

00382
8
2ej.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS
División de Estudios de Posgrado

UN MODELO TERMODINAMICO DEL CLIMA

T E S I S

Que para obtener el Grado Académico de
DOCTOR EN CIENCIAS
(Física)

presenta

VICTOR MANUEL MENDOZA CASTRO

TESIS CON
FALSA CALIFICACION

TESIS CON
FALSA CALIFICACION

México, D. F.

1992



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE

| | Página |
|---|--------|
| INTRODUCCION. | 1 |
| CAPITULO 1. LOS PRINCIPIOS DE CONSERVACION. | |
| 1.1 Las Ecuaciones de Conservación de Momentum. | 18 |
| 1.2 La Ecuación de Conservación de la Masa. | 23 |
| 1.3 La Ecuación de Conservación de Energía Térmica Aplicada a la Atmósfera. | 25 |
| CAPITULO 2. LAS ECUACIONES BASICAS DE PRONOSTICO PARA LAS VARIABLES MEDIAS. | |
| 2.1 Las Variables Medias del Sistema Termodinámico y sus Fluctuaciones. | 31 |
| 2.2 Las Ecuaciones de Conservación para Las Variables Medias | 34 |
| 2.3 La Aproximación Hidrostática y las Ecuaciones Primitivas para las Variables Medias. | 43 |
| 2.4 Determinación de la Velocidad Vertical. La Ecuación de la Tendencia de la Presión. | 45 |
| CAPITULO 3. LAS ECUACIONES BASICAS DEL MODELO TERMODINAMICO DEL CLIMA CON VORTICIDAD (MTCV). | |
| 3.1 Análisis de Escala de las Ecuaciones de Movimiento para su Aplicación al MTCV. | 49 |
| 3.2 La Aproximación Hidrostática y el Perfil de Temperatura en el MTC. | 54 |

| | |
|---|-----|
| 3.3 Las Ecuaciones de la Vorticidad y la Divergencia en el MTCV. | 56 |
| 3.4 El Sistema Termodinámico Balanceado. | 59 |
| 3.5 Simplificación del STB. El Sistema Termodinámico Casi-Geostrófico (STCG). | 62 |
| 3.6 Integración Vertical de la Ecuación Termodinámica en la Capa Troposférica. | 68 |
| 3.7 Determinación de la Convección de Calor y la Incorporación de la Vorticidad Potencial en la Ecuación Termodinámica. | 72 |
| 3.8 La Ecuación de la Tendencia de la Presión en el Tope de la Capa Troposférica. | 77 |
| 3.9 La Ecuación de Vorticidad Potencial no Adiabática. | 81 |
| 3.10 Simplificación de la Ecuación Termodinámica. | 89 |
| CAPITULO 4. LA ECUACION DE CONSERVACION DE ENERGIA TERMICA APLICADA A LA CAPA SUPERIOR DE OCEANOS Y CONTINENTES. | |
| 4.1 La Ecuación de Conservación de Energía Térmica Aplicada a la Capa Superior de los Océanos. | 91 |
| 4.2 La Ecuación de Conservación de Energía Térmica Aplicada a la Capa Superior de los Continentes. | 93 |
| CAPITULO 5. LAS PARAMETRIZACIONES O RELACIONES CONSTITUTIVAS EN EL MTCV. | |
| 5.1 Parametrización de las Funciones de Calentamiento. | 94 |
| 5.2 Parametrización del Transporte Horizontal de Calor por Viento Medio en el MTCV (Dinámica Implícita). | 97 |
| 5.3 Parametrización del Rotacional del Esfuerzo del Viento en la Superficie. | 100 |

CAPITULO 6. LA SOLUCION NUMERICA DE LAS ECUACIONES DEL MTCV.

| | |
|--|-----|
| 6.1 Análisis de Ondas de la Ecuación de Vorticidad Potencial. | 102 |
| 6.2 La Integración en el Tiempo de las Ecuaciones. | 106 |
| 6.3 Integración Espacial de las Ecuaciones del MTCV. | 115 |
| 6.4 El Método de Predicción de las Anomalías Mensuales en el MTCV. | 119 |

CAPITULO 7. DETERMINACION Y UTILIZACION DE LAS VARIABLES EN EL NIVEL DE 700 MILIBARIOS.

| | |
|--|-----|
| 7.1 Utilización de los Datos en el Nivel de 700 Milibarios. | 122 |
| 7.2 Determinación de la Altura del Nivel de 700 mb Usando la Condición de Equilibrio Hidrostático. | 125 |
| 7.3 Determinación del Viento Geostrófico en el Nivel de 700 mb. | 128 |

CAPITULO 8. APLICACION DEL MTCV A LA PREDICION NUMERICA DEL TIEMPO A LARGO PLAZO.

| | |
|--|-----|
| 8.1 Los Campos Utilizados en los Experimentos Numéricos. | 129 |
| 8.2 Las Condiciones Anómalas del Año 1983 (Año de Niño). | 131 |
| 8.3 Experimentos Numéricos de Predicción para el Período Enero-Noviembre 1983, Incorporando una Dinámica Implícita en el MTCV. | 133 |
| 8.4 Experimentos Numéricos de Predicción para Enero 1983, Incorporando una Dinámica Explícita en el MTCV. | 136 |
| 8.5 Evaluación de los Resultados. | 139 |
| 8.6 Resultados de las Predicciones del Período Enero-Noviembre 1983. | 140 |
| 8.7 Resultados de las Predicciones de Enero 1983. | 144 |
| 8.8 Discusión de los Resultados. | 161 |
| 8.9 Conclusiones y Consideraciones Finales. | 169 |

| | |
|---|-----|
| APENDICE A. CONSTANTES BASICAS DEL MTCV. | 174 |
| APENDICE B. PARAMETROS CONSTANTES DEL MTCV. | 175 |
| BIBLIOGRAFIA. | 178 |

UN MODELO TERMODINAMICO DEL CLIMA

Tesis sometida a la División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Autónoma de México, en cumplimiento de los requerimientos para el Grado de Doctor en Ciencias (Física).

Septiembre 1992

Por Victor Manuel Mendoza Castro.

RESUMEN

Se desarrolla un modelo termodinámico del clima con vorticidad (MTCV), este modelo es usado para calcular los valores climáticos o normales de la temperatura, la altura y las componentes zonal y meridional del viento horizontal en el nivel de 700 mb, así como para predecir las correspondientes anomalías en el Hemisferio Norte

Las bases físicas del MTCV son las mismas que las del modelo termodinámico del clima (MTC) de Adem, pero con diferentes aproximaciones. El MTCV usa la ecuación de conservación de energía térmica aplicada a una capa atmosférica de 9 km de altura, la cual incluye una capa de nubes, una capa oceánica de 100 metros de profundidad y una capa continental de profundidad despreciable. La ecuación de vorticidad potencial no-adibática es aplicada en la frontera superior de la capa atmosférica del modelo.

Las ecuaciones del modelo son integradas usando un nuevo esquema semi-implícito, con parametrizaciones apropiadas para los calentamientos, el transporte horizontal turbulento de calor y las fuerzas friccionales. De esta manera, el problema de predicción se reduce a resolver un sistema de dos ecuaciones diferenciales no lineales de tercer orden, donde las variables son la temperatura y la presión en la frontera superior de la capa atmosférica del modelo. También se predice la temperatura de la superficie, usando una ecuación algebraica lineal.

Se realiza un estudio comparativo de las predicciones para Enero de 1983, usando el MTC y el MTCV. Los resultados son evaluados objetivamente y muestran que los dos modelos tienen una habilidad comparable para predecir correctamente los signos de las anomalías. Sin embargo, el MTCV es capaz de predecir anomalías con amplitudes o tamaños significativamente más grandes que el MTC. Las anomalías predichas con el MTCV en buena concordancia en signo y tamaño con las anomalías observadas.

El uso, en un modelo termodinámico, de la ecuación de vorticidad no-adiabática para generar el viento horizontal, el nuevo esquema de integración semi-implícito de las ecuaciones del modelo así como el cálculo de la componente vertical del viento, la cual es usada para calcular la convección de calor en la capa atmosférica del modelo, son las principales contribuciones de esta tesis doctoral.

Vo. Bo.

Julían Adem
Dr. Julián Adem Chahin

Atentamente

Victor Mendoza C.
M. en C. Víctor Manuel Mendoza Castro

A THERMODYNAMIC CLIMATE MODEL

Thesis submitted to the División de Estudios de Posgrado of the Facultad de Ciencias of the Universidad Nacional Autónoma de México, in fulfillment of the requirements for the Degree of Doctor en Ciencias (Física).

September 1992

By Victor Manuel Mendoza Castro.

ABSTRACT

A thermodynamic climate model with vorticity (TCMV) is developed, this model is used to calculate the climatic or normal temperature, height and the zonal and meridional components of horizontal wind at 700 mb level, as well as to predict the corresponding monthly anomalies in the Northern Hemisphere.

The physical basis of the TCMV are the same as Adem's thermodynamic climate model (TCM), but with different approximations. The TCMV used the thermodynamic energy equation applied to an atmospheric layer of 9 km height, which includes a cloud layer, an oceanic layer of 100 meters in depth and a continental layer of negligible depth. The non-adiabatic vorticity equation is applied in the upper boundary of the atmospheric layer of the model.

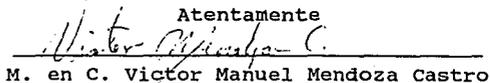
The model equation are integrated using a new semi-implicit scheme, with appropriate parameterizations for the heating, turbulent horizontal transport of heat and the frictional forces. Therefore, the forecasting problem is reduced to solving a system of two coupled non-linear third order differential equations where the variables are the temperature and the pressure in the upper boundary of the atmospheric layer of the model. The surface temperature is also predicted using an algebraic linear equation.

A comparative study of the predictions for January 1983 is carried out using the TCM and TCMV. The results are evaluated objectively and show that both models have comparable skill for predicting correctly the signs of the anomalies. However, the TCMV is capable of predicting anomalies with amplitudes or sizes significantly larger than the TCM. The anomalies predicted with TCMV are in good agreement in sign and size with the observed anomalies.

The use in a thermodynamic model of the non-adiabatic vorticity equation to generate the horizontal wind, the new semi-implicit scheme for the integration of the model equations as well as the computation of the vertical component of the wind, which is used for computing the convection of heat in the atmospheric layer of the model, are the principal contributions of this doctoral thesis.

Vo. Bo.

Dr. Julián Adem Chahín

Atentamente

M. en C. Víctor Manuel Mendoza Castro

"En 1956 cuando regresé a México de una estancia de dos años en el Instituto Internacional Meteorológico en Estocolmo; me puse a desarrollar una teoría con la cual fuera posible explicar la temperatura atmosférica observada, zonalmente promediada. Comencé por escribir el conjunto completo de ecuaciones de un sistema dinámico de fluidos geofísicos, incluyendo el mayor número de factores como fuera posible. Después de varios meses de arduo trabajo, quedé convencido que la ecuación de energía termodinámica era la ecuación básica que debiera ser usada en una primera aproximación de la teoría del clima....."

J. Adem (1962).

INTRODUCCION.

1.1 El Problema Fundamental.

La atmósfera, envoltura gaseosa del planeta Tierra, puede ser considerada como un fluido continuo donde los campos atmosféricos: temperatura, presión, densidad y velocidad tienen valores únicos en cada punto del continuo atmosférico, y sus valores en un instante particular determinan el estado dinámico y térmico de la atmósfera. Dichos campos atmosféricos y sus derivadas pueden ser considerados como funciones continuas del espacio y del tiempo.

Para describir el estado dinámico y térmico de la atmósfera en todas las escalas de espacio y tiempo, se requiere formular un problema completo de dinámica de fluidos usando las leyes de conservación de momentum, masa y energía interna, complementadas por relaciones de estado entre los campos térmicos (temperatura, presión y densidad) y las relaciones constitutivas (relaciones funcionales que expresan a las fuentes y sumideros de calor, esfuerzos turbulentos, precipitación, nubosidad, humedad, etc. en términos de los campos atmosféricos; dichas relaciones también son conocidas como parametrizaciones). Las leyes de conservación pueden ser expresadas en términos de ecuaciones diferenciales parciales, acopladas, que involucran a los campos atmosféricos. Este conjunto de ecuaciones es extremadamente complejo y en la actualidad no existe una solución general del problema que describa el comportamiento de la atmósfera en todas las escalas de espacio y tiempo.

Una manera adecuada de atacar el problema es seleccionar el sistema atmosférico que desamos estudiar y estimar la magnitud de los diferentes términos en las ecuaciones que gobiernan el comportamiento de la atmósfera. Así, por ejemplo, en la descripción dinámica de un tornado cuya escala horizontal es de unos 10^2 a 10^3 m y cuya duración es de unas cuantas horas, los términos que incluyen la rotación de la Tierra en las ecuaciones de conservación de momentum pueden ser despreciados; en cambio, en la descripción dinámica de las ondas planetarias cuya escala es de 10^7 m y cuyo período es de días, dichos términos son fundamentales

en las ecuaciones y no pueden ser ignorados (Holton, 1979).

1.2 El Problema Fundamental Enfocado a la Predicción del Tiempo (El Modelo de Richardson).

En este trabajo abordamos el problema de la predicción del tiempo atmosférico, el cual es identificado con el estado que guarda la atmósfera en un lugar e instante particulares. En la predicción del tiempo las ecuaciones gobernantes son tratadas para sistemas cuya escala espacial es de 10^6 (ciclones y anticiclones sinópticos) a 10^7 m (ondas atmosféricas planetarias) y cuyo período es de algunas horas a varios días.

La era moderna de la predicción del tiempo principia con el británico L.F. Richardson (1922). El es el primero en formular una idea concreta para predecir el tiempo. Richardson aproxima las ecuaciones diferenciales parciales que gobiernan el comportamiento de la atmósfera con un conjunto de ecuaciones de diferencias algebraicas de las que pueden determinarse las tendencias de varios campos atmosféricos en un número finito de puntos en el espacio. Dando un valor inicial observado a los campos atmosféricos en estos puntos de red, las tendencias pueden ser calculadas numéricamente resolviendo las ecuaciones de diferencias algebraicas. Usando diferencias finitas hacia adelante, con un pequeño incremento en el tiempo para las tendencias calculadas, puede obtenerse una estimación de los campos en el futuro. Estos nuevos valores de los campos atmosféricos pueden ser usados para volver a calcular las tendencias. Las nuevas tendencias son usadas para calcular una vez mas los campos, y así este proceso se continúa hasta obtener una predicción a corto plazo, por ejemplo a un día, sobre una determinada área de la Tierra. Este procedimiento de predicción que contiene varias iteraciones requiere de un enorme número de operaciones aritméticas, y en el tiempo de Richardson no se contaba con la rápidas computadoras con que contamos hoy. Por esta razón, Richardson desarrolla un método para llevar a cabo un gran número de operaciones aritméticas, y realiza una predicción a corto plazo calculando la tendencia de la presión en la superficie en sólo dos puntos de red con una

separación de 400 km y usando un paso de tiempo de 6 horas. Los cambios en la presión predichos por Richardson fueron de un orden de magnitud más grandes que los observados. A pesar de que estos resultados no fueron muy alentadores, el mérito del trabajo de Richardson consistió en haber sentado las bases metodológicas para la predicción del tiempo.

En la actualidad el modelo de Richardson es considerado muy completo, pues toma en cuenta los calentamientos por radiación, los efectos de la nubosidad y la precipitación, los movimientos turbulentos, la topografía y el intercambio de energía entre el suelo y la atmósfera; su modelo tiene una resolución considerable, ya que contiene 5 capas (6 niveles con intervalos de 200 mb.) y una red efectiva de 400 km.

Las ecuaciones del modelo de Richardson gobiernan no solamente los movimientos lentos asociados con los grandes sistemas atmosféricos de interés meteorológico, sino que también los movimientos rápidos asociados con las ondas de sonido y de gravedad. Por esto, si el modelo de Richardson es resuelto con las computadoras de hoy, utilizando el método numérico que él mismo desarrolló, las ondas de sonido y gravedad pueden amplificarse de manera espuria e introducir ruido en la solución de interés meteorológico. De lo anterior se concluye que este modelo debe ser tratado de alguna manera para filtrar las ondas rápidas, o que de este modelo puede derivarse uno más simplificado cuya solución sean las grandes ondas atmosféricas.

1.3 Modelos Filtrados (MF).

Rossby (1939 y 1940) consciente de la complejidad del problema, se concentró en la parte dinámica de las ecuaciones. El usa las ecuaciones de conservación de momentum y la ecuación de conservación de la masa como básicas, y reduce a una ecuación trivial la de conservación de energía interna, suponiendo que no se suma calor al sistema.

Charney (1948 y 1949) , Charney y Eliassen (1949) y Eliassen (1949) fórmulan un modelo dinámico similar al de Rossby, conocido como modelo casi-geostrófico, en donde las ecuaciones dinámicas

son simplificadas y las ondas de sonido y gravedad son filtradas, por la introducción sistemática de las relaciones geostróficas y la ecuación hidrostática.

Basándose en los trabajos fundamentales de Charney y Eliassen y usando el modelo barotrópico el cual es un caso especial del modelo casi-geostrófico, Charney, Fjörtoft y Von Neumann (1950), obtienen con éxito las primeras predicciones numéricas del tiempo. Charney y colaboradores resuelven numéricamente la ecuación de vorticidad barotrópica, partiendo de cierta condición inicial y usando condiciones de frontera adecuadas a una región que abarca México, Estados Unidos, Canada y Groelandia. Usando la computadora ENIAC de la Armada de los Estados Unidos, ellos logran pronosticar el tiempo a 24 horas.

El modelo barotrópico supone que existe un nivel de la atmósfera en donde el flujo es no divergente, este nivel es la superficie de 500 mb. Así, el modelo barotrópico pronostica el geopotencial y por ende el viento geostrófico en los 500 mb. Este modelo supone que la atmósfera es barotrópica, y en una atmósfera de este tipo, en donde el viento no depende de la altura, es suficiente pronosticar un solo nivel.

Bolin (1955), usando la computadora sueca Besk mejorada en su capacidad de memoria, extiende el pronóstico del tiempo de 24 horas a 72 horas con el modelo barotrópico en una área relativamente grande que abarca toda Europa, Norte-América y el Atlántico Norte. Bolin encuentra de un total de 13 casos de estudio que las predicciones a 24 horas son mejores que a 48 horas y que estas últimas son mejores que a 72 horas. Es decir, que conforme aumenta el periodo de predicción, la predicción del tiempo se hace cada vez menos exacta. Bolin argumenta que sus resultados son de esperarse, pues el modelo barotrópico supone conservación de vorticidad absoluta, y en la región de integración hay zonas de formación de ciclones asociados con procesos baroclinicos (relacionados con la estructura vertical de la atmósfera) y de flujo de calor desde la superficie; dichos procesos pueden ser importantes en un pronóstico a 72 horas o más tiempo.

Del trabajo de Bolin (1955) se infiere que conforme la

longitud del período de predicción se incrementa, el efecto de diversas fuentes y sumideros de energía se vuelven más importantes; por consiguiente, se hace necesario considerar además de la atmósfera otros sistemas termodinámicos como los océanos y los continentes. De acuerdo con Smagorinsky (1967), para períodos de predicción mayores que una semana, es necesario conocer el estado inicial de la atmósfera global completa, desde la estratosfera hasta la superficie, así como el estado de la capa superior oceánica de unos 100 m de profundidad. Podemos decir que el flujo atmosférico en algún punto de la troposfera media depende de las condiciones iniciales y de frontera sobre un dominio que se incrementa conforme el período de predicción se extiende.

Existe una categoría de modelos de dos o más niveles basados en la teoría casi-geostrófica, los cuales son más complejos que el modelo barotrópico y pueden tomar en cuenta las fuentes y sumideros de calor. Estos modelos son los llamados baroclinicos ya que en ellos se considera la estructura vertical de la atmósfera. Si bien los modelos baroclinicos han sido usados para el pronóstico del tiempo, su uso más general ha sido de diagnóstico, por ejemplo: en el análisis del movimiento vertical de gran escala, asociado con la precipitación, o en el estudio teórico de las ondas baroclinicas e inestabilidad baroclinica.

1.4 Predicción del Tiempo con Modelos de Ecuaciones Primitivas.

Los modelos filtrados (MF) casi-geostrófico, barotrópico y los baroclinicos, desarrollados entre 1939 y 1964, constituyen una primera generación de modelos de predicción del tiempo. A partir de 1964 aparece una nueva generación de modelos, similares en su formulación al modelo de Richardson. Dichos modelos son llamados modelos de ecuaciones primitivas (MEP). En estos modelos se supone que el movimiento se lleva a cabo en una atmósfera en equilibrio hidrostático, prácticamente la única restricción impuesta a estos modelos, en los que, por supuesto, se pueden considerar fuentes y sumideros de energía. Uno de los primeros MEP fue el modelo barotrópico de ecuaciones primitivas desarrollado por Shuman (1966).

Los MEP fueron desarrollados con el objeto de determinar con mayor precisión el comportamiento dinámico y térmico de la atmósfera y de mejorar y extender la predicción del tiempo a períodos cada vez más grandes. Los MEP han sido constantemente mejorados, incluyéndoles más términos, y nuevas parametrizaciones de las fuentes y sumideros de energía. Además, a la par se han desarrollado métodos de análisis objetivo para obtener condiciones iniciales más adecuadas a partir de datos meteorológicos. Este progreso ha sido posible gracias a la disponibilidad de datos más confiables (en gran parte procedentes de satélites meteorológicos) y al avance tecnológico en las computadoras, las que cada vez son más rápidas y tienen memorias digitales más grandes, condiciones que permiten disminuir los errores de integración.

En la actualidad los MEP son de una enorme complejidad física. Por ejemplo, uno de estos modelos es usado en el Centro Europeo de Predicción del Tiempo a Mediano Plazo (CEPTMP) para realizar predicciones a 10 días de una manera operativa. Este modelo es integrado sobre un dominio global con una resolución de 15 niveles en la vertical y una red horizontal de aproximadamente 2 grados de latitud y 2 de longitud. Como un modelo de predicción determinista, el MEP del CEPTMP tiene una habilidad de predicción efectiva de alrededor de una semana, y es muy posible que pueda pronosticar episodios de bloqueo, en donde las grandes ondas atmosféricas permanecen estacionarias por varios días.

1.5 El Límite Extremo de la Predicción Determinista.

Actualmente, el alcance de la predicción efectiva, para fenómenos meteorológicos de gran escala, es de unos 6 días en el Hemisferio Norte, 2 días en los trópicos y aproximadamente 4 días en el Hemisferio Sur. Lo anterior se debe a que en el Hemisferio Norte existe una gran concentración de datos meteorológicos, mientras que en los trópicos y en el Hemisferio Sur hay insuficiencia en la cobertura de dichos datos; además, en los trópicos, la influencia predominante de los procesos convectivos de pequeña escala hace más difícil la predicción que en las zonas extratropicales (Mason, 1986).

Existen dos factores fundamentales que influyen negativamente en la eficacia de la predicción numérica del tiempo: a) los errores en las condiciones iniciales, los cuales se amplifican en el proceso de integración de las ecuaciones gobernantes, y b) la inadecuada descripción de algunos procesos físicos involucrados. No importa qué tan fina pueda ser la resolución de la red empleada en un modelo, siempre existirán movimientos de cierta escala que no puedan ser representados adecuadamente con la resolución del modelo. Es decir, existe un nivel de error inviolable en la determinación del estado inicial de la atmósfera. En un proceso de predicción la no linealidad, la inestabilidad y la disipación del flujo atmosférico ocasionan que los errores inherentes a los datos iniciales crezcan y afecten gradualmente el movimiento a gran escala de tal manera que el flujo pronosticado resulte substancialmente diferente del flujo observado. Numerosos investigadores, usando sofisticados MEP han estimado de cómo el crecimiento de los errores limitan la predictabilidad inherente de la atmósfera; uno de los trabajos más importantes es el de Smagorinsky (1969), quien fijó en 14 días el límite extremo de la predicción determinista del flujo atmosférico de gran escala.

1.6 La posibilidad de Pronosticar a Largo Plazo (El Enfoque de Von Neumann).

Von Neumann (Smagorinsky, 1969) considera, con respecto al problema de la predicción numérica del tiempo, que es conveniente dividir el movimiento de la atmósfera en tres categorías diferentes dependiendo de la escala de tiempo de la predicción. En la primera categoría se tienen movimientos que son determinados principalmente a partir de las condiciones iniciales y en donde pueden extrapolarse las tendencias iniciales sobre un período de tiempo corto. En la segunda categoría se tiene el extremo opuesto, es decir, movimientos que son prácticamente independientes de las condiciones iniciales; por consiguiente, en la predicción de tales movimientos importan sólo aquellas características de la circulación que en promedio estarán siempre presentes (sistemas atmosféricos relativamente estables, como altas y bajas

semipermanentes). Von Neumann sitúa entre los dos casos extremos la tercera categoría de movimiento; en esta categoría se está suficientemente lejos del estado inicial, de manera que los detalles de las condiciones iniciales no expresan por sí mismas muy claramente como se ha desarrollado el flujo; sin embargo, ciertas características de las condiciones iniciales tendrán una considerable influencia sobre la forma que tome la circulación.

Von Neumann afirma que, casi en cualquier problema físico matemático, es relativamente fácil determinar la solución para períodos cortos de tiempo, para los cuales los parámetros extrapolados son relativamente pequeños. El siguiente nivel de dificultad es aquel en el que hay que determinar las condiciones asintóticas, es decir, las condiciones que existen para períodos de tiempo largos, para los cuales los parámetros extrapolados son muy grandes. En estos dos casos extremos la extrapolación de los parámetros permite la simplificación de las ecuaciones. Finalmente, el problema más difícil es el de rango intermedio, para el cual los parámetros extrapolados ni son muy pequeños ni muy grandes. En este caso despreciar cualquier extremo está prohibido. Sobre la base de estas consideraciones, Von Neumann indica que existe una forma lógica para el tratamiento computacional del problema de la predicción numérica del tiempo. La manera de proceder es, primero intentar la predicción a corto plazo (tal y como históricamente se hizo); después, la predicción a largo plazo de aquellas propiedades de la circulación que pueden conservarse sobre un período de tiempo arbitrariamente largo y, finalmente, intentar la predicción a mediano plazo (lograr la predicción efectiva a mediano plazo es uno de los objetivos fundamentales de los MEP), en donde los períodos de tiempo son lo suficientemente largos, de manera que el problema no puede ser tratado únicamente con la teoría hidrodinámica y lo suficientemente cortos, de manera que el problema no puede ser tratado únicamente con los principios generales de la teoría de equilibrio.

De acuerdo con los estudios de Smagorinsky, tal vez sea imposible por el momento predecir de una manera determinista el tiempo más allá de 14 días; sin embargo, el punto de vista de Von

Neumann nos plantea la posibilidad de predecir el estado promedio de la atmósfera (en vez del estado instantáneo) a un mes, a una estación o quizá a un plazo más largo a partir de los principios generales de la teoría de equilibrio.

Von Neumann asocia el período de tiempo de 30 a 180 días con la predicción a mediano plazo; sin embargo, de acuerdo con Smagorinsky (1969), podemos considerar que el pronóstico del tiempo a corto plazo es de 1 a 3 días, el de mediano plazo de 4 días a 2 semanas (2 semanas es el límite teórico de la predicción determinista) y el de largo plazo es de un mes en adelante.

1.7 Los Modelos de Circulación General y la Predicción de las Condiciones Medias del Flujo Atmosférico.

Hemos visto que los modelos puramente dinámicos, como ciertos MF, pueden realizar un pronóstico útil a 3 días, mientras que los sofisticados MEP pueden realizar un pronóstico útil a una semana, aunque estos modelos son potencialmente capaces de realizar pronósticos a 2 semanas. Existe una tercera generación de modelos conocidos como modelos de circulación general de la atmósfera MCGA, que son capaces de realizar predicciones a 1 mes y posiblemente a una estación; sin embargo, debemos aclarar que estos modelos no pronostican el tiempo propiamente dicho en un período tan largo (lo que estaría en desacuerdo con las estimaciones de Charney y Smagorinsky sobre el límite de la predicción determinista), sino que, partiendo de una condición inicial instantánea (obtenida con métodos objetivos de inicialización), son capaces de pronosticar a un mes o posiblemente a una estación las condiciones medias mensuales o estacionales, respectivamente, del flujo atmosférico a una escala global; ésto se logra promediando, en un mes, o en una estación, las evoluciones de determinado campo atmosférico obtenidas en cada paso de tiempo. El nombre de MCGA se debe a que precisamente estos modelos son capaces de pronosticar y/o simular la circulación general de la atmósfera, que consiste en el flujo atmosférico a escala global promediado en el tiempo, en donde los promedios son tomados sobre períodos suficientemente largos para

anular las variaciones aleatorias asociadas con sistemas sinópticos individuales, cuya escala espacial se encuentra entre $10^2 - 10^5$ m y cuyo período es de días, pero suficientemente cortos para retener variaciones mensuales y/o estacionales de sistemas cuya escala se encuentra entre $10^6 - 10^7$ m.

Históricamente los MCGA están basados en los MEP, complementados con tratamientos paramétricos de procesos físicos en la atmósfera y en la superficie de la Tierra. Dichos procesos incluyen: transferencia radiativa por radiación solar y terrestre, el ciclo hidrológico, turbulencia interna de escala entre $10^5 - 10^6$ m, desarrollo de cúmulos convectivos y transferencia de calor en la capa límite planetaria.

Los MCGA fueron desarrollados casi al mismo tiempo que los MEP; uno de los primeros MCGA fue el modelo del Centro Nacional de Investigación Atmosférica de Boulder, Colorado (Kasahara y Washington, 1967), el cual es muy similar al modelo de Richardson. Otros MCGA muy conocidos son: el de la Universidad de California en Los Angeles, el del Laboratorio de Radiación Lawrence y el del Laboratorio de Dinámica de Fluidos Geofísicos de la universidad de Princeton en los Estados Unidos. Las siglas de los nombres en inglés de estos centros de investigación son, respectivamente, NCAR, UCLA, LRL y GFDL.

Muy pocos MCGA han sido aplicados al problema de la predicción mensual. Miyakoda y Chao (1982) discuten brevemente un experimento de predicción mensual para enero de 1977 llevado a cabo con el MCGA del GFDL. En dicho experimento se pronostica el patrón de altura geopotencial en el nivel de 500 mb de uno de los bloqueos más espectaculares de la atmósfera que se tenga registro.

El uso más común que se le da a los MCGA es el de simular la circulación de la atmósfera sometida a diferentes forzamientos externos.

Ahora bien, el clima por ser un estado atmosférico obtenido de promediar los estados atmosféricos sobre un período de varios años (30 años según la Organización Meteorológica Mundial, OMM), está íntimamente relacionado con la circulación general de la atmósfera; es así que estos modelos han sido usados para simular el clima y las variaciones climáticas (Manabe et. al., 1965).

Los MEP y los MCGA generalmente tienen varios niveles en la vertical y son integrados sobre redes horizontales de gran resolución (en algunos casos con menos de 2 grados en latitud y longitud), por esta razón y por su complejidad física a dichos modelos se les ha llamado modelos de alta resolución (MAR).

1.8 La Predicción a Largo Plazo. El Enfoque de J. Adem y el Modelo Termodinámico del Clima.

La formulación del primer MCGA tiene lugar en Estados Unidos mas o menos en 1964. En México, 8 años atrás, J. Adem se plantea el problema de modelar la circulación general de la atmósfera. El modelo que desarrolló J. Adem y que publicó por primera vez en 1962 (Adem, 1962) es conocido como Modelo Termodinámico del Clima (MTC), sobre este modelo concentraremos nuestra mayor atención pues su mejoramiento, al cual haremos referencia mas adelante, es el objetivo principal de este trabajo. J. Adem hace el siguiente comentario relacionado con la primera etapa de desarrollo del MTC (Adem, 1975):

"En 1956 cuando regresé a México de una estancia de dos años en el Instituto Internacional Meteorológico en Estocolmo; me puse a desarrollar una teoría con la cual fuera posible explicar la temperatura atmosférica observada, zonalmente promediada. Comencé por escribir el conjunto completo de ecuaciones de un sistema dinámico de fluidos geofísicos, incluyendo el mayor número de factores como fuera posible. Después de varios meses de arduo trabajo, quedé convencido que la ecuación de energía termodinámica era la ecuación básica que debiera ser usada en una primera aproximación de la teoría del clima (Adem, 1962). Ahora estoy bien convencido de que esto es cierto, y ha comenzado a ser corroborado por un incremento en el número de modelos basados en esta ecuación que han aparecido en años recientes, desarrollados por distinguidos colegas. Estos modelos incluyen a los de Saltzman (1968), Budyko (1969) y Sellers (1969).

Para cerrar el problema, introduce un coeficiente Austausch en el cálculo del transporte (horizontal) de calor sensible por remolinos transitorios en la troposfera (Adem, 1962). La lógica de

esta aproximación ha sido confirmada también por el incremento en el número de autores que la han usado, ej., Williams y Davies (1965), Saltzman (1968), Mac-Cracken (1969) y Wiin-Nielsen (1970).".

Del comentario de J. Adem se infiere que él está tratando con movimientos atmosféricos clasificados en la segunda categoría de Von Neumann; es decir, la formulación de J. Adem está apoyada en los principios de la teoría del equilibrio. En particular, su modelo enfatiza el cálculo de la temperatura zonal en términos de un balance de energía térmica entre varios procesos termodinámicos del sistema considerado.

Por otra parte, J. Adem se enfrenta con el problema de parametrizar la turbulencia horizontal generada por los ciclones y anticiclones migratorios de escala sinóptica (10^5 - 10^6 mts). Este tipo de movimiento queda clasificado en la primera categoría de Von Neumann; es decir, es el tipo de movimiento que se pronostica a corto plazo.

El efecto promedio de los ciclones y anticiclones migratorios de escala sinóptica es producir un transporte horizontal de calor del ecuador a los polos, suavizando el gradiente térmico meridional; este transporte puede ser parametrizado a través de un coeficiente Austausch. J. Adem es el primero en incorporar esta parametrización en un modelo simplificado de la circulación general de la atmósfera.

J. Adem menciona que la ecuación de energía termodinámica es la ecuación básica que debe usarse en una primera aproximación de la teoría del clima, él no menciona nada acerca de las ecuaciones de conservación de momentum; sin embargo, se infiere que dichas ecuaciones han tomado un papel secundario. Esto se aclara perfectamente en el siguiente comentario de J. Adem (1970b), el cual podemos relacionar con los experimentos de predicción de Bolin (1955), con los estudios de Smagorinsky (1967) referentes al incremento del dominio de integración conforme el período de predicción se extiende y con el punto de vista de Von Neumann (Smagorinsky, 1969):

"(...) Conforme el período (de predicción) se incrementa, la predicción de la evolución detallada del tiempo se hace cada vez

menos exacta; las fuentes y sumideros de energía adquieren una gran importancia; y para períodos de alrededor de 1 o 2 semanas, uno de los problemas más difíciles de la predicción del tiempo es encontrado en el complejo acoplamiento de los efectos termodinámico y dinámico. Para períodos largos de tiempo, la predicción de la evolución detallada del tiempo probablemente no resulte ser exitosa. Sin embargo, uno puede, en vez de ello predecir el estado medio sobre un período considerado de tiempo.

Ahora, como la escala de tiempo es incrementada, un período de un mes o una estación es adecuado, en el cual la solución probablemente tenga una dependencia débil sobre las ecuaciones dinámicas y sea principalmente gobernada por la ecuación termodinámica. Por consiguiente, postulamos que en este caso una primera aproximación al problema pueda ser llevada a cabo usando la conservación de energía térmica como una ecuación de pronóstico y subordinando a ella las otras leyes de conservación que son usadas para diagnóstico. Sin embargo, debido a la escala de tiempo, el sistema entero atmósfera-océanos-continentes debe ser considerado en vez de únicamente la atmósfera, y un intento puede ser hecho para predecir las características de todo el sistema."

El postulado expresado en este segundo comentario de J. Adem, es el postulado fundamental en el que se basa la formulación del MTC.

El MTC es un modelo realista simplificado del clima en el cual las ecuaciones básicas de pronóstico son las de conservación de energía térmica aplicadas a la capa troposférica de 9 a 12 km de espesor, a la capa superior de los océanos de 50 a 100 mts. de profundidad y a la capa superior de los continentes de espesor despreciable. El modelo incluye una capa de nubes en la troposfera y una capa de hielo y nieve sobre océanos y continentes.

En el MTC se usan campos o variables atmosféricas promediadas en el tiempo en un período del orden de un mes. Se supone que las ecuaciones de equilibrio hidrostático, del gas perfecto y de continuidad, así como las relaciones del viento geostrofico, son válidas para las variables promediadas en el tiempo.

En la versión más completa del MTC, las ecuaciones de conservación de energía térmica incluyen el transporte horizontal

de calor por flujo medio y por turbulencia en la troposfera y los océanos, el exceso de radiación en la troposfera y la superficie, el calor sensible cedido desde la superficie a la atmósfera por transporte turbulento vertical, el calor perdido por evaporación en la superficie, y el calor liberado por la condensación del vapor de agua en las nubes. El albedo de la superficie de la Tierra y la nubosidad son incluidos como parámetros en el modelo.

Las parametrizaciones de los calentamientos y los transportes de calor en el MTC han requerido del uso de leyes físicas y principios de conservación suplementados por datos observados, por lo que las fórmulas usadas son semiempíricas.

Como se comentó anteriormente, en su primera etapa el MTC fue aplicado al cálculo de la distribución de la temperatura climatológica (o normal) zonalmente promediada (Adem, 1962 y 1963). Después ha sido aplicado al Hemisferio Norte con una distribución realista de continentes y océanos para calcular la distribución climatológica mensual de la temperatura media troposférica y las temperaturas de la superficie de océanos y continentes (Adem, 1964a y 1964b).

J. Adem ha desarrollado un método para aplicar el MTC a la predicción mensual de las anomalías (desviaciones de los valores climatológicos o normales) de las temperaturas media troposférica y de superficie; así como a la predicción mensual de las anomalías de la precipitación (Adem, 1964b, 1965a, 1965b, 1969a; Adem y Jacob, 1968).

A principios de la década de los setenta Shaw y Donn (1971) adaptaron el MTC para el estudio del paleoclima ártico; desde entonces el MTC ha sido aplicado ampliamente a la simulación del clima del pasado lejano, así como a la simulación del clima actual y futuro bajo diferentes forzamientos externos. Una descripción amplia de tales experimentos se encuentra en dos trabajos de revisión de J. Adem (1979 y 1991).

1.9 El Desarrollo del Modelo Termodinámico del Clima con Vorticidad (MTCV).

Existen varias posibilidades de mejorar el MTC y con ello

tener predicciones y simulaciones más realistas. J. Adem, en un trabajo de revisión (Adem, 1979) sugiere algunas posibles mejoras. En dicho trabajo él menciona que un problema fundamental en el MTC es la parametrización e incorporación adecuadas del transporte horizontal de calor por viento. Algunos Experimentos sobre la incorporación del transporte horizontal de calor por viento, sin cambiar el grado de simplicidad del MTC, han sido llevados a cabo por J. Adem (1970b); los resultados de estos experimentos muestran alguna mejora en las predicciones de las anomalías de la temperatura mensual en 700 mb.

Hasta el momento, la dinámica se ha incluido en el MTC de una manera implícita a través de la parametrización de los transportes horizontales de calor. Existen modelos climáticos que incluyen una dinámica explícita, pero han sido sobresimplificados, un ejemplo de tales modelos es el de Saltzman (1968), en donde las ecuaciones dinámicas, de conservación de masa y de energía térmica son promediadas en el tiempo, pero se aplican únicamente al caso zonalmente promediado y axialmente simétrico.

Por supuesto, los modelos de alta resolución como los MEP y los MCGA incorporan una dinámica explícita, la cual es una de las principales características de estos modelos.

Para incorporar una dinámica explícita en el MTC, J. Adem ha propuesto usar la ecuación de la tendencia de la presión de Richardson para generar el viento horizontal (Adem, 1969b y 1970b). Esta ecuación también permite el cálculo de la componente vertical de la velocidad del aire, la que puede ser usada para incorporar la convección de calor en el MTC.

J.G. Charney sugirió a J. Adem el uso de la ecuación de vorticidad, en el MTC, para generar el viento horizontal (Adem, 1979).

En 1989 J. Adem me propuso como tesis doctoral generar el viento el horizontal de manera explícita en el MTC, usando la ecuación de la tendencia de la presión de Richardson o la ecuación de vorticidad, como se lo sugirió J.G. Charney. En ese mismo año, tomando en consideración la propuesta de tesis doctoral de J. Adem, me puse a desarrollar, en el Centro de Ciencias de la Atmósfera de la UNAM, un modelo termodinámico que incluyera la

dinámica de la atmósfera de una manera explícita. Dado que he tomado como base el MTC, al modelo que he desarrollado lo he llamado modelo termodinámico del clima con vorticidad (MTCV). Mi propósito es que el MTCV sea al igual que el MTC, un modelo de los de baja resolución, los que de acuerdo con Miyakoda y Chao Jin-Ping (1982) mantienen una enorme ventaja práctica, en cuanto a predicción a largo plazo, sobre los MCGA.

En este trabajo de tesis doctoral presento el desarrollo del MTCV, en donde, tomando como base el MTC, incorporo lo siguiente:

i) el calentamiento por convección y por compresión (trabajo mecánico) en la ecuación de conservación de energía térmica para la atmósfera, y

ii) la ecuación de vorticidad potencial no adiabática para la atmósfera, a partir de las ecuaciones de movimiento horizontal del tipo Reynolds.

Este trabajo consta de ocho capítulos, los primeros 5 están encaminados al desarrollo teórico del MTCV, los otros tres capítulos tratan sobre la solución numérica del MTCV, la utilización de los datos disponibles y la aplicación del MTCV a la predicción del tiempo a largo plazo.

En el Capítulo 1 se tratan los principios de conservación que gobiernan a la atmósfera.

En el Capítulo 2 se aplican los principios de conservación a las variables promediadas sobre un período largo de tiempo (un mes o una estación); se determinan, además, las ecuaciones primitivas para las variables medias y la ecuación de la tendencia de presión.

El Capítulo 3 es fundamental, pues se determinan en forma general las ecuaciones fundamentales del MTCV y, en la penúltima sección, se deriva la ecuación de vorticidad potencial no adiabática para incorporarla al MTCV; en esto radica la principal contribución de este trabajo.

En el Capítulo 4 se ve la aplicación de la conservación de energía térmica a la capa superior de los océanos y continentes.

El Capítulo 5 trata acerca de las parametrizaciones o relaciones constitutivas en el MTC y su aplicación al MTCV.

El Capítulo 6 trata sobre la solución numérica de las ecuaciones del MTCV, en donde he desarrollado un método de integración casi-implícito para la ecuación de vorticidad potencial no adiabática.

El Capítulo 7 trata sobre la determinación y la utilización de las variables en el nivel de la superficie isobárica de 700 milibarios.

En el Capítulo 8 se aplica el MTCV a la predicción numérica del tiempo a largo plazo, se discuten los resultados, se dan las conclusiones del trabajo y las posibles líneas de investigación a seguir.

El trabajo contiene, además, dos apéndices, en donde se describen algunos parámetros del modelo que consideré no era necesario que aparecieran en los capítulos.

CAPITULO 1

LOS PRINCIPIOS DE CONSERVACION.

1.1 Las Ecuaciones de Conservación de Momentum.

Las ecuaciones de conservación de momentum para los flujos atmosféricos, pueden ser derivadas de las ecuaciones de Lagrange en coordenadas espaciales generalizadas fijadas en el espacio (Lamb, 1932):

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L^*}{\partial q_k} = - \frac{1}{\rho^*} \frac{\partial P^*}{\partial q_k} + F_{\mu k} ; k = 1, 2, 3. \quad (1.1)$$

donde q_k , $k = 1, 2, 3$ denota las tres componentes de las coordenadas espaciales generalizadas y $\dot{q}_k = D q_k / D t$, $k = 1, 2, 3$ representa las tres componentes de la velocidad generalizada; t es el tiempo; ρ^* , la densidad del aire y P^* la presión atmosférica. El término $-\partial P^* / \rho^* \partial q_k$, es la k -ésima componente de la fuerza por unidad de masa debida a gradientes de presión y $F_{\mu k}$ la k -ésima componente de la fuerza friccional por unidad de masa debida a la viscosidad molecular del aire. L^* denota el lagrangiano referido a un sistema absoluto fijo en el espacio. El operador D/Dt representa la derivada material, y se expresa como:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \dot{q}_j \frac{\partial}{\partial q_j} \quad (1.2)$$

De las ecuaciones de Lagrange (1.1) vamos a derivar las ecuaciones de movimiento en coordenadas esféricas, relativas a la Tierra rotando. Las coordenadas esféricas (λ, φ, r) son definidas por la longitud λ , la latitud φ y la distancia radial r desde el centro de la Tierra. Suponemos que el sistema de coordenadas está fijo a la Tierra y rota alrededor de un eje que cruza los polos, con velocidad angular Ω igual a la de la Tierra. De esta manera,

las coordenadas generalizadas q_k y las correspondientes componentes \dot{q}_k de las velocidades pueden expresarse como:

$$\begin{aligned} q_1 &= \lambda + \Omega t, & q_2 &= \varphi, & q_3 &= r \\ \dot{q}_1 &= \dot{\lambda} + \Omega, & \dot{q}_2 &= \dot{\varphi}, & \dot{q}_3 &= \dot{r} \end{aligned} \quad (1.3)$$

En coordenadas esféricas, las componentes de la velocidad del flujo atmosférico en la dirección de incremento de λ , φ y r , están dadas por:

$$u^* = r \cos \varphi \dot{\lambda}, \quad v^* = r \dot{\varphi}, \quad w^* = \dot{r} \quad (1.4)$$

donde u^* , v^* y w^* son las componentes longitudinal o zonal, meridional y vertical, respectivamente, de la velocidad del flujo atmosférico, en el sistema en rotación.

Con respecto al sistema absoluto, las componentes zonal u_a^* , meridional v_a^* y vertical w_a^* de la velocidad del flujo, están dadas por:

$$u_a^* = r \cos \varphi (\dot{\lambda} + \Omega), \quad v_a^* = r \dot{\varphi}, \quad w_a^* = \dot{r} \quad (1.5)$$

Refiriéndose al sistema absoluto, el lagrangiano está dado por:

$$L^* = \frac{1}{2} (u_a^{*2} + v_a^{*2} + w_a^{*2}) - \phi^* \quad (1.6)$$

donde $(u_a^{*2} + v_a^{*2} + w_a^{*2})/2$ es la energía cinética por unidad de masa, referida al sistema absoluto y ϕ^* es el potencial gravitacional de la Tierra.

Sustituyendo (1.5) en (1.6) resulta que

$$L^* = \frac{1}{2} [r^2 \cos^2 \varphi (\dot{\lambda}^2 + 2\dot{\lambda}\Omega) + r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{r}^2] - \phi_v^* \quad (1.7)$$

donde ϕ_v^* es el geopotencial, el cual es la suma del potencial gravitacional ϕ^* y el potencial centrífugo $-\frac{1}{2}(\Omega r \cos \varphi)^2$; es decir:

$$\phi_v^* = \phi^* - \frac{1}{2} (\Omega r \cos \varphi)^2$$

Tomando en cuenta que el geopotencial Φ_g^* es función únicamente de las coordenadas generalizadas q_k y sustituyendo la expresión para el lagrangiano (1.7) en la ecuación de Lagrange (1.1), usando (1.3) para q_k y \dot{q}_k , $k = 1, 2, 3$ y las expresiones de las componentes de la velocidad (1.4), obtenemos las ecuaciones de movimiento con respecto a la Tierra en rotación:

$$\frac{D u^*}{D t} + \frac{u^* v^*}{r} \tan \varphi - f v^* + \hat{f} w^* = - \frac{1}{\rho^* r \cos \varphi} \frac{\partial P^*}{\partial \lambda} - \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial \Phi_g^*}{\partial \lambda} + F_{\mu \lambda}^* \quad (1.9)$$

$$\frac{D v^*}{D t} + \frac{u^* w^*}{r} + u^* \tan \varphi + f u^* = - \frac{1}{\rho^* r} \frac{\partial P^*}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_g^*}{\partial \varphi} + F_{\mu \varphi}^* \quad (1.10)$$

$$\frac{D w^*}{D t} + \left(\frac{u^{*2} + v^{*2}}{r} \right) - \hat{f} u^* = - \frac{1}{\rho^*} \frac{\partial P^*}{\partial r} - \frac{\partial \Phi_g^*}{\partial r} + F_{\mu r}^* \quad (1.11)$$

donde

$$f = 2\Omega \text{Sen} \varphi \quad \text{y} \quad \hat{f} = 2\Omega \text{Cos} \varphi \quad (1.12)$$

y donde el operador D/Dt de derivada material, en el sistema en rotación, está dado por:

$$\frac{D}{D t} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{u^*}{r \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{v^*}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + w^* \frac{\partial}{\partial r} \quad (1.13)$$

En el lado izquierdo de (1.9) a (1.11), el segundo término y tercero en (1.10), son aceleraciones aparentes debidas a la curvatura del sistema de coordenadas. Los términos $f v^*$ y $\hat{f} w^*$ en (1.9), $f u^*$ en (1.10) y $\hat{f} u^*$ en (1.11), son también aceleraciones aparentes, pero debidas a la rotación del sistema de coordenadas; es decir, a la rotación de la Tierra. La aceleración aparente debida a la rotación del sistema de coordenadas se llama aceleración de Coriolis y el parámetro $f = 2\Omega \text{Sen} \varphi$; parámetro de Coriolis.

La extensión vertical promedio de la capa atmosférica de interés en meteorología es aproximadamente de 100 km a partir de la superficie de la Tierra.

Si representamos la distancia radial r por $a + z$, donde a es el radio medio de la Tierra y z la altitud relativa al radio a ; podemos hacer la siguiente aproximación para una atmósfera

delgada:

$$r = a \quad y \quad Dr = Dz \quad (1.14)$$

En la aproximación de una atmósfera delgada, la nueva forma del lagrangiano L^* es:

$$L^* = \frac{1}{2} [a^2 \cos^2 \varphi (\dot{\lambda}^2 + 2\dot{\lambda}\dot{\Omega}) + a^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2] - \Phi_g^{*2} \quad (1.15)$$

donde

$$\Phi_g^* = \Phi^* - \frac{1}{2} (a \dot{\Omega} \cos \varphi)^2, \quad (1.16)$$

Usando la aproximación (1.14) en (1.3) se tiene que:

$$q_3 = z \quad y \quad \dot{q}_3 = \dot{z} \quad (1.17)$$

permaneciendo igual q_1 , \dot{q}_1 , q_2 y \dot{q}_2 .

Por su parte, las fórmulas para las componentes de la velocidad en la dirección de incremento de λ , φ y r , se transforman, para el caso de una atmósfera delgada, en:

$$u^* = a \dot{\lambda} \cos \varphi, \quad v^* = a \dot{\varphi}, \quad w^* = \dot{z} \quad (1.18)$$

Sustituyendo la expresión para el lagrangiano (1.15) en las ecuaciones de Lagrange (1.1), usando (1.3) para q_1 , \dot{q}_1 , q_2 y \dot{q}_2 y (1.17) para q_3 y \dot{q}_3 , además de las expresiones de las componentes de la velocidad (1.18), obtenemos las siguientes ecuaciones de movimiento simplificadas:

$$\frac{Du^*}{Dt^*} - \left(f + \frac{u^* \tan \varphi}{a} \right) v^* = - \frac{1}{a \cos \varphi} \left(\frac{1}{\rho^*} \frac{\partial P^*}{\partial \lambda} - \frac{\partial \Phi_g^*}{\partial \lambda} \right) + F_{\mu \lambda}^* \quad (1.19)$$

$$\frac{Dv^*}{Dt^*} + \left(f + \frac{u^* \tan \varphi}{a} \right) u^* = - \frac{1}{\rho^* a} \frac{\partial P^*}{\partial \varphi} - \frac{1}{a} \frac{\partial \Phi_g^*}{\partial \varphi} + F_{\mu \varphi}^* \quad (1.20)$$

$$\frac{Dw^*}{Dt^*} = - \frac{1}{\rho^*} \frac{\partial P^*}{\partial z} - \frac{\partial \Phi_g^*}{\partial z} + F_{\mu z}^* \quad (1.21)$$

donde

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{u^*}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{v^*}{a} \frac{\partial}{\partial \varphi} + w^* \frac{\partial}{\partial z} \quad (1.22)$$

En las ecuaciones (1.19) - (1.21), se han despreciado los términos u^*w^*/a y $\frac{1}{2}w^*$ en (1.19), v^*w^*/a en (1.20), y $(u^{*2} + v^{*2})/a$ y $\frac{1}{2}u^*$ en (1.21). Estos términos que hemos despreciado son pequeños comparados con los términos restantes, lo cual puede demostrarse por un análisis de escala para movimientos atmosféricos de escala planetaria (Charney, 1948).

Asumiendo que el espesor de la atmósfera de interés es suficientemente pequeño para justificar una variación lineal de ϕ_g^* en z , y suponiendo que la superficie $\phi_g^* = \text{cte}$ es una esfera, se tiene que :

$$\frac{\partial \phi_g^*}{\partial \lambda} = \frac{\partial \phi_g^*}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial \phi_g^*}{\partial z} = g \quad (1.23)$$

donde $g = 9.8 \text{ m seg}^{-2}$ es la aceleración "aparente" de la gravedad terrestre. El error introducido por tratar la magnitud g como una constante es aproximadamente del 3% para $z = 100 \text{ km}$.

Suponiendo que la atmósfera se comporta como un fluido no viscoso, se tiene que

$$F_{\mu\lambda}^* = F_{\mu\varphi}^* = F_{\mu z}^* = 0.$$

Usando (1.23) y (1.24) en las ecuaciones (1.19) - (1.21), se obtienen las ecuaciones de movimiento simplificadas:

$$\frac{Dv^*}{Dt} - \left(f + \frac{u^* \tan \varphi}{a} \right) v^* = - \frac{1}{\cos \varphi} \frac{1}{\rho^*} \frac{\partial P^*}{\partial \lambda} \quad (1.25)$$

$$\frac{Dv^*}{Dt} + \left(f + \frac{u^* \tan \varphi}{a} \right) u^* = - \frac{1}{a \rho^*} \frac{\partial P^*}{\partial \varphi} \quad (1.26)$$

$$\frac{Dw^*}{Dt} = - \frac{1}{\rho^*} \frac{\partial P^*}{\partial z} - g \quad (1.27)$$

1.2 La Ecuación de Conservación de la Masa.

La conservación de la masa se expresa en forma matemática por la ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial \rho^*}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{r}} \cdot (\rho^* \mathbf{V}_{\mathbf{r}}^*) = 0 \quad (1.28)$$

donde $\nabla_{\mathbf{r}}$ es el operador nabla tridimensional y $\mathbf{V}_{\mathbf{r}}$, el vector de la velocidad del aire.

Por supuesto que la ecuación (1.28) supone que no hay fuentes ni sumideros de masa en el sistema, lo que básicamente es correcto, a pesar de que en la atmósfera se presentan cambios de fase: como por ejemplo, la condensación del vapor de agua. La condensación del vapor de agua es un proceso que representa un sumidero para el vapor de agua, el cual es un constituyente de la atmósfera. Sin embargo, el vapor de agua junto con el bióxido de carbono constituyen en promedio menos del 1 % del total del gas atmosférico (Garduño R. y J. Adem, 1988); de la pequeña cantidad de vapor de agua contenido en el aire sólo una décima parte se encuentra arriba del nivel de condensación (4.5 km.); por consiguiente las variaciones en la densidad del aire debidas a la condensación son despreciables.

A pesar de todo, el papel del agua como vehículo energético en la atmósfera es muy importante. Al condensarse el vapor de agua se libera una cantidad considerable de calor latente contenido en el vapor de agua. Veremos en la siguiente sección, que este calor liberado es utilizado para aumentar la energía térmica de la atmósfera.

Usando la definición de derivada material:

$$\frac{D\rho^*}{Dt} = \frac{\partial \rho^*}{\partial t} + \mathbf{V}_{\mathbf{r}}^* \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \rho^* \quad (1.29)$$

obtenemos una expresión alternativa para la ecuación de continuidad:

$$\frac{D\rho^*}{Dt} + \rho^* \nabla_T \cdot \mathbf{V}_T^* = 0 \quad (1.30)$$

Los casos particulares de la ecuación de continuidad son los siguientes:

a) Fluido incompresible (líquidos):

$$\frac{D\rho^*}{Dt} = 0$$

por lo tanto

$$\nabla_T \cdot \mathbf{V}_T^* = 0 \quad (1.31)$$

b) Fluidos de densidad uniforme:

$$\rho^* = \text{constante}$$

Un fluido de densidad uniforme es incompresible, pero lo inverso no es cierto.

c) El caso estacionario:

$$\frac{\partial \rho^*}{\partial t} = 0$$

por lo tanto

$$\nabla_T \cdot (\rho^* \mathbf{V}_T^*) = 0 \quad (1.32)$$

En coordenadas esféricas, la ecuación de continuidad (1.28) toma la forma:

$$\frac{\partial \rho^*}{\partial t} + \frac{1}{r \cos \varphi} \left[\frac{\partial (\rho^* u^*)}{\partial \lambda} + \frac{\partial (\rho^* v^* \cos \varphi)}{\partial \varphi} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial (\rho^* r^2 w^*)}{\partial r} = 0 \quad (1.33)$$

Introduciendo la aproximación de una atmósfera delgada (1.4), la ecuación (1.33) se expresa como:

$$\frac{\partial \rho^*}{\partial t} + \frac{1}{a \cos \varphi} \left[\frac{\partial (\rho^* u^*)}{\partial \lambda} + \frac{\partial (\rho^* v^* \cos \varphi)}{\partial \varphi} \right] + \frac{\partial (\rho^* w^*)}{\partial r} = 0 \quad (1.34)$$

Esta forma de la ecuación de continuidad es consistente con el sistema de ecuaciones de movimiento (1.25) - (1.27).

1.3 La Ecuación de Conservación de Energía Térmica Aplicada a la Atmósfera.

Un sistema físico está constituido por alguna porción del universo con fronteras prescritas, las cuales lo separan de sus alrededores.

Las magnitudes físicas macroscópicas (temperatura, presión, densidad, etc.), que están relacionadas con el estado interno de un sistema, reciben el nombre de coordenadas o variables termodinámicas; mediante ellas puede determinarse la energía interna del mismo.

Experimentalmente se encuentra que existe un subconjunto de variables termodinámicas independientes tal, que una vez que han sido determinadas y se les ha asignado un valor numérico, los correspondientes valores numéricos de las variables restantes quedan automáticamente determinados. El estado termodinámico de un sistema está determinado por el valor numérico de las variables termodinámicas independientes.

Un sistema se encuentra en un estado de equilibrio termodinámico si las variables termodinámicas independientes no experimentan cambio alguno; es decir, si dichas variables toman valores definidos que permanecen constantes mientras existe el equilibrio termodinámico.

En la termodinámica clásica, los estados de equilibrio termodinámico pueden definirse en función de las variables termodinámicas independientes las que no dependen de la posición ni del tiempo.

En nuestro caso, el sistema físico de interés es la atmósfera. La atmósfera está formada por una mezcla de gases que pueden suponerse químicamente inertes; esta mezcla está constituida - en proporciones mas o menos constantes - de nitrógeno, oxígeno, argón, bióxido de carbono, y - en proporción variable - de vapor de agua.

Es evidente que la atmósfera no se encuentra en un estado de equilibrio termodinámico, pues en su interior existen fuerzas no equilibradas que continuamente están produciendo aceleraciones del fluido, remolinos turbulentos de diferente escala, ondas, etc.. En

la atmósfera no hay una temperatura, presión y densidad únicas que correspondan a todo el sistema; sino mas bien una distribución no uniforme de temperatura, presión y densidad, cuyos valores cambian continuamente en el tiempo

Sin embargo, lo anterior no implica que estamos incapacitados para tratar con sistemas que no se encuentran en estado de equilibrio termodinámico, como es el caso de la atmósfera.

Para determinar los cambios en la energía interna de la atmósfera en función de las correspondientes variables termodinámicas, formularemos ciertas hipótesis. Antes de ello, haremos algunos comentarios pertinentes acerca de la energía interna, en particular, de la energía interna de un gas ideal.

La energía interna de un sistema decrece cuando el sistema realiza trabajo sobre sus alrededores y se incrementa cuando se realiza trabajo sobre el sistema. Sin embargo, los cambios en la energía interna del sistema no son debidos únicamente a la ejecución de trabajo mecánico, pues existe otra forma de energía diferente al trabajo mecánico, llamada calor. Si el sistema no esta térmicamente aislado, el calor puede fluir hacia afuera o hacia dentro del sistema a través de sus fronteras, cambiando su energía interna.

Los cambios infinitesimales en la energía interna de un sistema están dados por la forma diferencial del Primer Principio de la Termodinámica (PPT):

$$Du^{\circ} = \hat{D}q^{\circ} - \hat{D}w^{\circ} \quad (1.35)$$

donde Du° es el cambio infinitesimal en la energía interna por unidad de masa; $\hat{D}q^{\circ}$, el cambio infinitesimal en la cantidad de calor por unidad de masa que entra o sale del sistema a través de sus fronteras; y $\hat{D}w^{\circ}$ el cambio infinitesimal en la cantidad de trabajo realizada por o sobre el sistema. Las diferenciales inexactas $\hat{D}q^{\circ}$ y $\hat{D}w^{\circ}$, indican que la cantidad de calor y el trabajo realizado no son funciones de las coordenadas termodinámicas que determinan al sistema, sino que depende de la trayectoria por la que dicho sistema pasa del estado inicial al estado final.

Una mezcla homogénea de gases químicamente inertes (como la atmósfera) que ejercen una presión hidrostática uniforme sobre sus alrededores es un ejemplo de sistema hidrostático. La formulación matemática del PPT para un sistema hidrostático es:

$$Du^* = \delta q^* - P^* d\alpha^* \quad (1.36)$$

donde P^* es la presión del gas, α^* su volumen específico, igual a $1/\rho^*$ y ρ^* su densidad.

En un gas ideal, la energía interna es sólo función de la temperatura absoluta T^* y por lo tanto sus cambios diferenciales están dados por:

$$Du^* = c_v DT^* \quad (1.37)$$

donde c_v es el calor específico del gas a volumen constante. En el rango de valores de temperatura observadas en la atmósfera, c_v puede ser considerado constante y su valor es:

$$c_v = 0.717 \text{ joules} \cdot \text{gr}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

Un gas ideal está gobernado por la ecuación de estado:

$$P^* V^* = n^* R^* T^* \quad (1.38)$$

donde n^* es el número de moles de gas en el volumen V^* y R^* es la constante universal de los gases.

Para un gas real, en el límite cuando la presión tiende a cero, la ecuación de estado toma la forma dada por (1.38). Para presiones inferiores a 2 atm., un gas real obedece aproximadamente la ecuación de estado (1.38).

Sustituyendo (1.37) en (1.36), se tiene que para un gas ideal el primer principio toma la forma:

$$c_v DT^* = \delta q^* - P^* d\alpha^* \quad (1.39)$$

Cada uno de los gases reales que constituyen la atmósfera puede ser considerado como un gas ideal, y la atmósfera en sí puede ser considerada como un gas ideal. De esta manera, la

energía interna de un determinado volumen de atmósfera que se encontrara en equilibrio termodinámico sería función sólo de la temperatura.

Como ya hemos comentado, la atmósfera no se encuentra en un estado de equilibrio termodinámico; en estas condiciones formularemos la siguiente hipótesis:

Hipótesis 1.1

a) Para cada determinado elemento de volumen V^* , del sistema total atmosférico, que se encuentra en la posición \vec{r} al tiempo t , es posible definir unívocamente las variables termodinámicas: presión $P^*(\vec{r}, t)$, densidad $\rho^*(\vec{r}, t)$ y temperatura $T^*(\vec{r}, t)$. Dichas cantidades dependen de la posición y el tiempo.

b) Cada uno de los gases que constituyen la atmósfera se comporta como un gas ideal; por consiguiente, de la ley de Dalton acerca de la suma de las presiones parciales, la atmósfera, como una mezcla de gases ideales, se comporta como un gas ideal y obedece la ecuación de estado:

$$P^* = \rho^* R T^* \quad (1.40)$$

c) La energía interna de la atmósfera depende sólo de la temperatura, y sus cambios con respecto al tiempo por unidad de masa están dados por la siguiente expresión:

$$\frac{D}{Dt} (c_v T^*) = \hat{\delta} q^* - P^* \frac{D}{Dt} \alpha^* \quad (1.41)$$

donde el operador D/Dt representa la razón de cambio siguiendo al movimiento o derivada material; $D(c_v T^*)/Dt$, la razón de cambio de la energía interna o energía térmica por unidad de masa; $\hat{\delta} q^*/Dt$, la razón a la cual la energía por unidad de masa es sumada al sistema por radiación, conducción molecular y condensación de vapor de agua en las nubes ($\hat{\delta} q^*/Dt$, no es la derivada material de q^* ya que $\hat{\delta} q^*$ no es una diferencial exacta); y $-P^* D\alpha^*/Dq^*$, la razón a la que el trabajo por unidad de masa es hecho por o sobre el sistema debido a su expansión o compresión, respectivamente.

La hipótesis 1.1 está basada en la hipótesis del equilibrio termodinámico local (García-Colín, 1975).

La parte a) de esta hipótesis de hecho ya fue aplicada a las ecuaciones de Lagrange para el fluido atmosférico (sección 1.1) y a la ecuación de continuidad (sección 1.2).

Ahora vamos a expresar la ecuación de conservación de energía térmica (1.41) en una forma más conveniente, para ello tenemos que:

$$\frac{D\alpha^*}{Dt} = \frac{D}{Dt} \frac{\rho^* D\alpha^*}{\rho^*} = - \frac{1}{\rho^*} \frac{D\rho^*}{Dt} ,$$

y de acuerdo con la ecuación de continuidad (1.30) se tiene que:

$$\frac{D\alpha^*}{Dt} = - \frac{1}{\rho^*} \nabla_T \cdot \mathbf{V}_T^* \quad (1.43)$$

Sustituyendo (1.43) en (1.41) obtenemos lo siguiente:

$$\frac{D}{Dt} (c_v T^*) = \frac{\hat{Q}}{Dt} - \frac{P^*}{\rho^*} \nabla_T \cdot \mathbf{V}_T^* \quad (1.44)$$

Para que la ecuación de conservación de energía térmica (1.44) pueda ser integrada sobre un gran volumen; es decir, toda la atmósfera, el sistema elemental debe ser cambiado de unidad de masa a unidad de volumen, para ello, multiplicamos la derivada material de $c_v T^*$ por la densidad ρ^* . Es decir:

$$\rho^* \frac{D}{Dt} (c_v T^*) = \rho^* \frac{\hat{Q}}{Dt} + \rho^* \mathbf{V}_T^* \cdot \nabla_T (c_v T^*) \quad (1.45)$$

Multiplicando ahora la ecuación de continuidad (1.28) por la cantidad $c_v T^*$ y sumando el resultado a (1.45), obtenemos que:

$$\rho^* \frac{D}{Dt} (c_v T^*) = \frac{\hat{Q}}{Dt} (\rho^* c_v T^*) + \nabla_T \cdot (\rho^* \mathbf{V}_T^* c_v T^*) \quad (1.46)$$

Multiplicando (1.44) por la densidad ρ^* y usando (1.46), obtenemos finalmente que:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho^* c_v T^*) + \nabla_T \cdot (\rho^* \mathbf{v}_T^* c_v T^*) = \dot{Q}_R^* + \dot{Q}_{CH}^* + \dot{Q}_C^* - P^* \nabla_T \cdot \mathbf{v}_T^* \quad (1.47)$$

en donde hemos usado el hecho de que:

$$\rho^* \frac{D}{Dt} q^* = \dot{Q}_R^* + \dot{Q}_{CH}^* + \dot{Q}_C^* \quad (1.48)$$

donde \dot{Q}_R^* , \dot{Q}_{CH}^* y \dot{Q}_C^* representan las razones a las cuales la energía por unidad de volumen es sumada al sistema por radiación, conducción molecular y condensación de vapor de agua, respectivamente.

Dado que se está considerando a la atmósfera como un gas ideal, sólo existe del lado derecho de la ecuación (1.47) el término de compresibilidad $-P^* \nabla_T \cdot \mathbf{v}_T^*$ y no existen términos adicionales que incluyan a la viscosidad molecular del gas. En el caso de un gas viscoso, dichos términos representan la razón a la que el trabajo por unidad de volumen es hecho por o sobre el sistema debido a la deformación de sus fronteras por los esfuerzos tangenciales. Según Miller (1950), la omisión de dichos términos no causa errores considerables en una gran variedad de problemas atmosféricos.

CAPITULO 2

LAS ECUACIONES BASICAS DE PRONOSTICO PARA LAS VARIABLES MEDIAS.

2.1 Las Variables Medias del Sistema Termodinámico y sus Fluctuaciones.

En la predicción numérica del tiempo a largo plazo (un mes o una estación) se pronostican las condiciones medias mensuales o estacionales del tiempo atmosférico y no las condiciones instantáneas, como en el caso de la predicción numérica del tiempo a corto plazo (uno a tres días). Dado que nuestro interés es la predicción al largo plazo, vamos a definir el valor medio mensual o estacional de cualquier variable de nuestro sistema termodinámico.

Sea $\Phi^*(\lambda, \varphi, z, t)$ cualquier variable atmosférica en el punto de coordenadas (λ, φ, z) y en el tiempo t . A su valor promediado en el tiempo sobre un período del orden de un mes o una estación lo llamaremos valor medio mensual o estacional. Así, el valor medio sobre el intervalo de tiempo Δt_0 , centrado en el tiempo t , está dado por la siguiente expresión:

$$\langle \Phi^*(\lambda, \varphi, z, t) \rangle = \frac{1}{\Delta t_0} \int_{t-1/2\Delta t_0}^{t+1/2\Delta t_0} \Phi^*(\lambda, \varphi, z, t') dt' \quad (2.1)$$

En general el valor medio de $\Phi^*(\lambda, \varphi, z, t)$ difiere de su valor real. Es decir:

$$\Phi^*(\lambda, \varphi, z, t) = \langle \Phi^*(\lambda, \varphi, z, t) \rangle + \Phi^{**}(\lambda, \varphi, z, t) \quad (2.2)$$

donde Φ^{**} es la desviación o fluctuación del valor medio de Φ^* . Las fluctuaciones de las variables atmosféricas tienen períodos que van de horas a días (Elsberry y Camp, 1978). Las fluctuaciones

en el campo de velocidad se denominan turbulencia. La turbulencia horizontal de escala sinóptica (10^5 a 10^6 mts.) debida a ciclones y anticiclones transitorios es generalmente parametrizada usando grandes coeficientes de difusión (coeficientes Austausch).

Consideremos ahora que ϕ^* y ψ^* son cualesquiera de nuestras variables que presentan desviaciones de sus valores medios y sea X^* una variable que no presenta una desviación de su valor medio. Es decir:

$$\left. \begin{aligned} \phi^* &= \langle \phi^* \rangle + \phi^{*H} \\ \psi^* &= \langle \psi^* \rangle + \psi^{*H} \\ X^* &= \langle X^* \rangle \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \langle \psi^{*H} \phi^{*H} \rangle &= \langle (\psi^* - \langle \psi^* \rangle) (\phi^* - \langle \phi^* \rangle) \rangle \\ &= \langle \psi^* \phi^* \rangle - \langle \psi^* \rangle \langle \phi^* \rangle - \langle \psi^* \rangle \langle \phi^* \rangle + \langle \psi^* \rangle \langle \phi^* \rangle \end{aligned} \quad (2.4)$$

y por otro lado:

$$\langle \psi^* \phi^* \rangle = \langle (\psi^* + \psi^{*H}) \phi^* \rangle = \langle \psi^* \phi^* \rangle + \langle \psi^{*H} \phi^* \rangle \quad (2.5)$$

De acuerdo con Reynolds (1895) y Miller (1950) vamos a enunciar los siguientes postulados:

Postulado 1.1. El valor medio del producto de una fluctuación de una variable por el valor medio de la misma o de otra variable es cero:

$$\langle \psi^{*H} \phi^* \rangle = 0$$

Postulado 1.2. El valor medio del producto de los valores medios de dos variables es igual al producto de los valores medios de las variables:

$$\langle \langle \psi^* \rangle \langle \phi^* \rangle \rangle = \langle \psi^* \rangle \langle \phi^* \rangle$$

Postulado 1.3. Las fluctuaciones del valor medio de cualquier par de variables están estadísticamente correlacionadas, de manera que $\langle \psi^{*n} \phi^{*n} \rangle$ es diferente de cero.

De acuerdo el postulado 1.1, (2.5) se reduce a :

$$\langle \psi^* \phi^* \rangle = \langle \langle \psi^* \rangle \langle \phi^* \rangle \rangle \quad (2.6)$$

de la misma manera

$$\langle \psi^* \phi^* \rangle = \langle \langle \psi^* \rangle \langle \phi^* \rangle \rangle \quad (2.7)$$

y según el postulado 1.2

$$\langle \psi^{*n} \phi^{*n} \rangle = \langle \psi^* \phi^* \rangle - \langle \psi^* \rangle \langle \phi^* \rangle \quad (2.9)$$

De acuerdo con el postulado 1.3 se tiene que $\langle \psi^* \phi^* \rangle \neq \langle \psi^* \rangle \langle \phi^* \rangle$.

Ahora determinemos el valor medio del producto $X^* \psi^* \phi^*$, recordando que X^* no presenta una desviación de su valor medio:

$$\begin{aligned} \langle X^* \psi^* \phi^* \rangle &= \langle \langle X^* \rangle \psi^* \phi^* \rangle \\ &= \langle X^* \rangle \langle \psi^* \phi^* \rangle \\ &= \langle X^* \rangle \langle \psi^* \rangle \langle \phi^* \rangle + \langle X^* \rangle \langle \psi^{*n} \phi^{*n} \rangle \end{aligned} \quad (2.10)$$

en donde hemos usado (2.9).

2.2 Las Ecuaciones de Conservación para las Variables Medias.

En esta sección vamos a derivar las ecuaciones de movimiento, la ecuación de continuidad, la ecuación de conservación de energía térmica y la ecuación de estado en la atmósfera para las variables medias. Para tal efecto vamos a suponer que la velocidad, la temperatura y la presión del fluido presentan desviaciones de sus valores medios; en cambio, vamos a suponer que las fluctuaciones o desviaciones del valor medio en la densidad son despreciables. Esto es:

$$\left. \begin{aligned} u^* &= \langle u \rangle + u^{**} \\ v^* &= \langle v \rangle + v^{**} \\ w^* &= \langle w \rangle + w^{**} \\ T^* &= \langle T \rangle + T^{**} \\ P^* &= \langle P \rangle + P^{**} \\ \rho^* &= \langle \rho \rangle \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

Consideremos en primer lugar las ecuaciones de movimiento (1.25) - (1.27). Por simplicidad, la fuerza de Coriolis no será tomada en cuenta ya que no es esencial en la derivación de las ecuaciones para las variables medias.

Tomando por ejemplo la ecuación (1.25) multiplicada por ρ^* :

$$\begin{aligned} \rho^* \frac{\partial u^*}{\partial t} + \frac{\rho^* u^*}{a \cos \varphi} \frac{\partial u^*}{\partial \lambda} + \frac{\rho^* v^*}{a} \frac{\partial u^*}{\partial \varphi} + \rho^* w^* \frac{\partial u^*}{\partial z} - \frac{\rho^* u^* v^* \tan \varphi}{a} \\ - \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial P^*}{\partial \lambda} \end{aligned} \quad (2.12)$$

donde hemos usado (1.22) para D/Dt . La ecuación de continuidad (1.34) multiplicada por u^* se puede expresar como:

$$\begin{aligned} u^* \frac{\partial \rho^*}{\partial t} + \frac{u^*}{a \cos \varphi} \frac{\partial (\rho^* u^*)}{\partial \lambda} + \frac{u^*}{a} \frac{\partial (\rho^* v^*)}{\partial \varphi} - \frac{\rho^* u^* v^* \tan \varphi}{a} \\ + u^* \frac{\partial (\rho^* w^*)}{\partial z} = 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

Sumando (2.12) y (2.13) obtenemos que:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho^* u^*) + \frac{1}{\text{acos}\varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda}(\rho^* u^* u^*) + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \varphi}(\rho^* u^* v^*) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho^* u^* w^*) - \frac{2\rho^* u^* v^* \tan\varphi}{a} = - \frac{1}{\text{acos}\varphi} \frac{\partial P^*}{\partial \lambda} \quad (1.14)$$

De la misma manera las ecuaciones (1.26) y (1.27), usando la ecuación de continuidad (1.34), pueden expresarse como:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho^* v^*) + \frac{1}{\text{acos}\varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda}(\rho^* u^* v^*) + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \varphi}(\rho^* v^* v^*) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho^* v^* w^*) + \frac{\rho^* u^* u^* \tan\varphi}{a} - \frac{\rho^* v^* v^* \tan\varphi}{a} = \frac{1}{a} \frac{\partial P^*}{\partial \varphi} \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho^* w^*) + \frac{1}{\text{acos}\varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda}(\rho^* u^* w^*) + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \varphi}(\rho^* v^* w^*) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho^* w^* w^*) - \frac{\rho^* w^* v^* \tan\varphi}{a} = - \frac{\partial P^*}{\partial z} - g \quad (2.16)$$

Tomando en los postulados de la sección 2.1, las relaciones (2.11), resulta que

$$\langle \rho^* u^* \rangle = \langle \rho^* \rangle \langle u^* \rangle, \quad \langle \rho^* v^* \rangle = \langle \rho^* \rangle \langle v^* \rangle \quad \text{y} \quad \langle \rho^* w^* \rangle = \langle \rho^* \rangle \langle w^* \rangle \quad (2.17)$$

y que

$$\left. \begin{aligned} \langle \rho^* u^* u^* \rangle &= \langle \rho^* \rangle \langle u^* u^* \rangle = \langle \rho^* \rangle \langle u^* \rangle \langle u^* \rangle + \langle \rho^* \rangle \langle u^{*''} u^{*''} \rangle \\ \langle \rho^* u^* v^* \rangle &= \langle \rho^* \rangle \langle u^* v^* \rangle = \langle \rho^* \rangle \langle u^* \rangle \langle v^* \rangle + \langle \rho^* \rangle \langle u^{*''} v^{*''} \rangle \\ \langle \rho^* u^* w^* \rangle &= \langle \rho^* \rangle \langle u^* w^* \rangle = \langle \rho^* \rangle \langle u^* \rangle \langle w^* \rangle + \langle \rho^* \rangle \langle u^{*''} w^{*''} \rangle \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

Promediando la ecuación de continuidad (1.34) por medio del operador (2.1) y usando (2.17), obtenemos que:

$$\frac{\partial \langle \rho^* \rangle}{\partial t} + \frac{1}{\text{acos}\varphi} \frac{\partial \langle \rho^* \rangle \langle u^* \rangle}{\partial \lambda} + \frac{1}{a} \frac{\partial \langle \rho^* \rangle \langle v^* \rangle}{\partial \varphi} - \frac{\langle \rho^* \rangle \langle v^* \rangle \tan\varphi}{a} + \frac{\partial \langle \rho^* \rangle \langle w^* \rangle}{\partial z} = 0 \quad (2.19)$$

es decir la ecuación de continuidad es igualmente válida para las variables medias.

Promediando ahora la ecuación de movimiento (2.14), usando (2.18) y reordenando términos resulta que:

$$\begin{aligned} \langle u^* \rangle \left[\frac{\partial \langle \rho^* \rangle}{\partial t} + \frac{1}{\text{acos}\varphi} \frac{\partial \langle \rho^* \rangle \langle u^* \rangle}{\partial \lambda} + \frac{1}{a} \frac{\partial \langle \rho^* \rangle \langle v^* \rangle}{\partial \varphi} - \frac{\langle \rho^* \rangle \langle v^* \rangle \tan\varphi}{a} + \frac{\partial \langle \rho^* \rangle \langle w^* \rangle}{\partial z} \right] + \langle \rho^* \rangle \left[\frac{\partial \langle u^* \rangle}{\partial t} + \frac{\langle u^* \rangle}{\text{acos}\varphi} \frac{\partial \langle u^* \rangle}{\partial \lambda} + \frac{\langle v^* \rangle}{a} \frac{\partial \langle u^* \rangle}{\partial \varphi} + \frac{\langle w^* \rangle}{\partial z} \langle u^* \rangle \right] - \frac{\langle \rho^* \rangle \langle u^* \rangle \langle v^* \rangle \tan\varphi}{a} - \frac{1}{\text{acos}\varphi} \frac{\partial \langle P^* \rangle}{\partial \lambda} + \left[\frac{1}{\text{acos}\varphi} \frac{\partial \tau_{\lambda\lambda}^*}{\partial \lambda} + \frac{1}{a} \frac{\partial \tau_{\lambda\varphi}^*}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{\lambda z}^*}{\partial z} \right] - \frac{2 \tan\varphi}{a} \tau_{\lambda\varphi}^* \end{aligned} \quad (2.20)$$

donde

$$\tau_{\lambda\lambda}^* = -\langle \rho^* \rangle \langle u^{*''} u^{*''} \rangle, \quad \tau_{\lambda\varphi}^* = -\langle \rho^* \rangle \langle u^{*''} v^{*''} \rangle, \quad \tau_{\lambda z}^* = -\langle \rho^* \rangle \langle u^{*''} w^{*''} \rangle \quad (2.21)$$

son los esfuerzos turbulentos de Reynolds (1845). En la ecuación (2.20) hemos supuesto que:

$$\frac{\partial \langle \rho^* u^* \rangle}{\partial t} = \frac{\partial \langle \rho^* u^* \rangle}{\partial t}$$

Usando la ecuación de continuidad (2.19) e incluyendo las aceleraciones de Coriolis, la ecuación (2.20) puede expresarse como:

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \langle u^* \rangle - \left(f + \frac{\langle u^* \rangle \operatorname{tang} \varphi}{a} \right) \langle v^* \rangle = & - \frac{1}{\operatorname{acos} \varphi} \frac{1}{\langle \rho^* \rangle} \frac{\partial \langle P^* \rangle}{\partial \lambda} + \\ \frac{1}{\langle \rho^* \rangle} \left(\frac{1}{\operatorname{acos} \varphi} \frac{\partial \tau_{\lambda\lambda}^*}{\partial \lambda} + \frac{1}{a} \frac{\partial \tau_{\lambda\varphi}^*}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{\lambda z}^*}{\partial z} \right) - \frac{2 \operatorname{tang} \varphi}{\langle \rho^* \rangle a} \tau_{\lambda\varphi}^* \end{aligned} \quad (2.22)$$

en donde el operador derivada material está dado por:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\langle u^* \rangle}{\operatorname{acos} \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{\langle v^* \rangle}{a} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \langle w^* \rangle \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.23)$$

Resumiendo, las ecuaciones de movimiento para las variables medias pueden expresarse como sigue:

$$\frac{D}{Dt} \langle u^* \rangle - \left(f + \frac{\langle u^* \rangle \operatorname{tang} \varphi}{a} \right) \langle v^* \rangle = - \frac{1}{\operatorname{acos} \varphi} \frac{1}{\langle \rho^* \rangle} \frac{\partial \langle P^* \rangle}{\partial \lambda} + F_{\lambda H}^* + F_{\lambda V}^* \quad (2.24)$$

$$\frac{D}{Dt} \langle v^* \rangle - \left(f + \frac{\langle u^* \rangle \operatorname{tang} \varphi}{a} \right) \langle u^* \rangle = - \frac{1}{\langle \rho^* \rangle a} \frac{\partial \langle P^* \rangle}{\partial \varphi} + F_{\varphi H}^* + F_{\varphi V}^* \quad (2.25)$$

$$\frac{D}{Dt} \langle w^* \rangle = - \frac{1}{\langle \rho^* \rangle} \frac{\partial \langle P^* \rangle}{\partial z} - g + F_{\varphi H}^* + F_{\varphi V}^* \quad (2.26)$$

donde las F^* en (2.24)-(2.26) son las fuerzas friccionales por unidad de masa debidas a la turbulencia del flujo; dichas fuerzas son de una escala mucho mayor que las fuerzas viscosas F_{μ}^* de las ecuaciones de movimiento (1.19)-(1.22), debidas a la interacción molecular. Las fuerzas F^* están dadas en términos de los esfuerzos turbulentos de Reynolds:

$$\begin{aligned}
F_{\lambda H}^* &= \frac{1}{\langle \rho \rangle} \left(\frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \tau_{\lambda \lambda}^* + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \varphi} \tau_{\lambda \varphi}^* \right) - \frac{2 \tan \varphi}{\langle \rho \rangle a} \tau_{\lambda \varphi}^* \\
F_{\lambda V}^* &= \frac{1}{\langle \rho \rangle} \frac{\partial}{\partial z} \tau_{\lambda z}^* \\
F_{\varphi H}^* &= \frac{1}{\langle \rho \rangle} \left(\frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \tau_{\varphi \lambda}^* + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \varphi} \tau_{\varphi \varphi}^* \right) + \frac{\tan \varphi}{\langle \rho \rangle a} (\tau_{\lambda \lambda}^* - \tau_{\varphi \varphi}^*) \\
F_{\varphi V}^* &= \frac{1}{\langle \rho \rangle} \frac{\partial}{\partial z} \tau_{\varphi z}^* \\
F_{zH}^* &= \frac{1}{\langle \rho \rangle} \left(\frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \tau_{\lambda \lambda}^* + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \varphi} \tau_{\lambda \varphi}^* \right) - \frac{\tan \varphi}{\langle \rho \rangle a} \tau_{z \varphi}^* \\
F_{zV}^* &= \frac{1}{\langle \rho \rangle} \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zz}^*
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Los términos en (2.27) que tienen como factor a $\tan \varphi / a$ son las fuerzas friccionales aparentes debidas a la curvatura del sistema de coordenadas.

En las ecuaciones (2.27) los esfuerzos de Reynolds están dados por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
\tau_{\varphi \lambda}^* &= \tau_{\lambda \varphi}^* = -\langle \rho^* \rangle \langle u^* v^* \rangle \\
\tau_{\varphi z}^* &= \tau_{z \varphi}^* = -\langle \rho^* \rangle \langle v^* w^* \rangle \\
\tau_{\lambda z}^* &= \tau_{z \lambda}^* = -\langle \rho^* \rangle \langle u^* w^* \rangle \\
\tau_{\lambda \lambda}^* &= -\langle \rho^* \rangle \langle u^* u^* \rangle \\
\tau_{\varphi \varphi}^* &= -\langle \rho^* \rangle \langle v^* v^* \rangle \\
\tau_{zz}^* &= -\langle \rho^* \rangle \langle w^* w^* \rangle
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Generalmente estos esfuerzos son parametrizados en términos de las derivadas espaciales de las componentes horizontales de la velocidad media del flujo y usando coeficientes de viscosidad turbulenta (Kasahara y Washington, 1967).

Ahora vamos a determinar la ecuación de conservación de energía térmica en la atmósfera para las variables medias.

Promediando la ecuación de conservación de energía térmica (2.17) por medio del operador (2.1), obtenemos que

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \rho^* c_v T^* \rangle + \nabla \cdot \langle \rho^* \mathbf{W}_T^* c T^* \rangle = \langle \dot{Q}_R^* \rangle + \langle \dot{Q}_{CH}^* \rangle + \langle \dot{Q}_C^* \rangle - \langle \mathbf{P}^* \nabla_T \cdot \mathbf{W}_T^* \rangle \quad (2.29)$$

en donde hemos supuesto que:

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t} (\rho^* c_v T^*) \right\rangle = \frac{\partial}{\partial t} \langle \rho^* c_v T^* \rangle$$

Usando los postulados de la sección anterior y las relaciones (2.11), resulta que (2.29) puede expresarse como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle c_v \rho^* \rangle \langle T^* \rangle + \nabla_T \cdot \langle c_v \rho^* \rangle \langle \mathbf{W}_T^* \rangle \langle T^* \rangle + \nabla_T \cdot \langle c_v \rho^* \rangle \langle \mathbf{W}_T^{*''} T^{*''} \rangle \\ = \langle \dot{Q}_R^* \rangle + \langle \dot{Q}_{CH}^* \rangle + \langle \dot{Q}_C^* \rangle + \langle M_p^* \rangle + \langle M_p^{*''} \rangle \end{aligned} \quad (2.30)$$

en donde M_p^* y $M_p^{*''}$ son denominados por Miller (1950) funciones de transformación y están dadas por:

$$\left. \begin{aligned} \langle M_p^* \rangle &= - \langle \mathbf{P}^* \rangle \cdot \nabla_T \cdot \langle \mathbf{W}_T^* \rangle \\ \langle M_p^{*''} \rangle &= - \langle \mathbf{P}^{*''} \rangle \cdot \nabla_T \cdot \langle \mathbf{W}_T^{*''} \rangle \end{aligned} \right\} \quad (2.31)$$

La función de transformación $\langle M_p^* \rangle$ aparece también en la ecuación de conservación de energía cinética media (Miller, 1950) pero con signo contrario, lo que implica que si $\langle M_p^* \rangle$ es positiva decrece la energía cinética y se incrementa la energía térmica; este proceso es conocido como calentamiento por compresión, el proceso contrario es conocido como enfriamiento por expansión. Por su parte, el término $\langle M_p^{*''} \rangle$ aparece en la ecuación de conservación de energía cinética turbulenta con signo contrario (Miller, 1950); en este caso los procesos de calentamiento por compresión o enfriamiento por expansión son debidos a la turbulencia del fluido.

Ahora vamos a expresar la ecuación de conservación de energía térmica (2.30) de una manera conveniente, para ello expresemos la ecuación de continuidad (2.19) en forma vectorial:

$$\frac{\partial \langle \rho^* \rangle}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{T}} \cdot (\langle \rho^* \rangle \langle \mathbf{V}_{\mathbf{T}}^* \rangle) = 0 \quad (2.32)$$

Por lo tanto, usando (2.32) en (2.30) obtenemos:

$$\begin{aligned} c_v \langle \rho^* \rangle \frac{\partial \langle T^* \rangle}{\partial t} + c_v \langle \rho^* \rangle \langle \mathbf{V}_{\mathbf{T}}^* \rangle \cdot \nabla_{\mathbf{T}} \langle T^* \rangle + \nabla_{\mathbf{T}} \cdot (\langle c_v \rho^* \rangle \langle \mathbf{W}_{\mathbf{T}}^{**} T^{**} \rangle) \\ = \langle \dot{Q}_R^* \rangle + \langle \dot{Q}_{CH}^* \rangle + \langle \dot{Q}_C^* \rangle + \langle \dot{M}_p^* \rangle + \langle \dot{M}_p^{**} \rangle \end{aligned} \quad (2.33)$$

Considerando que las fluctuaciones en la densidad son cero, puede demostrarse, con base en los postulados de la sección anterior, que la ecuación de estado (1.62) es igualmente válida para las variables medias. Es decir:

$$\langle P^* \rangle = \langle \rho^* \rangle R \langle T^* \rangle \quad (2.34)$$

La ecuación de conservación de la energía térmica (2.33) puede expresarse de una manera más compacta y conveniente; para ello usaremos la ecuación de continuidad (1.30) en la función de transformación $\langle M_p^* \rangle$, por lo que, de acuerdo con (1.30) y (2.31), obtenemos:

$$\langle \dot{M}_p^* \rangle = \frac{\langle P^* \rangle}{\langle \rho^* \rangle} \frac{D \langle \rho^* \rangle}{Dt} \quad (2.35)$$

Derivando la ecuación de estado (2.34) tenemos:

$$\frac{D \langle \rho^* \rangle}{Dt} = \frac{1}{R T} \frac{D \langle P^* \rangle}{Dt} - \frac{\rho^*}{T} \frac{D \langle T^* \rangle}{Dt} \quad (2.36)$$

Sustituyendo (2.36) en (2.35) y el resultado en (2.33), obtenemos la siguiente expresión para la ecuación de conservación de energía térmica:

$$c_p \rho \frac{D}{Dt} \langle T^* \rangle = \langle \dot{Q}^* \rangle + \frac{D}{Dt} \langle P^* \rangle \quad (2.37)$$

donde c_p es el calor específico a presión constante dado por:

$$c_p = c_v + R \quad (2.38)$$

y $\langle \dot{Q}^* \rangle$ es la razón de calentamiento en el sistema por unidad de volumen por unidad de tiempo, el cual está dado por:

$$\langle \dot{Q}^* \rangle = \langle \dot{Q}_R^* \rangle + \langle \dot{Q}_{CH}^* \rangle + \langle \dot{Q}_C^* \rangle + \langle M_p^{*''} \rangle - \nabla_T \cdot (c_v \langle \rho^* \rangle \langle W_T^{*''} T^{*''} \rangle) \quad (2.39)$$

Otra manera alterna de expresar la ecuación de conservación de energía térmica es la siguiente:

$$\frac{D}{Dt} \langle \rho^* \rangle = \frac{1}{\gamma R \langle T^* \rangle} \frac{D}{Dt} \langle P^* \rangle - \frac{\langle \dot{Q}^* \rangle}{c_p \langle T^* \rangle} \quad (2.40)$$

donde $\gamma = c_p/c_v$.

En el sistema de ecuaciones (2.19), (2.24), (2.25), (2.33), y (2.34), λ , φ , z y t son las variables independientes y $\langle u^* \rangle$, $\langle v^* \rangle$, $\langle w^* \rangle$, $\langle \rho^* \rangle$, $\langle T^* \rangle$ y $\langle P^* \rangle$ son las variables dependientes. $\langle u^* \rangle$, $\langle v^* \rangle$, $\langle w^* \rangle$, $\langle \rho^* \rangle$ y $\langle T^* \rangle$ son variables de pronóstico ya que hay ecuaciones correspondientes para la razón de cambio local en el tiempo (tendencias) de dichas variables. Por su parte $\langle P^* \rangle$ es una variable de diagnóstico, ya que si $\langle \rho^* \rangle$ y $\langle T^* \rangle$ son conocidas, $\langle P^* \rangle$ puede ser determinada de la ecuación de estado (2.34).

Si las fuerzas friccionales F^* dadas por (2.27), las funciones de calentamiento $\langle \dot{Q}_R^* \rangle$, $\langle \dot{Q}_{CH}^* \rangle$ y $\langle \dot{Q}_C^* \rangle$, la función de transformación $\langle M_p^{*''} \rangle$ y el transporte turbulento de calor $\langle W_T^{*''} T^{*''} \rangle$ son expresados como funciones de las variables dependientes (relaciones constitutivas), el sistema de ecuaciones antes mencionado junto con las condiciones de frontera y las condiciones iniciales apropiadas forman un conjunto completo. Es decir, el número de incógnitas es igual al número de ecuaciones, por lo tanto la evolución de las variables dependientes para $t > t_0$ puede,

en principio, ser determinada, con tal de que las variables dependientes sean conocidas en el momento inicial $t = t_0$.

Sin embargo, las funciones de calentamiento y el transporte turbulento vertical de calor en la superficie de la Tierra (calor sensible) dependen también de variables que no corresponden a la atmósfera sino a la superficie de la Tierra; una de estas variables es la temperatura de la superficie, de continentes y océanos.

La evolución de las variables dependientes que corresponden a la superficie de la Tierra puede ser determinada a partir de los mismos principios de conservación usados para la atmósfera, pero aplicados adecuadamente a los océanos y continentes.

2.3 La Aproximación Hidrostática y las Ecuaciones Primitivas para las Variables Medias.

Supongamos, por el momento, que la atmósfera se encuentra en un estado de equilibrio estático; de manera que la fuerza debida al gradiente vertical de presión está exactamente balanceado con la fuerza de gravedad. Para expresar lo anterior de manera matemática, consideremos una columna vertical de aire con sección transversal de área unitaria. Tomemos de esta columna una rebanada de espesor Δz ; sea ρ^* la densidad de la rebanada y sean P^* y $P^* + \Delta P^*$ las presiones en el fondo y en el tope de la rebanada, respectivamente. El peso de la rebanada producido por la fuerza de gravedad está dado por $-\rho^* g \Delta z$. Por lo tanto, la ecuación de la fuerza neta sobre la rebanada es $P^* - (P^* + \Delta P^*) - \rho^* g \Delta z = 0$, donde las fuerzas que actúan hacia abajo han sido prefijadas con un signo negativo. De esta manera tenemos que la relación entre la presión y la altura está dada por: $\Delta P^* = -\rho^* g \Delta z$, o, en forma diferencial, por:

$$\frac{\partial P^*}{\partial z} = -\rho^* g \quad (2.41)$$

La ecuación (2.41) es conocida como la ecuación de equilibrio hidrostático.

Considerando los postulados de la sección 2.1, encontramos que la ecuación de equilibrio hidrostático es igualmente válida para las variables medias. Es decir:

$$\frac{\partial \langle P^* \rangle}{\partial z} = -\langle \rho^* \rangle g \quad (2.42)$$

Para movimientos de gran escala de la atmósfera, la extensión horizontal de movimiento es mucho más grande que la vertical; puede demostrarse, por análisis de escala, que la aceleración vertical en (2.26) puede ser despreciable y que las fuerzas friccionales turbulentas F_{zH}^* y F_{zV}^* son del mismo orden que $D\langle w^* \rangle / Dt$ (Charney, 1948), de manera que la ecuación de movimiento vertical (2.26) se reduce a la ecuación de equilibrio hidrostático (2.42). En otras palabras, si consideramos en un determinado punto

de la superficie de la Tierra una columna vertical de aire, cuya sección transversal sea mucho menor que la extensión horizontal de movimiento, entonces el aire en esta columna está aproximadamente en equilibrio hidrostático.

Las ecuaciones de movimiento horizontal (2.14) y (2.15), la ecuación de equilibrio hidrostático (2.42), la ecuación de continuidad (2.19), la ecuación de conservación de energía térmica (2.33) y la ecuación de estado (2.34) constituyen el sistema de ecuaciones primitivas. La suposición de equilibrio hidrostático modifica los modos normales de oscilación del sistema original de ecuaciones, pues elimina las ondas de sonido (Haltiner, 1980).

Un aspecto de las ecuaciones primitivas es que la velocidad vertical $\langle w \rangle$ no puede ser determinada de una ecuación de pronóstico ya que $D\langle w \rangle/Dt$ ha sido eliminada.

El sistema de ecuaciones primitivas consiste de cuatro ecuaciones de pronóstico para $\langle u \rangle$, $\langle v \rangle$, $\langle T \rangle$ y $\langle \rho \rangle$ y dos ecuaciones de diagnóstico, la de estado (2.34) y la de equilibrio hidrostático (2.42). Sin embargo, la velocidad vertical puede ser determinada de este sistema de ecuaciones en donde, por definición, se impone la condición de equilibrio hidrostático: Richardson (1922) es el primero en derivar una ecuación de diagnóstico, y, posteriormente, J. Adem desarrolla un método cinemático (Adem, 1967), para determinar w .

Los modelos de alta resolución, como son los MEP y los MCGA, están formulados con base en las ecuaciones primitivas usando ciertas parametrizaciones de las fuentes y sumideros de calor en el sistema y de las fuerzas friccionales turbulentas. Nosotros simplifizaremos las ecuaciones primitivas para derivar el MTCV, basándonos en todo momento en el MTC de J. Adem.

A partir de la siguiente sección los paréntesis triangulares $\langle \rangle$, que representan los promedios en el tiempo de las variables atmosféricas, serán omitidos para simplificar la escritura; sólo serán usados en casos completamente necesarios; sin embargo, debemos de tener presente que las variables que no lleven estos paréntesis, representan variables promediadas en el tiempo según la definición (2.1).

2.4 Determinación de la Velocidad Vertical. La ecuación de la Tendencia de la Presión.

Hemos mencionado en la sección anterior que la velocidad vertical w^* no puede ser determinada de una ecuación de pronóstico, pues Dw^*/Dt ha sido eliminada del sistema de ecuaciones primitivas. Sin embargo, la velocidad vertical puede ser determinada por dos métodos en donde, por definición, se impone la condición de equilibrio hidrostático. El primero fue desarrollado por Richardson (1922) y posteriormente por Kasahara y Washington (1967); el segundo, denominado método cinemático, fue desarrollado por J. Adem (1967).

Consideremos el primer método (método de Richardson). La velocidad vertical w^* es calculada de tal manera que la ecuación termodinámica (2.40) y la ecuación de continuidad (2.32) sean satisfechas y que la condición de equilibrio hidrostático se mantenga en todo momento.

Por lo tanto, expresemos la ecuación de continuidad (2.32) en la siguiente forma:

$$\frac{\partial \rho^*}{\partial t} = -V_H^* \cdot \nabla \rho^* - \rho^* \nabla \cdot V_H^* - \frac{\partial (\rho^* w^*)}{\partial z} \quad (2.43)$$

en donde V_H^* es la velocidad horizontal del viento y ∇ es el operador nabla horizontal bidimensional.

Sustituyendo la ecuación de equilibrio hidrostático (2.42) en el lado izquierdo de la ecuación (2.43) e integrando la ecuación resultante de z al tope de la atmósfera, cuya altura denotamos por z_T , obtenemos la ecuación de la tendencia de la presión:

$$\frac{\partial P^*}{\partial t} = B + g \rho^* w^* - g \int_z^{z_T} V_H^* \cdot \nabla \rho^* dz' - g \int_z^{z_T} \rho^* \nabla \cdot V_H^* dz' \quad (2.44)$$

donde $B = \partial P^* / \partial t$ evaluado en $z = z_T$. En la derivación de (2.44) se utiliza la siguiente condición de frontera:

$$w^* = 0 \text{ en } z = z_T \quad (2.45)$$

Usando la ecuación hidrostática (2.42), podemos reescribir la ecuación (2.44) en la forma:

$$\frac{D P^*}{D t} = B + J_1^* \quad (2.46)$$

donde

$$J_1^* = W_H^* \cdot \nabla P^* - g \int_z^{z_T} W_H^* \cdot \nabla \rho^* dz' - g \int_z^{z_T} \rho^* \nabla \cdot W_H^* dz' \quad (2.47)$$

y donde hemos usado la definición de derivada material:

$$\frac{D}{D t} = \frac{\partial}{\partial t} + W_H^* \cdot \nabla + w^* \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.48)$$

Ahora, sustituyendo la ecuación termodinámica (2.40) en la ecuación de continuidad (2.43), expresada de la siguiente forma:

$$\frac{D \rho^*}{D t} + \rho^* \nabla \cdot W_H^* + \rho^* \frac{\partial w^*}{\partial z} = 0 \quad (2.49)$$

encontramos que:

$$\frac{\partial w^*}{\partial z} = -\nabla \cdot W_H^* - \frac{1}{\gamma P^*} \frac{D P^*}{D t} + \frac{1}{\gamma} \frac{R Q^*}{c_v P^*} \quad (2.50)$$

Sustituyendo (2.46) en (2.50) e integrando la ecuación resultante de $z=0$ a alguna altura z , obtenemos:

$$w^* = - \int_0^z \nabla \cdot W_H^* dz' - \frac{1}{\gamma} \int_0^z \frac{1}{P^*} [B + J_1^*] dz' + \frac{1}{\gamma} \int_0^z \frac{R Q^*}{c_v P^*} dz' \quad (2.51)$$

en donde hemos supuesto la siguiente condición de frontera:

$$w^* = 0 \text{ en } z = 0 \quad (2.52)$$

En la ecuación (2.51), el término B, que es la tendencia de la presión en $z=z_T$, es aún desconocido, pero puede ser determinado de manera tal que (2.51) cumpla la condición de frontera (2.45). De esta manera llegamos a:

$$B = \frac{\gamma \int_0^{z_T} v \cdot v_H^* dz + \int_0^{z_T} \frac{1}{P^*} J_1^* dz - \int_0^{z_T} \frac{R \dot{Q}^*}{C_v P^*} dz}{-\int_0^{z_T} \frac{1}{P^*} dz} \quad (2.53)$$

Una ecuación para w^* fue derivada por Richardson (1922). En su derivación él considera que DP^*/Dt se hace cero en el tope de la atmósfera en donde $P^* = 0$ en vez de la condición (2.45).

Ahora consideremos el segundo método. La ecuación de continuidad (2.43) contiene el viento vertical y su primera derivada con respecto a la coordenada vertical; es decir:

$$\frac{\partial w^*}{\partial z} + Q_1^* w^* = Q_2^* \quad (2.54)$$

donde

$$Q_1^* = -\frac{1}{\rho^*} \frac{\partial \rho^*}{\partial z}$$

$$Q_2^* = -\frac{1}{\rho^*} v_H^* \cdot \nabla \rho^* - v \cdot v_H^* - \frac{1}{\rho^*} \frac{\partial \rho^*}{\partial t} \quad (2.55)$$

Usando la ecuación de equilibrio hidrostático (2.42) en el último término de Q_2^* , tenemos que:

$$Q_2^* = -\frac{1}{\rho^*} v_H^* \cdot \nabla \rho^* - v \cdot v_H^* - \frac{1}{g \rho^*} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial P^*}{\partial t} \right) \quad (2.56)$$

Por lo tanto, si conocemos v_H^* , ρ^* y $\partial P^*/\partial t$ entonces podemos

calcular w^* de (2.54) resolviendo una ecuación diferencial de primer orden.

La solución de (2.54) está dada por:

$$w^* = \frac{1}{Q_3^*} \int Q_2^* Q_3^* dz + C_2 / \rho^* \quad (2.57)$$

donde C_2 es una función arbitraria de las coordenadas espaciales X , Y y del tiempo t , y

$$Q_3^* = \exp \left\{ \int Q_1^* dz \right\} \quad (2.58)$$

Considerando la condición de frontera (2.52), de (2.57) podemos determinar C_2 :

$$C_2 = -(\rho^*)_{z=0} \left\{ \frac{1}{Q_3^*} \int Q_2^* Q_3^* dz \right\} \quad (2.59)$$

Sustituyendo (2.59) en (2.57) obtenemos que:

$$w^* = F_W^* - \frac{(\rho^*)_{z=0}}{\rho^*} [F_W^*]_{z=0} \quad (2.60)$$

donde

$$F_W^* = \frac{1}{Q_3^*} \int Q_2^* Q_3^* dz \quad (2.61)$$

De la misma manera que en el método de Richardson, podemos determinar de (2.60) la tendencia de la presión en el tope $z=Z_T$, usando la condición de frontera (2.45). De esta manera obtenemos que B satisface la siguiente ecuación:

$$0 = [F_W^*]_{z=Z_T} - \frac{(\rho^*)_{z=0}}{(\rho^*)_{z=Z_T}} [F_W^*]_{z=0} \quad (2.62)$$

donde B está contenida implícitamente en los términos $[F_W^*]_{z=Z_T}$ y $[F_W^*]_{z=0}$.

CAPITULO 3.

LAS ECUACIONES BASICAS DEL MODELO TERMODINAMICO DEL CLIMA CON VORTICIDAD (MTCV).

3.1 Análisis de Escala de las Ecuaciones de Movimiento para su Aplicación al MTCV.

Para estimar las magnitudes de los diferentes términos en las ecuaciones de movimiento (2.24) a (2.26) para un cierto tipo de movimiento, es necesario llevar a cabo un análisis de escala especificando las siguientes cantidades: a) la magnitud de las variables atmosféricas; b) las amplitudes de sus fluctuaciones y c) la longitud, el espesor y la escala de tiempo característicos en los que estas fluctuaciones ocurren.

Las ecuaciones (2.24) a (2.26) describen una gama muy amplia de movimientos atmosféricos. Por ejemplo, las ondas de sonido y gravedad son soluciones perfectamente válidas de estas ecuaciones. Sin embargo, las ondas de sonido son despreciables en los problemas meteorológicos. Las ondas de sonido son eliminadas completamente al considerar la aproximación hidrostática expresada en la ecuación (2.36).

Ahora, para simplificar las ecuaciones de movimiento horizontal (2.24) y (2.25) a movimientos de escala sinóptica, vamos a definir las siguientes escalas características de las variables atmosféricas, basadas en los datos observados para sistemas sinópticos de latitudes medias.

| | |
|--|---|
| Escala horizontal de velocidad: | $U = 10 \text{ m seg}^{-1}$ |
| Escala vertical de velocidad: | $W = 1 \text{ cm seg}^{-1}$ |
| Longitud característica: | $L = 10^6 \text{ m}$ |
| Espesor característico: | $D = 10^4 \text{ m}$ |
| Escala de la fluctuación horizontal de la presión atmosférica: | $\Delta P/\rho = \text{m}^2 \text{ seg}^{-1}$ |
| Tiempo característico: | $L/U = 10^5 \text{ seg}$ |

Las fluctuaciones horizontales AP están normalizadas por la densidad ρ para tener una escala característica válida para cualquier altura en la troposfera, lo que básicamente es correcto pues AP y ρ decrecen aproximadamente de manera exponencial con la altura.

El MTCV se aplicará al Hemisferio Norte entre 15° y 90° de latitud por lo que es conveniente considerar movimientos centrados en la latitud $\varphi = 45^\circ$, e introducir la siguiente notación:

$$f_0 = 2\Omega \sin\varphi_0 = 2\Omega \cos\varphi_0 \approx 10^{-4} \text{seg}^{-1}$$

La tabla 3.1 muestra la magnitud característica de cada término en (2.24) y (2.25) para sistemas de escala sinóptica de latitudes medias. Las fuerzas friccionales turbulentas $F_{\lambda H}^*$, $F_{\lambda V}^*$, etc., no están incluidas en este análisis de escala. Dichas fuerzas no han sido aún parametrizadas en términos de las variables atmosféricas y por consiguiente no es posible por el momento determinar la magnitud de estas fuerzas en las ecuaciones de movimiento. En el Capítulo 5 daremos una parametrización de las fuerzas friccionales turbulentas.

Tabla 3.1 Análisis de escala de las ecuaciones de movimiento horizontal.

| | A | B | C | D | E |
|--|-----------------|-----------------------------------|-----------|----------------------------|---|
| Componente Zonal. | $\frac{du}{dt}$ | $w \frac{\partial u}{\partial z}$ | $f v$ | $\frac{uv}{a} \tan\varphi$ | $-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$ |
| Componente Meridional. | $\frac{dv}{dt}$ | $w \frac{\partial v}{\partial z}$ | $f u$ | $\frac{vu}{a} \tan\varphi$ | $-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$ |
| Escala de los términos. | $\frac{U^2}{L}$ | $\frac{W U}{D}$ | $f_0 U$ | $\frac{U^2}{a}$ | $\frac{\Delta P}{\rho L}$ |
| Magnitud de los términos (en seg^{-2}) | 10^{-4} | 10^{-5} | 10^{-3} | 10^{-5} | 10^{-3} |

En la tabla 3.1, por simplicidad, hemos definido X y Y como las distancias de oeste a este y de sur a norte, respectivamente, tal que $dx = a \cos\varphi d\lambda$ y $dy = a d\varphi$; de este modo:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial X} &= \frac{1}{a \cos\varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial}{\partial Y} &= \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

Además, en la tabla 3.1 hemos introducido el operador de derivada material horizontal d/dt , definido de la siguiente manera:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u^* \frac{\partial}{\partial X} + v^* \frac{\partial}{\partial Y} \quad (3.2)$$

Es decir, usando (3.1) el operador de derivada material D/Dt , dado por (2.23), puede expresarse en términos de d/dt como sigue:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{d}{dt} + w^* \frac{\partial}{\partial Z} \quad (3.3)$$

Es claro de la tabla (3.1) que para movimientos de escala sinóptica en latitudes medias, la fuerza de Coriolis (término C) y la fuerza debida al gradiente horizontal de presión (término E) están aproximadamente en balance. Por consiguiente, si únicamente se retienen estos dos términos en las ecuaciones (2.24) y (2.25) obtenemos lo que se conoce como la relación geostrofica:

$$-fv^* = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P^*}{\partial X} \quad (3.4)$$

$$fu^* = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P^*}{\partial Y} \quad (3.5)$$

El balance geostrofico dado por (3.4) y (3.5) no contiene al tiempo explícitamente y por lo tanto no puede ser usado para predecir la evolución del campo de velocidad horizontal. Es por esta razón que la relación geostrofica se considera una relación de diagnóstico.

Si definimos los vectores unitarios \hat{i} y \hat{j} , tangentes a la superficie de la tierra en algún punto en las direcciones oeste-este y sur-norte, respectivamente, entonces es posible

definir el vector de velocidad horizontal, $v_g = \hat{i}u_g + \hat{j}v_g$, llamado velocidad del viento geostrófico, el cual satisface idénticamente (3.4) y (3.5). En forma vectorial tenemos:

$$v_g^* = \hat{k} \times \frac{1}{\rho f} \nabla p^* \quad (3.6)$$

donde \hat{k} es el vector unitario normal a la superficie de la Tierra y apunta hacia arriba; $\nabla = \hat{i}\partial/\partial x + \hat{j}\partial/\partial y$, es el operador nabla bidimensional horizontal.

De acuerdo con (3.6), conociendo la distribución del campo de presión y de densidad en cualquier tiempo, podemos determinar la velocidad del viento geostrófico. En su versión actual el MTC utiliza el viento geostrófico para incorporar el transporte horizontal de calor por viento (Adem, 1970b).

Nuestro interés es tener una dinámica explícita en el MTC; concretamente, nuestro objetivo fundamental es incorporar la ecuación de la vorticidad en el MTC y con ello tratar de pronosticar la dinámica a largo plazo y mejorar las predicciones del campo térmico. Para esto es necesario retener la aceleración del viento (término A) en las ecuaciones (2.24) y (2.25). La aproximación resultante de las ecuaciones de movimiento horizontal es la siguiente:

$$\frac{d u^*}{d t} - f v^* = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial x} + F_x^* \quad (3.7)$$

$$\frac{d v^*}{d t} + f u^* = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial y} + F_y^* \quad (3.8)$$

donde F_x^* y F_y^* son las fuerzas friccionales turbulentas en las direcciones X y Y, respectivamente, las que retendremos en las ecuaciones de movimiento. De acuerdo con (2.24) y (2.25) F_x^* y F_y^* están dadas por:

$$\left. \begin{aligned} F_x^* &= F_{xv}^* + F_{xH}^* \\ F_y^* &= F_{yv}^* + F_{yH}^* \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

en donde, por consistencia de notación hemos cambiado los subíndices λ y ϕ por X y Y, respectivamente.

En las ecuaciones (3.7) y (3.8) tenemos según, la tabla 3.1, que los términos de aceleración son alrededor de un orden de magnitud más pequeños que la fuerza de Coriolis y la fuerza debida a los gradientes de presión. Una medida conveniente de la magnitud de la aceleración comparada con la fuerza de Coriolis, es obtenida a través de la razón de las escalas características para los términos de aceleración y de la fuerza de Coriolis. Esta razón es un número adimensional conocido como número de Rossby R_0 :

$$R_0 = \frac{U^2/L}{f_0 U} = \frac{U}{f_0 L} \quad (3.10)$$

La pequeñez de este número garantiza la validez de la aproximación geostrófica. En el caso de sistemas sinópticos de latitudes medias se tiene que $R_0 \approx 0.1$. Para el caso de escala planetaria en donde $L \approx 10^7$ m, se tiene que $R_0 \approx 0.01$, por lo que el usar la aproximación geostrófica en sistemas de escala planetaria, resulta mejor que usarla en sistemas de escala sinóptica. Los sistemas atmosféricos que describe el MTC corresponden a escala planetaria en latitudes medias, por lo que el usar viento geostrófico resulta una excelente aproximación.

La ecuación de continuidad consistente con las dos ecuaciones de movimiento horizontal (3.7) y (3.8), puede ser obtenida de (2.19) eliminando el término de curvatura $-\rho^* v^* \tan \phi / a$ y usando (3.1). Es decir:

$$\frac{\partial \rho^*}{\partial t} + \frac{\partial (\rho^* u^*)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho^* v^*)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho^* w^*)}{\partial z} = 0 \quad (3.11)$$

En esta sección hemos tomado a los vectores unitarios \hat{i} , \hat{j} en las direcciones oeste-este y sur-norte, respectivamente. Sin embargo, en general, el sistema de coordenadas (X, Y, Z) , en donde los vectores unitarios \hat{i} , \hat{j} son tangentes a la superficie de la tierra y perpendiculares entre sí y donde el vector unitario \hat{k} es normal a la superficie de la tierra apuntando hacia arriba, puede estar rotado arbitrariamente alrededor del eje Z (prolongación del vector unitario \hat{k}), de manera que las direcciones de los vectores unitarios \hat{i} , \hat{j} no sean necesariamente oeste-este y sur-norte, respectivamente.

3.2 La Aproximación Hidrostática y el Perfil de Temperatura en el MTC.

En el MTC se considera un perfil de temperatura absoluta tal que el gradiente vertical de temperatura es independiente de la altura, pero en general puede depender de las coordenadas horizontales y del tiempo, es decir:

$$\frac{\partial T^*}{\partial z}(x, y, z, t) = -\beta(x, y, t) \quad (3.12)$$

donde $\beta(x, y, t)$ es el gradiente vertical de temperatura, el cual es independiente de z .

El MTC se aplica a una capa troposférica de altura constante H_0 . En la superficie $z = H_0$, la temperatura, la presión atmosférica, y la densidad del aire están representadas por T , P , y ρ , respectivamente. La figura 3.1 muestra esquemáticamente la capa troposférica, donde se aplica el MTC y las variables de estado en el tope $z = H_0$, a cualquier altura z y en la superficie de la Tierra.

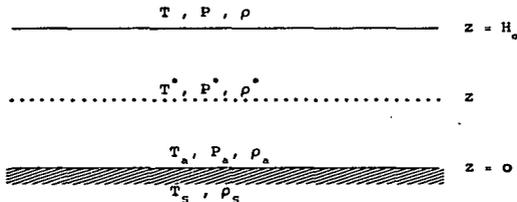


Figura 3.1 Capa troposférica, donde se aplica el MTC y las variables de estado: en el tope $z = H_0$, a cualquier altura z y en la superficie de la Tierra.

En la figura 3.1, T^* , P^* , y ρ^* son la temperatura, la presión y la densidad a cualquier altura z , respectivamente; T_s , P_s y ρ_s son los correspondientes valores en $z = 0$; T_s y ρ_s son la

temperatura y la densidad de la superficie de la Tierra, respectivamente.

Integrando (3.12) desde cualquier altura z a $z = H_0$, obtenemos el perfil de temperatura en algún punto de la capa troposférica a cualquier tiempo t :

$$T^*(x,y,z,t) = -\beta(x,y,t) [z - H_0] + T(x,y,t) \quad (3.13)$$

Ahora vamos a obtener dos relaciones: una entre la presión y la temperatura y otra entre la densidad y la temperatura, tales que la condición de equilibrio hidrostático se cumpla; para ello vamos a utilizar la ecuación de equilibrio hidrostático (2.36), la ecuación de estado (2.34) y el perfil de temperatura (3.13). De esta manera, de (2.34), (2.36) y (3.13) se sigue que:

$$P^* = F(x,y,t) T^{*\alpha} \quad (3.14)$$

$$\rho^* = F(x,y,t) T^{*\alpha-1} \quad (3.15)$$

donde $\alpha = g/RB$ y $F(x,y,t)$ es una función arbitraria de X , Y y el tiempo t . Para $z = H_0$, obtenemos que:

$$F(x,y,t) = \frac{P}{T^\alpha} \quad (3.16)$$

Usando (3.16) en (3.14) y (3.15) obtenemos las relaciones esperadas (Adem, 1962 y 1967):

$$P^* = P \left(T^* / T \right)^\alpha \quad (3.17)$$

$$\rho^* = \rho \left(T^* / T \right)^{\alpha-1} \quad (3.18)$$

Considerando que T^* está dada como función de z por la relación (3.13), entonces las fórmulas o relaciones (3.17) y (3.18) expresan de manera explícita a P^* y ρ^* como funciones de la altura z .

Las fórmulas o relaciones (3.13), (3.17) y (3.18), serán usadas en el MTCV.

3.3 Las Ecuaciones de la Vorticidad y de la Divergencia en el MTCV.

En el MTC Adem considera que el viento es geostrófico, por lo que de acuerdo con (3.6) tendremos que las componentes de la velocidad del viento están dadas por:

$$u^* = - \frac{1}{f\rho^*} \frac{\partial P^*}{\partial y} \quad (3.19)$$

$$v^* = \frac{1}{f\rho^*} \frac{\partial P^*}{\partial x} \quad (3.20)$$

Sustituyendo (3.12) y (3.18) en (3.19) y (3.20), y usando (3.13) encontramos que:

$$u^* = - \frac{R T^*}{f P^*} \frac{\partial P^*}{\partial y} + \frac{(H_0 - z)}{f T^*} g \frac{\partial T^*}{\partial y} + \frac{F_1^*}{f \beta} g \frac{\partial \beta}{\partial y} \quad (3.21)$$

$$v^* = \frac{R T^*}{f P^*} \frac{\partial P^*}{\partial x} - \frac{(H_0 - z)}{f T^*} g \frac{\partial T^*}{\partial x} - \frac{F_1^*}{f \beta} g \frac{\partial \beta}{\partial x} \quad (3.22)$$

donde

$$F_1^* = z - H_0 + (T^*/\beta) \ln (T^*/T)$$

Adem ha demostrado en numerosos experimentos (Adem, 1967;1970b) que β puede ser considerado constante sin modificar esencialmente el viento geostrófico ni el transporte horizontal de calor por viento medio; en el caso en que β sea constante, las ecuaciones (3.21) y (3.22) se reducen a:

$$u^* = - \frac{R T^*}{f P^*} \frac{\partial P^*}{\partial y} + \frac{(H_0 - z)}{f T^*} g \frac{\partial T^*}{\partial y} \quad (3.23)$$

$$v^* = \frac{R T^*}{f P^*} \frac{\partial P^*}{\partial x} - \frac{(H_0 - z)}{f T^*} g \frac{\partial T^*}{\partial x} \quad (3.24)$$

Si en lugar de usar (3.19) y (3.20) usamos las ecuaciones más generales (3.7) y (3.8), entonces llegamos a las siguientes ecuaciones:

$$\frac{du^*}{dt} - fv^* = -\frac{R}{f} \frac{T^*}{P} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{(H_0 - z)}{f T} g \frac{\partial T}{\partial x} + F_x^* \quad (3.25)$$

$$\frac{dv^*}{dt} + fu^* = -\frac{R}{f} \frac{T^*}{P} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{(H_0 - z)}{f T} g \frac{\partial T}{\partial y} + F_y^* \quad (3.26)$$

Para movimientos de escala sinóptica o planetaria, la ecuación de la vorticidad puede obtenerse aplicando el operador $\hat{k} \cdot \nabla \times$ a la forma vectorial de las ecuaciones de movimiento horizontal (3.25) y (3.26). De esta manera llegamos a la ecuación de la vorticidad:

$$\frac{\partial \zeta^*}{\partial t} + W_H^* \cdot \nabla (\zeta^* + f) + (\zeta^* + f) \nabla \cdot W_H^* = \frac{R}{P} J(P, T) + \hat{k} \cdot \nabla \times F^* \quad (3.27)$$

donde $W_H^* = \hat{i}u^* + \hat{j}v^*$ es el vector de la velocidad horizontal del viento; $J(P, T) = \partial P/\partial x \partial T/\partial y - \partial T/\partial x \partial P/\partial y$, el jacobiano de P y T $F^* = \hat{i}F_x^* + \hat{j}F_y^*$, la fuerza friccional turbulenta horizontal; ζ^* y $\nabla \cdot W_H^*$, la vorticidad y la divergencia, respectivamente, las cuales están definidas de la siguiente manera:

$$\zeta^* = \hat{k} \cdot \nabla \times W_H^* = \frac{\partial v^*}{\partial x} - \frac{\partial u^*}{\partial y} \quad (3.28)$$

$$\nabla \cdot W_H^* = \frac{\partial u^*}{\partial x} + \frac{\partial v^*}{\partial y} \quad (3.29)$$

Un teorema de Helmholtz permite que la velocidad horizontal W_H^* , pueda ser expresada como la suma de una velocidad rotacional W_ψ^* y una velocidad divergente W_χ^* (Haltiner, 1980), es decir:

$$W_H^* = W_\psi^* + W_\chi^* \quad (3.30)$$

con

$$\left. \begin{aligned} W_\psi^* &= \hat{k} \times \nabla \psi^* \\ W_\chi^* &= \nabla \chi^* \end{aligned} \right\} \quad (3.31)$$

donde ψ^* y χ^* son las funciones de corriente y potencial,

respectivamente. Usando (3.30) y (3.31) en (3.28) y (3.29), la vorticidad y la divergencia pueden expresarse como:

$$\zeta^* = \nabla^2 \Psi^* \quad (3.32)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{W}_H^* = \nabla^2 \chi^* \quad (3.33)$$

Aplicando el operador $\nabla \cdot$ a la forma vectorial de las ecuaciones de movimiento horizontal (3.25) y (3.26), llegamos a la ecuación de la divergencia:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{W}_H^* + \nabla \cdot (\mathbf{W}_H^* \cdot \nabla \mathbf{W}_H^*) - f \zeta^* - (\hat{k} \times \nabla) \cdot f \cdot \mathbf{W}_H^* &= - \frac{R T^*}{P} \nabla^2 P \\ + \frac{(H_0 - z)}{T} g \nabla^2 T - \frac{R}{P} \nabla P \cdot \nabla T + \frac{R T^*}{P^2} \nabla P \cdot \nabla P \\ - \frac{(H_0 - z)}{T^2} g \nabla T \cdot \nabla T + \nabla \cdot \mathbf{F}^* & \quad (3.34) \end{aligned}$$

La ecuación de la vorticidad (3.27) y de la divergencia (3.34) son ecuaciones escalares independientes, las que remplazan a las dos ecuaciones escalares de movimiento horizontal (3.25) y (3.26). Esta formulación proporciona un método para introducir simplificaciones en las ecuaciones, reteniendo importantes términos de acuerdo a la escala de movimiento que se esté considerando. Así por ejemplo, si anulamos el término $\partial \nabla \cdot \mathbf{W}_H^* / \partial t$ de (3.34) entonces eliminamos de (3.27) y (3.34) todas las soluciones que corresponden a las ondas de gravedad; ésta es la simplificación mínima requerida para filtrar las ondas de gravedad (Haltiner, 1980, pag.68-69).

3.4 El Sistema Termodinámico Balanceado.

Ahora vamos a obtener lo que de acuerdo con Charney (1962) se denomina sistema termodinámico balanceado (STB) en el que los términos $\partial v \cdot v_H^* / \partial t = \partial v \cdot v_\chi^* / \partial t$, $v \cdot (v_H^* \cdot \nabla v_\chi^*)$ y $\nabla \cdot (v_H^* \cdot \nabla v_\psi^*)$ son eliminados de la ecuación de la divergencia (3.34), obteniéndose una ecuación de balance. Estos términos pueden ser eliminados de (3.34) en virtud de que, para movimientos de escala sinóptica en latitudes medias, v_H^* debe ser aproximadamente no-divergente (Holton, 1970), es decir:

$$|v_\psi^*| \gg |v_\chi^*| \quad (3.35)$$

De esta manera, el STB está dado por las siguientes ecuaciones:

Ecuación termodinámica (2.37):

$$c_p \rho^* \left[\frac{\partial T^*}{\partial t} + (v_\psi^* + v_\chi^*) \cdot \nabla T^* + w^* \frac{\partial T^*}{\partial z} \right] = \dot{Q}^* + \frac{D}{Dt} P^* \quad (3.36)$$

donde

$$\frac{D}{Dt} P^* = \frac{\partial P^*}{\partial t} + (v_\psi^* + v_\chi^*) \cdot \nabla P^* + w^* \frac{\partial P^*}{\partial z} \quad (3.36')$$

Ecuación de continuidad (3.11):

$$\frac{\partial \rho^*}{\partial t} + (v_\psi^* + v_\chi^*) \cdot \nabla \rho^* + \rho^* \nabla \cdot v_H^* + w^* \frac{\partial (\rho^* w^*)}{\partial z} = 0 \quad (3.37)$$

Ecuación de estado (2.34):

$$P^* = \rho^* R T^* \quad (3.38)$$

Ecuación de equilibrio hidrostático (2.42):

$$\frac{\partial P^*}{\partial z} = -\rho^* g \quad (3.39)$$

Ecuación de la vorticidad (3.27):

$$\frac{\partial}{\partial t} (\zeta^* + (V_{\psi}^* + V_{\chi}^*) \cdot \nabla (\zeta^* + f) + (\zeta^* + f) \nabla \cdot V_H^*) = \frac{R}{P} J(P, T) + \hat{k} \cdot \nabla \times F^* \quad (3.40)$$

Ecuación de balance:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (V_{\psi}^* \cdot \nabla V_{\psi}^*) - f \zeta^* - \hat{k} \times \nabla f \cdot (V_{\psi}^* + V_{\chi}^*) &= - \frac{R T^*}{P} \nabla^2 P + \frac{(H_0 - z)}{T} g \nabla^2 T \\ - \frac{R}{P} \nabla P \cdot \nabla T + \frac{R T^*}{P^2} \nabla P \cdot \nabla P - \frac{(H_0 - z)}{T^2} g \nabla T \cdot \nabla T + \nabla \cdot F^* & \quad (3.41) \end{aligned}$$

En estas ecuaciones hemos usado (3.30) para expresar a V_H^* como la suma de V_{ψ}^* y V_{χ}^* .

Estrictamente hablando, la ecuación de balance se obtiene de (3.41) eliminando el término $-\hat{k} \times \nabla f \cdot V_{\chi}^*$ y expresando al término $\nabla \cdot F^*$ en función de P y T; de esta manera obtenemos una relación entre la velocidad no-divergente y las variables de estado P y T conocida como ecuación de balance.

El STB dado por (3.36) a (3.41) es apropiado para describir sistemas de escala sinóptica en latitudes medias, algunos sistemas en los trópicos y sistemas de escala planetaria (Haltiner, 1980), en donde las ondas de gravedad han sido filtradas, es decir, los modelos derivados del STB se encuentran en la categoría de modelos filtrados (MF).

El STB contiene como caso particular al sistema termodinámico que describe el MTC. Veamos: de acuerdo con Haltiner (1980, págs. 67 y 68) para movimientos de escala planetaria las ecuaciones de vorticidad (3.40) y de balance (3.41) pueden aproximarse como:

$$(\mathbf{V}_{\psi}^* + \mathbf{V}_{\chi}^*) \cdot \nabla \mathcal{E} + f \mathbf{V} \cdot \mathbf{V}_H^* = \frac{R}{P} J(P, T) \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned} -f \zeta^* - \hat{k} \times \nabla f \cdot (\mathbf{V}_{\psi}^* + \mathbf{V}_{\chi}^*) &= -\frac{R T^*}{P} \nabla^2 P + \frac{(H_0 - z)}{T} g \nabla^2 T \\ -\frac{R}{P} \nabla P \cdot \nabla T + \frac{R T^*}{P^2} \nabla P \cdot \nabla P - \frac{(H_0 - z)}{T^2} g \nabla T \cdot \nabla T & \quad (3.43) \end{aligned}$$

Las ecuaciones (3.42) y (3.43) son satisfechas exactamente cuando la velocidad $\mathbf{V}_H^* = \mathbf{V}_{\psi}^* + \mathbf{V}_{\chi}^*$ es geostrófica; es decir, cuando sus componentes están dadas por (3.23) y (3.24):

$$u^* = -\frac{R T^*}{f P} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{(H_0 - z)}{f T} g \frac{\partial T}{\partial y} \quad (3.23)$$

$$v^* = \frac{R T^*}{f P} \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{(H_0 - z)}{f T} g \frac{\partial T}{\partial x} \quad (3.24)$$

Las ecuaciones (3.36), (3.37), (3.38), (3.39), (3.23) y (3.24) constituyen las ecuaciones del MTC en su forma más general.

Desafortunadamente, el STB es prácticamente imposible de resolver debido a la forma altamente implícita de sus ecuaciones. En la siguiente sección expondremos una simplificación de dicho sistema de manera que sea posible resolverlo.

3.5 Simplificación del STB. El Sistema Termodinámico Casi-Geostrófico (STCG).

Debido a que el STC es prácticamente imposible de resolver, en esta sección vamos a exponer una simplificación de dicho sistema, principalmente en la ecuación de balance.

Una aproximación razonable de (3.41) puede ser obtenida de (3.43) eliminando el términos $-\dot{R} \times \nabla \mathbf{f} \cdot \mathbf{W}_X^*$, llegando de esta manera a la siguiente ecuación de balance lineal en Ψ^* :

$$\begin{aligned}
 -f\zeta^* - \dot{R} \times \nabla \mathbf{f} \cdot \mathbf{W}_\Psi^* &= -\frac{R T^*}{P} \nabla^2 P + \frac{(H_0 - z)}{T} g \nabla^2 T - \frac{R}{P} \nabla P \cdot \nabla T \\
 + \frac{R T^*}{P^2} \nabla P \cdot \nabla P - \frac{(H_0 - z)}{T^2} g \nabla T \cdot \nabla T & \quad (3.44)
 \end{aligned}$$

El término $-\dot{R} \times \nabla \mathbf{f} \cdot \mathbf{W}_X^*$ es requerido en la ecuación de balance para movimientos de gran escala; es decir, dicho término es necesario en (3.43) para que (3.42) y (3.43) sean satisfechas exactamente cuando la velocidad \mathbf{W}_H^* es geostrófica, válida para movimientos de gran escala. Sin embargo, la aproximación de la ecuación de balance no lineal (3.41) a la ecuación de balance lineal (3.44) simplifica enormemente el STB anulando la forma altamente implícita de las ecuaciones.

Es conveniente expresar los términos del lado derecho de la ecuación (3.44) como un geopotencial equivalente, por lo que es necesario que las variables de estado P y T sean expresadas como la suma de los valores constantes P_0 y T_0 y las correspondientes desviaciones P' y T' de dichos valores. Es decir:

$$\left. \begin{aligned}
 P &= P_0 + P' \\
 T &= T_0 + T'
 \end{aligned} \right\} \quad (3.45)$$

donde $P_0 \gg P'$ y $T_0 \gg T'$.

Usando (3.45) en (3.44) y despreciando los términos no lineales $-RVP' \cdot \nabla T'$, $RT_0 \nabla P'$, $\nabla P' / P_0^2$, $-(H_0 - z)g \nabla T' \cdot \nabla T'$, llegamos a la siguiente expresión para la ecuación de balance:

$$\nabla^2 \Phi^* - f \zeta^* - \hat{k} \times \nabla f \cdot \nabla \Psi^* = 0 \quad (3.46)$$

aquí Φ^* es el geopotencial equivalente definido como:

$$\Phi^* = R T_0^* (P / P_0) + (H_0 - z) g (T / T_0) \quad (3.47)$$

donde

$$T_0^* = -\beta(z - H_0) + T_0 \quad (3.48)$$

Una aproximación mas de la ecuación de balance, válida para latitudes medias, es encontrada al reemplazar en (3.46) f por un valor promedio constante f_0 y despreciar el término de variación de f , resultando el siguiente balance entre Ψ^* y Φ^* :

$$f_0 \nabla^2 \Psi^* = \nabla^2 \Phi^* \quad (3.49)$$

en donde hemos usado (3.32) para expresar a ζ^* en términos de Ψ^* .

La ecuación (3.49) implica que, en una primera aproximación, la vorticidad del viento corresponde a la vorticidad del viento geostrófico, calculado usando un valor constante para el parámetro de Coriolis. Es decir, una solución apropiada de (3.49) es:

$$\Psi^* = f_0^{-1} \Phi^* \quad (3.50)$$

por lo que

$$\nabla_{\Psi}^* = f_0^{-1} \hat{k} \times \nabla \Phi^* \quad (3.51)$$

$$\zeta^* = f_0^{-1} \nabla^2 \Phi^* \quad (3.52)$$

Utilizando (3.47) en (3.51) tenemos que las componentes de la velocidad del viento no-divergente se pueden expresar como sigue:

$$u^* = - \frac{R T_0^*}{f_0 P_0} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{(H_0 - z)}{f_0 T_0} g \frac{\partial T}{\partial y} \quad (3.53)$$

$$v^* = \frac{R T_0^*}{f_0 P_0} \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{(H_0 - z)}{f_0 T_0} g \frac{\partial T}{\partial x} \quad (3.54)$$

Comparando (3.23) y (3.24) con (3.53) y (3.54), vemos que la velocidad del viento no-divergente es igual a la velocidad del viento geostrófico, pero lineal en P y T y calculada con un parámetro de Coriolis constante.

En este trabajo vamos a usar la aproximación (3.49) para el balance entre Ψ^* y Φ^* , además de las siguientes aproximaciones a las ecuaciones del STB:

a) En la ecuación termodinámica y en la ecuación de continuidad ρ^* es reemplazada por $\rho_0^*(z)$, la cual es únicamente función de z y es calculada usando la fórmula (3.18) con $\rho_0 = P_0/RT_0$, T_0^* y T_0 en lugar de $\rho = P/RT$, T^* y T , respectivamente. Esto es:

$$\rho_0^* = \rho_0 (T_0^* / T_0)^{\alpha-1} \quad (3.55)$$

De la misma manera que (3.55) determinaremos $P_0^*(z)$, la cual es únicamente función de z , a partir de la fórmula (3.17) con P_0 , T_0^* y T_0 en lugar de P , T^* y T . Esto es:

$$P_0^* = P_0 (T_0^* / T_0)^\alpha \quad (3.55a)$$

de tal forma que (3.55) y (3.55a) satisfacen la ecuación de estado:

$$P_0^* = R \rho_0^* T_0^* \quad (3.55b)$$

y la ecuación de equilibrio hidrostático:

$$\frac{\partial P_0^*}{\partial z} = -g \rho_0^* \quad (3.55c)$$

b) Los términos de transporte horizontal por viento divergente $V_\chi^* \cdot \nabla T^*$ y $W_\chi^* \cdot \nabla P^*$ en la ecuación termodinámica, $V_\chi^* \cdot \nabla \rho^*$ en la ecuación de continuidad y $W_\chi^* \cdot \nabla (\zeta^* + f)$ en la ecuación de vorticidad, son despreciados.

c) En la ecuación de la vorticidad el término de divergencia $\zeta^* \cdot \nabla V_H^*$ es despreciado, el término $fV \cdot W_H^*$ es aproximado a $f_0 V \cdot W_H^*$ y el término del jacobiano es linealizado en su coeficiente; es decir, $RJ(P,T)/P \approx RJ(P,T)/P_0$.

d) En el término $\hat{R} \cdot \nabla \times F^*$ de la ecuación de la vorticidad, las fuerzas friccionales turbulentas $F_{\chi H}^*$ y $F_{\chi V}^*$ en (3.9) se desprecian. Por consiguiente cambiando ρ^* por ρ_0 en $F_{\lambda V}^* = F_{\lambda V}^* \rho^*$ y $F_{\phi V}^* = F_{\phi V}^* \rho^*$ dadas por (2.27), tenemos que:

$$\hat{k} \cdot \nabla \times F^* = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z} [\hat{k} \cdot \nabla \times \tau^*] \quad (3.56)$$

en donde $\tau^* = \hat{i} \tau_x^* + \hat{j} \tau_y^*$ es el vector horizontal de los esfuerzos turbulentos cortantes y en donde hemos definido $\tau_x^* = \tau_{xz}^*$ y $\tau_y^* = \tau_{yz}^*$.

Tomando en consideración las aproximaciones a) - d) y la aproximación (3.49), las ecuaciones del STB se expresan como sigue:

Ecuación termodinámica:

$$c_p \rho_0 \left[\frac{\partial T^*}{\partial t} + \mathbf{V}_\psi^* \cdot \nabla T^* + w^* \frac{\partial T^*}{\partial z} \right] = \dot{Q}^* + \frac{D P^*}{D t} \quad (3.57)$$

donde

$$\frac{D P^*}{D t} = \frac{\partial P^*}{\partial t} + \mathbf{V}_\psi^* \cdot \nabla P^* + w^* \frac{\partial P^*}{\partial z} \quad (3.57')$$

Ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial \rho^*}{\partial t} + \mathbf{V}_\psi^* \cdot \nabla \rho^* + \rho_0^* \nabla \cdot \mathbf{V}_H^* + w^* \frac{\partial (\rho^* w^*)}{\partial z} = 0 \quad (3.58)$$

Ecuación de estado:

$$P^* = \rho^* R T^* \quad (3.59)$$

Ecuación de equilibrio hidrostático:

$$\frac{\partial P^*}{\partial z} = -\rho^* g \quad (3.60)$$

Ecuación de la vorticidad:

$$\frac{\partial \zeta^*}{\partial t} + \mathbf{V}_\psi^* \cdot \nabla (\zeta^* + f) + f_0^* \nabla \cdot \mathbf{V}_H^* = \frac{R}{P_0} J(P, T) + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z} [\hat{k} \cdot \nabla \times \tau^*] \quad (3.61)$$

Ecuación de balance:

$$f_0^* \nabla^2 \Psi^* = \nabla^2 \Phi^* \quad (3.62)$$

Al sistema físico atmosférico descrito por las ecuaciones (3.57) a (3.62) le llamaremos, en concordancia con la literatura, sistema termodinámico casi-geostrofico (STCG); las ecuaciones de este sistema son las ecuaciones básicas del MTCV.

El término de variación del parámetro de Coriolis en (3.46) es importante cuando se aplica la ecuación de balance en grandes áreas (Bolin, 1956; Haltiner, 1980 pag. 62).

Hemos mencionado que el área donde se aplica el MTC corresponde al Hemisferio Norte, entre 15° y 90° de latitud por lo que existe una importante variación del parámetro de Coriolis que va de 41.4% a 63.4% con respecto al valor promedio de f para latitudes medias ($\phi = 45^\circ$). Es decir:

$$\frac{2\Omega \text{sen}90^\circ - 2\Omega \text{sen}45^\circ}{2\Omega \text{sen}45^\circ} \times 100 = 41.4$$

$$\frac{2\Omega \text{sen}45^\circ - 2\Omega \text{sen}15^\circ}{2\Omega \text{sen}45^\circ} \times 100 = 63.4$$

A pesar de lo que hemos expuesto arriba, las ecuaciones casi-geostróficas no resultan una aproximación tan burda cuando se aplican a una área hemisférica como la del MTC si se considera que: a) la variación del parámetro de Coriolis se toma en cuenta en la ecuación de la vorticidad (3.61) y b) al calcular el viento no-divergente de (3.53) y (3.54), se usa el parámetro de Coriolis f en lugar de su valor constante f_0 .

Ahora usando (3.51) y (3.52) en la ecuación de la vorticidad (3.61) obtenemos la siguiente ecuación de vorticidad potencial:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \nabla^2 \Phi^* - \mathcal{J}(f_0^{-1} \nabla^2 \Phi^* + f, \Phi^*) + f_0^2 \nabla \cdot \mathbf{V}_H^* = \frac{R}{P_0} \mathcal{J}(P, T) + \frac{1}{P_0} \frac{\partial}{\partial z} [\hat{k} \cdot \nabla \times \tau^*] \quad (3.63)$$

Usando la expresión para el geopotencial equivalente (3.47) en (3.51) y considerando la fórmula (3.17) se tiene que:

$$\nabla_{\Psi^*} \cdot \nabla P^* = 0 \quad (3.64)$$

Usando (3.64) y la ecuación de equilibrio hidrostático (3.60) se tiene que:

$$\frac{D P^*}{Dt} = \frac{\partial P^*}{\partial t} - \rho_0^* g w^* \quad (3.65)$$

en donde hemos cambiado a ρ^* por ρ_0^* .

Utilizando (3.12) y (3.65) en la ecuación termodinámica (3.57) se tiene que:

$$c_p \rho_0^* \left[\frac{\partial T^*}{\partial t} + v_\psi^* \cdot \nabla T^* + \bar{\beta} w^* / \gamma \right] = \dot{Q}^* + \frac{\partial P^*}{\partial t} \quad (3.66)$$

donde

$$\bar{\beta} = \gamma (g/c_p - \beta) \quad (3.67)$$

$$\gamma = c_p/c_v \quad (3.68)$$

3.6 Integración Vertical de la Ecuación Termodinámica en la Capa Troposférica.

Ahora vamos a integrar la ecuación termodinámica (3.66) en la capa troposférica de altura H_0 , y para ello vamos a expresar la razón de calentamiento \dot{Q}^* como:

$$\begin{aligned} \dot{Q}^* = & \dot{Q}_R^* + \dot{Q}_{CH}^* + \dot{Q}_C^* - \nabla \cdot \left[c_v \rho_0^* \langle V_H^{**} T^{**} \rangle + \langle V_H^{**} P^{**} \rangle \right] \\ & - \frac{\partial}{\partial z} \left[c_v \rho_0^* \langle w^{**} T^{**} \rangle + \langle w^{**} P^{**} \rangle \right] + \dot{Q}_p^* \end{aligned} \quad (3.69)$$

en donde

$$\dot{Q}_p^* = \langle V_H^{**} \cdot \nabla P^{**} \rangle + \langle w^{**} \frac{\partial P^{**}}{\partial z} \rangle \quad (3.70)$$

En la relación (3.69) hemos remplazado ρ^* por ρ_0^* dada por (3.56) y hemos usado el hecho de que:

$$\begin{aligned} i) \quad \langle P^{**} \nabla_T \cdot V_T^{**} \rangle &= \langle P^{**} \nabla \cdot V_H^{**} \rangle + \langle P^{**} \frac{\partial w^{**}}{\partial z} \rangle \\ ii) \quad \nabla_T \cdot (c_v \rho^* \langle V_H^{**} T^{**} \rangle) &= \nabla \cdot (c_v \rho^* \langle V_H^{**} T^{**} \rangle) + \frac{\partial}{\partial z} (c_v \rho^* \langle w^{**} T^{**} \rangle) \\ iii) \quad \langle P^{**} \nabla \cdot V_H^{**} \rangle &= \nabla \cdot \langle V_H^{**} P^{**} \rangle - \langle V_H^{**} \cdot \nabla P^{**} \rangle \\ iv) \quad \langle P^{**} \frac{\partial w^{**}}{\partial z} \rangle &= \frac{\partial}{\partial z} \langle w^{**} P^{**} \rangle - \langle w^{**} \frac{\partial P^{**}}{\partial z} \rangle \end{aligned}$$

Vamos a suponer que en los términos $\langle V_H^{**} P^{**} \rangle$ y $\langle w^{**} P^{**} \rangle$ de (3.69)

$$P^{**} \approx R \rho_0^* T^{**} \quad (3.71)$$

Por consiguiente \dot{Q}^* puede expresarse como:

$$\dot{Q}^* = \dot{Q}_R^* + \dot{Q}_{CH}^* + \dot{Q}_C^* - \nabla \cdot \left[c_p \rho_0^* \langle V_H^{**} T^{**} \rangle \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left[c_p \rho_0^* \langle w^{**} T^{**} \rangle \right] + \dot{Q}_p^* \quad (3.72)$$

en donde hemos usado el hecho de que $c_p = c_v + R$.

Ahora vamos a parametrizar la divergencia del flujo turbulento horizontal de calor de gran escala a través de un

coeficiente de transporte turbulento horizontal conocido como "Austausch". Es decir:

$$\langle v_H'' T'' \rangle = -K v T'' \quad (3.73)$$

donde K es el coeficiente "Austausch", el cual vamos a suponer constante y positivo (Adem, 1962; Clapp, 1970).

Sustituyendo (3.73) en (3.71) encontramos finalmente que la razón de calentamiento \dot{Q}^* puede expresarse como:

$$\dot{Q}^* = \dot{Q}_R^* + \dot{Q}_{CH}^* + \dot{Q}_C^* + c_p \rho_0^* K v^2 T'' - \frac{\partial}{\partial z} \left[c_p \rho_0^* \langle w'' T'' \rangle \right] + \dot{Q}_p^* \quad (3.74)$$

Usando (3.13), (3.47), (3.48), (3.51), (3.55) y la relación (3.74) en la ecuación termodinámica (3.66) e integrando la ecuación resultante de $z = 0$ a $z = H_0$, obtenemos que:

$$F_2 \frac{\beta}{\rho_0^*} T - F_8 J(P, T) - F_2 K v^2 T + W_A = E_T + G_5 + G_2 + W_p \quad (3.75)$$

donde

$$F_2 = - \frac{\gamma c_v P_0}{g} \left[1 - (T_{a0}/T_0)^\alpha \right] \quad (3.76)$$

$$F_8 = \frac{\gamma c_v T_0}{\beta(\alpha+1)} \left[1 - (T_{a0}/T_0)^{\alpha+1} \right] \quad (3.77)$$

$$T_{a0} = (T_0^*)_{z=0} = \beta H_0 + T_0 \quad (3.78)$$

$$W_A = \int_0^H \bar{\beta} c_v \rho_0^* w^* dz \quad (3.79)$$

$$E_T = \int_0^H \dot{Q}_R^* dz \quad (3.80)$$

$$G_5 = \int_0^H \dot{Q}_C^* dz \quad (3.81)$$

$$G_2 = \left[c_p \rho_0^* \langle w^{*H} T^{*H} \rangle \right]_{z=0} \quad (3.82)$$

$$W_p = \int_0^H \frac{\partial}{\partial t} P^* dz \quad (3.83)$$

En la ecuación termodinámica (3.75) hemos supuesto que los términos:

$$\dot{Q}_{CH}^* \quad , \quad - \left[c_p \rho_0^* \langle w^{*H} T^{*H} \rangle \right]_{z=H_0} \quad \text{y} \quad \int_0^H \dot{Q}_p^* dz$$

son despreciables, y en F_8 hemos remplazado a f_0 por f para incorporar el efecto de la variación del parámetro de Coriolis en el transporte horizontal de calor por viento medio.

El primer término del lado izquierdo de (3.75) representa el almacenamiento de energía térmica en la capa troposférica; los siguientes tres términos representan las razones de cambio de energía térmica debidas al transporte horizontal de calor por viento medio, al transporte turbulento horizontal de calor del ecuador a los polos y a la convección de calor en la capa troposférica, respectivamente. Del lado derecho de (3.75) tenemos el calentamiento por radiación solar y terrestre en la capa troposférica (E_T), el calor liberado por la condensación del vapor

de agua en las nubes (G_s), el calor sensible dado desde la superficie a la capa troposférica por transporte turbulento vertical (G_2) y la razón de cambio de energía térmica debida al cambio local en la presión atmosférica (W_p).

La ecuación termodinámica (3.75) es similar a la ecuación obtenida por J. Adem (1970), sólo que los términos W_A y W_p no aparecen en la ecuación de Adem; además, en los coeficientes F_2 y F_4 y en la función de calentamiento G_2 aparece en la ecuación de Adem el calor específico a volumen constante (c_v) en lugar del calor específico a presión constante ($c_p = \gamma c_v$). La diferencia que existe entre la ecuación termodinámica (3.75) y la ecuación de Adem se debe a que en la ecuación termodinámica original (2.33) hemos mantenido las funciones de transformación $\langle M_p^* \rangle$ y $\langle M_p^{**} \rangle$ y por supuesto el transporte vertical de calor por movimientos verticales (convección), mientras que Adem desprecia dichos términos (Adem, 1964b).

3.7 Determinación de la Convección de Calor y la Incorporación de la Vorticidad Potencial en la Ecuación Termodinámica.

Para calcular la convección de calor W_A es necesario conocer la velocidad vertical w^* en términos de z . En la sección 2.4 del Capítulo 2 vimos dos métodos para determinar w^* . En el método de Richardson, la determinación de w^* dada por (2.51) resulta ser muy complicada dado que la función J_1^* , que es un integrando en (2.51), es a su vez, según (2.47), una resta de integrales. El método cinemático, en donde w^* está dada por (2.60) es mucho más directo que el método de Richardson; por consiguiente usaremos este método para determinar w^* .

Usando (3.56) en (2.55) resulta que:

$$Q_1^* = -\beta(\alpha - 1)/T_0^* \quad (3.84)$$

Usando (3.84) en (2.58) se encuentra que:

$$Q_3^* = \left(\frac{T_0^*}{T_c} \right)^{\alpha-1} \quad (3.85)$$

donde T_c es una temperatura constante.

Ahora de acuerdo con las aproximaciones a) y b) de la Sección 3.5, en (2.56) vamos a cambiar ρ^* por ρ_0^* y a despreciar el término de transporte por viento divergente ($V_{\chi}^* \cdot \nabla \rho^*$). De esta manera (2.56) se expresa como:

$$Q_2^* = -\frac{1}{\rho_0^*} V_{\psi}^* \cdot \nabla \rho^* - \nabla \cdot V_H^* + \frac{1}{g \rho_0^*} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial P^*}{\partial z} \right) \quad (3.86)$$

Usando (3.18), (3.47), (3.51) y (3.55) se tiene que:

$$-\frac{1}{\rho_0^*} V_{\psi}^* \cdot \nabla \rho^* \approx \frac{R}{f_0^* P_0^*} J(P, T) \quad (3.87)$$

La divergencia del viento horizontal ($\nabla \cdot V_H^*$) en (3.86) puede ser obtenida de la ecuación de vorticidad potencial (3.63). Por lo tanto, usando (3.63) y la aproximación (3.87) en (3.86) resulta que:

$$Q_2^* = f_0^{-1} \frac{\partial}{\partial \xi} v^2 \Phi^* - f_0^{-3} J(v^2 \Phi^*, \Phi^*) - f_0^{-3} J(f, \Phi^*) + (g \rho_0^*)^{-1} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial P^*}{\partial \xi} \right) - (f_0 \rho_0^*)^{-1} \frac{\partial}{\partial z} [k \cdot \nabla \times \tau^*] \quad (3.88)$$

en donde el geopotencial equivalente Φ^* está dado por (3.47).

Por lo tanto, sustituyendo (3.85) y (3.88) en (2.61) y el resultado en (2.60) cambiando ρ^* por ρ_0^* se obtiene la siguiente expresión para w^* :

$$w^* = - [g_1^* - (\rho_{s0}/\rho_0^*)g_1] \frac{\partial}{\partial \xi} v^2 P - [g_2^* - (\rho_{s0}/\rho_0^*)g_2] \frac{\partial}{\partial \xi} v^2 T - [g_1^* - (\rho_{s0}/\rho_0^*)g_1] J(f, P) + [g_2^* - (\rho_{s0}/\rho_0^*)g_2] J(f, T) + [g_3^* - (\rho_{s0}/\rho_0^*)g_3] J(v^2 P, P) + [g_4^* - (\rho_{s0}/\rho_0^*)g_4] J(v^2 P, P) + [g_5^* - (\rho_{s0}/\rho_0^*)g_5] [J(v^2 P, T) + J(v^2 T, P)] + \frac{1}{g \rho_0^*} \left[\frac{\partial P^*}{\partial \xi} - \left(\frac{\partial P^*}{\partial \xi} \right)_{z=0} \right] - \frac{k}{f_0 \rho_0^*} \cdot [\nabla \times \tau^* - \nabla \times \tau_s] \quad (3.89)$$

en donde

$$g_1^* = \frac{R T_0^*}{f_0^2 P_0 \beta (\alpha-1)} \quad ; \quad g_2^* = \frac{g T_0^*}{f_0^2 T_0 \beta^2} \left[\frac{T_0}{\alpha} - \frac{T_0^*}{\alpha+1} \right] \\ g_3^* = \frac{R T_0^*}{f_0^2 P_0 \beta (\alpha+2)} \quad ; \quad g_4^* = \frac{-g^2 T_0^*}{f_0^2 T_0 \beta^3} \left[\frac{2T_0 T_0^*}{\alpha+1} - \frac{T_0^{*2}}{\alpha+1} - \frac{T_0^2}{\alpha} \right] \\ g_5^* = \frac{g R T_0^{*2}}{f_0^2 P_0 T_0 \beta} \left[\frac{T_0}{\alpha+1} - \frac{T_0^*}{\alpha+1} \right] \quad (3.90)$$

con ρ_{s0} dada por:

$$\rho_{s0} = (\rho_0^*)_{z=0} = \frac{P_0}{R T_0} \left(\frac{T_{s0}}{T_0} \right)^{\alpha-1} \quad (3.91)$$

y con

$$g_j = (g_j^*)_{z=0} ; j = 1, 2, \dots, 5 \quad (3.92)$$

$$\tau_s = (\tau^*)_{z=0} \quad (3.93)$$

En (3.90) las g_j^* ; $j = 1, 2, \dots, 5$ son funciones conocidas de z pues T_0^* es una función conocida de z dada por (3.48). Las g_j dadas por (3.92) son parámetros constantes y están dados en el Apéndice B.

En (3.89) el término de la tendencia $\partial P^*/\partial t$ puede ser determinado como función de z a partir de (3.17), y cambiando T^* , T y P por T_0^* , T_0 y P_0 , respectivamente, obtenemos las siguientes expresiones lineales:

$$\frac{\partial P^*}{\partial t} = \left(\frac{T_0^*}{T_0} \right)^\alpha \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\alpha P_0}{T_0^*} \left(\frac{T_0^*}{T_0} \right)^\alpha \left[1 - \frac{T_0^*}{T_0} \right] \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.94)$$

$$\left(\frac{\partial P^*}{\partial t} \right)_{z=0} = \left(\frac{T_{s0}}{T_0} \right)^\alpha \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\alpha P_0}{T_{s0}^*} \left(\frac{T_{s0}}{T_0} \right)^\alpha \left[1 - \frac{T_{s0}}{T_0} \right] \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.95)$$

Por lo tanto, sustituyendo (3.89) en (3.79) usando (3.94) y (3.95), tenemos que la convección de calor W_A está dada por:

$$\begin{aligned} W_A = & F_{121} \frac{\partial \nabla^2 P}{\partial t} + F_{122} \frac{\partial \nabla^2 T}{\partial t} + F'_{121} \frac{\partial P}{\partial t} + F'_{122} \frac{\partial T}{\partial t} + F_{121} J(P, f) \\ & + F_{122} J(T, f) + F_{123} J(P, \nabla^2 P) + F_{124} J(T, \nabla^2 T) + F_{125} J(P, \nabla^2 T) \\ & + F_{125} J(T, \nabla^2 P) + F'_{126} \hat{k} \cdot \nabla \times \tau_s \end{aligned} \quad (3.96)$$

donde los coeficientes F_{121} , F_{122} , \dots , F'_{126} son constantes y están dadas en el Apéndice B.

En (3.96) hemos supuesto que existe una capa límite superficial de altura $H_5 < H_0$, en donde el vector de los esfuerzos turbulentos τ^o no depende de z , es igual a τ_a y se hace cero para alturas superiores a H_5 . Es decir:

$$\tau^o = \begin{cases} \tau_a & \text{para } 0 \leq z \leq H_5 \\ 0 & \text{para } z > H_5 \end{cases} \quad (3.97)$$

Ahora, usando (3.94) en (3.83), podemos determinar el término W_p . De esta manera, tenemos que:

$$W_p = F''_{121} \frac{\partial P}{\partial t} + F''_{122} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.98)$$

donde F''_{121} y F''_{122} son constantes y están dadas en el Apéndice B.

Sustituyendo W_p dada por (3.96) y W_p dado por (3.98) en la ecuación termodinámica (3.75), encontramos que:

$$\begin{aligned} & (F_2 + F'_2) \frac{\partial T}{\partial t} + F'_3 \frac{\partial P}{\partial t} - F_8 J(P, T) - F_2 K \nabla^2 T + F_{121} \frac{\partial \nabla^2 P}{\partial t} \\ & + F_{122} \frac{\partial \nabla^2 T}{\partial t} + F_{121} J(P, \epsilon) + F_{122} J(T, \epsilon) + F_{123} J(P, \nabla^2 P) \\ & + F_{124} J(T, \nabla^2 T) + F_{125} J(P, \nabla^2 T) + F_{125} J(T, \nabla^2 P) + F'_{126} \hat{k} \cdot \nabla \times \tau_a \\ & = E_T + G_5 + G_2 \end{aligned} \quad (3.99)$$

donde

$$\left. \begin{aligned} F'_2 &= F'_{122} - F''_{122} \\ F'_3 &= F'_{121} - F''_{121} \end{aligned} \right\} \quad (3.99')$$

La ecuación (3.99) es la ecuación básica en el MTCV. A modo de comparación, tenemos que la ecuación básica en el MTC (Adem, 1970b) está dada por:

$$F_2 \frac{\partial T}{\partial t} - F_8 J(P, T) - F_2 K \nabla^2 T = E_T + G_5 + G_2 \quad (3.100)$$

donde F_2 y F_8 están dadas por (3.76) y (3.77), respectivamente, sólo que en lugar de llevar el factor $c_p = \gamma c_v$, llevan el factor c_v .

La vorticidad potencial $\zeta^* = f_0^{-1} \nabla^2 \phi^*$ es incorporada en la ecuación termodinámica a través de la convección de calor W_A . Así, los términos $F_{121} \partial \nabla^2 P / \partial t$ y $F_{122} \partial \nabla^2 T / \partial t$, que están relacionados con el cambio local de vorticidad potencial, y los términos jacobianos, a excepción del término $J(P, T)$, que están relacionados con el transporte horizontal de vorticidad potencial y planetaria, fueron incorporados en la ecuación termodinámica a través del término W_A .

3.8 La Ecuación de la Tendencia de la Presión en el Tope de la Capa Troposférica.

Si las funciones de calentamiento E_1 , G_5 y G_2 , así como el rotacional del esfuerzo del viento en la superficie ($\hat{k} \cdot \nabla \times \tau_s$) son funciones conocidas de T y P entonces, tanto (3.99) como (3.100), son ecuaciones diferenciales parciales en las variables atmosféricas T y P. Por consiguiente, (3.99) o (3.100) no pueden ser resueltas si no contamos con alguna información extra; por ejemplo, adicionar a (3.99) o (3.100) una ecuación diferencial parcial en las variables T y P o prescribir (dar por conocida) a una de estas dos variables. Sobre este último aspecto Adem (1970) ha llevado a cabo experimentos de predicción a 30 días sobre la región de Estados Unidos usando la ecuación (3.100) en donde prescribe el valor normal de la presión P.

Adem (1967) ha encontrado que varios autores (M. Doporto, 1951; S.N. Sen, 1924; y A. Wagner, 1909) demuestran, a partir de observaciones, que existe una superficie de densidad constante (isopicna) alrededor de los 8 km de altura. Considerando que la altura H_0 del MTC es de 9 km, en una primera aproximación uno puede suponer que en $z=H_0$ la densidad es constante, por lo que:

$$P = R \rho_0 T = \frac{P_0}{T_0} T \quad (3.101)$$

donde ρ_0 , P_0 y T_0 son constantes relacionadas por la ecuación de estado: $P_0 = R \rho_0 T_0$.

Por supuesto, si usamos la aproximación (3.101) en (3.99) o (3.100) el problema se reduce notablemente, pues sólo tendremos una ecuación con una sola variable, en este caso, la temperatura.

Experimentos de predicción de temperatura para el mes de Enero 1962 han sido realizados por Adem (1964b) utilizando la ecuación (3.100) con la aproximación (3.101), la cual anula el transporte horizontal de calor por viento pues $-F_g J(P,T) = 0$. Estos experimentos muestran que (3.101) es una buena aproximación, aunque los experimentos posteriores (Adem, 1970b), en donde Adem

incorpora el término $-F_8 J(P, T)$, prescribiendo el valor normal de la presión, indican que el campo de densidad en el tope de la capa (ρ) tiene un efecto importante en el transporte horizontal de calor por viento.

En una versión más avanzada del MTC, Adem sugiere añadir una nueva ecuación para calcular la tendencia de la presión (Adem, 1970b y 1969b). Esta ecuación puede ser derivada asumiendo que la velocidad vertical es cero en el tope de la capa troposférica. Dicha ecuación ha sido derivada en términos generales en el Capítulo 2, Sección 2.4 y está expresada por (2.53) o (2.62). Por lo tanto, de acuerdo con (2.62) de la ecuación (3.89) podemos determinar una ecuación para $\partial P / \partial t$ imponiendo la condición de que $w^* = 0$ en $z = H_0$. De esta manera tenemos:

$$\begin{aligned}
 0 = & - [g_{1H} - (\rho_{a0} / \rho_0) g_1] \frac{\partial \nabla^2 P}{\partial t} + g_7 \frac{\partial P}{\partial t} \\
 & - [g_{2H} - (\rho_{a0} / \rho_0) g_2] \frac{\partial \nabla^2 T}{\partial t} + g_8 \frac{\partial T}{\partial t} \\
 & - [g_{1H} - (\rho_{a0} / \rho_0) g_1] J(f, P) + [g_{2H} - (\rho_{a0} / \rho_0) g_2] J(f, T) \\
 & + [g_{3H} - (\rho_{a0} / \rho_0) g_3] J(\nabla^2 P, P) + [g_{4H} - (\rho_{a0} / \rho_0) g_4] J(\nabla^2 P, T) \\
 & + [g_{5H} - (\rho_{a0} / \rho_0) g_5] [J(\nabla^2 P, T) + J(\nabla^2 T, P)] + \frac{1}{\bar{\rho}_0} \hat{k} \cdot \nabla \times \tau_a
 \end{aligned} \tag{3.102}$$

en donde hemos usado (3.97), y en donde

$$g_{jH} = (g_{jH}^*)_{z=H} \quad ; \quad j = 1, 2, \dots, 5 \tag{3.103}$$

En (3.102) las g_{jH} dadas por (3.103), y g_7 y g_8 están dadas en el Apéndice B.

El término de la tendencia de la temperatura, $g_8 \partial T / \partial t$, en (3.102) puede ser determinado de (3.99). Por lo tanto, despejando $\partial T / \partial t$ de (3.99) y sustituyendo dicho término en (3.102) llegamos a la ecuación de la tendencia de la presión:

ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA

$$\begin{aligned}
 F_{16} \frac{\partial P}{\partial t} &= F'_{106} \frac{\partial \nabla^2 P}{\partial t} + F'_{107} \frac{\partial \nabla^2 T}{\partial t} + F'_{108} J(P, T) + F'_{106} J(P, f) \\
 &+ F'_{107} J(T, f) + F'_{109} J(\nabla^2 P, P) + F'_{110} J(\nabla^2 T, T) + F'_{111} J(\nabla^2 P, T) \\
 &+ F'_{111} J(\nabla^2 T, P) + F'_{23} K \nabla^2 T + \frac{R F'_{16}}{C \sqrt{H_0}} (E_T + G_5 + G_2) \\
 &+ F'_{112} \hat{k} \cdot \nabla \times \tau_a
 \end{aligned} \tag{3.104}$$

donde $F_{16}, F'_{16}, F'_{23}, F'_{106}, \dots$, y F'_{112} están dadas en el Apéndice B.

Utilizando el método de Richardson, es decir, la ecuación (2.53), obtenemos una ecuación similar a (3.104) (Mendoza, 1989).

Si en la ecuación (3.63) despreciamos los términos $\partial \nabla^2 \phi^* / \partial t$, $-J(f_0^{-1} \nabla^2 \phi^*, \phi^*)$ y $f_0 \beta [\hat{k} \cdot \nabla \times \tau] / \rho_0 \partial z$, obtenemos la siguiente ecuación:

$$\nabla_{\psi}^* \cdot \nabla f + f_0 \nabla \cdot \nabla_{\psi}^* = \frac{R}{P_0} J(P, T) \tag{3.105}$$

donde ∇_{ψ}^* está dada por (3.51).

La ecuación (3.105) es muy parecida a (3.42), la que junto con (3.43) se satisfacen cuando el viento es geostrofico. Ahora bien, en la determinación de w^* y posteriormente de $\partial P / \partial t$, la divergencia de la velocidad horizontal $(\nabla \cdot \nabla_H^*)$ en (3.86) fue obtenida de la ecuación de la vorticidad potencial (3.63), pero si ahora en lugar de usar (3.63) usamos (3.105) para obtener la divergencia de la velocidad horizontal entonces la ecuación (3.89) para la velocidad vertical, se reduce a:

$$\begin{aligned}
 w^* &= - [g_1^* - (\rho_{a0} / \rho_0^*) g_1] J(f, P) + [g_2^* - (\rho_{a0} / \rho_0^*) g_2] J(f, T) \\
 &+ \frac{1}{g_1^*} \left[\frac{\partial P^*}{\partial t} - \left(\frac{\partial P^*}{\partial t} \right)_{z=0} \right]
 \end{aligned} \tag{3.89a}$$

Imponiendo la condición de frontera $w^* = 0$ en $z = H_0$ en (3.89a) y procediendo de la misma manera que en la obtención de (3.104), encontramos que la ecuación de la tendencia de la presión se reduce a:

$$F_{16} \frac{\partial P}{\partial T} = F'_{108} J(P, T) + F'_{106} J(P, f) + F'_{107} J(T, f) + F'_{23} K \nabla^2 T$$

$$+ \frac{R F'_{16}}{C_v H_0} (E_T + G_5 + G_2) \quad (3.106)$$

Una ecuación similar a (3.106) es obtenida por J. Adem (1960) calculando el término $\nabla \cdot \mathbf{w}^*$ a partir del viento geostrofico. De esta manera, podemos decir que (3.104) es una generalización de la ecuación de la tendencia propuesta por Adem.

La ecuación de la tendencia (3.104) y la ecuación de la vorticidad (3.63) son equivalentes en el sentido en que uno puede llegar a la ecuación (3.104) integrando (3.63) de $z = 0$ a $z = H_0$ e imponiendo la condición de frontera $w^* = 0$ en $z = H_0$ (Mendoza, 1989).

Las ecuaciones (3.104) o (3.106) son obtenidas imponiendo la condición de frontera $w^* = 0$ en $z = H_0$; es por esta razón que Adem llama a la ecuación de la tendencia una ecuación geométrica (comunicación personal), y la validez de dicha ecuación depende en gran medida de la validez de la condición de frontera mencionada.

En el MTC $H_0 = 9$ km, a esta altura existe una velocidad vertical comparativamente importante; ello se muestra en los experimentos de simulación de Manabe (Mintz, 1981) sobre la circulación general de la atmósfera en el plano meridional ($v^* \hat{j} + w^* \hat{k}$), realizados con el MCGA del GFDL. Dichos experimentos muestran una velocidad vertical importante al compararla con las de niveles más bajos, y que prácticamente se anula a partir de los 16 km. (≈ 100 mb). Resultados similares muestran los experimentos de Hare (1977).

Por lo tanto, la condición de que $w^* = 0$ en $z = H_0$ puede no ser muy realista y por consiguiente la ecuación de la tendencia (3.104) puede no ser adecuada para determinar la evolución de la presión P. Existe, sin embargo, otra alternativa para derivar una ecuación para la tendencia de P: evaluar la ecuación de la vorticidad potencial en algún nivel $z \leq H_0$. Dicha alternativa la trataremos en la siguiente sección.

3.9 La Ecuación de la Vorticidad Potencial no Adiabática.

Tomando en consideración las aproximaciones a). y b). de la Sección 3.5, tenemos que la ecuación de continuidad (2.54) puede expresarse como:

$$\frac{\partial w^*}{\partial z} + Q_1^* w^* = Q_2^* \quad (3.107)$$

con

$$Q_1^* = -\frac{1}{\rho_0^*} \frac{\partial \rho_0^*}{\partial z} \quad (3.108)$$

$$Q_2^* = -\frac{1}{\rho_0^*} \mathbf{V}_\psi^* \cdot \nabla \rho^* - \nabla \cdot \mathbf{V}_H^* + \frac{1}{g \rho_0^*} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial P^*}{\partial t} \right) \quad (3.109)$$

donde ρ_0^* está dada por (3.55) y \mathbf{V}_ψ^* por (3.51).

Usando (3.107), (3.109) y (3.87) tenemos:

$$f_0^2 \nabla \cdot \mathbf{V}_H^* = \frac{f_0^2 R}{P_0} J(P, T) - f_0^2 \left[\frac{\partial w^*}{\partial z} + Q_1^* \right] + \frac{f_0^2}{g \rho_0^*} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial P^*}{\partial z} \right) \quad (3.110)$$

Sustituyendo (3.110) en la ecuación de la vorticidad potencial (3.63) se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \Phi^* - J(f_0^{-1} \nabla^2 \Phi^* + f, \Phi^*) &= f_0^2 \left[\frac{\partial w^*}{\partial z} + Q_1^* \right] - f_0^2 \frac{1}{g \rho_0^*} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial P^*}{\partial z} \right) \\ &+ f_0 \frac{1}{\rho_0^*} \frac{\partial}{\partial z} [\hat{\mathbf{K}} \cdot \nabla \times \boldsymbol{\tau}^*] \end{aligned} \quad (3.111)$$

Ahora, usando (3.74) en la ecuación termodinámica (3.66), tenemos que ésta puede expresarse de la siguiente manera:

$$c_p \rho_0^* \left[\frac{\partial T^*}{\partial t} + \mathbf{V}_\psi^* \cdot \nabla T^* - K \nabla^2 T^* + \bar{\beta} w^* / \gamma \right] = \dot{Q}_H^* + \frac{\partial P^*}{\partial t} \quad (3.112)$$

en donde

$$\dot{Q}_H^* = \dot{Q}_R^* + \dot{Q}_C^* - \frac{\partial}{\partial z} [c_p \rho_0^* \langle w^{*n} T^{*n} \rangle] \quad (3.113)$$

En la relación (3.112) hemos despreciado los términos \dot{Q}_{CM}^* y

\dot{Q}_p^* . De esta manera, de acuerdo con (3.80), (3.81) y (3.82) se tiene:

$$\int_0^H \dot{Q}_H^* dz = E_T + G_S + G_Z \quad (3.114)$$

en donde hemos despreciado el término $-[c_p \rho_0^* \langle w^{*H} T^{*H} \rangle]_{z=H}$.

Diferenciando la ecuación termodinámica (3.112) con respecto a z y sustituyendo el resultado en la ecuación de vorticidad potencial (3.111), obtenemos la ecuación de vorticidad potencial no adiabática:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{c}} \nabla^2 \Phi^* - J(\bar{c}_0^{-1} \nabla^2 \Phi^* + \bar{c}, \Phi^*) - \gamma \bar{c}_0^2 (c_p \bar{\beta} \rho_0^*)^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial z} \dot{Q}_H^* \right) \\ - \gamma \bar{c}_0^2 (\bar{c} \bar{\beta} P_0 \rho_0^*)^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial z} P_0^* \right) J(P, T) + \gamma \bar{c}_0^2 (\bar{\beta} \rho_0^*)^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial z} \rho_0^* \right) \left[K \nabla^2 T - \frac{\partial T}{\partial \bar{c}} \right] \\ + \bar{c}_0^2 (g \bar{\beta} \rho_0^*)^{-1} (g \gamma / c_p - \bar{\beta}) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{c}} P^* \right) + \bar{c}_0 \frac{1}{\rho_0^*} \frac{\partial}{\partial z} [\hat{k} \cdot \nabla \times \tau^*] \quad (3.115) \end{aligned}$$

en donde P_0^* está dada por (3.55b); y en donde hemos usado (3.13) con β constante y (3.51) para calcular $\nabla_{\Psi} \cdot \nabla T^*$, pero reemplazando a \bar{c}_0 por f para incorporar el efecto de la variación del parámetro de Coriolis en el transporte horizontal de calor por viento.

Para obtener de manera directa una ecuación diferencial parcial para la presión P vamos a evaluar la ecuación (3.115) en el nivel $z = H_0$, en donde el geopotencial equivalente Φ^* es directamente proporcional a la presión P . Es decir, de acuerdo con (3.47) se tiene que:

$$(\Phi^*)_{z=H} = R T_0 (P / P_0) = P / \rho_0 \quad (3.116)$$

Por lo tanto, evaluando (3.115) en $z = H_0$ obtenemos la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 P + \mathbf{V}_g \cdot \nabla (\nabla^2 P) + J(P, \mathbf{f}) = \gamma f_0^2 (c_p \bar{\beta})^{-1} \left(\frac{\partial \dot{q}_H^*}{\partial z} \right)_{z=H} \\
& - \gamma f_0^2 (f \bar{\beta} P_0)^{-1} \left(\frac{\partial P_0^*}{\partial z} \right)_{z=H} J(P, T) + \gamma f_0^2 \bar{\beta}^{-1} \left(\frac{\partial \rho_0^*}{\partial z} \right)_{z=H} \left(K \nabla^2 T - \frac{\partial T}{\partial t} \right) \\
& + f_0^2 (g \bar{\beta})^{-1} (g \gamma / c_p - \bar{\beta}) \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial P^*}{\partial t} \right) \right]_{z=H} + f_0 \left(\frac{\partial}{\partial z} [k \cdot \nabla \times \tau^*] \right)_{z=H}
\end{aligned} \tag{3.117}$$

donde

$$\mathbf{V}_g = \frac{k}{\rho_0 f_0} \times \nabla P \tag{3.118}$$

La velocidad del viento dada por (3.118) es igual a la velocidad del viento geostrofico dada por (3.6) en $z = H_0$, sólo que en lugar de usar f se usa f_0 .

Ahora vamos a determinar cada una de las derivadas con respecto a z evaluadas en $z = H_0$:

Usando (3.55a) en (3.94) se tiene que:

$$\left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial P^*}{\partial t} \right) \right]_{z=H} = \frac{1}{P_0} \left(\frac{\partial P_0^*}{\partial z} \right)_{z=H} \frac{\partial P}{\partial t} - \frac{\alpha P_0}{T_0^2} \left(\frac{\partial T_0^*}{\partial z} \right)_{z=H} \frac{\partial T}{\partial t} \tag{3.119}$$

Usando la ecuación de equilibrio hidrostático (3.55c) y la ecuación de estado (3.55b) se tiene:

$$\left(\frac{\partial P_0^*}{\partial z} \right)_{z=H} = - \frac{g P_0}{R T_0} \tag{3.120}$$

y de (3.12):

$$\left(\frac{\partial T_0^*}{\partial z} \right)_{z=H} = - \beta \tag{3.121}$$

Usando (3.120) y (3.121) en (3.119) se tiene:

$$\left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial P^*}{\partial t} \right) \right]_{z=H} = \frac{g}{R T_0} \left[\frac{T_0}{P_0} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial P}{\partial t} \right] \quad (3.122)$$

De (3.84), (3.108) y la ecuación de estado (3.55b) se tiene:

$$\left(\frac{\partial \rho_0^*}{\partial z} \right)_{z=H} = - \frac{\beta (\alpha - 1) P_0}{R T_0^2} \quad (3.123)$$

Vamos a usar la aproximación de la isopícnica (3.101) en los términos $\partial T/\partial t$ y $\nabla^2 T$ de (3.117), es decir, vamos a suponer que en (3.117):

$$\frac{\partial T}{\partial t} \approx \frac{T_0}{P_0} \frac{\partial P}{\partial t} \quad (3.124)$$

$$\nabla^2 T \approx \frac{T_0}{P_0} \nabla^2 P \quad (3.125)$$

Sin embargo, no usaremos la aproximación de la isopícnica (3.101) en el término $J(P, T)$ para evitar que el transporte horizontal por viento se anule.

Por consiguiente, usando (3.124) y (3.125) se tiene:

$$\left(K \nabla^2 T - \frac{\partial T}{\partial t} \right) \approx \frac{T_0}{P_0} \left(K \nabla^2 P - \frac{\partial P}{\partial t} \right) \quad (3.126)$$

Usando la aproximación (3.124) en (3.122) se tiene:

$$\left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial P^*}{\partial t} \right) \right]_{z=H} \approx 0 \quad (3.127)$$

Ahora vamos a determinar los gradientes verticales de \dot{Q}_H^* y de $[\hat{k} \cdot \nabla \times \tau^*]$ en el nivel $z = H_0$; para ello vamos a utilizar la figura 3.2, en donde se muestra esquemáticamente la capa troposférica de altura $z = H_0$ del MTC y una segunda capa superior de altura $z = H_0$. En las dos capas vamos a considerar los niveles $z = H_0/2$, $z = H_0$, $z = 3H_0/2$, $z = 2H_0$ y la superficie $z = 0$ para determinar los gradientes mencionados.

| | |
|--|--------------|
| $c_p \rho_0^* \langle w^{*n} T^{*n} \rangle = 0$ | $z = 2H_0$ |
| $\dot{Q}_R^* = 0, \dot{Q}_C^* = 0, \hat{k} \cdot \nabla \times \tau^* = 0$ | $z = 3H_0/2$ |
| $c_p \rho_0^* \langle w^{*n} T^{*n} \rangle = 0$ | $z = H_0$ |
| $\dot{Q}_R^* = \dot{Q}_R, \dot{Q}_C^* = \dot{Q}_C, \hat{k} \cdot \nabla \times \tau^* = 0$ | $z = H_0/2$ |
| $G_2 = [c_p \rho_0^* \langle w^{*n} T^{*n} \rangle]_{z=0}$ | $z = 0$ |

Figura 3.2. Valores de \dot{Q}_R^* , \dot{Q}_C^* y $\hat{k} \cdot \nabla \times \tau^*$ en $z = H_0/2$ y $z = 3H_0/2$, y de $c_p \rho_0^* \langle w^{*n} T^{*n} \rangle$ en $z = H_0$ y $z = 2H_0$. En la superficie $z = 0$, G_2 está dado por (3.82).

En la figura 3.2 \dot{Q}_R^* y \dot{Q}_C^* son los valores de \dot{Q}_R^* y \dot{Q}_C^* en $z = H_0/2$, respectivamente. En la superficie $z = 0$ vemos que G_2 está dado por (3.82).

De acuerdo con (3.97) $\tau^* = 0$ para $z > H_0$; vamos a suponer que $H_0 < H_0/2$; por consiguiente, podemos considerar, tal y como se muestra en la figura 3.2, que $\hat{k} \cdot \nabla \times \tau^* = 0$ a partir de $z_0 \approx H/2$. Por lo tanto, de acuerdo con la figura 3.2, vamos a tomar la siguiente aproximación.

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} [\hat{k} \cdot \nabla \times \tau^*] \right)_{z=H} \approx \frac{[\hat{k} \cdot \nabla \times \tau^*]_{z=3H/2} - [\hat{k} \cdot \nabla \times \tau^*]_{z=H/2}}{H_0} = 0 \quad (3.128)$$

Vamos a suponer que a partir de $Z \approx H_0$ $[c_p \rho_0^* \langle w^{*n} T^{*n} \rangle] = 0$, $\dot{Q}_R^* = 0$ y $\dot{Q}_C^* = 0$. Por lo tanto:

$$\left(\frac{\partial \dot{Q}_H^*}{\partial z} \right)_{z=H} = \frac{(\dot{Q}_H^*)_{z=3H/2} - (\dot{Q}_H^*)_{z=H/2}}{H_0} \quad (3.129)$$

$$\begin{aligned} (\dot{Q}_H^*)_{z=3H/2} &= - \left[\frac{\partial}{\partial z} (c_p \rho_0^* \langle w^{*H} T^{*H} \rangle) \right]_{z=3H/2} \\ &= - \frac{(c_p \rho_0^* \langle w^{*H} T^{*H} \rangle)_{z=2H} - (c_p \rho_0^* \langle w^{*H} T^{*H} \rangle)_{z=H}}{H_0} = 0 \quad (3.130) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\dot{Q}_H^*)_{z=H/2} &= \dot{Q}_R + \dot{Q}_C - \left[\frac{\partial}{\partial z} (c_p \rho_0^* \langle w^{*H} T^{*H} \rangle) \right]_{z=H/2} \\ &= \dot{Q}_R + \dot{Q}_C - \frac{(c_p \rho_0^* \langle w^{*H} T^{*H} \rangle)_{z=H} - (c_p \rho_0^* \langle w^{*H} T^{*H} \rangle)_{z=0}}{H_0} \\ &= \dot{Q}_R + \dot{Q}_C + G_2 / H_0 \quad (3.131) \end{aligned}$$

en donde hemos usado (3.82).

Ahora vamos a aproximar el valor de \dot{Q}_R^* y de \dot{Q}_C^* en $z = H_0/2$, por su correspondiente valor medio en la capa troposférica del MTC. Es decir:

$$\dot{Q}_R \approx \frac{1}{H_0} \int_0^H \dot{Q}_R^* dz = E_T / H_0 \quad (3.132)$$

$$\dot{Q}_C \approx \frac{1}{H_0} \int_0^H \dot{Q}_C^* dz = G_5 / H_0 \quad (3.133)$$

en donde hemos usado (3.80) y (3.81).

Por lo tanto, utilizando (3.132) y (3.133) en (3.131) se tiene:

$$(\dot{Q}_H^*)_{z=H/2} = \frac{E_T + G_5 + G_2}{H_0} \quad (3.134)$$

Sustituyendo (3.130) y (3.134) en (3.129) se tiene finalmente que:

$$\left(\frac{\partial \dot{\omega}_H^*}{\partial z} \right)_{z=H} = - \frac{E_T + G_5 + G_2}{H_0^2} \quad (3.135)$$

Usando (3.120), (3.123), (3.126), (3.127), (3.128) y (3.135) en (3.117) llegamos a la ecuación de vorticidad potencial no adiabática:

$$\begin{aligned} (\nabla^2 - \lambda^2) \frac{\partial P}{\partial z} + \mathbf{W}_g \cdot \nabla (\nabla^2 P) + J(P, \mathbf{f}) + C_0 \nabla^2 P = \lambda_v^2 \frac{R}{\mathcal{E}} J(P, T) \\ - \lambda_E^2 \frac{R}{C_v H_0} (E_T + G_5 + G_2) \end{aligned} \quad (3.136)$$

donde λ^2 , λ_v^2 , λ_E^2 y C_0 son parámetros dados por:

$$\lambda^2 = \frac{A f_0^2}{R T_0} \approx 1.28 \times 10^{-16} \text{ cm}^{-2}$$

$$A = \frac{\gamma \beta (\alpha - 1)}{\beta} \approx 8.41$$

$$\lambda_v^2 = \frac{A_v f_0^2}{R T_0} \approx 1.58 \times 10^{-16} \text{ cm}^{-2}$$

$$A_v = \frac{g \gamma}{R \beta} \approx 10.39 \quad (3.137)$$

$$\lambda_E^2 = \frac{A_E f_0^2}{R T_0} \approx 8.41 \times 10^{-17} \text{ cm}^{-2}$$

$$A_E = \frac{T_0}{\beta H_0} \approx 5.54$$

$$C_0 = \lambda^2 K \approx 8.32 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1}$$

Los valores en (3.137) han sido calculados tomando los valores dados en el Apéndice A para las constantes básicas del MTCV y usando $K = 6.5 \times 10^{10} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$. El parámetro λ^2 es conocido como parámetro de curvatura (Haltiner, 1980).

La ecuación de vorticidad potencial no adiabática (3.136) es evidentemente más simple que la ecuación de la tendencia de la presión (3.104), y expresa además de manera muy directa la relación existente entre la evolución de la vorticidad potencial y su disipación ($C_0 \nabla^2 P$), con los forzamientos debidos al transporte horizontal de calor por viento medio ($\lambda_E^2 R J(P,T) / f$) y al calentamiento medio troposférico ($-\lambda_E^2 R (E_T + G_5 + G_2) / C_{H_0}$).

Los valores de los parámetros dados en (3.137) han sido obtenidos haciendo varias aproximaciones; por esta razón, pueden ser variados de manera arbitraria dentro de un rango físicamente aceptable. Por ejemplo, Haltiner (1980, pág. 90) utiliza $\lambda^2 = 5.88 \times 10^{-16} \text{ cm}^2$ en un análisis de inestabilidad baroclínica, en un modelo baroclínico de dos niveles. G.B. Tucker (1977) encuentra que, en la capa troposférica, el coeficiente K puede tener variaciones de aproximadamente $5 \times 10^{10} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ alrededor de un valor medio de $5 \times 10^{10} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ y llegando a valores muy cercanos a cero en 10 km de altura. Por consiguiente, es muy razonable suponer que el parámetro C_0 pueda tener un valor más bajo que el encontrado en este trabajo. Joseph Egger y Heinz-Dieter (1983), en un estudio sobre la variabilidad de la atmósfera a gran escala, utilizan la ecuación de vorticidad:

$$(\nabla^2 - \lambda^2) \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial t} + J(\bar{\Psi}, \nabla^2 \bar{\Psi} + f) + C_0 \nabla^2 \bar{\Psi} = 0 \quad (3.136a)$$

en donde $\bar{\Psi}$ es la función corriente en 500 mb. Estos investigadores usan un valor de $1 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1}$ para C_0 , el cual es aproximadamente 8 veces más pequeño que el nuestro; en cambio, para λ^2 , usan un valor entre cero y $1 \times 10^{-16} \text{ cm}^2$, este último muy cercano al nuestro.

3.10 Simplificación de la Ecuación Termodinámica.

Al igual que la ecuación de la tendencia de la presión (3.104), la ecuación termodinámica con vorticidad (3.99) es muy complicada; por consiguiente, vamos a simplificar la ecuación termodinámica de tal manera que lleguemos a una expresión muy semejante en simplicidad a la de la ecuación de la vorticidad potencial (3.136). Para tal efecto vamos a aplicar la aproximación de la isopícnica (3.101) a los términos de la ecuación (3.99) relacionados con la vorticidad potencial; de esta manera (3.99) se reduce a:

$$\left(F_{128} \nabla^2 + \bar{F}_2 \right) \frac{\partial T}{\partial t} + F_{129} J(T, \nabla^2 T) + \bar{F}_{121} J(P, f) + \bar{F}_{122} J(T, f) - F_8 J(P, T) - F_2 K \nabla^2 T + \bar{F}'_{126} \hat{k} \cdot \nabla \times \tau_a = E_T + G_5 + G_2 \quad (3.139)$$

en donde

$$\begin{aligned} \bar{F}_2 &= F_2 + [1. - (\text{CLASIC})_0^1] [F'_2 + (P_0/T_0) F'_3] \\ \bar{F}_{121} &= [1. - (\text{CLASIC})_0^1] F_{121} \\ \bar{F}_{122} &= [1. - (\text{CLASIC})_0^1] F_{122} \\ \bar{F}'_{126} &= [1. - (\text{CLASIC})_0^1] [1. - (\text{GEOS})_0^1] F'_{126} \\ F_{128} &= [F_{122} + (P_0/T_0) F_{121}] [1. - (\text{CLASIC})_0^1] [1. - (\text{GEOS})_0^1] \\ F_{129} &= [F_{124} + 2(P_0/T_0) F_{125} + (P_0/T_0)^2 F_{123}] [1. - (\text{CLASIC})_0^1] [1. - (\text{GEOS})_0^1] \end{aligned} \quad (3.140)$$

y en donde hemos introducido los parámetros opcionales $(\text{CLASIC})_0^1$ y $(\text{GEOS})_0^1$, los cuales valen cero o uno dependiendo del caso. Con $(\text{CLASIC})_0^1 = (\text{GEOS})_0^1 = 0$, obtenemos la ecuación termodinámica (3.139), en donde hemos aplicado la aproximación de la isopícnica (3.101).

Con $(\text{CLASIC})_0^1 = 0$ y $(\text{GEOS})_0^1 = 1$ la ecuación (3.139) se reduce

a:

$$\begin{aligned} \bar{F}_2 \frac{\partial T}{\partial t} + F_{121} J(P, f) + F_{122} J(T, f) - F_8 J(P, T) - F_2 K \sigma^2 T \\ = E_T + G_S + G_2 \end{aligned} \quad (3.141)$$

La ecuación termodinámica (3.141) se obtiene si, en lugar de usar la velocidad vertical dada por (3.89) para calcular la convección de calor W_v , usamos la velocidad vertical dada por (3.89a), en donde la divergencia del viento horizontal se ha calculado usando la aproximación (3.105).

Con (CLASIC)₀¹ = 1 la ecuación termodinámica (3.139) se reduce a la expresión clásica (3.100).

Las funciones de calentamiento ($E_T + G_S + G_2$) que aparecen en las ecuaciones de vorticidad potencial (3.136) y la ecuación termodinámica (3.139) son funciones que, como veremos más adelante, dependen de la temperatura troposférica y de la temperatura de la superficie de océanos y continentes; por lo tanto, es necesario considerar una ecuación adicional que describa la evolución de la temperatura de la superficie de océanos y continentes. Dicha ecuación expresa la conservación de la energía térmica en la capa superior de los océanos y continentes, y la veremos en el siguiente capítulo.

CAPITULO 4.

LA ECUACION DE CONSERVACION DE ENERGIA TERMICA APLICADA A LA CAPA SUPERIOR DE OCEANOS Y CONTINENTES.

4.1 La Ecuación de Conservación de Energía Térmica Aplicada a la Capa Superior de los Océanos.

La ecuación de conservación de energía térmica aplicada a la capa superior de los océanos, puede expresarse en la siguiente forma (Adem, 1970a; Mendoza, 1981):

$$h_s c_s \rho_s \left[\frac{\partial T_s}{\partial t} + W_{ST} \cdot \nabla T_s - K_s \nabla^2 T_s \right] + W_s = E_s - G_3 - G_2 \quad (4.1)$$

donde h_s es la profundidad de dicha capa mezclada verticalmente por el viento, y cuyo valor está entre los 50 y 100 metros; c_s , el calor específico del agua considerado constante; ρ_s , la densidad del agua en la capa mezclada cuyo valor se considera constante; T_s , la temperatura de la capa mezclada; W_{ST} , la velocidad de la corriente resultante en la capa mezclada; y K_s , el coeficiente "Austausch" para el océano y cuyo valor es dos órdenes de magnitud menor que el de la atmósfera (Montgomery, 1939; Neumann, 1940; Stomel, 1950; Adem y Mendoza, 1987 y 1988 y Mendoza, 1988).

El primer término del lado izquierdo de (4.1) ($h_s c_s \rho_s \partial T_s / \partial t$) representa el almacenamiento de energía térmica en la capa superior oceánica; el segundo ($h_s c_s \rho_s W_{ST} \cdot \nabla T_s$) y el tercero ($-h_s c_s \rho_s K_s \nabla^2 T_s$) representan las razones de cambio de energía térmica, debidas al transporte horizontal de calor por corrientes oceánicas y por remolinos oceánicos turbulentos de gran escala, respectivamente; el cuarto término (W_s) representa la razón de cambio de la energía térmica, debida al transporte vertical turbulento de calor dado por la capa superior oceánica a la termoclina. Del lado derecho de (4.1) E_s es el calentamiento por radiación solar y terrestre en la capa superior oceánica; G_3 , el calor perdido por la evaporación en la superficie del océano; y

G_2 , el calor sensible cedido por la superficie del océano a la capa troposférica por transporte vertical turbulento.

La parametrización del transporte horizontal de calor por corrientes oceánicas es realizado usando para la velocidad de la corriente resultante V_{ST} , la fórmula:

$$V_{ST} = V_{SW} + (V_S - V_{SN}) \quad (4.2)$$

donde V_{SW} es la velocidad de la corriente oceánica normal estacional observada, V_S es la corriente de deriva producida por el arrastre del viento sobre la superficie oceánica, y V_{SN} es el valor normal de V_S .

Las componentes del vector V_S son calculadas de las siguientes fórmulas:

$$u_s = C_1 0.0126 (u_a \cos \theta + v_a \operatorname{sen} \theta) / \sqrt{\operatorname{sen} \varphi} \quad (4.3)$$

$$v_s = C_1 0.0126 (v_a \cos \theta - u_a \operatorname{sen} \theta) / \sqrt{\operatorname{sen} \varphi} \quad (4.4)$$

donde u_s y v_s son, respectivamente, las componentes de V_S en las direcciones X y Y; u_a y v_a son, respectivamente, las componentes de la velocidad del viento en la superficie en las direcciones X y Y; φ es la latitud; C_1 es un parámetro constante y θ es el ángulo que mide la dirección del vector de la corriente de deriva a la derecha del vector de viento en la superficie. La derivación de las fórmulas (4.3) y (4.4) es dada en detalle en otros trabajos anteriores (Adem, 1970a; Mendoza, 1981) y está basada en la teoría de Ekman sobre la corriente de deriva.

Al igual que Adem (Adem, 1964b, 1965a, 1965b, 1969a 1970b; Adem y Jacob, 1968), en este trabajo vamos a despreciar el transporte horizontal de calor por corrientes oceánicas y por remolinos oceánicos turbulentos de gran escala, así como el transporte vertical turbulento de calor dado por la capa superior oceánica a la termoclina. De esta manera la ecuación (4.1) se reduce a:

$$h_s c_p \rho_s \frac{\partial T_s}{\partial t} = E_s - G_3 - G_2 \quad (4.5)$$

4.2 La Ecuación de Conservación de Energía Térmica Aplicada a la Capa Superior de los Continentes.

La capa superior de los continentes que interactúa térmicamente con la atmósfera, tiene una profundidad despreciable comparada con la profundidad de la capa superior de los océanos (Adem, 1963 y 1964b); por lo tanto, vamos a suponer que en los continentes el almacenamiento de energía térmica es despreciable; de esta manera, la ecuación (3.5) se reduce a:

$$0 = E_s - G_3 - G_2 \quad (4.5a)$$

Las ecuaciones (3.100), (4.5) y (4.5a) han sido usadas en numerosos experimentos de predicción a un mes de las anomalías de la temperatura de la atmósfera y de la superficie de océanos y continentes, así como de la precipitación, mostrando que el MTC tiene cierta habilidad en la predicción a largo plazo, tal y como se muestra en dos trabajos de revisión sobre el MTC (Adem, 1979 y 1991).

En el MTCV las ecuaciones (3.136), (3.139), (4.5) y (4.5a) constituyen las ecuaciones fundamentales, en donde las variables son la temperatura, T , la presión atmosférica, P , en el tope de la capa troposférica ($z = H_0$), así como la temperatura de la superficie de océanos y continentes, T_s . Por consiguiente, lo único que falta por determinar son las relaciones constitutivas o parametrizaciones para las funciones de calentamiento E_r , E_s , G_s , G_2 y G_3 , y para la componente vertical del rotacional del esfuerzo del viento en la superficie, $\hat{k} \cdot \nabla \times \tau_a$. En el siguiente Capítulo veremos dichas parametrizaciones, así como la parametrización del transporte horizontal de calor por viento medio en el MTC.

CAPITULO 5.

LAS PARAMETRIZACIONES O RELACIONES CONSTITUTIVAS EN EL MTCV.

5.1 Parametrización de las Funciones de Calentamiento.

La parametrización del calentamiento por radiación solar y terrestre en la capa troposférica (E_T) y en la superficie de los océanos y continentes (E_S) se lleva a cabo suponiendo que la capa de nubes y la superficie de la tierra emiten como cuerpos negros y que la atmósfera sin nubes emite como cuerpo negro para longitudes de onda menores que $8\mu\text{m}$; también se supone que el contenido real de CO_2 afecta parcialmente esta emisión en las longitudes de onda de $12\mu\text{m}$ a $14\mu\text{m}$ y de $16\mu\text{m}$ a $18\mu\text{m}$, y emite como cuerpo negro para longitudes de onda mayores o iguales que $18\mu\text{m}$, siendo prácticamente transparente entre $8\mu\text{m}$ y $13\mu\text{m}$ (Adem y Garduño, 1982 y 1984).

Las fórmulas resultantes, linealizadas con respecto a T y a T_S , están dadas por:

$$E_T = F_{30} + F'_{30}c + F_{31}T' + (F_{32} + F'_{32}c_H)T'_S + (a_2 + b_3c)I \quad (5.1)$$

$$E_S = F_{34} + F'_{34}c + F_{35}T' + F_{36}T'_S + (Q + q)_0[1 - (1 - k)c](1 - \alpha_s) \quad (5.2)$$

en donde los coeficientes F_{30} , F_{31} , F_{32} , F'_{32} , F_{34} , F'_{34} , F_{35} y F_{36} son constantes dadas en detalle en trabajos previos (Adem, 1962; Adem y Garduño, 1982; Ruiz, 1991); c es la fracción de nubes y c_H su valor normal; $T' = T - T_0$ y $T'_S = T_S - T_{S0}$ donde T_{S0} y T_0 son constantes y $T' < T_0$ y $T'_S < T_{S0}$ son, respectivamente, las desviaciones de T y T_S ; a_2 y b_3 son funciones de la latitud y la estación; $(Q + q)_0$ es la radiación solar total mensual recibida por la superficie con cielo despejado; k es una función de la latitud; α_s es el albedo de la superficie; I es la insolación media mensual recibida en el tope de la atmósfera.

En la fórmula (5.1), para la fracción de radiación solar absorbida por la atmósfera, se han usado las fórmulas propuestas por Adem (1964b), y en la fórmula (5.2), para la fracción de

radiación solar absorbida por la superficie de la tierra, se ha usado la fórmula de Savino-Angström (Budyko, 1956). La insolación media mensual se determina a partir de las fórmula de Milankovitch (Adem, 1962).

Para el calor sensible (G_2) y el calor perdido por evaporación en la superficie (G_3) se usan las siguientes fórmulas lineales (Clapp et al., 1965):

Sobre los océanos:

$$G_2 = G_{2N} + K_2 |W_{aN}| [(T'_S - T'_{SN}) - (T' - T'_N)] (G_2)_0^1 \quad (5.3)$$

$$G_3 = G_{3N} + K_4 B |W_{aN}| [0.981(T'_S - T'_{SN}) - U_N(T' - T'_N)] (G_3)_0^1 \quad (5.4)$$

Sobre los continentes:

$$G_2 = G_{2N} + K_3 |W_{aN}| [(T'_S - T'_{SN}) - (T' - T'_N)] (G_2)_0^1 \quad (5.5)$$

$$G_3 = G_{3N} + (1 - d_7)(E_s - E_{sN})(G_3)_0^1 \quad (5.6)$$

donde G_{2N} , G_{3N} , E_{sN} , T'_N y T'_{SN} son los valores normales de G_2 , G_3 , E_s , T' y T'_S , respectivamente; K_2 , K_3 , K_4 y B son parámetros constantes; $|W_{aN}|$ es la rapidez del viento normal en la superficie; U_N es el valor normal de la humedad relativa en la superficie; d_7 es una función empírica que depende de las coordenadas rectangulares X y Y del mapa; $(G_2)_0^1$ y $(G_3)_0^1$ son parámetros que son iguales a 0 cuando G_2 y G_3 son iguales a sus valores normales y son iguales a 1 cuando G_2 y G_3 son iguales a sus valores anómalos (normal + anomalía).

Para el calor liberado por la condensación del vapor de agua en las nubes (G_5) se usa la siguiente fórmula empírica, deducida por Clapp et al. (1965):

$$G_5 = G_{5N} + (G_5)_0^1 [b'(T' - T'_N) + a'' \left\{ \frac{\partial T}{\partial X} - \frac{\partial T'_N}{\partial X} \right\} + c'' \left\{ \frac{\partial T}{\partial Y} - \frac{\partial T'_N}{\partial Y} \right\}] \quad (5.7)$$

donde G_{5N} es el valor normal de G_5 ; $d'' = 2Dd'$ y $c'' = 2Dc'$ siendo $D = 408.5$ km el intervalo entre punto y punto de la rejilla regular de integración del MTCV; b' , c' y d' son funciones empíricas de X y Y ; $(G_5)_0^1$ es un parámetro que es igual a 0 cuando G_5 es igual a su valor normal y 1 cuando es igual a su valor anómalo (normal + anomalía).

La fracción de nubes (c) es considerada como variable y su fórmula empírica está dada por:

$$c = c_N + d_2(G_5 - G_{5N})(c)_0^1 \quad (5.8)$$

donde c_N es el valor normal de c ; d_2 es una constante empírica; y $(c)_0^1$ es un parámetro que es igual a 0 cuando c es igual a su valor normal y 1 cuando es igual a su valor anómalo (normal + anomalía).

Las fórmulas (5.3)-(5.4) y (5.5)-(5.6) pueden ser compactadas en dos fórmulas que toman en cuenta tanto océanos como continentes:

$$G_2 = G_{2N} + (G_2)_0^1 |V_{2N}| \left\{ G_2'' K_2 + (1-G_2'') K_3 \right\} \left((T'_S - T'_{SN}) - (T' - T'_N) \right) \quad (5.9)$$

$$G_3 = G_{3N} + (G_3)_0^1 \left\{ G_3'' K_4 B |V_{3N}| \left[0.981(T'_S - T'_{SN}) - U_N(T' - T'_N) \right] + (1-G_3'') (1-d_7) (E_N - E_{2N}) \right\} \quad (5.10)$$

donde G'' es un parámetro que es igual a cero para los continentes y uno para los océanos.

5.2 La Parametrización del Transporte Horizontal de Calor por Viento Medio en el MTCV (Dinámica Implícita).

En la ecuación termodinámica (3.100), lo mismo que en la ecuación termodinámica (3.139), el transporte horizontal de calor por viento medio, AD, está dado por:

$$AD = \int_0^H c_p \rho_0^* V_{\psi}^* \cdot \nabla T^* dz - F_B J(T, P) \quad (5.11)$$

en donde ρ_0^* está dado por (3.55) V_{ψ}^* por (3.51), cambiando f_0 por f y T^* por (3.13), tomando a β constante.

Adem (1970b) propone seis diferentes opciones para calcular AD, de éstas sólo usaremos en el MTCV las tres primeras por ser las fundamentales, las otras tres son derivaciones de la segunda opción; las tres opciones que usaremos son las siguientes:

Opción 1. La densidad ρ en el tope de la capa ($z = H_0$) se supone constante. Esta condición, junto con el hecho de considerar a β como constante, implica que las isotermas coinciden con las isobaras y por lo tanto $AD = 0$.

Opción 2. En esta opción se prescribe el valor normal de la presión, lo cual es equivalente a suponer un transporte horizontal de calor por viento normal.

Opción 3. En esta opción se reemplaza en (5.11) V_{ψ}^* por V_H^* dada por:

$$V_H^* = V_{NoB}^* + (V^* - V_N^*) \quad (5.12)$$

donde V_H^* es la velocidad del viento horizontal, V_{NoB}^* es la velocidad del viento geostrofico normal observado, V^* es la velocidad del viento predicho, y V_N^* es la velocidad del viento normal predicho.

Las componentes de la velocidad V_{NoB}^* son obtenidas de (3.53) y (3.54), cambiando f_0 por f y cambiando P y T por su valor normal observado. Es decir:

$$u_{\text{Nob}}^* = - \frac{R T_0^*}{f P_0} \frac{\partial P_{\text{Nob}}}{\partial Y} + \frac{(H_0 - z)}{f T_0} g \frac{\partial T_{\text{Nob}}}{\partial Y} \quad (5.13)$$

$$v_{\text{Nob}}^* = \frac{R T_0^*}{f P_0} \frac{\partial P_{\text{Nob}}}{\partial X} - \frac{(H_0 - z)}{f T_0} g \frac{\partial T_{\text{Nob}}}{\partial X} \quad (5.14)$$

donde u_{Nob}^* y v_{Nob}^* son las componentes en X y Y de W_{Nob}^* y donde P_{Nob} y T_{Nob} son los valores normales observados de P y T, respectivamente.

Las componentes de W^* son obtenidas de (5.13) y (5.14) reemplazando u_{Nob}^* , v_{Nob}^* , P_{Nob} y T_{Nob} por u^* , v^* , P, y T, respectivamente, y suponiendo que la densidad en el tope de la capa troposférica (ρ) es constante e igual a $\rho_0 = P_0/R T_0$. De esta manera tenemos que:

$$u^* = - \frac{R}{f T_0} \left(T_0^* - (H_0 - z) \frac{g}{R} \right) \frac{\partial T}{\partial Y} \quad (5.15)$$

$$v^* = \frac{R}{f T_0} \left(T_0^* - (H_0 - z) \frac{g}{R} \right) \frac{\partial T}{\partial X} \quad (5.16)$$

Fórmulas similares son obtenidas para W_H^* . Usando (5.12) en (5.11) en lugar de W_{ψ}^* , y (3.55), (3.13) con β constante, (5.13), (5.14), (5.15) y (5.16) así como las fórmulas para W_H^* , obtenemos:

$$AD = F_8^J(T, P_{\text{Nob}}) + F_8^H J(T, T_{\text{Nob}}) - F_8^J(T, T_H) \quad (5.17)$$

donde

$$F_8^J = \frac{P_0}{T_0} \left(1 - \frac{g}{R \beta} \right) F_8 - \frac{g}{f \beta} F_2 \quad (5.18)$$

$$F_8^H = F_8^J - \frac{P_0}{T_0} F_8 \quad (5.19)$$

y donde F_2 y F_8 están dadas por (3.76) y (3.77), respectivamente.

La ecuación (5.17) es una función lineal de $\partial T/\partial x$ y $\partial T/\partial y$, y su uso en la ecuación termodinámica (3.100), junto con la parametrización de las funciones de calentamiento, conduce a que (3.100) sea una ecuación diferencial parcial lineal en T. Esta forma de incorporar la dinámica en el MTC es implícita, pues el viento dado por (5.15) y (5.16) queda implícito en la ecuación termodinámica (3.100).

En la ecuación (5.17) la suma de los dos primeros términos del lado derecho son el transporte horizontal de calor por el viento geostrofico normal observado, el cual es prescrito; el usar únicamente estos dos términos es equivalente a la opción 2. El último término es el transporte horizontal de calor debido a las anomalías del viento calculadas por el modelo.

Si en lugar de usar (5.12) en (5.11) suponemos que $V_H^* = \bar{V}^*$, entonces obtenemos que AD = 0, lo cual nos conduce a la opción 1.

5.3 Parametrización del Rotacional de Esfuerzo del Viento en la Superficie.

Las componentes del esfuerzo del viento en la superficie (τ_a) están dadas por las siguientes fórmulas paramétricas (Kasahara y Washington 1967):

$$\tau_{ax} = \rho_a C_D |W_a| u_a \quad (5.20)$$

$$\tau_{ay} = \rho_a C_D |W_a| v_a \quad (5.21)$$

donde ρ_a es la densidad del aire en la superficie; C_D es el coeficiente de arrastre, el cual depende de la estabilidad de la atmósfera; $|W_a|$ es la rapidez de la velocidad del viento en la superficie, W_a ; y τ_{ax} , τ_{ay} , u_a y v_a son las componentes en X y Y del esfuerzo τ_a y de la velocidad W_a , respectivamente.

En las ecuaciones (5.20) y (5.21) vamos a reemplazar a ρ_a por la densidad constante ρ_{a0} dada por (3.91), $|W_a|$ por $|W_{aN}|$; y u_a y v_a por las componentes del viento geostrófico u_{sg} y v_{sg} calculadas de las ecuaciones (3.53) y (3.54) en $z = 0$, es decir:

$$u_{sg} = - \frac{R T_{a0}}{f_0 P_0} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{g H_0}{f_0 T_0} \frac{\partial T}{\partial y} \quad (5.22)$$

$$v_{sg} = \frac{R T_{a0}}{f_0 P_0} \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{g H_0}{f_0 T_0} \frac{\partial T}{\partial x} \quad (5.23)$$

donde T_{a0} está dada por (3.78).

Considerando lo anterior, las componentes del esfuerzo pueden expresarse como:

$$\tau_{ax} = \rho_{a0} C_D |W_{aN}| u_{sg} \quad (5.24)$$

$$\tau_{ay} = \rho_{a0} C_D |W_{aN}| v_{sg} \quad (5.25)$$

Usando (5.24) y (5.25) la componente vertical del rotacional del esfuerzo del viento en superficie puede expresarse como:

$$\hat{K} \cdot \nabla \times \tau_a = \rho_{a0} C_D |V_{aH}| \hat{K} \cdot \left(\nabla \times V_{ag} - V_{ag} \times \nabla E_a / |V_{aH}|^2 \right) \quad (5.26)$$

donde V_{ag} es la velocidad del viento geostrófico en la superficie, cuyas componentes están dadas por (5.22) y (5.23), y E_a es la energía cinética por unidad de masa del viento en la superficie, es decir:

$$E_a = \frac{1}{2} (u_{aH}^2 + v_{aH}^2) \quad (5.27)$$

donde u_{aH} y v_{aH} son las componentes en X y Y, respectivamente, de la velocidad del viento normal en la superficie, V_{aH} .

Asumimos que en (5.26) el término $V_{ag} \times \nabla E_a / |V_{aH}|^2$ es despreciable comparado con el término $\nabla \times V_{ag}$; de esta manera (5.26) se reduce a:

$$\hat{K} \cdot \nabla \times \tau_a = \rho_{a0} C_D |V_{aH}| \hat{K} \cdot \nabla \times V_{ag} \quad (5.28)$$

Sustituyendo (5.22) y (5.23) en (5.28) se tiene que:

$$\hat{K} \cdot \nabla \times \tau_a = \frac{\rho_{a0} R T_{a0}}{f_0^2 P_0} C_D |V_{aH}| \nabla^2 P - \frac{\rho_{a0} g H_0}{f_0 T_0} C_D |V_{aH}| \nabla^2 T \quad (5.29)$$

En la determinación de (5.29) C_D se ha considerado constante y un valor apropiado es $C_D = 1.0 \times 10^{-3}$. Tanto en las funciones de calentamiento (5.3), (5.4) y (5.5) como en (5.29), $|V_{aH}|$ es prescrito de manera que (5.29) es lineal en $\nabla^2 P$ y $\nabla^2 T$.

CAPITULO 6.

LA SOLUCION NUMERICA DE LAS ECUACIONES DEL MTCV.

6.1 Análisis de Ondas de la Ecuación de Vorticidad Potencial.

Antes de presentar la solución numérica de las ecuaciones del MTCV, es conveniente determinar el tipo de ondas que se han introducido en el MTC al incorporar la ecuación de vorticidad potencial no adiabática (3.136). Por simplicidad, vamos a considerar únicamente la parte dinámica de la ecuación (3.136), dado que es la que puede provocar inestabilidad numérica en la solución de las ecuaciones. En este caso la ecuación (3.136) se reduce a:

$$(\nabla^2 - \lambda^2) \frac{\partial P}{\partial t} + \mathbf{v}_g \cdot \nabla (\nabla^2 P) + \beta_0 \frac{\partial P}{\partial x} + C_0 \nabla^2 P = 0 \quad (6.1)$$

en donde hemos usado la aproximación plano β_0 , es decir:

$$f = f_0 + \beta_0 y \quad (6.2)$$

donde $\beta_0 = df/dy$, es la variación del parámetro de Coriolis en el plano tangente al paralelo $\varphi = \varphi_0$.

Consideremos una solución del tipo:

$$P(x, y, t) = -U_0 f_0 \rho_0 y + A_0 e^{ik(x-ct)} \quad (6.3)$$

donde $U_0 = \text{constante}$, es la componente zonal de la velocidad del viento y $k = 2\pi/L$, L es la longitud de la onda. La presión (6.3) satisface la ecuación (6.1) siempre y cuando la velocidad de fase $c = c_r + ic_i$ cumpla las siguientes relaciones:

$$c_r = \frac{U_0 - \beta_0/k^2}{1 + \lambda^2/k^2} \quad (6.4)$$

$$kc_i = \frac{-C_0}{1 + \lambda^2/k^2} \quad (6.5)$$

donde c_r y c_i son, respectivamente, la parte real y la parte

imaginaria de c . La velocidad de fase dada por (6.4) corresponde a la velocidad de fase de las ondas internas de Rossby (Haltiner, 1980).

Si N es el número de ondas alrededor del hemisferio, i.e., $2\pi a \cos\varphi = N \cdot L$, donde a es el radio medio de la Tierra, entonces podemos escribir (6.4) y (6.5) en la siguiente forma:

$$c_r = \frac{U_0 - 2\Omega a \cos^3\varphi_0/N^2}{1 + \lambda^2 a^2 \cos^2\varphi_0/N^2} \quad (6.6)$$

$$kc_i = \frac{-C_0}{1 + \lambda^2 a^2 \cos^2\varphi_0/N^2} \quad (6.7)$$

en donde hemos tomado $\varphi_0 = 45^\circ$.

En este análisis de ondas vamos a utilizar dos valores para el parámetro de curvatura, $\lambda^2 = 1.50 \times 10^{-16} \text{cm}^{-2}$, valor usado por Wiin-Nielsen (1959) en un análisis de ondas de Rossby con el modelo barotrópico; este valor es muy cercano al valor teórico obtenido en este trabajo ($\lambda^2 = 1.28 \times 10^{-16} \text{cm}^{-2}$) y $\lambda^2 = 5.88 \times 10^{-16} \text{cm}^{-2}$, valor usado por Haltiner (1980, pág. 90) y del cual hemos hecho mención al final de la sección 3.9.

La figura 6.1 muestra la velocidad de fase (parte real de c), en ms^{-1} , como una función del número de ondas N en $\varphi_0 = 45^\circ$. Los valores de c_r son calculados para $U_0 = 20 \text{ms}^{-1}$. La línea sólida corresponde a $\lambda^2 = 0$, la línea a trazos a $\lambda^2 = 1.50 \times 10^{-16} \text{cm}^{-2}$ y la línea a puntos a $\lambda^2 = 5.88 \times 10^{-16} \text{cm}^{-2}$. Vemos que en ondas de escala planetaria, digamos $N \approx 1$, que corresponde a longitudes de onda de aproximadamente 28000 km, la velocidad de fase cambia de -9.8ms^{-1} para $\lambda^2 = 1.50 \times 10^{-16} \text{cm}^{-2}$ a -2.56ms^{-1} para $\lambda^2 = 5.88 \times 10^{-16} \text{cm}^{-2}$, es decir, un cambio de 7.24ms^{-1} ; mientras que en ondas de escala sinóptica, digamos $N \approx 8$, que corresponde a longitudes de onda de aproximadamente 3500 km, c_r cambia de 10ms^{-1} a 5.19ms^{-1} , es decir, un cambio de 4.81ms^{-1} .

Por otro lado, la figura 6.1 muestra que un cambio de valor en λ^2 , de cero a $1.50 \times 10^{-16} \text{cm}^{-2}$, no cambia apreciablemente la velocidad de fase de las ondas de escala sinóptica ($N \approx 8$); sin embargo, las ondas de escala planetaria ($N \approx 1$) experimentan un fuerte cambio en su velocidad de fase. Por lo tanto, la velocidad

de fase de las ondas de escala planetaria es fuertemente dependiente del parámetro λ^2 . De acuerdo con Cressman (1958) y Wiin-Nielsen (1959) las ondas planetarias, las cuales son casi-estacionarias, son mejor predichas para valores grandes de λ^2 ; Nielsen sugiere usar el valor de $\lambda^2 = 1.50 \times 10^{-16} \text{cm}^{-2}$ para la mejor predicción a corto plazo (uno, dos o tres días) del movimiento de las ondas planetarias. Es muy posible que para predicciones a largo plazo, el movimiento de las ondas planetarias sea mejor predicho con un valor de $\lambda^2 = 5.88 \times 10^{-16} \text{cm}^{-2}$ que con un valor de $\lambda^2 = 1.50 \times 10^{-16} \text{cm}^{-2}$, dado que la velocidad de fase de las ondas planetarias se reduce apreciablemente al usar el primer valor de λ^2 en vez del segundo. Por otro lado, el usar valores grandes de λ^2 puede proporcionar una mayor estabilidad en la integración numérica de la ecuación de vorticidad no adiabática (3.136) en un período tan largo como un mes.

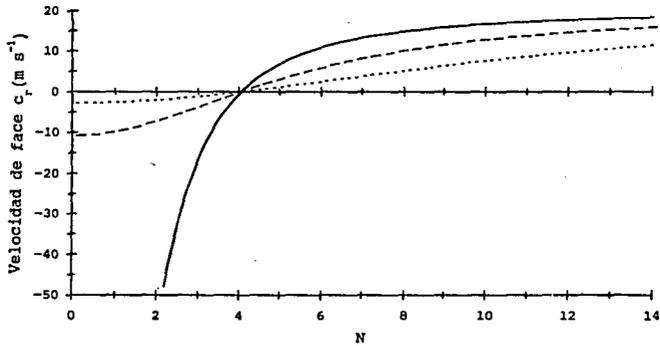


Figura 6.1. Velocidad de fase (c_p), en m s^{-1} , como una función del número de ondas N en $\phi_0 = 45^\circ$. La línea sólida corresponde a $\lambda^2 = 0$, la línea a trazos a $\lambda^2 = 1.50 \times 10^{-16} \text{cm}^{-2}$ y la línea a puntos a $\lambda^2 = 5.88 \times 10^{-16} \text{cm}^{-2}$.

La figura 6.2 muestra la razón de amortiguamiento de las ondas internas de Rossby (kc_1), en $10^{-6}s^{-1}$, como una función del número de ondas N en $\varphi = 45^\circ$. La línea sólida corresponde a $\lambda^2 = 0$, la línea a trazos a $\lambda^2 = 1.50 \times 10^{-16} cm^{-2}$ y la línea a puntos a $\lambda^2 = 5.88 \times 10^{-16} cm^{-2}$. Los valores de kc_1 son calculados para $C_0 = 8.32 \times 10^{-6} s^{-1}$. En ondas de escala planetaria ($N = 1$), la razón de amortiguamiento es $-2.65 \times 10^{-7} s^{-1}$ para $\lambda^2 = 1.50 \times 10^{-16} cm^{-2}$, que corresponde a un período de 275 días; mientras que para $\lambda^2 = 5.88 \times 10^{-16} cm^{-2}$, es de $-6.92 \times 10^{-8} s^{-1}$, que corresponde a un período de 1051 días. Para el caso $\lambda^2 = 0$ la razón de amortiguamiento no depende del número de ondas N y su valor es de $-8.32 \times 10^{-6} s^{-1}$, que corresponde a un período de 8.7 días. En ondas de escala sinóptica ($N = 8$), la razón de amortiguamiento para $\lambda^2 = 1.50 \times 10^{-16} cm^{-2}$, es de $-5.64 \times 10^{-6} s^{-1}$, que corresponde a un período de 13 días; en cambio para $\lambda^2 = 5.88 \times 10^{-16} cm^{-2}$, es de $-2.91 \times 10^{-6} s^{-1}$, que corresponde a un período de 25 días.

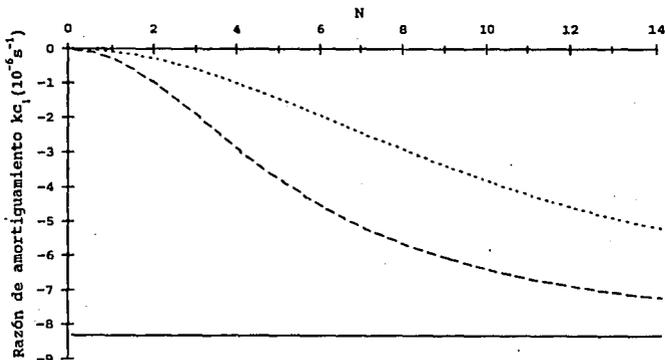


Figura 6.2. Razón de amortiguamiento (kc_1), en $10^{-6}s^{-1}$, como una función del número de ondas N en $\varphi = 45^\circ$. La línea sólida corresponde a $\lambda^2 = 0$, la línea a trazos a $\lambda^2 = 1.50 \times 10^{-16} cm^{-2}$ y la línea a puntos a $\lambda^2 = 5.88 \times 10^{-16} cm^{-2}$.

6.2 La Integración en el Tiempo de las Ecuaciones.

En la versión usual del MTC, las ecuaciones de conservación de energía térmica en la troposfera (3.100) y en la superficie de los océanos (4.5) y continentes (4.5a), son usadas como ecuaciones básicas de pronóstico a un mes. La variable básica predicha es la temperatura, tanto de la atmósfera (T) como la de océanos y continentes (T_s). Como hemos dicho, la presión P, es una variable que se prescribe usando su valor normal observado P_{Nob} .

Ahora bien, dado que las temperaturas y las funciones de calentamiento son cantidades promediadas sobre períodos largos de tiempo (un mes o una estación), la solución a un mes de las ecuaciones de conservación de energía térmica en la troposfera (3.100) y los océanos (4.5), puede ser obtenida en uno o pocos pasos de tiempo. Es así que las ecuaciones (3.100) y (4.5) son integradas con un esquema implícito, para tener estabilidad numérica, y usando un sólo paso de tiempo de un mes (Adem, 1964b; 1970b).

Por su carácter dinámico la ecuación de vorticidad potencial (3.136) no puede ser integrada con un sólo paso de tiempo de un mes, sino que requiere de varios pasos de tiempo mucho más pequeños. En la solución de la ecuación de vorticidad potencial sin forzamientos ni disipación dada por:

$$(\nabla^2 - \lambda^2) \frac{\partial P}{\partial t} + \mathcal{W}_\psi \cdot \nabla (\nabla^2 P) + J(P, \mathcal{L}) = 0 \quad (6.8)$$

se requieren pasos de tiempo de 1/2 a 1 hora para una rejilla regular de unos 400 km sobre la que se integra espacialmente la ecuación (6.8) (Haltiner, 1980).

En predicción a corto plazo (1 a 3 días), es usual tratar a la ecuación (6.8) como una ecuación de Helmholtz para la tendencia de la presión, es decir:

$$(\nabla^2 - \lambda^2) \frac{\partial P}{\partial t} = F(P) \quad (6.9)$$

donde

$$F(P) = -W_0 \cdot \nabla (V^2 P) - J(P, f) \quad (6.10)$$

Dada la presión inicial y por consiguiente la función $F(P)$, la solución de la ecuación (6.9) proporciona la tendencia inicial y la presión puede ser extrapolada hacia adelante usando diferencias finitas centradas. Es decir, en el paso de tiempo m se tiene que:

$$P_{m+1} = P_{m-1} + 2\Delta t \left(\frac{\partial P}{\partial t} \right)_m \quad (6.11)$$

Para resolver la ecuación (6.9) sobre una región limitada de la Tierra, $\partial P / \partial t$ debe ser conocida en las fronteras. En la predicción sobre el Hemisferio Norte en proyección estereográfica polar, si las fronteras están cerca del ecuador $\partial P / \partial t$ puede aproximarse a cero sobre las fronteras laterales, es decir se puede suponer que en las fronteras hay persistencia.

Si queremos considerar la ecuación de vorticidad potencial no adiabática (3.136) como una ecuación de Helmholtz para la tendencia de la presión y usar (6.11) para extrapolar la presión hacia adelante en el tiempo hasta completar un mes, entonces es muy posible que se presenten problemas de inestabilidad numérica. Efectivamente, en la predicción a corto plazo los términos de la tendencia de la presión en la ecuación de vorticidad (6.8) no son despreciables, en cambio en la predicción a largo plazo los términos de la tendencia de la presión en la ecuación de vorticidad (3.136) son pequeños comparados con los demás términos. Por esta razón vamos a usar un nuevo esquema de integración para la ecuación (3.136). Este esquema como veremos será casi-implícito.

Hagamos las siguientes consideraciones para llevar a cabo la integración en el tiempo de las ecuaciones del MTCV:

a). En las ecuaciones (3.136), (3.138) y (4.5) las tendencias $\partial P / \partial t$, $\partial T / \partial t$ y $\partial T_s / \partial t$ son reemplazadas respectivamente por $(P - P_p) / \Delta t_2$, $(T - T_p) / \Delta t$ y $(T_s - T_{sp}) / \Delta t$, donde P_p , T_p y T_{sp} son respectivamente los valores de P , T y T_s en el paso de tiempo anterior y Δt y Δt_2 son los intervalos de tiempo tales que $\Delta t = 2\Delta t_2$.

b). En la ecuación (3.136) la temperatura T , de la cual dependen las funciones de calentamiento (ver Capítulo 5), es

aproximada por la temperatura del paso anterior, T_p ; ésto puede resultar una buena aproximación a un esquema completamente implícito si se toma $\Delta t < 1$ mes o si el campo de temperatura es muy persistente.

Usando las consideraciones a) y b) en las ecuaciones (3.138), (3.136) y (4.5), éstas pueden expresarse como:

$$\left(F_{128} v^2 + \bar{F}_2 \right) \left(\frac{T' - T'_p}{\Delta t} \right) + F_{129} J(T', v^2 T') + F_{121} J(P, \mathcal{E}) + F_{122} J(T', \mathcal{E}) - F_8 J(P, T') - F_2 K v^2 T' + F'_{126} \hat{k} \cdot \nabla \times \tau_* = E_T + G_5 + G_2 \quad (6.12)$$

$$\left(v^2 - \lambda^2 \right) \left(\frac{P - P_p}{\Delta t} \right) + v_9 \cdot \nabla (v^2 P) + J(P, \mathcal{E}) + C_0 v^2 P = \lambda_v^2 \frac{R}{f} J(P, T'_p) - \lambda_E^2 \frac{R}{c_v H_0} (E_T + G_5 + G_2)_P \quad (6.13)$$

$$G_2^m D_s \left(\frac{T'_s - T'_{sp}}{\Delta t} \right) = E_s - G_3 - G_2 \quad (6.14)$$

en donde hemos usado el hecho de que $T = T' + T_0$ y $T_s = T'_s + T_{s0}$. En la ecuación (6.13) el subíndice "P" en las funciones de calentamiento indica que estas son calculadas usando la temperatura del mes anterior, T_p , en lugar de la temperatura del mes de la predicción, T . En la ecuación (6.14), $D_s = \rho_s c_s h_s$, y hemos compactado en esta ecuación las dos ecuaciones (4.5) y (4.5a) a través del parámetro G_2^m .

Dado que las funciones de calentamiento son funciones lineales de T' y T'_s , la ecuación (6.14) resulta ser una ecuación algebraica lineal en T' y T'_s . A continuación vamos a resolver dicha ecuación para T'_s ; para tal efecto las funciones de calentamiento G_3 y G_2 se pueden expresar como sigue:

$$G_3 = F'_{38} + F_{41} T'_s + F_{42} T' + F_{43} E_s - F_{41} T'_{SN} - F_{42} T'_N \quad (6.15)$$

$$G_2 = F_{44} + F_{46} T'_s - F'_{46} T' - F_{46} T'_{SN} + F_{46} T'_N \quad (6.16)$$

donde

$$\begin{aligned}
 F'_{38} &= G_{3N} - (1 - G_2^u)(1-d_7)E_{5N}(G_3)_0^1 \\
 F_{41} &= (G_3)_0^1 G_2^u K_4 B |W_{aN}|(0.981) \\
 F_{42} &= -(U_N / 0.981)F_{41} \\
 F_{43} &= (G_3)_0^1 (1 - G_2^u)(1-d_7) \quad (6.18) \\
 F_{44} &= G_{2N} \\
 F_{46} &= (G_2)_0^1 [G_2^u K_2 + (1 - G_2^u) K_3] |W_{aN}|
 \end{aligned}$$

Sustituyendo la fracción de nubes dada por (5.8) en la expresión (5.2) para E_5 , se tiene:

$$E_5 = F_{48} + F_{35}T' + F_{36}T'_S + F'_{49}d_2(c)_0^1(G_5 - G_{5N}) \quad (6.19)$$

donde

$$\begin{aligned}
 F_{48} &= F_{34} + F'_{34}c_N + (Q + q)_0[1 - (1 - k)c_N] (1 - \alpha_s) \\
 F_{49} &= -(Q + q)_0(1 - k) (1 - \alpha_s) \quad (6.20) \\
 F'_{49} &= F_{49} + F'_{34}
 \end{aligned}$$

Sustituyendo (6.19) en (6.15), y la ecuación resultante de G_3 se sustituye junto con (6.16) y (6.19) en la ecuación termodinámica (6.14), se encuentra que:

$$T'_S = F_{72} + F_{73}T' + F_{75}(c)_0^1 d_7(G_5 - G_{5N}) + F_{76}T'_{5N} + F_{77}T'_N \quad (6.21)$$

donde

$$\begin{aligned}
F_{71} &= G_2'' D_5 (\Delta t)^{-1} - (1 - F_{43}) F_{36} + F_{41} + F_{46} \\
F_{72} &= [G_2'' D_5 (\Delta t)^{-1} T'_{SP} - F'_{38} - F_{44} + (1 - F_{43}) F_{48}] / F_{71} \\
F_{73} &= [(1 - F_{43}) F_{35} - F_{42} + F_{46}] / F_{71} \\
F_{75} &= (1 - F_{43}) F'_{49} / F_{71} \\
F_{76} &= (F_{41} + F_{46}) / F_{71} \\
F_{77} &= (F_{42} - F_{46}) / F_{71}
\end{aligned} \tag{6.22}$$

La relación (6.21) expresa a T'_5 como una función algebraica lineal de T' . Para el caso en que se calcula el valor normal de T'_5 de (6.21) se tiene que $(G_2)_0^1 = (G_3)_0^1 = (G_5)_0^1 = (c)_0^1 = 0$, en este caso, los últimos tres términos del lado derecho de (6.21) son cero y por consiguiente:

$$T'_{5N} = F_{72} + F_{73} T'_N \tag{6.23}$$

donde T'_N es el valor normal de T' calculado previamente, y F_{72} y F_{73} están dadas por (6.22) para el caso normal. Calculada T'_{5N} de (6.23) se procede a calcular T'_5 de (6.21).

En (6.12) el calentamiento total $(E_T + G_5 + G_2)$ es una función lineal de T' y sus primeras derivadas espaciales, así como de T'_5 . Dado que T'_5 está relacionada con T' por medio de (6.21), entonces el calentamiento total resulta ser una función lineal de T' y de sus primeras derivadas espaciales. Vamos a proceder a determinar el calentamiento total; para tal efecto sustituimos la fracción de nubes dada por (5.8) en E_T dado por (5.1), y a la relación resultante de E_T se le suman las de G_5 y G_2 dadas por (5.7) y (6.16), respectivamente. En el calentamiento total resultante se sustituye T'_5 dada por (6.21), llegando a la siguiente expresión para el calentamiento total:

$$E_T + G_5 + G_2 = F_{80} T' + F_{79} F_{69} \frac{\partial T'}{\partial X} + F_{79} F_{70} \frac{\partial T'}{\partial Y} + F_{81} \tag{6.24}$$

donde

$$F_{68} = (G_5)_0^1 b'$$

$$F_{69} = (G_5)_0^1 d''$$

$$F_{70} = (G_5)_0^1 c''$$

$$F_{7B} = F_{32} + F'_{32} c_N + F_{46}$$

$$F_{79} = (c)_0^1 d_2 (F_{78} F_{75} + F'_{50} + b_3 I) + 1 \quad (6.25)$$

$$F_{80} = F_{31} - F_{46} + F_{78} F_{73} + F_{79} F_{68}$$

$$F_{81} = F_{30} + F_{44} + F_{78} F_{72} + G_{5N} + a_2 I + (F_{78} F_{76} - F_{46}) T'_{5N}$$

$$+ c_N (F'_{30} + b_3 I) + (F_{78} F_{77} + F_{46} - F_{79} F_{68}) T'_N$$

$$- F_{79} F_{69} \frac{\partial T'_N}{\partial X} - F_{79} F_{70} \frac{\partial T'_N}{\partial Y}$$

Finalmente, sustituyendo el rotacional del esfuerzo del viento en superficie dado por (5.29) y el calentamiento troposférico dado por (6.24) en la ecuación termodinámica (6.12), y (6.24) con la consideración b) en la ecuación de vorticidad potencial (6.13), llegamos a las siguientes dos ecuaciones diferenciales acopladas:

$$F_{91} J(T', v^2 T') + K_1 v^2 T' + F_{87} \frac{\partial T'}{\partial X} + F_{88} \frac{\partial T'}{\partial Y} + F_{89} T' + F_{90} = 0 \quad (6.26)$$

$$F_{94} J(P, v^2 P) + C_1 v^2 P + F_{97} \frac{\partial P}{\partial X} + F_{98} \frac{\partial P}{\partial Y} + F_{99} P + F_{100} = 0 \quad (6.27)$$

en donde

$$F_{82} = \bar{F}_2$$

$$F_{83} = -F_2$$

$$F'_{84} = \bar{F}_{122} \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$F'_{85} = -\bar{F}_{122} \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$F_{84} = \left[D_{v1} \left(F_8 \frac{\partial P_{Nob}}{\partial y} + F_8'' \frac{\partial T_{Nob}}{\partial y} \right) - D_{v2} \frac{\partial T'_N}{\partial y} + D_{v9} F_8 \frac{\partial P}{\partial y} \right] + F'_{84}$$

$$F_{85} = -\left[D_{v1} \left(F_8 \frac{\partial P_{Nob}}{\partial x} + F_8'' \frac{\partial T_{Nob}}{\partial x} \right) - D_{v2} \frac{\partial T'_N}{\partial x} + D_{v9} F_8 \frac{\partial P}{\partial x} \right] + F'_{85}$$

$$F_{87} = (F_{84} - F_{79}, F_{69}) / F_{83}$$

$$F_{88} = (F_{85} - F_{79}, F_{70}) / F_{83} \quad (6.28)$$

$$F_{89} = (F_{82}/\Delta t - F_{80}) / F_{83}$$

$$F_{90} = \frac{1}{F_{83}} \left[-F_{81} + \bar{F}_{121} (D_{v1} J(P_{Nob}, f) + D_{v9} J(P, f)) \right. \\ \left. + F_{126} (D_{v1} \nabla^2 P_{Nob} + D_{v9} \nabla^2 P) - (F_{128} \nabla^2 T'_P + F_{82} T'_P) / \Delta t \right]$$

$$K_r = K + (F_{127} + F_{128}/\Delta t) / F_{83}$$

$$F_{126} = \frac{\bar{F}'_{126}}{f_0} \left(\frac{T_{a0}}{T_0} \right)^\alpha C_D |V_{aN}|$$

$$F_{127} = -\frac{\bar{F}'_{126}}{f_0} \frac{g P_0 H_0}{R T_0^2} \left(\frac{T_{a0}}{T_0} \right)^{\alpha-1} C_D |V_{aN}|$$

$$F_{94} = \frac{R T_0}{f_0 P_0}$$

$$F_{97} = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\lambda_v^2 R}{f} \frac{\partial T'_P}{\partial y}$$

$$F_{98} = -\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\lambda_v^2 R}{f} \frac{\partial T'_P}{\partial x}$$

$$F_{99} = -\lambda^2 / \Delta t_2$$

$$F_{100} = - (V^2 P_p - \lambda^2 P_p) / \Delta t_2 + \frac{\lambda_E^2 R}{c_v H_0} \left\{ F_{80} T'_P + F_{79} F_{69} \frac{\partial T'_P}{\partial x} + F_{79} F_{70} \frac{\partial T'_P}{\partial y} + F'_{81} \right\} \quad (6.29)$$

$$C_T = C_0 + (\Delta t_2)^{-1}$$

$$F'_{81} = F_{30} + F_{44} + F_{78} F_{72} + G_{5N} + a_2 I + (F_{78} F_{76} - F_{46}) T'_{5N} + c_N (F'_{30} + b_3 I) + (F_{78} F_{77} + F'_{46} - F_{79} F_{68}) T'_{NP} - F_{79} F_{69} \frac{\partial T'_{NP}}{\partial x} - F_{79} F_{70} \frac{\partial T'_{NP}}{\partial y}$$

A partir de este momento, y sólo por comodidad, en algunas ocasiones llamaremos temperaturas a sus desviaciones las cuales, como hemos visto, llevan una prima como superíndice.

En la ecuación termodinámica (6.26) hemos incluido la parametrización del transporte horizontal de calor por viento medio dada por (5.17), que corresponde a la opción 3 del capítulo 5, también hemos incluido las opciones 1 y 2 de dicho capítulo; de esta manera, hemos introducido los parámetros opcionales D_{v1} , D_{v2} y D_{v9} en F_{84} , F_{85} y F_{90} . Así, por ejemplo, si incluimos la parametrización (5.17) entonces la ecuación de vorticidad (6.27) no es utilizada y sólo utilizamos la ecuación (6.26) en donde debemos tomar $D_{v1} = 1$ y $D_{v2} = D_{v9} = 0$, para el caso en que calculemos la temperatura normal (T'_N), y $D_{v1} = D_{v2} = 1$ y $D_{v9} = 0$, para el caso en que calculemos la temperatura anómala (T'). Si la

parametrización (5.17) no es usada entonces la presión P debe ser calculada de la ecuación (6.27); en tal caso, debemos usar $D_{v1} = D_{v2} = 0$ y $D_{v9} = 1$ para el caso normal y anómalo.

En F'_{97} , F'_{98} y F'_{100} , de acuerdo con la consideración b), usamos la temperatura del mes anterior $T'_{p'}$, en lugar de la temperatura del mes actual T'_{81} . F'_{81} es idéntica a F'_{81} dada en las relaciones (6.25) sólo que en lugar de usar en F'_{81} la temperatura normal del mes actual T'_{N} , hemos usado la temperatura del mes anterior T'_{NP} , de acuerdo con la consideración b).

Las ecuaciones (6.21), (6.26) y (6.27) serán usadas en este trabajo como ecuaciones de pronóstico a un mes; las variables básicas pronosticadas serán la temperatura de la superficie de la Tierra T'_s , la temperatura troposférica T' y la presión atmosférica P. Con estas variables básicas podremos calcular las funciones de calentamiento dadas en la Sección 5.1 y la circulación de la atmósfera dada por las ecuaciones (3.53), (3.54) y (3.89).

La temperatura de la superficie dada por (6.21) depende del albedo de la superficie α_s , el cual presenta una variabilidad mensual importante en las regiones cercanas a los polos debido a la variabilidad mensual en la distribución del hielo y de la nieve. Dado que no contamos con una ecuación adicional para pronosticar la variabilidad en el albedo de la superficie, entonces prescribiremos el albedo como un parámetro usando su valor normal observado o el albedo observado en la última semana del mes previo al de la predicción por ser el dato más reciente al mes de la predicción (Adem, 1964b); lo cual resulta ser una buena aproximación si el exceso de hielo y nieve de la última semana del mes previo persiste durante todo el mes de la predicción.

6.3 Integración Espacial de las Ecuaciones del MTCV.

Tenemos que (6.26) y (6.27) son ecuaciones diferenciales parciales no lineales. Dichas ecuaciones serán resueltas en diferencias finitas utilizando el método de sobre-relajación de Liebmann, descrito en detalle por Thompson (1961, pág. 92), en una rejilla regular de 1977 puntos sobrepuesta a la proyección estereográfica polar del Hemisferio Norte. La figura 6.3 muestra la región total de integración del modelo y la posición de los puntos de la rejilla; la distancia entre punto y punto es de 408.5 km.

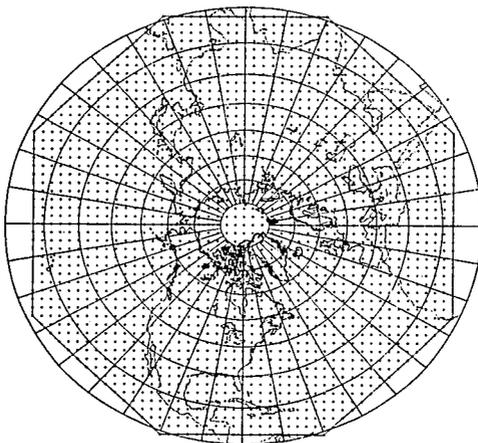


Figura 6.3 región de integración y posición de los puntos de la rejilla.

Para expresar en diferencias finitas a los jacobianos en las ecuaciones (6.26) y (6.27) y en el coeficiente F_{90} de las relaciones (6.2B) usaremos el Jacobiano de Arakawa (Haltiner, 1980, pág. 175), el cual elimina la inestabilidad numérica debida a los términos no lineales en (6.26) y (6.27).

Para obtener la solución de (6.26) y (6.27) se requieren condiciones de frontera y condiciones iniciales; estas últimas las trataremos en la siguiente sección. Dada la forma de las ecuaciones (6.26) y (6.27) se requieren condiciones de frontera sobre T' y $\nabla^2 T'$ para (6.26), y sobre P y $\nabla^2 P$ para (6.27). La condición de frontera para (6.26) sobre T' es la siguiente:

$$T' = \left(T'_{Nob} [1 - (TC)_0^1] + (T'_{Nob} (FR)_0^1 + T'_{NP} [1 - (FR)_0^1]) (TC)_0^1 \right) [2 - (C)_1^2] \\ + [T'_N + (T'_P - T'_{NP})] [(C)_1^2 - 1] \quad (6.30)$$

donde $T'_{Nob} = T_{Nob} - T_0$; $(TC)_0^1$ es un parámetro igual a cero para el primer paso de tiempo e igual a uno para los subsiguientes pasos de tiempo; $(FR)_0^1$ es un parámetro igual a cero en los puntos del interior de la rejilla y a uno en los puntos de la frontera; $(C)_1^2$ es un parámetro igual a uno para el caso normal en el que se calcula T'_N , y a dos para el caso anómalo en el que se calcula T' . De (6.30) tenemos que en el primer paso de tiempo, en el caso normal $T' = T'_N = T'_{Nob}$ sobre la frontera y en los puntos interiores de la rejilla y en el caso anómalo $T' = T'_N + (T'_P - T'_{NP})$, donde T'_N es la temperatura normal calculada previamente en el caso normal, T'_P es la temperatura del mes anterior y T'_{NP} su correspondiente valor normal. Para los subsiguientes pasos de tiempo y en el caso normal $T' = T'_N = T'_{Nob}$ en los puntos de la frontera y $T' = T'_N = T'_{NP}$ en los puntos interiores, donde ahora T'_{NP} es la temperatura normal calculada en el paso de tiempo anterior, y para el caso anómalo $T' = T'_N + (T'_P - T'_{NP})$ donde ahora T'_P es la temperatura calculada en el paso de tiempo anterior y T'_{NP} su correspondiente valor normal. La condición (6.30) es también utilizada en los puntos interiores como primera estimación de la solución de (6.26) en el proceso de relajación, y permite que los ciclos de relajación sean cada vez menos en cada paso de tiempo debido a que se utilizan valores de

T' relajados en los pasos de tiempo anteriores. Dado que el proceso de relajación no afecta los valores de T' en los puntos de la frontera, éstos permanecen con su valor inicial, teniendo para la frontera persistencia en las anomalías de la temperatura troposférica, $(T'_P - T'_{NP})$.

La condición de frontera usual en el MTC (Adem, 1964b) se determina de la ecuación termodinámica clásica (3.100) anulando los transportes horizontales de calor; dicha condición de frontera está dada por:

$$T' = T'_{Nob} [2 - (C)_1^2] + [T'_N + (T'_B - T'_{NB})][(C)_1^2 - 1] \quad (6.30a)$$

donde $T'_B = -F_{90} / F_{89}$ y T'_{NB} es su valor normal correspondiente.

La condición de frontera para (6.27) sobre P es la siguiente:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = 0 \quad (6.31)$$

lo cual implica que en la frontera:

$$P = P_P \quad (6.31a)$$

La condición de frontera (6.31a) es considerada tanto para el caso normal como para el caso anómalo. La ecuación (6.31a) es también utilizada en los puntos interiores de la rejilla como una primera estimación de la solución de (6.27) en el proceso de relajación. De nuevo diremos que, como los valores de la frontera no son modificados en la relajación que se lleva a cabo en cada paso de tiempo, en la frontera hay condiciones de persistencia en la presión.

La condición de frontera para (6.26) sobre $\nabla^2 T'$ se obtiene aplicando el operador laplaciano a la condición (6.30) y despues extrapolando a los puntos de la frontera el valor del $\nabla^2 T'$ de los puntos interiores vecinos más cercanos. La figura 6.4 muestra claramente dicha extrapolación.

La condición de frontera para (6.27) sobre el $\nabla^2 P$ se obtiene de una manera similar a la condición de frontera para (6.26) sobre el $\nabla^2 T'$.

6.4 El Método de Predicción de las Anomalías Mensuales en el MTCV.

El método que usaremos en este trabajo para pronosticar las anomalías mensuales de las variables atmosféricas es similar al desarrollado por Adem (1964b) para el MTC. A continuación expondremos dicho método.

Consideremos que la longitud del paso de tiempo Δt_2 , en la ecuación (6.27) es tal que $\Delta t_2 = \Delta t/M$ donde M es un entero mayor que cero, de manera que se requieren M pasos de tiempo de tamaño Δt_2 para lograr un paso de tiempo de tamaño Δt ; ahora bien, si $\Delta t_0 = 1$ mes y $\Delta t = \Delta t_0/N$, donde N es un entero mayor que cero, entonces se requieren N pasos de tiempo de tamaño Δt para lograr un paso de tiempo de tamaño Δt_0 .

Por lo tanto, para obtener una predicción a un mes se procede de la siguiente manera:

En el primer paso de tiempo de tamaño Δt y para el caso normal:

i) Usando M pasos de tiempo de tamaño Δt_2 se calcula la presión normal, P_N , de la ecuación (6.27) usando la presión normal del mes previo como condición inicial y usando condiciones de frontera normales, manteniendo fija, durante los M pasos de tiempo, la temperatura inicial normal del mes previo, T'_{NP} .

ii) Usando un sólo paso de tiempo de tamaño Δt , se calcula la temperatura normal, T'_N , de la ecuación (6.26), utilizando la presión normal calculada en i) junto con la temperatura troposférica normal del mes previo, T'_{NP} , y la temperatura normal de la superficie del océano del mes previo, como condiciones iniciales y usando condiciones de frontera normales.

iii) La temperatura normal, T'_N , calculada en ii) es utilizada para calcular la temperatura normal de la superficie de océanos y continentes, T'_{SN} , usando la relación (6.23) que es la expresión reducida de (6.21) para el caso normal.

Calculadas las temperaturas normales de la troposfera y de la superficie, así como la presión normal se procede con el caso anómalo:

iv) Usando M pasos de tiempo de tamaño Δt_2 se calcula la presión anómala, P , de la ecuación (6.27), usando la presión

anómala del mes previo, P_p , y condiciones de frontera anómalas, manteniendo fija, en los M pasos de tiempo, la temperatura inicial, T'_i , la temperatura inicial normal, T'_{NP} y la temperatura normal de la superficie, T'_{SN} , calculada en iii).

v) Usando un sólo paso de tiempo de tamaño Δt se calcula la temperatura anómala, T' , de la ecuación (6.26), utilizando la presión anómala calculada en iv) junto con la temperatura troposférica anómala del mes previo, T'_p , y la temperatura anómala de la superficie del océano del mes previo, T'_{SP} , como condiciones iniciales, y usando condiciones de frontera anómalas, así como las temperaturas normales calculadas T'_N y T'_{SN} de las que depende el caso anómalo.

vi) La temperatura anómala T' calculada en v) junto con la temperatura normal calculada T'_N , son utilizadas para calcular de (5.7) el calor latente liberado por la condensación del vapor de agua en las nubes y de (5.8) la cubierta fraccional de nubes. Usando además la temperatura normal calculada T'_{SN} , se calculan de (6.21) la temperatura anómala de la superficie de océanos y continentes, T'_s , de (5.1) y (5.2) los excesos de radiación en la capa troposférica y en la superficie, y de (5.9) y (5.10) el calor sensible dado a la atmósfera por transporte vertical turbulento y el calor latente perdido por la evaporación en la superficie.

Para los subsecuentes pasos de tiempo de tamaño Δt este procedimiento se repite, tomando en cuenta que en cada paso de tiempo las nuevas condiciones iniciales son las del paso de tiempo anterior.

Observamos que en cada paso de tiempo de tamaño Δt , se calculan primero las temperaturas normales T'_N y T'_{SN} y la presión normal P_N y después las temperaturas anómalas T' y T'_s y la presión anómala P , así como los calentamientos asociados con las temperaturas. Por consiguiente, en cada paso de tiempo de tamaño Δt se requiere resolver por relajación $2M$ veces la ecuación de vorticidad (6.27), M veces para el caso normal y M para el anómalo, y 2 veces la ecuación termodinámica (6.26), una para el caso normal y otra para el anómalo. De esta manera, en una predicción a un mes se resolverán $2MN$ veces la ecuación de vorticidad y $2N$ veces la ecuación termodinámica.

Al finalizar los N pasos de tiempo, las anomalías mensuales de las temperaturas T' y T'_s , así como las de los calentamientos, se obtienen restando los valores normales calculados de los valores anómalos calculados en el N-ésimo paso de tiempo.

También al finalizar los N pasos de tiempo, la circulación horizontal de la atmósfera, en cualquier nivel $0 \leq z \leq H_0$, se obtiene usando las ecuaciones (3.53) y (3.54) con el parámetro de Coriolis f en lugar de f_0 . La velocidad vertical no será calculada en este trabajo; sin embargo, puede ser calculada, en cualquier nivel $0 \leq z \leq H_0$, de (3.89) usando diferencias finitas para las derivadas en el tiempo, como por ejemplo: $\partial v^2_P / \partial t = (v^2_P - v^2_{P_p}) / \Delta t$.

CAPITULO 7.

DETERMINACION Y UTILIZACION DE LAS VARIABLES EN EL NIVEL DE 700 MILIBARIOS.

7.1 Utilización de los Datos en el nivel de 700 Milibarios.

En la sección anterior vimos que para realizar una predicción a un mes requerimos de los valores, normales y anómalos, de la temperatura de la superficie de los océanos y de la temperatura y la presión en el tope de la capa troposférica del modelo observados en el mes previo al de la predicción. Desde luego que para verificar nuestras predicciones necesitamos conocer también el valor observado de estos campos en el mes de la predicción.

No disponemos de valores observados de temperatura y presión en el tope de la capa troposférica del modelo; sin embargo, estos pueden ser determinados a partir de la temperatura y la altura en el nivel de 700 mb, utilizando las fórmulas (3.13) con β constante y (3.17).

Utilizando (3.13), la temperatura normal observada en el nivel de 700 mb se puede expresar como:

$$T_{7\text{Nob}} = -\beta (H_{7\text{Nob}} - H_0) + T_{\text{Nob}} \quad (7.1)$$

donde $T_{7\text{Nob}}$ y $H_{7\text{Nob}}$ son, respectivamente, la temperatura y la altura normales observadas en el nivel de 700 mb y T_{Nob} es la temperatura normal observada en $z = H_0$, la cual puede ser obtenida de (7.1). Es decir:

$$T_{\text{Nob}} = -\beta (H_0 - H_{7\text{Nob}}) + T_{7\text{Nob}} \quad (7.2)$$

Los 700 mb de presión pueden ser expresados, usando (3.17), en la siguiente manera:

$$700 \text{ mb} = P_{\text{Nob}} \left(\frac{T_{7\text{Nob}}}{T_{\text{Nob}}} \right)^\alpha \quad (7.3)$$

donde P_{Nob} es la presión normal observada en $z = H_0$ y donde T_{Nob} está dada por (7.2). De (7.3) podemos calcular P_{Nob} . Es decir:

$$P_{\text{Mob}} = (700 \text{ mb}) \left(\frac{T_{\text{Mob}}}{T_{7\text{Mob}}} \right)^\alpha \quad (7.4)$$

La temperatura anómala observada en $z = H_0$ puede ser obtenida de una manera similar a (7.2), pero usando temperatura y altura anómalas en 700 mb. Es decir:

$$T_{\text{ob}} = -\beta (H_0 - H_{7\text{ob}}) + T_{7\text{ob}} \quad (7.5)$$

donde T_{ob} es la temperatura anómala observada en $z = H_0$, y $T_{7\text{ob}}$ y $H_{7\text{ob}}$ son, respectivamente, la temperatura y la altura anómalas observadas en 700 mb.

La presión anómala observada en $z = H_0$ puede ser obtenida de una manera similar a (7.4), pero usando temperatura y altura anómalas en 700 mb. Esto es:

$$P_{\text{ob}} = (700 \text{ mb}) \left(\frac{T_{\text{ob}}}{T_{7\text{ob}}} \right)^\alpha \quad (7.6)$$

donde T_{ob} está dada por (7.5).

La desviación de T_{ob} del valor constante T_0 está dada, de acuerdo con (3.45), por:

$$T'_{\text{ob}} = T_{\text{ob}} - T_0 \quad (7.7)$$

donde $T'_{\text{ob}} < T_0$ es la desviación de T_{ob} del valor constante T_0 . El valor T_0 puede ser expresado a partir de (7.5) usando en lugar de $H_{7\text{ob}}$ y $T_{7\text{ob}}$ sus correspondientes valores constantes H_{07} y T_{07} :

$$T_0 = -\beta (H_0 - H_{07}) + T_{07} \quad (7.8)$$

Sustituyendo (7.5) y (7.8) en (7.7), encontramos que:

$$T'_{\text{ob}} = (T_{7\text{ob}} - T_{07}) - \beta (H_{7\text{ob}} - H_{07}) \quad (7.9)$$

Los valores de H_{07} y T_{07} son, respectivamente, 3000 m y 268 °K, que resultan de un promedio anual y Hemisférico entre 15° y 90° norte. En promedio se tiene que:

$$| -\beta (H_{70b} - H_{07}) | \approx 1^\circ \text{K}$$

$$| T_{70b} - T_{07} | \approx 15^\circ \text{K} \quad (7.10)$$

donde las barras paralelas verticales significan valores absolutos. De (7.10) vemos que del lado derecho de (7.9) el segundo término resulta despreciable al compararlo con el primer término, por lo que (7.9) puede aproximarse a:

$$T'_{ob} = T_{70b} - T_{07} \quad (7.11)$$

De la misma manera para el caso normal se tiene que:

$$T'_{Nob} = T_{7Nob} - T_{07} \quad (7.12)$$

Las relaciones (7.4), (7.6), (7.11) y (7.12) pueden ser usadas para determinar las condiciones iniciales y de frontera a partir de los campos de temperatura y altura en 700 mb. En las condiciones iniciales se usan la temperatura y altura en 700 mb del mes previo, tanto para el caso normal como para el anómalo.

En cuanto a las condiciones de frontera el usar (7.12) en (6.30) implica que en la frontera, de acuerdo con la segunda expresión de (7.10), tendríamos desviaciones del orden de 15°K lo cual puede generar inestabilidad numérica al calcular la solución de la ecuación (6.26). Por esta razón, en lugar de usar en (7.11) y (7.12) el valor de T_{07} , usaremos un valor más alto; dicho valor es 278.75 que resulta de promediar el valor característico de T_{7Nob} en la frontera y el valor de T_{07} .

Por lo tanto en lugar de usar (7.11) y (7.12) usaremos las siguientes relaciones:

$$T'_{ob} = T_{70b} - 278.75^\circ \text{K} \quad (7.11a)$$

$$T'_{Nob} = T_{7Nob} - 278.75^\circ \text{K} \quad (7.12a)$$

7.2 Determinación de la Altura del Nivel de 700 mb Usando la Condición de Equilibrio Hidrostático.

La altura de los 700 mb es una variable que no se pronostica directamente en el MTC; sin embargo puede ser calculada a partir de la ecuación de equilibrio hidrostático (3.60), del perfil de temperatura (3.13) con β constante y de la fórmula (3.17).

En la figura 7.1 P , T y ρ son, respectivamente, la presión, temperatura y densidad en la altura constante H_0 ; H , y T_U son, respectivamente, la altura y la temperatura de la superficie isobárica $P_0 = 310$ mb; P_7 , T_L y ρ_L son, respectivamente, la presión, la temperatura y la densidad a la altura H_{07} ; y H_7 y T_7 son, respectivamente, la altura y la temperatura de la superficie isobárica $P_{07} = 700$ mb.

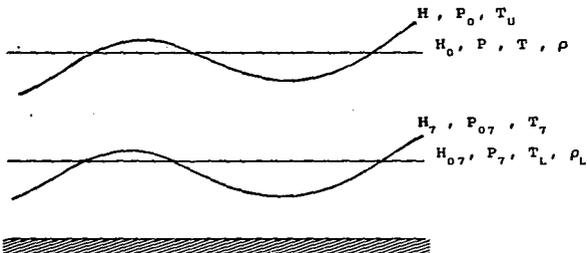


Figura 7.1. Superficies isobáricas $P_{07} = 700$ mb y $P_0 = 310$ mb, así como las correspondientes alturas $H_{07} = 3$ km y $H_0 = 9$ km, de los niveles cercanos a dichas superficies.

Integrando la ecuación hidrostática (3.60) de $z = H_0$ a $z = H$, obtenemos que:

$$P_0 - P = - \rho g(H - H_0) \quad (7.13)$$

donde $\rho = P/RT$.

De (7.13) tenemos que:

$$H = H_0 + (P - P_0) / \rho g \quad (7.14)$$

Ajustando el valor de la constante H_0 , la relación (7.14) puede ser usada para estimar la altura de la superficie isobárica de los 300 mb que es una variable comúnmente medida en meteorología.

De la relación (3.13) podemos determinar T_U ; es decir:

$$T_U = - \beta (H - H_0) + T \quad (7.15)$$

donde H está dada por (7.14).

De (7.15) tenemos que:

$$T = T_U + \beta (H - H_0) \quad (7.16)$$

Usando (3.13) y (7.16) podemos determinar T_L ; es decir:

$$T_L = T_U + \beta (H - H_0)$$

De la fórmula (3.17) se tiene que :

$$P_0 = P \left(\frac{T_U}{T} \right)^\alpha \quad (7.18)$$

de donde

$$P = P_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^\alpha \quad (7.19)$$

Usando (3.13) y (7.19) se tiene que:

$$P_7 = P_0 \left(\frac{T_L}{T_0} \right)^\alpha \quad (7.20)$$

Usando la ecuación de estado a la altura H_{07} , es decir: $P_7 = \rho_L R T_L$, se tiene que:

$$\rho_L = \frac{P_0}{R T_0} \left(\frac{T_L}{T_0} \right)^\alpha \quad (7.21)$$

Finalmente, integrando la ecuación de equilibrio hidrostático (3.60) de la altura $z = H_{07}$ a $z = H_7$, se tiene que:

$$H_7 = H_{07} + (P_7 - P_{07}) / \rho_L g \quad (7.22)$$

donde P_7 y ρ_L están dadas, respectivamente, por (7.20) y (7.21).

La fórmula (7.22) será utilizada para calcular la altura del nivel de 700 mb a partir de la temperatura y la presión en $z = H_0$ calculadas por el modelo.

La fórmula (7.22) se debe a Adem (comunicación personal) y ha sido derivada de manera que en (7.13) se pueda usar la aproximación de la isopícna (3.101); es decir, si no se cuenta con el cálculo de la presión P entonces puede usarse la aproximación: $P = \rho_0 RT$ en (7.13), encontrando que:

$$H = H_0 + \frac{R}{g} (T - T_0) \quad (7.23)$$

de esta manera (7.23) puede ser usada en lugar de (7.14).

7.3 Determinación del Viento Geostrófico en el Nivel de 700 mb.

Las componentes de la velocidad del viento geostrófico en el nivel de 700 mb pueden ser obtenidas de (3.53) y (3.54) cambiando f_0 por f y tomando $z = 3$ km, que corresponde aproximadamente al nivel de 700 mb, es decir:

$$u_7 = - \frac{R T_{07}}{f P_0} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{(H_0 - H_{07})}{f T_0} g \frac{\partial T}{\partial y} \quad (7.24)$$

$$v_7 = \frac{R T_{07}}{f P_0} \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{(H_0 - H_{07})}{f T_0} g \frac{\partial T}{\partial x} \quad (7.25)$$

donde u_7 y v_7 son, respectivamente, las componentes de la velocidad del viento en el nivel de 700 mb en las direcciones X, y Y.

Otra manera alternativa para calcular la velocidad del viento geostrófico en el nivel de 700 mb es directamente a partir de la altura del nivel de 700 mb (Adem, 1967):

$$u_7 = - \frac{g}{f} \frac{\partial H_7}{\partial y} \quad (7.26)$$

$$v_7 = \frac{g}{f} \frac{\partial H_7}{\partial x} \quad (7.27)$$

donde H_7 es calculada usando la fórmula (7.22).

CAPITULO 8.

APLICACION DEL MTCV A LA PREDICCIÓN NUMÉRICA DEL TIEMPO A LARGO PLAZO.

8.1 Los Campos Utilizados en los Experimentos Numéricos.

Vamos a llevar a cabo una serie de experimentos numéricos encaminados a pronosticar las anomalías de la temperatura, de la altura y de las componentes zonal y meridional de la velocidad del viento en los 700 mb. Los experimentos se pueden dividir en dos grupos; en el primer grupo vamos a incorporar una dinámica implícita o a prescribir la presión P por su valor normal observado, desacoplando la ecuación termodinámica (6.26) de la ecuación de vorticidad (6.27), y en el segundo grupo vamos a incorporar una dinámica explícita utilizando las ecuaciones acopladas (6.26) y (6.27).

Para llevar a cabo los experimentos usaremos, como ya lo hemos mencionado, la fórmula de Milankovitch (Adem, 1962) para obtener la insolación media mensual, I , y los valores normales o climáticos de la radiación de onda corta total mensual recibida con cielo claro, $(Q + q)_0$; de la absorción fraccionaria de la insolación por vapor de agua y polvo en la tropósfera, a_2 , y por nubes, b_3 ; del albedo de la superficie, α_n ; de la cubierta fraccional de nubes, c_n ; de las funciones de calentamiento G_2 , G_3 y G_4 ; de la rapidez del viento en superficie, $|V_{an}|$; de la humedad relativa U_n ; de la temperatura de la superficie; de los océanos del mes previo; y de la temperatura y altura de los 700 mb del mes previo y del mes de la predicción. Estos campos climáticos están clasificados por estaciones y se encuentran en cuatro archivos del MTC que llevan los nombres de las estaciones del año, las fuentes de donde fueron obtenidos están referidas en varios artículos (Adem, 1964a, 1964b, 1985; Clapp, 1965).

Los campos anómalos iniciales para llevar a cabo las predicciones han sido preparados por el Centro Nacional Meteorológico y la Administración Nacional del Océano y la Atmósfera de los Estados Unidos; las siglas en inglés son NMC y

NOAA, respectivamente. Dichos campos iniciales corresponden al mes previo al de la predicción y son:

- i) La temperatura de la superficie de los océanos.
- ii) La temperatura en el nivel de 700 mb.
- iii) La altura de la superficie isobárica de 700 mb.
- iv) El albedo de la superficie, basado en la distribución de hielo y nieve en la última semana del mes previo al de la predicción.

Para evaluar nuestros resultados requerimos de los siguientes campos anómalos correspondientes al mes de la predicción:

- i) La temperatura en el nivel de 700 mb.
- ii) La altura de la superficie isobárica de 700 mb.

Disponemos de un archivo que contiene campos anómalos de temperatura de la superficie de los océanos, temperatura en el nivel de 700 mb y albedo de la superficie, para un periodo de 12 meses, de Diciembre 1982 a Noviembre 1983. En lo que respecta a la altura anómala de 700 mb, únicamente contamos con un archivo que contiene 2 meses, Diciembre 1982 y Enero 1983.

Enero 1983 es el mes que hemos seleccionado para realizar las predicciones que corresponden al segundo grupo de experimentos

En la siguiente sección daremos un breve resumen de las condiciones anómalas del año 1983; pero principalmente del invierno 1982-83.

8.2 Las Condiciones Anómalas del Año 1983 (Año de Niño).

El invierno 1982-83 es memorable desde un punto de vista meteorológico por varias razones:

1) La ocurrencia del fenómeno conocido como El Niño, caracterizado principalmente por un fuerte calentamiento de la superficie oceánica del Pacífico ecuatorial, entre las costas peruanas y el Pacífico central, el cual comienza en la primavera de 1982 y tiene su máximo en el invierno 1982-83.

2) Los valores más bajos registrados desde 1935 del índice de la Oscilación del Sur (IOS), definido como la diferencia normalizada en las anomalías mensuales de la presión atmosférica entre Tahití (18°S, 150°W) y Darwin (12°S, 131°E). Este índice está negativamente correlacionado con las anomalías positivas de la temperatura de la superficie oceánica en el Pacífico ecuatorial este (Rasmusson y Carpenter, 1982).

3) Grandes anomalías negativas de altura de 700 mb observadas en el Hemisferio Norte, las cuales ocurren en el Pacífico noreste alrededor de 45°N y 155°W. Dichas anomalías se encuentran entre las más grandes registradas desde 1948.

4) Extraordinarias anomalías positivas en la temperatura de la superficie continental en la mayor parte de América del Norte (35° - 60°N) y Eurasia (40° - 65°N) y sobre dichas regiones, fuertes anomalías positivas en la temperatura y en la altura de los 700 mb.

5) Excesiva precipitación e inundaciones en varias regiones del mundo, con severas sequías en otras.

Las grandes anomalías del invierno 1982-83, asociadas con el calentamiento de las aguas superficiales del Pacífico ecuatorial, continuaron durante la primavera de 1983. Las extraordinarias anomalías negativas de la altura de 700 mb observadas en el Pacífico noreste persistieron hasta principios de la primavera; sin embargo; se empezó a dar un debilitamiento conforme la estación avanzaba.

El gran evento El Niño-La Oscilación del Sur (ENOS), el cual influyó definitivamente en la circulación invernal y primaveral

del Hemisferio Norte en el año de 1983 (Quiroz, 1983), decreció dramáticamente durante el verano y el otoño de 1983; durante el otoño se observó un retorno a los valores normales en la temperatura de la superficie del océano, en la presión atmosférica al nivel del mar, en el viento en 850 mb y en el viento superior en 200 mb sobre la mayor parte del Pacífico tropical.

Las predicciones de las anomalías de la temperatura y de la circulación mensual de la atmósfera con un modelo hemisférico durante un período donde se presenta un evento ENOS, puede tener serias dificultades debido al efecto remoto de las anomalías atmosféricas y oceánicas localizadas en el hemisferio opuesto a aquel donde se integran las ecuaciones del modelo. Sin embargo, este efecto remoto puede ser incorporado a través de las fronteras laterales que limitan la región de integración del modelo, usando condiciones de frontera adecuadas.

8.3 Experimentos Numéricos de Predicción, para el Período Enero - Noviembre 1983, Incorporando una Dinámica Implícita en el MTCV.

En estos experimentos vamos a pronosticar las anomalías de la temperatura de los 700 mb utilizando únicamente la ecuación termodinámica (6.26). Es decir, la ecuación termodinámica (6.26) será desacoplada de la ecuación de vorticidad (6.27), de tres diferentes maneras: a) suponiendo que la densidad en el tope de la capa del modelo es constante y, por lo tanto, el transporte horizontal de calor por viento medio es cero, b) prescribiendo la presión P por su valor normal observado P_{Hob} y c) utilizando una dinámica implícita a través de la parametrización del transporte horizontal de calor por viento medio, dada por (5.17).

Al igual que en trabajos anteriores (Adem, 1964b y 1970b) vamos a resolver la ecuación (6.26) utilizando un solo paso de tiempo de un mes; es decir, vamos a considerar que $\Delta t = \Delta t_0$.

En los cálculos vamos a usar los valores de los parámetros fundamentales del MTCV dados en el Apéndice A.

Para cada mes usaremos un valor diferente para el coeficiente de Austausch, K , el cual será encontrado de manera que el gradiente meridional de temperatura troposférica calculado se parezca lo más posible al observado.

En estos experimentos de predicción utilizaremos las condiciones iniciales i), ii) e iv) referidas en la sección 8.1.

A los modelos con los que realizaremos los experimentos de predicción, que corresponden a los incisos b) y c), y a los experimentos mismos los vamos a denominar por el conjunto de letras MTCVDIN, las iniciales MTCV se refieren a que se usa el modelo termodinámico del clima con vorticidad (MTCV), las letras DI se refieren a que se incorpora una dinámica implícita o se prescribe la presión, P , por lo que únicamente se usa la ecuación (6.26) o versiones simplificadas de dicha ecuación; y la letra N se refiere al número de la versión usada.

Los modelos y experimentos en donde el transporte de calor por viento medio se desprecia y que corresponden al inciso a) los vamos a denotar por las letras MTCVN, donde la ausencia de las letras DI indica que no se incorpora la dinámica en (6.26).

1) Experimento MTCV1.

En este experimento vamos a usar la versión clásica del MTCV; es decir, en (3.140) vamos a considerar que $(CLASIC)_0^1 = 1$, $D_{v1} = D_{v2} = 0$ y $D_{v9} = 0$ tanto para el caso normal como para el anómalo.

Tomando $(CLASIC)_0^1 = 1$ obtenemos automáticamente la versión clásica de la ecuación (3.139), y tomando en (6.28) $D_{v1} = D_{v2} = 0$ y $D_{v9} = 0$ tanto para el caso normal como anómalo, usamos la opción 1 de la sección 5.2. En pocas palabras, en este experimento usaremos la ecuación (3.100) pero despreciaremos el transporte horizontal de calor por viento medio; es decir, el término $-F_0 J(P,T)$.

La condición de frontera que tomaremos será la que usualmente se ha considerado en el MTC; esto es, la dada por (6.30a).

2) Experimento MTCV2.

Este experimento es semejante al experimento MTCV1 sólo que en lugar de usar la condición de frontera (6.30a) usaremos la (6.30), es decir supondremos que en la frontera las anomalías de la temperatura troposférica persisten de un mes al siguiente.

3) Experimento MTCVDI1.

Este experimento es semejante al experimento MTCV2 sólo que en lugar de usar la opción 1 usaremos la opción 2; es decir, vamos a incorporar el término $-F_0 J(P,T)$ prescribiendo la presión P por su valor normal observado, P_{nob} . En este caso se tiene que: $D_{v1} = D_{v2} = 0$ y $D_{v9} = 1$ tanto para el caso normal como el anómalo. De esta manera en la ecuación (3.100) el término $-F_0 J(P,T)$ es reemplazado por $-F_0 J(P_{nob}, T)$.

4) Experimento MTCVDI2.

Este experimento es semejante al experimento MTCVDI1 sólo que en lugar de usar la opción 2 usaremos la opción 3; es decir, vamos a utilizar una dinámica implícita usando la parametrización (5.17) para el transporte horizontal de calor por viento medio. En este caso se tiene en (6.28) que $D_{v1} = 1$ y $D_{v2} = D_{v9} = 0$ para el caso normal, y $D_{v1} = D_{v2} = 1$ y $D_{v9} = 0$ para el caso anómalo. De esta manera en la ecuación (3.100) el término $-F_0 J(P_{nob}, T)$ es

reemplazado por el término $F_B J(T, P_{Nob}) + F_B'' J(T, T_{Nob}) - F_B' J(T, T_{Nob})$.

5) Experimento MTCVDI3.

En este experimento vamos a usar la versión geostrófica del MTCV; es decir, la ecuación (6.141), por lo que en (3.140) vamos a considerar que $(CLASIC)_0^1 = 0$ y $(GEOS)_0^1 = 1$. Sin embargo, usaremos al igual que en el experimento MTCVDI2 la parametrización (5.17) para el transporte horizontal por viento medio, de manera que en (3.141) el término de transporte $-F_B(P, T)$ es reemplazado por $F_B J(T, P_{Nob}) + F_B'' J(T, T_{Nob}) - F_B' J(T, T_{Nob})$. Dado que $D_{v1} = 1$ para el caso normal y anómalo, en el término $F_{121} J(P, T)$ la presión P es reemplazada por su valor normal observado P_{Nob} .

La condición de frontera que usaremos está dada por (6.30).

6) Experimento MTCVDI4.

En este experimento vamos a usar la ecuación (3.139) en su versión completa; es decir, $(CLASIC)_0^1 = (GEOS)_0^1 = 0$. Usaremos al igual que en los experimentos MTCVDI2 y MTCVDI3 la parametrización (5.17) para el transporte horizontal de calor por viento medio y las condiciones de frontera dadas por (6.30). La condición de frontera para $\bar{v}^2 T'$ está definida en la sección 6.3.

En este experimento dado que $D_{v1} = 1$ tanto para el caso normal como para el anómalo, se tiene que en (3.139) los términos que contienen a la presión, P , son calculados reemplazando a P por su valor normal observado, P_{Nob} .

8.4 Experimentos Numéricos de Predicción, para Enero 1983, Incorporando una Dinámica Explícita en el MTCV.

En estos experimentos vamos a pronosticar las anomalías de la temperatura, de la altura y de las componentes zonal y meridional de la velocidad del viento en los 700 mb utilizando la ecuación termodinámica (6.26) y la ecuación de vorticidad (6.27).

En la ecuación termodinámica (6.26) vamos a tomar $D_{v_1} = D_{v_2} = 0$ y $D_{v_9} = 1$, tanto para el caso normal como para el anómalo; es decir, se incorpora una dinámica explícita usando la ecuación de vorticidad (6.27) para calcular la presión P

En la ecuación termodinámica (6.26) vamos a usar dos pasos de tiempo: 240 pasos de tiempo con $\Delta t = 3$ horas y un sólo paso de tiempo con $\Delta t = \Delta t_0 = 30$ días, en los dos casos vamos a utilizar en la ecuación de vorticidad (6.27), 240 pasos de tiempo de 3 horas para completar un mes; es decir, $\Delta t_2 = \Delta t_0/240$.

Las condiciones de frontera para T' y P están dadas, respectivamente, por (6.30) y (6.31) y las condiciones de frontera para $\nabla^2 T'$ y $\nabla^2 P$ están definidas en la sección 6.3.

Las condiciones iniciales están dadas por *i*), *ii*) y *iii*) referidas en la sección 8.1. La condición *iv*), referente a las condiciones de hielo y nieve de la última semana del mes previo al de la predicción, no será tomada en cuenta; en su lugar usaremos el albedo normal observado en el mes de la predicción y de esta manera quitaremos el forzamiento de las anomalías del albedo de la superficie sobre la circulación de la atmósfera y sólo estudiaremos el efecto dinámico que, sobre las anomalías de la temperatura troposférica y de la circulación zonal y meridional, tiene al incorporar la dinámica explícita a través de la ecuación de vorticidad.

Al igual que en la sección anterior, a los modelos y a los experimentos los vamos a denominar por el conjunto de letras MTCVDEN, las iniciales MTCV se refieren a que se usa el MTCV, las letras DE se refieren a que se incorpora una dinámica explícita y la letra N se refiere a el número de la versión usada.

1) Experimento MTCVDE1.

En este experimento usaremos la versión más simplificada de la ecuación de vorticidad. Es decir $\lambda^2 = 1.50 \times 10^{-16} \text{cm}^{-2}$, $\lambda_E^2 = \lambda_V^2 = 0$ y $C_0 = 0$. En este caso la ecuación de vorticidad (3.136) se

reduce a:

$$(\nabla^2 - \lambda^2) \frac{\partial P}{\partial t} + \mathbf{V}_g \cdot \nabla(\nabla^2 P) + J(P, f) = 0 \quad (8.1)$$

la que desde luego se puede expresar en la forma (6.27).

Dado que la ecuación de vorticidad (8.1) está desacoplada de la ecuación termodinámica (3.139), (8.1) será integrada de manera independiente de (3.139), y el valor calculado de la presión, después de 240 pasos de tiempo de 3 horas, será usado en la ecuación (3.139) para que con un sólo paso de tiempo de 30 días, resolviendo la ecuación (6.26), se determine la temperatura troposférica, T' .

2) Experimento MTCVDE2.

Este experimento es idéntico al experimento MTCVDE1 sólo que en lugar de usar $\lambda^2 = 1.50 \times 10^{-16} \text{cm}^{-2}$, usaremos $\lambda^2 = 5.88 \times 10^{-16} \text{cm}^{-2}$.

3) Experimento MTCVDE3.

Este experimento es similar a los dos anteriores sólo que ahora vamos a incorporar el término de difusión $C_0 \nabla^2 P$ en la ecuación (8.1), y vamos a utilizar $\lambda^2 = 5.88 \times 10^{-16} \text{cm}^{-2}$ y el valor teórico $C_0 = 8.32 \times 10^{-6} \text{s}^{-1}$. En este caso la ecuación de vorticidad se expresa como:

$$(\nabla^2 - \lambda^2) \frac{\partial P}{\partial t} + \mathbf{V}_g \cdot \nabla(\nabla^2 P) + J(P, f) + C_0 \nabla^2 P = 0 \quad (8.2)$$

En los siguientes experimentos vamos a usar la versión más completa de la ecuación de vorticidad; es decir, la ecuación (3.136). Para la ecuación termodinámica vamos a usar las tres versiones contenidas en (3.139): la clásica con $(\text{CLASIC})_0^1 = 1$, la geostrofica con $(\text{CLASIC})_0^1 = 0$ y $(\text{GEOS})_0^1 = 1$, y la completa con $(\text{CLASIC})_0^1 = 0$ y $(\text{GEOS})_0^1 = 0$.

En la ecuación termodinámica (6.26) y la ecuación de vorticidad (6.27) usaremos 240 pasos de tiempo con $\Delta t = \Delta t_2 = 3$ horas.

En los siguientes 3 experimentos vamos a usar en la ecuación de vorticidad (3.136) $\lambda^2 = 5.88 \times 10^{-16} \text{cm}^{-2}$, $\lambda_E^2 = 8.41 \times 10^{-17} \text{cm}^{-2}$, $\lambda_V^2 = 1.58 \times 10^{-16} \text{cm}^{-2}$ y $C_0 = 8.32 \times 10^{-6} \text{s}^{-1}$.

4) Experimento MTCVDE4.

Usaremos la versión clásica de la ecuación termodinámica (3.139); es decir, la ecuación (3.100).

5) Experimento MTCVDE5.

Usaremos la versión geostrofica de la ecuación termodinámica (3.139); es decir, la ecuación (3.141).

6) Experimento MTCVDE6.

Usaremos la versión completa de la ecuación termodinámica (3.139).

7) Experimento MTCVDE7.

Este experimento es similar al MTCVDE6, sólo que en lugar de usar $\lambda^2 = 5.88 \times 10^{-16} \text{cm}^{-2}$, usaremos $\lambda^2 = 1.50 \times 10^{-16} \text{cm}^{-2}$.

8) Experimento MTCVDE8.

Este experimento es similar al MTCVDE7, sólo que ahora los parámetros λ_E^2 , λ_V^2 y C_0 son reducidos empíricamente a 1/3 de su valor original; es decir, $\lambda_E^2 = 2.80 \times 10^{-17} \text{cm}^{-2}$, $\lambda_V^2 = 5.27 \times 10^{-17} \text{cm}^{-2}$ y $C_0 = 2.77 \times 10^{-6} \text{s}^{-1}$.

9) Experimento MTCVDE9.

Este experimento es similar al MTCVDE8, sólo que ahora en lugar de usar $\lambda^2 = 1.50 \times 10^{-16} \text{cm}^{-2}$, usaremos $\lambda^2 = 5.88 \times 10^{-16} \text{cm}^{-2}$.

8.5 Evaluación de los Resultados.

Vamos a evaluar la habilidad del modelo para pronosticar las anomalías de la temperatura, la altura y las componentes zonal y meridional del viento en los 700 mb, de tres diferentes maneras:

a) Calculando el coeficiente de correlación (r) entre las anomalías predichas y las anomalías observadas,

b) la raíz cuadrada del error cuadrático medio (recm) de las anomalías predichas al compararlas con las observadas,

c) el porcentaje de signos correctamente predichos de las anomalías (pscp).

Para el coeficiente de correlación r , vamos a usar la siguiente fórmula:

$$r = \frac{\sum_{J=1}^N \left[X(J) - \bar{X} \right] \cdot \left[Y(J) - \bar{Y} \right]}{\left[\sum_{J=1}^N \left[X(J) - \bar{X} \right]^2 \sum_{J=1}^N \left[Y(J) - \bar{Y} \right]^2 \right]^{1/2}} \quad (8.3)$$

donde N es el número de puntos de la rejilla tomados en consideración, J es el j -ésimo punto de la rejilla, $X(J)$ y $Y(J)$ son las anomalías predichas y observadas, respectivamente, y \bar{X} y \bar{Y} son los correspondientes promedios por área de $X(J)$ y $Y(J)$ los cuales están dados por:

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{J=1}^N X(J) \quad (8.4)$$

$$\bar{Y} = \frac{1}{N} \sum_{J=1}^N Y(J) \quad (8.5)$$

Para la raíz cuadrada del error cuadrático medio usaremos la siguiente fórmula:

$$\text{recm} = \left(\frac{1}{N} \sum_{J=1}^N \left[\left[X(J) - \bar{X} \right] - \left[Y(J) - \bar{Y} \right] \right]^2 \right)^{1/2} \quad (8.6)$$

8.6 Resultados de las Predicciones del Período Enero-Noviembre 1983.

La figura 8.1 muestra, para cada mes, el valor del coeficiente de Austausch (K) usado en los experimentos MTCV1, MTCV2 y MTCVDIN (N = 1, 2, ..., 4).

La tabla 8.1 muestra la evaluación de las predicciones de las anomalías de la temperatura para el período Enero-Noviembre 1983, llevadas a cabo con los modelos MTCV1, MTCV2 y MTCVDIN (N = 1, 2, ..., 4). La tabla 8.1a muestra el coeficiente de correlación (r), 8.1b, la raíz cuadrada del error cuadrático medio (recm) y 8.1c, el porcentaje de signos correctamente predichos (pscp). Las primeras columnas de la tabla 8.1 muestran los meses de predicción. Las segundas columnas de 8.1a, 8.1b y 8.1c muestran, respectivamente, los valores de r, recm y pscp del modelo básico MTCV1, las subsecuentes columnas muestran los excesos sobre dicho modelo. Para el caso del coeficiente r y el pscp un exceso positivo indica una mejora en las predicciones; en cambio, para la recm indica un mayor error en las predicciones.

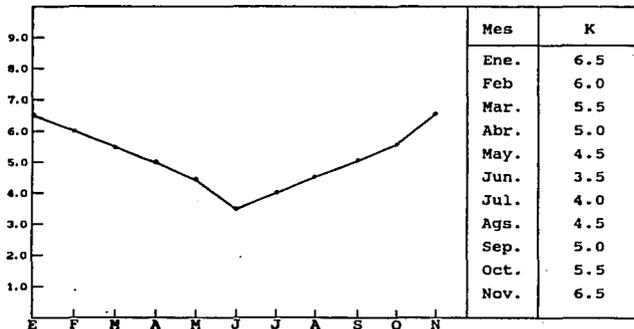


Figura 8.1 Coeficiente Austausch (K) para cada mes ($10^{10} \text{cm}^2 \text{s}^{-1}$), usado en los experimentos numéricos.

Tabla 8.1a Coeficiente de correlación (r), obtenido en las predicciones de las anomalías de la temperatura en los 700 mb, para el período Enero-Noviembre 1983, llevadas a cabo con los modelos MTCV1, MTCV2 y MTCVDIN ($N = 1, 2, \dots, 4$). La primera columna muestra los meses de predicción, la segunda muestra los valores de r del modelo básico o de control MTCV1 y las subsiguientes columnas muestran los excesos sobre dicho modelo.

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|------------|-------|-------|---------|---------|---------|---------|
| Mes | MTCV1 | MTCV2 | MTCVDI1 | MTCVDI2 | MTCVDI3 | MTCVDI4 |
| 1983 | | | | | | |
| Enero | 0.31 | 0.02 | -0.02 | 0.00 | 0.01 | 0.02 |
| Febrero | 0.28 | 0.12 | 0.11 | 0.14 | 0.14 | 0.16 |
| Marzo | 0.28 | 0.07 | 0.04 | 0.09 | 0.09 | 0.09 |
| Abril | 0.19 | 0.07 | 0.12 | 0.08 | 0.11 | 0.11 |
| Mayo | 0.15 | 0.13 | 0.16 | 0.11 | 0.13 | 0.14 |
| Junio | 0.04 | 0.05 | 0.03 | 0.06 | 0.06 | 0.10 |
| Julio | 0.47 | 0.08 | 0.00 | 0.09 | -0.01 | -0.01 |
| Agosto | 0.30 | 0.08 | 0.01 | 0.07 | -0.05 | -0.03 |
| Septiembre | 0.18 | 0.13 | 0.10 | 0.15 | 0.08 | 0.09 |
| Octubre | 0.24 | 0.16 | 0.14 | 0.14 | 0.13 | 0.14 |
| Noviembre | 0.18 | 0.02 | 0.03 | 0.00 | 0.02 | 0.03 |
| Promedio | 0.24 | 0.08 | 0.07 | 0.08 | 0.06 | 0.08 |

Tabla 8.1b Igual que en la tabla 8.1a, pero para la raíz cuadrada del error cuadrático medio (recm).

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|------------|---------|-------|---------|---------|---------|---------|
| Mes | MTCV1 | MTCV2 | MTCVDI1 | MTCVDI2 | MTCVDI3 | MTCVDI4 |
| 1983 | | | | | | |
| Enero | 1.78 °C | -0.02 | -0.01 | -0.02 | -0.02 | -0.02 |
| Febrero | 1.56 | -0.07 | -0.06 | -0.08 | -0.08 | -0.09 |
| Marzo | 1.60 | -0.04 | -0.03 | -0.05 | -0.05 | -0.05 |
| Abril | 1.42 | -0.02 | -0.05 | -0.03 | -0.04 | -0.04 |
| Mayo | 1.25 | -0.04 | -0.05 | -0.03 | -0.04 | -0.04 |
| Junio | 1.17 | 0.01 | 0.02 | 0.00 | -0.01 | -0.02 |
| Julio | 1.11 | -0.05 | 0.00 | -0.05 | 0.01 | 0.01 |
| Agosto | 1.09 | -0.03 | 0.00 | -0.03 | 0.02 | 0.01 |
| Septiembre | 1.03 | -0.04 | -0.03 | -0.04 | -0.02 | -0.02 |
| Octubre | 1.06 | -0.05 | -0.04 | -0.04 | -0.04 | -0.04 |
| Noviembre | 1.35 | -0.01 | -0.01 | 0.00 | -0.01 | -0.01 |
| Promedio | 1.31 | -0.03 | -0.02 | -0.03 | -0.02 | -0.03 |

Tabla 8.1c Igual que en la tabla 8.1a, pero para el porcentaje de signos correctamente predichos (pscp).

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|------------|--------|-------|---------|---------|---------|---------|
| Mes | MTCV1 | MTCV2 | MTCVDI1 | MTCVDI2 | MTCVDI3 | MTCVDI4 |
| 1983 | | | | | | |
| Enero | 61.5 * | 0.1 | -0.9 | -0.1 | 1.2 | 2.2 |
| Febrero | 58.4 | 2.0 | 2.3 | 3.5 | 4.9 | 5.1 |
| Marzo | 60.3 | 4.0 | 3.1 | 5.2 | 4.2 | 4.1 |
| Abril | 58.2 | -2.7 | 3.1 | -2.4 | 2.4 | 2.3 |
| Mayo | 57.1 | 4.7 | 3.0 | 2.4 | 2.4 | 2.2 |
| Junio | 55.9 | 2.4 | 2.5 | 2.7 | 4.4 | 4.0 |
| Julio | 63.6 | 8.7 | 3.9 | 9.5 | 2.6 | 3.4 |
| Agosto | 60.8 | 5.4 | 0.1 | 4.9 | 0.2 | 1.0 |
| Septiembre | 60.6 | 6.9 | 2.2 | 8.4 | 2.6 | 3.0 |
| Octubre | 67.3 | 2.2 | -1.1 | -1.4 | 0.4 | 2.5 |
| Noviembre | 58.7 | 1.5 | 2.7 | 0.9 | 2.4 | 2.4 |
| Promedio | 60.2 | 3.2 | 1.9 | 3.0 | 2.5 | 2.9 |

8.7 Resultados de las Predicciones de Enero 1983.

La tabla 8.2 muestra las evaluaciones de las predicciones para Enero de 1983 de las anomalías de la temperatura, la altura y las componentes zonal y meridional de la velocidad del viento en los 700 mb, T'_{7DN} , H'_{7DN} , u'_{7DN} y v'_{7DN} , respectivamente, llevadas a cabo con los modelos MTCVDEN ($N = 1, 2, \dots, 9$), dichas anomalías se muestran en las primeras columnas de la tabla 8.2.

La tabla 8.2a muestra el coeficiente de correlación (r), 8.2b, la raíz cuadrada del error cuadrático medio (recm) y 8.2c, el porcentaje de signos correctamente predichos (pscp).

La tabla 8.3 muestra el coeficiente de correlación para los correspondientes campos normales calculados: T'_{7N} , H'_{7N} , u'_{7N} y v'_{7N} .

Las columnas de las tablas 8.2 y 8.3 están numeradas en la parte superior, y las tablas están divididas en tres partes, la primera parte contiene, en la segunda columna, como modelo básico o de control el MTCVDE1, la segunda parte el MTCVDE2 y la tercera parte el MTCVDE4, las columnas restantes 3, 4 y 5 contienen los excesos sobre dichos modelos de control.

En todos los experimentos ($N = 1, 2, \dots, 9$), las componentes zonal y meridional de la velocidad del viento en los 700 mb han sido calculadas usando las fórmulas (7.24) y (7.25). Para las componentes zonal y meridional predichas hemos usado la presión (P) y la temperatura troposférica (T) predichas por los modelos MTCVDEN, mientras que para las componentes zonal y meridional observadas hemos usado la presión y la temperatura troposférica calculadas a partir de los campos observados de temperatura y altura en los 700 mb, para el caso normal, de las fórmulas (7.4) y (7.2), respectivamente, y para el caso anómalo, de las fórmulas (7.5) y (7.4), respectivamente. La altura del nivel de 700 mb ha sido calculada con la fórmula (7.22), usando la presión (P) y la temperatura troposférica (T) predichas por los modelos MTCVDEN, y por supuesto, hemos usado la altura observada del nivel de 700 mb para la verificación de la predicción de este campo.

Las figuras que a continuación se dan muestran las predicciones para Enero de 1983.

La figura 8.2 muestra las predicciones de las anomalías de

la temperatura, en grados centígrados, en los 700 mb. La figura 8.2a muestra la predicción con el modelo MTCVDI4 en donde se usa la versión completa de la ecuación (6.26) y la incorporación de una dinámica implícita usando la opción 3 de la sección 5.2 y la figura 8.2b muestra la predicción con un modelo más actual, el MTCVDE2, en donde la presión P se calcula de la ecuación (8.1). La figura 8.2c muestra las correspondientes anomalías observadas en Enero de 1983 y la figura 8.2d, las anomalías observadas en el mes previo; es decir, Diciembre de 1982.

La figura 8.3 muestra las predicciones de las anomalías de las componentes zonal y meridional de la velocidad del viento (en metros por segundo) en 700 mb. Las figuras 8.3a y 8.3b muestran, respectivamente, las componentes zonal y meridional predichas con el modelo MTCVDE2 y 8.3c y 8.3d muestran las correspondientes componentes zonal y meridional observadas.

La figura 8.4 muestra las predicciones de las anomalías de la altura (en metros) del nivel de 700 mb; 8.4a muestra las predicciones con el modelo MTCVDE2, y 8.4b muestra las correspondientes anomalías observadas.

La figura 8.5 muestra los cálculos de los campos normales, usando el modelo MTCVDE2. La figura 8.5a muestra la temperatura normal (en grados centígrados) de los 700 mb calculada por el modelo y 8.5b muestra el correspondiente campo normal observado.

La figura 8.5c muestra la altura normal (en decímetros) del nivel de 700 mb calculada por el modelo y la figura 8.5d muestra el correspondiente campo normal observado.

Las figuras 8.5e y 8.5f muestran, respectivamente, las componentes zonal y meridional de la velocidad del viento normal (en metros por segundo) en los 700 mb calculadas por el modelo y las figuras 8.5g y 8.5h muestran las correspondientes componentes zonal y meridional observadas.

Las figuras 8.6 y 8.7 muestran las predicciones de las anomalías de la temperatura (en grados centígrados) de los 700 mb usando el modelo MTCVDE3 y el modelo MTCVDE9. En el MTCVDE3 se usa la ecuación de vorticidad (8.2) y en el MTCVDE9 se usa la ecuación de vorticidad (3.136) con los parámetros λ_L^2 , λ_V^2 y C_0 reducidos a 1/3 de su valor original.

Tabla 8.2a Coeficiente de correlación (r) obtenido en las predicciones (Enero de 1983) de las anomalías de la temperatura, la altura y las componentes zonal y meridional de la velocidad del viento en 700 mb (primera columna), llevadas a cabo con los modelos MTCVDEN ($N=1,2,\dots,9$). Las columnas 3, 4 y 5 contienen los excesos sobre los coeficientes de correlación obtenidos con los modelos de control MTCVDE1, MTCVDE2 y MTCVDE4 (segunda columna).

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|-----------|---------|---------|---------|---------|
| Anomalías | MTCVDE1 | MTCVDE7 | MTCVDE8 | MTCVDE9 |
| T_{7DN} | 0.18 | 0.01 | -0.03 | 0.15 |
| H_{7DN} | 0.31 | -0.04 | 0.09 | 0.15 |
| u_{7DN} | 0.28 | -0.16 | 0.02 | 0.03 |
| v_{7DN} | 0.20 | 0.10 | 0.15 | 0.19 |
| Anomalías | MTCVDE2 | MTCVDE3 | MTCVDE6 | MTCVDE9 |
| T_{7DN} | 0.26 | 0.07 | 0.07 | 0.07 |
| H_{7DN} | 0.42 | -0.13 | -0.04 | 0.04 |
| u_{7DN} | 0.24 | 0.04 | -0.04 | 0.07 |
| v_{7DN} | 0.24 | 0.04 | 0.08 | 0.15 |
| Anomalías | MTCVDE4 | MTCVDE5 | MTCVDE6 | MTCVDE9 |
| T_{7DN} | 0.18 | 0.13 | 0.15 | 0.15 |
| H_{7DN} | 0.27 | 0.12 | 0.11 | 0.19 |
| u_{7DN} | 0.09 | 0.13 | 0.11 | 0.22 |
| v_{7DN} | 0.21 | 0.11 | 0.11 | 0.18 |

Tabla 8.2b Igual que en la tabla 8.2a, pero para la raíz cuadrada del error cuadrático medio (recm).

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|-----------|----------|---------|---------|---------|
| Anomalías | MTCVDE1 | MTCVDE7 | MTCVDE8 | MTCVDE9 |
| T_{7DN} | 2.26 °C | -0.46 | -0.43 | -0.52 |
| H_{7DN} | 51.6 m | -6.50 | -8.40 | -10.1 |
| u_{7DN} | 5.83 m/s | -1.52 | -1.89 | -1.90 |
| v_{7DN} | 4.71 m/s | -1.65 | -1.70 | -1.76 |
| Anomalías | MTCVDE2 | MTCVDE3 | MTCVDE6 | MTCVDE9 |
| T_{7DN} | 2.01 °C | -0.26 | -0.27 | -0.27 |
| H_{7DN} | 45.1 m | -0.10 | -1.00 | -3.60 |
| u_{7DN} | 5.56 m/s | -1.61 | -1.52 | -1.63 |
| v_{7DN} | 4.32 m/s | -1.25 | -1.29 | -1.37 |
| Anomalías | MTCVDE4 | MTCVDE5 | MTCVDE6 | MTCVDE9 |
| T_{7DN} | 1.81 °C | -0.07 | -0.07 | -0.07 |
| H_{7DN} | 44.9 m | -1.10 | -0.80 | -3.40 |
| u_{7DN} | 4.32 m/s | -0.30 | -0.28 | -0.39 |
| v_{7DN} | 3.31 m/s | -0.28 | -0.28 | -0.36 |

Tabla 8.2c Igual que en la tabla 8.2a, pero para el porcentaje de signos correctamente predichos (pscp).

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|-----------|---------|---------|---------|---------|
| Anomalías | MTCVDE1 | MTCVDE7 | MTCVDE8 | MTCVDE9 |
| T_{7DN} | 60.0 % | -1.1 | -3.9 | 1.2 |
| H_{7DN} | 65.0 % | -4.9 | 3.8 | -1.0 |
| u_{7DN} | 60.3 % | -5.7 | 2.1 | 0.4 |
| v_{7DN} | 56.5 % | 3.2 | 4.8 | 8.2 |
| Anomalías | MTCVDE2 | MTCVDE3 | MTCVDE6 | MTCVDE9 |
| T_{7DN} | 57.6 % | 4.4 | 3.2 | 3.6 |
| H_{7DN} | 61.9 % | -2.6 | -0.9 | 2.1 |
| u_{7DN} | 58.3 % | -0.8 | -0.2 | 2.4 |
| v_{7DN} | 64.3 % | -9.3 | -1.8 | 0.4 |
| Anomalías | MTCVDE4 | MTCVDE5 | MTCVDE6 | MTCVDE9 |
| T_{7DN} | 52.6 % | 9.2 | 8.2 | 8.6 |
| H_{7DN} | 57.6 % | 4.6 | 3.4 | 6.4 |
| u_{7DN} | 52.8 % | 4.1 | 5.3 | 7.9 |
| v_{7DN} | 52.7 % | 9.3 | 9.8 | 12.0 |

Tabla 8.3 Igual que en la tabla 8.2a, sólo que ahora el coeficiente de correlación (r) es para los correspondientes campos normales calculados (primera columna).

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|----------|---------|---------|---------|---------|
| Normales | MTCVDE1 | MTCVDE7 | MTCVDE8 | MTCVDE9 |
| T_{7N} | 0.96 | 0.00 | 0.01 | 0.00 |
| H_{7N} | 0.93 | 0.00 | 0.01 | 0.01 |
| u_{7N} | 0.46 | -0.10 | -0.07 | 0.12 |
| v_{7N} | 0.22 | -0.07 | 0.01 | -0.04 |
| Normales | MTCVDE2 | MTCVDE3 | MTCVDE6 | MTCVDE9 |
| T_{7N} | 0.96 | 0.01 | 0.00 | 0.00 |
| H_{7N} | 0.94 | -0.07 | -0.02 | 0.00 |
| u_{7N} | 0.58 | -0.50 | -0.17 | 0.00 |
| v_{7N} | 0.07 | -0.19 | 0.09 | 0.11 |
| Normales | MTCVDE4 | MTCVDE5 | MTCVDE6 | MTCVDE9 |
| T_{7N} | 0.96 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| H_{7N} | 0.91 | 0.02 | 0.01 | 0.03 |
| u_{7N} | 0.38 | 0.06 | 0.03 | 0.20 |
| v_{7N} | 0.13 | 0.01 | 0.03 | 0.05 |

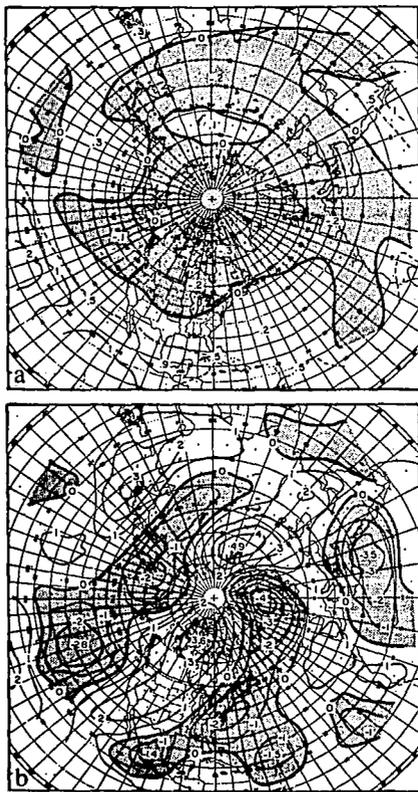


Figura 8.2. Anomalías de la temperatura del aire en los 700 mb, en grados centígrados, para Enero de 1983. 8.2a pronosticadas por el MTCVDI4 y 8.2b por el MTCVDE2.

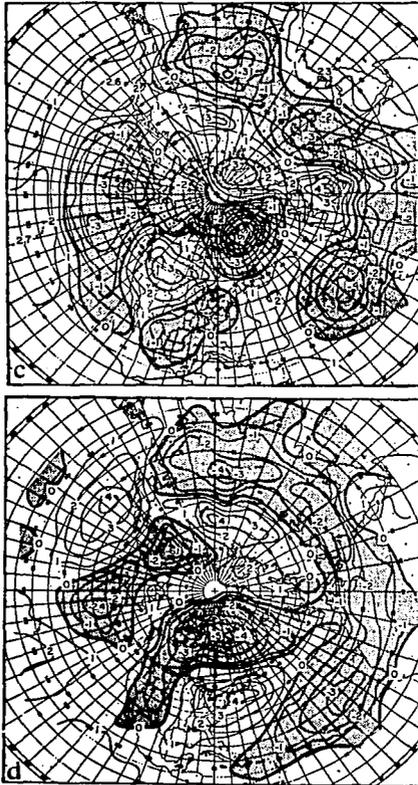


Figura 8.2 (continuación). 8.2c muestra las correspondientes anomalías observadas y 8.2d las observadas en el mes previo; es decir, Diciembre de 1982.

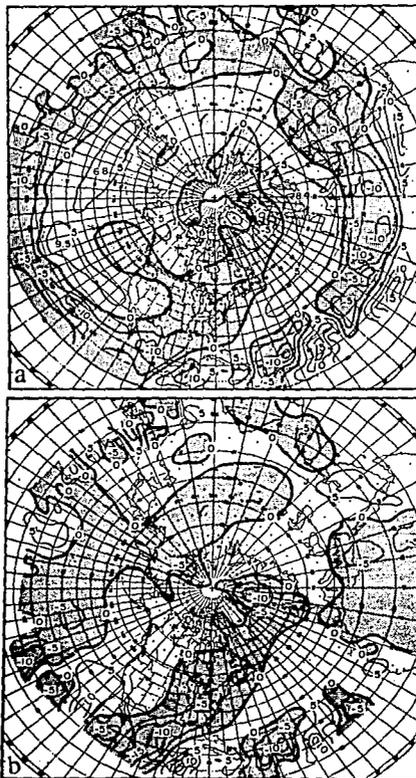


Figura 8.3. Anomalías de la velocidad del viento en los 700 mb, en metros por segundo, para Enero de 1983. 8.3a y 8.3b muestran, respectivamente, las componentes zonal y meridional pronosticadas usando el NTCVDE2.

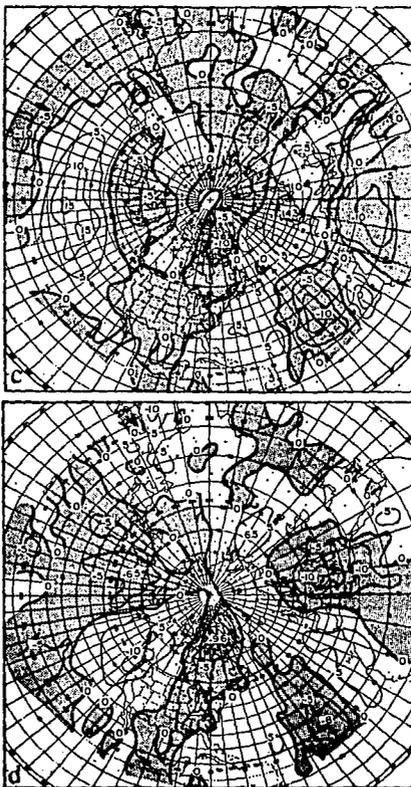


Figura 8.3 (continuación). 8.3c y 8.3d muestran, los correspondientes valores observados de las figuras 8.3a y 8.3b.

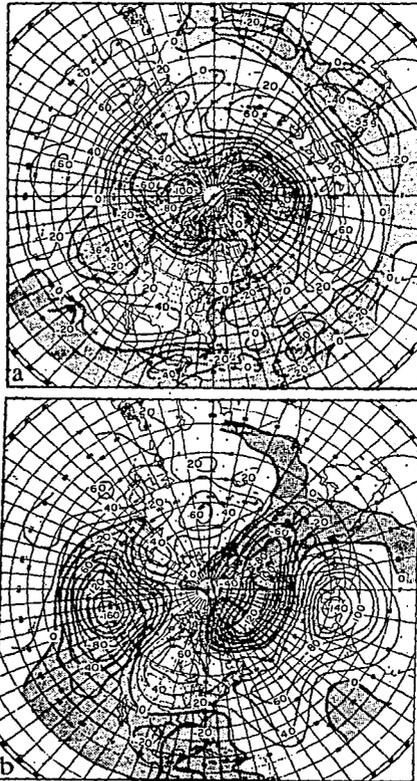


Figura 8.4. Anomalías de la altura de los 700 mb, en metros, para Enero de 1983. 8.4a muestra las anomalías pronosticadas por el MTCVDE2 y 8.4b muestra los correspondientes valores observados.

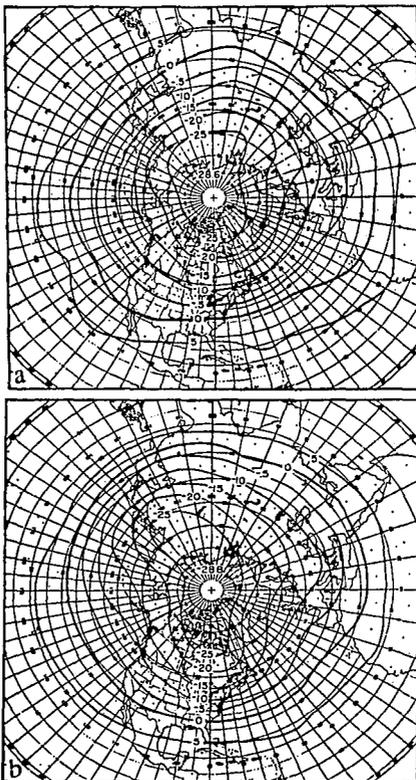


Figura 8.5. Campos normales de los 700 mb calculados por el MTCVDE2 para Enero de 1983. 8.5a muestra la temperatura, en grados centigrados, calculada por el modelo y 8.5b los correspondientes valores observados.

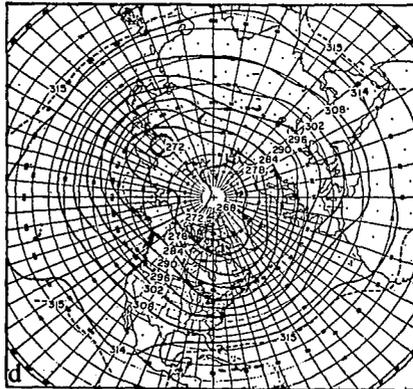
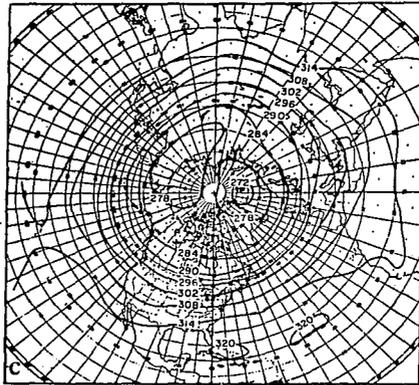


Figura 8.5 (continuación). 8.5c muestra la altura de los 700 mb, en decámetros, calculada por el modelo y 8.5d los correspondientes valores observados.

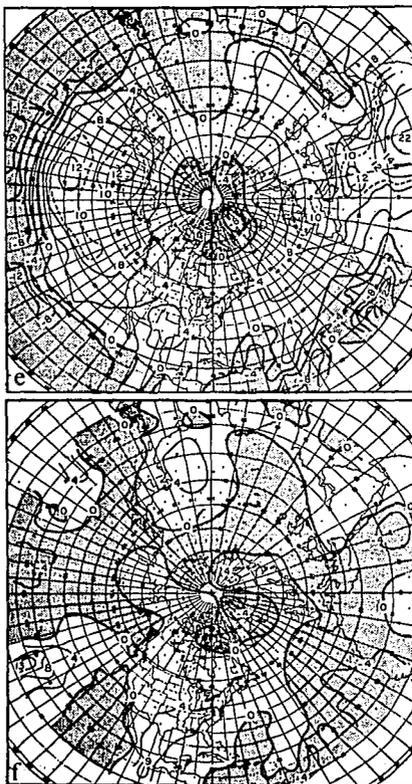


Figura 8.5 (continuación). 8.5e y 8.5f muestran, respectivamente, las componentes zonal y meridional de la velocidad del viento, en metros por segundo, calculadas por el modelo.

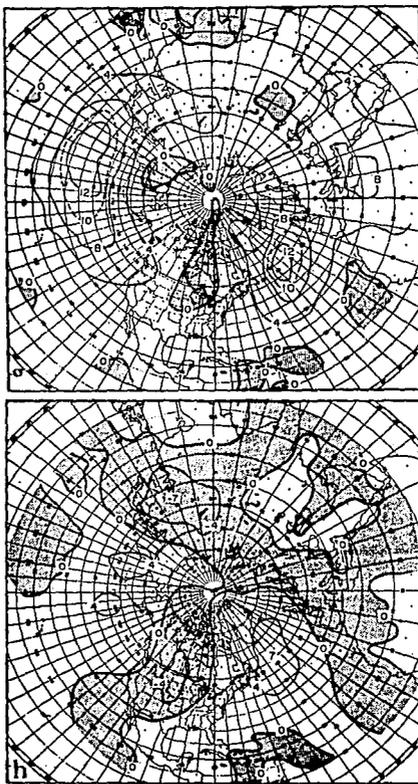


Figura 8.5 (continuación). 8.5g y 8.5h muestran, los correspondientes valores observados de las figuras 8.5e y 8.5f.

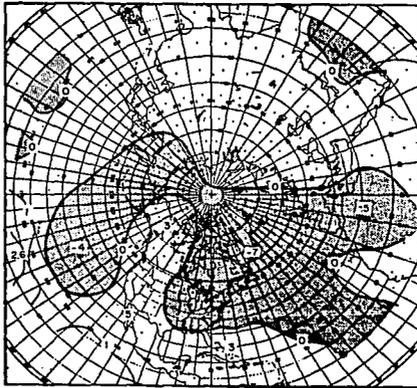


Figura 8.6. Anomalías de la temperatura del aire, en grados centígrados, en los 700 mb pronosticadas por el MTCVDE3 para Enero de 1983.

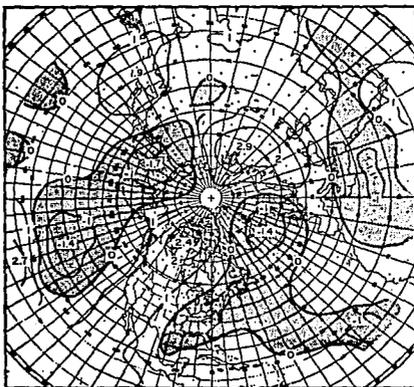


Figura 8.7. Anomalías de la temperatura del aire, en grados centígrados, de los 700 mb pronosticadas por el MTCVDES para Enero de 1983.

8.8 Discusión de los Resultados.

La figura 8.1 muestra que el coeficiente Austausch (K) encontrado en este trabajo tiene valores más grandes en los meses de Invierno y Otoño que en los meses de Primavera y Verano, dicho coeficiente tiene un valor mínimo en Junio ($3.5 \times 10^{10} \text{cm}^2 \text{s}^{-1}$) y valores máximos en Enero y Noviembre ($6.5 \times 10^{10} \text{cm}^2 \text{s}^{-1}$). En Invierno se tiene un coeficiente promedio de $6.25 \times 10^{10} \text{cm}^2 \text{s}^{-1}$, en Primavera de $5.0 \times 10^{10} \text{cm}^2 \text{s}^{-1}$, en Verano de $4.0 \times 10^{10} \text{cm}^2 \text{s}^{-1}$ y en Otoño de $5.67 \times 10^{10} \text{cm}^2 \text{s}^{-1}$. En la primera versión zonalmente promediada del MTC (Adem, 1962), Adem encuentra valores algo más bajos para K: $4.0 \times 10^{10} \text{cm}^2 \text{s}^{-1}$ en Invierno, $2.33 \times 10^{10} \text{cm}^2 \text{s}^{-1}$ en Primavera, $0.08 \times 10^{10} \text{cm}^2 \text{s}^{-1}$ en Verano y $3.67 \times 10^{10} \text{cm}^2 \text{s}^{-1}$ en Otoño.

La tabla 8.1 contiene las evaluaciones de las predicciones de las anomalías de la temperatura de los 700 mb. Las columnas 2 y 3 muestran las evaluaciones usando los modelos clásicos MTCV1 y MTCV2 que no incorporan el transporte horizontal por viento medio. La comparación de las columnas 2 y 3 muestra que el usar como condición de frontera a la persistencia (columna 3) da de manera sistemática mejores predicciones que el suponer que en la frontera no existe transporte horizontal de calor por viento medio y por turbulencia de gran escala (columna 2); el exceso del modelo MTCV2 sobre el modelo de control MTCV1 es en promedio 0.08 para el coeficiente r, -0.03 para la recm y 3.2 para el pscp.

Las columnas 4 muestran las evaluaciones de las predicciones con el modelo clásico MTCVDI1 que incluye el transporte horizontal de calor por viento normal observado (opción 2 de la sección 5.2); el exceso del modelo MTCVDI1 sobre el modelo de control es en promedio 0.07 para r, -0.02 para recm y 1.9 para el pscp. Sin embargo, la comparación de las columnas 3 y 4 indica que, al menos en el período escogido, la habilidad de predicción del modelo MTCVDI1 es ligeramente inferior a la del modelo MTCV2 que no incluye transporte horizontal de calor por viento medio.

Las columnas 5 muestran las evaluaciones de las predicciones con el modelo clásico MTCVDI2 que incluye la parametrización 5.17 para el transporte horizontal por viento medio (opción 3 de la sección 5.2); el exceso del modelo MTCVDI2 sobre el modelo de

control es en promedio, 0.08 para r , -0.03 para la $recm$ y 3.0 para el $pscp$, lo que indica que la habilidad de predicción del modelo MTCVDI2 es en promedio prácticamente igual a la del modelo MTCV2. Sin embargo, en algunos casos particulares el MTCVDI2 da un coeficiente r y un $pscp$ más alto, dichos casos son Febrero, Marzo, Abril, Junio, Julio y Septiembre, y una $recm$ más pequeña para Febrero, Marzo, Abril y Junio.

Las últimas columnas de la tabla 8.1 muestran las evaluaciones de las predicciones de los modelos que incorporan además de la dinámica implícita (opción 3 de la sección 5.2), la convección de calor por movimiento vertical, usando la versión geostrofica, modelo MTCVDI3 y la versión completa, modelo MTCVDI4. La comparación de las columnas 6 y 4 muestra que la habilidad de predicción del MTCVDI3 es en promedio prácticamente igual a la del modelo MTCVDI1; mientras que la comparación de las columnas 7, 5 y 3 muestra que la habilidad de predicción del modelo MTCVDI4 es en promedio prácticamente igual a la de los modelos MTCVDI2 y MTCV2. Sin embargo, la comparación de los modelos MTCVDI4 y MTCVDI2 muestra que en algunos casos particulares el MTCVDI4 tiene una predictabilidad más alta que el MTCVDI2; a saber, un coeficiente r más alto para Enero, Febrero, Abril, Mayo, Junio y Noviembre, una $recm$ más pequeña para Febrero, Abril, Mayo, Junio y Noviembre y un $pscp$ más alto para Enero, Febrero, Abril Junio, Octubre y Noviembre.

La tabla 8.2 muestra las evaluaciones de las predicciones para Enero 1983 de las anomalías T'_{7DN} , H'_{7DN} , u'_{7DN} y v'_{7DN} llevadas a cabo con los modelos MTCVDEN ($N = 1, 2, \dots, 9$) en donde se incorpora la ecuación de vorticidad potencial (3.136).

En la primera parte de la tabla 8.2 y en las columnas 2, 3 y 4 se muestran, respectivamente, las evaluaciones de los modelos MTCVDE1, MTCVDE7 y MTCVDE8, que se caracterizan por tener el mismo parámetro de curvatura $\lambda^2 = 1.50 \times 10^{-16} \text{cm}^{-2}$. En las mismas columnas 2, 3 y 4, la segunda parte de la tabla 8.2 contiene las evaluaciones de las predicciones con los modelos MTCVDE2, MTCVDE3 y MTCVDE6, que se caracterizan por tener el mismo parámetro de curvatura $\lambda^2 = 5.88 \times 10^{-16} \text{cm}^{-2}$. La tercera parte de la tabla 8.3 se tiene en las columnas ya mencionadas a las evaluaciones de las

predicciones con los modelos MTCVDE4, MTCVDE5 y MTCVDE6, que se caracterizan por incorporar de manera completa la ecuación de vorticidad (3.136) y tener los mismos parámetros λ^2 , λ_c^2 , λ_v^2 y C_0 .

En la columna 4 de la primera parte de la tabla 8.2 y en la columna 5 de las tres partes de esta tabla se tienen las evaluaciones de los modelos MTCVDE8 y MTCVDE9, en donde los parámetros λ_c^2 , λ_v^2 y C_0 se han reducido empíricamente a 1/3 de su valor teórico. En el MTCVDE9 el parámetro de curvatura $\lambda^2 = 5.88 \times 10^{-16} \text{cm}^{-2}$.

En los modelos de las columnas 2, 3, 4 y 5 de la primera y segunda parte de la tabla 8.2 se usa la versión completa de la ecuación termodinámica (3.139); en cambio, en la tercera parte de esta tabla se tiene en la columna 2 el modelo MTCVDE4 que usa la versión clásica de la ecuación (3.139), en la columna 3 el modelo MTCVDE5 que usa la versión geostrófica de (3.139) y en las columnas 4 y 5 los modelos MTCVDE6 y MTCVDE9 que usan la versión completa de (3.139).

La comparación de los modelos MTCVDE1 y MTCVDE7 muestra que el usar la ecuación de vorticidad completa (3.136) en lugar de la ecuación de vorticidad simplificada (8.1) aumenta el coeficiente r y el pscp en las predicciones de v_{7DN} ; sin embargo, en las predicciones de H_{7DN} y u_{7DN} se disminuye significativamente el coeficiente r y el pscp. El MTCVDE7 da una recm más pequeña que el MTCVDE1 en las predicciones de las cuatro anomalías T_{7DN} , H_{7DN} , u_{7DN} y v_{7DN} .

La comparación de los modelos MTCVDE7 y MTCVDE8 indica que en este último, las predicciones de H_{7DN} , u_{7DN} y v_{7DN} mejoran al reducir a 1/3 los valores teóricos de λ_c^2 , λ_v^2 y C_0 . Sin embargo, las predicciones de T_{7DN} son mejores con el MTCVDE7 que con el MTCVDE8.

La comparación de los modelos MTCVDE2 y MTCVDE3 indica que el MTCVDE3 da en las predicciones un coeficiente r más grande para T_{7DN} , u_{7DN} y v_{7DN} y considerablemente más pequeño para H_{7DN} ; en cambio, el MTCVDE3 da en todas las predicciones una recm más pequeña que el MTCVDE2, lo cual se debe, como veremos más adelante, a que el efecto del término de difusión $C_0 \nabla^2 p$ en la ecuación de vorticidad 8.2, es disminuir la amplitud de las

anomalías pronosticadas, y, por consiguiente, la recm resulta ser menor para el MTCVDE3 que para el MTCVDE2.

La comparación del modelo MTCVDE6 con los modelos MTCVDE2 y MTCVDE3 muestra que el usar la ecuación de vorticidad completa (3.136) en lugar de las versiones simplificadas 8.1 y 8.2, mejora en términos generales la predicción de v_{70N} . En la comparación de estos tres modelos vemos que el MTCVDE3 es el que da las predicciones más bajas en cuanto al pscp se refiere.

La comparación de los modelos MTCVDE4, MTCVDE5 y MTCVDE6 de la tercera parte de la tabla 8.2 muestra que los modelos MTCVDE5 y MTCVDE6, los cuales incorporan la convección de calor en la ecuación termodinámica (3.139) usando, respectivamente, la versión geostrófica y la versión completa, dan mejores predicciones que el MTCVDE4, el cual no incorpora la convección de calor.

En las tres partes de la tabla 8.2 la comparación del modelo MTCVDE9 con todos los demás modelos, muestra que el modelo MTCVDE9 es el que, en términos generales, da las mejores predicciones.

Finalmente la tabla 8.3 muestra el coeficiente de correlación r encontrado en el cálculo de los campos normales T_{7N} , H_{7N} , u_{7N} y v_{7N} . La tabla 8.3 está ordenada de la misma forma que la tabla 8.2. En la tabla 8.3 observamos que el modelo MTCVDE3 es el que da los peores cálculos de los campos normales, incluso en el cálculo de v_{7N} se obtiene una correlación negativa, lo cual se debe a que la componente meridional de la velocidad del viento calculada por el modelo está completamente defasada con respecto al campo observado. Contrariamente, los modelos MTCVDE1 y MTCVDE5, los cuales usan un parámetro de curvatura $\lambda^2 = 1.50 \times 10^{-16}$, son los que dan los mejores resultados en el cálculo de la componente v_{7N} . La correlación más alta en el cálculo de la componente zonal u_{7N} la dan los modelos MTCVDE2 y MTCVDE9, aunque también el modelo MTCVDE1 da un coeficiente de correlación comparable a estos dos modelos.

Una cosa importante de señalar en los campos normales calculados por los modelos, es que los coeficientes de correlación de las componentes zonal y meridional de la velocidad del viento normal, son significativamente más bajos que los coeficientes de correlación de la temperatura y la altura de los 700 mb, los

cuales prácticamente en todos los casos rebasan el valor de 0.90. Lo anterior se debe a que la velocidad del viento está dada en términos de las primeras derivadas espaciales de los campos P y T calculados, mientras que los campos T_{7N} y H_{7N} se determinan directamente de estos campos; por consiguiente, si los campos P y T no tienen gradientes en las direcciones zonal y meridional aproximadamente igual a los de los campos observados, darán una descripción inadecuada de las componentes zonal y meridional de la velocidad del viento. Por otro lado el coeficiente de correlación proporciona una manera adecuada de evaluar objetivamente la similitud entre dos campos; sin embargo, aunque dos campos sean similares según el criterio del coeficiente de correlación r , ello no garantiza que sus derivadas espaciales direccionales sean similares de acuerdo a este criterio.

La comparación de las figuras 8.2a y 8.2b, las cuales son obtenidas, respectivamente, por los modelos MTCVDI4 y MTCVDE2 muestran una característica muy importante: las anomalías pronosticadas por el modelo MTCVDE2 tienen amplitudes significativamente más grandes que las de las anomalías pronosticadas con el modelo MTCVDI4, salvo en las fronteras laterales, en donde en la figura 8.2a se observan las amplitudes de la persistencia significativamente más grandes que en el resto del mapa. La comparación de las figuras 8.2a y 8.2c muestra que el modelo MTCVDI4 tiene cierta habilidad en pronosticar el signo de las anomalías, de acuerdo con la columna 7 de la tabla 8.1c el pscp por el MTCVDI4 es 63.7 % para el caso de Enero 1983.

La comparación de las figuras 8.2b y 8.2c muestra que el modelo MTCVDE2 también tiene cierta habilidad en pronosticar el signo de las anomalías; de acuerdo con la columna 2 de la segunda parte de la tabla 8.2c, el pscp por el MTCVDE2 es 57.6 %, porcentaje algo menor que el del modelo MTCVDI4. Sin embargo, el modelo MTCVDE2 pronostica anomalías que el MTCVDI4 no puede pronosticar; por ejemplo, las fuertes anomalías pronosticadas con el MTCVDE2 (figura 8.2b) concuerdan bastante bien con las anomalías observadas (figura 8.2c). Es importante notar que las anomalías positivas observadas en la parte central y oeste de los Estados Unidos y el Canada han sido correctamente pronosticadas

por el MTCVDE2 tanto en signo como en tamaño; por otro, lado la anomalía negativa que se observa en casi toda la República Mexicana, el golfo de México y a lo largo de toda la costa este de los Estados Unidos también ha sido correctamente pronosticada por el MTCVDE2.

La comparación de la figura 8.2d, que corresponde a las anomalías observadas en el mes previo, con la figura 8.2c muestra que hay una inversión en el signo de las anomalías en casi toda América del Norte incluyendo la República Mexicana; este cambio se debe , según Adem (comunicación personal), a la anomalía en la componente meridional de la velocidad del viento observada en 700 mb (figura 8.3d), la cual está en concordancia con la correspondiente anomalía pronosticada por el MTCVDE2 (figura 8.3b). De acuerdo con la figura 8.3d sobre las partes central y oeste de los Estados Unidos y Canadá se da una disminución en el viento meridional, el cual en esas regiones va de norte a sur (figura 8.5h), provocando con ello un calentamiento del aire en las regiones mencionadas, que es correctamente pronosticado por el MTCVDE2; de la misma manera, en el este de los Estados Unidos y Canadá y sobre la República Mexicana se da una disminución en el viento meridional normal, el cual en dichas regiones va de sur a norte (figura 8.5h), provocando con ello un enfriamiento en el aire en dichas regiones que es correctamente pronosticado por el MTCVDE2.

Hay otras regiones en donde el MTCVDE2 ha pronosticado adecuadamente las anomalías de la temperatura en los 700 mb, como por ejemplo, la intensificación en la anomalía negativa de gran escala en el Pacífico central, la cual efectivamente se da sobre dicha región (figura 8.2c).

La comparación de las figuras 8.3a y 8.3b con las correspondientes figuras 8.3c y 8.3d muestra que las predicciones de las anomalías de las componentes zonal y meridional de la velocidad del viento en 700 mb (figuras 8.3a y 8.3b), son pronosticadas bastante bien en signo y tamaño (ver las tablas 8.2a y 8.2c en la segunda parte y columna 2, en donde $r = 0.24$ para ambas componentes y $p_{scp} = 58.3\%$ para la componente zonal y 64.3% para la componente meridional).

La figura 8.4a muestra que las anomalías de la altura de los 700 mb pronosticadas por el MTCVDE2 concuerdan bastante bien en signo (61.9 %, ver la tabla 8.2c) con las observadas (figura 8.4b) sobre todo en el océano Pacífico, Estados Unidos, Canada, sur de la República Mexicana, gran parte de Europa y norte de Africa; sin embargo, las anomalías pronosticadas son algo más pequeñas que las observadas.

La figura 8.5 muestra en cada una de sus partes el cálculo de los campos normales usando el MTCVDE2. Las figuras 8.5a, 8.5c y 8.5e, que corresponden a los campos normales pronosticados T_{7N} , H_{7N} y u_{7N} , muestran al compararlos con las correspondientes figuras 8.5b, 8.5d y 8.5g, que estos campos normales han sido pronosticados con cierta habilidad mostrada anteriormente en la segunda parte y columna de la tabla 8.3. La comparación de las figuras 8.5f y 8.5h, que muestran a la componente meridional normal calculada por el modelo y el correspondiente campo normal observado, indica que este campo no ha sido bien pronosticado (ver la tabla 8.3 en la segunda parte y columna 2, en donde $r = 0.07$).

La comparación de la figura 8.6 con la figura 8.2c muestra que las anomalías de la temperatura en los 700 mb pronosticadas con el modelo MTCVDE3 tienen una amplitud considerablemente más pequeña que la de las anomalías pronosticadas con el MTCVDE2; ello demuestra que el término de difusión $C_0 \nabla^2 P$ en la ecuación de vorticidad 8.2 tiene el efecto de atenuar la amplitud de las anomalías. Según el análisis de ondas de la sección 6.1 el término de difusión en la ecuación de vorticidad 8.2 tiene el efecto de amortiguar las ondas de Rossby. De acuerdo con este análisis para $\lambda^2 = 5.88 \times 10^{-16} \text{cm}^{-2}$, las ondas de escala planetaria tienen una razón de amortiguamiento que corresponde a un período muy largo, de aproximadamente 1000 días; en cambio, las ondas de escala sinóptica tienen un período de amortiguamiento del orden de un mes. Por consiguiente, la amplitud de las anomalías pronosticadas por el MTCVDE2 se debe, muy probablemente, a la dinámica de las ondas de Rossby con una escala mayor o igual que la sinóptica pero menor que la planetaria; y es posible que la amplitud atenuada de las anomalías pronosticadas con el MTCVDE3 se deba a que las ondas

de Rossby de una escala más pequeña que la planetaria sean amortiguadas por el término de difusión, $C_0^2 P$.

La comparación de la figuras 8.7 y 8.2c muestra que el MTCVDE9 tiene al igual que el MTCVDE2 cierta habilidad en pronosticar adecuadamente las anomalías de la temperatura en los 700 mb. La comparación de las figuras 8.7 y 8.2b muestra que el MTCVDE9 pronostica anomalías con una amplitud o tamaño más pequeña que las del MTCVDE2, pero más grande que las del MTCVDE3 (figura 8.6), lo cual se debe a que el valor de C_0 en MTCVDE9 es más pequeño que en MTCVDE3, pero más grande que en el MTCVDE2, en donde $C_0 = 0$.

8.9 Conclusiones y Consideraciones Finales

En las versiones MTCV1, MTCV2 y MTCVDIN ($N = 1, 2, \dots, 4$) del MTCV las anomalías de la temperatura de los 700 mb y las anomalías de la temperatura de la superficie de los océanos del mes previo, así como, las anomalías del albedo de la superficie de la última semana del mes previo al de la predicción, son los forzamientos externos más importantes y los únicos que se han incorporado. Aunados a estos forzamientos externos, existen forzamientos que se generan y se retroalimentan internamente; en estas versiones no se ha incorporado la retroalimentación de los forzamientos internos, ello es motivo de otra investigación. Los forzamientos internos son las anomalías del calor sensible y latente, del calentamiento por radiación, del calor liberado por la condensación del vapor de agua en las nubes, de la nubosidad y del transporte horizontal de vapor de agua. Además, en las versiones MTCVDIN que incluyen una dinámica interna, existe otro forzamiento interno: las anomalías en la velocidad del viento medio que se generan de las anomalías de la temperatura troposférica calculada por el modelo.

Estos forzamientos, externos e internos, son los causantes de la generación de anomalías de temperatura como las mostradas en la figura 8.2a. Como la retroalimentación de los forzamientos internos no se ha incorporado, la predictabilidad de dichos modelos está basada fundamentalmente en los forzamientos externos; uno de los más importantes son las anomalías de la temperatura de la superficie de los océanos del mes previo al de la predicción.

Según J. Namias (1981), en contraste con la predicción a corto plazo (uno a tres días), donde el estado de la atmósfera presente y las ecuaciones hidrodinámicas gobernantes constituyen un problema de condiciones iniciales, la aplicación de la interacción océano-atmósfera en la predicción a largo plazo (un mes o una estación) está más bien relacionada con un problema de condiciones a la frontera. Las anomalías de la temperatura de la superficie de los océanos pueden ser consideradas como las condiciones a la frontera, ya que ellas cambian relativamente muy poco en comparación a la circulación de la capa atmosférica encima de la superficie oceánica, y por consiguiente su influencia se

refleja sobre las condiciones medias mensuales del siguiente mes.

Una de las conclusiones más importantes relacionadas con los experimentos MTCV1, MTCV2 y MTCVDIN ($N = 1, 2, \dots, 4$) es el hecho de que la incorporación del transporte horizontal de calor por viento normal observado no mejora, al menos para el periodo Enero - Noviembre 1983 y a nivel Hemisférico, las predicciones de las anomalías de la temperatura en los 700 mb. Sin embargo, localmente la situación puede ser diferente como lo demuestran las predicciones de las anomalías de la temperatura del aire sobre la superficie en los Estados Unidos durante el periodo 1969 realizadas por Adem (1970b), usando un modelo similar al MTCVDI1; en este caso, la incorporación del transporte horizontal de calor por viento normal observado mejoró considerablemente las predicciones en dicha región.

Otra conclusión importante de estos experimentos es que la incorporación de la convección de calor por movimiento vertical del aire, mejora las predicciones para algunos meses del periodo Enero - Noviembre 1983, pero en promedio las predicciones con los modelos MTCVDI3 y MTCVDI4 que incluyen la convección de calor son muy similares a las predicciones con el modelo MTCVDI2 que no la incluye.

Las predicciones con las versiones MTCVDEN del MTCV además de constituir un problema de condiciones a la frontera, según J. Namias (1981), constituye un problema de condiciones iniciales, en donde las condiciones iniciales son la temperatura y la altura de los 700 mb; las anomalías de la temperatura de la superficie de los océanos constituyen más bien el forzamiento externo debido a que cambian muy poco en cada paso de tiempo en la integración de las ecuaciones.

Según Miyakoda y Chao Jin-Ping (1982), los modelos de baja resolución como el MTC pronostican los modos forzados de la atmósfera y los modelos de alta resolución como los MCGA pronostican los modos libres o dinámicos de la atmósfera. Las versiones MTCVDEN del MTCV pronostican, además de los modos forzados, los modos libres o dinámicos de la atmósfera media. Sin embargo, a diferencia de los MCGA, que usan condiciones iniciales instantaneas (por ejemplo, el campo de altura geopotencial de 500

mb de las 0 horas meridiano de Greenwich de Diciembre de 1976) el MTCV usa condiciones iniciales medias mensuales.

Los MCGA han sido muy usados para determinar la respuesta de la circulación de la atmósfera en latitudes medias a forzamientos externos, tales como las anomalías de la temperatura de la superficie de los océanos. Sin embargo, cuando dichas anomalías son usadas como forzamientos externos la respuesta atmosférica es pequeña y, por lo tanto, es difícil distinguir las anomalías de la circulación de la atmósfera, asociadas con dicho forzamiento, de la variabilidad natural de estos modelos (Frankignoul, 1985).

En cierta manera, el MTC corrobora lo encontrado por los MCGA, pues se ha visto de manera sistemática en las predicciones con el MTC (Adem, 1964b y 1970b) y con las versiones MTCVDIN del MTCV, que las anomalías de la temperatura en los 700 mb predichas por estos modelos tienen una amplitud o tamaño considerablemente más pequeña que las correspondientes anomalías observadas; es posible que al incorporar la retroalimentación de los forzamientos internos la amplitud o tamaño de dichas anomalías se amplifique.

Las versiones MTCVDEN ($N = 1, 2, \dots, 9$) propuestas en este trabajo incorporan la dinámica de la atmósfera de una manera explícita a través de la ecuación de la vorticidad; además, la retroalimentación de los forzamientos internos se va dando de una manera natural en cada paso de tiempo en la integración de las ecuaciones gobernantes. Dichas versiones como el MTCVDE2 y el MTCVDE9 pronostican anomalías de la temperatura y de la circulación en los 700 mb con amplitudes o tamaños del mismo orden que las correspondientes anomalías observadas; sin embargo, gran parte de la variabilidad atmosférica generada por estos modelos se debe a la dinámica de las ondas de Rossby y no a la retroalimentación de los forzamientos internos.

El año 1983 fué excepcionalmente anómalo debido al evento ENOS (sección 8.2). Pronosticar las anomalías a 700 mb con un modelo hemisférico durante un período donde se presenta un evento ENOS, puede presentar serias dificultades debido al efecto remoto que pudieran tener las anomalías de la temperatura de la superficie del Pacífico Ecuatorial sobre la atmósfera de latitudes medias (Bjerkens, 1969). Sin embargo, la influencia remota de

regiones fuera del Hemisferio Norte puede ser incorporada en el MTCV a través de condiciones de frontera adecuadas.

Estudios basados en observaciones sugieren que un evento ENOS puede generar, en latitudes medias, importantes anomalías negativas de gran escala en la temperatura de la superficie oceánica via una teleconexión atmosférica (Quiroz, 1985). Es posible que por un proceso de retroalimentación dichas anomalías puedan incrementar la persistencia en la atmósfera como sucedió al final de 1982 y en los primeros meses de 1983, cuando en grandes áreas del hemisferio norte las anomalías de la temperatura y la altura de 700 mb persistieron de un mes al siguiente, aunque en otras regiones como en América del Norte se dieron fuertes cambios. En particular, las regiones cercanas a la frontera lateral del modelo presentaron una fuerte persistencia durante el año 1983; por consiguiente, el proponer como condición de frontera a la persistencia resultó ser mejor que la condición de frontera que supone que el transporte horizontal de calor por viento medio y turbulencia es nulo en la frontera lateral.

Por otro lado, la incorporación del calentamiento troposférico y el transporte horizontal de calor por viento medio en la ecuación de vorticidad por medio de los parámetros λ_E^2 y λ_V^2 , mejora en términos generales el cálculo de la circulación meridional normal de los 700 mb y el pronóstico de sus anomalías (v_{7DN}); en cambio, el cálculo de la altura y la circulación zonal normal de 700 mb empeora al incorporar dichos términos en la ecuación de vorticidad, lo mismo que la predicción de sus correspondientes anomalías (H_{7DN} y u_{7DN}).

Al reducir empíricamente los parámetros λ_E^2 , λ_V^2 , y C_0 a 1/3 de sus valores teóricos dados en (3.137), los cálculos de los cuatro campos normales T_{7N} , H_{7N} , u_{7N} y v_{7N} mejoran considerablemente, lo mismo que las predicciones de sus correspondientes anomalías. Por consiguiente, es necesario realizar más experimentos con diferentes valores de dichos parámetros para encontrar sus valores óptimos, pero no basta un sólo mes para ajustar los parámetros del modelo sino que es necesario realizar predicciones para un período que incluya varios meses, y de esta manera realizar una evaluación con la cual se pueda determinar, estadísticamente, el valor óptimo

de los parámetros y la capacidad del modelo para pronosticar las anomalías mensuales de la circulación media de la atmósfera.

Sin embargo, es conveniente trasladar el programa del modelo a la supercomputadora CRAY de la UNAM ya que una predicción con este modelo, en la computadora A12 donde actualmente se corre, requiere de 4 a 12 horas de tiempo de máquina. En la supercomputadora CRAY este tiempo podría reducirse hasta 5 minutos, aproximadamente.

APENDICE A
CONSTANTES BASICAS DEL MTCV.

Las constantes básicas del MTCV en el sistema CGSK son las siguientes:

| | |
|---|---|
| Gradiente térmico vertical..... | $\beta = 6.5 \times 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C cm}^{-1}$ |
| Gradiente térmico vertical modificado.... | $\bar{\beta} = 4.6 \times 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C cm}^{-1}$ |
| Coefficiente de arrastre | $C_D = 1.0 \times 10^{-3}$ |
| Calor específico del agua..... | $c_s = 4.184 \times 10^7 \text{ ergios gr}^{-1}$ |
| Calor específico del aire a | |
| volumen constante..... | $c_v = 0.717 \times 10^7 \text{ ergios gr}^{-1}$ |
| Aceleración de la gravedad..... | $g = 980 \text{ cm s}^{-2}$ |
| Razón de los calores específicos a | |
| volumen constante y presión constante... $\gamma = c_p / c_v = 1.4$ | |
| Altura de la capa troposférica | |
| del modelo..... | $H_0 = 9.0 \times 10^5 \text{ cm}$ |
| Altura de la capa límite..... | $H_s = 1.0 \times 10^5 \text{ cm}$ |
| Profundidad de la capa superior | |
| oceánica..... | $h_s = 100.0 \times 10^2 \text{ cm}$ |
| Velocidad angular de la Tierra..... | $\Omega = 0.7292 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ |
| Parámetro de Coriolis evaluado en la | |
| latitud $\phi = 45^\circ$ | $f_0 = 1.0 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ |
| Presión característica en el tope de | |
| la capa troposférica del modelo..... | $P_0 = 0.31 \times 10^6 \text{ dinas cm}^{-2}$ |
| Presión característica del nivel | |
| de los 700 mb..... | $P_{07} = 2.87 \times 10^6 \text{ dinas cm}^{-2}$ |
| Constante del gas..... | $R = .287 \times 10^7 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-2} \text{ gr}^{-1} \text{ } ^\circ\text{K}^{-1}$ |
| Densidad del agua..... | $\rho_s = 1. \text{ gr cm}^{-3}$ |
| Densidad del aire en el tope de la | |
| capa troposférica del modelo..... | $\rho_0 = 4.706 \times 10^{-4} \text{ gr cm}^{-3}$ |
| Temperatura característica en el tope | |
| de la capa troposférica del modelo..... | $T_0 = 229.5 \text{ } ^\circ\text{K}$ |
| Temperatura característica del | |
| nivel de 700 mb..... | $T_{07} = 268.5 \text{ } ^\circ\text{K}$ |
| Temperatura característica de | |
| la superficie de la Tierra..... | $T_{s0} = T_{a0} = 288 \text{ } ^\circ\text{K}$ |

APENDICE B.
PARAMETROS CONSTANTES DEL MTCV.

Los parámetros $g_1, g_2, \dots, g_8, F_{121}, F'_{121}, \dots, F'_{126}, g_{1H}, g_{2H}, \dots, g_{5H}$ y $F_{16}, F'_{16}, F'_{106}, \dots$ y F'_{112} están dados en términos de las constantes $T_0, P_0, \rho_0, T_{a0}, \rho_{a0}, \alpha, \beta, \bar{\beta}, \gamma, c_v, f_0, g, H_0, H_5$ y R en la siguiente forma:

$$g_1 = \frac{R T_{a0}^2}{f_0^2 P_0 \beta (\alpha+1)}, \quad g_2 = \frac{g T_{a0}}{f_0^2 T_0 \beta^2} \left[\frac{T_0}{\alpha} - \frac{T_{a0}}{\alpha+1} \right]$$

$$g_3 = \frac{R T_{a0}^3}{f_0^3 P_0^2 \beta (\alpha+2)},$$

$$g_4 = \frac{-g^2 T_{a0}}{f_0^3 T_0 \beta^3} \left[\frac{2 T_0 T_{a0}}{\alpha+1} - \frac{T_{a0}^2}{\alpha+2} - \frac{T_0^2}{\alpha} \right]$$

$$g_5 = \frac{R g T_{a0}^2}{f_0^3 P_0 T_0 \bar{\beta}} \left[\frac{T_0}{\alpha+1} - \frac{T_{a0}}{\alpha+2} \right], \quad g_6 = -\frac{1}{f_0 \rho_{a0}}$$

$$g_7 = \frac{1}{g \rho_0} \left[1 - \left(\frac{T_{a0}}{T_0} \right)^\alpha \right]$$

$$g_8 = -\frac{\alpha P_0}{g \rho_0 T_{a0}} \left[1 - \left(\frac{T_{a0}}{T_0} \right) \right] \left(\frac{T_{a0}}{T_0} \right)^\alpha$$

$$F_{121} = \frac{-\bar{\beta} c_v T_0^2}{f_0^2 \bar{\beta}^2 (\alpha+1) (\alpha+2)} \left[1 - \left(\frac{T_{a0}}{T_0} \right)^{\alpha+2} \right] - \bar{\beta} c_v \rho_{a0} H g_1$$

$$F'_{121} = -\frac{\bar{\beta} c_v T_0}{\beta g} \left\{ \frac{1}{\alpha+1} \left[1 - \left(\frac{T_{a0}}{T_0} \right)^{\alpha+1} \right] - \left[1 - \left(\frac{T_{a0}}{T_0} \right) \right] \left(\frac{T_{a0}}{T_0} \right)^\alpha \right\}$$

$$F'_{121} = - \frac{T_0}{\beta (\alpha+1)} \left[1 - \left(\frac{T_{a0}}{T_0} \right)^{\alpha+1} \right]$$

$$F_{122} = \frac{\bar{\beta} c_v P_0 T_0 g}{f_0^2 R \beta^3 (\alpha+1)} \left\{ \frac{1}{\alpha+2} \left[1 - \left(\frac{T_{a0}}{T_0} \right)^{\alpha+2} \right] - \frac{1}{\alpha} \left[1 - \left(\frac{T_{a0}}{T_0} \right)^{\alpha+1} \right] \right\} - \bar{\beta} c_v \rho_{a0} H g_2$$

$$F'_{122} = \frac{\alpha c_v P_0 \bar{\beta}}{\beta g} \left\{ \frac{1}{\alpha+1} \left[1 - \left(\frac{T_{a0}}{T_0} \right)^{\alpha+1} \right] - \frac{1}{\alpha} \left[1 - \left(\frac{T_{a0}}{T_0} \right)^{\alpha} \right] + \left[1 - \left(\frac{T_{a0}}{T_0} \right)^{\alpha} \right]^2 \left(\frac{T_{a0}}{T_0} \right)^{\alpha} \right\}$$

$$F''_{122} = \frac{\alpha P_0}{\beta} \left\{ \frac{1}{\alpha+1} \left[1 - \left(\frac{T_{a0}}{T_0} \right)^{\alpha+1} \right] - \frac{1}{\alpha} \left[1 - \left(\frac{T_{a0}}{T_0} \right)^{\alpha} \right] \right\}$$

$$F_{123} = - \frac{\bar{\beta} c_v T_0^3 R}{f_0^3 P_0 \beta^2 (\alpha+2) (\alpha+3)} \left[1 - \left(\frac{T_{a0}}{T_0} \right)^{\alpha+3} \right] - \bar{\beta} c_v \rho_{a0} H g_3$$

$$F_{124} = \frac{\bar{\beta} c_v g^2 T_0 P_0}{f_0^3 R \beta^4} \left\{ \frac{2}{(\alpha+1) (\alpha+2)} \left[1 - \left(\frac{T_{a0}}{T_0} \right)^{\alpha+2} \right] - \frac{2}{(\alpha+2) (\alpha+3)} \left[1 - \left(\frac{T_{a0}}{T_0} \right)^{\alpha+3} \right] - \frac{1}{\alpha(\alpha+1)} \left[1 - \left(\frac{T_{a0}}{T_0} \right)^{\alpha+2} \right] \right\} - \bar{\beta} c_v \rho_{a0} H g_4$$

$$F_{125} = \frac{\bar{\beta} c_v T_0^2 g}{f_0^3 \beta^3 (\alpha+2)} \left\{ \frac{1}{\alpha+3} \left[1 - \left(\frac{T_{a0}}{T_0} \right)^{\alpha+3} \right] - \frac{1}{\alpha+1} \left[1 - \left(\frac{T_{a0}}{T_0} \right)^{\alpha+2} \right] \right\} - \bar{\beta} c_v \rho_{a0} H g_5$$

$$F'_{126} = \frac{\bar{\beta} c_v (H_D - H_S)}{f_0} \quad , \quad g_{1H} = \frac{R T_0^2}{f_0^2 P_0 \beta (\alpha+1)}$$

$$g_{2H} = \frac{g T_0}{f_0^2 \beta^2} \left[\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha+1} \right], \quad g_{3H} = \frac{R T_0^3}{f_0^3 P_0^2 \beta (\alpha+2)}$$

$$g_{4H} = \frac{-g^2 T_0}{f_0^3 \beta^3} \left[\frac{2}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+2} - \frac{1}{\alpha} \right]$$

$$g_{5H} = \frac{R g T_{a0}^2}{f_0^3 P_0 T_0 \beta} \left[\frac{1}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+2} \right], \quad g_7 = g_7 - \frac{g_8 F'_1}{F_2''}$$

$$F_{16} = - \frac{T_0}{P_0 \beta (1-\alpha)} \left[1 - \left(\frac{T_{a0}}{T_0} \right)^{1-\alpha} \right], \quad F'_{16} = - \frac{g_8 c_v H_0}{R g_7 F_2''} F_{16}$$

$$F'_{23} = - \frac{g_8 \gamma F_2}{g_7 F_2''} F_{16}$$

$$F'_{106} = \frac{F_{16}}{g_7} \left[g_{1H} - \frac{\rho_{a0}}{\rho_0} g_1 + \frac{g_8 F_{121}}{F_2''} \right]$$

$$F'_{107} = \frac{F_{16}}{g_7} \left[g_{2H} - \frac{\rho_{a0}}{\rho_0} g_2 + \frac{g_8 F_{122}}{F_2''} \right]$$

$$F'_{108} = - \frac{F_{16}}{g_7} \frac{g_8 \gamma F_0}{F_2''}$$

$$F'_{109} = - \frac{F_{16}}{g_7} \left[g_{3H} - \frac{\rho_{a0}}{\rho_0} g_3 + \frac{g_8 F_{123}}{F_2''} \right]$$

$$F'_{110} = - \frac{F_{16}}{g_7} \left[g_{4H} - \frac{\rho_{a0}}{\rho_0} g_4 + \frac{g_8 F_{124}}{F_2''} \right]$$

$$F'_{111} = - \frac{F_{16}}{g_7} \left[g_{5H} - \frac{\rho_{a0}}{\rho_0} g_5 + \frac{g_8 F_{125}}{F_2''} \right]$$

$$F'_{112} = \frac{F_{16}}{g_7} \left[\frac{\rho_{a0}}{\rho_0} g_6 + \frac{g_8 F'_{126}}{F_2''} \right]$$

BIBLIOGRAFIA.

- Adem, J., 1962. On the Theory of the General Circulation of the Atmosphere. *Tellus*, Vol. 14, No. 1, pp. 102-115.
- Adem, J., 1963. Preliminary Computations on the Maintenance and Prediction of Seasonal Temperatures in the Troposphere. *Monthly Weather Review*, Vol. 91, No. 8, pp. 375-386.
- Adem, J., 1964a. On the Normal State of the Troposphere - Ocean - Continent System in the Northern Hemisphere. *Geofisica Internacional*, Vol. 4, No. 1, pp. 3-32.
- Adem, J., 1964b. On the Physical Basis for the Numerical Prediction of Monthly and Seasonal Temperatures in the Troposphere - Ocean - Continent System. *Monthly Weather Review*, Vol. 92, No. 3, pp. 91-103.
- Adem, J., 1965a. Long - Range Numerical Weather Prediction Experiments. *WMO Technical Note No 66, World Meteorological Organization, Geneva*, pp. 138-140.
- Adem, J., 1965b. Experiment Aiming at Monthly and Seasonal Numerical Weather Prediction. *Monthly Weather Review*, Vol. 93, No 8, pp. 495-503.
- Adem, J., 1967. Relation Among Wind, Temperature, Pressure, and Density, with Particular Reference to Monthly Averages. *Monthly Weather Review*, Vol. 95, No. 8, pp. 531-539.
- Adem, J., 1968a. Long Range Numerical Prediction with a Time - Average Thermodynamic Model. II) The Basis Equations, II) The Heating Functions and III) The Numerical Experiments. *Extended Forecast Division, NMC, Weather Bureau, ESSA - Washington, D.C. (unpublished)*.
- Adem, J. and W.J. Jacob, 1968b. One - Year Experiment in the Numerical Prediction of Monthly Mean Temperature in the Atmosphere - Ocean - Continent System. *Monthly Weather Review*, Vol. 96, No. 10, pp. 714-719.
- Adem, J., 1969a. Numerical Prediction of Mean Monthly Ocean Temperatures. *Journal of Geophysical Research*, Vol. 74, No. 4, pp. 1104-1108.

- Adem, J., 1969b. Long-Range Numerical Prediction With a Time - Averaged Thermodynamic Model. *Proceedings of the WMO/IUGG Symposium on Numerical Weather Prediction, Tokyo, Japan, November 26 - December 6, 1968, Japan Meteorological Agency, pp. IV-9 - IV-15.*
- Adem, J., 1970a. On the prediction of Mean Monthly Ocean Temperatures. *Tellus, Vol. 22, No. 4, pp. 410-430.*
- Adem, J., 1970b. Incorporation of Advection of Heat by Mean Winds and by Ocean Currents in a Thermodynamic Model for Long-Range Weather Prediction. *Monthly Weather Review, Vol 98, No. 10, pp. 776-786.*
- Adem, J., 1975. A Critical Appraisal of Simple Climatic Models. *Report of the GARP Study Conference on the Physical Basis of Climate and Climate Modelling, Stockholm, 29 July-10 August, 1974. GARP P.S. No 16, WMO, Geneva, pp. 163-170.*
- Adem, J., 1979 Low Resolution Thermodynamic Grid Models. *Dynamics of Atmosphere and Ocean, Vol 3, No. , pp. 433-451.*
- Adem, J. and R. Garduño, 1982. Preliminary Experiments on the Climatic Effect of an Increase of the Atmosphere CO₂. Using a Thermodynamic Model. *Geofisica Internacional, Vol. 21, No. 4, pp. 309-324.*
- Adem, J. and R. Garduño, 1984. Sensitivity Studies on the Climatic Effect of an Increase of Atmospheric CO₂. *Geofisica Internacional, Vol.23, No. , pp. 17-35.*
- Adem, J. and W.J. Donn, 1985. Satellite Observations Needed for Monthly and Seasonal Climate Prediction. *Advances in Space Research., Vol. 5, No. 6, pp. 41-44.*
- Adem, J. and V.M. Mendoza, 1987 Sensitivity Experiments on Ocean Temperature Predictions With a Thermodynamic Model. *Geofisica Internacional, Vol. 26, No. 4, pp. 525-543.*
- Adem, J. and V.M. Mendoza, 1988 Recent Numerical-Termodynamic Experiments on Sea Surface Temperature Prediction. *Geofisica Internacional, Vol. 27, No. 3, pp. 309-325.*
- Adem, J., 1991 Review of Development and Applications of the Adem Thermodynamic Climate Model. *Climate Dynamics, Vol.5, pp.145-160.*

- Adem, J. and W.L. Donn, 1985 Satellite Observations Needed for Monthly and Seasonal Climate Prediction. *Advances in Space Research*, Vol. 5 NO. 6, pp. 41-44.
- Adem, J., 1991. Review of the Development and Applications of the Adem Thermodynamic Climate Model. *Climate Dynamic*. Vol. 5, pp. 145-160.
- Bjerknes, J., 1969. Atmospheric Teleconnections From the Equatorial Pacific. *Monthly Weather Review*, Vol. 97, pp 163-172.
- Bolin, B., 1955. An Improved Barotropic Model and Aspects of Using the Balance Equation for Three-Dimensional Flow. *Tellus*, Vol. 8, No. 1, pp. 61-75.
- Budyko, M.I., 1956. Teplovoi Balans Zennol Poverkhnosti (The Heat Balance of the Earth's Surface). *Hydrometeorological Publishing House, Leningrad*, 254 pp. (Translated from the Original Russian by N.A. Stepanova, U.S. Weather Bureau, 1958).
- Budyko, M.I., 1969. Effect of Polar Radiation Variation on the Climate of Earth. *Tellus*, Vol. 21, No. 9, pp. 611-619.
- Charney, J.G., 1948. On the Scale of Atmospheric Motions. *Geophysics Publications*, Vol. 17 No. 2, 17 pp.
- Charney, J.G., 1949. On a Physical Basis for Numerical Prediction of Large-Scale Motions in the Atmosphere. *Journal of Meteorology*, Vol. 6, No. 6, pp. 371-385.
- Charney, J.G. and A. Eliassen, 1949. A Numerical Method for Predicting the Perturbations of the Middle Latitude Westerlies. *Tellus*, Vol. 1, No. 2, pp. 38-54.
- Charney, J.G., R. Fjörtoft and J. Von Neumann, 1950. Numerical Integration of the Barotropic Vorticity Equation. *Tellus*, Vol. 2, No. 4, pp. 237-254.
- Clapp, P.F., S.H. Scolnik, R.E. Taubensee and F.J. Winninhoff, 1965. Parameterization of Certain Atmospheric Heat Sources and Sinks for Use in a Numerical Model for Monthly and Seasonal Forecasting. *Unpublished Study of Extended Forecast Division, U.S. Weather Bureau, Washington D.C.* (copies available for interested persons).

- Clapp, P.F., 1970. Parameterization of Macroscale Transient Heat Transport for use in a Mean-Motion Model of the General Circulation. *Journal Applied Meteorology*, Vol. 9, pp. 554-563.
- Cressman, G.P., 1958. Barotropic Divergence and Very Long Atmospheric Waves. *Monthly Weather Review*, Vol. 86, No. 8, pp. 293-297.
- Doporto, M., 1951. Dynamical Aspects of the Constancy of Air Density at 8 km. *Technical Note No. 2, Irish Meteorological Service*, 1943. (Reprinted as *Geophysical Publications*, Vol. 3, No. 6, 1951).
- Eliassen, A., 1949. The Quasi-Static Equations of Motion With Pressure as Independent Variable. *Geophysical Publications*, Vol. 17, No. 3, 10 pp.
- Elsberry, R.L. and N.T. Camp, 1978. Oceanic Thermal Response to Strong Atmospheric Forcing, I, Characteristics of Forcing Events. *Journal Physics Oceanographic*, Vol. 8, pp. 206-214.
- Frankignoul, C., 1985. Sea Surface Temperature Anomalies, Planetary Waves, and Air-Sea Feedback in the Middle Latitudes. *Reviews of Geophysics*, Vol. 23, No. 4, pp. 357-390.
- García-Colín, L., 1975. Teoría Cinética de los Gases. *Curso de Postgrado Dictado en el Centro de Física y Auspiciado por el Centro de Estudios Avanzados del Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas (I.V.I.C)*, Caracas Venezuela (copias disponibles a las personas interesadas).
- Garduño R. and J. Adem, 1988. Interactive Long Wave Spectrum for the Thermodynamic Model. *Atmósfera*, Vol. 1, pp. 157-172.
- Haltiner, G.J., 1980. Numerical Prediction and Dynamic Meteorology. *Second Edition John Wiley and Sons, New York Chichester Brisbane Toronto*, 478 pp.
- Hare, F.K., 1977. Climate and Desertification, In: *Desertification; Its Causes and Consequences*. Pergamon Press, Oxford.
- Holton, J.R., 1979. An Introduction to Dynamic Meteorology. *International Geophysics Series, Academic Press, Second Edition*, Vol. 23, 383 pp.

- Joseph, E. and D.S. Heinz, 1983. On the Theory of the Long-Term Variability of the Atmosphere. *Journal of the Atmospheric Sciences*, Vol. 40, pp. 1073-1085.
- Kasahara A. and W.M. Washington, 1967. NCAR Global General Circulation Model of the Atmosphere. *Monthly Weater Review*, Vol. 95, No. 7, pp. 389-402.
- Lamb, H., 1932. *Hydrodynamics*, 6th. Edition, Cambrige, Univ., Press, New York.
- Mac-Cracken, M.C., 1969. A Zonal General Circulation Model. *Lawrence Radiation Laboratory, Report UCRL-50594*.
- Manabe, S., J. Smagorinsky and R.F. Strickler, 1965. Simulated Climatology of a General Circulation Model With a Hydrologic Cycle. *Montly Weather Review*, Vol. 93, pp. 769-980.
- Mason, J., 1986. The Accomplishment and their Implications for the World Weather Watch (Executive Summary). *International Conference on the Results of the Global Weather Experiment and their Implications for the World Weather Watch: Global Atmospheric Research Programe (GARP)*. Vol. 1, No.26, pp XXIII-XXXIV.
- Mendoza, V.M., 1981. Sobre la Predicción de la Temperatura Media Mensual de los Océanos. Tesis de Licenciatura para obtener el Grado de Fisico. Facultad de Ciencias UNAM, Mexico, D.F..
- Mendoza, V.M., 1989. Incorporación de la Ecuación de Vorticidad en un Modelo Termodinámico del Clima. *Apuntes sin publicar disponibles a las personas interesadas*. Centro de Ciencias de la Atmosfera, UNAM, Mexico, D.F..
- Miller, J.E., 1950. Energy Transformation Functions. *Journal of Meteorology*, Vol. 7, pp. 152-159.
- Mintz, Y., 1981. The Sensitivity of Numerically Simulated Climates to Land-Surface Boundary Conditions. *The Global Climate*, edited by John T. Houghton, 1985. Cambridge University Press, Cambridge, London New York, New Rochelle, Melbourne Sydney, pp 80-105; 233 pp.
- Miyakoda, K. and J.P. Chao, 1982. Essay on Dynamical Long-Range Forecasts of Atmospheric Circulation. *Journal of the Meteorological Society of Japan*, Vol. 6, No.1, pp. 292-308.

- Montgomery, R.B., 1939. Ein Versuch den Vertikalem und Seitlichen Austausch in der Tiefe der Sprungschicht im Äquatorialen Atlantischen Ozean Zubestimmen. *Ann. Hydr. Mar. Meteorol., Berlin, Vol. 67, 242 pp.*
- Neumann, G., 1940. Die Ozeanographischen Verhältnisse an der Meeresoberfläche im Golf Stromsektor Nördlich und Nordwestlich der Azoren. *Ann. Hydr. Mar. Meteorol., Beiheft, 87 pp.*
- Qiroz, R.S., 1983. The Climate of the "El Niño" Winter of 1982-83 - A Season of Extraordinary Climatic Anomalies (Seasonal Climate Summary). *Monthly Weather Review, Vol. 111, pp. 1685-1706.*
- Rasmusson, E.M. and T.H. Carpenter, 1982. Variation in Tropical Sea Surface Temperature and Surface Wind Fields Associated With the Southern Oscillation / El Niño. *Monthly Weather Review, Vol. 110, pp. 354-384.*
- Reynolds, O., 1895 On the Dynamical Theory of Incompressible Fluid and the Determination of the Criterion. *Phil. Trans. Roy. Soc., London, A. Vol. 86, pp. 123-164.*
- Richardson, L.F., 1922. Weather Prediction by Numerical Process. *Cambridge University Press, London and New York. 236 pp.*
- Rosby, C.G. and collaborators, 1939. Relation Between Variations in the Intensity of the Zonal Circulation of the Atmosphere and the Displacements of the Semipermanent Center of the Action. *Journal of Marine Research, Vol. 2, pp. 38-35.*
- Rosby, C.G., 1940. Planetary Flow Patterns in the Atmosphere. *Quart. J.R., Meteor. Soc., Vol. 66, supplement, pp. 68-87.*
- Ruiz, A.B., 1991. Aplicación del Modelo Termodinámico del Clima para la Predicción de las Anomalías de Temperatura y Precipitación en la Republica Mexicana. *Tesis de Licenciatura para obtener el Grado de Maestro en Ciencias (Geofísica), Facultad de Ciencias, UNAM, Mexico, D.F.*
- Saltzman, B., 1968. Steady-State Solutions for Axially-Symmetric Climatic Variables. *Pure Appl. Geophys., Vol. 69, pp. 237-259.*
- Sellers, W.D., 1969. A Global Climatic Model Based on the Energy Balance of the Earth-Atmosphere System. *Journal Applied Meteorology, Vol. 8, pp. 392-400.*

- Sen, S.N., 1924. On the Distribution of Air Density Over the Globe. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, Vol. 50, pp. 29-51.
- Shaw, D.M. and W.L. Donn, 1971. A Thermodynamic Study of Arctic Paleoclimatology. *Quat. Res.*, New York, Vol.1, pp. 115-187.
- Shuman, F.G. and W. Vanderman, 1966. Difference System and Boundary Conditions for the Primitive Equation Barotropic Forecast. *Monthly Weather Review*. Vol. 94, No.5, pp. 392-336.
- Smagorinsky, J., 1967. The Role of Numerical Modeling. *Bulletin American Meteorological Society*, Vol. 48, pp 89-93.
- Smagorinsky, J., 1969. Problems and Promises of Deterministic Extended Range Forecasting. *Bulletin of American Meteorological Society*, Vol. 50, No. 4, pp 286-322.
- Stommel, H., 1950. Determination of Lateral Diffusivity in the Climatological Mean Gulf Stream. *WHOI*, No. 552, Woods Hole, Mass.
- Thompson, P.D., 1961. Numerical Weather Analysis and Prediction. *The Macmillan Company, New York*, 170 pp.
- Tucker, G.B., 1977. An Observed Relation Between the Macroscale Local Eddy Flux of Heat and the Mean Horizontal Temperature Gradient. *Commonwealth Scientific and Industrial Research Organization Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, Vol. 103. No. 435, pp. 157-167.
- Wagner, A., 1909. Die Temperaturverhältnisse in der Freien Atmosphäre. *Beiträge zur Physik der Freien Atmosphäre*, Vol. 3, No. 2/3, pp 57-168.
- Wiin-Nielsen, A., 1959. On Barotropic and Baroclinic Models, With Special Emphasis on Ultra-Long Waves. *Monthly Weather Review*, Vol. 87, No. 5, pp. 171-183.
- Wiin-Nielsen, A. 1970. A Theoretical Study of Annual Variation of Atmospheric Energy. *Tellus*, Vol. 22, pp 1-16.
- Williams, G.R. and D.R. Davies, 1965. A Mean Motion Model of the General Circulation. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, Vol. 91, pp. 441-489.