funtor lógico.

Prueba:

Por la forma en la que fueron construidos los objetos y los morfismos, y en la que se definió F, F preserva objeto términal, productos, clasificador de subobjetos y objeto potencia. ■

BIBLIOGRAFIA

DUMMETT. "ELEMENTS OF INTUITIONISM"
CLARENDON PRESS

BELL, MACHOVER. "A COURSE OF MATHEMATICAL LOGIC"
NORTH HOLLAND

KLEENE. "INTRODUCTION TO METAMATHEMATICAL"
NORTH HOLLAND AND FANOSTAN