

7
2 ej.



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

UN MODELO PARA EXPLICAR EL ESPECTRO
DE RADIACION BREMSSTRAHLUNG EN
UN ACELERADOR DE IONES
POSITIVOS

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:
LICENCIADO EN FISICA
P R E S E N T A :
MAURICIO CASTAÑEDA RODRIGUEZ

MEXICO, D. F.

1992

PALLA DEL ORIGEN



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

I N D I C E

**"UN MODELO PARA DESCRIBIR EL ESPECTRO DE RADIACION
BREMSSTRAHLUNG EN UN ACELERADOR VAN DE GRAAFF DE IONES
POSITIVOS"**

C A P I T U L O I

**"ASPECTOS GENERALES DE UN ACELERADOR DE PARTICULAS
DE BAJAS ENERGIAS".....1-42**

- I.1 CARACTERISTICAS IMPORTANTES DE UN ACELERADOR DE
PARTICULAS**
- I.2 ESPECTRO DE RADIACION BREMSSTRAHLUNG PRODUCIDO
POR UN TUBO DE RAYOS X**
- I.3 PRINCIPALES EQUIPOS ASOCIADOS CON UN LABORATORIO
VAN DE GRAAFF DE IONES POSITIVOS**
 - I.3.1 EL ACELERADOS VAN DE GRAAFF**
 - I.3.2 PRINCIPALES EQUIPOS ASOCIADOS CON UN
LABORATORIO VAN DE GRAAFF DE IONES POSITIVOS**

C A P I T U L O II

**ESPECTROS DE FOTONES DE ENERGIA CONTINUA PRODUCIDOS POR
ACELERADORES VAN DE GRAAFF DE IONES POSITIVOS.....43-72**

- II.1 EL ESPECTRO DE FOTONES CON DETECTOR DE GERMANIO
HIPERPURO**
- II.2 CARACTERISTICAS SOBRESALIENTES DE LOS ESPECTROS
DE FOTONES MEDIDOS CON ACELERADOR DE 700 KeV del IFUNAM**
- II.3 UN MODELO PARA DESCRIBIR EL ESPECTRO DE
BREMSSTRAHLUNG DEL ACELERADOR VAN DE GRAAFF DE 700 KeV**

C A P I T U L O I I I

ANALISIS DE LOS ESPECTROS DE BREMSSTRAHLUNG Y
CONCLUSIONES.....73-89

III.1. DISCUSION SOBRE EL ANALISIS DE ESPECTROS
BREMSSTRAHLUNG USANDO EL MODELO PROPUESTO.RESULTADOS,
APLICACIONES Y CONCLUSIONES.

III.2 CONCLUSIONES Y APLICACIONES DEL MODELO

B I B L I O G R A F I A90-91

A P E N D I C E A

DEDUCCION DE LA LEY DE KRAMERS.....I-V

A P E N D I C E B

DESCRIPCION DEL CIRCUITO MULTIPLICADOR DE VOLTAJE
COCKCROFT-WALTON.....VI-XII

A P E N D I C E C

CALCULO DE LA CAPACIDAD DE LA TERMINAL DE ALTO
VOLTAJE DE UN ACELERADOR VAN DE GRAAFF.....XIII-XV

A P E N D I C E D

RELACION ENTRE LA RIGIDEZ MAGNETICA DE UN ELECTROIMAN
Y LA ENERGIA CINETICA DE UN HAZ EN EL CAMPO
MAGNETICO.....XVI-XVII

A P E N D I C E E

EXPLICACION DEL PROGRAMA
Y DEDUCCION DEL SISTEMA II.24.....XVIII-XXX

C A P I T U L O I

"ASPECTOS GENERALES DE UN LABORATORIO DE UN ACELERADOR DE PARTICULAS DE BAJAS ENERGIAS"

I.1 CARACTERISTICAS IMPORTANTES DE UN ACELERADOR DE PARTICULAS

La emisión de fotones con un espectro continuo de energía, se produce cuando se encuentra en operación un acelerador del tipo Van de Graaff (aunque también esto ocurre en otro tipo de aceleradores electrostáticos) de iones positivos. La explicación de este espectro es el principal objetivo de esta tesis.

Con el fin de que este trabajo sea más completo, se esboza una visión panorámica sobre aceleradores de partículas y en particular, se describe, con algún detalle el principio de operación de los aceleradores Van de Graaff (VDG) y de los equipos cruciales asociados a éste.

Los primeros aceleradores de partículas se construyeron con el fin de estudiar experimentalmente la estructura del núcleo atómico, por medio de transmutaciones o reacciones nucleares, razón por la que al hablar de un acelerador se asociaba automáticamente con un laboratorio de física nuclear. La importancia de estos modernos instrumentos en la física nuclear es similar a la del telescopio en astronomía o al microscopio en bacteriología.

ref.a

Actualmente el uso de los aceleradores se ha extendido a otras áreas de investigación básica como en la física atómica ("el mundo de los electrones") y en las partículas elementales. El uso de los aceleradores en aplicaciones tecnológicas es muy variado y uno de los más difundidos es en la industria de la microelectrónica, la cual es la responsable de la reciente producción de los circuitos integrados microprocesadores, etc. El uso de los aceleradores en Ciencia de Materiales ha sido, tanto para modificarlos por la técnica de "implantación de iones" como para su caracterización elemental a través de Técnicas de Análisis de Origen Nuclear (retrodispersión de iones, reacciones nucleares, fluorescencia de rayos X etc.) ref.b-f

Este instrumento se define como acelerador debido a que impulsa proyectiles que originalmente tienen velocidad (promedio) cero, a una velocidad final que en ocasiones llega a ser muy cercana a la velocidad de la luz. Las partículas aceleradas son, por ejemplo. protones, electrones, deuterones o átomos ionizados. El principio de aceleración se basa en la interacción de campos eléctricos producidos por el potencial actuando sobre la carga eléctrica de las partículas. Por esta razón no pueden acelerarse partículas neutras.

Un diagrama sobresimplificado de un acelerador de partículas se muestra esquemáticamente en la figura I-1, cuyos elementos básicos son:

- 1) Fuente de voltaje de corriente directa (CD)

FIGURA 1-1

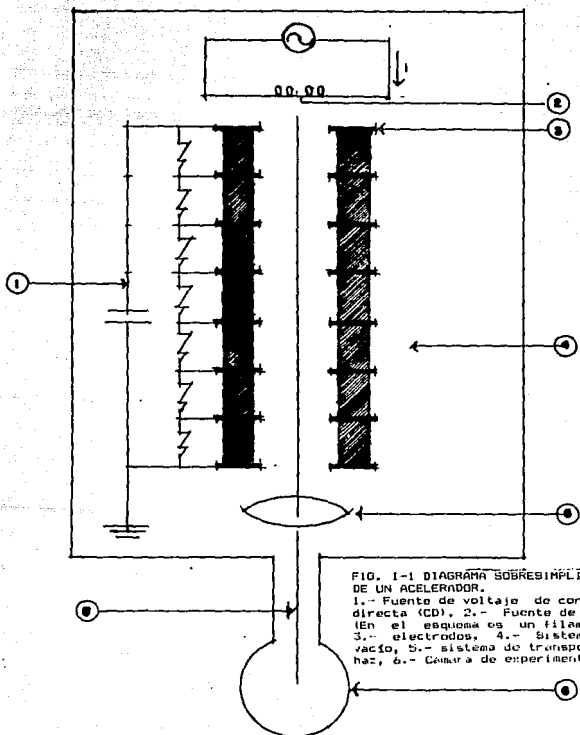


FIG. 1-1 DIAGRAMA SOBRESIMPLIFICADO DE UN ACELERADOR.
 1.- Fuente de voltaje de corriente directa (CD), 2.- Fuente de iones (En el esquema es un filamento), 3.- electrodos, 4.- Sistema de vacío, 5.- sistema de transporte de haz, 6.- Cámara de experimentación.

- 2) Fuente de iones (En el esquema es un filamento)
- 3) Electrodo (campo eléctrico)
- 4) Sistema de vacío
- 5) Sistema de transporte de haz
- 6) Cámara de experimentación

Un tubo de rayos X y el cinescopio de una TV doméstica y circuitos asociados, según la definición anterior son aceleradores de partículas. Un diagrama de un tubo de rayos X se muestra en la figura I-2.

Los parámetros más importantes que caracterizan a un acelerador son: el flujo de partículas y su energía cinética. El número de partículas que produce un acelerador es relativamente fácil de medir ya que el haz de partículas da origen a una corriente eléctrica y su intensidad se expresa en amperios o submúltiplos de esta unidad. Un acelerador que produce un haz de un microamperio, tiene un flujo de 10^{13} partículas/seg lo cual da idea del gran número de partículas producidas por estos instrumentos. La energía cinética T de las partículas con $q=|ze|$ ($z=1,2,3,4\dots$), está relacionada con el voltaje V de aceleración por la relación:

$$T = V \cdot q \quad (I.1)$$

Como se sabe, las unidades que se usan para la energía en física son julios o ergios. Sin embargo, para cuantificar la energía de los proyectiles acelerados se acostumbra usar unidades de electrón-volt (eV) o sus múltiplos: el KeV = 1000 eV, el MeV = 1000 000 eV, el TeV = 10^{12} eV etc. Esto es por razones históricas y debido a la relación simple de la

FIGURA I-2

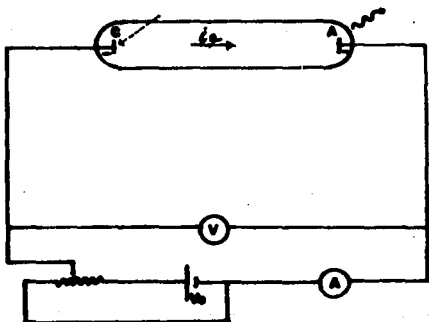


FIG. I-2 DIAGRAMA DE UN TUBO DE RAYOS X

C: Cátodo

A: Anodo

 i^e : Corriente de electrones

B: Radiación Bremsstrahlung

ecuación anterior, en la cual la energía es numéricamente igual al voltaje. De acuerdo con la ecuación I.1, una energía de 1 eV es el cambio en energía cinética que experimenta una partícula con carga en valor absoluto igual a la del electrón, después de pasar por una diferencia de potencial de un volt.

Desde el punto de vista de la mecánica clásica, la energía cinética T de una partícula está relacionada con la masa en reposo " m_0 " y la velocidad "v" por la siguiente relación:

$$T = m_0 v^2 / 2 \quad (I.2)$$

Esta ecuación es un caso particular de la relación general de la mecánica relativista dada por:

$$T = \sqrt{m^2 c^2 - m_0^2 c^2} \quad \text{o bien:}$$

$$T = m_0 c^2 \left(\frac{1}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} - 1 \right), \quad (I.3)$$

donde c es la velocidad de la luz en el vacío.

Una importante conclusión que se puede obtener de observar las ecuaciones I.1 y I.2 es que el incremento de energía que obtiene una partícula acelerada por un potencial V, no depende de su masa, sino solo de su carga. Así, proyectiles de diferentes masas que tengan la misma energía, tendrán distintas velocidades. Para hacer una ilustración, supóngase que se aplica una diferencia de potencial de V=100 KV para acelerar electrones protones y partículas alfa. Las velocidades relativistas de estos proyectiles serán:

Electrones: $v = 1.65 \times 10^8$ m/s = 55 %c

Protones: $v = 4.38 \times 10^6$ m/s = 1.5 %c

Part. alfa: $v = 2.19 \times 10^6$ m/s = 0.7 %c

En la fig. I-3 se grafica la velocidad en función de la energía para diferentes masas. Actualmente existen "super aceleradores" que pueden acelerar partículas con energías de TeV, sin embargo, de acuerdo con la relación I.3 la velocidad de éstas no puede ser igual a la velocidad c de la luz, por lo que c es una "velocidad asintótica" para partículas con masa aparente finita.

Un criterio para calcular v en función de T , usando la aproximación clásica es el siguiente:

$$T/m_0c^2 < 1 \quad (\approx 10)$$

Cuando se trata de un acelerador de partículas cargadas positivamente, el filamento se reemplaza por una fuente de iones positivos y se invierte la polaridad en la fuente de voltaje.

Los ingleses Cockcroft y Walton, en 1932, fueron los pioneros en construir un acelerador de iones positivos, con el que generaron un haz de protones de bajas energías y lo usaron para bombardear isótopos de litio ${}^7\text{Li}$. El resultado de este bombardeo fue la primera transmutación nuclear hecha totalmente por el hombre. Por ello, Cockcroft y Walton recibieron el premio Nobel de Física en 1933. Actualmente, este experimento se puede reproducir y llevar a cabo en tres horas y es uno de los experimentos didácticos en el curso de

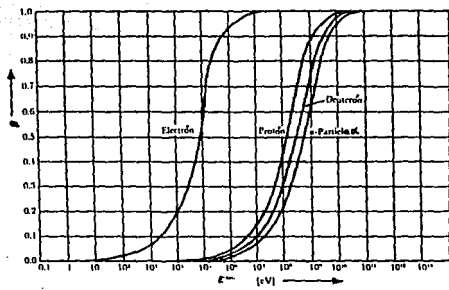


FIG. 1-3 VARIACION DE LA VELOCIDAD (v/c) CON LA ENERGIA CINETICA PARA DIFERENTES MASAS (PARTICULAS) EN UNA ESCALA SEMILOGARITMICA

Física Nuclear Experimental, en la Facultad de Ciencias de la U.N.A.M.

La reacción nuclear observada en este experimento fué:



donde Q_m es la energía debido a la diferencia de masas antes y después de la reacción, ya que los núcleos blancos se pueden considerar en reposo

La energía inicial antes de la colisión, es la energía cinética de los protones y ésta fué de 150 KeV. La energía después de la colisión fué de cerca de 16 MeV, repartidos en la energía cinética de las dos partículas alfa, por lo que cada una de éstas tuvo aproximadamente 8 MeV.

Aparentemente, en esta reacción se está creando energía, sin embargo, la gran energía de las partículas alfa se explica usando el principio de la conservación masa-energía de Einstein: $E = mc^2$. En esta reacción la Q_m es positiva y con valor de 16 MeV aproximadamente.

El sueño de los alquimistas de la Edad Media de convertir un elemento en otro, se había logrado usando los aceleradores de partículas.

Debido a la importancia histórica del éxito de Cockcroft y Walton para generar un alto voltaje de corriente directa a partir de un voltaje alterno de baja tensión, en el apéndice A se presentan con algún detalle los principios de este método.

En la década de los 30, se inventaron otros tipos de aceleradores tales como el ciclotrón, el Van de Graaff (VDG) y los aceleradores lineales.

Desde la construcción de los primeros aceleradores, hubo interés en desarrollarlos cada vez de mayor energía. En la fig. I-4 se intenta condensar la historia del crecimiento de la energía de los aceleradores en el tiempo.

El costo de un acelerador, sus dimensiones físicas, complejidad etc. están relacionados con la energía. En general, los aceleradores son instrumentos complejos y relativamente caros aunque su concepción íntegra es la del esquema de la fig. I-1.

El Instituto de Física tiene tres aceleradores del tipo VDG. con voltajes máximos de: 0.7MeV, 2MeV y 5.5 MeV cuyas fotografías corresponden a las figuras I-5, I-6 y I-7 respectivamente.

El acelerador de 2MeV es un acelerador vertical de electrones con una longitud de 2.10m, un diámetro exterior de su columna de 38 cm, un peso de 2 ton. y su costo estimado es de 400 000 dls. Los otros dos son de iones positivos: el de 0.7 MeV es un acelerador horizontal con una longitud 1.23m, de un diámetro exterior de 52cm y un peso de 500 Kg, su costo estimado es de 100 000 dls. El de 5.5 MeV es un acelerador vertical de 8m de altura, 40 ton de peso y 1m de diámetro, su costo es de 1.5 millones de dls. Un acelerador lineal de 800 MeV de protones, como el que existe en el Laboratorio Nacional de Los Alamos, Nuevo México en

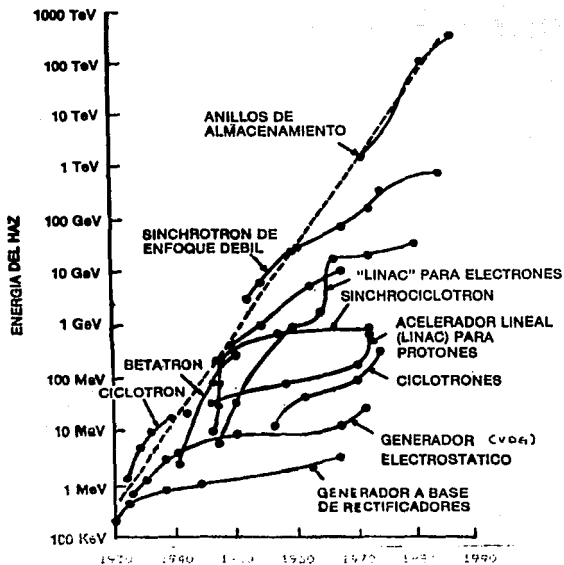


FIG. 1-1 DESARROLLO HISTORICO DE LA ENERGIA DE LOS ACELERADORES

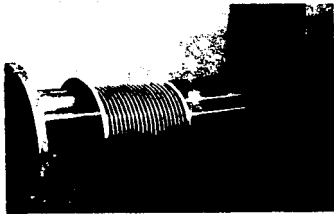


FIG. I-5 FOTOGRAFIA DEL ACELERADOR HORIZONTAL DE 0.7 MeV, DE 1.23 M. DE LONGITUD, DIAMETRO DE 52 CMS. Y PESO DE 500 KG DEL IFUNAH USADO EN ESTE TRABAJO.

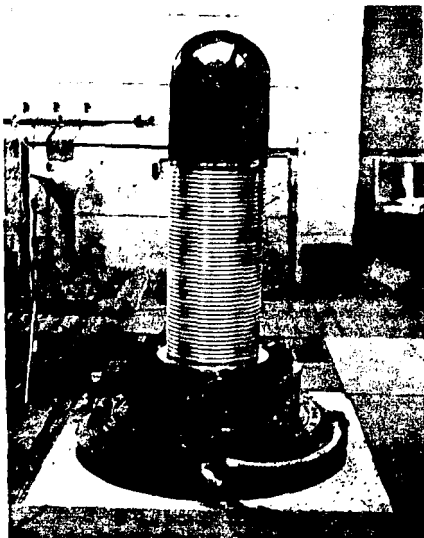


FIG. 1-6 FOTOGRAFIA DEL ACELERADOR VERTICAL DE 2 MeV. DE 2.10 M. DE ALTURA. DE 78 CMS. DE DIAMETRO Y DOS TONELADAS DE PESO DE IFUNAM.



FIG. 1-7 FOTOGRAFIA DEL ACELERADOR VERTICAL DE 5.5 MeV. DE 9 M. DE ALTURA. 1M. DE DIAMETRO, CLAPENTA TONELADA DE PESO DE IFUNAM.

EUA, al cual se denomina "fábrica de mesones"; tiene una longitud de aproximadamente 1 Km y su costo es de más de 1000 millones de dls. El proyecto de la construcción del acelerador de mayor energía del mundo, llamado "Super Ciclotrón Colisionador" se está construyendo en el Estado de Texas, EUA y tendrá una circunferencia de 157 Km y su costo estimado es de 9 000 millones de dls.

Como ya se ha mencionado, esta tesis está relacionada con aceleradores de partículas tipo VDG.. Cabe decir que este tipo de aceleradores son los que más se usaron para el estudio del núcleo atómico, especialmente para medir secciones nucleares y en la investigación de la llamada estructura nuclear que consiste en la determinación experimental de los niveles de energía de excitación de un núcleo y de otros "números cuánticos" que los caracterizan, tales como el momento angular y la paridad. Puede decirse que mas del 60% del conocimiento en este campo se generó a partir de dichos aceleradores. La razón por la cual los VDG eran preferidos por los científicos, se debía a que podían obtener haces de partículas monoenergéticas muy estables, cuya energía e intensidad podían variarse fácilmente. Además el costo de mantenimiento de estos aparatos era bajo con respecto a otros aceleradores.

Una breve descripción sobre la operación de estos aceleradores se presenta en la sección I.3.1

I.2 ESPECTRO DE RADIACION BREMSSTRAHLUNG PRODUCIDO POR UN TUBO DE RAYOS X

El problema que se plantea resolver en la tesis, está relacionado indirectamente con los tubos de rayos X, por lo que en esta sección se presentan algunos de los aspectos relevantes de dichos aparatos.

Existe gran variedad de tubos de rayos X y hay millares de ellos funcionando, por lo que una gran proporción de la población sabe de su existencia.

El uso de estos aparatos es muy amplio en el campo de la medicina y odontología, sobre todo para el diagnóstico de enfermedades a través de placas radiográficas y fluoroscopia que se obtienen con ellos. Estos aparatos también tienen gran uso en la industria para obtener radiografías con variados propósitos, siendo uno de ellos el control de calidad de las soldaduras, también se usan para detectar fracturas en metales, etc. Los tubos de rayos X son usados extensivamente también en investigación en el área de Ciencia de Materiales, (Estado Sólido, Materia Condensada, Cristalografía etc) para la caracterización de estructuras cristalinas de algunos sólidos y también para el análisis de los elementos que constituyen una muestra, por la técnica de fluorescencia de rayos X. ref.1

Un diagrama esquemático de un tubo de rayos X se muestra en la figura I-2. Como ya se había mencionado, un tubo de R-X es un acelerador de partículas muy especial en el cual las partículas aceleradas son electrones emitidos

por un filamento incandescente que se localiza en el cátodo. Los electrones son acelerados por un potencial eléctrico V y dirigidos hacia un blanco, llamado ánodo, contra el que chocan con una energía cinética $T = Ve$. La desaceleración brusca que tienen los electrones al chocar contra el ánodo, debido a que los electrones tienen una masa muy pequeña, es un porcentaje muy bajo de su energía T ($\approx 1\%$) que se convierte en fotones o rayos X conocida como radiación de frenado o "bremsstrahlung" (del idioma alemán). La mayor parte de la energía T ($\approx 99\%$) se disipa en el ánodo en forma de calor.

Para que los electrones puedan viajar desde el cátodo al ánodo, estos elementos están contenidos dentro de un tubo o botella de vidrio evacuados a un vacío permanente de 10^{-6} torr, aproximadamente.

Para muchas aplicaciones, el voltaje V puede ser un voltaje alterno, es decir que varía con el tiempo " t ", en forma senoidal: $V = V_0 \sin(\omega t)$, donde $\omega = 2\pi f$, siendo f la frecuencia de generación del voltaje (60 Hz). Sin embargo en la práctica es más eficiente rectificar el voltaje, es decir, diseñar fuentes de alto voltaje de corriente directa y uno de estos métodos es precisamente el generador tipo Cockcroft-Walton descrito en el apéndice A. En lo que concierne a esta tesis se considerará que V tiene un valor constante en el tiempo.

La geometría de los tubos de rayos X, el voltaje V , la intensidad de corriente de los electrones, varía según el

tipo de uso de este aparato. Así, por ejemplo, para usos de odontología V es de unos 15KV, mientras que para diagnóstico médico $50 < V < 200$ KV. En aplicaciones de radioterapia se requiere de fotones de alta energía (≤ 16 MeV) los cuales son generados normalmente por los aceleradores lineales de electrones.ref.2

A los fotones emitidos por un tubo de rayos X se les considera como radiación ionizante por lo que una persona o ser biológico expuestos a esta radiación puede sufrir daños.

El espectro de energía bremsstrahlung de un tubo de rayos X se puede obtener a partir de principios básicos y fue Kramer quien dedujo teóricamente la ecuación que lleva su nombre, la cual describe satisfactoriamente los espectros experimentales.

La Ley de Kramer relaciona la intensidad I de los fotones emitidos de energía E con los parámetros relevantes del tubo de rayos X: el voltaje de aceleración V , la corriente i de los electrones y Z que es el número atómico del ánodo. La relación de Kramer es:

$$I(E) = KZi E(T-E), \quad (I.4)$$

donde K es una constante de proporcionalidad y $T=Ve$ es la energía cinética con la que cada uno de los electrones choca contra el ánodo. Los principios que usó Kramer para deducir su ecuación se delinearán en el apéndice B.

Las siguientes observaciones pueden hacerse de la ecuación I.4:

a) La energía de los fotones E es continua y puede variar desde cero hasta un valor máximo $E=T=Ve$. La energía de los fotones E no puede ser mayor que T debido a que si $E>T$, $I(E)<0$, lo cual carece de significado físico. De hecho existe un argumento físico para demostrar que el frenado de electrones de energía T no puede generar fotones con energía mayor que este valor. El proceso de emisión de fotones bremsstrahlung puede representarse gráficamente en la fig. I-8 donde T' es la energía del electrón después de haber sufrido una desaceleración y E es la energía del fotón emitido por este proceso: Usando el principio de conservación de energía:

$$T = E + T', \text{ por lo que } E=(T-T')>0$$

b) La dependencia de I como función de E es parabólica y con un valor máximo para $E=T/2$ y con valor nulo para $E=0$ y $E=T$ (ver fig. I-9)

c) Debido a que tanto i como Z son factores multiplicativos en la ecuación I.4, la dependencia parabólica es independiente del material del cual está hecho el ánodo (Z) y de la corriente i de los electrones.

d) Debido a la propiedad de $I(E=T=Ve) = 0$, de la medida experimental del espectro de energía de rayos X y del punto final de éste puede deducirse el voltaje V de operación del tubo. Esto se logra más fácilmente si se grafica la función $I(E)/E = f(E)$ ya que $f(E)$ es la ecuación de una recta que intercepta el eje E en el punto $E = T = V \cdot e$. El problema de determinar el punto final del espectro bremsstrahlung es

FIGURA I-B

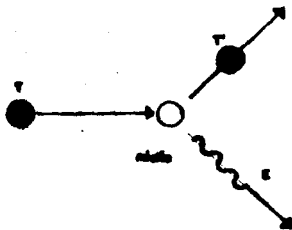


FIG. I-B EMISION DE UN FOTON BREMSSTRAHLUNG (DE ENERGIA E) DESPUES DE QUE UN ELECTRON (DE ENERGIA T) CHOCA CONTRA UN NUCLEO Y QUEDA CON ENERGIA T'

similar al de determinar la Q del decaimiento β^{\pm} de ciertos núcleos que implica conocer el punto final del espectro de energía de emisión β^{\pm} . Esto también se logra más fácilmente linealizando el espectro experimental.ref.3 (Ver fig.I-10)

FIGURA I-9,
I-10

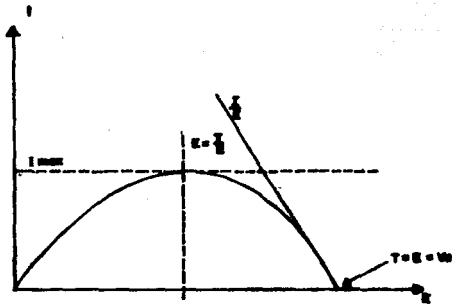


FIG. I-9 DEPENDENCIA PARABOLICA DE I CONTRA E SEGUN LA RELACION DE KRAMERS
FIG. I-10 DETERMINACION DEL PUNTO FINAL LINEALIZANDO LA COLA DEL ESPECTRO DE ENERGIA

I.3 PRINCIPALES EQUIPOS ASOCIADOS CON UN LABORATORIO VAN DE GRAAFF DE IONES POSITIVOS.

Un acelerador conceptualmente es una fuente de partículas monoenergéticas que se usan para bombardear átomos y a los núcleos atómicos (blancos), con diferentes propósitos tales como producir y estudiar: a) Reacciones nucleares, b) Reacciones atómicas, c) Implantación de iones en sólidos, d) Caracterización elemental de sólidos a través de técnicas analíticas de origen nuclear, etc. El haz normalmente se puede enfocar en el blanco de un área igual o menor a 1mm^2 .

Para poder usar un acelerador con estos propósitos se requiere de otros equipos periféricos asociados con él.

El conjunto acelerador y periféricos asociados constituye un Laboratorio de un Acelerador. Obviamente la componente más importante del laboratorio es el acelerador de partículas y quizás esta es la razón de que en la práctica se usen como sinónimos los términos Acelerador y Laboratorio de un Acelerador.

Los componentes principales de un Laboratorio de un Acelerador VDG., ver figura I-11, son:

- a) Acelerador de partículas.
- b) Líneas o tuberías de acero evacuadas para transporte del haz
- c) Sistema de vacío (Bombas mecánicas y de difusión o bomba turbomolecular o bomba criogénica etc).
- d) Electroimán selector de energía del haz.

FIGURA I-11

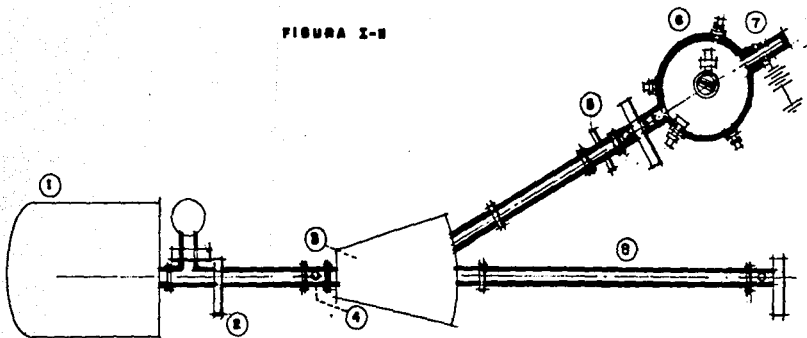


FIG. I-11 PRINCIPALES COMPONENTES DE UN LABORATORIO DE UN ACCELERADOR VDG.

1. Acelerador
2. Bombas de vacío
3. Imán analizador
4. Línea metálica de vacío para transporte del haz
5. Rejillas para regulación del alto voltaje
6. Cámara de experimentación
7. Detectores y componentes electrónicos asociados
8. Otra línea de transporte de haz.

- e) Rejillas aisladas eléctricamente para regulación de la energía del haz.
- f) Sistemas de estabilización electrónica de alto voltaje.
- g) Lentes eléctricas o magnéticas (dipolos o cuadrupolos) para enfocar el haz en el blanco.
- h) Cámara de blancos o de experimentación.
- i) Jaula de Faraday para integrar la corriente del haz.
- j) Detectores de partículas con o sin carga eléctrica, (neutrones y de gamas).
- k) Electrónica modular de pulsos eléctricos asociada a los detectores.
- l) Analizador multicanal de altura de pulsos y la computadora asociada con la adquisición de datos.

Una breve descripción de cada una de las componentes se hace a continuación:

I.3.1 EL ACELERADOR VAN DE GRAFF

Los datos experimentales cuyo análisis motivaron esta tesis fueron producidos en el laboratorio de un pequeño acelerador VDG de iones positivos de voltaje máximo de operación de 0.7 MV. Las partículas que normalmente son aceleradas son: Protones (H^+), deuterones ($^2H^+$) y Argón ($^{37}A^+$). Este pequeño acelerador es horizontal, cuya fotografía aparece en la fig. I-5 . En la fig. I-12., se muestran en forma esquemática los principales componentes del acelerador VDG, los cuales son:

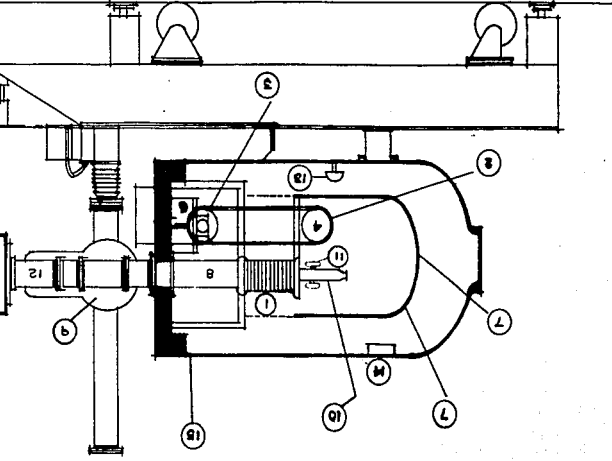


FIG. 1-12 DIAGRAMA ESQUEMATICO DE LOS PRINCIPALES COMPONENTES DE UN ACCELERADOR VDS
 1.- La columna, 2.- Banda transportadora, 3.- Foles interior con motor, 4.- Foles exterior con generador, 5.- sistema de carga y descarga (ver figura 1-13), 6.- fuente de CD, 7.- Domo de la cámara, 8.- todo acelerador, 9.- sistema de vacío, 10.- Fuente de tomas, 11.- Foles de gas presurizados, 12.- Extension de tubo, 13.- Fuente de tomas, 14.- Voltmetro generador.

1) La columna del generador del acelerador; este nombre se le da porque es la estructura que soporta a los componentes principales del acelerador, tales como la Terminal de Alto Voltaje (TAV) que incluye la fuente de iones, el sistema de generación de alto voltaje, las resistencias divisoras de voltaje conocidas también como resistencias de columna. La columna es una estructura de anillos metálicos de acero inoxidable y separados por aislantes de vidrio (o cerámica).

2) La banda que transporta la carga eléctrica que es de varias capas de material textil ahulado.

3) La polea inferior acoplada a un motor, que hace girar la banda.

4) La polea superior que también es un generador de corriente alterna de 110 volts y 420 Hz. La banda está tensada entre estas dos poleas.

5) Sistema de carga (peine inferior) y de descarga (peine superior) de la banda. (Ver fig. I-13)

6) Fuente de CD de "carga" o polarización de la banda.

7) La cubierta metálica de la TAV, la cual es de lámina de acero pulido y en cuya superficie se deposita la carga transportada por la banda.

8) El tubo acelerador, al igual que la columna, es un estructura de electrodos de acero inoxidable y vidrio.

9) Sistemas de vacío para evacuar el tubo acelerador. Este sistema de vacío normalmente consiste de una bomba mecánica y una bomba de difusión y la presión de vacío es de

10^{-6} Torr y la presión máxima permisible de operación es de 3×10^{-5} Torr.

10) La fuente de iones, que es del tipo de radiofrecuencia (RF), la cual es una botella cilíndrica hecha de cuarzo e inyecta los iones al tubo acelerador con una energía de algunos eV.

11) Los tanques de gas presurizados que están en la TAV y que contienen cada uno de éstos el gas cuyos iones positivos son acelerados.

12) La extensión del tubo acelerador, la cual está hecha de acero y tiene un blindaje magnético para que no le afecte al haz el motor de la banda.

13) Puntas de corona

14) Voltmetro generador

15) Tanque de acero para contener la presión del gas dieléctrico.

16) Sistema de refrigeración que es un serpentín por donde circula agua, para extraer el calor producido cuando el acelerador está en operación.

17) Consola de control. La operación del acelerador se hace a control remoto para seguridad radiológica de sus operadores.

La descripción detallada sobre el funcionamiento de un acelerador tipo VDG es tratada en forma extensa en la literatura, sin embargo, para que esta tesis sea más clara, a continuación se describen brevemente los principios de

operación de este tipo de acelerador los cuales se pueden dividir en:

- A) Generación del Voltaje V
- B) La Producción de iones en la TAV.
- C) Aceleración de iones positivos

A) Generación del Voltaje V

Para facilitar la descripción del sistema de generación de alto voltaje en un acelerador VDG, en la fig. I-13 se muestran esquemáticamente sus principales componentes.

1) Polea y peine inferior con su motor impulsor, 2) Polea y peine superior, 3) La Banda, 4) Domo metálico, 5) Fuente de iones, 6) Columna, 7) Fuente de polarización de la banda

La generación de alto voltaje se logra por el transporte de carga electrostática desde el nivel de tierra, al domo metálico que está en la TAV.

Este proceso se explica a continuación:

La polea inferior está, conectada a un motor impulsor y es lo que hace girar la banda la cual está tensada entre esta polea y la polea superior. La carga es inducida en la banda mediante "efecto corona", producido por un campo eléctrico intenso generado por una fuente de alto voltaje (polarización) que se conecta a electrodos separados por la banda. Uno de estos electrodos es una malla metálica cuya longitud es la misma que el ancho de la banda, su extremo está frente al otro electrodo (pulido). La malla se "desnuda", quitando algunos hilos de alambre, para que los

FIG. 1-13

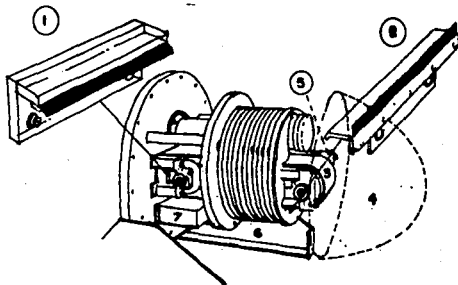


FIG. 1-13 PRINCIPALES COMPONENTES ASOCIADAS CON LA GENERACION DE ALTO VOLTAJE DE UN ACELADOR VDG
1.- Polea y peine inferior con su mto. impulsor, 2.- Polea y peine superior, 3.- La banda, 4.- Domo metálico, 5.- Fuente de iones. 6.- Columna, 7.- Fuente de polarización de la banda.

alambres transversales formen "puntas agudas", y así generar un campo eléctrico intenso, que son los que producen por efecto inductivo carga eléctrica a lo ancho de la banda.

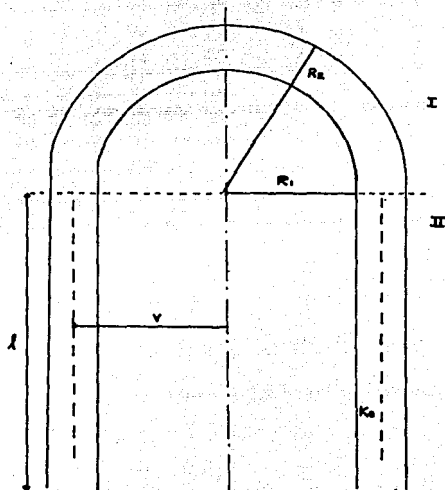
La banda está hecha de varias capas de un material textil ahulado y el motor impulsor (motor de la banda) gira a 1800 rpm impulsada por un motor que en el acelerador de 700KV es de 5 KVA.

El peine inferior se conecta al lado positivo de la fuente de CD y el electrodo pulido al lado de tierra. En esta forma se inducen cargas positivas sobre la superficie de la banda.

Las partículas positivas son neutralizadas por los electrones del domo a través de otra malla metálica (peine superior). En la superficie del domo metálico pulido se distribuye la carga Q positiva homogéneamente. El voltaje V que se produce por la carga Q en la TAV está dado por la relación:

$$V=Q/C,$$

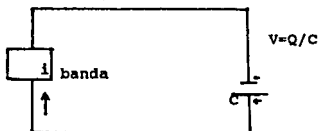
donde C es su capacidad eléctrica expresada en faradios. Esta capacidad depende de la geometría del domo y del tanque del acelerador. La geometría del domo es como la de una bala de revólver, es decir, un cilindro coronado por un hemisferio. La Fig. I-14 es un esquema que se usa para calcular la capacidad C del acelerador en función de parámetros geométricos. En el apéndice C se deduce la capacidad C para un acelerador con esta geometría.



$$C_T = C_R + C_Z$$

FIG. I-14 DIAGRAMA AUXILIAR PARA EL CALCULO DE LA CAPACIDAD DE LA TERMINAL DE ALTO VOLTAJE DE UN VDS

El circuito eléctrico equivalente del generador de alto voltaje del sistema VDG es el siguiente:



Conceptualmente el condensador podría acumular una carga $Q = \int i dt$ en forma indefinida, por lo que podría ser el voltaje V arbitrariamente grande. Sin embargo, en la práctica existen limitaciones para "aislar" altos voltajes. Como se describe más adelante, existen corrientes eléctricas que descargan el domo.

B) La Producción de Iones en la TAV.

Inicialmente, el alto voltaje generado por un VDG sólo se usaba para investigar las propiedades dieléctricas de diferentes materiales aislantes.

La incorporación al generador de voltaje VDG de una fuente de iones y de un tubo acelerador a este sistema es propiamente un acelerador de partículas tipo VDG. En el acelerador usado en este trabajo, la fuente de iones es del tipo de radiofrecuencia y un diagrama esquemático se muestra en la fig. I-15.

La fuente de iones es una botella de cuarzo a la cual se le aplica la energía de un oscilador de radiofrecuencia (80 MHz) a través de los electrodos que rodean a la botella. Esta botella está al vacío y se le introduce el gas que es

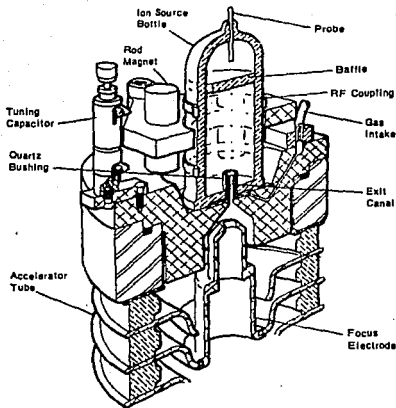


FIG. 1-15 DIAGRAMA ESQUEMATICO DE LA FUENTE ³ DE IONES DE UN ACELERADOR VDS.

el que se va a ionizar a través de una válvula termoelectrónica que controla el flujo. Cuando sucede la ionización, los iones positivos y los electrones están mezclados. Se usan 4 imanes permanentes cuyo campo magnético concentra los iones positivos al canal de salida de la botella. Los iones positivos son inicialmente repelidos a través del canal de salida por el voltaje aplicado a un ánodo y este elemento también colecta los electrones del plasma.

El voltaje aplicado al ánodo es un voltaje de CD que se puede ajustar de 0-3000 volts y con él se controla la corriente de haz.

La polea superior, al girar por la banda tensada, mencionada anteriormente, es a su vez un "dínamo" o generador de corriente alterna (110 v y frecuencia de 420 hertzios y 0.5 KVA de potencia) diseñado para proveer la potencia eléctrica que requieren los circuitos de la fuente de iones. Es obvio que esta potencia eléctrica tiene que ser generada al potencial de la TAV; si se intentara alimentar externamente, el domo metálico perdería toda su carga eléctrica y por lo tanto el voltaje V a través de los cables eléctricos con los cuales se intentara transmitir esa potencia.

C) Aceleración de iones positivos.

Los iones positivos son extraídos a través del canal de salida de la fuente de iones con energía despreciable y son inyectados al llamado tubo acelerador que, como su nombre lo

indica, es una estructura en forma cilíndrica cuya función es dar a las partículas una trayectoria de aceleración que aproximadamente es el eje del tubo. El campo eléctrico a lo largo del tubo acelerador tiene propiedades de enfoque sobre el haz de iones.

Este tubo consiste de un número de electrodos igual al de los platos equipotenciales de la columna y tienen la misma separación de los platos equipotenciales de la columna. Los platos equipotenciales están eléctricamente conectados con los electrodos del tubo a través de resistencias aproximadamente iguales de tal manera que la diferencia de potencial entre dos platos consecutivos es similar. El acelerador usado en este trabajo tiene 18 platos por lo que el gradiente de potencial (volts/cm) cuando el acelerador opera a su máximo voltaje es 19.50 KV/cm. (como la distancia entre los platos equipotenciales es de 2cm, tenemos que $38.9/2=19.50$ KV/cm)

Un diagrama esquemático del conjunto fuente de iones y tubo acelerador se muestra esquemáticamente en la fig. I-16.

El que la mayoría de las partículas aceleradas siga una trayectoria en el eje del tubo se debe a que el campo eléctrico en los bordes interiores de dos electrodos sucesivos no es homogéneo sino disperso y actúa como si fuera un "embudo eléctrico" que enfoca el haz en el eje.

FIG. I-16

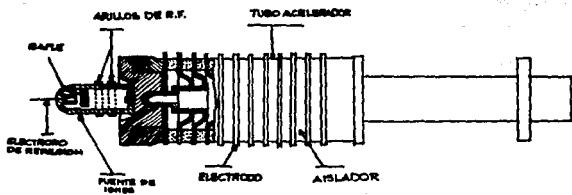


FIG. I-16 DIAGRAMA ESQUEMATICO DEL CONJUNTO: FUENTE DE IONES Y TUBO ACELERADOR.

I.3.2 EL ELECTROIMAN SELECTOR DE ENERGIAS

Cuando las partículas abandonan el acelerador tienen una energía $T=V q$, que salen como una haz de partículas enfocadas en un área muy pequeña y el objetivo es transportarlas a una cámara de experimentación en la cual se van a bombardear los "blancos" en donde se van a producir las colisiones objeto de estudio.

Para lograr esto se requiere de un sistema de transporte de haz, que tiene los siguientes elementos: tubos metálicos, sistema de vacío, colimadores de haz, lentes de enfoque, (cuadropolos eléctricos y cuadropolos magnéticos) un electroimán selector de energías, rejillas para la estabilización de energía del haz, medidores integradores de corriente de haz, monitores de posición de haz y la cámara de experimentación también llamada "cámara de dispersión".

En los aceleradores tipo VDG, no se puede medir en forma absoluta y precisa su voltaje de operación, por lo que tampoco se puede determinar la energía del haz.

El electroimán asociado al acelerador se usa para determinar en forma precisa la energía del haz por la desviación de la trayectoria original de éste producido por un campo magnético B. Ver fig. I-17

La relación bien conocida no relativista que relaciona la energía cinética T (MeV) la masa m (uam) y la carga (ze) $z=1,2,3,\dots$ de las partículas del haz con la rigidez magnética BR (kilogauss cm) es:

$$BR = 144 \sqrt{(mT/z^2)} \quad (I.5)$$

Esta ecuación es deducida con detalle en el apéndice D.

Las partículas que constituyen el haz describen una trayectoria circular de radio R en los polos del electroimán. R queda determinado por el ángulo que el haz es desviado respecto a la dirección original. La ecuación anterior se puede reescribir en la siguiente forma:

$$T = K B^2 \quad (I.6)$$

$$\text{donde } K = Z^2 R^2 / (144 \pi^2 m) \quad (I.7)$$

El campo magnético B normalmente se mide hasta con 6 cifras de precisión por el método de Resonancia Magnética Nuclear. (RMN) ref.4. La relación entre la frecuencia de resonancia f y el campo magnético B es $B = kf$. Cuando se usa una sonda de hidrógeno: $K = 0.22$ Kilogauss/Mhz

De acuerdo a las ecuaciones I.6 y I.7, si se conoce "R", la energía del haz puede determinarse midiendo B. Aunque el valor de R puede estimarse geoméricamente por la desviación del haz, este valor no es suficientemente preciso para determinar T. Existen varios métodos reportados en la literatura para determinar R con mucha precisión. ref.2. La determinación de R es la que se le conoce también como "La Calibración de la Energía del Acelerador". La línea de experimentación de 22.5 grados de desviación del laboratorio usado fue calibrada por el método de resonancia nuclear de la reacción: $^{19}\text{F}(p, \alpha \gamma)\text{O}^{16}$, y el valor obtenido para R fue 122 ± 0.3 cm. La ecuación I.6, para esta calibración se pudo escribir para el haz de protones como:

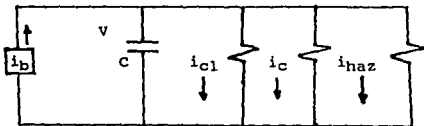
$$T = 22.3 f^2 \text{ (KeV)} \quad (I.8)$$

I.3.3 EL SISTEMA DE ESTABILIZACION DE ALTO VOLTAJE

Una de las ventajas de los aceleradores tipo VDG. es que pueden operar con haces de partículas monoenergéticas y pequeñas fluctuaciones ($\approx 1/10\ 000$) en la energía debido a que el voltaje en la terminal permanece casi constante. El Sistema de Estabilización de Voltaje (SEV) del acelerador, lo constituyen circuitos electrónicos que usan diversos sensores para disminuir las fluctuaciones de V . Estos son:

1) Puntas de corona, 2) Vóltmetro generador, 3) Condensador de "pick up" y 4) Rejillas analizadoras

A continuación se describe brevemente el funcionamiento del SEV: El mantener V constante implica que la corriente de entrada al domo que es la transportada por la banda TAV (corriente de banda i_b) sea igual a la suma de las corrientes de salida que son: 1) la corrientes de columna (i_{cl}) 2) la corriente de haz (i_{haz}) y de 3) la corriente de corona (i_c). El balance de estas corrientes se puede representar con el siguiente circuito equivalente:



Las puntas son un conjunto de agujas muy afiladas que se pueden acercar o alejar del domo metálico y debido al intenso campo eléctrico entre éstas y el domo, se crea una corriente llamada corriente de corona i_c .

Para un voltaje V de operación, la distancia se ajusta para $i_c \approx 20 \mu A$. Las puntas de corona están aisladas eléctricamente del tanque y se conectan a la placa de un bulbo al vacío (tetrodo) y a través de este elemento se cierra el circuito de corriente a tierra.

Con este tetrodo, la corriente i_c puede también cambiarse en forma muy rápida y con muy pequeñas variaciones, cambiando el voltaje de polarización de una de las rejillas del tetrodo. Señales eléctricas de error provenientes del condensador (CPU) y de las rejillas analizadoras del haz, son conectadas a través de un amplificador, lo cual hace variar el voltaje de polarización de la reja, produciendo pequeñas variaciones de i_c . Estas variaciones ocurren de tal manera que minimizan las variaciones de voltaje. La corriente de corona es la corriente de placa del bulbo eléctrico tipo tetrodo. Las puntas de corona están montadas sobre una barra que puede acercarse o retirarse de la terminal de alto voltaje, usando un motor que se controla desde la consola de mando del acelerador.

El lapso de tiempo en el que se efectúa la corrección al voltaje V es del orden de algunos milisegundos.

En la figura I-18 se muestra en forma esquemática cómo con unas rejillas reguladoras de alto voltaje se puede operar el acelerador con un voltaje V .

Normalmente, el B se estabiliza, el haz pasa en medio y la diferencia de corrientes es cero. Si por alguna razón el

FIG. I-17

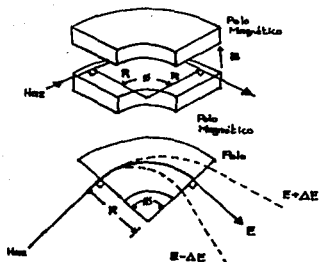


FIG. I-18



FIG. I-17 DESVIACION DE LA TRAYECTORIA DEL HAZ DE ENERGIA E POR EL CAMPO MAGNETICO B DE UN IMAN DE RADIO R .

FIG. I-18 FUNCIONAMIENTO DE LAS REJILLAS REGULADORAS DEL ALTO VOLTAJE.

voltaje en la terminal V aumenta, el haz se desvía menos y la diferencia de corrientes se desbalancea teniendo una mayor corriente en la rejilla de alto voltaje.

Esta señal es procesada por el amplificador operacional y hace que la reja del tetrodo opere con un voltaje de polarización más positivo, cuyo efecto es aumentar la corriente de corona hasta que el haz vuelve a centrarse, de modo que la diferencia de corriente de las rejillas sea cero. Inversamente, cuando el voltaje de la terminal disminuye, el haz tiene menos inercia y es desviado más incidiendo mayor corriente en la otra rejilla (de bajo voltaje) y envía una señal a la reja para que su polarización sea más negativa y disminuya la corriente de corona.

C A P I T U L O I I

**"ESPECTROS DE FOTONES DE ENERGIA CONTINUA PRODUCIDOS
POR ACELERADORES VAN DE GRAAFF DE IONES POSITIVOS"****II.1 EL ESPECTROMETRO DE FOTONES CON DETECTOR DE
GERMANIO HIPERPURO**

La medida e interpretación del espectro de energía de la radiación electromagnética (fotones) producidos por un acelerador VDG de iones positivos es el objetivo principal de esta tesis y se presenta en este capítulo.

La fig.II-1 es un diagrama simplificado de las componentes del espectrómetro de fotones usado, en el cual la componente más importante es el detector, el cual es un semiconductor (diodo) de Germanio Hiperpuro (GH) y la electrónica asociada a éste.

Debido a que el detector de GH es la componente más importante del espectrómetro a éste también se le denomina el detector. La temperatura a la cual se opera el detector de GH es la temperatura del nitrógeno líquido (-190 C) por lo que a este tipo de detectores se les llama criogénicos.

Una descripción simplificada sobre el funcionamiento del espectrómetro de GH es la siguiente. Cuando un fotón es absorbido en el volumen sensible del detector (por efecto fotoeléctrico, Compton, etc) se origina un pulso de voltaje de amplitud máxima V_0 , el cual es proporcional a la energía del fotón incidente. Debido a que V_0 es muy pequeño (del orden de algunos mV), la razón de enfriar al detector y

FIG. II-1

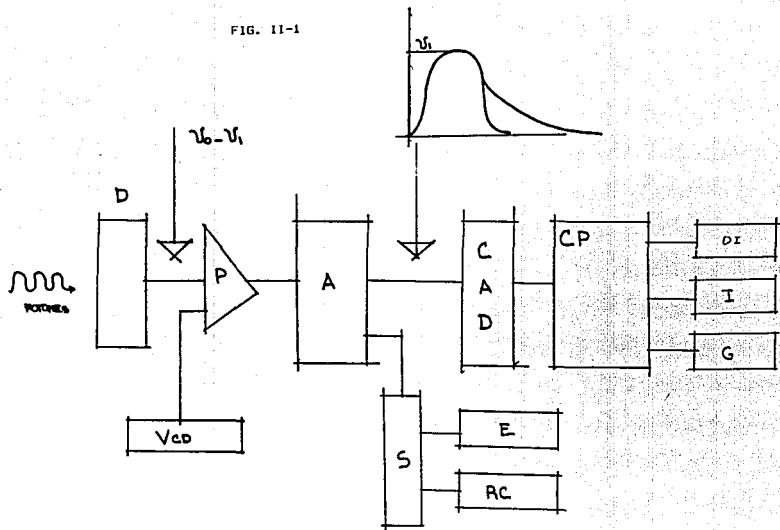


DIAGRAMA ESQUEMATICO DE UN ESPECTROMETRO DE FOTONES Y SU ELECTRONICA ASOCIADA PARA DETECTAR Y MEDIR LA ENERGIA DE ESTOS.
 D: DETECTOR VCD: FUENTE DE VOLTAJE CD
 P: PREAMPLIFICADOR LINEAL A: AMPLIFICADOR LINEAL, CAD: CONVERTIDOR ANALOGICO DIGITAL CP: COMPUTADORA PERSONAL I: IMPRESORA, G: GRAFICADORA DI: UNIDAD DE DISCO S: DISCRIMINADOR DE ALTURA DE PULSOS. E: ESCLADOR, RC: MEDIDOR DE LA RAZON DE CONTEO DE PULSOS

algunas componentes electrónicas asociadas (especialmente un transistor de efecto de campo) es para disminuir el "ruido electrónico". Este pulso requiere de amplificación y esto se logra con dos sistemas electrónicos que son: el preamplificador y el amplificador lineal. La función principal del preamplificador es la de acoplar impedancias entre el detector y el amplificador.

La función principal del amplificador es la de aumentar la amplitud de la señal de entrada hasta un valor que se ha estandarizado en la instrumentación nuclear y es a una amplitud máxima de 10 volts. Al amplificador se le llama lineal porque la amplitud máxima del voltaje de salida V_2 es proporcional a la amplitud del voltaje de entrada V_1 con lo cual se garantiza mantener la proporcionalidad con la energía de los fotones. Otra de las características del amplificador lineal es la de formar los pulsos alterando tanto el tiempo de subida como el de caída para que su amplitud sea medida. La forma de estos pulsos es del tipo unipolar, con un tiempo típico de subida del orden de 1 a 3 microsegundos y una caída del tipo exponencial con un tiempo del orden de 10 microsegundos.

Los pulsos del amplificador son registrados y analizados modernamente por una computadora personal la cual tiene como interfase una tarjeta electrónica, llamada en inglés ADC (analog to digital converter) la cual convierte el máximo valor de los pulsos de voltaje (que son señales analógicas) a dígitos o números.

La clasificación del número de pulsos de voltaje por su altura es lo que se denomina como "el espectro de altura de pulsos" el cual se puede graficar u observar en el monitor de la computadora como un histograma en el que el eje horizontal es el número de "canal" C que es proporcional a la altura de los pulsos y se puede convertir a energía de fotones; mientras que el eje vertical es el número de pulsos que corresponden a un canal dado. A este histograma también se le llama espectro de energía cuando se ha establecido la "calibración en energía" del eje horizontal.

Un parámetro que caracteriza al ADC es el número de canales y se expresa en números de 2^n : 512, 1024, 2048, 4096 etc, canales. Dada la proporcionalidad que hay entre amplitud de voltaje y canal y la estandarización de la amplitud máxima del voltaje a 10 volts, la precisión para discriminar entre dos pulsos con amplitudes de voltajes muy cercanos entre sí es mejor, mientras más canales tenga el ADC. Por ejemplo, si el ADC tiene 1024 canales, la capacidad del sistema es tal que puede separar dos pulsos que tengan una diferencia de amplitud de:

$$V_2/C = 10V/1024 = 0.0098 \text{ volts/canal.}$$

Debido a la proporcionalidad entre la energía E del fotón y el número de canal C, la relación lineal más general entre estos parámetros es:

$$E = GC + E_0, \quad (\text{II.1})$$

donde G es una constante en unidades de eV/canal y su valor la selecciona el usuario según sus necesidades y queda

determinada por la ganancia del amplificador. E_0 es la ordenada al origen ("offset").

Fuentes radiactivas monoenergéticas se usan para determinar los valores de G y E_0 y es lo que se llama la "calibración en energía del espectrómetro".

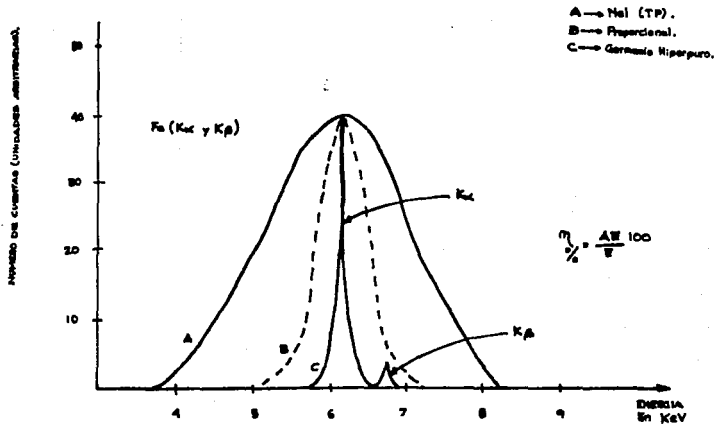
Otros módulos electrónicos que son de gran utilidad asociados con el espectrómetro se mencionan a continuación: a) el discriminador, el cual convierte los pulsos analógicos a pulsos lógicos cuando se rebasa un umbral de altura de pulsos. El umbral lo establece el usuario. Estos pulsos son los pulsos de entrada al: b) escalador y al c) contador de razones, "ratemeter". El primero registra el número total de cuentas acumuladas en un cierto lapso de tiempo y el segundo mide la rapidez con que se están produciendo los pulsos (cuentas/seg).

Dos parámetros que caracterizan un detector de GH son:

- a) La resolución en energía y
- b) La eficiencia de detección .

El concepto de resolución en energía de un espectrómetro se introduce como un parámetro de calidad del sistema, debido a que la energía de los fotones no se puede medir en forma perfecta, i.e. fotones monoenergéticos de energía E_0 , al medirse tienen una dispersión o distribución de tipo gaussiana alrededor de E_0 con una varianza σ^2 . Para ilustrar este concepto en forma más precisa, la figura II-2, muestra la medida comparativa de fotones monoenergéticos de energía $E = 6400$ eV (Línea K_{α} de rayos característicos del

FIG. II-2
 MEDIDA COMPARATIVA DE FOTONES
 MONOENERGETICOS



Fe) medidos con distintos tipos de detectores. La resolución del sistema se define como el ancho de la distribución a la mitad de la altura de la gaussiana y en el idioma inglés se le denota como FWHM de las siglas "full width half maximum" y su relación con σ es:

$$\text{FWHM} = 2.2 \sigma \quad (\text{II.2})$$

De la fig. II-2 es evidente que el detector de GH tiene la mejor resolución; por lo tanto este sistema tiene mejor capacidad para diferenciar fotones monoenergéticos con energías muy cercanas entre sí.

La eficiencia ϵ de detección de partículas se define en la ec.II.3 como la razón de las partículas que son registradas respecto a las partículas incidentes:

$$\epsilon = \text{núm. de pulsos/núm. de part.incidentes} \quad (\text{II.3})$$

Según la definición de ϵ , ésta es ≤ 1 y normalmente dicho parámetro se expresa porcentualmente. La eficiencia para registrar partículas con carga eléctrica es 100%, mientras que para fotones la eficiencia ϵ depende de: 1) la energía de los fotones 2) del número atómico Z de los materiales de que está compuesto el detector y 3) del espesor del detector.

En general la eficiencia $\epsilon = \epsilon(E)$ es función de la energía E de los fotones y es calculable a partir de principios básicos debido a que se conoce la sección de interacción de los diferentes procesos de fotones con la materia tales como: a) efecto Compton, b) efecto fotoeléctrico y c) creación de pares. En la figura II-3 se

FIG. 11-3

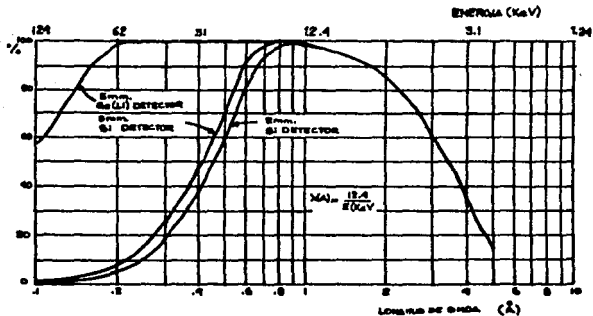


FIG. 11-3 COMPARACION DE LA EFICIENCIA PARA DIFERENTES DETECTORES

muestra una comparación de la $\epsilon = \epsilon(E)$, para diferentes detectores.

Algunos de los datos técnicos del espectrómetro usado se presentan a continuación. En los espectros de energía de los rayos X que se midieron en esta tesis, se usaron dos tipos de detectores de GH con diferentes eficiencias de conteo. Uno de éstos fue el detector de GH modelo ORTEC 8013-10250 con una resolución en energía de 0.577 KeV en la línea de 122.1 KeV del ^{57}Co . La eficiencia de este detector es muy pequeña para $E > 200\text{keV}$.

El otro detector empleado de GH fue un modelo ORTEC 8012-10185-S con una resolución en energía de 2 KeV para la línea de 1332 KeV significando buena eficiencia de detección para fotones de $E < 200\text{ KeV}$.

Los preamplificadores usados están integrados a cada uno de los detectores. El amplificador lineal usado fue un modelo ORTEC 572 y el análisis de los espectros de altura de pulsos fueron medidos con una computadora personal que tiene como interfase una tarjeta con un "ADC" de 4096 canales.

II.2 CARACTERISTICAS SOBRESALIENTES DE LOS ESPECTROS DE FOTONES MEDIDOS EN EL ACELERADOR DE 700 KeV DEL IFUNAM

Es bien conocido que los aceleradores electrostáticos positivos producen una cantidad considerable de rayos X alrededor de la terminal de alto voltaje (TAV), llegando a ser su intensidad del orden de 100 mR/hr y es por esto que

ninguna persona debe estar cerca de la TAV del acelerador en operación para evitar daños radiológicos.

Esta radiación normalmente es indeseable y se ha tratado de minimizar desde la construcción de los primeros aceleradores electrostáticos.ref.2 El origen de esta radiación es por el frenamiento brusco en la TAV de los electrones secundarios (e's) generados por algunas partículas desenfocadas del haz primario de iones positivos que chocan contra los electrodos y las paredes del tubo acelerador. En principio también se pueden generar e's por la colisión de los iones del haz con átomos del gas residual.

Al hacer una revisión bibliográfica de medidas reportadas en la literatura sobre la forma del espectro de energía de rayos X, se encontró que éstos sólo se habían realizado con detectores de centelleo de NaI(Tl) y ninguno de los autores reporta una interpretación analítica de la forma de los espectros.

Como ya se ha mencionado en este trabajo se usó un detector criogénico de germanio hiperpuro el cual se describió en la sección anterior debido a que este detector tiene una resolución en energía muy superior respecto a los detectores de centelleo, aunque su eficiencia de detección es muy inferior.

En la figura II-4 se muestra en forma esquemática el Laboratorio del Acelerador VDG de 0.7 MV y la geometría de

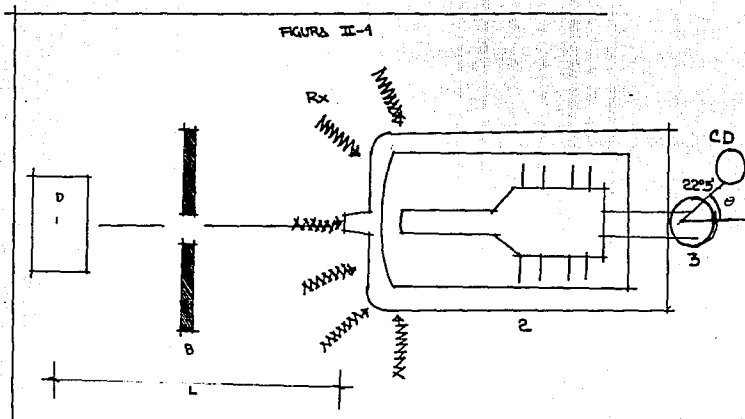


FIG. II.4 DIAGRAMA ESQUEMATICO SOBRE LA COLOCACION DE UN DETECTOR CON EL CUAL SE MIDIO EL ESPECTRO DE FOTONES, CUANDO EL ACELERADOR VDG DE 0.7 MV ESTABA EN OPERACION.

B. BLINDAJE DE PLOMO

L= 1.50 m

1. DETECTOR, 2. ACELERADOR, 3. IMAN ANALIZADOR

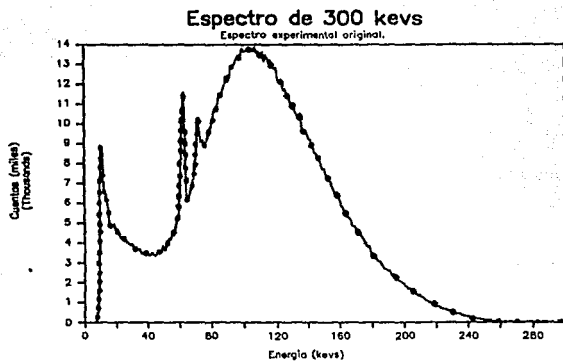


Fig. II-5 Espectro de 300 Kev.

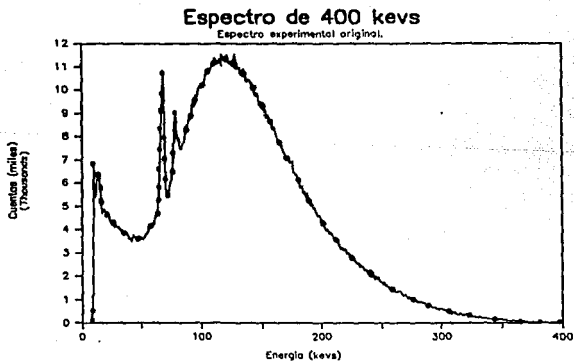


Fig. II-6 Espectro de 400 Kev.

parámetros que definen la posición del espectrómetro de fotones.

Uno de los resultados de los experimentos realizados fue que la intensidad $I(E)$ de los rayos X producidos depende tanto del ángulo θ (medido respecto al eje del tubo acelerador) como de L , que es la distancia entre el detector respecto al tanque. La intensidad I es máxima para $\theta=0$ y $L=0$ y decrece cuando aumentan estos parámetros. Un resultado sobresaliente es que la forma de I como función de la energía E de los fotones no depende de θ , si $\theta \leq 90^\circ$.

En las figuras II-5 y II-6 se presentan algunos espectros de energía de rayos X medidos cuando el acelerador se hizo funcionar a diferentes altos voltajes V .

El procedimiento experimental que se usó para medir cada uno de estos espectros fue el siguiente:

1) El detector de GH previamente se calibró en energía usando fotones monoenergéticos de fuentes radiactivas de ^{241}Am , ^{57}Co y ^{137}Cs . Los parámetros G y E_0 de la ecuación II.1 se determinaron por el método de mínimos cuadrados ref.5 de los datos medidos del canal correspondiente al centroide de un pico asociado a una energía de radioisótopos usado para la calibración.

Para los espectros de la figura II-5, los parámetros de la calibración obtenidos fueron: $G=1.0390$ keV/canal y $E_0=1.14$ keV. Para los espectros de la figura II-6 los parámetros de la calibración obtenidos fueron: $G=1.0026$ KeV/canal $E_0= 1.17$ KeV.

2) Se usó un blindaje de plomo para que el detector GH sólo recibiera fotones provenientes directamente de la TAV del acelerador y evitar en esta forma que fotones dispersados por las paredes del laboratorio u otros materiales llegaran al detector. Los parámetros geométricos del detector fueron $\theta=0$ y $L=1.5m$. La distancia L del detector al tanque se estableció de tal manera que el número de cuentas/seg medidas con el ratemeter fuera menor o igual a 1000 y así evitar distorsiones con el espectro debido al apilamiento de pulsos.

3) El voltaje de operación del acelerador V indicado en las figuras II-5 y II-6 se midió por desviación magnética del haz de protones en la línea de 22.5 grados y además se hizo pasar este haz por el centro de las rejillas reguladoras de alto voltaje (ver Capítulo I secciones I.3.2 y I.3.3).

Esta línea fue previamente calibrada por el método de resonancia nuclear de la reacción $^{19}F(p,\alpha)^{16}O$. El resultado de la calibración para un haz de protones fue: $T=22.3f^2$ (ver ec. I.6 , I.7 y I.8). El voltaje de aceleración V es numéricamente igual a la energía de los protones (ver ec I.1).

Para garantizar que V fuera constante, al acumular cada uno de los espectros de energía de rayos X, se tuvo la precaución de sólo activar el espectrómetro de GH cuando:

a) La diferencia de la corriente de las rejillas reguladoras fuera igual a cero. Esta condición garantiza que

el haz pasa por el centro de este sistema con lo cual se tiene un voltaje V estable.

b) La corriente de haz no tuviera fluctuaciones medida en la jaula de Faraday (Ver figura I-9).

El voltaje V de operación del acelerador también se midió por desviación magnética usando un haz de ${}^4\text{He}$ con el mismo resultado de los espectros mostrados en las fig II-5 y II-6.

En un análisis visual sobre cada uno de los espectros de rayos X medidos, se puede observar lo siguiente:

a) Los espectros tienen una forma de campana y conservan cierta similitud con el espectro de energía continua producido por un tubo de rayos X. Sin embargo, existen diferencias cualitativas debido a que "el máximo de la campana" no es simétrico respecto a una energía numéricamente igual a $V_e/2$ como en el caso de los tubos de rayos X.

b) Otra diferencia es que, en estos espectros cuando la energía E disminuye, la intensidad de la radiación aumenta.

c) En estos espectros, especialmente los medidos a más altos voltajes (400, 600 volts) picos discretos aparecen superpuestos al espectro continuo, líneas que corresponden a niveles de radiación monoenergéticas y cuya posición en el espectro no varían con el voltaje V . La posición de estas líneas corresponden con energías de 68.8 y 67 KeV, se identificaron como las transiciones $K_{\alpha 1}$ y $K_{\alpha 2}$ del oro. La presencia de estos rayos X característicos se interpretó

como la fluorescencia del electrodo del detector de GH que está formado de una película de oro de $40\mu\text{g}/\text{cm}^2$ (500 Å).

d) Una observación muy importante es que cuando el voltaje V aumenta, cualitativamente el máximo de intensidad y el punto final del espectro también lo hacen.

La forma de los espectros de rayos X son muy similares a los espectros de energía del decaimiento de núcleos radioactivos por el proceso β^\pm en los cuales, en el continuo del espectro de energía, también se encuentran presentes las líneas que corresponden a electrones de conversión interna. De los espectros de decaimiento β , el hecho de que sea continuo, se debe a que en este proceso se emite un neutrino y del punto final del espectro, se puede deducir "la Q" de la reacción del decaimiento β .

Esta similitud entre la forma de los espectros de decaimiento β y el de rayos X, nos hizo pensar que quizás ref3 un procedimiento similar al que se usa en el decaimiento β^\pm para obtener la "Q", podría desarrollarse para determinar en el umbral de alta energía del espectro de rayos X, el voltaje V de operación del acelerador.

II.3 UN MODELO PARA DESCRIBIR EL ESPECTRO DE BREMSSTRAHLUNG DEL ACELERADOR VAN DE GRAAFF DE 700 KeV.

Un modelo para describir los espectros de rayos X como los de las figs. II.5 y II.6 producidos por el acelerador Van de Graaff de 700 KeV se presenta en esta sección.

Se había mencionado que la radiación bremsstrahlung (br.) es producida por el frenamiento brusco en la terminal de alto voltaje (TAV) de electrones secundarios (e's) generados por algunas partículas desenfocadas del haz primario que chocan contra los electrodos del tubo acelerador.

La generación de e's producidos por la ionización del gas residual en el tubo acelerador también en principio puede contribuir a la generación de rayos X y es razonable esperar que ésta disminuya a medida que se opere con un mejor vacío. Debido a que los espectros de br.. medidos se obtuvieron con vacíos del orden de 10^{-6} torr, se espera que la contribución de e's por ionización del gas residual sea despreciable y por esta razón no se considera.

La forma de los espectros de un tubo de rayos X (ver secc I.2 y II.2) es descrita satisfactoriamente por la Ley de Kramer, en cambio, la forma de los espectros de bremsstrahlung producidos por el acelerador, aunque tienen alguna similitud con los espectros generados por el tubo de

rayos X, conservan muchas diferencias las cuales se discutieron en la sección II.2.

Asimismo pocos elementos comunes pueden identificarse cuando se compara un tubo de rayos X y un acelerador de iones positivos. Es oportuno recalcar que en el tubo de rayos X existe un filamento localizado en el cátodo que es una fuente de electrones, que son acelerados hacia el electrodo llamado ánodo, bajo un potencial eléctrico bien definido. En el acelerador de iones positivos estos elementos no son claramente identificables.

Se había mencionado que no existía una deducción puramente teórica para describir los espectros de radiación producidos por un acelerador de iones positivos. Quizás la razón de que no existan tales modelos depende de la complejidad de los muchos factores de que depende la intensidad del espectro $I(E)$ tales como: 1) El voltaje total de operación V del acelerador, 2) El gradiente de potencial dV/dx , 3) La distribución de carga dentro del tubo acelerador, 4) La sección de ionización del gas residual y 5) La emisión de e's por el impacto de iones en los electrodos a diferentes potenciales a lo largo del tubo acelerador, etc.

También la forma del espectro dependerá de parámetros operacionales del acelerador tales como a) la corriente del haz primario, b) tipo de ión acelerado (protón deuterón o un ion pesado), c) intensidad del voltaje de enfoque asociado a la fuente de iones, d) vacío con el que se opera el tubo

acelerador, e) la geometría de los electrodos del tubo acelerador y de otros factores.

El problema de desarrollar un modelo para describir la intensidad $I(E)$ del espectro de br. es muy complejo por lo expuesto anteriormente. A continuación exponemos un modelo muy simple que se propone en la siguiente forma. En un tubo acelerador con L electrodos homogéneos y equidistantes y separados por una distancia l (ver fig. II-7) es posible etiquetarlos por un índice $j=1,2,3,4\dots$ (tal que $Ej=l=L$) de acuerdo con la distancia a la TAV. Si cada una de las resistencias del divisor de voltaje de la columna son iguales, el potencial de un electrodo " j " se puede expresar como:

$$V_j = \frac{j}{L} V \quad (\text{II.4})$$

siendo V el voltaje de aceleración total. Suponiendo que los e's con una corriente i_j son generados en esta posición por el impacto de partículas desenfocadas del haz primario, estos electrones serán acelerados en sentido opuesto al haz primario con un voltaje de aceleración V_j . La energía cinética W_j de estos electrones, con la que se impactará en algún lugar de la TAV (siendo un lugar muy probable el electrodo de enfoque de la TAV), está dada por:

$$W_j = V_j \cdot e = \frac{j}{L} V \cdot e \quad (\text{II.5})$$

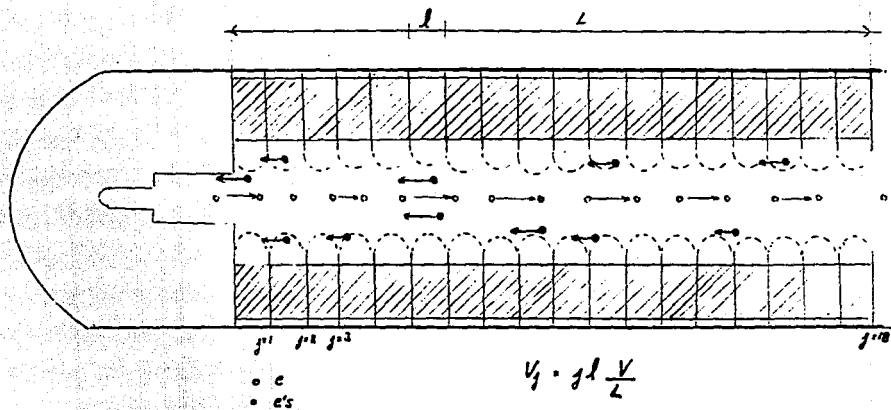


FIG. II-7 TUBO ACELERADOR CON l ELECTRODOS HOMOGENEOS Y EQUIDISTANTES

La desaceleración brusca de estos electrones, según la Ley de Kramer, producirán una intensidad de fotones $I_j(E)$ dada por:

$$I_j(E) = KZi_j E(W_j - E) \quad (\text{II.6})$$

$$= a_j E(W_j - E),$$

donde $a_j = KZi_j$. Es importante recalcar que la forma del espectro descrito por la ecuación II.6 no depende de i_j ni de Z y por este hecho puede incluirse mediante un factor multiplicativo a_j .

La intensidad del espectro $I(E)$ es la superposición de la contribución de términos similares a la ecuación II.6, de cada uno de los electrodos del tubo acelerador y está dada por:

$$I(E) = \sum I_j = \sum a_j E(W_j - E) \quad (\text{II.7})$$

Por lo que el espectro $I(E)$ será una superposición de parábolas, cada una de ellas con origen en cero y punto final W_j y un factor de peso a_j . La fig. II-8, representa cada una de las parábolas I_j . El coeficiente a_j es proporcional al número de e's que se originaron en el electrodo j . Si del modelo se pueden calcular estos coeficientes a_j , los valores de éstos, pueden usarse para diagnosticar la contribución relativa de los e's de cada uno de los electrodos. Esta opción es discutida con mayor detalle en el Capítulo III.

Para cada parábola I_j se tiene que si $E > W_j$, $I_j < 0$ lo cual no tiene significado físico. Este problema se resuelve introduciendo una función escalón unitario $f_j(W_j)$ con las

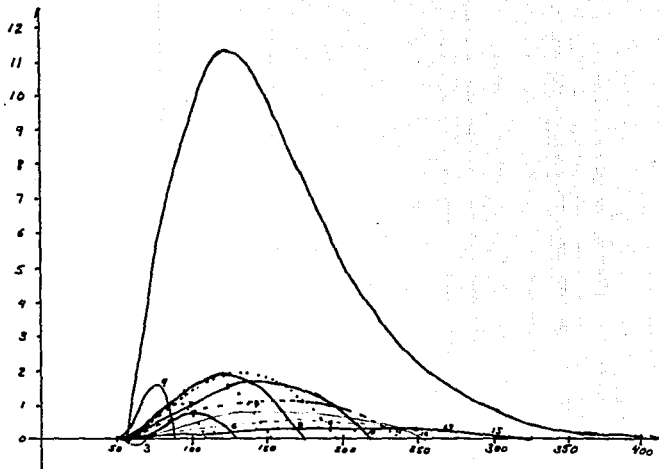


FIG. 11-8 SUPERPOSICION DE LAS 18 PARABOLAS PARA GENERAR EL ESPECTRO TOTAL

siguientes características:

$$f_j(E) = 1 \text{ si } E \leq W_j \\ = 0 \text{ si } E > W_j \quad (\text{II.8})$$

Se define I_j^* por la relación:

$$I_j^* = I_j f_j(W_j) = a_j E(W_j - E) f_j(W_j),$$

$$\text{definiendo: } \Sigma I_j^* = I^*(E) \quad (\text{II.9})$$

$$I^*(E) = \Sigma a_j E(W_j - E) f_j(E, W_j) \quad (\text{II.10})$$

El espectro de fotones $N(C)$ es medido con el espectrómetro del detector de GH, siendo $N(C)$ el número de cuentas en el canal C y esta función es la que se va a modelar por la ecuación II.10. El espectro medido $N(C)$ está relacionado con $I^*(E)$ por la relación:

$$N(C) = I^*(E) g(E), \quad (\text{II.11})$$

donde

$$g(E) = d(\epsilon, E) \exp(-\mu_T(E) X_T); \quad (\text{II.12})$$

La energía del fotón E está relacionada con el canal C por la calibración del espectrómetro de GH (ver ec. II.1).

La función $d(\epsilon, E)$ es una función del detector que depende de la eficiencia ϵ de conteo del detector (ver fig. II-4), de la resolución en energía del detector (ver secc. II.1) y de la energía E de los fotones. Esta función se puede calcular de principios básicos o puede ser medida experimentalmente. La función exponencial describe la atenuación que sufren los fotones por los diferentes materiales que se encuentran entre el detector y el lugar donde fueron originados. Estos materiales son: el tanque del acelerador con un espesor X_1 y un coeficiente másico de

atenuación μ_1 , el gas dieléctrico con un espesor X_2 y un coeficiente μ_2 etc. El material que se espera que absorba más fotones, por su densidad y espesor es el tanque del acelerador.

Los coeficientes de atenuación μ_r se pueden calcular de principios básicos. Esto es debido a que se conocen las secciones transversales σ de los fenómenos de la interacción de fotones que dan origen a la absorción de éstos. La relación entre μ_r y σ está dada por:

$$\mu_r = \frac{N}{A_r} \rho_r (\sigma_c + \sigma_f + \sigma_{pp}), \quad (\text{II.13})$$

siendo N el número de Avogadro, ρ_r la densidad del absorbedor, A_r el peso atómico y $\sigma_c, \sigma_f, \sigma_{pp}$ son las secciones transversales de las interacciones: Compton, fotoeléctrica y de creación de pares, respectivamente. Las secciones dependen de la Z del absorbedor y de la energía $E_{ref.7}$

Los coeficientes μ_r han sido calculados por diferentes autores y en general no son funciones analíticas, por lo que estas funciones han sido publicados en forma de tablas. En este trabajo se usaron para los valores de μ_r los publicados en la referencia 6.

Una vez incluida la función $g(E)$, el espectro medido $N(C)$ puede reescribirse como:

$$N(C) = \sum a_j E(W_j - E) f_j(W) g(E) \quad (\text{II.14})$$

En esta ecuación, las únicas cantidades desconocidas son los coeficientes a_j . Estos coeficientes pueden calcularse por el método de regresión lineal.

Para un acelerador con 18 platos, como el del IFUNAM de 0.7 MeV; tendremos que $N(C)$ quedará formada por la superposición de 18 parábolas, cada una de éstas generada por los e y s de cada uno de los electrodos del tubo acelerador. Su contribución al espectro N_C de cada una de estas parábolas, está representada por el "peso" o el valor de a_j . Finalmente puede escribirse:

$$N_C = \sum_{j=1}^{18} a_j(E) = \sum_{j=1}^{18} E(w_j - E) f_j g(E) \quad (\text{II.15})$$

El cálculo de los coeficientes a_j es el objetivo principal de esta tesis y se usando el método de regresión lineal, es ampliamente discutido en la literatura ref.5. Para mayor claridad sobre este método y con fines didácticos, se desarrollan las ecuaciones de regresión lineal para obtener el valor de los coeficientes a_1 y a_2 de la combinación lineal del tipo:

$$y_t = a_1 X_1(x) + a_2 X_2(x) \quad (\text{II.16})$$

a los puntos experimentales: $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \dots (x_n, y_n)$.

El método implica minimizar:

$$\Sigma(d^2) = \Sigma(y - y_t)^2,$$

Para minimizar, se deriva respecto a a_1 y a_2 e igualando a cero se tiene:

$$\frac{\partial \Sigma(y - y_t)^2}{\partial a_1} = 0$$

$$\frac{\partial \Sigma(y - a_1 X_1(x) - a_2 X_2(x))^2}{\partial a_1} = -2 \Sigma X_1(x) (y - a_1 X_1(x) - a_2 X_2(x)) = 0$$

$$2 \Sigma a_1 X_1^2(x) - 2 \Sigma X_1(x) y + 2 a_2 \Sigma X_1(x) X_2(x) = 0 \quad y$$

$$\frac{\partial(\Sigma(y-y_t)^2)}{\partial a_2} = 0$$

$$\frac{\partial \Sigma(y - a_1 X_1(x) - a_2 X_2(x))^2}{\partial a_2} = -2 \Sigma X_2(x) (y - a_1 X_1(x) - a_2 X_2(x)) = 0 =$$

$$2 \Sigma a_1 X_1^2(x) X_2(x) - 2 \Sigma X_2(x) y + 2 a_2 \Sigma X_2^2(x) = 0,$$

rearrreglando términos se tiene un sistema normal de dos ecuaciones lineales y la suma se hace sobre los n puntos experimentales:

$$\Sigma X_1(x) y = a_1 \Sigma X_1^2(x) + a_2 \Sigma X_1(x) X_2(x)$$

$$\Sigma X_2(x) y = a_1 \Sigma X_1(x) X_2(x) + a_2 \Sigma X_2^2(x) \quad (\text{II.17})$$

La solución de este sistema explícitamente para a_1 y a_2 , lo haremos por determinantes.

Definimos como Ω es el determinante del sistema:

$$\Omega = \begin{vmatrix} \Sigma(X_1)^2 & \Sigma X_1 X_2 \\ \Sigma X_1 X_2 & \Sigma(X_2)^2 \end{vmatrix}$$

Entonces:

$$a_1 = \frac{1}{\Omega} \begin{vmatrix} \Sigma X_1 y & \Sigma X_1 X_2 \\ \Sigma X_2 y & \Sigma X_2^2 \end{vmatrix}$$

resolviendo para a_1 :

$$a_1 = \frac{\Sigma X_1 y \Sigma X_2^2 - \Sigma X_2 y \Sigma X_1 X_2}{\Omega} = \frac{\Sigma X_1 y \Sigma X_2^2 - \Sigma X_2 y \Sigma X_1 X_2}{\Sigma X_1^2 \Sigma X_2^2 - (\Sigma X_1 X_2)^2}$$

(II.18)

y el otro coeficiente;

$$a_2 = \frac{1}{n} \begin{vmatrix} \Sigma(X_1)^2 & EX_1Y \\ EX_1X_2 & EX_2Y \end{vmatrix}$$

resolviendo para a_2 :

$$a_2 = \frac{\Sigma X_1^2 EX_2Y - EX_1X_2 EX_1Y}{n} = \frac{\Sigma X_1^2 EX_2Y - EX_1X_2 EX_1Y}{\Sigma X_1^2 \Sigma X_2^2 - (\Sigma X_1X_2)^2}$$

(II.19)

Donde se ha omitido, por simplicidad, la dependencia en x de las funciones X_1 y X_2 .

Para una combinación lineal de 18 funciones, la expresión explícita de los coeficientes a_j se complica mucho. El problema de notación se resuelve cómodamente si se usa un formalismo matricial para obtener el valor de los coeficientes a_j . A continuación, como ejemplo de la notación matricial expresamos el sistema de dos funciones (ec II.17) antes de generalizar el método para nuestras 18 funciones.

En referencia al sistema II.17, se define β como una matriz columna

$$\beta = \begin{bmatrix} EX_1Y \\ EX_2Y \end{bmatrix}$$

a , como una matriz renglón: $a = (a_1 \ a_2)$

y S , es la matriz bidimensional:

$$S = \begin{bmatrix} \Sigma(X_1)^2 & EX_1X_2 \\ EX_1X_2 & \Sigma(X_2)^2 \end{bmatrix}$$

El sistema II.17, en notación matricial se escribe como:

$$\beta = aS \quad (II.20)$$

La ventaja de la notación matricial es que se puede usar el método de Gauss-Jordan para obtener la matriz renglón a . El método consiste en multiplicar por la derecha ambos miembros de la ec II.20 por la matriz inversa S^{-1} ; por lo que:

$$\beta S^{-1} = a S S^{-1},$$

por la propiedad de la matriz inversa,

$$S S^{-1} = I$$

donde I es la matriz identidad.

Después de este proceso se tiene:

$$a = \beta I = \beta S^{-1} \quad (\text{II.21})$$

El problema se reduce ahora en calcular S^{-1} , el cual puede realizarse adecuadamente con una computadora personal.

Ahora se generaliza esta notación a una combinación lineal en los coeficientes a_j de 18 funciones. Se requiere que a los puntos experimentales $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \dots (x_n, y_n)$ se les ajuste la mejor curva del tipo:

$$y_t = \sum_{j=1}^{18} a_j X_j(x) = a_1 X_1(x) + a_2 X_2(x) + \dots + a_n X_n(x) \quad (\text{II.22})$$

El minimizar $\Sigma(y - y_t)^2$ implica:

$$\frac{\partial \Sigma(y - y_t)^2}{\partial a_k} = \frac{\partial \Sigma \left\{ y_i - \sum_{j=1}^{18} a_j X_j(x_i) \right\}^2}{\partial a_k} = 0 \quad (\text{II.23})$$

Donde el índice i va sobre los puntos experimentales

(de 1 a n), j y k van de 1 a 18

Al igualar estas derivadas parciales a cero surgen n ecuaciones simultáneas, (ver apéndice E) definiendo el siguiente sistema:

$$\sum_{i=1}^n y_i X_k(x_i) - \sum_{j=1}^{18} a_j \sum_{j=1}^{18} \left\{ X_j(x_i) X_k(x_i) \right\} = 0, \quad (\text{II.24})$$

o bien:

$$\sum_{i=1}^n y_i x_{\kappa}(x_i) = \sum_{j=1}^n a_j \Sigma \left\{ x_j(x_i) x_{\kappa}(x_i) \right\} \quad (\text{II.25})$$

similarmente, estas ecuaciones pueden expresarse en forma matricial como:

$$\beta = a s \quad (\text{II.26})$$

donde β corresponde a la matriz columna

$$\beta = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n y_i x_1 Y \\ \sum_{i=1}^n y_i x_2 Y \\ \sum_{i=1}^n y_i x_3 Y \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n y_i x_{18} Y \end{bmatrix} \quad (\text{II.27})$$

k= núm. de canales.

a es la matriz renglón: $a = (a_1 \ a_2 \ a_3 \ \dots \ a_n)$ (II.28)

s es la matriz cuadrada:

$$s = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n (X_1)^2 & \Sigma X_1 X_2 & \Sigma X_1 X_3 & \dots & \Sigma X_1 X_n \\ \Sigma X_2 X_1 & \Sigma (X_2)^2 & \Sigma X_2 X_3 & \dots & \Sigma X_2 X_n \\ \Sigma X_3 X_1 & \Sigma X_3 X_2 & \Sigma (X_3)^2 & \dots & \Sigma X_3 X_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Sigma X_n X_1 & \Sigma X_n X_2 & \Sigma X_n X_3 & \dots & \Sigma (X_n)^2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.29})$$

como ya expusimos, al aplicar el método de Gauss-Jordan obtenemos: $a = s^{-1}\beta$

o incluyendo los subíndices:

$$a_j = \sum_{\kappa=1}^n s_{j\kappa}^{-1} \beta_{\kappa} = \sum_{\kappa=1}^n \left\{ s_{j\kappa}^{-1} y_{\kappa} x_{\kappa}(x_i) \right\} \quad (\text{II.30})$$

En forma análoga a la ec. II.21, el vector de coeficientes $a = (a_1 a_2 \dots a_{18})$, se obtiene de la relación:

$$a = \beta s^{-1} \quad (\text{II.21})$$

Para aplicar la ec. II.21 al modelo propuesto en esta tesis se identifican los siguientes elementos:

$$X_j = E (W_j - E) f_j(W_j) g(E)$$

$$y = N(C) = \text{núm. de cuentas en el canal } C$$

$$k = \text{núm. de canales.}$$

la relación entre E y C es:

$$\begin{aligned} E &= GC + E_0 = \\ &= (1.0390 \text{ keV/canal}) C + 1.14 \text{ KeV} \\ &\quad \text{para el espectro de 400 KeV y} \\ &= (1.0026 \text{ keV/canal}) C + 1.17 \text{ KeV} \\ &\quad \text{para el espectro de 300 KeV.} \end{aligned}$$

El índice $i = 1, 2, \dots, n$, corresponde al canal C y la suma sobre este índice es sobre todo el espectro de energía experimental y el número n de canales es un número que típicamente es grande ($n \sim 400$).

Haciendo estas sustituciones la ec. II.21 se puede escribir en la forma siguiente:

$$\beta = \begin{bmatrix} \Sigma X_1 N_c \\ \Sigma X_2 N_c \\ \Sigma X_3 N_c \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Sigma X_{18} N_c \end{bmatrix} \quad (\text{II.31})$$

$$a = (a_1 \ a_2 \ a_3 \ \dots \ a_{18}), \quad (\text{II.32})$$

y s queda como:

$$s = \begin{bmatrix} \Sigma(X_1)^2 & \Sigma X_1 X_2 & \Sigma X_1 X_3 & \cdot & \Sigma X_1 X_{18} \\ \Sigma X_2 X_1 & \Sigma(X_2)^2 & \Sigma X_2 X_3 & \cdot & \Sigma X_2 X_{18} \\ \Sigma X_3 X_1 & \Sigma X_3 X_2 & \Sigma(X_3)^2 & \cdot & \Sigma X_3 X_{18} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Sigma X_{18} X_1 & \Sigma X_{18} X_2 & \Sigma X_{18} X_3 & \cdot & \Sigma(X_{18})^2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.33})$$

C A P I T U L O I I I

ANALISIS DE LOS ESPECTROS DE BREMSSTRAHLUNG Y CONCLUSIONES

III.1. DISCUSION SOBRE EL ANALISIS DE ESPECTROS

BREMSSTRAHLUNG USANDO EL MODELO PROPUESTO.

El modelo propuesto y discutido ampliamente en el Capítulo II, el cual matemáticamente se sintetiza en la ecuación II.22 se usó para simular algunos de los espectros de fotones medidos, como los que se presentaron en las figuras 2-5 y 2-6. El problema de la simulación consistió fundamentalmente en obtener los coeficientes del vector $\beta=(a_1, a_2, \dots, a_{18})$, que son los factores de pesos relativo de las contribuciones de cada una de las parábolas y cuya superposición se espera que genere la forma del espectro de fotones medido. El método de cálculo del vector β también se discutió ampliamente en el Capítulo II el cual implica la inversión de la matriz S.

En cada uno de los espectros experimentales se observaron picos superpuestos al espectro continuo, los cuales se identificaron con líneas de fluorescencia $K\alpha_1$ y $K\alpha_2$ del oro, material del cual están contruidos los electrodos del detector de germanio hiperpuro. Por lo anterior se justificó que dichos picos se suprimieran de los espectros experimentales antes de realizar los cálculos del vector β .

En las figuras 3-1 y 3-2 se muestran dos ejemplos del uso del modelo para simular los espectros de fotones medidos para voltajes V de operación del acelerador de 300 y 400 KV.

En estas figuras, los espectros experimentales es decir el número de cuentas $N(C)$ en el canal C , están representados por puntos, mientras que las líneas continuas son la superposición de las 18 funciones $a_j X_j$ generados por el modelo. También se grafican individualmente cada una de estas funciones $a_1 X_1, a_2 X_2, \dots, a_{18} X_{18}$ cuyo "peso" en la superposición se refleja en los valores de los coeficientes a_j y gráficamente en el máximo de cada una de estas funciones.

Para el cálculo del vector $\beta = (a_1, a_2, \dots, a_{18})$ las funciones $X_j(E)$, como se discutió en el Capítulo II, se consideran la atenuación de fotones y la eficiencia del detector, siendo la expresión analítica del tipo:

$$X_j(E) = E(W_j - E) \exp(-\mu(E)x) \epsilon(E) \quad 3.1$$

Para el cálculo del vector β , se supuso que el único material que atenda los fotones desde el lugar en que se producen hasta que llegan al detector fue el tanque del acelerador. Para estimar la atenuación, el coeficiente $\mu(E)$ se supuso que el material del tanque era hierro exclusivamente y para el espesor del tanque se usó un valor nominal de $x = 3/16" = 4.76$ mm, dato obtenido de los manuales del fabricante del acelerador. El coeficiente $\mu = \mu(E)$ es una función de la energía E la cual en todo el rango de energías de interés (que es el rango de los espectros medidos), no es una función analítica.

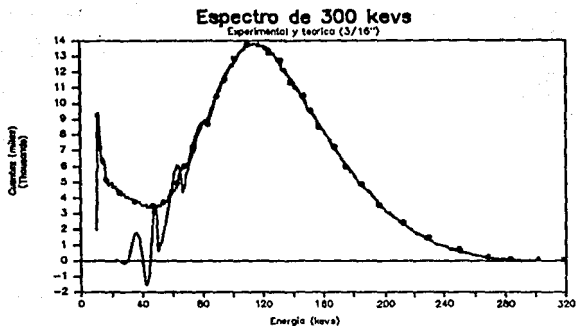


Fig. III-1 EJEMPLOS DEL USO DEL MODELO PARA SIMULAR EL
ESPECTRO DE 300 Kevs.

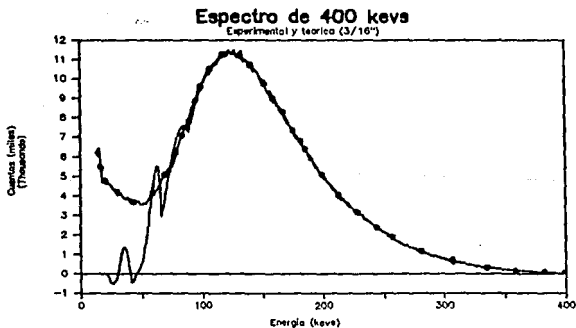


Fig. III-1 EJEMPLOS DEL USO DEL MODELO PARA SIMULAR EL
ESPECTRO DE 300 Kevs.

Por esta razón los valores de $\mu(E)$ se obtuvieron de tablas publicadas por el National Bureau of Standards USA ref 6. La eficiencia del detector $\epsilon(E)$ se obtuvo de los manuales de especificaciones del detector.

Para la energía E asociada a un canal C se usó la calibración en energía del espectrómetro, la cual para estos espectros se obtuvo la relación:

$$E = GC + E_0 = (1039 \text{ eV/canal}) C + 1140 \text{ eV}$$

Es conveniente hacer notar que el cálculo de cada uno de los coeficientes a_j , son cocientes de términos que involucran sumatorias sobre todos los canales del espectro de términos del tipo $X_jN(C)$ y como C es un número grande (en el rango de $1 < C < 270$), ésto involucró gran número de cálculos que pudieron realizarse gracias a la disponibilidad de las modernas computadoras personales.

El valor absoluto de los coeficientes a_j depende de qué funciones de atenuación y de eficiencia del detector se usen, por lo que el modelo es dependiente de estos factores.

Sin embargo, para estimar la dependencia de a_j respecto a estos factores se simuló el espectro suponiendo que no hay tanque del acelerador lo que equivale a suponer $x=0$ en la ecuación 3.1. y también que la eficiencia del detector $\epsilon(E)=1$, por lo que la función X_j , se reduce a una función tipo Kramers:

$$X_j(E) = E(W_j - E) \qquad 3.2$$

La simulación de los espectros obtenida usando las funciones del tipo de la ec.3.2, se muestra en las figuras 3-3 y 3-4.

En la tabla 3.1, se comparan los valores de los coeficientes a_j obtenidos para la simulación de los espectros de las figuras 3-1, 3-2, 3-3 y 3-4.

De estas tablas puede observarse que los valores de los coeficientes son similares cuando se usó X_j de los tipos 3.1 y 3.2, resultado inesperado. También puede observarse de las figuras anteriores, que las dos simulaciones explican satisfactoriamente la forma de los espectros experimentales.

Las incertidumbres en los coeficientes a_j están relacionadas con las incertidumbres que se tengan en el número de cuentas N en el canal C . La precisión en $N(C)$ es del tipo estadístico y el error está dado por:

$\sqrt{N(C)}$ por lo que el error porcentual es entonces:

$$\frac{\sqrt{N(C)}}{N(C)} \times 100\% = \frac{100\%}{\sqrt{N(C)}} \quad 3.3$$

Por lo anterior, se tuvo la precaución de acumular espectros con un número de cuentas grande, típicamente con $N(C)$ 10 000 en el máximo, por lo que la incertidumbre en el cálculo de las a_j debido a este factor no se considera.

En el Capítulo II se resaltó que los espectros medidos de rayos X presentan la característica de que cuando la energía E disminuye, la intensidad de la radiación aumenta. Esta característica fue un resultado inesperado y no se

TABLA III - 1.

COEFICIENTES CALCULADOS PARA LOS ESPECTROS ORIGINALES.

	300 kevs		400kevs	
	0°	3/16°	0°	3/16°
a1	-1.443E+01	2.566E+05	6.295E+00	-2.572E+05
a2	1.116E+01	-2.262E+05	5.830E+00	1.040E+05
a3	3.087E+00	8.007E+04	1.036E+00	6.950E+02
a4	5.230E-01	5.510E+02	-4.683E-01	2.486E+01
a5	-6.441E-01	3.906E+01	-1.175E+00	2.449E+00
a6	-1.497E+00	5.484E+00	-3.915E-01	1.141E+00
a7	-1.167E+00	1.547E+00	1.738E-01	1.107E+00
a8	4.868E-02	2.100E+00	2.492E-01	7.454E-01
a9	3.638E-01	1.544E+00	2.304E-01	5.098E-01
a10	3.035E-01	9.378E-01	1.686E-01	3.253E-01
a11	2.811E-01	6.624E-01	9.600E-02	1.746E-01
a12	2.873E-01	5.603E-01	6.843E-02	1.159E-01
a13	1.351E-01	2.538E-01	3.902E-02	6.375E-02
a14	1.053E-01	1.844E-01	2.758E-02	4.348E-02
a15	6.065E-02	1.017E-01	1.646E-02	2.539E-02
a16	5.844E-02	9.255E-02	9.851E-03	1.492E-02
a17	2.020E-02	3.123E-02	3.467E-03	5.344E-03
a18	1.134E-02	1.709E-02	1.036E-02	1.476E-02

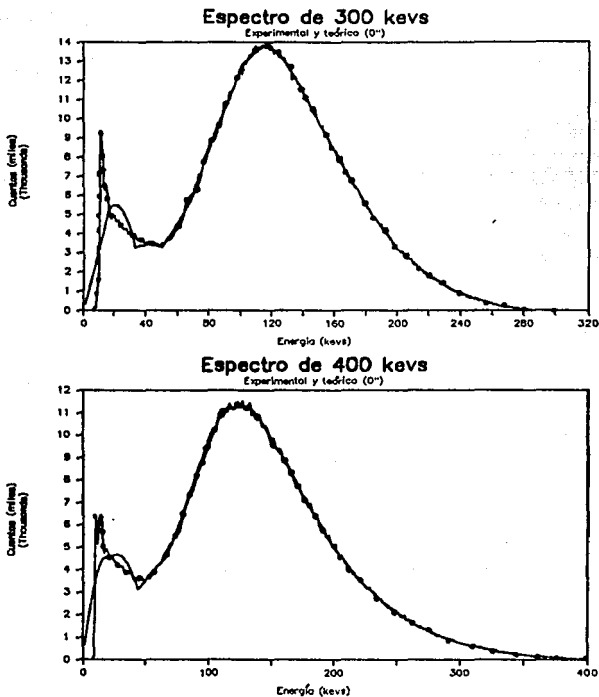


Fig. III-3 y III-4 Simulación usando las funciones de la
ecuación: $X_j(E) = E (W_j - E)$

conoce su explicación con certidumbre, sin embargo, se pueden hacer las siguientes hipótesis:

a) Deficiencia en el blindaje de colimación del detector de GH, lo cual hace posible que penetren al detector fotones de energía reducida por colisiones con los materiales (paredes, piso etc.) cercanos al detector. La reducción en energía de los fotones se aplica por colisiones Compton de los fotones con los electrones de los átomos de los materiales.

b) Otra posible contribución de la cola de baja energía del espectro, se podría deber a que algunos de los fotones que penetran en el volumen sensible del detector interactúan por efecto fotoeléctrico y otros por efecto Compton. La probabilidad de que ocurran estas interacciones está relacionada con la sección fotoeléctrica y sección Compton respectivamente. Los fotones que interactúan por efecto fotoeléctrico contribuyen a la altura de pulsos cuya amplitud es proporcional a la energía de los fotones incidentes. En contraste, los fotones que interactúan por efecto Compton, tienen una contribución al espectro de altura de pulsos continua, que va desde cero hasta un máximo, llamado borde Compton. Solo cuando inciden fotones monoenergéticos al detector se puede deducir del efecto Compton, la energía de éstos, pero si se tienen fotones no monoenergéticos, no se pueden conocer las energías correspondientes.

El uso de detectores de alta eficiencia de detección de fotones, los cuales tienen un volumen sensible grande, disminuyen la probabilidad de que fotones Compton escapen del detector y

contribuyan al espectro como fotones de energía total, aumentando la razón de la señal: fotoeléctrica a Compton ref 8.

c) Otra posible contribución a la cola de baja energía podría deberse a un efecto de "cascada" de fotones de baja energía producidos por la fluorescencia en los electrodos del oro del detector.

Es importante recalcar que las transiciones $K_{\alpha 1}$ y $K_{\alpha 2}$ del oro son observadas en los espectros y éstas se deben a vacancias de electrones producidos en los niveles más profundos del átomo. El efecto de cascada es la emisión de fotones de cada vez menor energía que se producen al irse cubriendo las vacancias por los electrones cuyas diferencias de energías son cada vez menores.

Debido a no conocer la naturaleza del origen de la cola de baja energía de los espectros, se probó el modelo para simular algunos espectros de fotones sin considerar esta zona, es decir se asignó $N(C)=0$ a todos los canales correspondientes a esta zona de baja energía.

La figura 3-5 presenta la simulación del espectro truncado de baja energía y en la tabla 3.2 se tabulan los coeficientes a_j obtenidos. Las funciones X_j se usaron con atenuación de fotones ($x=0$) y la eficiencia $\epsilon(E)=1$. La presencia de coeficientes negativos es debido principalmente a que las parábolas de

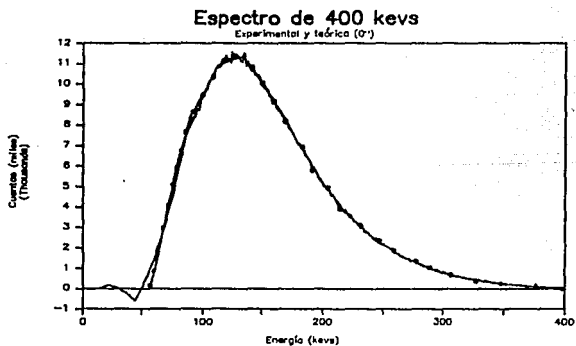
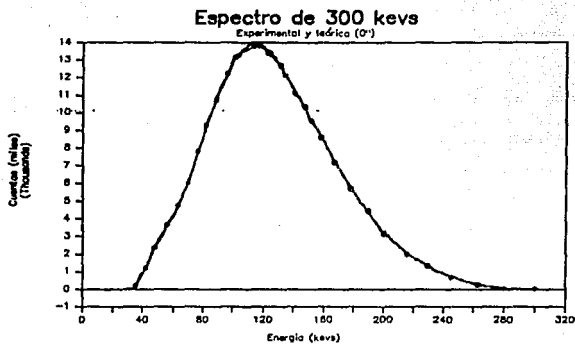


Fig. III-3 y III-4 Simulación usando las funciones de la ecuación: $X_j(E) = E (W_j - E)$

TABLA III - 2.
 COEFICIENTES CALCULADOS PARA LOS ESPECTROS TRUNCADOS.

	300 kevs		400 kevs	
	0"	3/16"	0"	3/16"
a1	7.726E+03	3.442E+04	2.202E+02	2.078E+02
a2	-5.473E+03	-6.082E+04	-1.264E+02	-1.213E+02
a3	1.578E+03	2.866E+04	-1.709E+01	-1.709E+01
a4	1.339E+00	5.254E+02	1.676E+01	1.676E+01
a5	1.339E+00	3.480E+01	3.107E+00	3.107E+00
a6	-1.762E+00	6.004E+00	9.109E-01	9.109E-01
a7	-1.473E+00	2.343E+00	1.095E+00	1.095E+00
a8	7.818E-01	2.056E+00	7.425E-01	7.425E-01
a9	7.818E-01	1.553E+00	5.100E-01	5.100E-01
a10	7.818E-01	9.358E-01	3.317E-01	3.317E-01
a11	4.536E-01	6.629E-01	1.779E-01	1.779E-01
a12	8.494E-01	5.602E-01	1.163E-01	1.163E-01
a13	3.065E-01	2.538E-01	6.546E-02	6.546E-02
a14	3.541E-01	1.844E-01	4.390E-02	4.390E-02
a15	1.475E-01	1.017E-01	2.615E-02	2.615E-02
a16	2.145E-01	9.255E-02	1.520E-02	1.520E-02
a17	5.016E-02	3.123E-02	5.002E-03	5.002E-03
a18	4.776E-02	1.709E-02	1.551E-02	1.551E-02

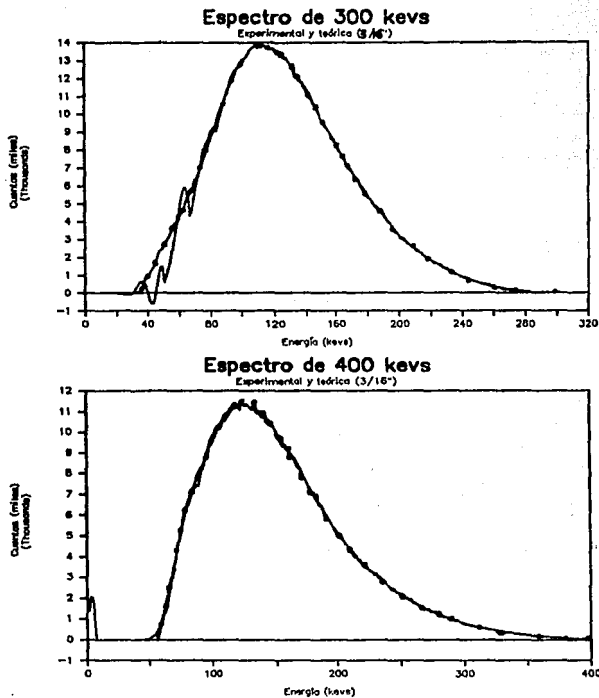


Fig. III-7 y III-8 SIMULACION CON EL ESPECTRO TRUNCADO EN BAJA ENERGIA CON ATENUACION Y EFICIENCIA REALES.

Kramers tienen contribución distinta de cero en esta zona y deben generarse contribuciones negativas que al sumarse a parábolas positivas simulen el espectro truncado.

III.2 CONCLUSIONES Y APLICACIONES DEL MODELO

En las figuras 3-6 y 3-7, se aplica el modelo considerando atenuación y eficiencia reales del detector. En la tabla III-2 se comparan los valores extraídos de los coeficientes considerando estos factores y cuando no se hace ($x=0$ y $\epsilon(E)=1$). Como se puede observar, el efecto de considerar estos dos factores tiene poca influencia relativa para los coeficientes con $j>12$ y su efecto es mayor para $j<12$. El poco efecto de las funciones de atenuación y eficiencia en los valores de a_j para $j>12$ es sorprendente sobre todo porque las funciones de atenuación varían fuertemente con la energía de los fotones E. La explicación de la poca diferencia en los valores de a_j calculados con estos métodos radica en que a_j es el cociente de sumatorias de términos del tipo $X_j(C)N(C)$ y los efectos tienden a cancelarse. Sin embargo para coeficientes a_j con $j<12$ la variación de la atenuación con la energía es mayor en la región de $j>12$ y la compensación en el valor de a_j no se logra. Puede concluirse que el modelo de simulación no es tan crítico en la toma de decisiones sobre qué coeficiente de atenuación $\mu(E)$ y de eficiencia $\epsilon(E)$ se use, sobre todo para obtener la simulación del espectro en la región de alta energía. También puede concluirse que la forma de los

espectros experimentales se reproduce bien en los dos casos discutidos.

El valor del modelo quizás radique en que se pueden extraer los valores relativos a los coeficientes a_j y de acuerdo con la discusión hecha en el Capítulo II, la interpretación física sobre el valor de $a_j = KZ_i i$, es decir, a_j es proporcional a la contribución relativa del número de electrones secundarios generados en el electrodo "j", los valores relativos de a_j podrían usarse como un método de diagnóstico de un buen comportamiento de operación de un tubo acelerador o viceversa, también puede usarse como diagnóstico de un mal funcionamiento del tubo acelerador.

Es conocido que los tubos aceleradores tienen una vida media y éstos hay que reemplazarlos cuando fallan en mantener el gradiente de voltaje dV/dx . Las fallas del tubo se llegan a presentar cuando el campo eléctrico entre dos electrodos cercanos produce un rompimiento eléctrico superficial en las paredes del tubo, generándose descargas eléctricas desprendiéndose electrones secundarios en inglés "flushover" lo cual, aún sin haz primario del acelerador, se generan rayos X. Midiendo el espectro de energía de rayos X con la fuente de iones apagada, podría identificarse el lugar o los lugares en donde está ocurriendo esta falla, los valores relativos de los coeficientes reflejarían la magnitud de las fallas.

El método de diagnóstico para detectar "flushovers" de electrones como se propuso anteriormente, no lo hemos

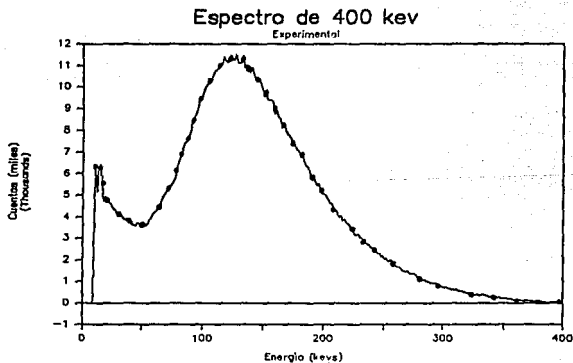
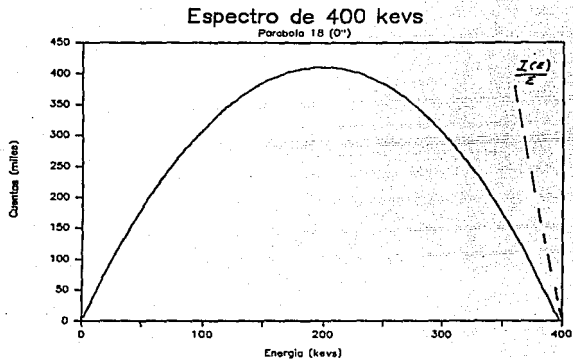


Fig. III-9 GRAFICA DE LA PARABOLA 3.4 Y DEL ESPECTRO DE
400 KEV.

comprobado por no tener tubos aceleradores con este problema. Lo que sí se deduce de estos cálculos es la contribución relativa de los electrones secundarios al espectro de br. medido en las particulares condiciones de operación del acelerador.

Sin embargo, una importante aplicación del modelo es debido a que se ha usado la extracción de los coeficientes a_{18} , que corresponde al último electrodo, cuyos e's son acelerados con el voltaje total V de operación del acelerador. La contribución potencial al espectro de este electrodo es:

$$I_{18}(E) = a_{18} E(eV-E) \quad 3.4$$

En la fig. 3-8 se grafica la ec. 3.4 y la función I_{18}/E junto con el espectro $N(C)$ medido para $V = 400$ KeV.

Como se mencionó en el Capítulo I, el mismo principio de determinar el voltaje de operación V del acelerador, determinando el punto final de la parábola, o más fácilmente, linealizando la parábola con la función $I(E)/E$ que es una ecuación de recta cuya intersección en el eje de las energías es numéricamente igual al voltaje de operación V del acelerador.

Este método propuesto, es un nuevo método alternativo para determinar el voltaje "V" de operación de ciertos tipos de aceleradores, el cual se ha usado para calibrar el vólmetro generador asociado al acelerador usado en esta tesis y también para calibrar en energías las diferentes líneas del imán selector de energías ref2.

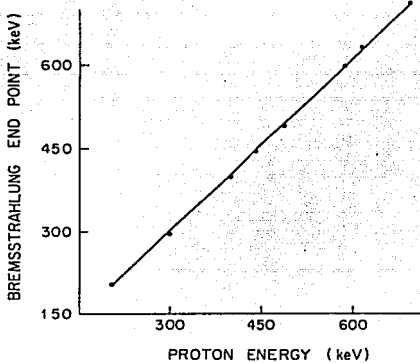


FIG III-10 COMPARACION DEL PUNTO DE ENERGIA FINAL DEL ESPECTRO DE BR. CON LA MEDIDA A TRAVES DE LA DEFLEXION MAGNETICA (EJE HORIZ).

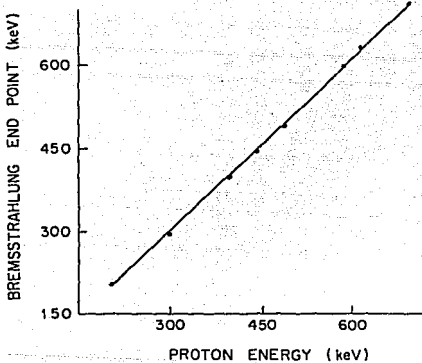


FIG III-10 COMPARACION DEL PUNTO DE ENERGIA FINAL DEL ESPECTRO DE BR. CON LA MEDIDA A TRAVES DE LA DEFLEXION MAGNETICA (EJE HORIZ).

B I B L I O G R A F I A

LIBROS.

- [1] Rolf Wolseth. "X Ray Energy Spectroscopy" 1979.
KEVEX Co. Burlingam, California.
- [2] Livingston, Benett. "Particle Accelerators" 1962.
Mc Graw Hill. New York.
- [3] Pierre Marmier and Eric Sheldon "Physics of Nuclei
and Particles" 1969 Vol I. Academic Press N.Y.
- [4] B.Cagnac, J.C.Pebay-Peyroula. "Modern Atomic
Physics" 1975. Macmillan Press. London.
- [5] Philip R. Bevington Data Reduction and Error
Analysis for the Physical Science.
1969 Mc. Graw Hill.N.Y
- [6] National Bureau of Standards. "Photon Cross Sec-
tions and Energy Absorption Coefficients from 10
KeV to 100 GeV" 1969. U.S. Dept. of Commerce.
NSRDS-NBS 29.
- [7] R.D. Evans. "The Atomic Nucleus" 14a. impresión.
1972. Mc Graw Hill New York.
- [8] G.F.Knoll. "Radiation Detection and Measurment"
1979. John Wiley & Sons. Michigan. E.U.

ARTICULOS Y TRABAJOS

- <a> Robert Wilson "The Next Generation of Particle Accelerators" Scientific American. Enero 1980.
Vol 242 No.1 U.S.A.
- Eduardo Andrade "En los Bordes de la Física"
Información Científica y Tecnológica. May. 1987.
Vol 9 No. 128 México.
- <c> E.Adem Chahin "Desinfestación de Maíz por Radiación". 1978 Tesis de Maestría en Alimentos.
Universidad Iberoamericana. México. D.F.
- <d> International Atomic Energy Agency. "Sterility Principle for Insect Control or Eradication" 1971.
O.N.U., F.A.O 1971 STI/PUB/265 Viena.
- <e> M.Soto Bandini "Estudio de Sobrevivencia de Bacterias Coliformes en Aguas Negras Tratadas con Radiación Ionizante" 1986 Tesis. Biología U.N.A.M.
- <f> V. Stanett "Ionic Polymerization and Related Process at High Dose Rates" . North Carolina State Univ. Raleigh N.C. 27607 USA.

A P E N D I C E A

"DEDUCCION DE LA LEY DE KRAMERS"

El mecanismo fundamental de la producción del espectro continuo de rayos X es la radiación por frenado (bremsstrahlung), esto es, los electrones producen radiación electromagnética al ser súbitamente frenados por un blanco.

La teoría clásica del electromagnetismo predice para este caso, un espectro en el que estarían presentes todas las frecuencias. Sin embargo, se ha encontrado experimentalmente que hay una frecuencia de corte más allá del cual no se emite radiación (Ley de Duane-Hunt). El dilema anterior se resuelve cuando se aplica la teoría cuántica de la radiación y la conservación de la energía como explicamos a continuación: El estado inicial del sistema es un electrón con energía cinética eV más un núcleo en reposo en el blanco, si después de la violenta deflexión que sufre el electrón al pasar cerca del núcleo del átomo, su energía cinética se reduce a eV' , y el átomo permanece neutro y sin excitar, la diferencia de energías cinéticas es igual a la energía del fotón:

$$h\nu = e(V - V') = hc/\lambda \quad A.1$$

ν y λ son la frecuencia y la longitud de onda del fotón. La máxima energía adquirible por el fotón es cuando el electrón le cede toda su energía cinética o sea cuando $eV' = 0$ lo cual corresponde a una frecuencia máxima o longitud de onda mínima:

$$E_{\max} = h\nu_{\max} = eV = hc/\lambda_{\min} \quad A.2$$

Es bien conocido que si una partícula sufre una aceleración de magnitud a emitirá radiación cuya intensidad (integrada sobre todas las direcciones) está dada por:

$$I = 2e^2 a^2 / 3c^3 \quad A.3$$

Esto origina un pulso electromagnético, el cual al descomponerse en sus componentes de Fourier y al cortar las frecuencias (de tal manera que no hay ninguna componente con $\nu > \nu_{\max}$) da, para blanco delgado, la siguiente intensidad por unidad de intervalo de frecuencia:

$$I d\nu = \text{cte } d\nu \quad (\text{blanco delgado}) \quad A.4$$

En la figura A-1 se muestran las intensidades de radiación para electrones de energías de 25,34 y 40 Kev. Puede apreciarse claramente que la energía máxima de los fotones es igual a la energía de aceleración de los electrones.

En la fig. A-2 se muestra el espectro para blanco grueso, éste se forma con la superposición de un número infinito de espectros de blanco delgado con frecuencia de corte decreciente, debido a que conforme penetran los electrones en el material su energía cinética se reduce y lo mismo ocurre con la frecuencia máxima de los fotones que puedan producir. Para este caso, la intensidad por unidad de intervalo de frecuencias será:

$$I = \alpha (\nu_0 - \nu) \quad A.5$$

El número de fotones por unidad de tiempo y de intervalo de energía que salen del blanco grueso está dado por:

FIG. A-1 INTENSIDADES DE RADIACION PARA ELECTRONES DE ENERGIA 25, 34 Y 40 KEV

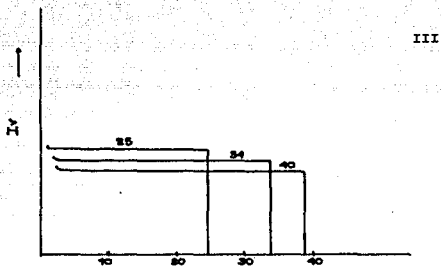


FIG. A2

ENERGIA (KeV)

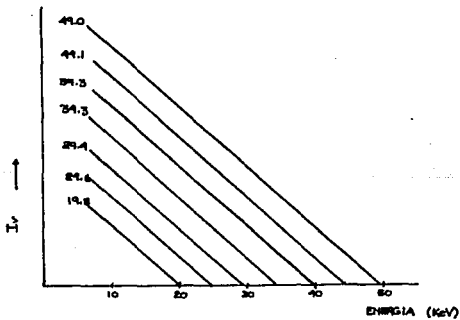


FIG A-2 EL ESPECTRO DE BLANCO GRUESO SE ALCANZA CON LA SUPERPOSICION DE INFINITOS ESPECTROS DE BLANCO DELGADO.

$$I(e) \propto iZ(E_0 - E) E \quad A.6$$

donde E_0 es la energía de los fotones incidentes e i su corriente, Z es el número atómico del blanco.

Como se aprecia en la ecuación anterior, el número de fotones producidos será directamente proporcional a la corriente y al número atómico de los átomos del blanco, además si se grafica este número contra la energía se verá una forma de campana con un máximo en $E = E_0/2$.

Si se suma la contribución de todas las energías se encontrará que la intensidad total está dada por:

$$I_{TOT} \propto i z v^2 \quad A.7$$

donde V es el voltaje de aceleración de los electrones.

Para blancos gruesos, uno encuentra que el número de fotones en la región de altas energías se incrementa conforme se reduce el ángulo de emisión que es un hecho opuesto a lo observado en blancos delgados.

Estos resultados fueron obtenidos en base a un cálculo semiclásico no relativista en que los efectos de dispersión de los electrones (incluyendo su retrodispersión) fueron despreciados y sólo la pérdida de energía se considera.

Considerando estas limitaciones y por su simplicidad, la fórmula de Kramers ha sido usada extensamente para estimar el espectro de blanco grueso (sin incluir la radiación característica) a un ángulo dado para varios casos experimentales, con correcciones que incluyen la absorción en el blanco y los materiales aladaños.

Los resultados experimentales han mostrado un buen ajuste para varias energías de los electrones, siempre en bajas energías y han indicado que la fórmula es satisfactoria.

Cuando se bombardea un blanco con iones tales como $^1\text{H}^+$, $^2\text{H}^+$, ^4He , etc. con energía de varios MeV, ocurre que al desacelerarse en el blanco, la energía producida por el proceso bremsstrahlung es despreciable cuando se compara con el bombardeo con electrones. La razón se debe a que la masa de los iones es al menos 3 órdenes de magnitud mayor que la masa de los electrones.

A P E N D I C E B

DESCRIPCION DEL CIRCUITO MULTIPLICADOR DE VOLTAJE
COCKCROFT-WALTON

Debido a la importancia histórica de la generación de un alto voltaje CD a partir de un voltaje alterno de baja tensión describimos el principio del método desarrollado por Cockcroft y Walton.

El mecanismo de funcionamiento se ilustrará a través de la figura B1, en dichas figuras se tienen dos conjuntos de capacitores C_1 , C_2 y C_3 ; C_1' y C_2' (todos de igual capacidad); y dos conjuntos de conductores, unos en línea punteada y otros en línea continua, que permiten conectar los capacitores C_1 , C_2 y C_3 a los capacitores C_1' y C_2' en dos configuraciones:

La primera se da cuando los elementos que conducen son las líneas punteadas, en este estado se puede ver que C_3 y C_2' , así como C_2 y C_1' , están conectados en paralelo de tal forma que C_3 y C_2' se encuentran a un mismo potencial E , en el siguiente estado los elementos que conducen son las líneas continuas, en dicho estado los capacitores que se encuentran conectados en paralelo son C_2' y C_2 ; C_1 y C_1' ; de tal forma que C_2 compartirá su carga con C_2' y quedarán finalmente a un potencial $V/2$. Al regresar al estado inicial C_3 repondrá la carga perdida por C_2' , quedando nuevamente con un potencial E , y C_2 compartirá su carga con C_1' y quedarán a un potencial $V/4$; en el siguiente estado C_2' cederá parte de su carga recuperada a C_2 quedando ambos a un

potencial de $5V/8$, mientras tanto C_1' cederá parte de su carga a C_1 quedando ambos a un potencial de $V/8$.

Hasta aquí si se mide el potencial entre el polo negativo de C_3 y el polo positivo de C_1 el voltaje será de $15V/8$. También puede apreciarse que a medida que el proceso avanza el potencial en los capacitores tiende a ser V en cada uno de ellos por lo que al pasar el transitorio, si se vuelve a medir el voltaje entre C_3 y C_1 será de $3V$.

Para la implementación de este multiplicador se hablará un poco del duplicador de voltaje implementado con diodos.

Dicho duplicador se ilustra en la figura B2. Es importante recalcar que la fuente de alimentación es una fuente de señal cuadrada, es decir que tiene cambios abruptos en su voltaje. El diodo S_1 conduce en el primer medio ciclo y S_2 conduce en el segundo medio ciclo. Cuando S_1 conduce, el capacitor C_3' se carga alcanzando un potencial E . Cuando llega el cambio abrupto de voltaje el potencial de la fuente y del condensador C_3' se ven sumados en C_3 dando un potencial $2V$.

En base a este duplicador el proceso de "switchero" descrito para el circuito Crocckroft-Walton se logra implementar con la configuración de diodos ilustrada en la figura B3.

Si se generaliza a n etapas el circuito Crocckroft-Walton y le alimenta n voltaje V , el voltaje generado será nV .

Pero esto no sucede en la práctica ya que, como se puede apreciar en la figura B3, se tiene una carga a través de la cual se descargan el capacitor C_1 , C_2 y C_3 con una corriente I por lo que la caída de potencial será It/C (I es la corriente media que fluye en el tiempo t , C , la capacitancia). Si f es la frecuencia de alimentación la caída de voltaje es I/fC y la transferencia de carga I/f .

La condición de estabilidad se logra cuando la carga perdida es igual a la carga recibida. En el voltaje de salida intervienen dos efectos: el primero es la ondulación del voltaje (diferencia entre el voltaje máximo y mínimo con carga) de salida y que está dado, para n etapas, por la expresión:

$$\delta V = (1/C_1 + 2/C_2 + 3/C_3 + \dots + n/C_n) I/f$$

Si los capacitores son iguales entonces se obtiene:

$$\delta V = n(n+1)I/2fC$$

Los condensadores inferiores son responsables de la mayor parte de la ondulación y se debe aumentar la capacitancia de éstos cuando más cerca del transformador se encuentra.

Se presenta también otra caída de potencial V que se debe a la diferencia entre el voltaje sin carga y con carga y viene dada por:

$$V^* = (2n + 2(n-1) + \dots + 2 \cdot 2 + 1) I/fC$$

de la que se obtiene

$$V^* = (2n^3/3 + n^2/2 - n/6) I / fC$$

Aquí los capacitores inferiores contribuyen nuevamente a V total y por esto es conveniente aumentar su capacidad adecuadamente.

Se puede sugerir que la capacitancia de C_n sea $2C$, no presentando demasiados problemas ya que solo debe soportar la mitad del voltaje que aparece a través de los otros capacitores de esta forma se logra que V disminuya paso por paso $n^2 i / 2fc$ de donde:

$$V^* = (2n^3/3 - n/6) I/fc$$

pero como el segundo término es despreciable para $n \geq 3$ se tiene.

$$V^* = 2n^3 I / 3fc$$

de tal forma que el voltaje estaría dado por:

$$V_{\text{máx}} = 2nVV^*$$

$$V_{\text{mín}} = 2nV - V^* - \delta V$$

pero la ondulación del voltaje es proporcional a V^*/n es decir:

$$-\delta V \approx V^*/n$$

de esta forma cuando aumenta el número de pasos n , el voltaje máximo aumenta al principio proporcionalmente a n , pero el voltaje no aumenta sin límites puesto que para valores grandes de n , V^* aumenta rápidamente.

El voltaje óptimo se obtiene diferenciando la ecuación anterior para $V_{\text{máx}}$, respecto a n y se obtiene:

$$\frac{d V_{\text{máx}}}{dn} = 0 \text{ entonces } N \text{ óptimo} = (Vfc/I)^{1/2}$$

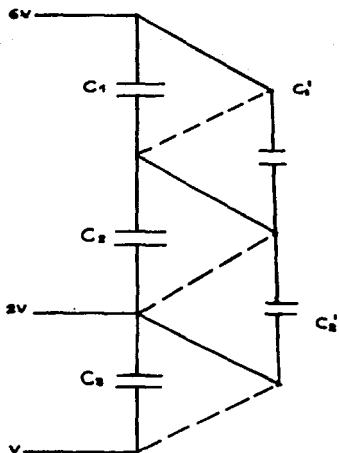


FIG. B-1' CONFIGURACIONES DE CONEXION EN EL CIRCUITO C-W.

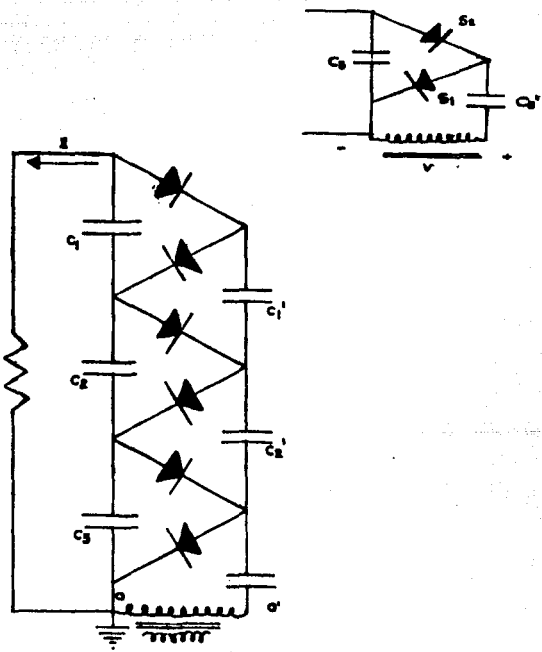


FIG. B-3 CONFIGURACION CON DUPLICADOR

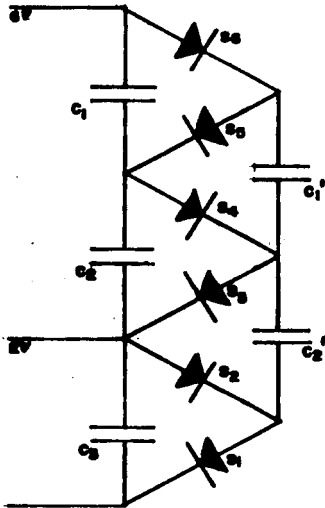


FIG. B-2 CONFIGURACION CON DIODOS

A P E N D I C E C

CALCULO DE LA CAPACIDAD DE LA TERMINAL DE ALTO VOLTAJE
DE UN ACELERADOR VAN DE GRAAFF.

Para hacer el cálculo, se divide la TAV en dos secciones. Ver figura. La sección I corresponde al casquete frente a la sección esférica del tanque y la sección II es el cilindro junto con la sección cilíndrica del tanque.

Como se muestra en la figura I-14, la capacidad de la TAV será respecto al tanque que la envuelve, entre la TAV y el tanque se tiene un gas dieléctrico de constante k_0 .

R_1 es el radio del cilindro que es el mismo que el casquete. R_2 es el radio del tanque. En condiciones de operación, el casquete estará al mismo voltaje que el cilindro y se tendrá la condición de dos capacitores en paralelo: y $C_{TOTAL} = C_I + C_{II}$

a) Cálculo de la capacidad de la sección I (C_I):

Dado que es un hemisferio, se calculará para toda la esfera y luego se divide entre dos, ya que toda la esfera sería la de dos hemisferios en paralelo porque estarían al mismo voltaje.

Recordando que el potencial para una esfera de radio R y carga Q es: $V = (1/4\pi\epsilon_0) Q/R$, el potencial para la esfera grande de radio R_2 se debe al de la carga de la esfera interna q_1 de radio R_1 y a la suya propia q_2 o sea:

$$VR_2 = (1/4\pi\epsilon_0) (q_1/R_2 + q_2/R_2)$$

El potencial de la esfera de radio R_1 se debe a su carga q_1 y a que está dentro de la esfera de carga q_2

$$VR_1 = (1/4\pi\epsilon_0) (q_1/R_1 + q_2/R_2)$$

La diferencia de potencial es:

$VR_1 - VR_2 = (q_1/4\pi\epsilon_0) (1/R_1 - 1/R_2) = (q/4\pi\epsilon_0) (R_2 - R_1)/R_1R_2$ y la capacidad $C = q_1/V = (4\pi\epsilon_0)R_1R_2/(R_2 - R_1)$ para el vacío.

En gas dieléctrico de constante $k_0: (4\pi_0)R_1R_2/(R_2 - R_1)$

Y la capacidad de la sección I es:

$$C_I = 2\pi\epsilon_0 k_0 R_1 R_2 / (R_2 - R_1)$$

b) Cálculo de la capacidad de la sección II (C_{II})

Se hará aplicando la Ley de Gauss. La superficie gaussiana será un cilindro concéntrico de radio r y longitud

$l \gg R_2$ en cuyo caso:

$$\oint E \cdot dS = q$$

$$E(2\pi r)l = q$$

$$E = q/2\pi r l$$

La diferencia de potencial es:

$$V = - \int E \, dl = - \int_{R_2}^{R_1} E \, dr$$

$$V = - \int_{R_2}^{R_1} \frac{q \, dr}{2\pi r l} = \frac{q \ln (R_2/R_1)}{2\pi l}$$

$$Y \quad C_{II} = q/V = \frac{2\pi l}{\ln (R_2/R_1)}$$

Con gas dieléctrico de constante k_0 :

$$C_{II} = \frac{2\pi l k_0}{\ln (R_2/R_1)}$$

$$Y \quad C_{TOTAL} = 2\pi k_0 \left\{ \frac{R_1 R_2 \epsilon_0}{R_2 - R_1} + \frac{1}{\ln (R_2/R_1)} \right\}$$

No Hay Hoja

XV Romano

№ НАУ НОЈА

XVIII Романо

A P E N D I C E D

RELACION ENTRE LA RIGIDEZ MAGNETICA DE UN ELECTROIMAN
Y LA ENERGIA CINETICA DE UN HAZ EN EL CAMPO MAGNETICO.

Una carga al atravesar un campo magnético experimenta una trayectoria circular con un radio proporcional al momento de la partícula.

En un laboratorio VDG se tiene un electroimán con el que puede medirse la energía del haz por la desviación de su trayectoria como se explica a continuación.

Para una órbita circular de radio R:

$$mv^2/R = qvB,$$

la rigidez magnética se define como el producto BR y:

$$BR = mv/q \quad D.1$$

Para partículas de la misma carga, $q = ze$, resulta que el radio es proporcional al momento. Cabe hacer notar que las dos ecuaciones son correctas relativísticamente.

Para relacionar la energía cinética T con la rigidez magnética es necesario relacionar primero el momento $p = mv$ con T:

Si m es la masa relativista de una partícula de velocidad v y masa en reposo m_0 :

$$m = m_0 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

donde c es la velocidad de la luz en el vacío. Así:

$$m^2 c^2 - m^2 v^2 = m_0^2 c^2 \quad o$$

$$p = (1/c) \sqrt{m^2 c^4 - m_0^2 c^4} \quad D.2$$

La energía cinética T es igual a la diferencia de la energía total mc^2 y de la energía en reposo m_0c^2 :

$$\begin{aligned} T &= mc^2 - m_0c^2 \\ m^2c^4 &= (m_0c^2 + T)^2 \\ &= m_0^2c^4 + 2m_0c^2T + T^2 \end{aligned}$$

que sustituyendo en D.2 da:

$$p = (1/c) \sqrt{2m_0c^2T + T^2} \quad \text{D.3}$$

al sustituir esta p en D.1 y recordando que $q=ze$:

$$\begin{aligned} BR &= (1/cqe) \sqrt{2m_0c^2T + T^2} \quad \text{y} \\ BR &= \sqrt{(2m_0T/ze)} \sqrt{1 + T/2m_0c^2} \quad \text{D.4} \end{aligned}$$

Para energías del orden del Mev el término relativista $T/2m_0c^2$ es despreciable, por ejemplo la masa en reposo del protón es 938 MeV, con $T=1$ Mev éste término es $\approx 1/2000$, entonces para los experimentos de un laboratorio VDG puede escribirse la ecuación anterior como:

$$BR = (144 \text{ kgauss-cm}) \sqrt{MT}/q$$

donde M es la masa atómica en u.m.a. y T en Mev. Así, para un ion (m,z) que se mueve en una trayectoria de un radio R , es posible conocer su energía cinética.

$$Se_i^4 = \sum_{i=1}^n e_i^4 \exp(-2\mu(e_i)) f_j(e_i) f_k(e_i)$$

$$SIie_i = \sum_{i=1}^n e_i \exp(-\mu(e_i)) f_k(e_i)$$

$$SIie_i^2 = \sum_{i=1}^n e_i^2 \exp(-\mu(e_i)) f_k(e_i)$$

El subíndice k está asociado a la a_k con respecto a la cual se hizo la derivada parcial, el subíndice j proviene de la expresión inicial de $I(E_j) = N_C$

Todo el proceso de resolución del modelo se realiza a través de un programa (aprox.pas) escrito en lenguaje Pascal. El programa se puede dividir en varias etapas ilustradas en la fig. E-1 que son:

- 1.- Inicialización de variables. (En la subrutina: Initialize).
- 2.- Inicialización de matrices. (Inimat).
- 3.- Lectura del archivo del espectro en disco (Espectro).
- 4.- Interpolación de puntos del espectro para tener un mayor número de datos para un mejor cálculo. (Interpola y Cubicsplinefree).
- 5.- Inicialización de matrices y vectores para el cálculo de sumatorias (Initmat, Fillchar).
- 6.- Generación de los términos de la matriz de sumatorias y valores independientes. (Suma)
- 7.- Generación de la matriz de sumatorias y vector independiente. (Gemat)

- 8.- Inversión de la matriz y obtención del vector solución. (Partial_pivoting)
- 9.- Generación del espectro, ajustado, $I(E_i)$ para compararlo con su contraparte, experimental, I_i obtenido al interpolar los puntos experimentales. (Evalúa)
- 10.- Salida a disco de los coeficientes a_j . (Escribematriz)

En el diagrama E-2 se puede ver el procesamiento de datos del programa aprox.pas y que es:

- 1.- Los datos de partida: el espectro experimental y la función de atenuación.
- 2.- Se interpola el espectro con lo que se manejan 270 puntos, asociándose 15 puntos a cada intervalo de ancho w .
- 3.- Generación de la matriz y del vector independiente.
- 4.- Inversión de la matriz y cálculo de los coeficientes.
- 5.- Evaluación de los resultados, calculando el espectro ajustado con los coeficientes obtenidos; graficando el espectro calculado y superponiendo el espectro experimental.

C D E F A

$$1_{\tau}(e_i) = \sum_{j \neq i}^n 1_j(e_i) = \sum_{j \neq i}^n a_j(\omega_j - e_i) e_i f_j(e_i)$$

$$\epsilon = \sum_{i=1}^n (1_{\tau}(e_i) - 1_i)^2 = \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j \neq i}^n a_j(\omega_j - e_i) e_i f_j(e_i) - 1_i \right]^2$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial a_k} = 2 \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j \neq i}^n a_j(\omega_j - e_i) e_i f_j(e_i) - 1_i \right] (\omega_i - e_i) e_i f_k(e_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j \neq i}^n a_j(\omega_j - e_i) e_i^2 f_k(e_i) f_j(e_i) \omega_k - \sum_{j \neq i}^n a_j(\omega_j - e_i) e_i^3 f_k(e_i) f_j(e_i) - 1_i \omega_k e_i f_k(e_i) + 1_i e_i^2 f_k(e_i) \right] =$$

$$= \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j \neq i}^n a_j \left[(\omega_j - e_i) e_i^2 f_k(e_i) f_j(e_i) \omega_k - (\omega_j - e_i) e_i^3 f_k(e_i) f_j(e_i) \right] - 1_i \omega_k e_i f_k(e_i) + 1_i e_i^2 f_k(e_i) \right] =$$

$$= \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j \neq i}^n a_j \left[\omega_j e_i^2 f_k(e_i) f_j(e_i) \omega_k - e_i^3 f_k(e_i) f_j(e_i) \omega_k - \omega_j e_i^3 f_k(e_i) f_j(e_i) + e_i^4 f_k(e_i) f_j(e_i) \right] - 1_i \omega_k e_i f_k(e_i) + 1_i e_i^2 f_k(e_i) \right] =$$

$$= \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^n a_{ij} \left[\omega^2 \kappa_j e_i^2 f_k(\sigma_i) f_j(\sigma_i) - w(\kappa + j) e_i^2 f_k(\sigma_i) f_j(\sigma_i) \right. \right. \quad \text{XXIII} \\ \left. \left. + e_i^4 f_k(\sigma_i) f_j(\sigma_i) \right] - 1_{w(\kappa) f_k(\sigma_i)} + 1_{e_i^2 f_k(\sigma_i)} \right] =$$

$$= \sum_{j=1}^n a_j \left[\omega^2 \kappa_j \sum_{i=1}^n e_i^2 f_k(\sigma_i) f_j(\sigma_i) - \right. \\ \left. w(\kappa + j) \sum_{i=1}^n e_i^2 f_k(\sigma_i) f_j(\sigma_i) + \sum_{i=1}^n e_i^4 f_k(\sigma_i) f_j(\sigma_i) \right] - \\ w(\kappa) \sum_{i=1}^n 1_{e_i f_k(\sigma_i)} + \sum_{i=1}^n 1_{e_i^2 f_k(\sigma_i)} = 0$$

C A S E S

$$I_{\tau}(\theta_i) = \sum_{j=1}^n I_j(\theta_i) = \sum_{j=1}^n a_j(\omega) - e_i \theta_i e^{-\mu(\theta_i)} f_j(\theta_i) \quad \text{XXV}$$

$$c = \sum_{i=1}^n (I_{\tau}(\theta_i) - I_i)^2 = \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^n a_j(\omega) - e_i \theta_i e^{-\mu(\theta_i)} f_j(\theta_i) - I_i \right]^2$$

$$\frac{\partial c}{\partial a_k} = 2 \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^n a_j(\omega) - e_i \theta_i e^{-\mu(\theta_i)} f_j(\theta_i) - I_i \right] (\omega_k - e_i \theta_i e^{-\mu(\theta_i)} f_k(\theta_i)) =$$

$$= \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^n a_j(\omega) - e_i \theta_i e^{-2\mu(\theta_i)} f_k(\theta_i) f_j(\theta_i) \omega_k - \right. \\ \left. \sum_{j=1}^n a_j(\omega) - e_i \theta_i e^{-2\mu(\theta_i)} f_k(\theta_i) f_j(\theta_i) - \right. \\ \left. I_i \omega_k e^{-\mu(\theta_i)} f_k(\theta_i) + I_i e_i^2 e^{-\mu(\theta_i)} f_k(\theta_i) \right] =$$

$$= \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^n a_j \left[(\omega) - e_i \theta_i e^{-2\mu(\theta_i)} f_k(\theta_i) f_j(\theta_i) \omega_k - \right. \right. \\ \left. \left. (\omega) - e_i \theta_i e^{-2\mu(\theta_i)} f_k(\theta_i) f_j(\theta_i) \right] - \right. \\ \left. I_i \omega_k e^{-\mu(\theta_i)} f_k(\theta_i) + I_i e_i^2 e^{-\mu(\theta_i)} f_k(\theta_i) \right] =$$

$$= \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^n a_j \left[\omega) e_i^2 e^{-2\mu(\theta_i)} f_k(\theta_i) f_j(\theta_i) \omega_k - e_i^2 e^{-2\mu(\theta_i)} f_k(\theta_i) f_j(\theta_i) \omega_k - \right. \right. \\ \left. \left. \omega) e_i^2 e^{-2\mu(\theta_i)} f_k(\theta_i) f_j(\theta_i) + e_i^2 e^{-2\mu(\theta_i)} f_k(\theta_i) f_j(\theta_i) \right] - \right. \\ \left. I_i \omega_k e^{-\mu(\theta_i)} f_k(\theta_i) + I_i e_i^2 e^{-\mu(\theta_i)} f_k(\theta_i) \right] =$$

$$= \sum_{\{k_2\}} \left[\sum_{\{k_1\}} a_j \left[\omega^2 k_1 e^{\mu} e^{-2\mu(\theta)} f_k(\theta) f_j(\theta) - \right. \right. \\ \left. \left. + e^{-2\mu(\theta)} + q \omega \right] \frac{1}{r_k^2(q)} \frac{1}{r_j^2(q)} \right] - \sum_{\{k_1\}} \omega^2 \mu e^{\mu} \left[r_k^2(q) + \frac{1}{q} \right] \frac{1}{r_k^2(q)} f_j(\theta) =$$

$$= \sum_{\{k_1\}} a_j \left[\omega^2 k_1 \sum_{\{k_2\}} e^{\mu} e^{-2\mu(\theta)} f_k(\theta) f_j(\theta) - \right. \\ \left. \omega^2 \sum_{\{k_2\}} \left[e^{\mu} e^{-2\mu(\theta)} \frac{1}{r_k^2(q)} f_j(\theta) f_k(\theta) + \frac{1}{r_k^2(q)} \sum_{\{k_2\}} e^{\mu} e^{-2\mu(\theta)} \frac{1}{r_k^2(q)} f_j(\theta) f_k(\theta) \right] \right] \\ \omega^2 \sum_{\{k_2\}} \left[e^{\mu} e^{-\mu(\theta)} f_k(\theta) + \sum_{\{k_2\}} e^{\mu} e^{-\mu(\theta)} f_k(\theta) \right] = 0$$

XXVI

DIAGRAMA E - 1

DIAGRAMA DE FLUJO
(PROGRAMA APROX.PAS)

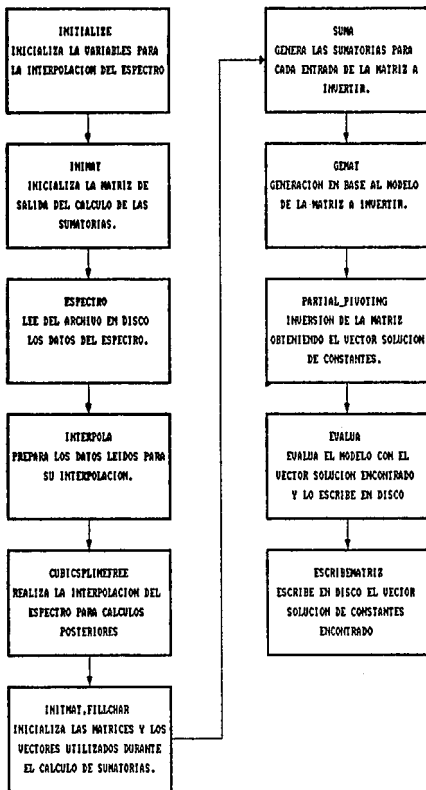


DIAGRAMA E - 2

PROCESAMIENTO DE DATOS
(PROGRAMA APROX.PAS)

