13
2 ej.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

PROPIEDADES LOCALES DE ESPACIOS LOCALMENTE CONVEXOS

T E S I S

Que para obtener el título de:

M A T E M A T I C O

presenta

MAGALI LOUISE MARIE FOLCH GABAYET

Ciudad Universitaria México, D.F. 1992

FALLA DE ORIGEN

INTRODUCCION

El objetivo principal de este trabajo fué tratar de caracterizar los epacios en los cuales cualquier topología localmente convexa , Hausdorff consta de los mismos conjuntos acotados .

El capítulo primero es sólo una recopilación de resultados que se usarán más adelante .

En el capítulo segundo introducimos las definiciones de espacio localmente barrilado y localmente completo que son primordiales para el resto del trabajo .

En la primera parte del tercer capítulo se caracteriza el espacio E de manera que todo conjunto $\sigma(E,E')$-acotado sea $\beta(E,E')$-acotado . Enseguida este resultado se generalisa al espacio $\mathcal{L}(E,F)$. En la última parte , cambiando "un poco" la definición de espacio localmente barrilado vemos cómo todos los resultados se simplifican sorprendentemente .

Finalmente , en el último capítulo se dan varias caracterizaciones de un espacio de Banach-Mackey y estudiamos bajo qué condiciones toda funcional lineal es continua .

INDICE

INDICE

CAPITULO I

PRELIMINARES

En este capítulo, veremos conceptos y resultados que utilizaremos a lo largo del presente trabajo. Las definiciones y resultados que no se encuentren aquí pueden consultarse en [1] .

Empezamos con los conceptos de filtros y redes que necesitaremos más adelante para demostrar que ciertos conjuntos son cerrados.

I.1. FILTROS

1.1. Definición: Sea X un conjunto y sea $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{P}(X)$, donde $\mathfrak{P}(X)$ denota el conjunto de subconjuntos de X.

$\mathfrak{F}$ es un filtro en X si :

a) Si $B \subseteq A \subseteq X$ y $B \in \mathfrak{F}$ entonces $A \in \mathfrak{F}$.

b) Si $\{A_i\}_{i=1}^{k} \subseteq \mathfrak{F}$ entonces $\bigcap_{i=1}^{k} A_i \in \mathfrak{F}$.

c) $\emptyset \notin \mathfrak{F}$.

1.2. Definición: Sean $\mathfrak{F}_1$ y $\mathfrak{F}_2$ dos filtros en X. Se dice que $\mathfrak{F}_1$ es más fino que $\mathfrak{F}_2$ (o $\mathfrak{F}_2$ es más grueso que $\mathfrak{F}_1$) si $\mathfrak{F}_2 \subseteq \mathfrak{F}_1$.

1.3. Definición: Un ultrafiltro es un elemento maximal de la familia de los filtros , es decir que $\mathfrak{U}$ es un ultrafiltro si para todo filtro $\mathfrak{F}$ en X tal que $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{F}$ se tiene que $\mathfrak{U} = \mathfrak{F}$.

Observación: Es fácil ver utilizando el lema de Zorn que para todo $\mathfrak{F}$ filtro en X , existe $\mathfrak{U}$ un ultrafiltro en X tal que $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{U}$.

1.4. Definición: Sea $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{P}(X)$. $\mathfrak{B}$ es base de algún filtro en X si:

a) $\mathfrak{B} \neq \emptyset$ y $\emptyset \notin \mathfrak{B}$.

b) Para todos A y B en $\mathfrak{B}$ existe C en $\mathfrak{B}$ tal que $C \subseteq A \cap B$.

1.5. Definición: Dos bases de filtro son equivalentes si generan el mismo filtro.

1.6. Proposición: Sea $\mathfrak{F}$ un filtro en X y sea $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{F}$.

$\mathfrak{B}$ es base del filtro $\mathfrak{F}$ si y sólo si para todo $A \in \mathfrak{F}$ existe $B \in \mathfrak{B}$ tal que $B \subseteq A$.

Observación: Sea X un espacio topológico y $x \in X$.

Sea $\mathfrak{B}(x) = \{ U \subseteq X \,/\, U$ es vecindad de $x \}$.

$\mathfrak{B}(x)$ es un filtro llamado el filtro de vecindades de x . Una base para el filtro $\mathfrak{B}(x)$ es un sistema fundamental de vecindades de x.

En lo siguiente X denotará un espacio topológico (a menos que se especifique lo contrario).

1.7. Definición: Sea $\mathfrak{F}$ un filtro en X y $x \in X$.

$\mathfrak{F}$ converge a x si $\mathfrak{B}(x) \subseteq \mathfrak{F}$ donde $\mathfrak{B}(x)$ denota el filtro de vecindades de x.

1.8. Definición: $x \in X$ es un punto de adherencia de A , $A \subseteq X$, si para toda U vecindad de x , $U \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$.

Observación: Tenemos que :

$$\overline{A} = A \cup \{ x \,/\, x \text{ es punto de adherencia de } A \}$$

1.9. Proposición: $x \in \overline{A}$ si y sólo si existe una base de filtro en A que converge a x .

1.10. Definición: Sea $\mathfrak{B}$ una base de filtro en X y sea $x \in X$.

x es un punto de adherencia de $\mathfrak{B}$ si para todo $A \in \mathfrak{B}$, $x \in \overline{A}$.

1.11 Proposición: Sea $\mathfrak{B}$ una base de filtro en X . Si $x \in X$ es un punto de adherencia de $\mathfrak{B}$ entonces para toda V vecindad de x se tiene $V \cap A \neq \emptyset$, para todo $A \in \mathfrak{B}$. Es decir existe un filtro más fino que el filtro generado por $\mathfrak{B}$ que converge a

x .

1.12. Definición: Sea X un espacio vectorial topológico y sea $\mathfrak{F}$ un filtro en X . $\mathfrak{F}$ es un filtro de Cauchy en X si para toda vecindad V del cero en X existe $A \in \mathfrak{F}$ tal que $A-A \subseteq V$.

Observación: Si X es un espacio vectorial topológico y $\mathfrak{F}$ es un filtro convergente en X entonces $\mathfrak{F}$ es un filtro de Cauchy en X .

I.2. REDES EN UN ESPACIO TOPOLOGICO

En ciertos espacios vectoriales topológicos la convergencia de toda sucesión de Cauchy no nos implica que el espacio sea completo. Utilizando el concepto de red, podremos dar condiciones necesarias y suficientes para que un subconjunto de un espacio topológico sea cerrado.

2.1. Definición: a) Un conjunto H es dirigido si H es parcialmente ordenado y para toda x y y en H , existe $z \in H$ tal que $x \leq z$ y $y \leq z$.

b) H es inversamente dirigido si H es parcialmente ordenado y para toda x y y en H existe $z \in H$ tal que $z \leq x$ y $z \leq y$.

2.2. Definición: Sea A un conjunto dirigido y M un conjunto. Si para cada $\alpha \in A$ existe $x_\alpha \in M$, se dice que $\{ x_\alpha \}_{\alpha\in A}$ es una red en M .

Así si $A = \mathbb{N}$, las redes obtenidas con este conjunto dirigido corresponden a las sucesiones.

2.3. Definición: Sea $\{ x_\alpha \}_{\alpha\in A}$ una red en X . Esta red converge a $x_o \in X$ si para cada U vecindad de x_o existe $\beta \in A$ tal que $x_\gamma \in U$ para toda $\gamma \geq \beta$.

2.4. Definición: Sea A un conjunto dirigido , sea $B \subseteq A$.

B es cofinal si para toda $\alpha \in A$, existe $\beta \in B$ tal que $\alpha \leq \beta$

2.5. Definición: Sea $\{ x_\alpha \}_{\alpha\in A}$ una red en X . $\{ x_\beta \}_{\beta\in B}$ es una subred cofinal si $B \subseteq A$ es cofinal.

Observación: La definición anterior corresponde a la generalización de subsucesión , ya que todo conjunto cofinal con los naturales es infinito .

2.6. Proposición: Si la red $\{ x_\alpha \}_{\alpha\in A}$ en X converge a $x_o \in X$, entonces toda subred cofinal converge a x_o.

2.7. Definición: Sea $y_o \in X$. y_o es un punto de adherencia de la red $\{ x_\alpha \}_{\alpha\in A}$ si toda vecindad de y_o contiene una subred cofinal de $\{ x_\alpha \}_{\alpha\in A}$.

2.8. Teorema: Sea $M \subseteq X$. M es cerrado si y sólo si contiene los límites de todas las redes en M convergentes .

Demostración: Supongamos que M es cerrado .

Sea $\{ x_\alpha \}_{\alpha\in A}$ una red en M convergente a x_o . Veamos que $x_o \in M$. Como $\{ x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ es una red convergente a x_o se tiene que para toda U vecindad de x_o , existe β tal que para todo $\alpha \geq \beta$, $x_\alpha \in U$. $\{ x_\alpha \}_{\alpha\geq\beta}$ es una red cofinal de $\{ x_\alpha \}_{\alpha\in A}$, por lo tanto x_o es un punto de adherencia de $\{ x_\alpha \}_{\alpha\in A}$. $\{ x_\alpha \}_{\alpha\geq\beta} \subseteq U$, y $\{ x_\alpha\}_{\alpha\in A} \subseteq M$ Por lo tanto $U \cap M \neq \emptyset$ para toda vecindad U de x_o. Por lo tanto $x_o \in \overline{M} = M$, esto es $x_o \in M$.

Inversamente , supongamos que M contiene todos los límites de las redes convergentes . Sea $x_o \in \overline{M}$, entonces para toda vecindad U de x_o ,$U \cap M \neq \emptyset$. Sea $x_U \in U$.

El conjunto de vecindades de x_o forma un conjunto dirigido por la inclusión : $U \leq V$ si y sólo si $V \subseteq U$

i) La inclusión es un orden parcial

ii) Dadas U y V vecindades de x_o, existe $U \cap V$ vecindad de x_o tal que $U \leq U \cap V$, $V \leq U \cap V$.

Así $\{ x_U \}_{U \in \mathfrak{N}x_o}$ donde $\mathfrak{N}x_o$ denota el conjunto de vecindades de x_o es una red en M .

Sea $V \in \mathfrak{N}x_o$. Veamos que existe $U \in \mathfrak{N}x_o$ tal que para toda $W \geq U$ se tiene que $x_W \in V$.

Sea U = V y sea $W \geq U$, esto es $W \subseteq U$. Por construcción , $x_W \in W$ por lo que $x_W \in U = V$. Por lo tanto $\{ x_U \}_{U \in \mathfrak{N}x_o}$ converge a x_o.

Así por hipótesis $x_o \in M$. Por lo tanto $M = \overline{M}$. □

Ahora relacionemos los filtros con las redes . Veamos como a partir de una red $\{ x_\alpha \}_{\alpha \in A}$ en M podemos obtener un filtro en M .

Definimos : $F_\alpha = \{ x_\beta \ / \ \beta \geq \alpha \}$ y

$\mathfrak{F} = \{ F_\alpha \ / \ \alpha \in A \} \cup \{ N \subseteq M \ / \text{ existe } F_\alpha \text{ tal que } F_\alpha \subseteq N \}$

No es difícil ver que tenemos la siguiente

2.9.<u>Proposición</u>: El filtro $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{P} (M)$ construido anteriormente es un filtro en M .

El filtro así construido se llama el filtro correspondiente a la red $\{ x_\alpha \}_{\alpha \in A}$.

Inversamente dado un filtro podemos construir una red llamada una red asociada al filtro de la siguiente manera :

Sea $\mathfrak{F} = \{ F_\alpha \}_{\alpha \in A}$, el filtro . Como anteriormente definimos :

$$F_\alpha \leq F_\beta \text{ si y sólo si } F_\beta \subseteq F_\alpha .$$

Con esta relación $\mathfrak{F}$ es un conjunto dirigido.

Escogemos $x_\alpha \in F_\alpha$ y ordenamos el conjunto A con el orden parcial de $\mathfrak{F}$, es decir $\alpha \leq \beta$ si y sólo si $F_\alpha \leq F_\beta$ si y sólo si $F_\beta \subseteq F_\alpha$.

Así $\{ x_\alpha \}_{\alpha \in A}$ es una red en M .

Así definidos estos filtros y redes correspondientes a una red y a un filtro respectivamente , se intuye que debemos tener una estrecha relación entre la convergencia de un filtro y sus redes correspondientes e inversamente .

2.10. Proposición: a) El filtro $\{ F_\alpha \}_{\alpha\in A}$ tiene límite x_o si y sólo si toda red correspondiente al filtro tiene límite x_o .

b) La red $\{ x_\alpha \}_{\alpha\in A}$ tiene límite x_o sí y sólo si su filtro correspondiente tiene límite x_o .

Demostración: a) Supongamos que $\{ F_\alpha \}_{\alpha\in A}$ es un filtro convergente a x_o. Entonces para toda $U \in \mathfrak{N}x_o$ existe $\beta \in A$ tal que $F_\beta \subseteq U$.

Sea $\{ x_\alpha \}_{\alpha\in A}$ una red correspondiente al filtro , esto es :

$x_\alpha \in F_\alpha$ y $\alpha \le \beta$ si y sólo si $F_\beta \subseteq F_\alpha$.

Sea $U \in \mathfrak{N}x_o$, como $\{ F_\alpha \}_{\alpha\in A}$ es un filtro convergente a x_o , existe F_β tal que $F_\beta \subseteq U$

Sea $\alpha \ge \beta$, entonces $F_\alpha \subseteq F_\beta \subseteq U$, por lo tanto $x_\alpha \in F_\alpha \subseteq U$ para toda $\alpha \ge \beta$. Por lo tanto la red $\{ x_\alpha \}_{\alpha\in A}$ converge a x_o .

Inversamente , sea $\{ F_\alpha \}_{\alpha\in A}$ un filtro tal que toda red correspondiente a el converge a x_o. Veamos que para toda $U \in \mathfrak{N}x_o$ existe $\beta \in A$ tal que $F_\beta \subseteq U$.

Sea $U \in \mathfrak{N}x_o$. Así para toda red correspondiente a $\{ F_\alpha \}_{\alpha\in A}$, digamos $\{ x_\alpha \}_{\alpha\in A}$ existe $\beta \in A$ tal que para toda $\alpha \ge \beta$, $x_\alpha \in U$

Veamos que para esta β , $F_\beta \subseteq U$.

Sea $x \in F_\beta$. Existe una red correspondiente al filtro tal que $x = x_\beta$. Por lo tanto $x = x_\beta \in U$, por lo que $F_\beta \subseteq U$. Por lo tanto el filtro es convergente a x_o .

b) Supongamos que la red $\{ x_\alpha \}_{\alpha\in A}$ converge a x_o .

Sea $U \in \mathfrak{N}x_o$. Así existe $\beta \in A$ tal que para toda $\alpha \ge \beta$, $x_\alpha \in U$

Si $\mathfrak{F}$ es el filtro correspondiente a $\{ x_\alpha \}_{\alpha\in A}$ y $F_\beta = \{ x_\alpha \ / \ \alpha \geq \beta \}$, entonces $F_\beta \in \mathfrak{F}$. Por lo tanto $\mathfrak{F}$ es convergente a x_o .

Inversamente supongamos que $\mathfrak{F}$, el filtro correspondiente a la red $\{ x_\alpha \}_{\alpha\in A}$ es convergente a x_o .

$\mathfrak{F} = \{ F_\alpha \}_{\alpha\in A} \cup \{ N \subseteq M \ / \text{ existe } F_\alpha \text{ tal que } F_\alpha \subseteq N \}$. $\mathfrak{F}$ es convergente a x_o , por lo tanto se tiene que para toda $U \in \mathfrak{N}x_o$, existe $F \in \mathfrak{F}$ tal que $F \subseteq U$. Si $F = F_\alpha = \{ x_\alpha \ / \ \beta \geq \alpha \}$, entonces para todo $\beta \geq \alpha$, $x_\beta \in U$. Si $F = N$ tal que existe $F_\alpha \subseteq N$ entonces $F_\alpha \subseteq U$. En los dos casos existe $\alpha \in A$ tal que para todo $\beta \geq \alpha$, $x_\beta \in U$. Por lo tanto $\{ x_\alpha \}_{\alpha\in A}$ es convergente a x_o . □

Como corolario a esto tenemos el siguiente

2.11. <u>Teorema</u>: $M \subseteq X$ es cerrado si y sólo si contiene todos los puntos límites de los filtros en M convergentes .

<u>Demostración</u>: Supongamos que M es cerrado . Así M contiene todos los límites de las redes de M que son convergentes . Sea $\mathfrak{F}$ un filtro en M que es convergente . Por lo anterior , cualquier red asociada a $\mathfrak{F}$ es convergente , por lo tanto M contiene el límite de estas redes , por lo que el límite de $\mathfrak{F}$ está en M .

Inversamente sea $\{ x_\alpha \}_{\alpha\in A}$ una red en M convergente . Así su filtro correspondiente es convergente . Por lo tanto el límite de este filtro está en M , por lo que el límite de la red está en M y así M es cerrado . □

I.3. DUALIDAD

A veces es más fácil tratar un problema en su forma polar que en su forma original . Por esto en lo siguiente estudiaremos la herramienta que nos permite transportar un problema a su forma polar : la dualidad .

E y F denotarán espacios vectoriales sobre el campo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) ,a menos que se especifique lo contrario .

3.1. Definición: B es una dualidad entre E y F si $B : E \times F \to \mathbb{K}$ es una forma bilineal .(Se dirá que E y F están en dualidad o que F es el dual de E)

B es una dualidad estricta si :

i) Si $B(x,y)=0$ para todo $y \in F$, entonces $x = 0$

ii) Si $B(x,y)=0$ para todo $x \in E$, entonces $y = 0$

(Se dirá que E y F están en dualidad estricta)

Notación: Escribiremos $\langle x,y\rangle$ en lugar de $B(x,y)$, y si E y F están dualidad lo abreviaremos como : $\langle E,F\rangle$.

Ejemplos: Si $E^* = \{ f: E \to \mathbb{K} \ / \ f \text{ es lineal} \}$ es el dual algebráico de E .

Si E es un espacio vectorial topológico con la topología τ , su dual topológico es :

$$E' = \{ f:(E,\tau) \to \mathbb{K} \ / \ f \text{ es lineal y continua} \} = (E,\tau)'$$

Cuando no haya posibilidad de confusión escribiremos E' en lugar de $(E,\tau)'$.

Tenemos $\langle E,E^*\rangle$ con la forma bilineal :

$$\langle -,- \rangle : E \times E^* \to \mathbb{K} \quad , \text{ donde } \langle x,f\rangle = f(x)$$

También $\langle E,E'\rangle$, con la misma forma bilineal .

3.2. <u>Definición</u>: Sea $<E,F>$, $A \subseteq E$. La polar de A es :

$A^{o} = \{ y \in F \ / \ |<x,y>| \leq 1$ para todo $x \in A \}$.

3.3. <u>Proposición</u>: Sea $<E,F>$, y consideremos A , A_1, A_2 , A_α subconjuntos de E , $\alpha \in A$, $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.

a) $(\lambda A)^{o} = \lambda^{-1} A^{o}$

b) Si $A_1 \subseteq A_2$ entonces $A_2^{o} \subseteq A_1^{o}$

c) $(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha)^{o} = \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^{o}$

d) Teorema de las bipolares : Si E es un espacio vectorial topológico , entonces $A^{oo} = (A^{o})^{o} = \overline{\text{conv}.B(A)}$ (La bipolar de A es la cerradura de la envolvente convexa de la envolvente balanceada de A) .

e) $A^{ooo} = A^{o}$.

<u>Observación</u>: Si $B: E \times F \to \mathbb{K}$ es una dualidad , entonces induce las funciones : $\Psi : E \to F^{*}$, $\Psi(x) = \Psi x$, donde $\Psi x : F \to \mathbb{K}$ es tal que : $\Psi x(y) = <x,y>$; y $\rho : F \to E^{*}$, $\rho(y) = \rho y$, donde $\rho y : E \to \mathbb{K}$ es tal que $\rho y(x) = <x,y>$.

3.4. <u>Definición</u>: Sean $<E,F>$. $\sigma (E,F)$ es la topología más gruesa en E que hace continuas a todas las funciones $\rho y : E \to \mathbb{K}$, $\rho y(x) = <x,y>$. Esta topología es la topología débil en E . Análogamente se define la topología débil en F , $\sigma (F,E)$.

<u>Observación</u>: Si $A \subseteq E$ entonces A^{o} es convexa , balanceada y $\sigma(E,F)$-cerrada .

3.5. <u>Teorema</u>: Sean E y F espacios vectoriales topológicos sobre el campo $\mathbb{K}$. Entonces el dual topológico de E con la topología $\sigma (E,F)$ es F , esto es : $(E , \sigma (E,F))' = F$.

Consideremos el siguiente conjunto de subconjuntos de E :

$\mathfrak{S} = \{ A \subseteq E \ / \ A$ es $\sigma (E,F)$-acotado $\}$.

Definimos $\mathfrak{S}^\circ = \{ A^\circ \subseteq F \ / \ A \in \mathfrak{S} \}$.

3.6. <u>Definición y teorema</u>: $\mathfrak{S}^\circ$ definida como anteriormente es una base de vecindades del cero en F . La topología así definida en F es la topología fuerte de F y se denotará β (E,F) .

3.7. <u>Teorema</u>: (de Alaoglu) Sea E un espacio vectorial topológico sobre $\mathbb{K}$ .Si V es una vecindad del cero en E entonces $V^\circ \subseteq E'$ es σ (E',E)-compacto .

3.8. <u>Proposición</u>: Sea E un espacio vectorial topológico sobre $\mathbb{K}$. Sea F un subespacio de E . Entonces $(E / F)' \cong F$ (como espacios vectoriales) .

3.9. <u>Definición</u>: Sean $\langle E,F\rangle$. Sea τ una topología en E que lo hace espacio vectorial topológico . τ es compatible con la dualidad si E tiene el mismo dual topológico con respecto a la topología τ y a σ (E,F) , esto es : $(E,\tau)'=(E,\sigma(E,F))'=F$.

3.10. <u>Proposición</u>: Sea E un espacio vectorial topológico , localmente convexo y Hausdorff , con topología τ . Entonces E con la topología $\sigma(E,E') \subseteq \tau$ tiene los mismos conjuntos convexos cerrados respscto a τ y a $\sigma(E,E')$ y $\sigma(E,E')$ es compatible con la dualidad entre E y E' .

Queremos encontrar la topología más fina que haga a un espacio vectorial un espacio vectorial topológico , localmente convexo , Hausdorff , y que sea compatible con la dualidad . Esta topología no puede ser muy fina , ya que queremos que sea compatible con la dualidad .

3.11. <u>Definición y teorema</u>: Sean E y F espacios vectoriales en dualidad estricta . Consideremos el conjunto :

$\mathfrak{B} = \{ Y^\circ \subseteq E \ / \ Y \subseteq F$ es convexo , balanceado y

$\sigma(F,E)$-compacto }.

$\mathfrak{B}$ es una base de vecindades del cero en E . La topología generada por $\mathfrak{B}$ hace de E un espacio localmente convexo , Hausdorff , y esta topología es la topología más fina de espacios localmente convexo Hausdorff , compatible con la dualidad . Esta es la topología de Mackey , y se denotará $\tau(E,F)$.

Demostración: Veamos primero que $\mathfrak{B}$ genera en E una topología de espacio vectorial topológico localmente convexo , Hausdorff .

i) Veamos que si $V \in \mathfrak{B}$ entonces V es absorbente y balanceado .

Si $V \in \mathfrak{B}$ entonces $V = Y^{\circ}$, donde $Y \subseteq F$ es convexo , balanceado y $\sigma(F,E)$-compacto . Por lo tanto V es balanceada . Veamos que V es absorbente . Sea $x \in E$, la funcional $\Psi x\colon F \to \mathbb{K}$, $\Psi x(y) = \langle x,y\rangle$ es $\sigma(F,E)$-continua , y Y es $\sigma(F,E)$-compacto . Por lo tanto existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $|\langle x,y\rangle| \leq M$ para toda $y \in Y$. Así $x \in MY^{\circ}$ y $MY^{\circ} = MV$, esto es V es absorbente .

ii) Veamos que si $V \in \mathfrak{B}$ entonces $\lambda V \in \mathfrak{B}$, para todo $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.

Sea $V \in \mathfrak{B}$. Entonces $V = Y^{\circ}$ donde $Y \subseteq F$ es balanceado , convexo y $\sigma(F,E)$-compacto . Sea $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, $\lambda V = \lambda Y^{\circ} = (\lambda^{-1}Y)^{\circ}$. $(\lambda^{-1}Y)$ es balanceado ya que si $\alpha \in \mathbb{K}$ es tal que $|\alpha| \leq 1$ entonces $\alpha Y \subseteq Y$ y por lo tanto $\alpha\lambda^{-1}Y \subseteq \lambda^{-1}Y$ y así $\lambda^{-1}Y$ es balanceado .

Es claro que $\lambda^{-1}Y$ es convexo . Veamos que es $\sigma(F,E)$-compacto .

Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una cubierta $\sigma(F,E)$-abierta de $\lambda^{-1}Y$, esto es $\lambda^{-1}Y \subseteq \bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha$. Entonces $Y \subseteq \lambda\left(\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha\right) \subseteq \bigcup_{\alpha\in I}(\lambda U_\alpha)$. Por lo tanto $\{\lambda U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es una cubierta $\sigma(F,E)$-abierta de Y . Como Y es $\sigma(F,E)$-compacto ,existen $U_1, \ldots, U_n$ tales que $Y \subseteq \bigcup_{i=1}^{n}(\lambda U_i)$.

Por lo tanto $\lambda^{-1}Y \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i$. Así $\lambda^{-1}Y$ es σ (F,E)-compacto .

iii) Veamos que para todo $V \in \mathfrak{B}$ existe $U \in \mathfrak{B}$ tal que $U + U \subseteq V$.
Sea $V = Y^{o}$ donde $Y \subseteq F$ es convexo , balanceado , σ (F,E)-compacto
Sea $U = 2^{-1}Y$. Por lo anterior $U \in \mathfrak{B}$. Como Y^{o} es convexo ,
$2^{-1}Y^{o} + 2^{-1}Y^{o} \subseteq Y^{o} = V$.

Por lo tanto $\mathfrak{B}$ genera una topología de espacio vectorial topológico . Esta topología es localmente convexa ya que todo elemento de $\mathfrak{B}$ es convexo . Ahora : $\bigcap \{ Y^{o} / Y^{o} \in \mathfrak{B} \} =$
$= (\bigcup \{ Y / Y \subseteq F$ es convexo , balanceado , σ (F,E)-compacto $\})^{o}$
$= F^{o} = \{0\}$ (por ser la dualidad estricta) . Por lo tanto la topología es Hausdorff .

Veamos ahora que τ (E,F) es la topología de espacio vectorial localmente convexo más fina compatible con la dualidad .

Sea τ una topología de espacio localmente convexo compatible con la dualidad . Como τ es compatible con la dualidad tenemos que : $(E,\tau)' = F$. Sea $V \in \mathfrak{N}_0$ en (E,τ) cerrado , balanceado , convexo ($\mathfrak{N}_0$ denota el conjunto de vecindades de cero) .

$V^{o} = \{ y \in F / |\langle x,y\rangle| \leq 1$ para todo $x \in V \}$.

$F = \{ f: (E,\tau) \to \mathbb{K} / f$ es lineal y continua $\}$, $F \subseteq \mathbb{K}^{E}$ y $V^{o} \subseteq [-1,1]^{E}$. $[1,1]^{E}$ es σ (F,E)-compacto (porque la topología débil coincide con la del producto)-, y V^{o} es σ (E,F)-cerrado por ser una polar . Por lo tanto V^{o}es σ (E,F)-compacto .

Además V^{o} es convexo y balanceado , por lo que $V^{oo} = V \in \mathfrak{B}$, y así $\tau \subseteq \langle\mathfrak{B}\rangle$, donde $\langle\mathfrak{B}\rangle$ denota la topología generada por $\mathfrak{B}$.

Sólo falta ver que τ (E,F) es compatible con la dualidad .

Tenemos : $(E, \tau (E,F))' = E'$ y $(E , \sigma (E,F))' = F$. Como $\sigma (E,F) \subseteq \tau (E,F)$ entonces $F \subseteq E'$. Veamos la otra contención .

Sea $f \in E'$, $\{f\}^{\circ} = \{ x \in E \;/\; |f(x)| \le 1 \}$, $f: E \to \mathbb{K}$ es τ-continua , y $\{f\}^{\circ} = f^{-1}([-1,1])$. Por lo tanto $\{f\}^{\circ}$ es una vecindad de cero en $(E,\tau(E,F))$. Así existe $Y \subseteq F$, $\sigma(F,E)$-compacto , convexo , balanceado , tal que $Y^{\circ} \subseteq \{f\}^{\circ}$.

Ahora $i: (F,\sigma(F,E)) \to (E',\sigma(E',E))$ es continua , por lo tanto $i(Y)= Y$ es $\sigma(E',E)$-compacto . Así tomando polares en la dualidad $\langle E,E'\rangle$: $\{f\} \subseteq \{f\}^{\circ\circ} \subseteq Y^{\circ\circ} \subseteq Y$.

Por lo tanto $E' \subseteq \bigcup \{ Y \subseteq F \;/\; Y$ es convexo, balanceado, $\sigma(F,E)$-compacto $\} = F$

Así $E' = F$.

□

3.12. <u>Corolario</u>: Sean $\langle E,F\rangle$ estricta . Sea (E,τ) un espacio vectorial topológico localmente convexo Hausdorff . Entonces τ es compatible con la dualidad si y sólo si $\sigma(E,F) \le \tau \le \tau(E,F)$.

I.4. <u>EL ESPACIO $\mathcal{L}(E,F)$</u>

E y F denotarán espacios vectoriales topológicos localmente convexos , Hausdorff .

4.1. <u>Teorema</u>: Sea $U : E \to F$ lineal . U es continua si y sólo si U es continua en el cero .

4.2. <u>Proposición</u>: $U : E \to F$ es continua si y sólo si para toda semi-norma continua q de F , $q \circ U = p$ es una semi-norma continua de E .

4.3. <u>Proposición</u>: $U : E \to F$ es continua si y sólo si para toda semi-norma continua q de F existe una semi-norma continua p de E tal que $q \circ U \le p$.

4.4. <u>Definición</u>: $\mathcal{L}$ (E,F) es el espacio de funciones lineales y continuas de E en F , esto es:

$\mathcal{L}$ (E,F) = { U: E → F / U es lineal y continua }

4.5. <u>Proposición</u>: $\mathcal{L}$ (E,F) es un espacio vectorial con la suma y el producto por escalares .

Veamos cómo dotar a $\mathcal{L}$ (E,F) de topologías que lo hagan espacio vectorial topológico .

Para esto , consideremos una colección $\mathfrak{S}$ de subconjuntos de E . Sea Q la familia de semi-normas continuas que genera la topología de F

Dados $q \in Q$ y $A \in \mathfrak{S}$ definimos : $p_{q,A} : F^E \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

$$p_{q,A}(U) = \sup \{ q(U(x)) \ / \ x \in A \}$$

La topología está generada por intersecciones finitas de conjuntos de la forma $V_{q,A} = \{ U \in F^E \ / \ p_{q,A}(U) < 1 \}$.

$p_{q,A}$ es una semi-norma en F^E , salvo a lo mejor por el hecho de que $p_{q,A}(U) = \infty$ para alguna U .

4.6. <u>Definición</u>: La topología inducida en $\mathcal{L}$ (E,F) por la topología que acabamos de definir en F^E es la topología de la convergencia uniforme en la familia $\mathfrak{S}$, y denotaremos a $\mathcal{L}$ (E,F) con esta topología : $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}$ (E,F) .

Si $p_{q,A}$ no es semi-norma , $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}$ (E,F) no tiene por qué ser localmente convexo . Una manera de asegurar que $p_{q,A}$ sea semi-norma es pedir que A sea acotado .

4.7. <u>Proposición</u>: Si las funciones $p_{q,A}$ son semi-normas entonces para todo $U \in \mathcal{L}_{\mathfrak{S}}$ (E,F) y para todo $A \in \mathfrak{S}$ tenemos que $U(A) = \{ U(x) \ / \ x \in A \}$ es acotado en F .

4.8. <u>Proposición</u>: Si las funciones $p_{q,A}$ son semi-normas entonces todo elemento de $\mathfrak{S}$ es acotado en E .

4.9. Proposición: $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}$ (E,F) es Hausdorff si y sólo si para toda $q \in Q$ y para todo $A \in \mathfrak{S}$ si $p_{q,A}(U) = 0$ entonces $U \equiv 0$.

4.10. Proposición: Sea $B = \bigcup_{A \in \mathfrak{S}} A$. Si B es total en E (esto es $\overline{\langle B \rangle} = E$ donde $\langle B \rangle$ denota el subespacio vectorial generado por B) entonces $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}$ (E,F) es Hausdorff .

4.11. Definición: a) Si $\mathfrak{S} = \{ A \subseteq E \ / \ A$ es acotado $\}$ entonces la topología de $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}$ (E,F) es la topología de la convergencia acotada o la topología de la convergencia uniforme en acotados .

b) Si $\mathfrak{S} = \{ A \subseteq E \ / \ A$ es compacto $\}$ entonces la topología de $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}$ (E,F) es la topología de la convergencia compacta o la topología de la convergencia uniforme en compactos .

c) Si $\mathfrak{S} = \{ \{x\} \subseteq E \ / \ x \in E \}$ entonces la topología de $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}$ (E,F) es la topología de la convergencia puntual .

Notación: Denotaremos a $\mathcal{L}$ (E,F) con la topología de la convergencia acotada : $\mathcal{L}_b$ (E,F) , y a $\mathcal{L}$ (E,F) con la topología de la convergencia puntual : $\mathcal{L}_s$ (E,F) .

Observación: La topología de $\mathcal{L}_s$(E,F) está generada por las semi-normas : $p_{q,\{x\}}(U) = \sup \{ q(U(y)) \ / \ y \in \{x\} \} = q(U(x))$.

De esta definición tenemos que una sucesión $\{ U_n \}_{n \in \mathbb{N}}$ en $\mathcal{L}_s$ (E,F) converge a cero si y sólo si para toda $q \in Q$ y para todo $x \in E$ la sucesión $\{ q(U_n(x)) \}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a cero en $\mathbb{K}$.

4.12. Proposición: Sea $B \subseteq \mathcal{L}_s$ (E,F) . B es acotado si y sólo si para toda semi-norma continua q de F y para todo $x \in E$, $\sup \{ q(U(x)) \ / \ U \in B \} < \infty$.

4.13. Corolario: B es acotado en $\mathcal{L}_s$ (E,F) si y sólo si para todo $x \in E$, $\{ U(x) \ / \ U \in B \}$ es acotado en F .

I.5. EL TEOREMA DE BANACH-MACKEY

El teorema de Banach-Mackey dice que cualesquiera dos topologías compatibles con la dualidad constan de los mismos conjuntos acotados . Este teorema nos interesa particularmente , ya que gran parte del trabajo desarrollado aquí consiste en ver qué propiedades adicionales le debemos pedir al espacio para que esta propiedad se pueda extender a topologías no compatibles con la dualidad .

Teorema de Banach-Mackey: Sean (E,τ) un espacio vectorial topológico localmente convexo y $A \subseteq E$. Entonces A es acotado con respecto a τ si y sólo si A es acotado con respecto a la topología $\sigma(E,E')$. (A es $\sigma(E,E')$-acotado)

Observación: Tenemos que $(E,\tau)' = E'$ y $(E,\sigma (E,E'))' = E'$, por lo tanto τ es compatible con la dualidad entre E y E' .

Demostración: Supongamos que A es τ-acotado . Sabemos que $\sigma (E,E') \subseteq \tau$. Denotemos por $\mathfrak{N}_{o,\sigma(E,E')}$ las vecindades de cero en E con respecto a la topología $\sigma(E,E')$ y $\mathfrak{N}_{o,\tau}$ las vecindades de cero en E con respecto a la topología τ .

Sea $V \in \mathfrak{N}_{o,\sigma(E,E')}$. Como $\sigma(E,E') \subseteq \tau$ tenemos $V \in \mathfrak{N}_{o,\tau}$. Así existe $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tal que $A \subseteq \lambda V$, por lo que A es $\sigma(E,E')$-acotado .

Inversamente , supongamos que A es $\sigma(E,E')$-acotado . Vamos a hacer la demostración en tres casos .

Primer caso: E es normado .

Si E es normado entonces también lo son E' y E'' . Sean $||\_||$, $||\_||'$, $||_||''$las normas de E , E' y E'' respectivamente .

Sea $\phi : E \to E''$ la inmersión natural , $\phi(e) = \acute{e}$, $\acute{e}(f) = f(e)$, donde $f: E \to \mathbb{K}$.

La topología de $\mathcal{L}_s(E',\mathbb{K})$ está dada por intersecciones finitas de conjuntos de la forma : $V_{f_i} = \{ l \in \mathcal{L}_s(E',\mathbb{K}) \,/\, p_{f_i}(l) \leq 1 \}$, donde $p_{f_i}: \mathcal{L}(E',\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ es tal que $p_{f_i}(l) = |l(f_i)|$, $f_i \in E'$.

Sea $V_{f_1,\ldots,f_n} = \bigcap_{i=1}^{n} V_{f_i}$ una vecindad de cero en $\mathcal{L}_s(E',\mathbb{K})$.

Sea $V = \{ x \in E \,/\, |f_i(x)| \leq 1$ para todo $1 \leq i \leq n \}$
$$= \bigcap_{i=1}^{n} \{ x \in E \,/\, |f_i(x)| \leq 1 \}$$

Por la definición de $\sigma(E,E')$, $V \in \mathcal{N}_{o,\sigma(E,E')}$. Como A es $\sigma(E,E')$-acotado , existe $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tal que $A \subseteq \lambda V$. Sea $x \in A$, por lo tanto $\phi(x) \in \phi(A)$ y $\phi(x) \in \mathcal{L}(E',\mathbb{K})$. Además $x = \lambda y$ con $y \in V$.
$$\begin{aligned} p_{f_i}(\phi(x)) &= |\, (\phi(x))(f_i) \,| \\ &= |\, (\phi(\lambda y))(f_i) \,| \\ &= |\, \lambda(\phi(y))(f_i) \,| \\ &= |\lambda| \; |\, (\phi(y))(f_i) \,| \\ &= |\lambda| \; |\, f_i(y) \,| \leq |\lambda| \end{aligned}$$

Por lo tanto $p_{f_i}(\phi(x)) \leq |\lambda|$ para todo $1 \leq i \leq n$. Así $\phi(x) \in \lambda V_{f_1,\ldots,f_n}$, y por lo tanto $\phi(A) \subseteq \lambda V_{f_1,\ldots,f_n}$, esto es $\phi(A)$ es acotado en $\mathcal{L}_s(E',\mathbb{K})$. Ahora si $\phi(A)$ es acotado en $\mathcal{L}_s(E',\mathbb{K})$, entonces $\phi(A)$ es acotado con respecto a la norma $||\_||''$, y para todo $x \in E$ $||x|| = ||\phi(x)||''$. Por lo tanto $\phi(A)$ es $||\_||''$-acotado , por lo que A es $||\_||$-acotado , esto es A es τ-acotado .

<u>Segundo</u> <u>caso</u>: La topología de E está generada por una única semi-norma continua p .

Sea $N = \{ x \in E \,/\, p(x) = 0 \}$. Como p es continua , N es cerrado , y por lo tanto E/N es un espacio localmente convexo , Hausdorff .

Sea $\text{þ} : E/N \to \mathbb{R}$ tal que $\text{þ}(\bar{x}) = \inf \{ p(y) \ / \ y \in \bar{x} \}$. þ es una norma en E/N , y además $(E/N)' \cong N^o$ (como espacios vectoriales) .

$N^o = \{ y \in E' \ / \ |\langle x,y\rangle| \leq 1$ para todo $x \in N \}$. Veamos que $N^o = E'$. Si $U \in E'$ entonces existe $c \in \mathbb{R}$ tal que para todo $e \in E$ $|U(e)| \leq cp(e)$. Por lo tanto para todo $e \in E$, $U(e) = 0$. Por lo tanto $U \in (E/N)' = N^o$. Por lo tanto $N^o = E'$.

Como $\sigma(E/N,E') \subseteq \sigma(E,E')$, tenemos que si A es $\sigma(E,E')$-acotado entonces $\Pi(A)$ es $\sigma(E/N,E')$-acotado , donde Π es la proyección canónica . Así por el primer caso tenemos que $\Pi(A)$ es acotado con respecto a la norma þ , esto es existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $\text{þ}(\bar{a}) \leq M$ para toda $\bar{a} \in \Pi(A)$. Por lo tanto $p(a) \leq M$ para todo $a \in A$. Así A es acotado con respecto a la semi-norma p , esto es A es τ-acotado .

<u>Tercer</u> <u>caso</u>: La topología de E está generada por una familia de semi-normas continuas $\{ p_i \}_{i \in I}$.

Para todo $i \in I$ definimos $E_i = (E,\tau_i)$ donde τ_i es la topología generada por p_i en E . $\tau_i \subseteq \tau$ para todo $i \in I$. Por lo tanto $E_i' \subseteq E'$ para todo $i \in I$ y entonces $\sigma(E,E_i') \subseteq \sigma(E,E')$ para todo $i \in I$. Así si A es $\sigma(E,E')$-acotado entonces A es $\sigma(E,E_i')$-acotado para todo $i \in I$ y por el segundo caso tenemos que A es acotado con respecto a p_i para todo $i \in I$, esto es A es τ_i-acotado para todo $i \in I$, por lo tanto A es τ-acotado . $\square$

I.6. EQUICONTINUIDAD

El principio del acotamiento uniforme es un teorema importante del análisis funcional , pero para poder demostrarlo necesitamos primero estudiar un poco el concepto de equicontinuidad y los espacios barrilados .

Notación: $\mathfrak{N}_0$ denotará el conjunto de vecindades de cero en un espacio topológico .

6.1. Definición: Sea E un espacio topológico y sea F un espacio vectorial topológico . Sea $H \subseteq F^E$ y $a \in E$.

a) H es equicontinua en a si para toda $W \in \mathfrak{N}_0$ en F existe $V \in \mathfrak{N}_a$ tal que para todo $f \in H$ y para todo $x \in V$, $f(x)-f(a) \in W$.

b) H es equicontinua en E (o simplemente equicontinua) si es equicontinua en todo punto de E .

c) Si E es un espacio vectorial topológico entonces H es uniformemente equicontinua si para todo $W \in \mathfrak{N}_0$ en F existe $V \in \mathfrak{N}_0$ en E tal que para todo $f \in H$ y para todo $x-y \in V$, $f(x)-f(y) \in W$.

6.2. Proposición: Sean E y F espacios vectoriales topológicos . Sea H un conjunto de funciones lineales de E en F . Entonces H es uniformemente equicontinua si y sólo si H es equicontinua en $0 \in E$.

6.3. Corolario: Sean E , F y H como en la proposición anterior . H es equicontinua si y sólo si para todo $W \in \mathfrak{N}_0$ en F , $\bigcap_{U \in H} (U^{-1}(W)) \in \mathfrak{N}_0$ en E .

Veamos algunas propiedades de los conjuntos equicontinuos cuando $F = \mathbb{K}$.

6.4. Proposición: Sea E un espacio vectorial topológico sobre $\mathbb{K}$ y sea $H \subseteq E'$. Son equivalentes :

a) H es equicontinua

b) Existe $V \in \mathcal{N}_0$ en E tal que $H \subseteq V^{\circ}$.

6.5. Corolario: Sean E y H como en la proposición anterior . Entonces H es equicontinua si y sólo si $H^{\circ} \in \mathcal{N}_0$ en E .

6.6. Proposición: Sean E y F espacios vectoriales topológicos localmente convexos y sea $H \subseteq \mathcal{L}(E,F)$. Entonces :

a) Si H es equicontinua entonces H es acotada en $\mathcal{L}_b(E,F)$

b) Si H es acotada en $\mathcal{L}_b(E,F)$ entonces H es acotada en $\mathcal{L}_s(E,F)$.

Observación: Sean E y F espacios normados y sea $H \subseteq \mathcal{L}(E,F)$. Si H es acotado en $\mathcal{L}_b(E,F)$ entonces existe $M \in \mathbb{R}$ tal que para todo $U \in H$ $||U|| \leq M$.

Así vimos que si $H \subseteq \mathcal{L}(E,F)$ es equicontinua entonces H es acotada en $\mathcal{L}_s(E,F)$. Veremos que el recíproco es válido en los espacios llamados barrilados .

I.7. ESPACIOS BARRILADOS

Los espacios barrilados no necesariamente son metrizables y sin embargo comparten propiedades importantes con los espacios de Banach y los espacios de Fréchet .

7.1. <u>Definición</u>: Sea E un espacio vectorial topológico sobre $\mathbb{K}$. Sea $A \subseteq E$. A es un barril en E si A es cerrado , convexo , balanceado y absorbente .

7.2. <u>Definición</u>: Sea E un espacio localmente convexo sobre $\mathbb{K}$. E es un espacio barrilado si todo barril en E es una vecindad de cero en E .

7.3. <u>Teorema</u>: Sea E un espacio y τ una topología que hace de E un espacio localmente convexo . Entonces (E,τ) es barrilado si y sólo si para todo $A \subseteq E'$, si A es $\sigma(E',E)$-acotado entonces A es equicontinuo .

7.4. <u>Teorema</u>: Sea E un espacio barrilado , Hausdorff y sea F un espacio localmente convexo , Hausdorff .Sea $H \subseteq \mathcal{L}(E,F)$. H es equicontinua si y sólo si H es acotada en $\mathcal{L}_s(E,F)$.

7.5. <u>Teorema</u>: Sean E y F espacios localmente convexos , Hausdorff y $F \neq \{0\}$. Si para todo $H \subseteq \mathcal{L}(E,F)$ que es acotado en $\mathcal{L}_s(E,F)$,se tiene que H es equicontinua , entonces E es un espacio barrilado .

7.6. <u>Corolario</u>: Sean E y F como en el teorema anterior . Son equivalentes :

a) E es un espacio barrilado .

b) Todo $H \subseteq \mathcal{L}(E,F)$ acotado en $\mathcal{L}_s(E,F)$ es equicontinuo .

7.7. <u>Teorema</u>: Todo espacio localmente convexo , Hausdorff , de Baire es barrilado .

7.8. <u>Corolario</u>: a) Todo espacio de Banach es barrilado .

b) Todo espacio de Fréchet es barrilado .

Este corolario nos dice que todos los espacios "palpables" son barrilados .

Un ejemplo de un espacio que no es barrilado es $(E, ||\_||)$ donde $E = \mathscr{C}([0,1])$ y si $f \in E$, $||f|| = \int_0^1 |f| \, d\mu$ donde μ es la medida de Lebesgue. $(E, ||\_||)$ es un espacio normado y por lo tanto Hausdorff y localmente convexo. E no es completo. Veamos que no es barrilado Consideremos $B = \{ f \in E \,/\, \sup|f(x)| \leq 1 \text{ ,para todo } x \in [0,1] \}$.

Es fácil ver que B es convexo, balanceado y absorbente. Para que B sea un barril sólo falta ver que es cerrado.

Sea $g \in B^C$, por lo tanto existe $x \in [0,1]$ tal que $|g(x)| > 1$. Como g es continua, existen a y $b \in [0,1]$ tales que para todo $t \in [a,b]$ $|g(t)| > 1$, esto es $|g(t)|-1 > 0$.

Sea $\varepsilon = \int_a^b (|g(t)| -1)d\mu$, tenemos que $\varepsilon > 0$.

Sea $f \in B$. $||g-f|| = \int_0^1 |g-f|d\mu \geq \int_a^b |g-f|d\mu \geq \int_a^b (|g|-|f|)d\mu$

Como $|f(x)| \leq 1$ tenemos que $||g-f|| \geq \int_a^b (|g|-1)d\mu = \varepsilon$.

Por lo tanto si $f \in B$ entonces $||g-f|| \geq \varepsilon$, por lo tanto $f \notin \{ h \,/\, ||g-h|| < \varepsilon \}$ que es la bola abierta de radio ε, centro g en la norma $L^1([0,1])$. Esto es, $f \in \{ h \,/\, ||g-h|| \geq \varepsilon \}$. Entonces si $f \in B$, $f \notin \{ h \,/\, ||g-h|| < \varepsilon \}$, es decir que si $f \in \{ h \,/\, ||g-h|| < \varepsilon \}$ entonces $f \notin B$, esto es $f \in B^c$. Por lo tanto $\{ h \,/\, ||g-h|| < \varepsilon \} \subseteq B^c$, es decir B^c es abierto y por lo tanto B es cerrado.

Veamos que $B \notin \mathfrak{N}_0$ en E. Supongamos que sí lo es, es decir que existe $\delta > 0$ tal que $\{ h \,/\, \int_0^1 |h|d\mu < \delta \} \subseteq B$. Si $h \in E$ es tal que $h \in B$ entonces $\sup \{ |h(x)| \,/\, x \in [0,1] \} \leq 1$.

Sin embargo existe $h \in \mathscr{C}([0,1])$ tal que :

$\int_0^1 |h|d\mu < \delta$ y $\sup \{ |h(x)| \,/\, x \in [0,1] \} > 1$ (absurdo con lo anterior). Por lo tanto $B \notin \mathfrak{N}_0$ en E, con lo que queda demostrado que E no es un espacio barrilado.

I.8. PRINCIPIO DEL ACOTAMIENTO UNIFORME

Teorema: Sea E un espacio de Banach y sea F un espacio normado .

Sea $H \le \mathcal{L}(E,F)$ tal que H es acotado en $\mathcal{L}_s(E,F)$. Entonces H es acotado en la norma de $\mathcal{L}(E,F)$, esto es existe $M \in \mathbb{R}$ tal que para todo $\mu \in H$, $||\mu|| \le M$.

Demostración: Si E es un espacio de Banach entonces por el corolario I.7.8 E es un espacio barrilado . H es acotado en $\mathcal{L}_s(E,F)$. Por lo tanto , por el corolario I.6.7 H es acotado en $\mathcal{L}_b(E,F)$.

Sea $B = \{ x \in E \ / \ ||x|| \le 1 \}$ donde $||\_||$ denota la norma de E .

Por definición B es acotado en E .

Sea $p_B : \mathcal{L}(E,F) \to \mathbb{R}$ tal que $p_B(f) = \sup \{ ||f(x)|| \ / \ x \in B \}$

$$= \sup \{ ||f(x)|| \ / \ ||x|| \le 1 \}$$

Por la definición de $\mathcal{L}_b(E,F)$ p_B es una semi-norma continua en $\mathcal{L}_b(E,F)$, por lo que $V_B = \{ f \in \mathcal{L}(E,F) \ / \ p_B(f) \le 1 \}$ es una vecindad de cero en $\mathcal{L}_b(E,F)$.

Como H es acotado en $\mathcal{L}_b(E,F)$, existe $M \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tal que $H \subseteq MV_B$

Esto es , para todo $\mu \in H$ $p_B(\mu) \le |M|$ o sea para todo $\mu \in H$ $\sup \{ ||\mu(x)|| \ / \ ||x|| \le 1 \} \le |M|$. Además $||f|| = \sup \{ ||f(x)|| \ / ||x|| \le 1 \}$, si $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Por lo tanto existe $M \in \mathbb{R}$ tal que para todo $\mu \in H$ $||\mu|| \le M$ $\square$

I.9. LIMITES INDUCTIVOS ESTRICTOS

Por último estudiaremos un poco los límites inductivos estrictos ya que son de gran importancia por sus propiedades de conservación (por ejemplo el límite inductivo de espacios barrilados es barrilado) . Terminaremos este capítulo con la demostración del teorema de Dieudonné-Schwartz .

Sea X un espacio vectorial topológico y sea $M \subseteq X$ un subespacio . Denotemos $V_M(0) = \{ V_M \subseteq M$ / existe $V \in \mathfrak{N}_0$ tal que $V_M = V \cap M \}$.
$V_M(0)$ es una base de vecindades del cero en M y con la topología generada por $V_M(0)$, M es un espacio vectorial topológico . Si X es localmente convexo entonces M también lo es . La topología así definida en M es la topología inducida por la topología de X en M .

9.1. <u>Lema</u>: a) Sea X un espacio vectorial topológico localmente convexo . Sea M un subespacio de X . Sea $U \in V_M(0)$ convexo . Entonces existe $V \in \mathfrak{N}_0$ convexa tal que $U = M \cap V$.

b) Si además suponemos que M es cerrado y $x_0 \in X \setminus M$ entonces existe $V \in \mathfrak{N}_0$ convexa tal que $V \cap M = U$ y $x_0 \notin V$.

Veamos ahora en qué consisten los límites inductivos estrictos de espacios localmente convexos .

Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ tal que $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$, donde $\{ X_n \}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente de subespacios de X .
Suponemos que cada X_n está dotado de una topología localmente convexa , denotada τ_n con la propiedad de que τ_n es la inducida por τ_{n+1} en X_n , esto para todo $n \in \mathbb{N}$.
El propósito es encontrar una topología para X de espacio localmente convexo , digamos τ y que para todo $n \in \mathbb{N}$ τ_n sea la topología

inducida por τ en X_n .

9.2. Proposición y definición: Definimos :

$\mathfrak{B} = \{ B \subseteq X \ / \ B$ es convexo, balanceado, absorbente y $B \cap X_n \in \mathfrak{N}_0$ en τ_n para todo $n \in \mathbb{N} \}$.

Entonces $\mathfrak{B}$ es una base de vecindades para X de espacio localmente convexo compatible con la estructura de espacio vectorial . Esta topología τ se llama la topología de límite inductivo estricto de los espacios $\{ X_n \}_{n \in \mathbb{N}}$.

9.3. Proposición: Sea $V \subseteq X$ convexo . Son equivalentes :

a) $V \in \mathfrak{N}_0$ en X con respecto a la topología τ .

b) Para todo $n \in \mathbb{N}$, $V \cap X_n \in \mathfrak{N}_0$ convexa en X_n con respecto a la topología τ_n .

9.4. Proposición: Sea X un límite inductivo estricto de espacios localmente convexos $\{ X_n \}_{n \in \mathbb{N}}$. Sea Y un espacio localmente convexo y sea $f: X \to Y$ lineal . Definimos $f_n = f_{|X_n}$. Entonces f es continua si y sólo si f_n es continua para todo $n \in \mathbb{N}$.

9.5. Proposición: Sea X un límite inductivo estricto de espacios localmente convexos $\{ X_n \}_{n \in \mathbb{N}}$. Entonces la topología τ_n es la topología inducida por τ en X_n , esto es : $\tau_{|X_n} = \tau_n$.

9.6. Corolario: Si τ_n es Hausdorff para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces τ es Hausdorff .

9.7. Definición: Un espacio LF es un límite inductivo estricto de espacios de Fréchet .

9.8. Proposición: Sea X un LF y Y un espacio vectorial topológico . Sea $f: X \to Y$ lineal . Si Y es localmente convexo y f es secuencialmente continua entonces f es continua .

9.9. <u>Teorema</u>: (de Dieudonné-Schwartz) Sea X un LF definido por los espacios de Fréchet $\{ X_n \}_{n\in\mathbb{N}}$. Sea $A \subseteq X$ acotado . Entonces existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $A \subseteq X_{n_o}$.

<u>Demostración</u>: Supongamos lo contrario , esto es que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in A$ y $x_n \notin X_n$. Veamos que existe $U \in \mathfrak{N}_o$ en X que no absorbe la sucesión $\{ x_n \}_{n\in\mathbb{N}}$.

i) Sea $U_1 \in \mathfrak{N}_o$ en X_1 . X_1 es cerrado en X_2 ya que X_1 es completo y $\tau_2|_{X_1} = \tau_1$. Además $x_1 \notin X_1$. Entonces por el lema 9.1. parte b) existe $U_2 \in \mathfrak{N}_o$ en X_2 convexa tal que $U_1 = U_2 \cap X_1$ y $x_1 \notin U_2$

ii) $x_1 \notin U_2$ y X_2 es cerrado en X_3 . Por lo tanto existe $W_3 \in \mathfrak{N}_o$ en X_3, convexa tal que $U_2 = W_3 \cap X_2$ y $x_1 \notin W_3$. Ahora $x_2 \notin X_2$ y como X_2 es subespacio tenemos que $2^{-1}x_2 \notin X_2$. Por lo tanto existe $V_3 \in \mathfrak{N}_o$ en X_3 convexa tal que $U_2 = V_3 \cap X_2$ y $2^{-1}x_2 \notin V_3$.

Sea $U_3 = W_3 \cap V_3$. $U_3 \in \mathfrak{N}_o$ convexa y $U_2 = U_3 \cap X_2$, $x_1 \notin U_3$, $2^{-1}x_2 \notin U_3$, $U_2 \subseteq U_3$.

iii) Recursivamente podemos contruir una sucesión $\{ U_n \}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que : - $U_n \in \mathfrak{N}_o$ en X_n convexa .

- $U_n = U_{n+1} \cap X_n$.
- $x_1 , 2^{-1}x_2 , \ldots , n^{-1}x_n \notin U_{n+1}$.
- $U_1 \subseteq U_2 \subseteq \ldots \subseteq U_n \subseteq U_{n+1}$.

Sea $U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$. U es una unión de convexos anidados , por lo tanto U es convexo . Además $U \cap X_n = U_n \in \mathfrak{N}_o$ en X_n convexa para todo $n \in \mathbb{N}$. Así por la proposición 9.3 $U \in \mathfrak{N}_o$ en X .

Veamos que U no absorbe a la sucesión $\{ x_n \}_{n\in\mathbb{N}} := S$.

Supongamos que existe $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tal que $S \subseteq \lambda U$ .Entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $S \subseteq kU$. Entonces $x_k \in kU$, esto es $k^{-1}x_k \in U$ (absurdo por la definición de U) . Por lo tanto U no absorbe a S

Sin embargo $S \subseteq A$ y A es acotado en X. Así en particular deberíamos tener que U absorbe a A y por lo tanto a S, contradiciendo el hecho que U no absorbe a S.

Por lo tanto existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $A \subseteq X_{n_o}$ $\square$

CAPITULO II

DEFINICIONES DE PROPIEDADES LOCALES

II.1.EL ESPACIO (E_B, p_B)

En este capítulo E denotará un espacio vectorial topológico , localmente convexo , Hausdorff .

Consideremos $B \subseteq E$ abierto , convexo , balanceado y absorbente .

Sea : $p_B : E \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ definida por

$$p_B(x) = \inf \{ \alpha > 0 \ / \ \alpha^{-1}x \in B \} .$$

Por las propiedades del ínfimo , p_B resulta ser una semi-norma de E y además $B = \{ x \in E \ / \ p_B(x) < 1 \}$. p_B es la funcional subaditiva de Minkowski asociada a B .

Dado $B \subseteq E$, E_B denotará el subespacio vectorial generado por B . (E_B, p_B) denotará el espacio E_B con la topología generada en él por la semi-norma p_B .

1.1.Proposición: Ningún rayo en E es acotado .

Demostración: Sea $x_1 \in E$, $x_1 \neq 0$. $\{ \alpha x_1 \}_{\alpha\in\mathbb{K}}$ es un rayo en E .

Supongamos que este rayo es acotado en E , esto es que para toda $V \in \mathfrak{N}_0$ (donde $\mathfrak{N}_0$ es el conjunto de vecindades de cero en E) , existe $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tal que $\{ \alpha x_1 \}_{\alpha\in\mathbb{K}} \subseteq \lambda V$.

Como E es Hausdorff , existe $V_1 \in \mathfrak{N}_0$ tal que $x_1 \notin V_1$. Además existe $\lambda_1 \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tal que $\{ \alpha x_1 \}_{\alpha\in\mathbb{K}} \subseteq \lambda_1 V_1$. Ahora $\lambda_1 x_1 \in \{ \alpha x_1 \}_{\alpha\in\mathbb{K}}$. Por lo tanto $\lambda_1 x_1 \in \lambda_1 V_1$, por lo que $x_1 \in V_1$ (esto es absurdo) . Por lo tanto ningún rayo es acotado en E . $\square$

1.2.Proposición: Sea $B \subseteq E$ abierto , convexo , balanceado , absorbente y acotado . Entonces (E_B, p_B) es un espacio normado.

<u>Demostración</u>: p_B es una semi-norma , así que sólo falta demostrar que $p_B(x) = 0$ si y sólo si $x = 0$.

Si $x = 0$, es claro que $p_B(x) = 0$.

Supongamos ahora que $x \neq 0$. Como $x \neq 0$ tenemos que $\{ \alpha x \}_{\alpha\in\mathbb{K}}$ es un rayo en E . Por la proposición II.1.1 $\{ \alpha x \}_{\alpha\in\mathbb{K}}$ no es acotado en E . Como B es acotado este rayo no puede estar contenido en B, es decir que existe $\alpha_0 \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tal que $\alpha_0 x \notin B$.

Ahora : $B = \{ x \in E \ / \ p_B(x) < 1 \}$. Por lo tanto $p_B(\alpha_0 x) \geq 1$, y $p_B(\alpha_0 x) = |\alpha_0| p_B(x) \geq 1$. Por lo tanto $p_B(x) \geq |\alpha_0|^{-1} > 0$.

Por lo tanto (E_B, p_B) es un espacio normado . □

II.2. <u>DEFINICIONES DE PROPIEDADES LOCALES</u>

2.1. <u>Definición</u>: $B \subseteq E$ es un disco en E si B es balanceado y convexo .

2.2. <u>Definición</u>: i) Sea $B \subseteq E$ un disco .B es un disco barrilado si (E_B, p_B) es un espacio barrilado .

ii) Si para todo $A \subseteq E$ acotado existe $B \subseteq E$ un disco cerrado , acotado y barrilado tal que $A \subseteq B$ entonces se dice que E es localmente barrilado .

2.3. <u>Definición</u>: i) Sea $B \subseteq E$ un disco . B es un disco de Banach si (E_B, p_B) es un espacio de Banach .

ii) E es rápidamente completo si para todo $A \subseteq E$ acotado existe $B \subseteq E$ un disco de Banach tal que $A \subseteq B$. (A veces también se dice que el espacio es localmente completo) .

II.3. ESPACIOS PALMEADOS

Introducimos estos espacios ya que nos serán útiles para dar ejemplos (y/o contra-ejemplos) .

En lo siguiente F denotará un espacio vectorial topológico , Hausdorff .

Dadas $W : \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{N}^k \to 2^F$, donde 2^F denota el conjunto de subconjuntos de F , y $\rho \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, escribiremos :

$$W_{\rho,k} = W(\rho(1),\dots,\rho(k)) \text{ para todo } k \in \mathbb{N} .$$

3.1. Definición: W es una palma en F si cumple :

i) El rango de W sólo consiste de subconjuntos balanceados de F .

ii) $\bigcup \{ W_{\rho,1} \ / \ \rho \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \}$ es absorbente en F

iii) Dados $\rho \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ y $k \in \mathbb{N}$, todo punto de $W_{\rho,k}$ es absorbido por el conjunto :

$\bigcup \{ W_{\psi,k+1} \ / \ \psi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} , \ \psi(i) = \rho(i) \text{ para todo } 1 \le i \le k \}$

iv) $W_{\rho,k+1} + W_{\rho,k+1} \subseteq W_{\rho,k}$ para toda $\rho \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ y para todo $k \in \mathbb{N}$

3.2. Definición: Una palma W es compatible con la topología de F si para toda vecindad de cero U en F y toda $\rho \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $W_{\rho,n} \subseteq U$.

3.3. Proposición: Sea W una palma en F . Son equivalentes :

a) W es compatible con la topología de F

b) Sea $\rho \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ y sea $\{ y_n \}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en F tal que $y_n \in W_{\rho,n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\left\{ \sum_{n=1}^{k} y_n \right\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en F .

c) Sean ρ y $\{ y_n \}_{n\in\mathbb{N}}$ como en b) . Entonces $\{ y_n \}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a cero en F .

3.4. Definición: Una palma W en F es completante si para toda $\rho \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ y para toda $\{ y_n \}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq F$ tal que $y_n \in W_{\rho,n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, la sucesión $\left\{ \sum_{n=1}^{k} y_n \right\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge en F . Si F admite una palma completante , F es un espacio palmeado .

3.5. Corolario: Toda palma completante es compatible com la topología

3.6. Proposición: Si F es secuencialmente completo toda palma compatible con la topología es completante .

Ejemplo: Sea F un espacio vectorial topológico metrizable . Sea $\{ U_k \}_{k\in\mathbb{N}}$ una base de cero tal que para todo $k \in \mathbb{N}$, U_k es cerrado , balanceado y $U_{k+1} + U_{k+1} \subseteq U_k$. Sea $W : \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{N}^k \to 2^F$ tal que $W_{\rho,k} = U_k$

Veamos que W es una palma compatible con la topología de F .

i) U_k es balanceado para todo $k \in \mathbb{N}$

ii) $\bigcup \{ W_{\rho,1} \ / \ \rho \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \} = U_1$ y $U_2 + U_2 \subseteq U_1$ por lo tanto $U_3 + U_3 + U_3 + U_3 \subseteq U_1$. En general $\underbrace{U_k + \ldots + U_k}_{2^{k-1} \text{ - veces}} \subseteq U_1$

Sea $x \in F$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x \in U_k$. Como U_k es balanceado , $0 \in U_k$. Por lo tanto $x \in \underbrace{U_k + \ldots + U_k}_{2^{k-1} \text{ - veces}}$, esto es $x \in U_1$. Por lo tanto U_1 es absorbente .

iii) Sean $\rho \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ y $k \in \mathbb{N}$.

$\bigcup \{ W_{\psi,k+1} \ / \ \psi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} , \ \psi(i) = \rho(i) \text{ para todo } 1 \le i \le k \} = U_{k+1}$

Sea $x \in W_{\rho,k} = U_k$. Sea d la métrica de F y sea $d(x,0) = \lambda$. Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\{ x \in F \ / \ d(x,0) < n \} \subseteq U_{k+1}$.

Si $\lambda < n$ entonces $x \in U_{k+1}$. Si $\lambda \ge n$ entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$\lambda m^{-1} < n$. Por lo tanto $m^{-1}x \in U_{k+1}$, esto es $x \in mU_{k+1}$. Así U_{k+1} absorbe a U_k .

iv) $W_{\rho,k+1} + W_{\rho,k+1} = U_{k+1} + U_{k+1} \subseteq U_k = W_{\rho,k}$ para toda $\rho \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ y para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por lo tanto W es una palma en F .

Es compatible con la topología de F ya que $\{ U_k \}_{k\in\mathbb{N}}$ es una base de vecindades de cero en F , y por lo tanto para toda $\rho \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ y para $V \in \mathfrak{N}_0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $W_{\rho,n} = U_n \subseteq V$.

Veamos que esta palma es completante si y sólo si F es completo .

Supongamos que W es completante . Sea $\{ x_n \}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en F . Sin pérdida de generalidad , $x_n \in U_n = W_{\rho,n}$.

$x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$ donde $x_i = 0$ para todo $1 \leq i \leq n-1$. Como W es completante y $\{ x_n \}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i \;/\; x_i = 0 \text{ para todo } 1 \leq i \leq n-1 \right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy , tenemos que $\{ x_n \}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente , y por lo tanto F es completo .

Inversamente , supongamos que F es completo . Sea $\{ x_n \}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq F$ tal que $x_n \in W_{\rho,n} = U_n$. Como para todo $k \in \mathbb{N}$, $U_{k+1} + U_{k+1} \subseteq U_k$ tenemos que $\left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i \right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente . Por lo tanto W es completante . □

Así tenemos la siguiente

3.7. <u>Proposición</u>: Todo espacio metrizable completo es un espacio palmeado .

3.8. <u>Teorema</u>: Sea $F = (F,\tau)$ un espacio palmeado .

a) Todo subespacio vectorial secuencialmente cerrado de F es palmeado .

b) Sea H un espacio vectorial topológico , Hausdorff . si existe $T\colon F \rightarrow H$ una función secuencialmente continua , suprayectiva y lineal , entonces H es palmeado .

c) Todo espacio vectorial , topológico , Hausdorff que es cociente de F es palmeado .

d) Sea σ una topología tal que (F,σ) es un espacio vectorial topológico . Si τ es más fina que σ entonces (F,σ) es palmeado .

Dada $f\colon X \rightarrow Y$ la gráfica de f es $G_f = \{ (x,f(x)) \,/\, x \in X \}$. Si X y Y son espacios vectoriales topológicos y Y es Hausdorff , entonces si f es continua , G_f es cerrado en $X \times Y$. La pregunta es : ¿ Bajo qué condiciones si G_f es cerrado en $X \times Y$ tenemos que f es continua ? . La respuesta a esta pregunta nos lo da el teorema de la gráfica cerrada en su forma más general , es decir en el contexto de espacios palmeados . Los siguientes teoremas aparecen aquí para que se vea la importancia de los espacios palmeados , introducidos por Grothendieck y su alumno De Wilde a principios de los años setentas .

3.9.<u>Teorema</u>: Sean E un espacio vectorial topológico , F un espacio palmeado y M un subespacio de E de segunda categoría . Si $T\colon M \rightarrow F$ es lineal y es tal que G_T es cerrado en $E \times F$ entonces T es continua .

3.10.<u>Teorema</u>: (de la gráfica cerrada)

Supongamos que la topología de E es la topología del límite inductivo definido por la familia $\{ E_j \}_{j\in J}$ de espacios de Baire metrizables y por los mapeos lineales $S_j\colon E_j \rightarrow E$. Si F es palmeado , todo mapeo lineal , secuencialmente cerrado

$T:E \to F$ es continuo .

3.11. Corolario: Sean E y F espacios métricos completos . Entonces todo mapeo lineal y cerrado $T: E \to F$ es continuo .

3.12. Teorema: Sea E un espacio de Baire . E es palmeado si y sólo si E es completo y metrizable .

3.13. Teorema: Sean E y F espacios vectoriales topológicos y E es palmeado . Sea $T: E \to F$ lineal y cerrada . Si el rango de T es de segunda categoría en F entonces T es abierta .

3.14. Teorema: (de Banach-Schauder)

Sean E y F espacios métricos completos . Sea $T: E \to F$ lineal y continua . Entonces el rango de T es de primera categoría o es cerrado en F .

3.15. Definición: Sea F un espacio vectorial topológico , Hausdorff . Una palma en F es una palma estricta si es completante y si dada $\rho \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ y cualquier sucesión $\{ y_n \}_{n\in\mathbb{N}}$ en F tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ $y_n \in W_{\rho,n}$, tenemos que $\sum_{k=n+1}^{\infty} y_k \in W_{\rho,n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

3.16. Definición: Un espacio vectorial topológico Hausdorff que admite una palma estricta es un espacio estrictamente palmeado .

3.17. Proposición: Todo espacio métrico completo es estrictamente palmeado .

3.18. Teorema: (de localización)

Sea E un espacio de Baire y F un espacio estrictamente palmeado . Si $T: E \to F$ es lineal y cerrada entonces T es continua y existe $\rho \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tal que $T^{-1}(W_{\rho,n}) \in \mathfrak{N}_0$ en E para todo

$n \in \mathbb{N}$, donde W es una palma estricta en F .

3.19. Corolario: Sea E un espacio de Baire , F un espacio vectorial topológico que es límite inductivo de una sucesión de espacios estrictamente palmeados $\{ F_n \}_{n \in \mathbb{N}}$. Sea $T: E \to F$ un mapeo lineal , cerrado . Entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T(E) \subseteq F_n$ y el mapeo $T: E \to F_n$ es continuo .

II.4. EJEMPLOS

4.1. Un espacio barrilado que no es localmente barrilado

Makarov en el artículo "On pathological properties of inductive limits of Banach spaces" demuestra que existe un límite inductivo (E,τ) de espacios de Fréchet (E_n,τ_n) tal que cada subconjunto acotado de E está contenido en algún E_n , pero existe $B \subseteq E$ balanceado , convexo , cerrado y acotado que no es acotado en ningún E_n . Todo espacio de Fréchet es barrilado , por lo tanto E_n es barrilado para todo $n \in \mathbb{N}$. El límite inductivo de espacios barrilados es barrilado y así (E,τ) es barrilado . Veamos que (E,τ) no es localmente barrilado . Para demostrar esto necesitaremos la siguiente

Proposición: Sea L un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Sean τ_1 y τ_2 dos topologías tales que (L,τ_1) y (L,τ_2) son espacios vectoriales topológicos Hausdorff y $\tau_2 \subseteq \tau_1$. Si (L,τ_1) tiene una base de vecindades de cero cuyos elementos son τ_2 completos entonces (L,τ_1) es completo .

Demostración: Sea $\mathfrak{B}_1$ una base de vecindades de cero de (L,τ_1) cuyos elementos son τ_2 completos . Sea $\mathfrak{F}$ un filtro de Cauchy en (L,τ_1) , sea $V_1 \in \mathfrak{B}_1$. Como $\mathfrak{F}$ es de Cauchy existe $F_o \in \mathfrak{F}$ tal que $F_o - F_o \subseteq V_1$ Sea $y \in F_o$. Entonces $\{ y-F \ / \ F \in \mathfrak{F} \}$ es un filtro de Cauchy en (L,τ_2) ya que si $U \in \mathfrak{N}_o$ en (L,τ_2) , como $\tau_2 \subseteq \tau_1$ se tiene que $U \in \mathfrak{N}_o$ en (L,τ_1) . Por lo tanto existe $F \in \mathfrak{F}$ tal que $F-F \subseteq U$. Así $F-F+(y-y) \subseteq U$, esto es $(y-F)-(y-F) \subseteq U$ y así $\{ y-F \ / \ F \in \mathfrak{F} \}$ es un filtro de Cauchy en (L,τ_2) . Como $y-F_o \subseteq V_1$ y V_1 es τ_2-completo entonces $\{ y-F \ / \ F \in \mathfrak{F} \}$ converge a $y-x_o$ con respecto a τ_2 .

$\mathfrak{B} = \{ y-F \ / \ F \in \mathfrak{F} \ , \ F \subseteq F_o \}$ es una base del filtro $\{ y-F \ / \ F \in \mathfrak{F} \}$ ya que :

i) Sean $A,B \in \mathfrak{B}$, $A = y-A'$ y $B = y-B'$ donde $A',B' \in \mathfrak{F}$ y $A',B' \subseteq F_o$ Sea $C = y-(A \cap B')$. Por ser $\mathfrak{F}$ un filtro tenemos que $A' \cap B' \in \mathfrak{F}$ y además $A' \cap B' \subseteq F_o$. Por lo tanto $C \in \mathfrak{B}$ y $C \subseteq A \cap B$.

ii) $\emptyset \notin \mathfrak{B}$ por definición de $\mathfrak{B}$.

iii) Sea $y-F \in \{ y-F \ / \ F \in \mathfrak{F} \}$. Si $F \subseteq F_o$ entonces existe $y-F \in \mathfrak{B}$ tal que $y-F \subseteq y-F$. Si F no está contenido en F_o entonces $F \cap F_o \subseteq F_o$ y $F \cap F_o \in \mathfrak{F}$, por lo que $y-(F \cap F_o) \subseteq y-F$.

Por lo tanto $\mathfrak{B}$ es base del filtro $\{ y-F \ / \ F \in \mathfrak{F} \}$.

Como $y-F_o \subseteq V_1$ que es τ_2-cerrado y $\{ y-F \ / \ F \in \mathfrak{F} \}$ es un filtro de Cauchy en (L,τ_2) entonces $\{ y-F \ / \ F \in \mathfrak{F} \}$ converge a $y-x_o \in V_1$. Por lo tanto para todo $y \in F_o$, $y-x_o \in V_1$, esto es $F_o - x_o \subseteq V_1$, es decir $F_o \subseteq x_o + V_1$.

Además si $\{ y-F \ / \ F \in \mathfrak{F} \}$ converge a $y-x_o$ es claro que el filtro $\mathfrak{F}$ converge a x_o . Por la arbitrariedad de V_1 tenemos que para todo $V \in \mathfrak{B}_1$ existe $F \in \mathfrak{F}$ tal que $F \subseteq x_o+V$, esto es el filtro $\mathfrak{F}$ es convergente a x_o con respecto a τ_1 , es decir (L,τ_1) es completo .

$\square$

Veamos ahora que (E,τ) no es localmente barrilado . Supongamos que sí lo es . Sea $B \subseteq E$ tal que B es acotado , convexo , cerrado , balanceado con respecto a la topología τ y B no es acotado en ningún (E_n,τ_n) . Por ser (E,τ) localmente barrilado tenemos que (E_B,p_B) es barrilado , de hecho p_B es una norma en E_B . Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $E_B \subseteq E_m$. Sea $\{ U_n \}_{n\in\mathbb{N}}$ una base de vecindades de cero en E_m anidada , ésta existe pues E_m es un espacio de Fréchet , tal que U_n es cerrado , balanceado, convexo para todo $n \in \mathbb{N}$.

Veamos que $\{ n^{-1}B \cap U_n \ / \ n \in \mathbb{N} \}$ genera una topología τ_o en E_B metrizable, localmente convexa , más fina que la topología generada por p_B en E_B .

i) Sean $x,y \in n^{-1}B \cap U_n$. U_n es convexo , por lo tanto $\alpha x+(1-\alpha)y \in U_n$ para todo $\alpha \in [0,1]$. Como $x,y \in n^{-1}B$, entonces $p_B(x) \leq n^{-1}$ y $p_B(y) \leq n^{-1}$. Por lo tanto :

$$\begin{aligned} p_B(\alpha x+(1-\alpha)y) &\leq |\alpha|p_B(x)+|1-\alpha|p_B(y) \\ &\leq \alpha n^{-1}+(1-\alpha)n^{-1} = n^{-1} \end{aligned}$$

Así $\alpha x+(1-\alpha)y \in n^{-1}B$. Por lo tanto $n^{-1}B \cap U_n$ es convexo para todo $n \in \mathbb{N}$.

ii) E_m es metrizable , por lo tanto U_n lo es y así $n^{-1}B \cap U_n \subseteq U_n$ lo es .

iii) Sea $V \in \mathcal{N}_o$ en E_B con respecto a la topología generada por p_B . Así existe $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tal que $\alpha B \subseteq V$. Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq n\alpha$. Por lo tanto $(n\alpha)^{-1}B \subseteq B$, es decir $n^{-1}B \subseteq \alpha B$, por lo que :

$$U_n \cap n^{-1}B \subseteq n^{-1}B \subseteq \alpha B \subseteq V .$$

Así $V \in \mathcal{N}_o$ en E_B con respecto a τ_o y por lo tanto τ_o es más fina que la topología generada por p_B .

Denotemos por τ_B la topología generada por p_B en E_B . Por lo anterior tenemos que $\tau_B \subseteq \tau_o$ y (E_B,τ_o) tiene una base de vecindades de cero cuyos elementos son τ_B completos (a saber $\{ U_n \cap n^{-1}B \ / \ n \in \mathbb{N} \}$) . Por la proposición probada anteriormente , tenemos que (E_B,τ_o) es completo .

Así (E_B,τ_o) y (E_B,τ_B) son dos espacios metrizables completos , es decir son dos espacios de Fréchet tales que $\tau_B \subseteq \tau_o$. Como dos topologías comparables en un espacio de Fréchet son las mismas tenemos que $\tau_B = \tau_o$

Por lo tanto para $n \in \mathbb{N}$ existe $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tal que :

$\alpha B \subseteq n^{-1}B \cap U_n \subseteq U_n$, es decir $B \subseteq \alpha^{-1}U_n$, esto es para toda vecindad U_n de cero en E_m existe $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tal que $B \subseteq \lambda U_n$. Por lo tanto B es acotado en E_m , lo cual es una contradicción .

4.2. Un espacio rápidamente completo que no es completo

Sea E un espacio de Banach . Es fácil ver que $\mathcal{L}_s(E,\mathbb{K}) = (E',\sigma(E',E))$ Por lo tanto , por el principio del acotamiento uniforme todo subconjunto de E' $\sigma(E',E)$-acotado es $||\_||'$-acotado , donde $||\_||'$ denota la norma de E' .

Veamos que $(E',||\_||')$ es rápidamente completo , esto es que para todo $A' \subseteq E'$, $||\_||'$-acotado existe $B \subseteq E'$ un disco de Banach tal que $A' \subseteq B$.

Sea A el mínimo $||\_||'$-cerrado , balanceado , convexo que contiene a A' . Como A' es $||\_||'$-acotado , existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tal que :

$A' \subseteq \alpha \{ x \in E' \ / \ ||x||' \leq 1 \} = A''$

A'' es $||\_||'$-cerrado , balanceado , convexo , por lo tanto $A \subseteq A''$ y así A es $||\_||'$-acotado .

Veamos que la topología generada por p_A en E'_A es más fina que la topología inducida por $||\_||'$ en E'_A. Sea V' un abierto de la topología inducida por $||\_||'$ en E'_A . Entonces $V' = V \cap E'_A$ donde V es un abierto de E' con respecto a $||\_||'$. Todo abierto de la topología generada por p_A contiene un conjunto de la forma λA donde $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Como A es $||\_||'$-acotado entonces existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tal que $A \subseteq \alpha V$. $A = A \cap E'_A \subseteq \alpha V \cap E'_A = \alpha(V \cap E'_A) = \alpha V'$. Por lo tanto $\alpha^{-1}A \subseteq V'$, esto es V' es un abierto en E'_A con respecto a la topología generada por p_A . Por lo tanto la topología inducida por la norma de E' en E'_A es más gruesa que la topología generada por p_A .

Veamos que (E'_A,p_A) es un espacio de Banach .

A es cerrado , balanceado y convexo , por lo tanto (E'_A,p_A) es un espacio normado . Por lo anterior id: $(E'_A,p_A) \to (E_A',||\_||'|_{E_A'})$ es continua . Así como A es $||\_||'$-cerrado , tenemos que A es cerrado con respecto a la topología generada por p_A .

E es un espacio de Banach , por lo que $(E',||\_||')$ también lo es . Ahora , A es $||\_||'$-cerrado al igual que αA para todo $\alpha \in \mathbb{K}$, por tanto αA es $||\_||'$-completo para todo $\alpha \in \mathbb{K}$.

$A = \{ x \in E' \ / \ p_A(x) \leq 1 \}$ y $\{ \alpha A \}_{\alpha\in\mathbb{K}}$ es una base de vecindades de cero en E'_A . Por la proposición probada en el párrafo anterior tenemos que (E'_A,p_A) es completo . Por lo tanto (E'_A,p_A) es un espacio de Banach y $A' \subseteq A$. Por lo que $(E',||\_||')$ es rápidamente completo .

Ahora sea τ una topología localmente convexa de E' tal que $\sigma(E',E) \subseteq \tau \subseteq \tau(E',E)$. Sea $A \subseteq E'$ τ-acotado-. Por el teorema de Banach-Mackey , A es $||\_||'$-acotado . Por lo anterior existe $B \subseteq E'$ convexo , $||\_||'$-cerrado y balanceado tal que $A \subseteq B$ y (E'_B,p_B) es un espacio de Banach .

Como τ es compatible con la dualidad , por la proposición I.3.10 , todo conjunto $||\_||'$-cerrado y convexo es τ-cerrado y convexo . Por lo tanto existe B convexo , τ-cerrado y balanceado tal que $A \subseteq B$ y (E'_B, p_B) es un espacio de Banach , esto es (E',τ) es un espacio rápidamente completo .

Además $\sigma(E^*,E)_{|E'} = \sigma(E',E)$. Por lo tanto $\sigma(E^*,E)_{|E'}$ es compatible con la dualidad por lo que $(E',\sigma(E^*,E)_{|E'})$ es rápidamente completo . $E' \subseteq E^*$ y $\overline{E'}^{\sigma(E^*,E)} = E^*$.

Si $\dim(E) \geq \aleph_0$, existe $f \in E^* \setminus E'$. Por lo tanto E' no puede ser $\sigma(E^*,E)$-completo si $\dim(E) \geq \aleph_0$.

CAPITULO III

CONJUNTOS ACOTADOS DE $\mathcal{L}(E,F)$

Este capítulo lo dedicaremos a estudiar qué propiedades debe tener un espacio para que este espacio sea de Banach-Mackey , es decir que todo subconjunto débilmente acotado sea fuertemente acotado .
Más especificamente veremos cómo debe de ser E para que $\mathcal{L}(E,F)$ sea un espacio de Banach-Mackey .
Empezaremos con el caso particular en que F es el campo sobre el cual está definido E .

III.1. UNA CONDICION NECESARIA Y SUFICIENTE PARA QUE LOS CONJUNTOS DEBILMENTE ACOTADOS SEAN FUERTEMENTE ACOTADOS .

El propósito de este párrafo es demostrar que bajo ciertas condiciones tendremos que los conjuntos $\sigma(E,E')$-acotados coinciden con los conjuntos $\beta(E,E')$-acotados si y sólo si E es localmente barrilado . Estos resultados están basados en [2] .

1.1. Proposición: Sea X un espacio localmente convexo y Hausdorff .

Son equivalentes :

a) Para todo espacio localmente convexo Y y para todo $S \subseteq \mathcal{L}(X,Y)$ si S es puntualmente acotado entonces S es equicontinuo .

b) X es barrilado .

c) Si $A \subseteq X'$ es $\sigma(X',X)$-acotado entonces A es equicontinuo .

Demostración: Supongamos b) y demostremos a) .

Sea Y un espacio localmente convexo y sea $S \subseteq \mathcal{L}(X,Y)$ puntualmente acotado . Por lo tanto $S(x) = \{ f(x) / f \in S \}$ es acotado en Y .

Sea $V \in \mathfrak{N}_0$ en Y . Sin pérdida de generalidad V es un barril . Sea $A = \bigcap \{ f^{-1}(V) / f \in S \}$. V es cerrado y para todo $f \in S$, f es continua . Por lo tanto para todo $f \in S$, $f^{-1}(V)$ es cerrado en X , por lo que A es cerrado .

V es convexo y balanceado . Como todo $f \in S$ es lineal , A resulta convexo y balanceado .

Veamos que A es absorbente . Sea $x \in X$, así $S(x)$ es acotado en Y . Por lo tanto existe $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tal que $S(x) \subseteq \alpha V$, esto es que para todo $f \in S$, $f(x) \in \alpha V$, y así para todo $f \in S$ $\alpha^{-1}x \in f^{-1}(V)$. Por lo tanto $\alpha^{-1}x \in A$, esto es A es absorbente .

Por lo tanto A es un barril en X . Como X es barrilado , $A \in \mathfrak{N}_0$ en X . Por el corolario I.6.3. S es equicontinuo .

Supongamos a) y demostremos c) .

Si $Y = \mathbb{K}$, la topología de la convergencia puntual es la topología débil en X' .

Supongamos c) y demostremos b) .

Veamos que si $B \subseteq X$ y $\langle X,Y \rangle$ entonces B es $\sigma(X,Y)$-acotado si y sólo si B° es absorbente .

Supongamos que B es $\sigma(X,Y)$-acotado . Sea $y \in Y$. Como B es $\sigma(X,Y)$-acotado , existe $M \in \mathbb{R}^{+}$ tal que $|\langle x,y \rangle| \leq M$ para todo $x \in B$. Por lo tanto $|\langle x,M^{-1}y \rangle| \leq 1$ para todo $x \in B$, esto es $M^{-1}y \in B^{\circ}$, por lo que B° es absorbente .

Inversamente supongamos que B° es absorbente . Sea $y \in Y$, entonces existe $M \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tal que $y \in MB^{\circ}$, esto es $|\langle x,y \rangle| \leq |M|$ para todo $x \in B$. Por lo tanto B es $\sigma(X,Y)$-acotado .

Sea A un barril en X , en particular A es absorbente y $A^{\circ\circ} = A$.

Por lo tanto $(A^{\circ})^{\circ}$ es absorbente y por lo anterior A° es $\sigma(X',X)$-acotado . Por lo tanto A° es equicontinuo . Por el corolario I.6.5. $A^{\circ\circ} = A \in \mathfrak{M}_0$ en X y así X es un espacio barrilado . $\square$

1.2. Teorema: Sea E un espacio localmente barrilado . Entonces

$C \subseteq E'$ es $\sigma(E',E)$-acotado si y sólo si C es $\beta(E',E)$-acotado .

Demostración: Como $\sigma(E',E) \subseteq \beta(E',E)$, si C es $\beta(E',E)$-acotado es claro que C es $\sigma(E',E)$-acotado .

Inversamente , supongamos que C es $\sigma(E',E)$-acotado . Sea $A \subseteq E$ acotado . Como E es localmente barrilado , existe $B \subseteq E$ disco cerrado , acotado y barrilado tal que $A \subseteq B$. Así (E_B, p_B) es barrilado .

Sea $G = \{ f_{|E_B} : E_B \to \mathbb{K} \ / \ f \in C \}$.

Veamos que la topología heredada a E_B por E es más débil que la topología generada por p_B en E_B .

Sea V un abierto en E_B con la topología heredada por E . Así $V = E_B \cap V'$ donde V' es un abierto de E . Como B es acotado , existe $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tal que $B \subseteq \alpha V'$. Además $B \subseteq E_B$. Por lo tanto $B \subseteq \alpha V' \cap E_B = \alpha(V' \cap E_B) = \alpha V$, esto es $\alpha^{-1}B \subseteq V$. Por lo que V es un abierto en E_B con respecto a la topología generada por p_B .

Así , como E_B es un subespacio vectorial de E tenemos que $G \subseteq (E_B)'$. Veamos que G es $\sigma((E_B)',E_B)$-acotado .

C es $\sigma(E',E)$-acotado , por lo que dado $x \in E_B$ existe $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tal que $C \subseteq \alpha\{ l \in E' \ / \ |l(x)| < 1 \}$. Sea $g \in G$, entonces $g = f_{|E_B}$ y por lo tanto $g = \alpha l$ donde $l : E_B \to \mathbb{K}$ y $|l(x)| < 1$. Por lo tanto $G \subseteq \alpha\{ l \in (E_B)' \ / \ |l(x)| < 1 \}$, por lo que G es $\sigma((E_B)',E_B)$-acotado .

Así G es $\sigma((E_B)',E_B)$-acotado y E_B es barrilado , por la proposición III.1.1. G es equicontinuo y por la proposición I.6.6. G es acotado en $\mathcal{L}_b(E,F) = ((E_B)',\beta((E_B)',E_B))$, esto es G es $\beta((E_B)',E_B)$-acotado .

Ahora , $A \subseteq B$ y B es es acotado en (E_B,p_B) , por lo tanto A es acotado en (E_B,p_B) . Como $A \subseteq E_B$ tenemos que :

$$\{ \ |f(x)| \ / \ f \in C \ , \ x \in A \ \} = \{ \ |g(x)| \ / \ g \in G \ , \ x \in A \ \}$$

Como G es $\beta((E_B)',E_B)$-acotado y A es acotado en E_B , $\sup \{ \ |g(x)| \ / \ g \in G \ , \ x \in A \ \} < \infty$, y por lo tanto $\sup \{ \ |f(x)| \ / \ f \in C \ , \ x \in A \ \} = M < \infty$.

Por la definición de $\beta(E',E)$ tenemos que $A^{\circ} \in \mathfrak{N}_0$ en E' con la topología $\beta(E',E)$. $A^{\circ} = \{ \ f \in E' \ / \ |f(x)| \leq 1$ para todo $x \in A \ \}$. Como $\sup \{ \ |f(x)| \ / \ f \in C \ , \ x \in A \ \} = M$ tenemos que $C \subseteq MA^{\circ}$, por lo que C es $\beta(E',E)$-acotado . □

Hemos dado condiciones suficientes para que los conjuntos débilmente acotados sean fuertemente acotados .

Para dar condiciones necesarias necesitaremos la siguiente

1.3. Proposición: Sea E un espacio vectorial topológico . Sean τ_1 y τ_2 dos topologías de E tales que $\tau_2 \subseteq \tau_1$. Supongamos que (E,τ_1) tiene una base de vecindades de cero cuyos elementos son τ_2-cerrados . Sea $M \subseteq E$, $M \neq \emptyset$. Sea $\mathfrak{F}$ un filtro de Cauchy en M con respecto a τ_1 . Entonces si $\mathfrak{F}$ es convergente a a en (E,τ_2) se tiene que $\mathfrak{F}$ es convergente a a en (E,τ_1) .

Demostración: Esta demostración es muy parecida a la demostración de la proposición del párrafo II.4.1. y por tanto se omitirá .

Denotemos por (P) a la siguiente propiedad :

(P) : Para todo $A \subseteq E$ balanceado , convexo , acotado y cerrado

Denotemos por (P) a la siguiente propiedad :

(P) : Para todo $A \subseteq E$ balanceado , convexo , acotado y cerrado existe $D \subseteq E$ barril tal que $A = D \cap E_A$.

1.4. Teorema: Sea E un espacio vectorial topológico , localmente convexo y Hausdorff . Supongamos que E tiene la propiedad (P) y que todo subconjunto de E' $\sigma(E',E)$-acotado es $\beta(E',E)$-acotado . Entonces E es localmente barrilado .

Demostración: Supongamos que E no es localmente barrilado . Entonces existe $B \subseteq E$ balanceado , convexo , cerrado y acotado tal que (E_B,p_B) no es barrilado , esto es existe $A \subseteq E_B$ un barril y $A \notin \mathfrak{N}_0$ en (E_B,p_B) . Como $A \notin \mathfrak{N}_0$ en (E_B,p_B) entonces para todo $V_i = \{ x \in E_B / p_B(x) \leq i^{-2} \}$, tenemos que V_i no está contenido en A . Por lo tanto , para todo $i \in \mathbb{N}$ existe $x_i \in V_i$ y $x_i \notin A$. Como $x_i \in V_i$, $p_B(x_i) \leq i^{-2}$ y por lo tanto $\{ x_i \}_{i\in\mathbb{N}}$ es convergente a cero en (E_B,p_B) .

Sea $\{ a_i \}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^+$ tal que $a_i = i$. Por lo tanto $p_B(a_ix_i) \leq i^{-1}$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $\{ a_ix_i \}_{i\in\mathbb{N}}$ es convergente a cero en (E_B,p_B) y $\lim\limits_{i\to\infty} a_i = \infty$.

Como ya se había visto en el capítulo anterior tenemos que la topología generada por p_B en E_B es más fina que la topología inducida por la topología de E en E_B . Por lo tanto $\{ a_ix_i \}_{i\in\mathbb{N}}$ es convergente a cero en E , y así $S = \{ a_ix_i / i \in \mathbb{N} \}$ es acotado en E .

Veamos que todo $M \subseteq E_B$ cerrado y acotado en (E_B,p_B) es cerrado en E . Sea $\overline{M}^E = M_0$. M es acotado en E_B , por lo tanto existe $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tal que $M \subseteq \lambda B$. B es cerrado en E , por lo que λB es cerrado en E y así $M_0 \subseteq \lambda B$, esto es $\overline{M}^E \subseteq E_B$.

Denotemos por τ la topología de E y por τ_B la topología generada por p_B en E_B . Tenemos $\tau_{|E_B} \subseteq \tau_B$ y $\{ k^{-1}B \,/\, k \in \mathbb{N} \}$ es una base de vecindades de cero de E_B para la topología τ_B donde $k^{-1}B$ es τ-cerrado para todo $k \in \mathbb{N}$.

Sea $x_0 \in M_0$ y sea $\vartheta \subseteq M$ una red convergente a x_0 con respecto a la topología τ . Por la proposición III.1.3.tenemos que ϑ es convergente a x_0 con respecto a la topología τ_B . Como M es τ_B-cerrado tenemos que $x_0 \in M$, esto es $\overline{M}^E = M_0 = M$, por lo tanto M es τ-cerrado .

Ahora , A es un barril en E_B , por lo que A es τ_B-cerrado . $B \subseteq E_B$ es τ-cerrado , por lo que B es τ_B-cerrado . Por lo tanto $A \cap B$ es τ_B-cerrado , B es τ_B-acotado y $A \cap B \subseteq B$ y por lo anterior $A \cap B$ es τ-cerrado . Además $A \cap B$ es balanceado y convexo . Por lo tanto existe un barril $D \subseteq E$ tal que $A \cap B = D \cap E_{A\cap B}$. Veamos que $D \cap E_{A\cap B} = D \cap E_B$.

Es claro que $D \cap E_{A\cap B} \subseteq D \cap E_B$. Veamos la otra contención . Sea $x \in D \cap E_B$, entonces $x = \alpha y$, $y \in B$, esto es $\alpha^{-1}x = y \in B$. Veremos que $x = \beta z$ donde $z \in A \cap B$ y así tendremos que $x \in E_{A\cap B}$. A es un barril en E , por lo que A es absorbente . Por lo tanto existe $\gamma \in \mathbb{R}^+$ tal que para todo $\delta \in \mathbb{K}$ si $|\delta| \leq \gamma$ entonces $\delta x \in A$, esto es $\delta x = \delta\alpha y \in A$.

i) Si $|\alpha^{-1}| \leq \gamma$ entonces $\alpha^{-1}x = y \in A$ y por lo tanto $x = \alpha y$, donde $y \in A \cap B$ y así $x \in E_{A\cap B}$.

ii) Si $\gamma < |\alpha^{-1}|$ entonces $|\alpha^{-1}|^{-1}\gamma < 1$. Como B es balanceado tenemos que $\alpha\gamma B \subseteq B$, por lo que $\alpha\gamma y \in B$ y así $x = \gamma^{-1}\alpha\gamma y = \beta z$ donde $\beta = \gamma^{-1}$, $z = \alpha\gamma y \in A \cap B$, esto es $x \in E_{A\cap B}$. Por lo tanto $D \cap E_{A\cap B} = D \cap E_B$.

Ahora para todo $n \in \mathbb{N}$, $x_n \notin D$, ya que si existiera $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n_o} \in D$ entonces $x_{n_o} \in D \cap E_B = A \cap B$, esto es $x_{n_o} \in A$. Esto es absurdo por la elección de la sucesión $\{ x_i \}_{i \in \mathbb{N}}$.

D es cerrado y convexo y el punto $\{ x_n \}$ es compacto y convexo , por lo tanto existe una función $g_n \in E'$ tal que $g_n(x_n) \geq c$ y $g_n(x) \leq c$ para todo $x \in D$, donde $c \in \mathbb{R}$. Sea $g_n(x_n) = \lambda$, sea $f_n = \lambda^{-1} g_n$. Claramente $f_n \in E'$ y $f_n(x_n) = 1$, $f_n(x) \leq 1$ para todo $x \in D$.

Sea $F = \{ f_n / n \in \mathbb{N} \} \subseteq E'$. $|f_n(x)| \leq 1$ para todo $x \in D$, por lo tanto $F \subseteq D^{o}$. Por el corolario I.4.3. y utilizando el hecho que D es absorbente tenemos que F es $\sigma(E',E)$-acotado .

Ahora , $\{ |f(x)| / f \in F , x \in S \} = \{ |f_n(a_n x_n)| / n \in \mathbb{N} \}$

$$= \{ a_n / n \in \mathbb{N} \}$$

Por lo tanto $\sup \{ |f(x)| / f \in F , x \in S \} = \sup \{ a_n / n \in \mathbb{N} \}$

$$= \infty$$

Así F no es acotado en S y S es acotado en E , por lo que F no es $\beta(E',E)$-acotado . □

Así tenemos el

1.5. Teorema: Sea E un espacio vectorial topológico , localmente convexo con la propiedad (P) . Entonces los conjuntos $\sigma(E',E)$-acotados coinciden con los conjuntos $\beta(E',E)$-acotados si y sólo si E es localmente barrilado .

1.6.. Proposición: Sean E y F en dualidad . Entonces los conjuntos acotados de E son $\beta(E,F)$-acotados si y sólo si los conjuntos acotados de F son $\beta(F,E)$-acotados .

Demostración: Supongamos que los conjuntos acotados de E son $\beta(E,F)$-acotados . Sea $A \subseteq F$ un conjunto acotado . Sea B un barril en F . Por el teorema de las bipolares tenemos : $B^{oo} = B$.

$B = B^{oo} = (B^{o})^{o}$ es absorbente , entonces B^{o} es $\sigma(E,F)$-acotado y por el teorema de Banach-Mackey es acotado . Así , por hipótesis B^{o} es $\beta(E,F)$-acotado . Por ser A acotado y por la definición de la topología $\beta(E,F)$, tenemos que existe $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tal que $B^{o} \subseteq \lambda A^{o}$ y por lo tanto $A^{oo} \subseteq \lambda B^{oo} = \lambda B$.

Recordemos que los básicos de $\beta(F,E)$ son polares de conjuntos acotados de E , y por lo tanto son cerrados , balanceados , convexos y absorbentes , es decir son barriles en F .

Vimos que para todo barril B en F existe $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tal que $A^{oo} \subseteq \lambda B$ y además $A \subseteq A^{oo}$. Por lo tanto A es $\beta(F,E)$-acotado . □

Como corolario a esto tenemos el siguiente

1.7.<u>Teorema</u>: Sea E un espacio vectorial topológico localmente convexo , Hausdorff que tiene la propiedad (P) . Entonces los conjuntos $\sigma(E,E')$-acotados coinciden con los conjuntos $\beta(E,E')$-acotados si y sólo si E es localmente barrilado .

III.2.<u>CONJUNTOS ACOTADOS DE $\mathcal{L}(E,F)$</u>

El propósito de esta sección es probar lo análogo a lo demostrado en la sección anterior pero en el caso más general de $\mathcal{L}(E,F)$. Estos resultados están basados en [5] . Como siempre , E y F denotarán espacios localmente convexos , Hausdorff .

Sea S una familia de subconjuntos acotados de E tal que $\bigcup_{A \in S} A = E$.

Sea Q la familia de semi-normas que genera le topología de F .

Sea $p_{q,A}: F^{E} \to \mathbb{R}$ donde $q \in Q$ y $A \in S$ tal que $p_{q,A}(u) = \sup \{ q(u(x)) \ / \ x \in A \}$, $u \in F^{E}$.

Como A es acotado , $p_{q,A}$ resulta ser una semi-norma en F^E para todo $q \in Q$ y para todo $A \in S$. Llamaremos S-topología a la topología generada por estas semi-normas en $\mathcal{L}(E,F)$.

<u>Observación</u>: Si $S = \{ \{x\} \ / \ x \in E \}$, $\mathcal{L}(E,F)$ con la topología correspondiente a S es $\mathcal{L}_s(E,F)$. Si $S = \{ A \subseteq E \ / \ A$ es acotado $\}$ lo que obtenemos es $\mathcal{L}_b(E,F)$.

2.1.<u>Proposición</u>: Sea D un barril en E . Entonces D absorbe todo disco barrilado , cerrado y acotado .

<u>Demostración</u>: Sea $E = (E,\tau)$, sea $B \subseteq E$ um disco barrilado , cerrado y acotado . Como B es un disco barrilado , tenemos que el espacio (E_B, p_B) es barrilado . Como anteriormente , la topología τ restringida a E_B es más gruesa que la topología generada por p_B en E_B , esto es :

$$id: (E_B, p_B) \rightarrow (E_B, \tau|_{E_B}) \text{ es continua}$$

Sea D un barril en (E,τ) . Veamos que $D \cap E_B$ es un barril en (E_B, p_B) .

i) D es τ-cerrado , por lo tanto $D \cap E_B$ es cerrado en (E_B, p_B) .

ii) D es balanceado , por lo que para todo $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tal que $|\lambda| \leq 1$ tenemos que $\lambda D \subseteq D$. Por lo tanto $\lambda(D \cap E_B) = \lambda D \cap E_B \subseteq D \cap E_B$, esto es $D \cap E_B$ es balanceado .

iii) D y E_B son convexos , por lo que $D \cap E_B$ es convexo .

iv) Sea $x \in E_B \subseteq E$. Como D es absorbente , existe $\lambda > 0$ tal que para todo $\alpha \in \mathbb{K}$ tal que $|\alpha| \leq \lambda$, $\alpha x \in D$. Por lo tanto para todo $\alpha \in \mathbb{K}$ tal que $|\alpha| \leq \lambda$, $\alpha x \in D \cap E_B$, esto es $D \cap E_B$ es absorbente .

Por lo tanto $D \cap E_B$ es un barril en (E_B, p_B) y como (E_B, p_B) es barrilado tenemos que $D \cap E_B \in \mathfrak{N}_0$ en (E_B, p_B) .

B es acotado en (E_B, p_B) , por lo tanto existe $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tal que

$B \subseteq \lambda(D \cap E_B) = \lambda D \cap E_B$. Además $B \subseteq E_B$, por lo que $B \subseteq \lambda D$, esto es D absorbe a B . □

2.2. Teorema: Si E es localmente barrilado entonces las familias de subconjuntos acotados de $\mathcal{L}(E,F)$ coinciden para toda S-topología , donde S es una familia de subconjuntos acotados de E que cubre a E .

Demostración: Sea $V \in \mathfrak{N}_0$ en F , cerrado , balanceado y convexo .

Sea $H \subseteq \mathcal{L}(E,F)$ puntualmente acotado .

Sea $D = \bigcap \{ f^{-1}(V) \ / \ f \in H \}$. Veamos que D es un barril en E .

i) D es cerrado por ser intersección de conjuntos cerrados .

ii) D es balanceado por ser intersección de conjuntos balanceados .

iii) D es convexo por ser intersección de conjuntos convexos .

iv) Como H es puntualmente acotado , por el corolario I.4.13. , tenemos que para todo $x \in E$, $\{ f(x) \ / \ f \in H \}$ es acotado en F . Por lo tanto existe $\alpha_0 \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tal que $\{ f(x) \ / \ f \in H \} \subseteq \alpha_0 V$.

Sea $x \in E$, $f \in H$. Por lo anterior , $f(x) \in \alpha_0 V$, es decir existe $y \in V$ tal que $f(x) = \alpha_0 y$, esto es $f(\alpha_0^{-1} x) = y \in V$.

Sea $\lambda_0 = |\alpha_0|^{-1}$ y sea $\alpha \in \mathbb{K}$ tal que $|\alpha| \leq \lambda_0$. Veamos que $f(\alpha x) \in V$.

$|\alpha| \leq \lambda_0 = |\alpha_0|^{-1}$, por lo tanto $|\alpha\alpha_0| \leq 1$ y como V es balanceado tenemos que $\alpha\alpha_0 V \subseteq V$. Como $y \in V$, $\alpha\alpha_0 y = \alpha f(x) = f(\alpha x) \in V$. Por la arbitrariedad de f , tenemos que para toda $f \in H$, $f(\alpha x) \in V$, es decir $\alpha x \in D$, con lo que queda demostrado que D es absorbente .

Así D resulta ser un barril en E .

Sea $A \subseteq E$ acotado . Como E es localmente barrilado , existe $B \subseteq E$

disco barrilado , cerrado y acotado tal que $A \subseteq B$. Por la proposición III.2.1. tenemos que D absorbe a B y por lo tanto D absorbe a A . Así D absorbe todo elemento de S .

Sea $s \in S$. Por lo anterior existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tal que $s \subseteq \alpha\ (\bigcap \{f^{-1}(V)\ /\ f \in H\})$. Por lo tanto $f(s) \subseteq \alpha V$ para toda $f \in H$, donde $f(s) = \{ f(x)\ /\ x \in s \}$.

Así , $\{ f(s)\ /\ f \in H \} \subseteq \alpha V$, es decir $\{ f(x)\ /\ x \in s\ ,\ f \in H \}$ es acotado en F .

Los básicos de F son de la forma : $U_q = \{ x \in F\ /\ q(x) < 1 \}$ donde $q \in Q$. Como $\{ f(x)\ /\ x \in s\ ,\ f \in H \}$ es acotado en F , tenemos que para todo $q \in Q$ existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $q(f(x)) \leq |\lambda|$.

Los básicos de $\mathcal{L}(E,F)$ con la S-topología están dados por las semi-normas : $p_{q,s}(f) = \sup \{ q(f(x))\ /\ x \in S \}$, donde $q \in Q$ y $s \in S$. Así , por la arbitrariedad de q tenemos que H es acotado en $\mathcal{L}(E,F)$ con respecto a la S-topología . □

2.3. <u>Teorema</u>: Sean E y F espacios localmente convexos , Hausdorff tal que E cumple con la propiedad (P) introducida en la sección anterior . Entonces son equivalentes :

a) Las familias de subconjuntos acotados son las mismas para toda S-topología de $\mathcal{L}(E,F)$, donde S es una familia de subconjuntos acotados de E que cubre a E .

b) E es localmente barrilado .

<u>Demostración</u>: En vista del teorema III.2.2. sólo falta demostrar b) suponiendo a) con la hipótesis (P) .

Supongamos que E no es localmente barrilado . Entonces existe $B \subseteq E$ balanceado , convexo , cerrado y acotado tal que (E_B, p_B) no es barrilado . Es decir existe un barril A en (E_B,p_B) y $A \notin \mathfrak{N}_0$ en

(E_B, p_B) .

Análogamente a la demostración del teorema III.1.4. podemos escoger $\{ x_n \}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E_B \setminus A$ y $\{ a_n \}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^+$ tales que $\{ x_n \}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{ a_n x_n \}_{n\in\mathbb{N}}$ son convergentes a cero en (E_B, p_B) y $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. Además tenemos que $S = \{ a_n x_n \ / \ n \in \mathbb{N} \}$ es acotado en E .

Siguiendo los pasos de la demostración del teorema III.1.4. tenemos que todo conjunto cerrado y acotado en (E_B, p_B) es cerrado en E .

Por lo tanto tenemos que $A \cap B$ es balanceado , convexo , acotado y cerrado en (E_B, p_B) , por lo que $A \cap B$ es cerrado , balanceado , convexo y acotado en E .

Así existe $D \subseteq E$ un barril tal que $A \cap B = D \cap E_{A\cap B} = D \cap E_B$.

Además , $x_n \notin D$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $f_n \in E'$ tal que $f_n(x_n) = 1$ y $f_n(x) \leq 1$ para todo $x \in D$.

Sea $y_o \in F \setminus \{0\}$. Definimos $g: \mathbb{R} \to F$ tal que $g(z) = zy_o$, $z \in \mathbb{R}$.

i) g es lineal :

$g(az+v) = (az+v)y_o = a(zy_o)+vy_o = ag(z)+g(v)$, $a,z,v \in \mathbb{R}$.

ii) g es continua :

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ acotado , es decir existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tal que $|x| \leq \lambda$ para todo $x \in A$. Sea q una semi-norma de F , sea $x \in A$.

$g(x) = xy_o$, por lo tanto $q(g(x)) = q(xy_o) = |x|q(y_o) \leq \lambda q(y_o)$.

Es decir , $g(A)$ es acotado en F . Por lo tanto g manda acotados en acotados . Sea V un abierto de F y sea $A \subseteq \mathbb{R}$ abierto y acotado . Por lo anterior $g(A)$es acotado en F , es decir existe $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tal que $g(A) \subseteq \lambda V$, esto es $g(\lambda^{-1}A) \subseteq V$ y $\lambda^{-1}A$ es abierto en $\mathbb{R}$. Por lo tanto g es continua .

Ahora para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos : $h_n: E \to F$, $h_n = g \circ f_n$.

$h_n \in \mathcal{L}(E,F)$ por ser la composición de funcionales lineales y continuas . Sea $H = \{ h_n \,/\, n \in \mathbb{N} \}$.

Veremos que H es puntualmente acotado y H no es acotado con respecto a la S-topología .

Sea $C = \{ \alpha y_0 \,/\, \alpha \in [-1,1] \} \subseteq F$. C es acotado en F . Dado $x \in E$, $h_n(x) = (g \circ f_n)(x) = f_n(x) y_0$. Si $x \in D$ entonces $|f_n(x)| \leq 1$ y por lo tanto $h_n(x) \in C$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $x \in D$. Es decir $\{ h_n(x) \,/\, n \in \mathbb{N} \}$ es acotado para todo $x \in D$.

Ahora sea $x \in E$. Como D es absorbente tenemos que existe $\gamma \in \mathbb{R}^+$ tal que para todo $\alpha \in \mathbb{K}$ tal que $|\alpha| \leq \gamma$, $\alpha x \in D$.

$h_n(x) = f_n(x) y_0$ y $\gamma x \in D$. Por lo tanto $|f_n(x)| \leq \gamma^{-1}$. Así $\{ h_n(x) \,/\, n \in \mathbb{N} \} \subseteq \{ \delta y_0 \,/\, \delta \in [-\gamma^{-1}, \gamma^{-1}] \}$. Es decir $\{ h_n \,/\, n \in \mathbb{N} \}$ es acotado en F para todo $x \in E$. Por el corolario I.4.13. H es puntualmente acotado en $\mathcal{L}(E,F)$.

Veamos que si $H \subseteq \mathcal{L}(E,F)$ es acotado con respecto a una S-topología entonces $H(s) \subseteq F$ es acotado para todo $s \in S$. Sea $s \in S$.

$H(s) = \{ f(x) \,/\, f \in H , x \in s \}$. Como H es acotado con respecto a la S-topología tenemos que para todo $q \in Q$ existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tal que $q(f(x)) \leq \lambda$ para todo $f \in H$ y para todo $x \in s$, es decir H(s) es acotado en F para todo $s \in S$.

Finalmente , $S = \{ a_n x_n \,/\, n \in \mathbb{N} \}$ es acotado en E y

$$H(S) = \{ h_n(a_n x_n) \,/\, n \in \mathbb{N} \} = \{ a_n h_n(x_n) \,/\, n \in \mathbb{N} \}$$
$$= \{ a_n y_0 \,/\, n \in \mathbb{N} \}$$

H(S) no es acotado en F ya que $\lim_{n \to \infty} a_n = \infty$.

Así , por lo anterior H no es acotado para la S-topología donde $S = \{ A \subseteq E \,/\, A \text{ es acotado} \}$, es decir H no es acotado en $\mathcal{L}_b(E,F)$. □

III.3. UN RESULTADO SORPRENDENTE

Las demostraciones de los teoremas anteriores resultan largas por como se definió espacio localmente barrilado : para todo $A \subseteq E$ acotado existe $B \subseteq E$ disco cerrado , acotado y barrilado tal que $A \subseteq B$.

El hecho de que B sea cerrado depende de la topología , de aquí que tengamos que estar jugando entre las distantas topologías involucradas y que tengamos que pedir la propiedad (P) antes descrita para poder demostrar lo que queríamos demostrar . ¿ Qué pasa si cambiamos "un poco" la definición de espacio localmente barrilado ? La respuesta a esta pregunta la encontramos en la comunicación personal [10] .

3.1. Definición: Sea E un espacio localmente convexo , Hausdorff . E es localmente barrilado si para todo $A \subseteq E$ acotado existe $B \subseteq E$ disco acotado y barrilado tal que $A \subseteq B$.

Observación: Es claro que la definición "vieja" de espacio localmente barrilado implica la "nueva" definición de espacio localmente barrilado .

3.2. Proposición: Para todo $A \subseteq E$ disco existe $D \subseteq E$ disco absorbente tal que $A = D \cap E_A$.

Demostración: Sea $A \subseteq E$ disco .

Si A es absorbente entonces $A = A \cap E_A$.

Si A no es absorbente entonces existe $x \in E \setminus E_A$.

Sea $B = \{ \lambda x+y \ / \ |\lambda| \leq 1 \ , \ y \in A \} \subseteq E$. Veamos que B es un disco .

i) Sean $\lambda x+y \in B$ y $\lambda' x+y' \in B$, sea $\alpha \in [0,1]$.

$\alpha(\lambda x+y)+(1-\alpha)(\lambda' x+y') = (\alpha\lambda+(1-\alpha)\lambda')x+(\alpha y+(1-\alpha)y')$

Como A es convexo tenemos que $\alpha y+(1-\alpha)y' \in A$.

$|\alpha\lambda+(1-\alpha)\lambda'| \leq |\alpha\lambda|+|(1-\alpha)\lambda'| = \alpha|\lambda|+(1-\alpha)|\lambda'| \leq \alpha+(1-\alpha) = 1$

Por lo tanto $(\alpha\lambda+(1-\alpha)\lambda')x+(\alpha y+(1-\alpha)y') \in B$ y así B resulta ser convexo .

ii) Sea $\lambda' \in \mathbb{K}$ tal que $|\lambda'| \leq 1$, sea $z \in B$, es decir $z = \lambda x+y$, $|\lambda| \leq 1$, $y \in A$. $\lambda' z = (\lambda'\lambda)x+\lambda' y$, $|\lambda\lambda'| = |\lambda||\lambda'| \leq 1$ y $\lambda' y \in A$ por ser A balanceado . Por lo tanto $\lambda' z \in B$, es decir B es balanceado .

Así B resulta ser un disco en E .

Veamos ahora que $A = B \cap E_A$.

i) $A \subseteq B$ y $A \subseteq E_A$, por tanto $A \subseteq B \cap E_A$.

ii) Supongamos que existe $w \in (B \cap E_A) \setminus A$. Si $w \in (B \cap E_A) \setminus A$ entonces en particular $w \in (B \setminus A)$. Por lo tanto $w = \lambda x+y$, $|\lambda| \leq 1$, $y \in A$. Como $w \notin A$, $\lambda \neq 0$, es decir $0 < |\lambda| \leq 1$.

Ahora , $w \in E_A$ por lo tanto $w = \mu z$, donde $z \in A$ y así $\mu z = \lambda x+y$, es decir $\lambda x = \mu z-y$. Como $\mu z \in E_A$ y $y \in A \subseteq E_A$, tenemos que $\lambda x \in E_A$. Supongamos que $\lambda \neq 0$. Como $\lambda x \in E_A$, $x = \lambda^{-1}\lambda x \in E_A$, contradiciendo el hecho que $x \in E \setminus E_A$. Por lo tanto $\lambda = 0$, por lo que $w = y$ y $y \in A$. Esto contradice el hecho que $w \in (B \cap E_A) \setminus A$.

Por lo tanto $B \cap E_A \subseteq A$ y así $B \cap E_A = A$.

Sea $\mathfrak{C} = \{ B \subseteq E \ / \ B$ es un disco y $B \cap E_A = A \}$. Por lo anterior $\mathfrak{C} \neq \emptyset$. Ordenemos parcialmente a $\mathfrak{C}$ con la contención . Sea $\{ B_i \ / \ i \in I \} \subseteq \mathfrak{C}$ una cadena totalmente ordenada . Sea $\mathfrak{B} = \bigcup_{i \in I} B_i$.

Veamos que $\mathfrak{B} \in \mathfrak{C}$.

a) $\mathfrak{B}$ es un disco .

Sean $x, y \in \mathfrak{B}$. Como la cadena está totalmente ordenada , existe $j \in I$ tal que $x \in B_j$ y $y \in B_j$. B_j es convexo , por lo tanto $\alpha x+(1-\alpha)y \in B_j$ para todo $\alpha \in [0,1]$ y por lo tanto $\alpha x+(1-\alpha)y \in \mathfrak{B}$ para todo $\alpha \in [0,1]$, es decir $\mathfrak{B}$ es convexo .

Sea $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $|\lambda| \leq 1$ y sea $x \in \mathfrak{B}$. Existe $j \in I$ tal que $x \in B_j$ y como B_j es balanceado , $\lambda x \in B_j \subseteq \mathfrak{B}$ y así $\mathfrak{B}$ es balanceado . Por lo tanto $\mathfrak{B}$ es un disco .

b) $A = \mathfrak{B} \cap E_A$

Veamos $A \subseteq \mathfrak{B} \cap E_A$.

Sea $x \in A$, entonces $x \in E_A$. Además para todo $i \in I$, $A = B_i \cap E_A$ por lo que $x \in B_i \subseteq \mathfrak{B}$ y así $x \in \mathfrak{B} \cap E_A$.

Inversamente , sea $x \in \mathfrak{B} \cap E_A$. En particular $x \in \mathfrak{B}$ es decir existe $j \in i$ tal que $x \in B_j$. Tenemos que $A = B_j \cap E_A$ y $x \in B_j \cap E_A$, por lo tanto $x \in A$.

Así $A = \mathfrak{B} \cap E_A$ y por lo tanto $\mathfrak{B} \in \mathfrak{C}$.

Por el lema de Zorn $\mathfrak{C}$ tiene elementos maximales . Sea D uno de estos . D es un disco , veamos que D es absorbente .

Supongamos que no lo es . Así existe $x \in E \setminus E_D$. Sea $D_x = \{ \lambda x+y \, / \, |\lambda| \leq 1 , y \in D \}$. Como vimos anteriormente D_x es un disco y $A = D_x \cap E_A$, es decir $D_x \in \mathfrak{C}$. $D \subseteq D_x$, $0 \in D$ por ser D balanceado . Por lo tanto $1x+0 = x \in D_x \setminus D$ ($x \notin D$ pues $x \notin E_D$) Por lo tanto $D \subseteq D_x$ y $D_x \setminus D \neq \emptyset$, contradiciendo la maximalidad de D . Por lo tanto D es absorbente y así D es un disco absorbente tal que $A = D \cap E_A$. $\square$

3.3. Teorema: Sean E y F espacios localmente convexos , Hausdorff . Son equivalentes :

a) E es localmente barrilado .

b) Todo subconjunto de $\mathcal{L}(E,F)$ acotado en $\mathcal{L}_s(E,F)$ es acotado en $\mathcal{L}_b(E,F)$.

Demostración: Supongamos a) y demostremos b) .

La definición "vieja" de espacio localmente barrilado nos implica la "nueva" definición de espacio localmente barrilado , por lo que este resultado es consecuencia del teorema III.2.2.

Inversamente , supongamos que E no es localmente barrilado . Entonces existe $A \subseteq E$ un disco acotado tal que (E_A, p_A) no es barrilado , es decir existe $B \subseteq E_A$ barril tal que $B \notin \mathfrak{N}_0$ en (E_A, p_A) .

Como en las demostraciones anteriores tenemos que existe $\{ x_n \}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E_A \setminus B$ y $\{ \lambda_n \}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^+$ tales que $\{ x_n \}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{ \lambda_n x_n \}_{n\in\mathbb{N}}$ son convergentes a cero en (E_A, p_A) y $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$ y así $S = \{ \lambda_n x_n \ / \ n \in \mathbb{N} \}$ es acotado en E .

A y B son discos en E , por lo tanto $A \cap B$ es un disco en E . Por la proposición III.3.2. existe un disco absorbente $D \subseteq E$ tal que $A \cap B = D \cap E_{A\cap B} = D \cap E_A$.

Ahora tenemos dos casos :

i) D abierto .

El punto $\{ x_n \}$ es cerrado y convexo , D es abierto y convexo . Por lo tanto existe $f_n \in E'$ tal que $f_n(x_n) = 1$ y $f_n(x) \leq 1$ para todo $x \in D$.

ii) D cerrado .

El punto $\{ x_n \}$ es compacto y convexo , D es cerrado y convexo .

Por lo tanto existe $f_n \in E'$ tal que $f_n(x_n) = 1$ y $f_n(x) \le 1$ para todo $x \in D$.

Sea $y_0 \in F \setminus \{0\}$, sea $g_n\colon E \to F$, $g_n(x) = f_n(x)y_0$.

Como anteriormente tenemos que $g_n \in \mathfrak{L}(E,F)$ par todo $n \in \mathbb{N}$. Sea $H = \{ g_n \,/\, n \in \mathbb{N} \}$. Como D es absorbente , tenemos que para todo $x \in E$, $H(x) = \{ g_n(x) \,/\, n \in \mathbb{N} \}$ es acotado en F . Por lo tanto H es acotado en $\mathfrak{L}_s(E,F)$.

$$H(S) = \{ g_n(x) \,/\, x \in S \,,\, n \in \mathbb{N} \} = \{ g_n(\lambda_n x_n) \,/\, n \in \mathbb{N} \}$$
$$= \{ \lambda_n y_0 \,/\, n \in \mathbb{N} \}$$

$y_0 \ne 0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$. Por lo tanto H(S) no es acotado en F y S es acotado en E . Por lo tanto H no es acotado en $\mathfrak{L}_b(E,F)$. $\square$

CAPITULO IV

ESPACIOS DE BANACH-MACKEY

En el capítulo anterior se probó que si un espacio E tiene la propiedad (P) entonces los conjuntos débilmente acotados son fuertemente acotados si y sólo si E es localmente barrilado . Enseguida este resultado se generalizó al espacio $\mathcal{L}(E,F)$.

En este capítulo daremos condiciones necesarias y suficientes para que un espacio sea de Banach-Mackey . En particular probaremos que si todos los conjuntos débilmente acotados son fuertemente acotados y existe alguna funcional lineal que no es continua entonces la propiedad (P) no es válida .

En este capítulo trabajaremos con la definición "vieja" de espacio localmente barrilado .

A menos que se especifique lo contrario , los teoremas de este capítulo son generalizaciones de los teoremas de [8] .

IV.1. VARIAS CARACTERIZACIONES DE UN ESPACIO DE BANACH-MACKEY

1.1. Definición: Sean E y F espacios locamente convexos , Hausdorff tales que $\langle E,F\rangle$. E es un espacio de Banach-Mackey si todo subconjunto $\sigma(E,F)$-acotado es $\beta(E,F)$-acotado .

1.2. Teorema: Sean (E,τ) y F espacios localmente convexos , Hausdorff tales que $\langle E,F\rangle$. Son equivalentes :

(S1) Todos los subconjuntos $\sigma(F,E)$-acotados son $\beta(F,E)$-acotados .

(S2) (E,τ) es un espacio de Banach-Mackey .

(S3) Todo barril en (E,τ) es bornívoro .

(S4) $\beta(F',F)_{|E} = \beta(E,F)$.

(S5) Para todo $B \subseteq E$ balanceado , convexo , acotado y cerrado , la topología de (E_B, p_B) es más fina que la topología $\beta(E,F)$ restringida a E_B .

(S6) Para todo H espacio localmente convexo , Hausdorff y cualquier familia S de conjuntos acotados de E que cubre a E se tiene que $B \subseteq \mathcal{L}(E,H)$ es puntualmente acotado si y sólo si B es acotado en todo elemento de S (es decir B es acotado con respecto a la S-topología) .

Demostración: Veamos (S1) si y sólo si (S2) . Esta es la proposición III.1.6.

Veamos (S2) si y sólo si (S3) .

Supongamos que (E,τ) es un espacio de Banach-Mackey . Sea B un barril en (E,τ) . El conjunto de barriles de E es una base de cero para la topología $\beta(E,F)$. Por lo tanto B es bornívoro en $(E,\beta(E,F))$, es decir B absorbe todo conjunto $\beta(E,F)$-acotado . Como (E,τ) es un espacio de Banach-Mackey tenemos que B absorbe todo conjunto τ-acotado y por lo tanto B es bornívoro en (E,τ) .

Supongamos que todo barril en (E,τ) es bornívoro . $\sigma(E,F) \subseteq \tau$, por lo tanto todo barril de (E,τ) absorbe cualquier conjunto $\sigma(E,F)$-acotado . Todo barril es una vecindad de cero en $(E,\beta(E,F))$ y todo barril absorbe todo $\sigma(E,F)$-acotado . Por lo tanto todo conjunto $\sigma(E,F)$-acotado es $\beta(E,F)$-acotado .

Veamos (S3) si y sólo si (S4) .

$F' = (F,\beta(F,E))'$. Veamos que el conjunto de barriles bornívoros de E es una base para las vecindades de cero en $(F',\beta(F',F))_{|E}$.

Sea U un barril bornívoro en E . Si A es τ-acotado , existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $A \subseteq \lambda U$, por lo tanto $U^{\circ} \subseteq \lambda A^{\circ}$, esto es U° es $\beta(E,F)$-acotado . Y por lo tanto $U = U^{\circ\circ} \in \mathfrak{N}_0$ en $(F',\beta(F',F))_{|E}$.

Ahora sea $U \in \mathfrak{N}_0$ en $(F',\beta(F',F))_{|E}$. Sin pérdida de generalidad , $U = B^{\circ}$ donde B es $\beta(F,E)$-acotado . U es un barril en E por ser la polar de un conjunto acotado . B es $\beta(F,E)$-acotado , por lo tanto $B^{\circ} \in \mathfrak{N}_0$ en $(F',\beta(F',F))_{|E}$, es decir U es bornívoro .

Supongamos $\beta(F',F)_{|E} = \beta(E,F)$. Sea W un barril en (E,τ) . $W \in \mathfrak{N}_0$ en $(E,\beta(E,F))$ y por lo tanto W es bornívoro .

Supongamos que todo barril es bornívoro . Los barriles forman una base de vecindades de cero en $(E,\beta(E,F))$ y los barriles bornívoros forman una base de vecindades de cero en $(F',\beta(F',F))_{|E}$. Por lo tanto si todos los barriles son bornívoros tenemos que $\beta(E,F)=\beta(F',F)_{|E}$.

Veamos (S3) si y sólo si (S5) .

Supongamos (S5) . Sea W un barril en (E,τ) . Por lo tanto $W \in \mathfrak{N}_0$ en $(E,\beta(E,F))$. Sea $B \subseteq E$ balanceado , convexo , acotado y cerrado. Así $W \cap E_B$ es una típica vecindad de cero en $(E_B,\beta(E,F)_{|E_B})$. Por lo tanto $W \cap E_B \in \mathfrak{N}_0$ en (E_B,p_B) .

Como B es acotado en (E_B,p_B) tenemos que existe $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tal que $B \subseteq \lambda(W \cap E_B) = \lambda W \cap E_B$. Como $B \subseteq E_B$ tenemos que $B \subseteq \lambda W$. Por lo tanto W es bornívoro en (E,τ) .

Supongamos que todo barril en (E,τ) es bornívoro . Sea $B \subseteq E$ balanceado , acotado , convexo y cerrado . Sea W un barril en (E,τ) . Así existe $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tal que $B \subseteq \lambda W$.

$W \cap E_B \in \mathfrak{N}_0$ en $(E_B,\beta(E,F)_{|E_B})$. $B \subseteq \lambda E_B = E_B$. Por lo tanto $B \subseteq \lambda(W \cap E_B)$ es decir $\lambda^{-1}B \subseteq W \cap E_B$, por lo tanto $W \cap E_B \in \mathfrak{N}_0$ en

(E_B, p_B) , por lo que la topología de (E_B, p_B) es más fina que la topología $\beta(E,F)_{|E_B}$.

Demostremos (S6) suponiendo (S3) .

Sean H y S como en (S6) .

Sea $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{L}(E,F)$ puntualmente acotado , sea $p \in Q$, sea $B = \{ x \in E \,/\, p(f(x)) \leq 1 \text{ para todo } f \in \mathfrak{B} \}$.

Veamos que B es un barril en E .

i) B es cerrado por ser p continua .

ii) Es fácil ver que B es convexo .

iii) Sea $\alpha \in \mathbb{K}$ tal que $|\alpha| \leq 1$, sea $x \in B$, sea $f \in \mathfrak{B}$.

$p(f(\alpha x)) = |\alpha| p(f(x)) \leq 1$. Por lo tanto B es balanceado .

iv) $\mathfrak{B}$ es puntualmente acotado , por lo tanto $\{ f(x) \,/\, f \in \mathfrak{B} \}$ es acotado en F . Es decir que existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $p(f(x)) \leq \lambda$ para todo $f \in \mathfrak{B}$. Así $p(f(\lambda^{-1}x)) \leq 1$, es decir $\lambda^{-1}x \in B$, por lo tanto B es absorbente .

Así B es un barril en E . Por lo tanto B es bornívoro y en particular B absorbe todo elemento de S .

Sea $A \in S$, entonces existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $A \subseteq \lambda B$, es decir para todo $x \in A$, para todo $f \in \mathfrak{B}$, $p(f(x)) \leq \lambda$.

Por lo tanto $\mathfrak{B}$ es acotado en A .

Demostremos (S1) suponiendo (S6) .

$(E,\sigma(E,F))' = F$. Por hipótesis $B \subseteq \mathfrak{L}(E,\mathbb{K}) = F$ es puntualmente acotado si y sólo si B es acotado en todo elemento de S .

Si $S = \{ A \subseteq E \,/\, A \text{ es } \sigma(E,F)\text{-acotado} \}$, $\mathfrak{L}(E,\mathbb{K})$ con la S-topología es $\mathfrak{L}_b(E,\mathbb{K}) = (F,\beta(F,E))$.

Por lo tanto B es $\sigma(F,E)$-acotado si y sólo si B es $\beta(F,E)$-acotado .

□

IV.2. CONDICIONES SUFICIENTES PARA QUE UN ESPACIO SEA DE BANACH-MACKEY

En esta parte del trabajo daremos condiciones suficientes para que un espacio sea de Banach-Mackey . Más adelante veremos que ninguna de estas condiciones es necesaria .

La siguiente proposición no es una generalización de ningún teorema de [8] .

2.1. Proposición: Si E es semi-reflexivo entonces todo subconjunto $\sigma(E,E')$-acotado es $\beta(E,E')$-acotado .

Demostración: Recordemos que un espacio es semi-reflexivo si $E'' = (E',\beta(E',E))' = E$. Por lo tanto si E es semi-reflexivo , $\beta(E'',E')_{|E} = \beta(E,E')$. Esto es un caso particular del inciso (S4) del teorema VI.1.2. . Por lo tanto todo $\sigma(E,F)$-acotado es $\beta(E,F)$-acotado .

□

2.2. Teorema: Seann E y F espacios localmente convexos , Hausdorff tales que <E,F> . Las siguientes son condiciones suficientes para que E sea de Banach-Mackey :

a) (E,τ) es localmente barrilado .

b) Para toda sucesión $\{ c_n \}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K}$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| < \infty$ y para toda sucesión $\{ x_n \}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$ tal que $\{ x_n \}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente a cero en (E,τ) , la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$ es convergente en (E,τ) .

Demostración: a) Veamos que a) implica el punto (S3) del teorema IV.1.2. , es decir que todo barril en (E,τ) es bornívoro .

Sea W un barril en (E,τ) , sea $B \subseteq E$, B τ-acotado . Sin pérdida de generalidad escogemos B tal que (E_B,p_B) es barrilado .

Ya habíamos visto que bajo estas condiciones tenemos que $W \cap E_B$ es un barril en (E_B,p_B) . Por lo tanto $W \cap E_B \in \mathfrak{N}_0$ en (E_B,p_B) .

Como B es acotado en (E_B,p_B) tenemos que existe $\lambda \in \mathbb{K} \setminus\{0\}$ tal que $B \subseteq \lambda(W \cap E_B)$. Por lo tanto $B \subseteq \lambda W$ y por lo tanto W es bornívoro .

b) Veamos que a partir de b) tenemos el punto (S3) del teorema IV.1.2.

Supongamos que existe un barril W en (E,τ) que no es bornívoro .

Entonces existe $\{ y_n \}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$ τ-acotada tal que $y_n \notin nW$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea $x_n = n^{-1}y_n$. Como $\{ y_n \}_{n\in\mathbb{N}}$ es τ-acotada , $\{ x_n \}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente a cero en (E,τ) .

Como para todo $n \in \mathbb{N}$, $y_n \notin nW$, para todo $n \in \mathbb{N}$ $x_n \notin W$, es decir $\{ x_n \}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq W^c$.

Definimos $T: \ell_1 \to E$, $T(c) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$ donde $c = \{ c_n \}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_1$.

Como $c \in \ell_1$ tenemos que $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| < \infty$ y como $\{ x_n \}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente a cero en (E,τ) , $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n < \infty$. Además como E es Hausdorff el límite de la sucesión $\left\{ \sum_{n=1}^{k} c_n x_n \right\}_{k\in\mathbb{N}}$ es único . Por lo tanto T está bien definida .

Sea $f \in \mathfrak{L}(E,F)$. Como $\{ y_n \}_{n\in\mathbb{N}}$ es τ-acotada y f es τ-continua , $\{ f(y_n) \ / \ n \in \mathbb{N} \}$ es acotado en F . Por lo tanto dada q una semi-norma continua de F , $\sup \{ q(f(y_n)) \ / \ n \in \mathbb{N} \} = M < \infty$.

Tenemos el diagrama :

$$\begin{tikzcd} \ell_1 \arrow[r, "T"] \arrow[dr, dotted, "f\circ T"'] & E \arrow[d, "f"] \\ & F \end{tikzcd}$$

Sean $c = \{ c_i \}_{i\in\mathbb{N}}$, $d = \{ d_i \}_{i\in\mathbb{N}}$ elementos de ℓ_1 .

$$\begin{aligned} q(f(T(c))-f(T(d))) &= q(f(T(c)-T(d)) \\ &= q(f\left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n - \sum_{n=1}^{\infty} d_n x_n \right)) \\ &= q(f\left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}(c_n y_n) - \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}(d_n y_n) \right)) \\ &= q(f\left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}(c_n-d_n)y_n \right) \le M \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}|c_n-d_n| \quad (1) \end{aligned}$$

Demos a ℓ_1 la topología $\sigma(\ell_1,c_0)$ y a F la topología $\sigma(F,E)$.

$\sigma(\ell_1,c_0)$ hace continuas a todas las funciones ϕ_y: $\ell_1 \to \mathbb{K}$,

$\phi_y(x) = \langle x,y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ donde $x = \{ x_n \}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_1$ y

$y = \{ y_n \}_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$.

Sean ahora $c = \{ c_n \}_{n\in\mathbb{N}}$, $d = \{ d_n \}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_1$. Así $c-d \in \ell_1$.

Sea $y = \{ n^{-1} \}_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$.

$\phi_y(c-d) = \langle c-d,y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}|c_n-d_n|$. ϕ_y es continua en $(\ell_1,\sigma(\ell_1,c_0))$

Por lo tanto , por la desigualdad (1) ,

$f\circ T$: $(\ell_1.\sigma(\ell_1,c_0)) \to (F,\sigma(F.E))$ es continua .

Además f: $(E,\sigma(E,F)) \to (F,\sigma(F,E))$ es continua .

Por lo tanto T: $(\ell_1,\sigma(\ell_1,c_0)) \to (E,\sigma(E,F))$ es continua .

Sea $D = \{ c \in \ell_1 \ / \sum_{i=1}^{\infty} |c_i| \le 1 \}$ la bola unitaria en ℓ_1 .

Por el teorema de Banach-Bourbaki [9] , D es $\sigma(\ell_1, c_0)$-compacta . Como T es continua , T(D) es $\sigma(E,F)$-compacto . Por lo tanto T(D) es $\sigma(E,F)$-acotado y cerrado .

Sea $B \subseteq E$ un barril . $B \in \mathfrak{N}_0$ en $(E,\beta(E,F))$. Sin pérdida de generalidad T(D) es cerrado , balanceado y convexo . Por la proposición II.1.2. $(E_{T(D)}, p_{T(D)})$ es un espacio de Banach y por lo tanto es barrilado .

$B \cap E_{T(D)}$ es un barril en $(E_{T(D)}, p_{T(D)})$. Por lo tanto $B \cap E_{T(D)} \in \mathfrak{N}_0$ en $(E_{T(D)}, p_{T(D)})$.

Así existe $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tal que $T(D) \subseteq \alpha(B \cap E_{T(D)})$, es decir $T(D) \subseteq \alpha B$ y por lo tanto T(D) es $\beta(E,F)$-acotado .

Como W es un barril en E , existe $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tal que $T(D) \subseteq \lambda W$.

Ahora $x_n = \sum_{i=1}^{\infty} c_i x_i$ donde $c_i = 0$ si $i \neq n$ y $c_i = 1$ si $i = n$ y además $\sum_{i=1}^{\infty} |c_i| = 1 \leq 1$.

Por lo tanto $x_n \in T(D)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir $\{ x_n \}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq T(D) \subseteq \lambda W$. Por lo que $\{ y_n \}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq n\lambda W$ contradiciendo el hecho que $y \notin nW$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto W es bornívoro .

□

2.3. Definición: Sea E un espacio localmente convexo y Hausdorff .E tiene la propiedad convexa de compactés si para todo $A \subseteq E$ compacto $\overline{\mathrm{conv}(\mathrm{bal}(A))}$, la envolvente convexa balanceada cerrada de A , es compacta .

2.4. Teorema: Si <E,F) y (E,τ) tiene la propiedad convexa de compactés entonces E es un espacio de Banach-Mackey .

Demostración: Veremos que con estas hipótesis se cumple el punto b) del teorema IV.2.3.

Supongamos que (E,τ) tiene la propiedad convexa de compactés .

Sea $\{ x_n \}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$, $\{ c_n \}_{n\in\mathbb{N}}$ tales que $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| < \infty$ y $\{ x_n \}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente a cero en (E,τ) .

Como $\{ x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente a cero en (E,τ) , $A = \{ x_n \}_{n\in\mathbb{N}}$ es compacto , por lo tanto $\overline{\text{conv(bal(A))}}$ es compacto .

Sea $d_n = a^{-1}c_n$ donde $a=\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$. Como $\overline{\text{conv(bal(A))}}$ es balanceado , $0 \in \overline{\text{conv(bal(A))}}$. Sea $\alpha = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} d_n$. $x_n \in \overline{\text{conv(bal(A))}}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $\sum_{n=1}^{m} d_n x_n + \alpha 0$ es una combinación convexa de elementos de $\overline{\text{conv(bal(A))}}$. Por lo que $\sum_{n=1}^{m} d_n x_n \in \overline{\text{conv(bal(A))}}$ para todo $m \in \mathbb{N}$.

Como $\overline{\text{conv(bal(A))}}$ es compacto existe una subsucesión convergente de la sucesión $\left\{ \sum_{n=1}^{m} d_n x_n \right\}_{m\in\mathbb{N}}$.

Por lo tanto existe un límite para la sucesión de sumas parciales

Sea p una semi-norma continua de (E,τ) . Como $\{ x_n \}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente a cero en (E,τ) , $\{ p(x_n) / n \in \mathbb{N} \}$ es acotado en $\mathbb{K}$.

$$p\left(\sum_{n=1}^{m+k} d_n x_n - \sum_{n=1}^{m} d_n x_n \right) = p\left(\sum_{n=m+1}^{m+k} d_n x_n \right)$$
$$\leq \sum_{n=m+1}^{m+k} p(d_n x_n) = \sum_{n=m+1}^{m+k} |d_n| p(x_n) \leq M$$

Por lo tanto la sucesión de sumas parciales es de Cauchy en $\overline{\text{conv(bal(A))}}$ y como el límite de esta sucesión existe , tenemos que $\sum_{n=1}^{\infty} d_n x_n$ es convergente .

Sea $e = \sum_{n=1}^{\infty} d_n x_n$. Por lo tanto $ae = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$ es convergente y así E es un espacio de Banach-Mackey . $\square$

IV.3. EJEMPLOS

Veremos que las condiciones de los teoremas IV.2.2. y IV.2.4. no son necesarias .

3.1. Un espacio barrilado de Banach-Mackey que no es localmente barrilado

En el punto II.4.1.se da un espacio barrilado que no es localmente barrilado . Al ser este espacio barrilado es de Banach-Mackey .

3.2. Un espacio de Banach-Mackey que no es semi-reflexivo

Cualquier espacio de Banach que no sea semi-reflexivo .

3.3. Un espacio de Banach-Mackey que no tiene la propiedad b) del teorema IV.2.2.

Sea $E_0 = c_0$. Escribiremos los elementos como sucesiones dobles .

$x = (x_{11}, x_{12}, \ldots ; x_{21}, x_{22}, \ldots)$

$x \in E_0$ si y sólo si $\lim\limits_{\substack{i\to\infty \\ j\to\infty}} |x_{ij}| = 0$

E_0 es un espacio de Banach con la norma :

$$||x||_0 = \sup \{ |x_{ij}| \ / \ i,j \in \mathbb{N} \}$$

Sea $a_{ik}^{(n)} = k$ para todo $i \leq n$, para toda k .

$a_{ik}^{(n)} = 1$, $i > n$, para todo k .

E_n es el espacio de todas las dobles sucesiones tales que :

$$\lim_{i,k\to\infty} (a_{ik}^{(n)})^{-1} |x_{ik}| = 0$$

con la norma : $||x||_n = \sup \{ (a_{ik}^{(n)})^{-1}|x_{ik}| \,/\, i,k \in \mathbb{N} \}$.

Es fácil ver que la inclusión $E_{n-1} \to E_n$ es continua . Por lo tanto la topología del límite inductivo existe . El límite inductivo (E,τ) es un límite de espacios de Fréchet , por lo que es barrilado y por lo tanto es un espacio de Banach-Mackey .

E' se puede identificar con el espacio de todas las sucesiones dobles U tales que $\sum_{i,k=1}^{\infty} |u_{ik}| a_{ik}^{(n)} < \infty$, $n \in \mathbb{N}$.

Sea $e = (1,1,1,\ldots.)$.

Sea $B = \{ e^{(n)} = \underbrace{(e,e,\ldots,e}_{n\text{-veces}},0,0,\ldots,\ldots) \,/\, n \in \mathbb{N} \}$

Es claro que para cada $n \in \mathbb{N}$, $e^{(n)} \in E_n$, ya que :

$$e^{(n)} = (\underbrace{(1,1,..),\ldots,(1,1,\ldots)}_{n\text{-veces}},0,0,\ldots.) = \{ x_{ik} \}_{i,k\in\mathbb{N}}$$

Por tanto :

Si $i \le n$, $(a_{ik}^{(n)})^{-1}|x_{ik}| = k^{-1}$

Si $i > n$, $(a_{ik}^{(n)})^{-1}|x_{ik}| = 0$.

Por lo tanto $\lim_{i,k\to\infty} (a_{ik}^{(n)})^{-1}|x_{ik}| = 0$.

Pero $e^{(n)} \notin E_{n-1}$ ya que :

Si $i \le n-1$, $(a_{ik}^{(n-1)})^{-1}|x_{ik}| = (k-1)^{-1}$

Si $i = n$, $(a_{ik}^{(n-1)})^{-1}|x_{ik}| = 1$

Si $i > n$, $(a_{ik}^{(n-1)})^{-1}|x_{ik}| = 0$.

Por lo tanto $\lim_{i,k\to\infty} (a_{ik}^{(n-1)})^{-1}|x_{ik}| \ne 0$.

Por lo tanto B no está contenido en ningún E_n .

Ahora sea $U \in E'$.

$U(e^{(n)}) = \sum_{k,i=1}^{\infty} U_{ik}x_{ik}$, $\{ x_{ik} \}_{i,k\in\mathbb{N}} = e^{(n)}$. Por lo tanto ,

$$|U(e^{(n)})| \leq \sum_{k,i=1}^{\infty} |U_{ik}||x_{ik}| \leq \sum_{k,i=1}^{\infty} |U_{ik}| < \infty .$$

Por lo tanto B es $\sigma(E,E')$-acotado .

Sea $B = \{ e^{(n)} / n \in \mathbb{N} \} = \{ y_n \}_{n\in\mathbb{N}}$. Por lo anterior $\{ y_n \}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada en E que no está contenida en ningún E_n .

Supongamos que el espacio (E,τ) cumple con la propiedad b) del teorema IV.2.2.

Como en la prueba del teorema IV.2.2. tenemos que T(D) es $\sigma(E,E')$-compacto donde $T: \ell_1 \to E$, $T(c) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n$, $c = \{ c_n \}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{ y_n \}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq T(D)$.

Por el corolario II.3.19. , existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $T(D) \subseteq E_m$, contradiciendo el hecho que B no está contenido en ningún E_n.

IV.4. LA PROPIEDAD (P)

Por último estudiaremos la relación que guardan los espacios de Banach-Mackey con la propiedad (P) . El resultado que probaremos a continuación nos muestra cúan fuerte resulta ser esta propiedad .

Recordemos la propiedad (P):

(P): Para todo $B \subseteq E$ balanceado , convexo , cerrado , y acotado existe $W \subseteq E$ barril tal que $B = W \cap E_B$.

4.1. Teorema: Sean <E,F> , tal que E es un espacio de Banach-Mackey que cumple la propiedad (P) . Entonces toda $f: E \to F$ lineal es continua .

Demostración: Sea $B \subseteq E$ balanceado , convexo , acotado y cerrado .

Por el punto (S5) del teorema IV.1.2. tenemos que $\beta(E,F)_{|E_B} \subseteq \tau_B$ donde τ_B denota la topología del espacio (E_B, p_B) .

Sabemos que existe $W \subseteq E$ barril tal que $B = W \cap E_B$.

Sea $V \in \mathfrak{N}_0$ en (E_B, p_B) . Por lo tanto $B \subseteq \alpha V$ para alguna $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$

Por lo tanto $W \cap E_B \subseteq \alpha V$, es decir $\alpha^{-1}(W \cap E_B) \subseteq V$.

$W \cap E_B$ es una típica vecindad de cero de $\beta(E,F)_{|E_B}$. Por lo tanto $\tau_B \subseteq \beta(E,F)_{|E_B}$, y así $\tau_B = \beta(E,F)_{|E_B}$.

Supongamos que existe $f: E \to F$ lineal y discontinua , es decir $\{ x_n \}_{m\in\mathbb{N}} \subseteq E$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ en E y $\{ f(x_n) \}_{n\in\mathbb{N}}$ no es convergente a cero en F y $<\{ x_n \}_{n\in\mathbb{N}}>$, el subespacio generado por $\{ x_n \}_{n\in\mathbb{N}}$ es de dimensión infinita . Sea $D = \{ x_n \}_{n\in\mathbb{N}}$. Por lo anterior D es acotado y por lo tanto D es $\sigma(E,F)$-acotado , así, por hipótesis , D es $\beta(E,F)$-acotado .

Sea $\{ y_n \}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D$ una sucesión de elementos linealmente independientes . Sea $z_n = n^{-1}y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como D es $\beta(E,F)$-acotado , $\{ z_n \}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente a cero en $(E,\beta(E,F))$.

Sea A la envolvente convexa balanceada y cerrada de $\{ z_n \}_{n\in\mathbb{N}}$. Como $\{ z_n \}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente a cero en $(E,\beta(E,F))$, A es precompacto en $\beta(E,F)$.

Pero por lo anterior , $\tau_A = \beta(E,F)_{|E_A}$. Como $A \subseteq E_A$, tenemos que A es precompacto en (E_A,p_A) que es un espacio normado . Así (E_A,p_A) es un espacio localmente compacto y dimensionalmente infinito .

Veamos que si A es precompacto en (E_A,p_A) entonces (E_A,p_A) es localmente compacto .

Sea $x \in E_A$, sea $p_A(x) = \alpha$

$$x \in \{ y \in E_A \,/\, p_A(y) \leq \alpha \} = \alpha A \in \mathfrak{N}_0 \text{ en } (E_A,p_A)$$

$\alpha A \subseteq \alpha\bar{A}$ y $\alpha\bar{A}$ es compacto por ser A precompacto . Como αA es cerrado y $\alpha\bar{A}$ es compacto , tenemos que αA es compacto .

Por lo tanto , para todo $x \in E_A$ existe $V \in \mathcal{N}_0$ en (E_A,p_A) compacta tal que $x \in V$. Por lo tanto (E_A,p_A) es un espacio normado , localmente compato .

Por el teorema de Riesz de dimensión finita , (E_A,p_A) es de dimensión finita .

Por lo tanto toda $f: E \to F$ lineal es continua . $\square$

BIBLIOGRAFIA

[1] BOSCH, C., FERNANDEZ, M., Análisis funcional I, MIM 21.

[2] BOSCH, C., GILSDORFF, T. E., KUCERA. J., A necessary and sufficient condition for weakly bounded sets to be strongly bounded, Anales del Instituto de Matemáticas, Volumen 28.

[3] BOSCH, C., KUCERA, J., MCKENNON, K., Fast complete locally convex linear topological spaces, Internat. J. Math.& Math. Sci., Vol.9, No.4, 1986, 791-796.

[4] CHOQUET, G. , Lectures on analysis, Vols. I, II, W.A. Benjamin Inc., 1969.

[5] GILSDORFF, T., E., Bounded sets in £(E,F), Internat. J. Math.& Math. Sci., Vol.12, No.3, 1989.

[6] HORVATH, J., Topological vector spaces and distributions, Addison-Wesley, 1966.

[7] JARCHOW, H., Locally convex spaces, TEUBNER, B.G., Stuttgart, 1981.

[8] JING HUI, Q., McKENNON, K., Banach-Mackey Spaces, Internat.J. Math.&Math.Sci., Vol.14, No2, 1991, 215-220.

[9] KÖTHE, G., Topological Vector Spaces I, II, Springer-Verlag, 1979.

[10] KUCERA, J., Comunicación personal, 1992.

[11] KUCERA, J., McKENNON, K., Köthe's example of an incomplete LB-Space, Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 93, No.1, January 1985.

[12] MAKAROV, B.M., On pathological properties of inductive limits of Banach spaces, (Russian), Uspehi Mat. Nauk 18:3, 1963, 171-178.

[13] SCHAEFER, H.H., Topological Vector Spaces, Springer-Verlag, 1971.

[14] VO-KHAC KHOAN, Distributions, Analyse de Fourier, Opérateurs aux derivées partielles, Tome 1, Librairie Vuibert, 1972.

[15] WILANSKI, A., Modern Methods in Topological Vector Spaces, McGraw Hill, 1978.