32
2 ej.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ANALISIS DE LA ECUACION DE DIRAC EN EL ESPACIO-TIEMPO DE SCHWARZSCHILD MAGNETIZADO

TESIS QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

FISICO

PRESENTA:

MOISES DEL PINO PEÑA

MEXICO, D. F. 1992

Pág.

CAPITULO I.

La ecuación de Dirac en espacio curvo

CAPITULO II.

Definición de espin en espacio curvo

CAPITULO III.

La ecuación de Dirac en el espacio-tiempo
de Schwarzschild magnetizado

INTRODUCCION

INTRODUCCION

El estudio de los agujeros negros, en especial, cuando se intenta explicar el fenómeno de la cuantización en espacios curvos; ha encontrado en el cálculo espinorial a un gran aliado, el cual, ya está convertido en una de las herramientas más útiles en relatividad general. Ya que gracias a éste, se han logrado diversos e importantes resultados, que difícilmente pueden obtenerse de otra manera. Siendo esto motivo suficiente para justificar por qué en esta tesis nuestro análisis es llevado a cabo bajo el amparo de tal técnica, en virtud de la que se ve simplificado el tratamiento de la ecuación de Dirac en la métrica de Schwarzschild.

Por otra parte, en el universo, los hoyos negros que existen en las galaxias o cúmulos de éstas, se encuentran inmersos en un campo magnético cósmico. Situación que despierta en la actualidad, la curiosidad e inquietud de los astrofísicos sobre cuál es la naturaleza de una vecindad cercana al horizonte de un agujero negro en presencia de un campo magnético externo, y cómo se comportan los electrones en ella; interrogantes cuyas respuestas ampliarían de modo significativo el conocimiento que tenemos de la realidad física.

Por todo lo anterior, esperamos que la investigación emprendida en el presente trabajo, sirva de base y apoyo a esfuerzos futuros para ofrecer luz a ese asunto, con lo que también veremos enriquecida nuestra comprensión de las leyes físicas que gobiernan lo que sucede en el cosmos, y por ende, a nuestra vida en él.

Así, en el capítulo I se presenta la ecuación de Dirac en espacio curvo, revisando la formulación de tétrada nula de la relatividad general; en virtud del que, ésta, puede ser construida. La definición de espín en espacio curvo se desarrolla y discute en el capítulo II. El capítulo III aprovecha los resultados de las secciones anteriores, y es en él, donde se obtiene la ecuación de Dirac en el espacio-tiempo de Schwarzschild magnetizado, además de mostrar logros relevantes de su análisis, como la no conservación del tensor de espín por la geometría inherente al universo magnético de Schwarzschild.

CAPITULO I

I. LA ECUACION DE DIRAC EN ESPACIO CURVO

El cálculo espinorial proporciona un gran auxilio al estudio de la relatividad general, además de a los fascinantes problemas cosmológicos que se desprenden de ella; por lo ventajoso y eficaz de su lenguaje para clarificar en gran medida, las estructuras matemáticas tan densas y oscuras que están ocultas en el seno de la teoría de campos, principalmente si estos no son clásicos; sino, como en nuestro caso, cuánticos. Por conveniencia, para hacer más completa y sistemática la exposición que presentamos, se vierte a continuación la primera parte de la Ref. [3], y en el curso de ésta, realizaremos los agregados y observaciones convenientes para articular e integrar dicho material de manera coherente a los propósitos de este trabajo.

Los espinores se introducen normalmente como base para las representaciones irreducibles del grupo SL $(2,\mathbb{C})$, el cuál gobierna las leyes de transformación de los coeficientes de espín. Tales coeficientes son expresados de manera más natural en términos de componentes de formas tensoriales relacionadas con la base de la tétrada nula.

La mayoría de los espinores fundamentales en la formulación de la tétrada nula de la relatividad general tienen componentes complejas, estos espinores se transforman según la representaciones $D (l,m)$ del grupo SL $(2,\mathbb{C})$. Por otro lado, los espinores de Dirac que describen las partículas de espín $\frac{1}{2}$ son de cuatro componentes; siendo estos, parejas de espinores de dos componentes de $D (\frac{1}{2},0)$ o $D (0,\frac{1}{2})$. Esto facilita enormemente expresar la ecuación de Dirac en una forma generalmente covariante, válida en espacio curvo.

El desarrollo del análisis matemático en el transcurso de esta investigación, se sustenta en una versión peculiarmente compacta del formalismo de tétrada nula, basada en la formulación desarrollada por Plebanski [1] , la cual permite expresar a lo largo de la exposición, las estructuras básicas de la relatividad general a través de espinores de Dirac y matirces, obteniendo así expresiones nuevas compactas y muy útiles para explicar el comportamiento del electrón en un espacio curvado.

1.1 ANTECEDENTES.

A continuación, se presenta un sumario del formalismo de tétrada nula.

Sea V_4 una variedad Riemanniana con métrica:

$$dS^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = 2\, e^1 e^2 + 2\, e^3 e^4 \ , \qquad (1)$$

donde las 1-formas $e^a = e^a{}_\mu dx^\mu$ definen una tétrada nula, y son tales que

$$e^a{}_\mu e^b{}_\nu g^{\mu\nu} = \eta^{ab} \ , \qquad (2)$$

con $a, b = 1, \ldots, 4$ y $\mu, \nu = 0, 1, \ldots, 3$.

Aquí,

$$\eta_{ab} = \eta^{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \qquad (3)$$

La tétrada inversa $e^\mu{}_a$ es definida mediante la condición $e^\mu{}_a e^b{}_\mu = \delta^b{}_a$.

En lo sucesivo, los índices latinos y griegos referirán siempre a componentes tetradiales y tensoriales, respectivamente. También, la matriz η_{ab} tiene como función: Subir y bajar índices en las expresiones tetradiales.

Si V_4 es una variedad real, y tiene la signatura (−+++), entonces se tiene por construcción que, bajo la conjugación compleja

$$(e^1, e^2, e^3, e^4)^* = (e^2, e^1, e^3, e^4) . \qquad (4)$$

Asimismo, si V_4 es Euclidiano, con signatura (++++), entonces

$$(e^1, e^2, e^3, e^4)^* = (e^2, e^1, e^4, e^3) . \qquad (5)$$

Los coeficientes de rotación de Ricci son definidos como

$$\Gamma^a{}_{bc} = - e^a{}_{\mu;\nu} e^\mu{}_b e^\nu{}_c , \qquad (6)$$

y tienen la propiedad $\Gamma_{abc} = \Gamma_{[ab]c}$, i.e. , $\Gamma_{abc} = \frac{1}{2} (\Gamma_{abc} - \Gamma_{bac})$. Definiendo las 1-formas

$$\Gamma_{ab} = \Gamma_{abc} e^c , \qquad (7)$$

obteniéndose de aquí, las ecuaciones estructurales de Cartan

$$i \text{) } de^a = e^b \wedge \Gamma^a{}_b , \qquad (8)$$

$$ii \text{) } d\Gamma_{ab} + \Gamma_{ac} \wedge \Gamma^c{}_b = R_{ab} , \qquad (9)$$

donde $R_{ab} = R_{abcd} e^c \wedge e^d$; siendo las R_{abcd} , componentes tetradiales del tensor de curvatura de Riemann.

1.2 ECUACION DE DIRAC Y MATRICES EN LA FORMULACION DE PLEBANSKI.

Un espinor de Dirac Ψ es una pareja de dos espinores ψ_A y $\phi^{A'}$ que se transforman de acuerdo a las representaciones

$D(\frac{1}{2},0)$ y $D(0,\frac{1}{2})$ del grupo $SL(2,\mathbb{C})$; ése es,

$$\Psi = \begin{bmatrix} \psi_A \\ \phi^{A'} \end{bmatrix} . \qquad (10)$$

Por lo tanto, la ecuación de Dirac puede ser escrita en la forma ortodoxa

$$\gamma^{\mu}\nabla_{\mu}\Psi + im\Psi = 0 . \qquad (11)$$

Del mismo modo, para el espinor de Dirac adjunto:

$$\overline{\Psi} = (\phi^{A} \ \psi_{A'}) , \qquad (12)$$

y se tiene

$$\overline{\Psi} \ \overrightarrow{\nabla}_{\mu}\gamma^{\mu} - im\overline{\Psi} = 0 . \qquad (13)$$

Aquí, las matrices de Dirac γ^{μ} satisfacen la relación

$$\gamma^{\alpha}\gamma^{\beta} + \gamma^{\beta}\gamma^{\alpha} = -2\, g^{\alpha\beta} \ , \ \text{y} \ , \ \gamma^{\alpha}\gamma_{\beta} + \gamma_{\beta}\gamma^{\alpha} = -2\, \delta^{\alpha}_{\ \beta} \ , \qquad (14)$$

y la derivada covariante está definida por

$$\nabla_{\mu}\Psi = \partial_{\mu}\Psi + \Gamma_{\mu}\Psi , \qquad (15)$$

donde Γ_{μ} son las matrices de conexión. Análogamente:

$$\overline{\Psi} \ \overleftarrow{\nabla}_{\mu} = \overline{\Psi}\partial_{\mu} - \overline{\Psi}\Gamma_{\mu} . \qquad (16)$$

La versión tetradial de las matrices de Dirac es $\gamma^{n} = e^{n}_{\ \mu}\gamma^{\mu}$ y su inversa es $\gamma^{\mu} = e^{\mu}_{\ n}\gamma^{n}$.

La representación más natural de las matrices γ^a en la base de la tétrada nula es:

$$\gamma^1 = \sqrt{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \gamma^2 = \sqrt{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\gamma^3 = \sqrt{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ y } \gamma^4 = \sqrt{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad (17)$$

y ellas cumplen las reglas de anticonmutación

$$\gamma^a\gamma^b + \gamma^b\gamma^a = -2\,\eta^{ab}\,. \qquad (18)$$

Nótese que en esta representación todas las matrices γ^a son reales y sus traspuestas correspondientes se obtienen de la siguiente manera: $(\gamma^a)^T = -\gamma_a$.

Ahora, resulta conveniente definir las matrices

$$\sigma^{ab} = \tfrac{1}{2}\,(\gamma^a\gamma^b - \gamma^b\gamma^a)\,, \qquad (19)$$

las cuales tienen la forma explícita:

$$\sigma^{12} + \sigma^{34} = 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \sigma^{31} = 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$-\sigma^{12} + \sigma^{34} = 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \sigma^{42} = 2 \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\sigma^{32} = 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ y } \sigma^{41} = 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \qquad (20)$$

También resulta adecuado definir

$$\gamma^5 \equiv \frac{1}{24}\,\varepsilon_{abcd}\gamma^a\gamma^b\gamma^c\gamma^d = \frac{i}{24}\sqrt{-g}\;\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\gamma\gamma^\delta\,, \qquad (21)$$

por eso,

$$\gamma^5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} , \qquad (22)$$

y anticonmuta con todas las matrices γ^a:

$$\gamma^5\gamma^a + \gamma^a\gamma^5 = 0 . \qquad (23)$$

(En versión tetradial $\varepsilon_{1234} = \varepsilon^{1234}$; mientras que, en representación de coordenadas $\varepsilon_{0123} = -1$ y $\varepsilon^{0123} = 1$).

El dual de σ^{ab} es

$$\sigma^*{}_{ab} \equiv \tfrac{1}{2}\, \varepsilon_{abcd}\sigma^{cd} , \qquad (24)$$

y de las ecuaciones (18),(21), y (23), se sigue que

$$\sigma^*{}_{ab} \equiv -\gamma^5\sigma_{ab} . \qquad (25)$$

Ahora, la matriz de conexión Γ_n definida a través de la ecuación $\nabla_\mu\Psi = (\partial_\mu + \Gamma_\mu)\Psi$, está relacionada a los coeficientes de rotación de Ricci Γ_{abc} por

$$\Gamma_n = \frac{1}{4}\, \Gamma_{abn}\sigma^{ab} , \qquad (26)$$

y claro $\Gamma_\mu = e^n{}_\mu\Gamma_n$. La forma extendida de la matriz de conexión en la base de la tétrada nula es:

$$\Gamma_n = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}(\Gamma_{12n}+\Gamma_{34n}) & -\Gamma_{42n} & 0 & 0 \\ -\Gamma_{31n} & \frac{1}{2}(\Gamma_{2n}+\Gamma_{34n}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(-\Gamma_{12n}+\Gamma_{34n}) & -\Gamma_{32n} \\ 0 & 0 & -\Gamma_{41n} & -\frac{1}{2}(-\Gamma_{12n}+\Gamma_{34n}) \end{bmatrix} . \qquad (27)$$

Además, percátese que las derivadas covariantes de las matrices de Dirac deben ser nulas según [1] y [3], de donde se desprenden las importantes relaciones:

$$\nabla_\alpha \gamma^\beta \equiv \partial_\alpha \gamma^\beta + \Gamma^\beta{}_{\alpha\mu} \gamma^\mu + [\ \Gamma_\alpha\ ,\ \gamma^\beta\ ] = 0\ , \qquad (\ 28\ )$$

$$\nabla_\alpha \sigma^{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{-\ g}}\ \partial_\alpha \left(\ \sqrt{-\ g}\ \ \sigma^{\alpha\beta}\ \right) + [\ \Gamma_\alpha\ ,\ \sigma^{\alpha\beta}\ ] = 0\ , \qquad (\ 29\ )$$

donde $\Gamma^\beta{}_{\alpha\mu}$ es el símbolo estándar de Christoffel y ∇_α es la derivada covariante que también toma índices espinoriales en su cuenta. La ecuación (28) es justamente otro modo de escribir la ecuación estructural de Cartan (8), y la forma simplificada de la ecuación (20) se obtiene a partir de (28). La ecuación (29) es actualmente un conjunto de 24 ecuaciones que permiten calcular las 24 componentes linealmente independientes de Γ_α (Las cuales son combinaciones lineales de los coeficientes de Ricci) en términos de $\sigma^{\alpha\beta}$.

Para concluir, presentamos otras relaciones que incluyen al operador derivada covariante ∇_α , y que resultan muy útiles en los siguientes capítulos. Estas son:

$$[\ \nabla_\alpha\ ,\ \nabla_\beta\ ]\Psi = -\ \tfrac{1}{4}\ R_{\alpha\beta\gamma\delta}\sigma^{\gamma\delta}\Psi\ , \qquad (\ 30\ )$$

y

$$D_\alpha = \nabla_\alpha\ -\ ieA_\alpha\ , \qquad (\ 31\ )$$

donde A_α es el potencial vectorial.

De éstas dos últimas identidades, se sigue que

$$[\ D_\alpha\ ,\ D_\beta\ ]\Psi = -\ \tfrac{1}{4}\ R_{\alpha\beta\gamma\delta}\sigma^{\gamma\delta}\Psi\ -\ ieF_{\alpha\beta}\Psi\ , \qquad (\ 32\ )$$

con $F_{\alpha\beta}$ el tensor de campo electromagnético, definido como $F_{\alpha\beta} = \nabla_\beta A_\alpha - \nabla_\alpha A_\beta$, que cumple $F_{\alpha\beta} = - F_{\beta\alpha}$.

1.3 ECUACION DE DIRAC EN FORMA GENERAL PARA ESPACIO CURVO.

Plebanski en la Ref. [1] , logra derivar una forma compacta y muy conveniente para la ecuación de Dirac en espacio curvo, en la que aparecen γ^a expresadas en términos de los coeficientes de rotación de Ricci Γ_{abc}, fungiendo estos últimos como formas de conexión geométrico-espinorial, lo cual provee una ecuación que por su construcción y características inherentes establece comunicación entre los mundos de la relatividad general y la mecánica cuántica.

De ese modo, y con el auxilio de las matrices de Pauli en su forma explícita, Plebanski logra escribir de manera general la ecuación de Dirac desplegada en un espacio curvo, como:

$$\sqrt{2}\ \{ (\partial_3 - \gamma_3)\psi_1 + (\partial_2 - \gamma_2)\psi_2 \} + m\phi^{\dot 1} = 0 ,$$

$$\sqrt{2}\ \{ (\partial_1 - \gamma_1)\psi_1 - (\partial_4 - \gamma_4)\psi_2 \} + m\phi^{\dot 2} = 0 ,$$

$$\sqrt{2}\ \{ (\partial_4 - \gamma_4)^*\phi^{\dot 1} + (\partial_1 - \gamma_1)^*\phi^{\dot 2} \} + m\psi_1 = 0 ,$$

y

$$\sqrt{2}\ \{ (\partial_2 - \gamma_2)^*\phi^{\dot 1} - (\partial_3 - \gamma_3)^*\phi^{\dot 2} \} + m\psi_2 = 0 , \tag{33}$$

(éste es un caso particular de la expresión general obtenida por Plebanski, en el que, el peso tensorial $W = 0$) , donde las γ_a explícitamente son

$$\gamma_1 = \tfrac{1}{2} (\Gamma_{121} + \Gamma_{341}) - \Gamma_{314} ,$$

$$\gamma_2 = - \tfrac{1}{2} (\Gamma_{122} + \Gamma_{342}) - \Gamma_{423} ,$$

$$\gamma_3 = \tfrac{1}{2} (\Gamma_{123} + \Gamma_{343}) + \Gamma_{312} ,$$

y

$$\gamma_4 = - \tfrac{1}{2} (\Gamma_{124} + \Gamma_{344}) + \Gamma_{421} ,$$

$$(34)$$

ésta es una forma muy efectiva de la ecuación de Dirac sobre V_4; y para obtenerla, es menester conocer:

i) La tétrada nula inversa, e_a .

ii) Su diferencial, ∂_a .

iii) La forma γ^a desarrollada en términos de e^a .

Finalmente, para introducir el campo electromagnético a la expresión de la ecuación de Dirac derivada por Plebanski, basta llevar a cabo la siguiente sustitución: $\partial_\mu \longrightarrow \partial_\mu - ieA_\mu$.

Así, se tiene una formulación sumamente eficaz (quizás, la más eficaz) para describir el comportamiento de una partícula cargada en un espacio curvo en presencia de un campo electromagnético externo, que satisface (caso homogéneo) las ecuaciones de Maxwell.

CAPITULO II

II. DEFINICION DE ESPIN EN ESPACIO CURVO

2.1 DERIVADA COVARIANTE DEL OPERADOR DE ESPIN $S^{\alpha\beta}$.

El operador de espín está definido por:

$$S^{\alpha\beta} = \sigma^{\alpha\beta} - \frac{2}{m} \gamma^{[\alpha} \vec{D}^{\beta]} , \qquad (35)$$

donde las matrices $\sigma^{\alpha\beta}$ son:

$$\sigma^{\alpha\beta} = i\gamma^{[\alpha}\gamma^{\beta]} . \qquad (36)$$

Una expresión para el espín de una partícula, que permitirá y facilitará nuestros cálculos, es la siguiente:

$$S_{\gamma}{}^{\alpha\beta} = \overline{\Psi}\gamma_{\gamma}(\sigma^{\alpha\beta} - \frac{2}{m} \gamma^{[\alpha} \vec{D}^{\beta]})\Psi + \overline{\Psi}(\sigma^{\alpha\beta} + \frac{2}{m} \overleftarrow{D}^{[\alpha} \gamma^{\beta]})\gamma_{\gamma}\Psi ,$$

$$(37)$$

con $\Psi = \begin{bmatrix} \psi_{A'} \\ \phi^{A'} \end{bmatrix}$, $\overline{\Psi} = (\phi^{A} \;\; \psi_{A'})$, y $S_{\gamma}{}^{\alpha\beta}$ el tensor de espín.

De acuerdo a la Ref. [8] , la ecuación (37) tiene la propiedad de que en un espacio plano en presencia de un campo electromagnético externo:

$$\partial_{\mu} S^{\mu\alpha\beta} = - \frac{2ie}{m} \overline{\Psi}\sigma^{\mu[\alpha}\Psi F^{\beta]}{}_{\mu} , \qquad (38)$$

donde $F_{\alpha\beta}$ es el tensor de campo electromagnético.

Por último, recuérdese que la ecuación de Dirac la conforman

$$(\gamma^{\mu}\nabla_{\mu} + im)\Psi = 0 \ , \ \text{y} \ \overline{\Psi} \overleftarrow{\nabla}_{\mu} \gamma^{\mu} - im\overline{\Psi} = 0 \ .$$

Así, vamos a demostrar que la expresión anterior vale también en espacio curvo

$$\nabla^{\gamma} S_{\gamma}{}^{\alpha\beta} = \nabla^{\gamma} \{ \overline{\Psi}\gamma_{\gamma}(\sigma^{\alpha\beta} - \frac{2}{m} \gamma^{[\alpha}\vec{D}^{\beta]})\Psi + \overline{\Psi}(\sigma^{\alpha\beta} + \frac{2}{m} \overleftarrow{D}^{[\alpha}\gamma^{\beta]})\gamma_{\gamma}\Psi \}$$

$$= \nabla^{\gamma} \{ \overline{\Psi}\gamma_{\gamma}(\sigma^{\alpha\beta} - \frac{1}{m}(\gamma^{\alpha}\vec{D}^{\beta} - \gamma^{\beta}\vec{D}^{\alpha}))\Psi + \overline{\Psi}(\sigma^{\alpha\beta} + \frac{1}{m}(\overleftarrow{D}^{\alpha}\gamma^{\beta} - \overleftarrow{D}^{\beta}\gamma^{\alpha}))\gamma_{\gamma}\Psi \} \ .$$

(39)

Ahora un operador diferencial P_{μ} actúa de la siguiente manera:

$$P_{\mu}(\overline{\Psi}\gamma^{\mu}\Psi) = \overline{\Psi}\gamma^{\mu}(P_{\mu}\Psi) + (P_{\mu}\overline{\Psi})\gamma^{\mu}\Psi \ , \qquad (40)$$

en especial $P_{\mu}\gamma_{\nu} = 0$ (en nuestro caso P_{μ} es ∇_{μ}) .

por lo tanto, de (11) , (13) y (40) , y distribuyendo la acción del operador ∇^{γ} , se tiene que

$$\nabla^{\gamma} S_{\gamma}{}^{\alpha\beta} = -\frac{1}{m}\overline{\Psi}(\gamma_{\gamma}\gamma^{\alpha}\nabla^{\gamma}\vec{D}^{\beta} - \gamma_{\gamma}\gamma^{\beta}\nabla^{\gamma}\vec{D}^{\alpha})\Psi + \frac{1}{m}\Psi(\nabla^{\gamma}\overleftarrow{D}^{\alpha}\gamma^{\beta}\gamma_{\gamma} - \nabla^{\gamma}\overleftarrow{D}^{\beta}\gamma^{\alpha}\gamma_{\gamma})\Psi \ .$$

(41)

de (18) y (31) , se sigue

$$\nabla^{\gamma} S_{\gamma}{}^{\alpha\beta} = \frac{i \ e}{m}\overline{\Psi}(-\gamma_{\gamma}\gamma^{\alpha}\nabla^{\gamma}A^{\beta} + \gamma_{\gamma}\gamma^{\alpha}\nabla^{\beta}A^{\gamma} + \gamma^{\alpha}\gamma_{\gamma}\nabla^{\gamma}A^{\beta} - \gamma^{\alpha}\gamma_{\gamma}\nabla^{\beta}A^{\gamma} - \gamma_{\gamma}\gamma^{\beta}\nabla^{\gamma}A^{\alpha}$$

$$\gamma^{\beta}\gamma_{\gamma}\nabla^{\gamma}A^{\alpha} + \gamma_{\gamma}\gamma^{\beta}\nabla^{\alpha}A^{\gamma} - \gamma^{\beta}\gamma_{\gamma}\nabla^{\alpha}A^{\gamma})\Psi \ .$$

(42)

Como $F^{\alpha\beta} = \nabla^{\beta} A^{\alpha} - \nabla^{\alpha} A^{\beta}$ y por la ecuación (36) , se obtiene

$$\nabla^{\gamma} S_{\gamma}{}^{\alpha\beta}\Psi = -\frac{2ie}{m}\bar{\Psi}\sigma^{\bullet}{}_{\gamma}{}^{[\alpha}F^{\beta]\gamma}\Psi \, . \qquad (43)$$

Por ello, tanto en un espacio plano como en uno curvo, es válida la misma expresión para la derivada covariante del tensor de espín.

2.2 DERIVADA COVARIANTE DEL TENSOR DE ESPIN $S^{\mu\alpha\beta}$ CONTRAIDO CON EL VECTOR DE KILLING K_{α}.

Para obtener dicha expresión, basta tener presente la ecuación (43) y saber que

$$K_{\alpha;\beta;\gamma} \equiv \nabla_{\gamma} K_{\alpha;\beta} = - R^{\mu}{}_{\gamma\beta\alpha} K_{\mu} \, , \qquad (44)$$

donde K_{α} es el vector de Killing asociado a la simetría axial-rotacional, el cual cumple y queda definido a través de la relación

$$\nabla_{\alpha} K_{\beta} + \nabla_{\beta} K_{\alpha} = 0 \, . \qquad (45)$$

Ahora, la ecuación (44) se obtiene inmediatamente de la ecuación (45) y de la conocida identidad cíclica que satisface el tensor de Riemann, la cual es: $R^{\mu}{}_{\alpha\beta\gamma} + R^{\mu}{}_{\gamma\alpha\beta} + R^{\mu}{}_{\beta\gamma\alpha} = 0$. (El resultado que expresa (44) se extiende en general a cualquier tipo de vector de Killing ε_{α}) . Aquí $R^{\mu}{}_{\alpha\beta\gamma}$ es el tensor de curvatura de Riemann.

Por lo anterior,

$$\nabla_{\mu}(S^{\mu\alpha\beta} K_{\alpha;\beta}) = (\nabla_{\mu} S^{\mu\alpha\beta}) K_{\alpha;\beta} + S^{\mu\alpha\beta}(\nabla_{\mu} K_{\alpha;\beta})$$

$$= -\frac{2ie}{m}\sigma^{\mu[\alpha}F^{\beta]\bullet}{}_{\mu} K_{\alpha;\beta} - S^{\mu\alpha\beta} R^{\delta}{}_{\mu\beta\alpha} K_{\delta} \, . \qquad (46)$$

Por ejemplo, en el caso que es motivo de estudio en el presente trabajo, es decir, el universo de Schwarzschild magnetizado, se tiene un espacio-tiempo, el cual admite, además del vector K_α, al vector de Killing t_β asociado con el sentido temporal. Es oportuno decir que los vectores K_α y t_β satisfacen

$$i)\ K^\mu \partial_\mu = \partial/\partial\phi .$$

$$ii)\ K^\mu = \delta^3{}_\mu . \qquad (47)$$

$$iii)\ K_\mu = g_{\phi\phi}\delta^3{}_\mu .$$

y

$$i)\ t^\beta \partial_\beta = \partial/\partial t .$$

$$ii)\ t^\beta = \delta^0{}_\mu . \qquad (48)$$

$$iii)\ t_\beta = g_{tt}\delta^0{}_\mu .$$

Donde $g_{\phi\phi}$ y g_{tt} son las componentes correspondientes del tensor métrico.

Continuando nuestra exposición, el universo magnético que se acaba de mencionar, queda descrito por el tensor métrico

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -\Lambda^2(1-2m/r) & & & \\ 0 & \dfrac{\Lambda^2}{(1-2m/r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda^{-2}r^2 \mathrm{sen}\theta \end{bmatrix} .$$

$$(49)$$

Para un espacio curvo, la derivada covariante del vector de Killing K_α en coordenadas esféricas, viene dada por

$$\nabla_\alpha K_\beta = \delta^3{}_\beta \partial_\alpha (g_{\phi\phi}) - \tfrac{1}{2}\,(\partial g_{\phi\alpha}/\partial x^\beta + \partial g_{\phi\beta}/\partial x^\alpha) , \qquad (50)$$

con α, β = t, r, θ, y ϕ (véase apéndice A).

Por lo cual

$$\nabla_\mu(S^{\mu\alpha\beta}K_{\alpha;\beta}) = -\frac{2ie}{m}\sigma^{\mu[\alpha}F^{\beta]}{}_\mu(\delta^3{}_\beta\partial_\alpha(g_{\sigma\sigma}) - \tfrac{1}{2}(\partial g_{\sigma\alpha}/\partial x^\beta + \partial g_{\sigma\beta}/\partial x^\alpha)) - S^{\mu\alpha\beta}R^\delta{}_{\mu\beta\alpha}K_\delta \,, \tag{51}$$

ya que $\nabla_\alpha K_\beta \equiv K_{\beta;\alpha}$, y $K_{\alpha;\beta} = -K_{\beta;\alpha}$.

En especial, para el espacio-tiempo caracterizado por la métrica recién presentada, las únicas componentes no nulas de $\nabla_\alpha K_\beta$ son: $\nabla_1 K_3$, $\nabla_2 K_3$, $\nabla_3 K_1$, y $\nabla_3 K_2$ (consulte apéndice A).

2.3 EL CONMUTADOR DE LOS OPERADORES S Y $t_\rho\gamma^\rho(\gamma^\mu D_\mu + im)$.

El operador S es:

$$S = S_\gamma{}^{\alpha\beta}K_{\alpha;\beta}t^\gamma \,, \tag{52}$$

donde $K_{\alpha;\beta}$ es la derivada covariante asociada al vector de Killing K_α , y t^γ es el vector de Killing temporal.

En el desarrollo que se presenta a continuación, emplearemos la siguiente expresión alternativa para el tensor de espín $S_\sigma{}^{\alpha\beta}$:

$$S_\sigma{}^{\alpha\beta} = \varepsilon^{\mu\alpha\beta\nu}\gamma_\sigma\gamma^5\gamma_\mu D_\nu \,, \tag{53}$$

ésta ecuación sólo es válida cuando se aplica a una función de estado Ψ que satisface la ecuación de Dirac.

Por lo tanto

$$[S\,,\ t_\rho\gamma^\rho(\gamma^\mu D_\mu + im)]\Psi = [\varepsilon^{\mu\alpha\beta\nu}\gamma_\sigma\gamma^5\gamma_\mu D_\nu K_{\alpha;\beta}t^\sigma\,,\ t_\rho\gamma^\rho(\gamma^\mu D_\mu + im)]\Psi$$

siguiendo con nuestros cálculos

$$[S\ ,\ t_\rho\gamma^\rho(\gamma^\mu D_\mu+im)]\Psi = (\varepsilon^{\mu\alpha\beta\nu}\gamma_\sigma\gamma^5\gamma_\mu D_\nu K_{\alpha;\beta}t^\sigma t_\rho\gamma^\rho\gamma^\mu D_\mu$$

$$+im\varepsilon^{\mu\alpha\beta\nu}\gamma_\sigma\gamma^5\gamma_\mu D_\nu K_{\alpha;\beta}t^\sigma t_\rho\gamma^\rho$$

$$-t_\rho\gamma^\rho\gamma^\mu D_\mu\varepsilon^{\mu\alpha\beta\nu}\gamma_\sigma\gamma^5\gamma_\mu D_\nu K_{\alpha;\beta}t^\sigma$$

$$-imt_\rho\gamma^\rho\varepsilon^{\mu\alpha\beta\nu}\gamma_\sigma\gamma^5\gamma_\mu D_\nu K_{\alpha;\beta}t^\sigma)\Psi$$

$$= \varepsilon^{\mu\alpha\beta\nu}\{\gamma_\sigma\gamma^5\gamma_\mu D_\nu K_{\alpha;\beta}t^\sigma t_\rho\gamma^\rho\gamma^\mu D_\mu$$

$$+im\gamma_\sigma\gamma^5\gamma_\mu D_\nu K_{\alpha;\beta}t^\sigma t_\rho\gamma^\rho$$

$$-t_\rho\gamma^\rho\gamma^\mu D_\mu\gamma_\sigma\gamma^5\gamma_\mu D_\nu K_{\alpha;\beta}t^\sigma$$

$$-imt_\rho\gamma^\rho\gamma_\sigma\gamma^5\gamma_\mu D_\nu K_{\alpha;\beta}t^\sigma\}\Psi\ . \qquad (\ 54\ )$$

Prosiguiendo, de las ecuaciones (28) y (31) se tiene como consecuencia que

$$D_\alpha\gamma_\beta = -\ ieA_\alpha\gamma^\rho\ , \qquad (\ 55\ )$$

a partir de esto, y recordando la manera en que aplica un operador diferencial, se sigue que

$$[S\ ,\ t_\rho\gamma^\rho(\gamma^\mu D_\mu+im)]\Psi = \varepsilon^{\mu\alpha\beta\nu}\{imt_\rho\gamma_\sigma\gamma^5\gamma_\mu\gamma^\rho K_{\alpha;\beta}t^\sigma D_\nu$$

$$-t_\rho\gamma^\rho\gamma^\mu\gamma_\sigma\gamma^5\gamma_\mu K_{\alpha;\beta;\nu;\mu}t^\sigma$$

$$-t_\rho\gamma^\rho\gamma^\mu\gamma_\sigma\gamma^5\gamma_\mu K_{\alpha;\beta;\nu}t^\sigma D_\mu$$

$$-t_\rho\gamma^\rho\gamma^\mu\gamma_\sigma\gamma^5\gamma_\mu K_{\alpha;\beta;\mu}t^\sigma D_\nu$$

$$-imt_\rho\gamma^\rho\gamma_\sigma\gamma^5\gamma_\mu K_{\alpha;\beta;\nu}t^\sigma$$

$$-imt_\rho\gamma^\rho\gamma_\sigma\gamma^5\gamma_\mu K_{\alpha;\beta}t^\sigma D_\nu$$

$$+\gamma_{\sigma}\gamma^{5}\gamma_{\mu}K_{\alpha;\beta}t^{\sigma}t_{\rho}\gamma^{\rho}\gamma^{\mu}D_{\nu}D_{\mu}$$

$$-t_{\rho}\gamma^{\rho}\gamma^{\mu}\gamma_{\sigma}\gamma^{5}\gamma_{\mu}K_{\alpha;\beta}t^{\sigma}D_{\mu}D_{\nu}$$

$$+iet_{\rho}\gamma^{\rho}\gamma^{\mu}\gamma_{\sigma}\gamma^{5}\gamma_{\mu}K_{\alpha;\beta}t^{\sigma}\nabla_{\nu}A_{\mu}$$

$$-ie\gamma_{\sigma}\gamma^{5}\gamma_{\mu}K_{\alpha;\beta}t^{\sigma}t_{\rho}\gamma^{\rho}\gamma^{\mu}\nabla_{\mu}A_{\nu}\}\Psi \ .$$

(56)

Continuando el desarrollo del conmutador, utilizando la ecuación (14) , obtenemos que

$$[S\ ,\ t_{\rho}\gamma^{\rho}(\gamma^{\mu}D_{\mu}+im)]\Psi = \varepsilon^{\mu\alpha\beta\nu}\{-t_{\rho}\gamma^{\rho}\gamma^{\mu}\gamma_{\sigma}\gamma^{5}\gamma_{\mu}K_{\alpha;\beta;\nu;\mu}t^{\sigma}$$

$$-t_{\rho}\gamma^{\rho}\gamma^{\mu}\gamma_{\sigma}\gamma^{5}\gamma_{\mu}K_{\alpha;\beta;\mu}t^{\sigma}D_{\nu}$$

$$+t_{\rho}\gamma^{\rho}\gamma_{\sigma}\gamma^{5}K_{\alpha;\beta;\nu}t^{\sigma}(\gamma_{\mu}\gamma^{\mu}D_{\mu}-im\gamma_{\mu}+2D_{\mu})$$

$$+2t_{\rho}\gamma^{\rho}\gamma^{5}\gamma_{\mu}K_{\alpha;\beta;\nu}t^{\mu}D_{\mu}$$

$$+\gamma_{\sigma}\gamma^{5}\gamma_{\mu}K_{\alpha;\beta}t^{\sigma}\gamma^{\rho}\gamma^{\mu}[D^{\beta}\ ,\ D^{\alpha}]$$

$$-t_{\rho}\gamma^{\rho}\gamma^{\mu}\gamma_{\sigma}\gamma^{5}\gamma_{\mu}K_{\alpha;\beta}t^{\sigma}[D^{\alpha}\ ,\ D^{\beta}]$$

$$+2ieF^{\alpha\beta}\}\Psi \ .$$

(57)

Sustituyendo (32) en (57) , tenemos:

$$[S\ ,\ t_{\rho}\gamma^{\rho}(\gamma^{\mu}D_{\mu}+im)]\Psi = \varepsilon^{\mu\alpha\beta\nu}\{-t_{\rho}\gamma^{\rho}\gamma^{\mu}\gamma_{\sigma}\gamma^{5}\gamma_{\mu}K_{\alpha;\beta;\nu;\mu}t^{\sigma}$$

$$-t_{\rho}\gamma^{\rho}\gamma^{\mu}\gamma_{\sigma}\gamma^{5}\gamma_{\mu}K_{\alpha;\beta;\mu}t^{\sigma}D_{\nu}$$

$$+t_\rho\gamma^\rho\gamma_\sigma\gamma^5 K_{\alpha;\beta;\nu}t^\sigma(\gamma_\mu\gamma^\mu D_\mu - im\gamma_\mu + 2D_\mu)$$

$$+2t_\rho\gamma^\rho\gamma^5\gamma_\mu K_{\alpha;\beta;\nu}t^\mu D_\mu$$

$$+2(t_\rho\gamma_\sigma\gamma^\rho\gamma^5 K_{\alpha;\beta}t^\sigma\gamma^\mu\gamma_\mu$$

$$+t_\rho\gamma^\rho\gamma^5\gamma_\mu K_{\alpha;\beta}t^\mu + t_\rho\gamma^\rho\gamma^5\gamma_\mu K_{\alpha;\beta}t^\mu$$

$$+t_\rho\gamma^5\gamma^\mu\gamma_\mu K_{\alpha;\beta}t^\rho)(ieF^{\alpha\beta}+[D^\alpha\ ,\ D^\beta])\}\Psi$$

(58)

Simplificando términos, y por la ecuación de Dirac, se llega a que

$$[S\ ,\ t_\rho\gamma^\rho(\gamma^\mu D_\mu + im)]\Psi = \varepsilon^{\mu\alpha\beta\nu}\{-t_\rho\gamma^\rho\gamma^\mu\gamma_\sigma\gamma^5\gamma_\mu K_{\alpha;\beta;\nu;\mu}t^\sigma$$

$$-t_\rho\gamma^\rho\gamma^\mu\gamma_\sigma\gamma^5\gamma_\mu K_{\alpha;\beta;\mu}t^\sigma D_\nu$$

$$+2t_\rho\gamma^\rho\gamma_\sigma\gamma^5 K_{\alpha;\beta;\nu}t^\sigma(-im\gamma_\mu + D_\mu)$$

$$+2t_\rho\gamma^\rho\gamma^5\gamma_\mu K_{\alpha;\beta;\nu}t^\mu D_\mu$$

$$-\tfrac{1}{2}t_\rho\gamma^5 K_{\alpha;\beta}(\gamma_\sigma\gamma^\rho t^\sigma\gamma^\mu\gamma_\mu - \gamma^\rho\gamma_\mu t^\mu$$

$$+\gamma^\mu\gamma_\mu t^\rho)R^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta}\sigma^{\gamma\delta}\}\Psi\ .$$

(59)

Dado que $\gamma^\mu\gamma_\mu = 4$, y en virtud de las ecuaciones (44) y (53) , obtenemos

$$[S\ ,\ t_\rho\gamma^\rho(\gamma^\mu D_\mu + im)]\Psi = \{-t_\rho\gamma^\rho\gamma^\mu t^\sigma R^\delta{}_{\alpha\beta\mu}K_\delta S_\sigma{}^{\alpha\beta}$$

$$-\tfrac{1}{2}t_\rho\gamma^5 K_{\alpha;\beta}(4\gamma_\sigma\gamma^\rho t^\sigma - \gamma^\rho\gamma_\sigma t^\sigma$$

$$+4t^\rho)R^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta}\sigma^{\gamma\delta}$$

$$-2imt_\rho\gamma^5\gamma^\rho\gamma_\sigma t^\sigma\varepsilon^{\mu\alpha\beta\nu}R^\delta{}_{\alpha\beta\nu}K_\delta\gamma_\mu\}\Psi$$

$$= \{t_\rho\gamma^\rho(-\gamma^\mu t^\sigma R^\delta{}_{\alpha\beta\mu}K_\delta S_\sigma{}^{\alpha\beta}$$

$$\gamma^5\gamma_\sigma t^\sigma(-\tfrac{1}{2}K_{\alpha;\beta}R^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta}\sigma^{\gamma\delta}$$

$$+2im\varepsilon^{\mu\alpha\beta\nu}R^\delta{}_{\alpha\beta\nu}K_\delta\gamma_\mu))$$

$$-2t_\rho\gamma^5K_{\alpha;\beta}(\gamma_\sigma\gamma^\rho t^\sigma+2t^\rho)R^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta}\sigma^{\gamma\delta}\}\Psi \qquad (60)$$

De esa forma, resulta claro que si $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$, i.e. , cuando el espacio sea plano, y aunque haya la presencia de un campo electromagnético externo a él, tendremos para ese espacio-tiempo de Minkowski que:

$$[S\ ,\ t_\rho\gamma^\rho(\gamma^\mu D_\mu+im)] = 0\ , \qquad (61)$$

lo que indica que S y $t_\rho\gamma^\rho(\gamma^\mu D_\mu+im)$ admiten los mismos eigenvalores, y por ello, se puede resolver la ecuación $S\Psi = 0$ en lugar de $t_\rho\gamma^\rho(\gamma^\mu D_\mu+im)\Psi = 0$. Ello facilita en ocasiones el cálculo, porque el operador S es generalmente de estructura más sencilla que $t_\rho\gamma^\rho(\gamma^\mu D_\mu+im)$.

CAPITULO III

III. LA ECUACION DE DIRAC EN EL ESPACIO-TIEMPO DE SCHWARZSCHILD MAGNETIZADO

3.1 EL UNIVERSO DE SCHWARZSCHILD MAGNETIZADO.

Un elemento lineal de la métrica de Schwarzschild queda escrito en la forma

$$dS^2 = \frac{dr^2}{(1 - 2m/r)} + r^2 d\theta^2 - (1 - 2m/r)dt^2 + r^2 \mathrm{sen}^2\theta d\phi^2 . \tag{62}$$

Ernst, en su estudio sobre el comportamiento de los hoyos negros en un universo magnético, logra desarrollar un procedimiento para magnetizar los diversos espacio-tiempos conocidos, y de ese modo, él genera la expresión del elemento lineal de un hoyo negro de Schwarzschild en un campo magnético externo; la cual es,

$$dS^2 = \Lambda^2 \left[\frac{dr^2}{(1 - 2m/r)} + r^2 d\theta^2 - (1 - 2m/r)dt^2 \right] + \Lambda^{-2} r^2 \mathrm{sen}^2\theta d\phi^2 , \tag{63}$$

donde $\Lambda = 1 + \frac{1}{4} B_o{}^2 r^2 \mathrm{sen}^2\theta$.

En tal caso, las componentes de Cartan del campo magnético están dadas por

$$H_{(r)} = \Lambda^{-2} B_o \cos\theta , \; y \; H_{(\theta)} = - \Lambda^{-2} B_o (1 - 2m/r)^{\frac{1}{2}} \mathrm{sen}\theta , \tag{64}$$

aquí,

$$H_{(r)} = e^{\mu}{}_{(r)} H_{\mu} \ , \ y \ H_{(\phi)} = e^{\mu}{}_{(\phi)} H_{\mu} \ . \qquad (65)$$

Además, la componente angular se anula en las cercanías del horizonte del evento, que ocurre para $m \neq 0$ en $r = 2\,m$.

Basta decir que, el resultado anterior derivado por Ernst, describe con exactitud la situación cuando el campo magnético es uniforme asintóticamente.

A continuación, se traslada la expresión matemática de la métrica de Schwarzschild magnetizada al lenguaje de tétrada nula, recordando para esto que: $dS^2 = 2\,e^1 e^2 + 2\,e^3 e^4$, donde $e^1 = \overline{e^2}$, y también e^3, e^4 son reales.

Por lo cual:

$$e^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\Lambda r d\theta + i \Lambda^{-1} r \operatorname{sen}\theta d\phi \right) ,$$

$$e^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\Lambda r d\theta - i \Lambda^{-1} r \operatorname{sen}\theta d\phi \right) ,$$

$$e^3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{\Lambda d r}{(1 - 2\,m/r)^{\frac{1}{2}}} + \Lambda (1 - 2\,m/r)^{\frac{1}{2}} dt \right] ,$$

y

$$e^4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{\Lambda d r}{(1 - 2\,m/r)^{\frac{1}{2}}} - \Lambda (1 - 2\,m/r)^{\frac{1}{2}} dt \right] .$$

$$(66)$$

A partir de que $e^j{}_a e^b{}_j = \delta^b{}_a$, se tiene la tétrada nula inversa, que es,

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\Lambda^{-1}}{r} d\theta - i \frac{\Lambda}{r \operatorname{sen}\theta} d\phi \right) ,$$

$$e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\Lambda^{-1}}{r} d\theta + i \frac{\Lambda}{r\,\mathrm{sen}\theta} d\phi \right),$$

$$e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\Lambda^{-1}(1 - 2\,m/r)^{\frac{1}{2}} dr + \frac{\Lambda^{-1}}{(1 - 2\,m/r)^{\frac{1}{2}}} dt \right],$$

$$e_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\Lambda^{-1}(1 - 2\,m/r)^{\frac{1}{2}} dr - \frac{\Lambda^{-1}}{(1 - 2\,m/r)^{\frac{1}{2}}} dt \right].$$

(67)

Para facilitar más adelante los cálculos, expresemos las diferenciales de coordenadas en términos tetradiales:

$$d\theta = \frac{1}{\sqrt{2}\, r} (e^1 + e^2),$$

$$dr = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 - 2\,m/r)^{\frac{1}{2}} \Lambda^{-1} (e^3 + e^4),$$

$$d\phi = i \frac{\Lambda^{-1}}{\sqrt{2}\; r\,\mathrm{sen}\theta} (e^2 - e^1),$$

y

$$dt = \frac{\Lambda^{-1}}{\sqrt{2}\; (1 - 2\,m/r)^{\frac{1}{2}}} (e^3 - e^4).$$

(68)

Antes de seguir, presentamos ciertas igualdades que involucran y se obtienen a partir del factor Λ .

$$\Lambda_{,r} \equiv \partial_r \Lambda = \tfrac{1}{2} B_0{}^2 r\,\mathrm{sen}^2\theta ,$$

$$\Lambda_{,\theta} \equiv \partial_\theta \Lambda = \tfrac{1}{2} B_0{}^2 r^2 \mathrm{sen}\theta\cos\theta ,$$

$$\Lambda^{-1}{}_{,r} = - \frac{\Lambda_{,r}}{2\Lambda^2} ,$$

y

$$\Lambda^{-1}{}_{,\omega} = -\frac{\Lambda_{,\omega}}{2\Lambda^{2}} .$$

(69)

Se pasa ahora a calcular las diferenciales de las componentes de la tétrada nula. Así,

$$\begin{aligned} de^{1} &= e^{n} \wedge \Gamma^{1}{}_{n} = e^{n} \wedge \Gamma_{2n} = e^{1} \wedge \Gamma_{21} + e^{3} \wedge \Gamma_{23} + e^{4} \wedge \Gamma_{24} \\ &= e^{1} \wedge e^{2}\, \Gamma_{212} + e^{3} \wedge e^{1}(-\Gamma_{213} + \Gamma_{231}) + e^{3} \wedge e^{2}\, \Gamma_{232} \\ &\quad + e^{4} \wedge e^{1}(\Gamma_{241} - \Gamma_{214})\, e^{3} \wedge e^{4}(\Gamma_{234} - \Gamma_{243}) \\ &\quad + e^{4} \wedge e^{2}\, \Gamma_{242} . \end{aligned}$$

(70)

Recuérdese en lo sucesivo que:

i) $\Gamma_{ab} = \Gamma_{abc} e^{c}$, con $\Gamma_{aa} = 0$.

(71)

ii) $\Gamma^{1} \to {}_{2}\,{}^{2} \to {}_{1}\,{}^{3} \to {}_{4}\,{}^{4} \to {}_{3}$ y $\Gamma^{*1} \to {}_{2}\,{}^{2} \to {}_{1}\,{}^{3} \to {}_{3}\,{}^{4} \to {}_{4}$.

Prosiguiendo

$$\begin{aligned} de^{2} &= e^{n} \wedge \Gamma^{2}{}_{n} = e^{n} \wedge \Gamma_{1n} = e^{2} \wedge \Gamma_{12} + e^{4} \wedge \Gamma_{14} - e^{3} \wedge \Gamma_{31} \\ &= e^{1} \wedge e^{2}(-\Gamma_{121}) + e^{3} \wedge e^{1}(-\Gamma_{311}) \\ &\quad + e^{3} \wedge e^{2}(-\Gamma_{312} - \Gamma_{123}) + e^{4} \wedge e^{1}\, \Gamma_{141} \\ &\quad + e^{3} \wedge e^{4}(-\Gamma_{314} - \Gamma_{143}) + e^{4} \wedge e^{2}(\Gamma_{142} - \Gamma_{124}) . \end{aligned}$$

(72)

Análogamente,

$$de^3 = e^n \wedge \Gamma^3{}_n = e^n \wedge \Gamma_{4n} = e^1 \wedge \Gamma_{41} + e^2 \wedge \Gamma_{42} - e^3 \wedge \Gamma_{34}$$

$$= e^1 \wedge e^2(\Gamma_{412} - \Gamma_{421}) + e^3 \wedge e^1(- \Gamma_{413} - \Gamma_{341})$$

$$+ e^3 \wedge e^2(- \Gamma_{423} - \Gamma_{342}) + e^4 \wedge e^1(- \Gamma_{414})$$

$$+ e^3 \wedge e^4(- \Gamma_{344}) + e^4 \wedge e^2(- \Gamma_{424}) ,$$

$$(73)$$

y para terminar

$$de^4 = e^n \wedge \Gamma^4{}_n = e^n \wedge \Gamma_{3n} = e^1 \wedge \Gamma_{31} + e^2 \wedge \Gamma_{32} + e^4 \wedge \Gamma_{34}$$

$$= e^3 \wedge e^1(- \Gamma_{313}) + e^3 \wedge e^2(- \Gamma_{323})$$

$$+ e^4 \wedge e^1(\Gamma_{341} - \Gamma_{314}) + e^3 \wedge e^4(- \Gamma_{343})$$

$$+ e^4 \wedge e^2(\Gamma_{342} - \Gamma_{324}) .$$

$$(74)$$

Sabiendo que $d(Fdx^\nu) = F_{,\mu} dx^\mu \wedge dx^\nu$, esto permite hacer explícitas las diferenciales de^a . Por ejemplo:

$$de^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Lambda_{,r}\, rdr \wedge d\theta + \Lambda dr \wedge d\theta + i\Lambda^{-1}{}_{,r}\, rsen\theta dr \wedge d\phi$$

$$+ i\Lambda^{-1}{}_{,\theta}\, rsen\theta d\theta \wedge d\phi + i\Lambda^{-1} sen\theta dr \wedge d\phi$$

$$+ i\Lambda^{-1} r cos\theta d\theta \wedge d\phi) .$$

$$(75)$$

En el cálculo de cada una de las de^a , se sustituyen las diferenciales de coordenadas dx^μ por su expresión en componentes tetradiales; teniendo de esa forma las de^a en términos de las componentes de la tétrada nula.

Para esto, téngase presente que $e^a \wedge e^a = 0$, y $e^a \wedge e^b = - e^b \wedge e^a$. Ello permite simplificar las expresiones extendidas de las de^a . Por lo cual,

$$de^1 = \frac{(1 - 2m/r)^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{2}} \Big[e^3 \wedge e^1 \{ \Lambda_{,r} \Lambda^{-2} + \frac{\Lambda^{-1}}{r} + \Lambda^{-1}{}_{,r} + \frac{\Lambda^{-1}}{r} \} + e^3 \wedge e^2 \{ \Lambda_{,r} \Lambda^{-2} + \frac{\Lambda^{-1}}{r} - \Lambda^{-1}{}_{,r} - \frac{\Lambda^{-1}}{r} \}$$
$$+ e^4 \wedge e^1 \{ \Lambda_{,r} \Lambda^{-2} + \frac{\Lambda^{-1}}{r} + \Lambda^{-1}{}_{,r} + \frac{\Lambda^{-1}}{r} \} + e^4 \wedge e^2 \{ \Lambda_{,r} \Lambda^{-2} + \frac{\Lambda^{-1}}{r} - \Lambda^{-1}{}_{,r} - \frac{\Lambda^{-1}}{r} \} \Big]$$
$$+ e^1 \wedge e^2 \left[- \frac{\Lambda^{-1}{}_{,\phi}}{2\sqrt{2}} - \frac{\Lambda^{-1}}{2\sqrt{2}\, r} \right]$$
$$+ e^2 \wedge e^1 \left[\frac{\Lambda^{-1}{}_{,\phi}}{2\sqrt{2}} + \frac{\Lambda^{-1}}{2\sqrt{2}\, r} \cot\theta \right] . \qquad (76)$$

Comparando la versión desplegada de de^1 con su correspondiente expresión compacta e implícita, uno puede identificar los coeficientes de rotación de Ricci para de^1 (lo cual se extiende y repite para las restantes de^a) . Por lo tanto:

$$\Gamma_{231} = \frac{(1 - 2m/r)^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{2}} \left[\Lambda_{,r} \Lambda^{-2} + \Lambda^{-1}{}_{,r} \right] ,$$

$$\Gamma_{232} = \frac{(1 - 2m/r)^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{2}} \left[\Lambda_{,r} \Lambda^{-2} - \Lambda^{-1}{}_{,r} \right],$$

$$\Gamma_{241} = \frac{(1 - 2m/r)^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{2}} \left[\Lambda_{,r} \Lambda^{-2} + 2\frac{\Lambda^{-1}}{r} + \Lambda^{-1}{}_{,r} \right],$$

$$\Gamma_{242} = \frac{(1 - 2m/r)^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{2}} \left[\Lambda_{,r} \Lambda^{-2} - \Lambda^{-1}{}_{,r} \right],$$

y

$$\Gamma_{212} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left[\Lambda^{-1}{}_{,\theta} + \frac{\Lambda^{-1}}{r}\cot\theta \right].$$

(77)

Continuando, $de^2 = (de^1)^*$, ya que $e^2 = (e^1)^*$.

Ahora:

$$de^3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{\Lambda_{,\theta}}{(1 - 2m/r)^{\frac{1}{2}}} d\theta \wedge dr \right.$$
$$+ \Lambda_{,r} (1 - 2m/r)^{\frac{1}{2}} dr \wedge dt$$
$$+ \Lambda_{,\theta} (1 - 2m/r)^{\frac{1}{2}} d\theta \wedge dt$$
$$\left. + \frac{m}{r^2} \Lambda (1 - 2m/r)^{-\frac{1}{2}} dr \wedge dt \right].$$

(78)

Sin olvidar que las dx^μ son sustituidas por sus expresiones en componentes tetradiales, se tiene:

$$de^3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[e^1 \wedge e^3 \left\{ \frac{\Lambda_{,\theta}}{r} \Lambda^{-2} \right\} + e^2 \wedge e^3 \left\{ \frac{\Lambda_{,\theta}}{r} \Lambda^{-2} \right\} \right.$$
$$+ e^1 \wedge e^4 \left\{ \frac{\Lambda_{,\theta} \Lambda^{-2}}{2r} - \frac{\Lambda_{,\theta} \Lambda^{-2}}{2r} \right\}$$

$$+ e^2 \wedge e^4 \{ \frac{\Lambda_{,\phi} \quad \Lambda^{-2}}{2r} - \frac{\Lambda_{,\phi} \quad \Lambda^{-2}}{2r} \}$$

$$+ e^3 \wedge e^4 \{ - \frac{\Lambda_{,r}}{2} (1 - 2 m/r)^{\frac{1}{2}}$$

$$- \frac{m \Lambda^{-1}}{2r^2 (1 - 2 m/r)^{\frac{1}{2}}} \}$$

$$+ e^4 \wedge e^3 \{ \frac{\Lambda_{,r}}{2} \Lambda^{-2} (1 - 2 m/r)^{\frac{1}{2}}$$

$$+ \frac{m \Lambda^{-1}}{2r^2 (1 - 2 m/r)^{\frac{1}{2}}} \} \Big] .$$

(79)

De lo cual,

$$\Gamma_{413} = \frac{\Lambda_{,\phi} \quad \Lambda^{-2}}{\sqrt{2}\, r} ,$$

$$\Gamma_{423} = \frac{\Lambda_{,\phi} \quad \Lambda^{-2}}{\sqrt{2}\, r} ,$$

$$\Gamma_{414} = 0 = \Gamma_{424} ,$$

y

$$\Gamma_{434} = - \frac{\Lambda_{,r} \quad \Lambda^{-2} (1 - 2 m/r)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}}$$

$$- \frac{m \Lambda^{-1}}{\sqrt{2}\, r^2 (1 - 2 m/r)^{\frac{1}{2}}} .$$

(80)

Finalmente,

$$de^4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{\Lambda_{,\theta}}{(1 - 2m/r)^{\frac{1}{2}}} d\theta \wedge dr \right.$$

$$- \Lambda_{,r} (1 - 2m/r)^{\frac{1}{2}} dr \wedge dt$$

$$- \Lambda_{,\theta} (1 - 2m/r)^{\frac{1}{2}} d\theta \wedge dt$$

$$\left. - \frac{m}{r^2} \Lambda (1 - 2m/r)^{\frac{1}{2}} dr \wedge dt \right] .$$

(81)

De aquí

$$de^4 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[e^1 \wedge e^3 \left\{ \frac{\Lambda_{,\phi} \Lambda^{-2}}{r} - \frac{\Lambda_{,\theta} \Lambda^{-2}}{r} \right\} \right.$$

$$+ e^2 \wedge e^3 \left\{ \frac{\Lambda_{,\phi} \Lambda^{-2}}{r} - \frac{\Lambda_{,\phi} \Lambda^{-2}}{r} \right\}$$

$$+ e^1 \wedge e^4 \left\{ \frac{\Lambda_{,\theta} \Lambda^{-2}}{r} \right\} + e^2 \wedge e^4 \left\{ \frac{\Lambda_{,\theta} \Lambda^{-2}}{r} \right\}$$

$$+ e^3 \wedge e^4 \left\{ \Lambda_{,r} \Lambda^{-2} (1 - 2m/r)^{\frac{1}{2}} \right.$$

$$\left. + \frac{m \Lambda^{-1}}{r^2 (1 - 2m/r)^{\frac{1}{2}}} \right\}$$

$$+ e^4 \wedge e^3 \left\{ - \Lambda_{,r} \Lambda^{-2} (1 - 2m/r)^{\frac{1}{2}} \right.$$

$$\left. \left. - \frac{m \Lambda^{-1}}{r^2 (1 - 2m/r)^{\frac{1}{2}}} \right\} \right] .$$

(82)

∴

$$\Gamma_{313} = 0 = \Gamma_{323} ,$$

$$\Gamma_{314} = \frac{\Lambda_{,\varphi}\ \Lambda^{-2}}{\sqrt{2}\ r} ,$$

$$\Gamma_{324} = \frac{\Lambda_{,\varphi}\ \Lambda^{-2}}{\sqrt{2}\ r} ,$$

y

$$\Gamma_{343} = -\frac{\Lambda_{,r}\ \Lambda^{-2}(1 - 2m/r)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}} - \frac{m\Lambda^{-1}}{\sqrt{2}\, r^{2}(1 - 2m/r)^{\frac{1}{2}}} . \tag{83}$$

Con lo ya hecho, pueden obtenerse los coeficientes de rotación de Ricci Γ_{abc} contraidos con la tétrada nula e^{a} . Por ende:

$$\begin{aligned} \Gamma_{12} &= \Gamma_{121}e^{1} + \Gamma_{122}e^{2} + \Gamma_{123}e^{3} + \Gamma_{124}e^{4} \\ &= \left\{ -\frac{\Lambda^{-1}{}_{,\varphi}}{\sqrt{2}} - \frac{\Lambda^{-1}\cot\theta}{\sqrt{2}\ r} \right\}e^{1} \\ &\quad + \left\{ \frac{\Lambda^{-1}{}_{,\varphi}}{\sqrt{2}} + \frac{\Lambda^{-1}\cot\theta}{\sqrt{2}\ r} \right\}e^{2} . \end{aligned} \tag{84}$$

Téngase presente que, las Γ_{abc} que no aparecen entre las obtenidas anteriormente; o bien, no resultan de sus antisimétricas ó de sus conjugadas, son nulas.

$$\Gamma_{42} = \Gamma_{421}e^1 + \Gamma_{422}e^2 + \Gamma_{423}e^3 + \Gamma_{424}e^4$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \Bigg[\Big\{ -\Lambda_{,r}\,\Lambda^{-2} - \frac{2\,\Lambda^{-1}}{r} - \Lambda^{-1}{}_{,r} \Big\}\big(1 - 2\,m/r\big)^{\frac{1}{2}} e^1$$

$$+ \Big\{ -\Lambda_{,r}\,\Lambda^{-2} + \Lambda^{-1}{}_{,r} \Big\}\big(1 - 2\,m/r\big)^{\frac{1}{2}} e^2$$

$$+ \Big\{ \frac{2\,\Lambda_{,\theta}\,\Lambda^{-2}}{r} \Big\} e^3$$

$$+ \Big\{ -2\,\Lambda_{,r}\,\Lambda^{-2}\big(1 - 2\,m/r\big)^{\frac{1}{2}}$$

$$- \frac{2\,m\Lambda^{-1}}{r^2\big(1 - 2\,m/r\big)^{\frac{1}{2}}} \Big\} e^4 \Bigg],$$

$$(85)$$

$$\Gamma_{31} = \Gamma_{311}e^1 + \Gamma_{312}e^2 + \Gamma_{313}e^3 + \Gamma_{314}e^4$$

$$= \frac{\big(1 - 2\,m/r\big)^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{2}} \Bigg[\Big\{ -\Lambda_{,r}\,\Lambda^{-2} + \Lambda^{-1}{}_{,r} \Big\} e^1$$

$$+ \Big\{ -\Lambda_{,r}\,\Lambda^{-2} - 2\,\frac{\Lambda^{-1}}{r} - \Lambda^{-1}{}_{,r} \Big\} e^2 \Bigg]$$

$$+ \Big\{ \frac{\Lambda_{,\theta}}{\sqrt{2}\,r} \Big\} e^4,$$

$$(86)$$

y

$$\Gamma_{34} = \Gamma_{341}e^1 + \Gamma_{342}e^2 + \Gamma_{343}e^3 + \Gamma_{344}e^4$$

$$= \Bigg[-\frac{\Lambda_{,r}\,\Lambda^{-2}\big(1 - 2\,m/r\big)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}}$$

$$- \frac{m\Lambda^{-1}}{\sqrt{2}\,r^2\big(1 - 2\,m/r\big)^{\frac{1}{2}}} \Bigg]\big(e^3 - e^4\big). \quad (87)$$

Convencionalmente se presentan juntas a Γ_{12} y Γ_{34}, puesto que generalmente una es imaginaria y la otra real.

$\therefore$

$$\Gamma_{12} + \Gamma_{34} = \left[- \frac{\Lambda^{-1}{}_{,\theta}}{\sqrt{2}} - \frac{\Lambda^{-1} \cot \theta}{\sqrt{2}\, r} \right] (e^1 - e^2)$$
$$+ \left[- \frac{\Lambda_{,r}\ \Lambda^{-2} (1 - 2\, m/r)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}} - \frac{m \Lambda^{-1}}{\sqrt{2}\, r^2 (1 - 2\, m/r)^{\frac{1}{2}}} \right] (e^3 - e^4) .$$

(88)

Las demás Γ_{ab}, resultan de las correspondientes conjugadas y antisimétricas de las recién calculadas.

De las Γ_{ab} se tiene la caracterización geométrica fundamental del espacio-tiempo en cuestión, porque desde ellas y sus diferenciales, se obtienen las componentes tetradiales del tensor de curvatura de Riemann R_{abcd}.

3.2 LA ECUACION DE DIRAC EN LA METRICA DE SCHWARZSCHILD MAGNETIZADA.

El nexo entre la ecuación de Dirac y la geometría del espacio-tiempo, o si se quiere, entre la tétrada nula y los espinores, queda establecida a través de los coeficientes de rotación de Ricci Γ_{abc}; los cuales aparecen en la ecuación de Dirac, y se hacen presentes por medio de las γ_a. De esa forma, puede obtenerse la ecuación de Dirac en el espacio-tiempo de Schwarzschild magnetizado.

Atendiendo a lo dicho líneas arriba, y a partir de lo realizado en la primera sección de este capítulo, calculo las γ_a

para el espacio-tiempo en consideración. Así es que,

$$\gamma_1 = \tfrac{1}{2}\left(\Gamma_{121} + \Gamma_{341} \right) - \Gamma_{314}$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\Lambda^{-1}{}_{,\theta} + \frac{\Lambda^{-1}\cot\theta}{r} + 2\,\frac{\Lambda_{,\theta}\;\Lambda^{-2}}{r} \right],$$

$$\gamma_2 = -\tfrac{1}{2}\left(\Gamma_{122} + \Gamma_{342} \right) - \Gamma_{423}$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\Lambda^{-1}{}_{,\theta} + \frac{\Lambda^{-1}\cot\theta}{r} + 2\,\frac{\Lambda_{,\theta}\;\Lambda^{-2}}{r} \right],$$

$$\gamma_3 = \tfrac{1}{2}\left(\Gamma_{123} + \Gamma_{343} \right) + \Gamma_{312}$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \left[2\,\Lambda_{,r}\,\Lambda^{-2}\left(1 - 2\,m/r \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{m\Lambda^{-1}}{r^2\left(1 - 2\,m/r \right)^{\frac{1}{2}}} + 2\,\frac{\Lambda^{-1}\left(1 - 2\,m/r \right)^{\frac{1}{2}}}{r} + \Lambda^{-1}{}_{,r}\left(1 - 2\,m/r \right)^{\frac{1}{2}} \right],$$

$$\gamma_4 = -\tfrac{1}{2}\left(\Gamma_{124} + \Gamma_{344} \right) + \Gamma_{421}$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \left[2\,\Lambda_{,r}\,\Lambda^{-2}\left(1 - 2\,m/r \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{m\Lambda^{-1}}{r^2\left(1 - 2\,m/r \right)^{\frac{1}{2}}} \right.$$

$$+2\,\frac{\Lambda^{-1}(\ 1\ -\ 2\ m/r\ )^{\frac{1}{2}}}{r}$$

$$+\ \Lambda^{-1}{}_{,r}\ (\ 1\ -\ 2\ m/r\ )^{\frac{1}{2}}\ \Bigg]\ .$$

(89)

Otro requerimiento para poder escribir la ecuación de Dirac en cualquier espacio-tiempo que se desee, es: obtener las diferenciales ∂_a de la tétrada nula inversa. Por tanto, procédase a ello,

como $\partial_a = e^{\mu}{}_a\ \partial_{\mu}$, tenemos

$$\partial_1 = \frac{1}{\sqrt{2}\,r}\left[\Lambda^{-1}\ \partial_{\theta} - i\ \frac{\Lambda}{r\,\mathrm{sen}\theta}\ \partial_{\phi}\right],$$

$$\partial_2 = \frac{1}{\sqrt{2}\,r}\left[\Lambda^{-1}\ \partial_{\theta} + i\ \frac{\Lambda}{r\,\mathrm{sen}\theta}\ \partial_{\phi}\right],$$

$$\partial_3 = \frac{\Lambda^{-1}}{\sqrt{2}}\Bigg[(\ 1\ -\ 2\ m/r\ )^{\frac{1}{2}}\ \partial_r$$

$$+\ \frac{1}{(\ 1\ -\ 2\ m/r\ )^{\frac{1}{2}}}\ \partial_t\Bigg],$$

y

$$\partial_4 = \frac{\Lambda^{-1}}{\sqrt{2}}\Bigg[(\ 1\ -\ 2\ m/r\ )^{\frac{1}{2}}\ \partial_r$$

$$-\ \frac{1}{(\ 1\ -\ 2\ m/r\ )^{\frac{1}{2}}}\ \partial_t\Bigg].$$

(90)

Ahora, mediante (33) podemos expresar la ecuación de Dirac en el espacio-tiempo de Schwarzschild magnetizado, la cual queda escrita como sigue:

$$\Big\{ \partial_3 + \Lambda_{,r}\, \Lambda^{-2}(1 - 2\, m/r)^{\frac{1}{2}} + \frac{m\Lambda^{-1}}{2\, r^2(1 - 2\, m/r)^{\frac{1}{2}}}$$

$$+ \frac{\Lambda^{-1}(1 - 2\, m/r)^{\frac{1}{2}}}{r} + \frac{\Lambda^{-1}{}_{,r}\, (1 - 2\, m/r)^{\frac{1}{2}}}{2} \Big\}\psi_1$$

$$\Big\{ \partial_2 + \frac{\Lambda^{-1}{}_{,\theta}}{2} + \frac{\Lambda^{-1}\cot\theta}{2r} + \frac{\Lambda_{,\theta}\, \Lambda^{-2}}{r} \Big\}\psi_2 + m\phi^1 = 0 ,$$

$$\Big\{ \partial_1 + \frac{\Lambda^{-1}{}_{,\theta}}{2} + \frac{\Lambda^{-1}\cot\theta}{2r} + \frac{\Lambda_{,\theta}\, \Lambda^{-2}}{r} \Big\}\psi_1$$

$$- \Big\{ \partial_4 + \Lambda_{,r}\, \Lambda^{-2}(1 - 2\, m/r)^{\frac{1}{2}} + \frac{m\Lambda^{-1}}{2\, r^2(1 - 2\, m/r)^{\frac{1}{2}}}$$

$$+ \frac{\Lambda^{-1}(1 - 2\, m/r)^{\frac{1}{2}}}{r} + \frac{\Lambda^{-1}{}_{,r}\, (1 - 2\, m/r)^{\frac{1}{2}}}{2} \Big\}\psi_2 + m\phi^2 = 0$$

$$\Big\{ \partial_4 \Lambda_{,r}\, \Lambda^{-2}(1 - 2\, m/r)^{\frac{1}{2}} + \frac{m\Lambda^{-1}}{2\, r^2(1 - 2\, m/r)^{\frac{1}{2}}}$$

$$+ \frac{\Lambda^{-1}(1 - 2\, m/r)^{\frac{1}{2}}}{r} + \frac{\Lambda^{-1}{}_{,r}\, (1 - 2\, m/r)^{\frac{1}{2}}}{2} \Big\}\phi^1$$

$$+ \Big\{ \partial_1 + \frac{\Lambda^{-1}{}_{,\theta}}{2} + \frac{\Lambda^{-1}\cot\theta}{2r} + \frac{\Lambda_{,\theta}\, \Lambda^{-2}}{r} \Big\}\phi^2 + m\psi_1 = 0 ,$$

y

$$\Big\{ \partial_2 + \frac{\Lambda^{-1}{}_{,\theta}}{2} + \frac{\Lambda^{-1}\cot\theta}{2r} + \frac{\Lambda_{,\theta}\, \Lambda^{-2}}{r} \Big\}\phi^1$$

$$- \Big\{ \partial_3 + \Lambda_{,r}\, \Lambda^{-2}(1 - 2\, m/r)^{\frac{1}{2}} + \frac{m\Lambda^{-1}}{2\, r^2(1 - 2\, m/r)^{\frac{1}{2}}}$$

$$+ \frac{\Lambda^{-1}(1 - 2m/r)^{\frac{1}{2}}}{r} + \frac{\Lambda^{-1}{}_{,r}(1 - 2m/r)^{\frac{1}{2}}}{2} \}\phi^{\dot{2}}$$

$$+ m\psi_2 = 0 .$$

(91)

Ahora, para introducir el campo magnético en la ecuación de Dirac anterior, resta sustituir: $\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}$ por $\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} - ieA_{\mu}$, lo que se conoce como acoplamiento mínimo.

Donde $\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \equiv \partial_{\mu}$ y A_{μ} es el potencial vectorial. Por lo que, paso a calcular A_{μ}. Por lo tanto, partiendo de las componentes de Cartan halladas por Ernst en su estudio del universo de Schwarzschild magnetizado, las que están expresadas en las ecuaciones (64) y (65) ; comparémoslas, para identificar en ellas a la parte radial y angular de la tétrada nula inversa, respectivamente. Así,

$$e^{(r)} = \frac{\Lambda}{\sqrt{2}(1 - 2m/r)^{\frac{1}{2}}} \quad y \quad e^{(\phi)} = \frac{\Lambda r}{\sqrt{2}},$$

(92)

donde

$$e^{(r)} = \tfrac{1}{2}(e^{3}{}_{r} + e^{4}{}_{r}) \quad y \quad e^{(\phi)} = \tfrac{1}{2}(e^{1}{}_{\phi} + e^{2}{}_{\phi}) .$$

(93)

por lo que,

$$e^{\mu}{}_{(r)} = \left(0 , \frac{\Lambda^{-1}(1 - 2m/r)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}} , 0 , 0\right)$$

y

$$e^{\mu}{}_{(\phi)} = (0 , 0 , \frac{\Lambda^{-1}}{\sqrt{2}\, r} , 0) .$$

(94)

Como ya se definió al principio de este capítulo: $H_{(r)} = e^{\mu}{}_{(r)} H_{\mu}$ y $H_{(\phi)} = e^{\mu}{}_{(\phi)} H_{\mu}$.

Sustituyendo los valores de $e^{\mu}{}_{(r)}$ y $e^{\mu}{}_{(\phi)}$ en las expresiones anteriores

$$H_{(r)} = \frac{\Lambda^{-1} (1 - 2 m/r)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}} H_{r} \quad y \quad H_{(\phi)} = \frac{\Lambda^{-1}}{\sqrt{2}\, r} H_{\phi} .$$

(95)

Comparando esto, con las componentes de Cartan del campo magnético presentadas antes, llego a que:

$$H_{r} = \sqrt{2} \frac{\Lambda^{-1} B_{o} \cos\theta}{(1 - 2 m/r)^{\frac{1}{2}}}$$

y

$$H_{\phi} = - \sqrt{2} \Lambda^{-1} (1 - 2 m/r)^{\frac{1}{2}} B_{o} r \operatorname{sen}\theta .$$

(96)

Continuando, H_{α} está relacionada con el tensor del campo electromagnético $F_{\alpha\beta}$ a través de la siguiente ecuación:

$$H_{\alpha} = u_{\beta} \tilde{F}^{\alpha\beta} ; \qquad (97)$$

donde $\tilde{F}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2\sqrt{-g}} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\gamma\delta}$, $u_{\beta} = g_{t\beta}$ y $u^{\alpha} = \delta^{\alpha}{}_{t}$.

(Aquí u^α es el vector de Killing temporal, que cumple $u^\alpha\ \partial_\alpha = \partial_t$) .

$\therefore$

$$H_r = u_\beta \tilde{F}^{\,r\beta} = g_{t\beta}\ \tilde{F}^{\,r\beta} = g_{tt}\ \tilde{F}^{\,rt} = -\ \Lambda^{-2}(\ 1\ -\ 2\ m/r\ )\ \tilde{F}^{\,rt}\ .$$

(98)

Confrontando con los valores ya obtenidos para H_r y H_θ

$\therefore$

$$\tilde{F}^{\,rt} = -\sqrt{2}\ \frac{\Lambda^{-2}\ B_0 \cos\theta}{(\ 1\ -\ 2\ m/r\ )^{\frac{3}{2}}}\ .$$

(99)

Análogamente:

$$H_\theta = u^\beta\ \tilde{F}^{\,\theta\beta} = g_{t\beta}\ \tilde{F}^{\,\theta t} = -\ \Lambda^2(\ 1\ -\ 2\ m/r\ )\ \tilde{F}^{\,\theta t}\ .$$

(100)

Procediendo igual que antes

$\therefore$

$$\tilde{F}^{\,\theta t} = \sqrt{2}\ \frac{\Lambda^{-2}\ B_0\, r \operatorname{sen}\theta}{(\ 1\ -\ 2\ m/r\ )^{\frac{1}{2}}}\ .$$

(101)

De la expresión presentada antes para $\tilde{F}^{\,\alpha\beta}$ en términos de $F_{\alpha\beta}$, se sigue:

$$F_{\theta\phi} = \Lambda^2 r^2 \operatorname{sen}\theta\ \tilde{F}^{\,rt} \quad \text{y} \quad F_{r\phi} = \Lambda^2 r^2 \operatorname{sen}\theta\ \tilde{F}^{\,\theta t}\ .$$

(102)

Para esto, se utilizo que: $g = \det.\ g_{\mu\nu}$, donde $g_{\mu\nu}$ es el tensor métrico y cumple la relación $dS^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}$. En nuestro caso $g = - \Lambda^4 r^4 \mathrm{sen}^2\theta$, por lo que $\sqrt{- g} = \Lambda^2 r^2 \mathrm{sen}\theta$.

Por los resultados obtenidos, las únicas componentes no nulas de $F_{\alpha\beta}$ son: $F_{r\phi}$, $F_{\phi r}$, $F_{\theta\phi}$ y $F_{\phi\theta}$.

Por otra parte; ya que $B = \nabla \times A$, y como la métrica de Schwarzschild magnetizada presenta siempre acopladas a las coordenadas r y θ , al considerar el rotacional en coordenadas esféricas se concluye que $A = A_{\phi}$, para que pueda reflejarse correctamente la situación comentada.

∴

Como $F_{\theta\phi} = \partial_{\theta} A_{\phi} - \partial_{\phi} A_{\theta} = \partial_{\theta} A_{\phi}$, dado que $A = A_{\phi}$.

∴

$$A_{\phi} = - \int F_{\phi\theta}\, d\theta = - \int \Lambda^2 r^2 \mathrm{sen}\theta\, \tilde{F}^{\,rt}\, d\theta \ .$$

(103)

Sustituyendo la expresión desplegada de $\tilde{F}^{\,rt}$, tenemos

$$A_{\phi} = \sqrt{2}\ \frac{B_o\ r^2}{(\ 1\ -\ 2\ m/r\ )^{\frac{1}{2}}} \int \Lambda^{-1} \mathrm{sen}\theta \cos\theta d\theta \ ,$$

(104)

con $\Lambda = 1 + \frac{1}{4} B_o^{\ 2}\ r^2 \mathrm{sen}^2\theta$.

$\therefore$

$$\int \Lambda^{-1} \mathrm{sen}\theta\cos\theta d\theta = \int \frac{\mathrm{sen}\theta\cos\theta}{(\ 1 + \frac{1}{4}\ B_o^{\ 2}\ r^2 \mathrm{sen}^2\theta\ )} d\theta\ ,$$

(105)

hágase el cambio de variable siguiente:

$$\text{sea } u = \tfrac{1}{4}\ B_o^{\ 2}\ r^2 \mathrm{sen}^2\theta\ . \qquad (\ 106\ )$$

$\therefore$

$$du = \tfrac{1}{2}\ B_o^{\ 2}\ r^2 \mathrm{sen}\theta\cos\theta d\theta\ . \qquad (\ 107\ )$$

$\therefore$

$$\cos\theta\,\mathrm{sen}\theta d\theta = 2\ \frac{u}{B_o^{\ 2}\ r^2}\ . \qquad (\ 108\ )$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\int \Lambda^{-1} \mathrm{sen}\theta\cos\theta d\theta &= \frac{2}{B_o^{\ 2}\ r^2} \int \frac{du}{(\ 1 + u\ )} \\ &= \frac{2}{B_o^{\ 2}\ r^2}\, \mathrm{Ln}\,(\ 1 + u\ ) \\ &= \frac{2}{B_o^{\ 2}\ r^2}\, \mathrm{Ln}\,(\ 1 + \tfrac{1}{4}\ B_o^{\ 2}\ r^2 \mathrm{sen}^2\theta\ ) \\ &= \frac{2}{B_o^{\ 2}\ r^2}\, \mathrm{Ln}\,(\ \Lambda\ ).\end{aligned}$$

(109)

De lo que,

$$A_{\phi} = \frac{2\sqrt{2}}{(1 - 2m/r)^{\frac{3}{2}} B_{o}} \, \mathrm{Ln}\,(\Lambda) .$$

(110)

Así,

$$A_{\mu} = (A_{o} , A) = (- \phi , A_{\phi}) , \qquad (111)$$

donde $\phi = \frac{Q}{r}$ es el potencial escalar. También,

$$A^{\mu} = (\phi , A^{\phi}) . \qquad (112)$$

Esto permite insertar el campo magnético en la ecuación de Dirac, intercambiando ∂_{μ} por $(\partial_{\mu} - ieA_{\mu})$.

desarrollando

$$\partial_{t} \dashrightarrow \partial_{t} - ieA_{t} = \partial_{t} + \frac{Q}{r} ,$$

$$\partial_{r} \dashrightarrow \partial_{r} ,$$

$$\partial_{\theta} \dashrightarrow \partial_{\theta} ,$$

(ya que $A_{r} = 0 = A_{\theta}$) y

$$\partial_{\phi} \dashrightarrow \partial_{\phi} - ieA_{\phi}$$

$$= \partial_{\phi} - ie \frac{2\sqrt{2}}{(1 - 2m/r)^{\frac{3}{2}} B_{o}} \mathrm{Ln}\,(\Lambda) .$$

(113)

(113)

Antes de añadir el campo magnético a la ecuación de Dirac en el espacio-tiempo de Schwarzschild magnetizado como acaba de mostrarse, démosle a ésta, una expresión más compacta en términos de operadores.

Sean $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_3$ y $\mathcal{D}_4$. Donde:

$$\mathcal{D}_1 = \frac{\Lambda^{-1}}{r}\,\partial_\theta + i\,\frac{\Lambda}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\left\{\partial_\varphi - ie\,\frac{2\sqrt{2}}{(1-2m/r)^{\frac{3}{2}}\,B_o}\,\mathrm{Ln}(\Lambda)\right\}$$

$$+\frac{\Lambda^{-1}{}_{,\theta}}{2} + \frac{\Lambda^{-1}\cot\theta}{2r} + \frac{\Lambda_{,\theta}\,\Lambda^{-2}}{r}\,,$$

$$\mathcal{D}_2 = \frac{\Lambda^{-1}}{r}\,\partial_\theta - i\,\frac{\Lambda}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\left\{\partial_\varphi - ie\,\frac{2\sqrt{2}}{(1-2m/r)^{\frac{3}{2}}\,B_o}\,\mathrm{Ln}(\Lambda)\right\}$$

$$+\frac{\Lambda^{-1}{}_{,\theta}}{2} + \frac{\Lambda^{-1}\cot\theta}{2r} + \frac{\Lambda_{,\theta}\,\Lambda^{-2}}{r}\,,$$

$$\mathcal{D}_3 = (1-2m/r)^{\frac{1}{2}}\Lambda^{-1}\,\partial_r + \frac{\Lambda^{-1}}{(1-2m/r)^{\frac{1}{2}}}\left\{\partial_t + ie\,\frac{Q}{r}\right\}$$

$$+\Lambda_{,r}\,\Lambda^{-2}(1-2m/r)^{\frac{1}{2}} + \frac{m\Lambda^{-1}}{2r^2(1-2m/r)^{\frac{1}{2}}}$$

$$+\frac{\Lambda^{-1}(1-2m/r)^{\frac{1}{2}}}{r} + \frac{\Lambda^{-1}{}_{,r}\,(1-2m/r)^{\frac{1}{2}}}{2}\,,$$

y

$$\mathcal{D}_4 = (1-2m/r)^{\frac{1}{2}}\Lambda^{-1}\,\partial_r - \frac{\Lambda^{-1}}{(1-2m/r)^{\frac{1}{2}}}\left\{\partial_t + ie\,\frac{Q}{r}\right\}$$

$$+\Lambda_{,r}\,\Lambda^{-2}(1-2m/r)^{\frac{1}{2}} + \frac{m\Lambda^{-1}}{2r^2(1-2m/r)^{\frac{1}{2}}}$$

$$+\frac{\Lambda^{-1}(1-2m/r)^{\frac{1}{2}}}{r} + \frac{\Lambda^{-1}{}_{,r}\,(1-2m/r)^{\frac{1}{2}}}{2}\,. \qquad (114)$$

Puede fácilmente apreciarse que $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}^*_2$.

Los operadores anteriores ya tienen incluido el cámpo magnético, gracias a las apropiadas sustituciones que se habían sugerido.

Concluyendo, la expresión final para la ecuación de Dirac en el espacio curvo de Schwarzschild magnetizado, es

$$\mathcal{D}_3 \; \psi_1 + \mathcal{D}^*_2 \; \psi_2 + m\phi^{\dot{1}} = 0 \; ,$$

$$\mathcal{D}_2 \; \psi_1 - \mathcal{D}_4 \; \psi_2 + m\phi^{\dot{2}} = 0 \; ,$$

$$\mathcal{D}_4 \; \phi^{\dot{1}} + \mathcal{D}^*_2 \; \phi^{\dot{2}} + m\psi_1 = 0 \; ,$$

y

$$\mathcal{D}_2 \; \phi^{\dot{1}} - \mathcal{D}_3 \; \phi^{\dot{2}} + m\psi_2 = 0 \; .$$

(115)

Para darle a la ecuación anterior una forma convencional; se sustituye $\phi^{\dot{a}} \longrightarrow - \, i \; \phi^{\dot{a}}$, y se cambia el orden de las ecuaciones componentes del siguiente modo: Intercambiando las dos primeras filas con las dos últimas.

$\therefore$

$$m\psi_1 + 0 - i \; \mathcal{D}_4 \; \phi^{\dot{1}} - i \; \mathcal{D}^*_2 \; \phi^{\dot{2}} = 0 \; ,$$

$$0 + m\psi_2 - i \; \mathcal{D}_2 \; \phi^{\dot{1}} + i \; \mathcal{D}_3 \; \phi^{\dot{2}} = 0 \; ,$$

$$\mathcal{D}_3 \; \psi_1 + \mathcal{D}^*_2 \; \psi_2 - i m\phi^{\dot{1}} + 0 = 0 \; ,$$

y

$$\mathcal{D}_2\,\psi_1 - \mathcal{D}_4\,\psi_2 + 0 - im\phi^{\dot{2}} = 0\,.$$

(116)

$\Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} m & 0 & \mathcal{D}_4 & \mathcal{D}^*{}_2 \\ 0 & m & \mathcal{D}_2 & -\mathcal{D}_3 \\ \mathcal{D}_3 & \mathcal{D}^*{}_2 & m & 0 \\ \mathcal{D}_2 & -\mathcal{D}_4 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ -i\,\phi^{\dot{1}} \\ -i\,\phi^{\dot{2}} \end{bmatrix} = 0\,.$$

(117)

Si se prosigue desglosando la ecuación de Dirac en su forma matricial, se tiene

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathcal{D}_4 & \mathcal{D}^*{}_2 \\ 0 & 0 & \mathcal{D}_2 & -\mathcal{D}_3 \\ \mathcal{D}_3 & \mathcal{D}^*{}_2 & 0 & 0 \\ \mathcal{D}_2 & -\mathcal{D}_4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Psi + m\Psi = 0\,.$$

(118)

donde $\Psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ -i\,\phi^{\dot{1}} \\ -i\,\phi^{\dot{2}} \end{bmatrix}$. La ecuación de Dirac en su forma estándar es: $\gamma^{\mu}\mathrm{D}_{\mu}\Psi + im\Psi = 0$. Por tanto,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathcal{D}_4 & \mathcal{D}^*{}_2 \\ 0 & 0 & \mathcal{D}_2 & -\mathcal{D}_3 \\ \mathcal{D}_3 & \mathcal{D}^*{}_2 & 0 & 0 \\ \mathcal{D}_2 & -\mathcal{D}_4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Psi + im\Psi = 0\,.$$

(119)

$$\text{con } \Psi = \begin{bmatrix} -i\,\psi_1 \\ -i\,\psi_2 \\ -\phi^{\dot{1}} \\ -\phi^{\dot{2}} \end{bmatrix} \quad y \quad \gamma^{\mu} D_{\mu}\Psi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathcal{D}_4 & \mathcal{D}^*_2 \\ 0 & 0 & \mathcal{D}_2 & -\mathcal{D}_3 \\ \mathcal{D}_3 & \mathcal{D}^*_2 & 0 & 0 \\ \mathcal{D}_2 & -\mathcal{D}_4 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Aquí $\gamma^{\mu} D_{\mu} = \gamma^{t} D_{t} + \gamma^{r} D_{r} + \gamma^{\theta} D_{\theta} + \gamma^{\varphi} D_{\varphi}$, donde $D_{\mu} = \partial_{\mu} + \Gamma_{\mu}$.

3.3 ANALISIS DE LA ECUACION DE DIRAC EN EL ESPACIO-TIEMPO DE SCHWARZSCHILD MAGNETIZADO.

Para llevar a cabo cualquier estudio de la ecuación de Dirac obtenida en la sección que precede a ésta; hay primero que intentar desacoplarla, y reflexionar en las observaciones que surjan en el transcurso de este proceso. Así, manipulando sobre las ecuaciones componentes de la ecuación de Dirac, obtenemos:

$$(\mathcal{D}_4 \mathcal{D}_3 + \mathcal{D}^*_2 \mathcal{D}_2)\psi_1 + [\mathcal{D}_4 , \mathcal{D}^*_2]\psi_2 - m^2\psi_1 = 0 ,$$

$$(\mathcal{D}_4 \mathcal{D}_3 + \mathcal{D}^*_2 \mathcal{D}_2)\psi_2 + [\mathcal{D}_2 , \mathcal{D}_3]\psi_1 - m^2\psi_2 = 0 ,$$

$$(\mathcal{D}_4 \mathcal{D}_3 + \mathcal{D}^*_2 \mathcal{D}_2)\phi^{\dot{1}} + [\mathcal{D}_3 , \mathcal{D}^*_2]\phi^{\dot{2}} - m^2\phi^{\dot{1}} = 0 ,$$

y

$$(\mathcal{D}_4 \mathcal{D}_3 + \mathcal{D}^*_2 \mathcal{D}_2)\phi^{\dot{2}} + [\mathcal{D}_2 , \mathcal{D}_4]\phi^{\dot{1}} - m^2\phi^{\dot{2}} = 0 . \qquad (120)$$

En estas transformaciones se usó que $[\mathcal{D}^*_2 , \mathcal{D}_2] = 0$ y $[\mathcal{D}_3 , \mathcal{D}_4] = 0$, lo cual es cierto porque $\mathcal{D}^*_2$ y $\mathcal{D}_2$ sólo difieren en algunos signos; igual acontece con $\mathcal{D}_3$ y $\mathcal{D}_4$. Es claro, que únicamente cuando se anulen los conmutadores de las ecuaciones resultantes arriba, la ecuación de Dirac estará desacoplada; pero eso sólo ocurre, cuando $B_0 = 0$, i.e. , si no existe campo magnético externo en el espacio curvo que consideramos, siendo éste: el espacio-tiempo de Schwarzschild magnetizado.

Asúmase que cada una de las cuatro componentes de la función de onda Ψ tienen una dependencia en el tiempo t y el ángulo azimutal ϕ, dada por $f(t,\phi) = \mathscr{A}\ e^{i(\omega t - m\phi)}$, donde la energía $\omega > 0$, con la amplitud de onda $\mathscr{A}$. Esto es, puesto que hay dos vectores de Killing, descritos por ∂/∂_t y $\partial/\partial\phi$.

Además, si $B_o \neq 0$, los operadores $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_3$ y $\mathcal{D}_4$ no son puramente radiales ni tampoco puramente angulares, esto impide desacoplar la ecuación de Dirac; sin embargo, para $m \neq 0$ y $B_o = 0$, la ecuación de Dirac puede desacoplarse, y en tal caso, se procede a la separación de variables, lo cual es aparente; y se hace como sugiere Chandrasekhar (al investigar la solución a la ecuación de Dirac en la geometría de Kerr), proponiendo

$$\psi_1 = f(t,\phi)\psi_1(r,\theta) = f(t,\phi)R_{-\frac{1}{2}}(r)S_{-\frac{1}{2}}(\theta) ,$$

$$\psi_2 = f(t,\phi)\psi_2(r,\theta) = f(t,\phi)R_{+\frac{1}{2}}(r)S_{+\frac{1}{2}}(\theta) ,$$

$$\phi^{\dot{1}} = f(t,\phi)\phi^{\dot{1}}(r,\theta) = f(t,\phi)R_{+\frac{1}{2}}(r)S_{-\frac{1}{2}}(\theta) ,$$

y

$$\phi^{\dot{2}} = f(t,\phi)\phi^{\dot{2}}(r,\theta) = f(t,\phi)R_{-\frac{1}{2}}(r)S_{+\frac{1}{2}}(\theta) ; \qquad (121)$$

donde $R_{\pm\frac{1}{2}}(r)$ y $S_{\pm\frac{1}{2}}(\theta)$ son funciones sólo de r y θ, respectivamente. Además, si hay invariancia de ϕ y t, es conveniente realizar los siguientes reemplazos: $\partial_t \longrightarrow i\omega$ y $\partial_\phi \longrightarrow -im$.

Desde esto, Chandrasekhar nos revela en su trabajo que, para el caso que me ocupa: $B_o = 0$, $\Lambda = 1$, puede reducirse la solución de la ecuación de Dirac en la geometría de

Schwarzschild magnetizada a la solución de un par de ecuaciones desacopladas, una puramente radial y otra por completo angular; así, la solución general de la ecuación de Dirac se expresa como una superposición lineal de las varias soluciones asociadas a los eigenvalores de la pareja de ecuaciones desacopladas, a que me acabo de referir (véase [9]).

Cuando $B_o \neq 0$ y $m = 0$, el problema resulta del todo similar al efecto Zeeman relativista, y la solución correspondiente puede encontrarse en la literatura especializada en el tema (aunque normalmente se resuelve por criterios perturbativos, con un campo magnético más sencillo que el presente en nuestros desarrollos). Mientras tanto, para el caso que es de interés aquí: $m \neq 0$ y $B_o \neq 0$, ni siquiera con las indicaciones al respecto que hace Ernst en la ref. [5] se puede simplificar la compleja estructura matemática de los operadores $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_3$ y $\mathcal{D}_4$, presentes en la ecuación de Dirac que concentra la plena atención de esta tesis. Todo ello, oscurece de algún modo y en cierto grado, la información que podemos extraer de la ecuación de Dirac en el espacio-tiempo de Schwarzschild magnetizado, por lo cual, emprendamos un camino alternativo que pueda iluminar y dar buen curso a este análisis.

En virtud de lo que se acaba de decir, dirijamos nuestra investigación a la conservación del tensor de espín en este peculiar espacio-tiempo. Para eso, en el capítulo anterior obtuvimos la ecuación (43), así es que, procedamos a calcular sus componentes

$$\nabla_\mu S^{\mu\alpha\beta} = \nabla_1 S^{1\alpha\beta} + \nabla_2 S^{2\alpha\beta} + \nabla_3 S^{3\alpha\beta} + \nabla_4 S^{4\alpha\beta}$$

$$= -2 \frac{i\ e}{m} \sigma^\mu [\ \alpha_F{}^\beta\ ]._\mu .$$

(122)

Para facilitar en lo sucesivo nuestros cálculos, definamos $S^{\alpha\beta} \equiv \nabla_\mu S^{\mu\alpha\beta}$.

$\therefore$

$$S^{03} = -\frac{i\ e}{m}\left\{ \sigma^{10}\, F^{3\cdot}_{\ 1} + \sigma^{20}\, F^{3\cdot}_{\ 2} \right\},$$

$$S^{01} = -\frac{i\ e}{m}\, \sigma^{30}\, F^{1\cdot}_{\ 3},$$

$$S^{02} = -\frac{i\ e}{m}\, \sigma^{30}\, F^{2\cdot}_{\ 3},$$

$$S^{12} = -\frac{i\ e}{m}\left\{ \sigma^{31}\, F^{2\cdot}_{\ 3} - \sigma^{32}\, F^{1\cdot}_{\ 3} \right\},$$

$$S^{13} = -\frac{i\ e}{m}\, \sigma^{21}\, F^{3\cdot}_{\ 2},$$

y

$$S^{23} = -\frac{i\ e}{m}\, \sigma^{12}\, F^{3\cdot}_{\ 1}\ . \tag{123}$$

Como se observa, $S^{\alpha\beta}$ tiene tan sólo seis componentes linealmente independientes, asimismo, sus componentes restantes son obtenidas de las antisimétricas de las mostradas arriba, o bien, son nulas, porque en la manera en que se definen $S^{\alpha\beta}$ y $\sigma^{\mu\nu}$, se da que $S^{\alpha\alpha} = 0 = \sigma^{\mu\mu}$, $\forall\ \alpha, \mu$.

Por otra parte, el desarrollo anterior se sustenta en el hecho de que, el tensor de campo electromagnético $F_{\alpha\beta}$ tiene sólo cuatro componentes no nulas en el espacio-tiempo de Schwarzschild magnetizado, que son: F_{13}, F_{23}, F_{3} y F_{32}, donde $g^{\alpha\gamma}\, F_{\alpha\beta} = F^{\gamma\cdot}_{\ \beta}$ (recuérdese que $t \equiv 0$, $r \equiv 1$, $\theta \equiv 2$ y $\phi \equiv 3$, lo que convenimos es válido, únicamente para índices de coordenadas) . Aquí,

$$F^{3\cdot}_{\ 2} = g^{33}\, F_{32} = \frac{\Lambda^2}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\ F_{32}$$

$$= -\sqrt{2}\ \frac{\Lambda\ B_0 \cos\theta}{(\ 1 - 2\ m/r\ )^{\frac{3}{2}}} = -F^{2\cdot}_{\ 3}$$

y

$$F^{1\cdot}_{\ 3} = g^{11} F_{13} = -\frac{\Lambda^{-2}}{(1 - 2m/r)}$$

$$= -\sqrt{2}\ \frac{\Lambda^{-3}\ B_o r^3 \operatorname{sen}^2\theta}{(1 - 2m/r)^{\frac{3}{2}}} = -F^{3\cdot}_{\ 1}\ .$$

(124)

$\therefore$

$S^{\alpha\beta} \propto B_o$. Mientras que, en componentes tetradiales

$$F^{a\cdot}_{\ b} = e^{a}_{\ \alpha}\ e^{\beta}_{\ b}\ F^{\alpha\cdot}_{\ \beta}\ . \qquad (125)$$

Consideremos una componente arbitraria de $F^{a\cdot}_{\ b}$ para nuestro análisis, por ejemplo: Si a = 1 y b = 2 , se tiene que

$$F^{1\cdot}_{\ 2} = -i\sqrt{2}\ \frac{B_o \cos\theta}{(1 - 2m/r)^{\frac{3}{2}}} \left\{ \Lambda^{-1}\operatorname{sen}\theta + \frac{\Lambda^{3}}{\operatorname{sen}\theta} \right\}.$$

(126)

$\therefore$

$F^{a\cdot}_{\ b} \propto B_o$. De lo cual, se sigue: $S^{ab} \propto B_o$. Esto quiere decir que, el tensor de espín no se conserva en este espacio curvo; lo cual se explica, no; por la introducción de un campo magnético externo en el espacio-tiempo de Schwarzschild, sino por la geometría característica de éste, como claramente queda manifiesto en las ecuaciones (60) y (61) .

Del comentario anterior, nace el inquietante deseo de darnos cuenta, de la manera en que actúa e influye en el comportamiento de una partícula cargada (en especial, el electrón) , un espacio curvado inmerso en un campo no conservativo del tensor de espín, del que es un excelente ejemplo el que estamos estudiando; por ello, reflexionemos sobre lo que sucede en una región lejana, y en una vecindad del hoyo negro de Schwarzschild magnetizado ($r = 2\ m$). Para realizar esa tarea, basta considerar y examinar la componente tetradial del campo magnético $F^{1\cdot}_{\ 2}$,

i) Región remota del horizonte de evento.

Ya que $\Lambda = 1 + \frac{1}{4}\ B_o^2\ r^2 \mathrm{sen}^2\theta$; para r muy grande, en particular $r \gg 2\ m$, se tiene: $\Lambda^3 \sim \dfrac{B_o^6\ r^6 \mathrm{sen}^6\theta}{64}$ y $\Lambda^{-1} \sim \dfrac{4}{B_o^2\ r^2 \mathrm{sen}^2\theta}$. Asimismo $(1 - 2\ m/r)^{\frac{3}{2}} \sim (1 - 3\ m/r)$, porque $2\ m/r \ll 1$.

$\therefore$

$$F^{1\cdot}_{\ 2} \sim - i \sqrt{2} \left[\frac{2^8 + B_o^8\ r^8 \mathrm{sen}^7\theta}{2^6\ B_o^2\ r^2 \mathrm{sen}^2\theta} \right] \frac{B_o \cos\theta}{(1 - 3\ m/r)}$$

$$\propto \frac{B_o^7}{r^2} (\mathcal{E}_1 + 1/r^4) . \qquad (127)$$

Así, conforme se aleja un electrón del horizonte de evento; la influencia perturbadora de la geometría sobre el giro del electrón en un campo magnético externo, se reduce según $\frac{1}{r^2}(\mathcal{E}_1 + 1/r^4)$, en tanto que cuando $r \longrightarrow + \infty$, tenemos un campo uniforme, que no contribuye a la alteración ejercida en el espín de la partículapor la estructura topológica del espacio-tiempo de Schwarzschild magnetizado. (Aquí $\mathcal{E}_1$ es cierta constante determinada por el ángulo θ) .

ii) vecindad del horizonte de evento.

Tomemos el radio de la vecindad como $2\ m$, por ende

$r - 2\,m \ll 2\,m$, de lo que se sigue: $4\,m/r \gg 1 \;\rightarrow\; 2\,m/r \gg 1$, por eso $r \ll 1$; además, $\Lambda^{9} \sim 1$, $\Lambda^{-1} \sim 1 - \frac{1}{4}\,B_0^2 r^2 \mathrm{sen}^2\theta$ y también $(\,1 - 2\,m/r\,)^{\frac{3}{2}} \sim i\,(\,2\,m/r\,)^{\frac{3}{2}}$. Por tanto

$$F^{1}{}_{2} \sim -\left[\frac{4\ \mathrm{sen}\theta - B_0^2\ r^2 \mathrm{sen}^9\theta}{4}\right]\frac{B_0 \cos\theta}{2\,(\,m/r\,)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\propto B_0^9\, r^{7/2} .$$

(128)

En razón de esto, para una región muy cercana del horizonte, la incidencia del campo magnético crece de acuerdo a $r^{7/2}$, llegando a volverse tan intensa, que conforme $r \longrightarrow 2\,m$, su magnitud torna sumamente irresistible al eletrón, el poder perturbador de la curvatura del espacio, influyendo notoriamente en él; y por lo tanto, en su giro, dado que el campo magnético en esta vecindad no crece linealmente. Nótese que para i) , $F^{ab} \propto \frac{1}{r^2}\,(\,\mathcal{E}_1 + 1/r^4\,)$, y en el caso de ii) $F^{ab} \propto r^{7/2}$.

El análisis emprendido ha sido muy revelador, ya que, nos esclarece el por qué el tensor de espín no se conserva en el espacio-tiempo de Schwarzschild magnetizado, lo que se explica por la geometría asociada a este espacio, cuya curvatura se ve matizada por el campo magnético que lo envuelve; estructura cuyos efectos transtornan el giro del electrón, impidiendo la conservación de su tensor de espín. Dígase por último, que la alteración provocada por la geometría sobre el espacio-tiempo en cuestión, no es homogénea en la extensión de éste, hecho notorio en las ecuaciones (127) y (128) , evidenciando éstas que la perturbación sobre el espín de la partícula cargada, es más brusco y súbito en las cercanías del umbral $r = 2\,m$.

CONCLUSIONES

CONCLUSIONES

Al analizar la ecuación de Dirac obtenida para el espacio-tiempo de Schwarzschild magnetizado, resultó realmente difícil arrebatarle a ésta , mayor información de aquélla con la cual concluye la investigación presente; pero por supuesto, concebimos a este intento por comprender e interpretar el comportamiento del electrón en el espacio curvo mencionado (sobre todo, en una vecindad cercana de ese hoyo negro), como un primer paso que esperamos continuar en trabajos posteriores; y pese a que en esta exposición, la complejidad de la estructura matemática de la ecuación de Dirac estudiada limitó la posibilidad de encontrar sus soluciones, y mucho menos, analizarlas; sí se logro en cambio, realizar prudentes comentarios a casos específicos de ella, entre los que destacan: $B_o = 0$ y $m \neq 0$, $B_o \neq 0$ y $m = 0$, los cuales resultaron solubles bajo los criterios convencionales de análisis de las ecuaciones diferenciales, en el contexto de la teoría cuántica.

Esto, orientó mis pasos a otro derrotero, que pudiera brindarme luz sobre los efectos que acompañan al movimiento de una partícula cargada inmersa en el espacio-tiempo de Schwarzschild, en presencia de un campo magnético externo. Así, calculo la derivada covariante del tensor de espín en este espacio tan peculiar, encontrando que: para un universo magnético de esta naturaleza, el tensor de espín no es conservado; lo cual no se desprende, como pudiera pensarse, de la introducción de un campo magnético en el espacio-tiempo de Schwarzschild, sino de la geometría que caracteriza al universo que estudiamos, lo que queda explicado completamente por la ecuación (60) , en la cual resulta muy evidente que la geometría es la verdadera responsable de convertir a este espacio curvo en un campo no conservativo del tensor de espín; esclareciéndose de ese modo, la no invariancia de éste, en él.

Para concluir, el examen de la derivada covariante del tensor de espín en el universo de Schwarzschild magnetizado, arrojó que, en una región muy lejana del hoyo negro de Schwarzschild ($r = 2\,m$) , la perturbación que experimenta el giro del electrón, es proporcional a $\frac{B_o^7}{r^2}(\ \mathscr{E}_1 + 1/r^4\ )$; mientras que, en una vecindad muy pequeña de éste, la influencia sobre el espín, obedece la razón $B_o^8\ r^{7/2}$. De alguna manera, estos resultados dan cuenta del por qué, el tensor de espín no permanece invariante en este espacio; ya que, las secuelas tan diversas y desiguales, producidas en éste, sobre el electrón, están determinadas por la distancia radial al horizonte de evento, de la partícula cargada, en esta geometría a que dedicamos nuestro trabajo; lo que resulta sin lugar a dudas, de una pérdida de cierta simetría en este campo cuántico analizado, provocada por la curvatura del espacio asociada al espacio-tiempo de Schwarzschild magnetizado.

Finalmente, creemos que la forma explícita de las ecuaciones que se presentan aquí, y la generalización de importantes relaciones, en especial, las expresadas en las ecuaciones (43) y (60) , permita un estudio futuro con mayor detalle y profundidad del comportamiento de un electrón en un campo magnético muy cerca del horizonte de un hoyo negro.

APENDICES

APENDICE A. EL VECTOR DE KILLING K_μ EN EL ESPACIO-TIEMPO DE SCHWARZSCHILD MAGNETIZADO.

K_μ es el vector de Killing asociado con la simetría axial-rotacional, y queda definido a través de la ecuación $\nabla_\alpha K_\beta + \nabla_\beta K_\alpha = 0$, y además $K^\mu \partial_\mu = \partial/\partial\phi$, i.e., $K^\mu = (0, 0, 0, 1)$, por tanto $K_\mu = g_{\phi\phi}\, \delta^3_\mu$. A partir de esto, y recordando que para un vector A_β cualquiera:

$$\nabla_\alpha A_\beta = \partial_\alpha A_\beta - \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} A_\mu , \qquad (129)$$

podemos obtener una expresión matemática, que nos permita calcular las entradas de la matriz $\nabla_\alpha K_\beta$, de la siguiente forma:

$$\nabla_\alpha K_\beta = \partial_\alpha K_\beta - \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} K_\mu$$

$$= \delta^3_\beta\, \partial_\alpha (g_{\phi\phi}) - g_{\phi\phi}\, \Gamma^3{}_{\alpha\beta} . \qquad (130)$$

como $\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} = g^{\mu\nu}\, \Gamma_{\nu,\alpha\beta}$, se tiene que

$$\nabla_\alpha K_\beta = \delta^3_\beta\, \partial_\alpha (g_{\phi\phi}) - \Gamma_{3,\alpha\beta} , \qquad (131)$$

donde $g_{\phi\phi} \equiv g_{33} = \Lambda^{-2} r^2 \mathrm{sen}^2\theta$. Ahora, puesto que

$$\Gamma_{\mu,\alpha\beta} = \tfrac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu} \right) , \qquad (132)$$

y para nuestro caso $g_{\alpha\beta} = f(r, \theta) \rightarrow \dfrac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{3}} = 0$.

$\therefore$

$$\nabla_{\alpha} K_{\beta} = \delta^{3}_{\beta}\, \partial_{\alpha} (g_{\phi\phi}) - \tfrac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{3\alpha}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial g_{3\beta}}{\partial x^{\alpha}} \right) .$$

(133)

Así, calculando las componentes de $\nabla_{\alpha} K_{\beta}$

$$\nabla_{3} K_{1} = - r\mathrm{sen}^{2}\theta\{ \tfrac{1}{2} r(\Lambda^{-2})_{,r} + \Lambda^{-2} \}$$

$$= - \nabla_{1} K_{3}$$

(134)

y

$$\nabla_{2} K_{3} = r^{2}\mathrm{sen}\theta\{ \tfrac{1}{2} \mathrm{sen}\theta(\Lambda^{-2})_{,\theta} + \Lambda^{-2}\cos\theta$$

$$= - \nabla_{3} K_{2} ,$$

(135)

todas las demás componentes de la matriz $\nabla_{\alpha} K_{\beta}$ son nulas, lo que se debe a las condiciones propias de esta métrica.

Para expresar tetradialmente el tensor $\nabla_{\alpha} K_{\beta}$, basta contraerlo dos veces con la tétrada nula. Por tanto

$$\nabla_{a} K_{b} = e^{\alpha}{}_{a}\, e^{\beta}{}_{b}\, \nabla_{\alpha} K_{\beta} ,$$

(136)

y para nuestro caso

$$\nabla_a K_b = \nabla_1 K_3 (e^1{}_a e^3{}_b - e^3{}_a e^1{}_b) + \nabla_2 K_3 (e^2{}_a e^3{}_b - e^3{}_a e^2{}_b) . \tag{137}$$

Por último, gracias a $\nabla_a K_b$ puede definirse el operador de espín S , como

$$S = \nabla_a K_b S^{ab} , \tag{138}$$

aquí S^{ab} es el tensor de espín, cuya expresión desplegada es

$$S^{ab} = [\sigma^{ab} - \frac{2}{m} \gamma^{[a} D^{b]}] , \tag{139}$$

con $\sigma^{ab} = \frac{i}{2} [\gamma^a , \gamma^b]$, de lo que se sigue: $S^{ab} = - S^{ba}$, y por esto

$$\nabla_a K_b S^{ab} = - \nabla_b K_a S^{ab} = \nabla_b K_a S^{ba} . \tag{140}$$

APENDICE B. LAS MATRICES γ^{μ} , $\sigma^{\mu\nu}$ EN COMPONENTES DE COORDENADAS.

B.1 MATRICES γ^{μ} .

γ^{μ} está definida por la relación $\gamma^{\mu} = e^{\mu}{}_{n}\, \gamma^{n}$, donde μ es el índice de coordenadas, y η , el índice tetradial . Por lo cual, para la métrica de Schwarzschild magnetizada se tiene que

$$\gamma^{t} = e^{t}{}_{3}\, \gamma^{3} + e^{t}{}_{4}\, \gamma^{4}$$

$$= \frac{\Lambda^{-1}}{(1 - 2m/r)^{\frac{1}{2}}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} ,$$

$$\gamma^{r} = e^{r}{}_{3}\, \gamma^{3} + e^{r}{}_{4}\, \gamma^{4}$$

$$= \Lambda^{-1}(1 - 2m/r)^{\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} ,$$

$$\gamma^{\theta} = e^{\theta}{}_{1}\, \gamma^{1} + e^{\theta}{}_{2}\, \gamma^{2}$$

$$= \frac{\Lambda^{-1}}{r} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ,$$

y

$$\gamma^{\phi} = e^{\phi}{}_{1}\, \gamma^{1} + e^{\phi}{}_{2}\, \gamma^{2}$$

$$= -\, i\, \frac{\Lambda}{r\,\mathrm{sen}\theta} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \qquad (141)$$

B.2 MATRICES $\sigma^{\mu\nu}$.

$\sigma^{\mu\nu}$ se define mediante la siguiente ecuación:

$$\sigma^{\mu\nu} = e^{\mu}{}_{a}\, e^{\nu}{}_{b}\, \sigma^{ab} ,$$

(142)

donde $\sigma^{ab} = \frac{i}{2}[\ \gamma^{a} ,\ \gamma^{b}]$. Prosiguiendo nuestros cálculos para la métrica de Schwarzschild magnetizada, tenemos

$$\sigma^{10} = (\ e^{r}{}_{3}\, e^{t}{}_{4} - e^{r}{}_{4}\, e^{t}{}_{3}\ )\sigma^{34}$$

$$= -\ \Lambda^{-2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ,$$

$$\sigma^{20} = e^{\theta}{}_{1}\, e^{t}{}_{3}\, \sigma^{13} + e^{\theta}{}_{1}\, e^{t}{}_{4}$$

$$+\ e^{\theta}{}_{2}\, e^{t}{}_{3}\, \sigma^{23} + e^{\theta}{}_{2}\, e^{t}{}_{4}\, \sigma^{24}$$

$$= -\frac{\Lambda^{-2}}{r(\ 1\ -\ 2\ m/r\ )^{\frac{1}{2}}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} ,$$

$$\sigma^{30} = e^{\phi}{}_{1}\, e^{t}{}_{3}\, \sigma^{13} + e^{\phi}{}_{1}\, e^{t}{}_{4}\, \sigma^{14}$$

$$+\ e^{\phi}{}_{2}\, e^{t}{}_{3}\, \sigma^{23} + e^{\phi}{}_{2}\, e^{t}{}_{4}\, \sigma^{24}$$

$$= \frac{i}{r\,\mathrm{sen}\theta(\ 1\ -\ 2\ m/r\ )^{\frac{1}{2}}} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} ,$$

$$\sigma^{12} = e^{r}{}_{3}\, e^{\theta}{}_{1}\, \sigma^{31} + e^{r}{}_{3}\, e^{\theta}{}_{2}\, \sigma^{32}$$

$$+\ e^{r}{}_{4}\, e^{\theta}{}_{1}\, \sigma^{41} + e^{r}{}_{4}\, e^{\theta}{}_{2}\, \sigma^{42}$$

$$= \frac{\Lambda^{-2}}{r}\left(1 - 2\, m/r \right)^{\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\sigma^{13} = e^{r}{}_{3}\, e^{\phi}{}_{1}\, \sigma^{31} + e^{r}{}_{3}\, e^{\phi}{}_{2}\, \sigma^{32}$$

$$+ e^{r}{}_{4}\, e^{\phi}{}_{1}\, \sigma^{41} + e^{r}{}_{4}\, e^{\phi}{}_{2}\, \sigma^{42}$$

$$= -i\, \frac{\left(1 - 2\, m/r \right)^{\frac{1}{2}}}{r \operatorname{sen}\theta} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

y

$$\sigma^{23} = \left(e^{\phi}{}_{1}\, e^{\phi}{}_{2} - e^{\phi}{}_{2}\, e^{\phi}{}_{1} \right) \sigma^{12}$$

$$= \frac{i}{r^{2} \operatorname{sen}\theta} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

(143)

las restantes matrices $\sigma^{\mu\nu}$, se obtienen de que $\sigma^{\alpha\alpha} = 0$ y $\sigma^{\mu\nu} = -\sigma^{\nu\mu}$.

REFERENCIAS

1. J. F. Plebanski, <u>Spinor, tetrads and forms</u>, monografía del CINVESTAV del IPN, México, D.F. (1974) .

2. J. D. Jackson, <u>Classical Electrodynamics</u>, 2a. Ed. ; Wiley, New York. (1975) , Caps. 11 y 12 .

3. S. Hacyan, <u>Dirac Spinors and curvature in the null tetrad formulation of General Relativity</u>, Revista Mexicana de Física. (1992) .

4. K. D. Krori y Barua, <u>Physical Review D</u> 35 , 4 . (1987) .

5. F. J. Ernst, <u>Journal of Mathematical Physics</u> 17 , 1 . (1976) .

6. F. J. Ernst y W. J. Wild, <u>Journal of Mathematical Physics</u> 17 , 2 . (1976) .

7. J. D. Bjorken y S. D. Drell, <u>Relativistic Quantum Mechanics</u>, Mc Graw-Hill, New York. (1964) .

8. R. Jáuregui, M. Torres y S. Hacyan, <u>Physical Review D</u> 43 , 12 . (1991) .

9. S. Chandrasekhar, <u>Proc. R. Soc. London. A</u> 349 , 571-575 . (1976) .

10. L. D. Landau, <u>Classical Theory of Fields</u>, Pergamon, Oxford. (1977) .