

6
2ej.



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO**

FACULTAD DE INGENIERIA

**METODOS DE SOLUCION PARA RESOLVER
LAS ECUACIONES DE FLUJO MULTIFASICO
EN SIMULACION DE YACIMIENTOS**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

INGENIERO PETROLERO

P R E S E N T A N :

JOSE ANTONIO BELLO MEDRANO

ROSALBA MENDEZ PEREZ

RIGOBERTO NUÑEZ SOI IS

MEXICO, D. F.

1992

**TESIS CON
FALSA FE ORIGEN**



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE

	Pág.
INTRODUCCION	
I. DEFINICION DEL PROBLEMA 1
II. MODELO MATEMATICO 3
II.1 Principios y ecuaciones básicas 3
II.1.1 Ecuación de continuidad 3
II.1.2 Ecuación de movimiento 8
II.1.3 Ecuación de estado 11
II.2 Ecuaciones de flujo multifásico 12
III. MODELO NUMERICO 18
III.1 Método de diferencias finitas 18
III.2 Discretización de las ecuaciones de flujo multifásico 23
III.3 Cálculo de transmisibilidades 25
III.4 Estabilidad y convergencia del esquema de solución. 27
IV. METODOS DE SOLUCION DE LAS ECUACIONES DE FLUJO. 29
IV.1 IMPES 29
IV.2 SS 50
IV.3 SEQ 61
IV.4 TOTALMENTE IMPLICITO 75

	Pág.
V. PROGRAMA DE COMPUTO 85
VI. EJEMPLO DE APLICACION 96
VII. RESULTADOS Y CONCLUSIONES 103
APENDICE A 106
NOMENCLATURA 126
REFERENCIAS 128

INTRODUCCION.

Los proyectos que se realizan en Ingeniería Petrolera tienen como objetivo primordial el desarrollo y la optimización de técnicas y recursos que traducidos a tiempo y dinero representan ganancias y avances tecnológicos, siempre enfocados a un mayor aprovechamiento en la explotación del petróleo, en su calidad de recurso natural no renovable.

Una de estas técnicas orientadas a optimizar la recuperación de hidrocarburos, es la simulación matemática de yacimientos, que es un proceso mediante el cual con la ayuda de un modelo matemático se integra un conjunto de factores para describir con cierta precisión el comportamiento de procesos físicos que ocurren en el yacimiento.

El presente trabajo muestra el desarrollo de un modelo matemático que permite simular el flujo multifásico de las fases aceite, agua y gas en el medio poroso, el cual queda representado por un sistema de ecuaciones diferenciales parciales no lineales de segundo orden, las cuales salvo en algunas excepciones no tienen solución analítica, por lo que se tienen que usar técnicas numéricas para llegar a su

solución; el método de diferencias finitas es el más utilizado para discretizar las ecuaciones anteriores.

El objetivo principal de este trabajo es resolver las ecuaciones de flujo multifásico ya discretizadas, mediante diferentes métodos que son: IMPES (Implicito en Presión y Explicito en Saturación), SS (Solución Simultánea), SEQ (Método Secuencial) y Totalmente Implicito (Fully Implicit). Estos se aplicaron a un modelo de flujo bifásico agua-aceite en una dimensión, resolviéndose el sistema de ecuaciones no lineales que se genera, utilizando el algoritmo de Thomas. El modelo se validó con información de un yacimiento hipotético^{1,2,3}, presentándose los resultados obtenidos, así como el análisis de los mismos en este trabajo.

CAPITULO I

DEFINICION DEL PROBLEMA

Uno de los grandes problemas que enfrenta la tecnología de explotación del petróleo es la predicción del comportamiento de los fluidos en un yacimiento. Para ello el ingeniero debe tener la habilidad de realizar una simulación de buena calidad a fin de alcanzar el máximo aprovechamiento del potencial natural del yacimiento.

Desde un principio se ha utilizado el modelo de cero dimensiones, modelo tanque o de balance de materia. Se dice que es de cero dimensiones debido a que las propiedades petrofísicas, las propiedades de los fluidos y los valores de presión no varían de punto a punto; esto es equivalente a considerar valores promedio de estos parámetros a lo largo de todo el yacimiento.

Actualmente se han desarrollado simuladores numéricos que permiten predecir el flujo multifásico en el medio poroso, en los cuales las propiedades de la roca y de los fluidos pueden variar de punto a punto y permiten definir adecuadamente los pozos.

Las ecuaciones que se emplean para representar matemáticamente el flujo multifásico se obtienen de la combinación de las ecuaciones de continuidad, de movimiento y estado. Pero el *problema* no radica en la obtención de esas ecuaciones, sino en cómo resolverlas, ya que son ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden no lineales, cuya solución no puede obtenerse analíticamente, por lo que se resuelven por técnicas numéricas.

El presente trabajo tiene como objetivo principal resolver las ecuaciones de flujo por diferentes métodos, indicando las ventajas y limitaciones que éstos tienen en su aplicación.

CAPITULO II

MODELO MATEMATICO^{1,3,5}

II.1 PRINCIPIOS Y ECUACIONES BASICAS

El flujo simultáneo de dos o más fluidos inmiscibles a través de un medio poroso está representado por un sistema de ecuaciones diferenciales parciales no lineales, las cuales resultan de la combinación del principio de conservación de masa, de una ecuación de movimiento y de una ecuación de estado, y son denominadas ecuaciones de difusividad.

II.1.1. ECUACION DE CONTINUIDAD

La ecuación de continuidad se basa en el principio de conservación de masa el cual establece, para cada elemento diferencial representativo del medio poroso, que la masa que entra menos la masa que sale es igual al cambio de masa en dicho elemento:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{masa entrando} \\ \text{en el volumen} \\ \text{de control} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{masa que sale} \\ \text{del volumen} \\ \text{de control} \end{array} \right\} + TF = \left\{ \begin{array}{l} \text{cambio de masa} \\ \text{en el volumen} \\ \text{de control} \end{array} \right\}$$

.....(II.1.1)

Donde TF es el término fuente o sumidero.

La forma de relacionar las propiedades del medio poroso al volumen de control se realiza aplicando el concepto de *aproximación continua*. Este concepto implica que para un tiempo dado, el valor de la porosidad asociada a un punto "P" es el valor representativo del elemento de volumen de control que lo contenga. Esto se realiza con el fin que los valores de los parámetros del medio poroso sean funciones continuas en el tiempo y en el espacio.

El flujo de masa a través del área A es $(\rho v A)$, donde v es una componente de la velocidad aparente perpendicular al área de flujo A del elemento de volumen y ρ es la densidad del fluido.

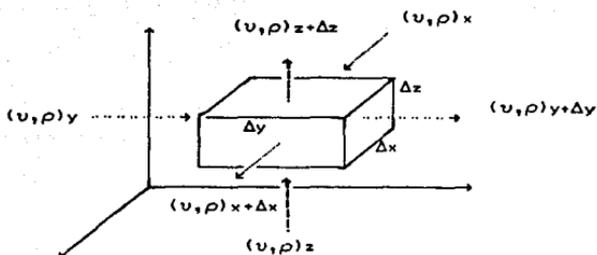


Fig. II.1. Masa que entra en un bloque de malla en un Δt .

De acuerdo a la Fig. II.1, se observa que la masa que entra en un bloque de malla durante Δt es:

$$(\rho v)_x \Delta y \Delta z \Delta t + (\rho v)_y \Delta x \Delta z \Delta t + (\rho v)_z \Delta x \Delta y \Delta t .$$

La masa que sale del volumen de control en Δt se representa por:

$$(\rho v)_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z \Delta t + (\rho v)_{y+\Delta y} \Delta x \Delta z \Delta t + (\rho v)_{z+\Delta z} \Delta x \Delta y \Delta t .$$

Si existe extracción o adición de masa al volumen de control, se define el término fuente o sumidero.

$$\pm q^* \rho \Delta t$$

El factor q^* es un gasto a condiciones de yacimiento. Por convención se considerará positivo si se inyecta masa al bloque y negativo si se produce del bloque.

La masa acumulada dentro del volumen de control en el intervalo Δt es:

$$(\rho\phi Sr)_{t+\Delta t} \Delta x \Delta y \Delta z - (\rho\phi Sr)_t \Delta x \Delta y \Delta z .$$

Sustituyendo lo anterior en la Ec. II.1:

$$[(\rho v)_{x+\Delta x} - (\rho v)_x] \Delta y \Delta z \Delta t + [(\rho v)_{y+\Delta y} - (\rho v)_y] \Delta x \Delta z \Delta t +$$

$$[(\rho v)_{z+\Delta z} - (\rho v)_z] \Delta x \Delta y \Delta t \pm q^* \rho \Delta t = [(\rho\phi Sr)_{t+\Delta t} - (\rho\phi Sr)_t] \Delta x \Delta y \Delta z .$$

Dividiendo entre $\Delta x \Delta y \Delta z \Delta t$ obtenemos:

$$\left[\frac{(\rho v)_{x+\Delta x} - (\rho v)_x}{\Delta x} \right] + \left[\frac{(\rho v)_{y+\Delta y} - (\rho v)_y}{\Delta y} \right] + \left[\frac{(\rho v)_{z+\Delta z} - (\rho v)_z}{\Delta z} \right] .$$

$$\pm \left[\frac{q^* \rho}{\Delta x \Delta y \Delta z} \right] = \left[\frac{(\rho\phi Sr)_{t+\Delta t} - (\rho\phi Sr)_t}{\Delta t} \right] \quad (II.1.2)$$

Tomando límites cuando los incrementos tienden a cero ($\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta t \rightarrow 0$) y aplicando el concepto de la derivada se llega a lo siguiente:

$$- \left\{ \left[\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} \right] + \left[\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} \right] + \left[\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} \right] \right\} \pm \left[\frac{q^* \rho}{\Delta x \Delta y \Delta z} \right]$$

$$= \left[\frac{\partial(\rho \phi S t)}{\partial t} \right] \quad (II.1.3)$$

Hay que hacer notar que el signo negativo se debe a que al incrementarse la distancia la velocidad tiende a disminuir.

Finalmente, la ecuación anterior se puede representar en forma vectorial de la siguiente forma:

$$- \nabla \cdot (\rho \vec{v}) \pm \left[\frac{q^* \rho}{\Delta x \Delta y \Delta z} \right] = \left[\frac{\partial(\rho \phi S t)}{\partial t} \right], \quad (II.1.4)$$

la cual es la ecuación de continuidad.

En la ecuación anterior el operador ∇ está definido en coordenadas cartesianas como:

$$\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k.$$

II.1.2. ECUACION DE MOVIMIENTO.

La ecuación más común que describe el flujo de fluidos a través de medios porosos es la llamada ley de Darcy.

Si se define la función potencial de flujo como:

$$\phi = P + \gamma D, \quad (II.1.5)$$

donde γ es el peso específico del fluido y D es la profundidad con respecto a un plano de referencia (con dirección vertical hacia abajo). Entonces, considerando fluidos incompresibles

$$\nabla \phi = \nabla P + \gamma \nabla D$$

y

$$\vec{v} = - \frac{kk_r}{\mu} \nabla \phi \quad (II.1.6)$$

Si se desprecian los efectos gravitacionales, la expresión anterior se reduce a

$$\vec{v} = - \frac{kk_r}{\mu} \nabla P, \quad (11.1.7)$$

la cual es la forma más simple de la ley de Darcy en forma vectorial.

Escribiendo la Ec. 11.1.7 para el caso del aceite

$$\vec{v}_o = - \frac{kk_{r_o}}{\mu_o} \nabla P_o. \quad (11.1.8)$$

Para el caso del agua

$$\vec{v}_v = - \frac{kk_{r_v}}{\mu_v} \nabla P_v \quad (11.1.9)$$

Para el gas es necesario considerar los siguientes términos:

$$\vec{u}_{gT} = \vec{u}_{gl} + \vec{u}_{gdo} + \vec{u}_{gdv}$$

donde

\vec{u}_{gT} = Velocidad total de la fase gaseosa.

\vec{u}_{gl} = Velocidad del gas libre.

\vec{u}_{gdo} = Velocidad del gas disuelto en el aceite.

\vec{u}_{gdv} = Velocidad del gas disuelto en el agua.

Este último término se puede despreciar, con lo que la velocidad del gas se expresa como:

$$\vec{u}_{gT} = -\frac{k k_{rg}}{\mu_g} \nabla P_g - R_a \left[\frac{k k_{ro}}{\mu_o} \nabla P_o \right] \quad (II.1.10)$$

Las suposiciones en que se basa esta ecuación son:

- Flujo de una fase.
- Flujo laminar en régimen permanente.
- Flujo isotérmico.
- No existe reacción entre el fluido y el medio poroso.
- No considera el efecto de Klinkenberg.

11.1.3. ECUACION DE ESTADO.

Una ecuación de estado es aquella que relaciona el comportamiento de la densidad de un fluido en función de la presión y de la temperatura. Si se considera flujo isotérmico, la densidad se expresa como función exclusivamente de la presión. La densidad del aceite, agua y gas se puede relacionar con la presión a través de su correspondiente factor de volumen de la manera siguiente:

$$\rho_{o@cy} = \frac{\rho_{o@ca}}{B_o} \quad (11.1.11)$$

$$\rho_{v@cy} = \frac{\rho_{v@ca}}{B_v} \quad (11.1.12)$$

$$\rho_{g@cy} = \frac{\rho_{g@ca}}{B_g} \quad (11.1.13)$$

II.2 ECUACIONES DE FLUJO MULTIFASICO

Sustituyendo la ecuación de estado y la ley de Darcy en la ecuación de continuidad se tiene para el aceite:

$$-\nabla \cdot \left\{ \frac{\rho_o \theta_{ca}}{B_o} \left[- \frac{k k_{ro}}{\mu_o} \nabla \bar{\Phi}_o \right] \right\} \pm \frac{q_o^* \rho_o \theta_{ca}}{V_b B_o} = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\rho_o \theta_{ca} \phi S_o}{B_o} \right\}.$$

Considerando que la densidad a condiciones estándar es constante, se puede eliminar de la ecuación:

$$\nabla \cdot \left\{ \frac{k k_{ro}}{B_o \mu_o} \nabla \bar{\Phi}_o \right\} \pm \frac{q_o^*}{V_b B_o} = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\phi S_o}{B_o} \right\}. \quad (\text{II.2.1a})$$

Desarrollando de igual forma para el agua obtenemos:

$$\nabla \cdot \left\{ \frac{k k_{rv}}{B_v \mu_v} \nabla \bar{\Phi}_v \right\} \pm \frac{q_v^*}{V_b B_v} = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\phi S_v}{B_v} \right\}. \quad (\text{II.2.1b})$$

Para el caso del gas se tienen las siguientes consideraciones:

La ley de Darcy para el gas se define de la misma manera que en el apartado correspondiente.

El gasto de gas total se define como

$$q_g^* = q_{gl}^* + q_{gdo}^* = q_{gl}^* + R_g q_o^*$$

La saturación del gas total se expresa por

$$S_{gT} = S_{gl} + S_{gdo} .$$

Sustituyendo se tiene:

$$S_{gT} = S_g + \frac{R_g S_o B_g}{B_o}$$

$$\nabla \cdot \left\{ \frac{k k_{rg}}{B_g \mu_g} \nabla \phi_g \right\} + \nabla \cdot \left\{ \frac{k k_{ro}}{B_o \mu_o} R_g \nabla \phi_o \right\} = \frac{q_{gT}^*}{V_b B_g}$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\phi S_g}{B_g} + \frac{\phi R_g S_o}{B_o} \right\} . \quad (II.2.1c)$$

Se tienen 3 ecuaciones diferenciales parciales no lineales con seis incógnitas que son : P_o , P_v , P_g , S_o , S_v y S_g ; por lo que para reducir a tres incógnitas se usan las siguientes relaciones auxiliares.

$$S_o + S_v + S_g = 1 \quad (II.2.2)$$

$$P_{cg/o} = P_g - P_o \quad (II.2.3)$$

$$P_{cv/o} = P_o - P_v \quad (II.2.4)$$

Sustituyendo las Ecs. (II.2.2), (II.2.3) Y (II.2.4) en las Ecs. (II.2.1) se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{k_x k_{r_o}}{B_o \mu_o} \left[\frac{\partial P_o}{\partial x} - \gamma_o \frac{\partial D}{\partial x} \right] \right\} +$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{k_y k_{r_o}}{B_o \mu_o} \left[\frac{\partial P_o}{\partial y} - \gamma_o \frac{\partial D}{\partial y} \right] \right\} +$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{k_z k_{r_o}}{B_o \mu_o} \left[\frac{\partial P_o}{\partial z} - \gamma_o \frac{\partial D}{\partial z} \right] \right\} \pm \frac{q_{o@cs}}{v_b} =$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\phi \frac{(1 - S_g - S_v)}{B_o} \right]. \quad (II.2.5a)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{k_x k_{rv}}{B_v \mu_v} \left[\frac{\partial P_o}{\partial x} - \frac{\partial P_c}{\partial x} - \gamma_v \frac{\partial D}{\partial x} \right] \right\} +$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{k_y k_{rv}}{B_v \mu_v} \left[\frac{\partial P_o}{\partial y} - \frac{\partial P_c}{\partial y} - \gamma_v \frac{\partial D}{\partial y} \right] \right\} +$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{k_z k_{rv}}{B_v \mu_v} \left[\frac{\partial P_o}{\partial z} - \frac{\partial P_c}{\partial z} - \gamma_v \frac{\partial D}{\partial z} \right] \right\} + \frac{q_{v@ce}}{v_b} =$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\phi \frac{(Sv)}{B_v} \right].$$

(11.2.5b)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{k_x k_{rg}}{B_g \mu_g} \left[\frac{\partial P_o}{\partial x} + \frac{\partial P_c}{\partial x} - \gamma_g \frac{\partial D}{\partial x} \right] \right\} +$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{k_x k_{rg}}{B_g \mu_g} \left[\frac{\partial P_o}{\partial y} + \frac{\partial P_c}{\partial y} - \gamma_g \frac{\partial D}{\partial y} \right] \right\} +$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{k_x k_{rg}}{B_g \mu_g} \left[\frac{\partial P_o}{\partial z} + \frac{\partial P_c}{\partial z} - \gamma_g \frac{\partial D}{\partial z} \right] \right\} +$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{k_x k_{ro}}{B_o \mu_o} R_{ao} \left[\frac{\partial P_o}{\partial x} - \gamma_o \frac{\partial D}{\partial x} \right] \right\} +$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{k_y k_{ro}}{B_o \mu_o} R_{ao} \left[\frac{\partial P_o}{\partial y} - \gamma_o \frac{\partial D}{\partial y} \right] \right\} +$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{k_z k_{ro}}{B_o \mu_o} R_{ao} \left[\frac{\partial P_o}{\partial z} - \gamma_o \frac{\partial D}{\partial z} \right] \right\} \pm \frac{q_{gr@cs}}{V_b} =$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\phi \frac{S_g}{B_g} + \phi \frac{(1 - S_g - S_v)}{B_o} \right].$$

(II.2.5c)

Para tener completamente definido el problema hace falta establecer las condiciones iniciales y de frontera.

Condiciones iniciales. Cuando una de las variables independientes, en una ecuación diferencial es el tiempo, se necesita conocer la variable dependiente a un tiempo t_0 para obtener la solución de la ecuación a otros tiempos:

$$Pr(x,y,z,0) = Pr(x,y,z)$$

$$Sr(x,y,z,0) = Sr(x,y,z)$$

Condiciones de frontera. La solución de una ecuación diferencial parcial involucra tener valores numéricos para las variables dependientes dentro de una región con las condiciones de frontera en las cuales los valores de la función o de sus derivadas estén especificadas.

$$\left. \frac{\partial Pr}{\partial n} \right|_{n=0} = 0 \qquad \qquad \qquad \left. \frac{\partial Pr}{\partial n} \right|_{n=L_n} = 0$$

$$r = 0, w, g$$

$$n = x, y, z$$

CAPITULO III.

MODELO NUMERICO^{1,3,5}

Las ecuaciones que describen el flujo de fluidos en medios porosos son ecuaciones diferenciales parciales no lineales, las cuales no tienen solución analítica, salvo en algunas excepciones. En consecuencia se requiere de técnicas numéricas para resolverlas, siendo el método de discretización por diferencias finitas la más utilizada.

III.1 METODO DE DIFERENCIAS FINITAS

La transformación de una ecuación diferencial continua a una forma discreta se hace generalmente utilizando el método de diferencias finitas. Así, las ecuaciones diferenciales parciales (EDP) son reemplazadas por su equivalente en diferencias finitas, las cuales se obtienen a partir de la serie de Taylor.

SERIE DE TAYLOR.

Para aproximar las primeras y segundas derivadas de una función continua por una forma discreta se hace uso de la serie de Taylor.

Sea una función $f(x)$ que se expande alrededor de un punto cualquiera "a" :

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \alpha_2(x-a)^2 + \alpha_3(x-a)^3 + \dots + \alpha_n(x-a)^n,$$

donde los coeficientes $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ son incógnitas.

Derivando sucesivamente la función se tiene:

$$f'(x) = \alpha_1 + 2\alpha_2(x-a) + 3\alpha_3(x-a)^2 + \dots + n\alpha_n(x-a)^{n-1}$$

$$f''(x) = 2\alpha_2 + 6\alpha_3(x-a) + \dots + (n-1)n\alpha_n(x-a)^{n-2}$$

⋮

$$f^n(x) = n! \alpha_n + (n-1)! (x-a)$$

Despejando las incógnitas y evaluando para $x=a$ se obtiene:

$$\alpha_0 = f(a)$$

$$\alpha_1 = f'(a)/1!$$

$$\alpha_2 = f''(a)/2!$$

$$\vdots$$

$$\alpha_n = f^n(a)/n! .$$

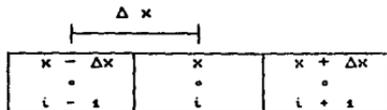
Sustituyendo el valor de estos coeficientes y haciendo $\Delta x = x - a$

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} \Delta x + \frac{f''(a)}{2!} \Delta x^2 + \dots + \frac{f^n(a)}{n!} \Delta x^n \quad (\text{III.1.1})$$

$$f(x+\Delta x) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!} \Delta x + \frac{f''(x)}{2!} \Delta x^2 + \dots + \frac{f^n(x)}{n!} \Delta x^n .$$

.....(III.1.2)

Para un arreglo de nodos de malla en la dirección x , de la forma siguiente



se puede expresar la serie de Taylor en estos términos:

$$f_{i+1} = f_i + \Delta x \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i + \Delta x^2 \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i + \dots \quad (\text{III.1.3})$$

$$f_{i-1} = f_i - \Delta x \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i + \Delta x^2 \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i - \Delta x^3 \left. \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right|_i + \dots \quad (\text{III.1.4})$$

Despejando el término de primera derivada de la Ec. (III.1.3) y despreciando los términos a partir del tercero

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} + \epsilon(\Delta x),$$

la cual es una diferencia finita progresiva y el término $\epsilon(\Delta x^2)$ es el error de truncamiento de segundo orden que resulta de despreciar los términos de la serie.

Despejando el término de primera derivada de la Ec. (III.1.4) se tiene:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x} + \epsilon(\Delta x),$$

que es una diferencia finita regresiva.

Restando las Ecs. (III.1.3) y (III.1.4) resulta

$$f_{i+1} - f_{i-1} = 2\Delta x \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i + \frac{2\Delta x^3}{3!} \left. \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right|_i + \frac{2\Delta x^5}{5!} \left. \frac{\partial^5 f}{\partial x^5} \right|_i + \dots \quad (III.1.5)$$

Despejando el término $\partial f / \partial x$ de la ecuación anterior:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} + \varepsilon(\Delta x),$$

donde el primer término del segundo miembro es una diferencia central.

Para obtener la expresión para la segunda derivada se procede a sumar las Ecs. (II.1.3) y (III.1.4):

$$f_{i+1} + f_{i-1} = 2f_i + \frac{2\Delta x^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i + \frac{2\Delta x^4}{4!} \left. \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} \right|_i + \dots \quad \dots (III.1.6)$$

Despejando el término $\partial^2 f / \partial x^2$:

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\Delta x^2} + \varepsilon(\Delta x^2)$$

DISCRETIZACION EN TIEMPO. -

Para aproximar la 1ª derivada de una función con respecto al tiempo se utilizará la expansión en diferencias regresivas que es:

$$\frac{\partial f_t}{\partial t} = \frac{f_t^{n+1} - f_t^n}{\Delta t} = \frac{\Delta_t f_t}{\Delta t}$$

III.2 DISCRETIZACION DE LAS ECUACIONES DE FLUJO MULTIFASICO

Sustituyendo las derivadas en las ecuaciones de difusión de cada fase por su correspondiente aproximación en diferencias, se obtienen ecuaciones de la forma:

$$\Delta T_o \Delta P_o - \Delta T_o \gamma_o \Delta D - q_{o@ca} = \frac{V_b}{\Delta t} \Delta_t \left[\frac{\phi S_o}{B_o} \right] \quad (III.2.1)$$

$$\Delta T_v \Delta P_v - \Delta T_v \gamma_v \Delta D - q_{v@ca} = \frac{V_b}{\Delta t} \Delta_t \left[\frac{\phi S_v}{B_v} \right] \quad (III.2.2)$$

$$-\Delta T_g \Delta P_g - \Delta T_g \gamma_g \Delta D + \Delta T_o R_o \Delta P_o - \Delta T_o \gamma_o R_o \Delta D + q_g @ c_{cs} =$$

$$\frac{V_b}{\Delta t} \Delta_i \left[\frac{\phi S_g}{B_g} + \frac{\phi R_o S_o}{B_o} \right] \quad (III.2.3)$$

Los términos $\Delta T \Delta P$, para cada fase, se definen en tres dimensiones como:

$$\Delta T \Delta P = \Delta_x T \Delta_x P + \Delta_y T \Delta_y P + \Delta_z T \Delta_z P,$$

donde

$$\Delta_x T \Delta_x P = T_{i+1/2,j,k} (P_{i+1,j,k} - P_{i,j,k}) -$$

$$T_{i-1/2,j,k} (P_{i,j,k} - P_{i-1,j,k}),$$

El tratamiento de los términos en las direcciones restantes se realiza similarmente, considerando que los subíndices i,j,k representan las direcciones de flujo en la malla de bloques.

El sistema resultante se resuelve para puntos discretos.

III.3 CALCULO DE LAS TRANSMISIBILIDADES. -

Las transmisibilidades $T_{i+1/2}^l$ y $T_{i-1/2}^l$ que aparecen en las ecuaciones en diferencias finitas contienen términos dependientes de la presión y términos que dependen de la saturación. Estas variables se evalúan al nivel de tiempo anterior, es decir, explícitamente, sin importar que las presiones estén referidas implícitamente. El término de transmisibilidad se define por

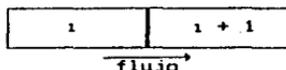
$$T_{i+1/2}^l = \left[\frac{k k_{r1} \Delta y \Delta z}{\mu_l B_l \Delta x} \right]_{i+1/2} .$$

En la simulación de un yacimiento, el flujo se calcula entre bloques para el caso de una malla rectangular. El flujo entre esos elementos puede verse a partir de la siguiente ecuación de flujo:

$$q'_{1-2} = \frac{k k_{r0} A}{\mu} \Delta p = \lambda (p_1 - p_2) ,$$

donde λ es la movilidad del fluido. Estos términos deben ser diferentes de cero para que pueda existir un flujo.

Considerando una distribución arbitraria de presión tal que $p_i > p_{i+1}$, el flujo de un fluido será de la celda i a la celda $(i+1)$, con lo cual se puede resolver el problema de determinar qué movilidad debe usarse en el cómputo del flujo:



Existen diversas formas de evaluar las movilidades:

a) Corriente arriba. Cuando la movilidad del fluido está basada en el cálculo de la permeabilidad relativa y viscosidad a partir de las saturaciones y presiones en la celda i (la celda corriente arriba):

$$q = \lambda_i (p_i - p_{i+1}) .$$

b) Corriente abajo. Cuando la movilidad del fluido está basada en el cálculo de la permeabilidad relativa y de la viscosidad a partir de las saturaciones y presiones en la celda $(i+1)$ (la celda corriente abajo):

$$q = \lambda_{i+1} (p_i - p_{i+1}) .$$

c) Promedio. Es un promedio ponderado en el cual la movilidad es función tanto de la celda i como de la $i+1$.

$$q = [w \lambda_i + (1-w) \lambda_{i+1}] (p_i - p_{i+1}) ,$$

donde w es un parámetro de ponderación. Se debe notar que cuando $w=1$ se cae en el caso corriente arriba y para cuando $w=0$ se tiene el valor correspondiente a corriente abajo.

d) Promedio armónico. Consiste en que las movilidades son promediadas como series consistentes:

$$q = \frac{\lambda_i \lambda_{i+1}}{(\lambda_i + \lambda_{i+1})} (p_i - p_{i+1})$$

III.4. ESTABILIDAD Y CONVERGENCIA DEL ESQUEMA DE SOLUCION.-

Siempre que se utilice un modelo numérico para aproximar la solución de una ecuación es necesario analizar que efecto tiene sobre la solución numérica el tamaño de los incrementos de tiempo que se utilizan.

Se dice que un esquema de solución es estable cuando la propagación del error sigue un crecimiento lineal, esto es, que el incremento del error de una aproximación a otra sea pequeño, determinando una tolerancia.

Un criterio práctico es seleccionar un paso de tiempo tal que ocurra un cambio menor del 10 o 20 % de saturación del fluido en el bloque en que se encuentre el pozo.

Una ecuación en diferencias finitas es convergente si la solución exacta de las ecuaciones en diferencias tiende a la solución exacta de las ecuaciones diferenciales.

CAPITULO IV

METODOS DE SOLUCION DE LAS ECUACIONES DE FLUJO

IV.1 I M P E S ^{1,2,10,13,14}

APROXIMACION DE LAS DERIVADAS CON RESPECTO AL TIEMPO.

PROCEDIMIENTO IMPES.

En la discusión de la expansión de los términos de flujo en el lado izquierdo de la ecuación, se hizo hincapié en las diferentes formas de considerar las presiones, transmisividades y término fuente para garantizar la ESTABILIDAD del esquema ; ahora se considerará la expansión de los términos de acumulación representados por las derivadas con respecto al tiempo que aparecen en el lado derecho de las ecuaciones. La expansión adecuada de estos términos determina que se satisfaga el *BALANCE DE MATERIA*.

i) EXPANSION CONSISTENTE DEL OPERADOR $\Delta_t(a b c)$

$$\text{Por definici3n: } \Delta_t(abc) = a^{n+1}b^{n+1}c^{n+1} - a^n b^n c^n \quad (\text{IV.1.1})$$

esta expresi3n aunque perfectamente v3lida y consistente presenta la dificultad, si se utiliza para expandir los t3rminos de acumulaci3n, que involucra el producto de las tres variables al nivel "n+1" lo cual da lugar a en una expresi3n fuertemente no lineal. Para evitar este problema se puede modificar la expresi3n (IV.1.1) como se indica a continuaci3n, sumando y restando expresiones id3nticas.

$$\begin{aligned} \Delta_t(abc) &= a^{n+1}b^{n+1}c^{n+1} - a^n b^n c^n \\ &\quad - a^{n+1}b^{n+1}c^n + a^{n+1}b^{n+1}c^n \\ &\quad + a^{n+1}b^n c^n - a^{n+1}b^n c^n \end{aligned} \quad (\text{IV.1.2})$$

Agrupando:

$$\begin{aligned} \Delta_t(abc) &= a^{n+1}b^{n+1}(c^{n+1} - c^n) \\ &\quad + a^{n+1}c^n(b^{n+1} - b^n) \\ &\quad + b^n c^n(a^{n+1} - a^n) \end{aligned} \quad (\text{IV.1.3})$$

$$\Delta_t(abc) = a^{n+1}b^{n+1}\Delta_t c + a^{n+1}c^n\Delta_t b + b^n c^n\Delta_t a \quad (\text{IV.1.4})$$

Las expresiones (IV.1.1) y (IV.1.4) son equivalentes y ambas son consistentes con el balance de materia. Además la última expresión no contiene a c^{n+1} como coeficiente en ninguno de sus términos. Esto, como se verá más adelante, presenta ventajas que se usarán en el método de solución IMPES.

*PROCEDIMIENTO IMPES: IMPLICITO EN PRESION,
EXPLICITO EN SATURACION.*

En este procedimiento, los términos en los que intervienen presiones capilares y permeabilidades relativas se calculan al nivel conocido de tiempo t^n , utilizando los valores conocidos de saturación S^n . Los únicos términos de saturación desconocidos en cada ecuación en diferencias finitas están en el término de acumulación, por esto el procedimiento es en diferencias progresivas o explícito en saturación. Los términos de flujo, sin embargo, se desarrollan en base a presiones desconocidas " P^{n+1} " al nuevo nivel de tiempo " t^{n+1} ". Por esto el procedimiento es en diferencias regresivas o implícito en presión. La base del procedimiento IMPES es combinar las ecuaciones de conservación en tal forma que se eliminan los términos $\Delta t S$ que contienen a las saturaciones desconocidas. Las únicas incógnitas en la ecuación resultante son las presiones de la fase aceite las cuales se resuelven utilizando alguno de los métodos iterativos o un método directo de eliminación

gaussiana. Una vez calculadas las presiones, las saturaciones se obtienen explícitamente de sus ecuaciones respectivas.

Para lograr lo anterior, los términos de acumulación se deben expandir en tal forma que las diferencias finitas en tiempo, puedan expresarse en función de las diferencias en presión con respecto al tiempo, ΔtP y las diferencias en saturación con respecto al tiempo ΔtS ; al combinar las ecuaciones se deben eliminar los términos en ΔtS ; además, la expansión debe lograrse tal que " S^{n+1} " no aparezca en ninguno de los coeficientes una vez que los términos ΔtS se han eliminado. La expansión debe ser consistente y conservar el balance de materia.

ii) EFECTO DE LA PRESION SOBRE LA POROSIDAD.

La dependencia de la presión sobre la porosidad se puede expresar como:

$$\phi^{n+1} = \phi_0(1 + C_r \delta P_w)^{n+1}, \quad (\text{IV.1.5})$$

en donde :

ϕ_0 = porosidad a la presión P^0

C_r = compresibilidad de la roca

δP_w = diferencia en la presión del agua de P_w^{n+1} a P^0 (nótese que P^0 podría ser P^n).

Con esto, el valor conocido de ϕ_0 puede factorizarse de los términos de acumulación resultando, para las ecuaciones del aceite y agua:

$$\frac{V_b}{\Delta t} \Delta t \left[\frac{\phi S}{B} \right] = \frac{V_b \phi_0}{\Delta t} \Delta t \left[\frac{(1+C_r \delta P_v) S}{B} \right], \quad (IV.1.6)$$

en donde:

$$V_p^0 = V_b \phi_0 \text{ es el volumen poroso a la presión } P^0.$$

Similarmente para la ecuación del gas:

$$\begin{aligned} \frac{V_b}{\Delta t} \Delta t \left[\frac{\phi S_g}{B_g} + R_o \frac{\phi S_o}{B_o} \right] &= \frac{V_p^0}{\Delta t} \left\{ \Delta t \left[\frac{(1+C_r \delta P_v) S_g}{B_g} \right] + \right. \\ &\left. + \Delta t \left[\frac{(1+C_r \delta P_v) R_o S_o}{B_o} \right] \right\} \end{aligned} \quad (IV.1.7)$$

y el cambio de la porosidad con el tiempo se expresa como:

$$\Delta \phi = \phi_0 C_r \Delta P \quad (IV.1.8)$$

$$\Delta t (1+C_r \delta P_v) = C_r \Delta t P_v \quad (IV.1.9)$$

iii) EXPANSION DE LOS TERMINOS DE ACUMULACION PARA LAS ECUACIONES DEL ACEITE Y DEL AGUA.

Considerando la expansión presentada por la Ec. (IV.1.4) y con base a las expresiones (IV.1.6) y (IV.1.9), los términos de acumulación de las ecuaciones de los líquidos (l) se pueden escribir como:

$$(a \equiv 1 + Cr\delta Pv, b \equiv \frac{1}{B_l}, c \equiv S)$$

$$\Delta t \left[\frac{(1 + Cr\delta Pv) S_l}{B_l} \right] = \frac{(1 + Cr\delta Pv)^{n+1}}{B_l^{n+1}} \Delta t S_l + (1 + Cr\delta Pv)^{n+1} S_l^n$$

$$\Delta t \left[\frac{1}{B_l} \right] + \frac{S_l^n}{B_l^n} Cr\Delta t P \quad (IV.1.10)$$

en donde el subíndice "l" indica líquido.

La Ec. (IV.1.10) contiene al término $\Delta t(1/B_l)$, el cual se puede reemplazar como sigue:

$$\text{Definiendo } \left[\frac{1}{B_l} \right] = \frac{\frac{1}{B_l^{n+1}} - \frac{1}{B_l^n}}{P_l^{n+1} - P_l^n} = \frac{\Delta t \left[\frac{1}{B_l} \right]}{\Delta t P_l} \quad \dots (IV.1.11)$$

y despejando $\Delta t \left[\frac{1}{Bl} \right] = \left[\frac{1}{Bl} \right]^* \Delta t P_l$ (IV.1.12)

y considerando para el método IMPES que

$$\Delta t P_v = \Delta t P_o = \Delta t P . \quad (IV.1.13)$$

Reemplazando las Ecs. (IV.1.10), (IV.1.12) y (IV.1.13) en la Ec. (IV.1.6) se tiene para el aceite:

$$\frac{V_b}{\Delta t} \Delta t \left[\frac{\phi S_o}{B_o} \right] = \frac{V_p^o}{\Delta t} \left\{ \frac{(1+C_r \phi P_v)^{n+1}}{B_o^{n+1}} \Delta t S_o + \right.$$

$$\left. \left[(1+C_r \phi P_v)^{n+1} \left(\frac{1}{B_o} \right)^n + \frac{C_r}{B_o^n} \right] S_o^n \Delta t P \right\} . \quad (IV.1.14)$$

Para el agua:

$$\frac{V_b}{\Delta t} \Delta t \left[\frac{\phi S_v}{B_o} \right] = \frac{V_p^o}{\Delta t} \left\{ \frac{(1+Cr\delta P_w)^{n+1}}{B_v^{n+1}} \Delta t S_v + \right.$$

$$\left. \left[(1+Cr\delta P_w)^{n+1} \left(\frac{1}{B_v} \right)^n + \frac{Cr}{B_v^n} \right] S_v^n \Delta t P \right\} \quad (IV.1.15)$$

IV) *EXPANSION DEL TERMINO DE ACUMULACION PARA LA ECUACION DEL GAS.*

Considerando la expansión presentada por la Ec. (IV.1.4) y en base a las expresiones (IV.1.7) y (IV.1.9), el término de acumulación de la ecuación del gas (g) se puede escribir como (en donde $a \equiv (1+Cr\delta P_w)$, $b \equiv 1/B_g$ y $c \equiv S_g$ para el primer término de (IV.1.7) y $a \equiv (1+Cr\delta P_w)$, $b \equiv R_e/B_o$ y $c \equiv S_o$, para el segundo término de (IV.1.7))

$$\Delta t \left[(1+Cr\delta P_w) \left[\frac{S_g}{B_g} + \frac{R_s}{B_o} S_o \right] \right] =$$

$$(1+Cr\delta P_w)^{n+1} \left[\frac{1}{B_g^{n+1}} \right] \Delta t S_g + (1+Cr\delta P_w)^{n+1} S_g^n \Delta t \left[\frac{1}{B_g} \right] +$$

$$\frac{S_g^n}{B_g^n} Cr \Delta t P_w + (1+Cr\delta P_w)^{n+1} \left[\frac{R_s^{n+1}}{B_o^{n+1}} \right] \Delta t S_o + (1+Cr\delta P_w)^{n+1}$$

$$S_o \Delta t \left[\frac{R_s}{B_o} \right] + R_s^n \frac{S_o^n}{B_o^n} Cr \Delta t P_w \quad (IV.1.16)$$

El término $\Delta t(1/B_g)$ se trata en forma análoga a (IV.1.11) y (IV.1.12), es decir, definiendo:

$$\left[\frac{1}{B_g} \right] = \frac{\frac{1}{B_g^{n+1}} - \frac{1}{B_g^n}}{P_g^{n+1} - P_g^n} = \frac{\Delta t \left[\frac{1}{B_g} \right]}{\Delta t P_g} \quad (IV.1.17)$$

y despejando

$$\Delta t \left[\frac{1}{B_g} \right] = \left[\frac{1}{B_g} \right]^* \Delta t P_g \quad (\text{IV.1.18})$$

Procediendo en forma similar para el tratamiento del término $\Delta t (R_a/B_o)$:

$$\left[\frac{R_a}{B_o} \right] = \frac{\left[\frac{R_a^{n+1}}{B_o^{n+1}} - \frac{R_a^n}{B_o^n} \right]}{P_o^{n+1} - P_o^n} = \frac{\Delta t \left[\frac{R_a}{B_o} \right]}{\Delta t P_o} \quad (\text{IV.1.19})$$

y despejando

$$\Delta t \left[\frac{R_a}{B_o} \right] = \left[\frac{R_a}{B_o} \right]^* \Delta t P_o \quad (\text{IV.1.20})$$

Notese que, nuevamente, de acuerdo a la suposición del método IMPES, los cambios en presión indicados en las Ecs. (IV.1.12), (IV.1.18) y (IV.1.20), se toman todos iguales al cambio en presión de la fase aceite Ec. (IV.1.13). Entonces reemplazando las Ecs. (IV.1.13), (IV.1.16), (IV.1.18) y (IV.1.20) en la Ec. (IV.1.7) y agrupando se obtiene:

$$\frac{V_b}{\Delta t} \Delta t \left[\frac{\phi S_g}{B_g} + R_a \frac{\phi S_o}{B_o} \right] = (1+Cr\delta P_v)^{n+1} \left[\frac{1}{B_g^{n+1}} \right] \Delta t S_g +$$

$$(1+Cr\delta P_v)^{n+1} \left[\frac{R_a}{B_o} \right]^{n+1} \Delta t S_o + \left\{ (1+Cr\delta P_v)^{n+1} \left[S_g^n \left[\frac{1}{B_g} \right]^n \right. \right.$$

$$\left. \left. + S_o^n \left[\frac{R_a}{B_o} \right]^n \right] + Cr \left[\frac{S_g}{B_g} \rightarrow R_a \frac{S_o}{B_o} \right]^n \right\} \Delta t P \quad (IV.1.21)$$

La P sin subíndice representa la presión de la fase aceite P_o , como se estipula en la suposición (IV.1.13).

Los términos $(1/B)^n$ y $(R_a/B_o)^n$ contienen las incógnitas B_o^{n+1} , B_g^{n+1} , B_v^{n+1} , R_a^{n+1} , y P^{n+1} . Para evitar la no-linealidad de las expresiones respectivas, estos valores específicos se aproximan con el valor del último iterando disponible. Nótese además que la suposición (IV.1.13) implica que se desprecie el cambio de presión capilar en el intervalo de tiempo.

Es importante notar que estos términos son pendientes de curvas trazadas entre los valores respectivos evaluadas a los niveles de tiempo n y $n+1$. No son tangentes a las curvas. Por lo tanto, como dependen de las presiones y saturaciones

al nivel de tiempo desconocido $n+1$, es necesario estimarlas al comienzo de cada intervalo de tiempo y reevaluarlos después de cada iteración. Solamente para el primer intervalo de tiempo se pueden suponer igual a la pendiente de la curva respectiva. Para los intervalos subsecuentes, se suponen igual al valor correspondiente al intervalo de tiempo anterior.

Con las suposiciones anteriores, las expresiones (IV.1.14), (IV.1.15) y (IV.1.21) ofrecen la ventaja de no involucrar productos de S^{n+1} ni de P^{n+1} con las diferencias ΔtP y ΔtS respectivamente, además, aquellos términos con coeficientes en donde aparecen S , P y R_s al nuevo nivel de tiempo $n+1$, son parte de funciones suaves de presión.

ECUACIONES DEL PROCEDIMIENTO IMPES.

El objeto del desarrollo que se presenta a continuación es obtener una ecuación en función de la presión del aceite mediante la eliminación de los términos ΔtS_o , ΔtS_g y ΔtS_v .

En forma simplificada, los términos de acumulación de las ecuaciones para cada una de las fases se escriben como:

$$\frac{V_b}{\Delta t} \Delta t \left[\frac{\phi S_o}{B_o} \right] = C_{o1} \Delta tP + C_{o2} \Delta tS_o \quad (\text{IV.1.22a})$$

$$\frac{V_b}{\Delta t} \Delta t \left[\frac{\phi S_v}{B_v} \right] = C_{v1} \Delta t P + C_{v2} \Delta t S_v \quad (\text{IV.1.22b})$$

$$\frac{V_b}{\Delta t} \Delta t \left[\frac{\phi S_g}{B_g} + R_s \frac{\phi S_o}{B_o} \right] = C_{g1} \Delta t P + C_{g2} \Delta t S_g + C_{g3} \Delta t S_o, \quad \dots (\text{IV.1.22c})$$

en donde los coeficientes C están definidos por:

$$C_{o1} = \frac{V_p^0}{\Delta t} S_o^n \left[(1+Cr\delta P_v)^{n+1} \left(\frac{1}{B_o} \right) + \frac{Cr}{B_o^n} \right] \quad (\text{IV.1.23a})$$

$$C_{o2} = \frac{V_p^0}{\Delta t} \frac{(1+Cr\delta P_v)^{n+1}}{B_o^{n+1}} \quad (\text{IV.1.23b})$$

$$C_{v1} = \frac{V_p^0}{\Delta t} S_v^n \left[(1+Cr\delta P_v)^{n+1} \left(\frac{1}{B_v} \right) + \frac{Cr}{B_v^n} \right] \quad (\text{IV.1.23c})$$

$$C_{w2} = \frac{V_p^0}{\Delta t} \frac{(1+Cr\delta P_v)^{n+1}}{B_v^{n+1}} \quad (\text{IV.1.23d})$$

$$C_{g1} = \frac{V_p^0}{\Delta t} \left\{ (1+Cr\delta P_v)^{n+1} \left[S_g^n \left[\frac{1}{B_g} \right] + S_o^n \left[\frac{R_s}{B_o} \right] \right] + Cr \left[\frac{S_g^n}{B_g^n} + R_s^n \frac{S_o^n}{B_o^n} \right] \right\} \quad (IV.1.23e)$$

$$C_{g2} = \frac{V_p^0}{\Delta t} (1+Cr\delta P_v)^{n+1} \left[\frac{1}{B_g^{n+1}} \right] \quad (IV.1.23f)$$

$$C_{g3} = \frac{V_p^0}{\Delta t} (1+Cr\delta P_v)^{n+1} \left[\frac{R_s}{B_o} \right]^{n+1} \quad (IV.1.23g)$$

Es importante reiterar que aunque los coeficientes son funciones de la presión desconocida P^{n+1} , no son funciones de las saturaciones desconocidas S^{n+1} . Además, los coeficientes fueron definidos en tal forma que se mantiene consistencia con la ecuación de balance de materia.

De esta forma las ecuaciones de conservación (III.2.1) (III.2.2) Y (III.2.3) se escriben como:

$$\Delta[T_o(\Delta P_o - \gamma_o \Delta D)] + q_o @_{cc} = C_{o1} \Delta T_P + C_{o2} \Delta T_{S_o} \quad (IV.1.24a)$$

$$\Delta[T_v(\Delta P_v - \gamma_v \Delta D)] + q_v @_{cc} = C_{v1} \Delta T_P + C_{v2} \Delta T_{S_v} \quad (IV.1.24b)$$

$$\Delta[T_g(\Delta P_g - \gamma_g \Delta D)] + \Delta[R_s T_o(\Delta P_o - \gamma_o \Delta D)] + q_g @_{cc} =$$

$$C_{g1} \Delta T_P + C_{g2} \Delta T_{S_g} + C_{g3} \Delta T_{S_o} \quad (IV.1.24c)$$

Multiplicando las Ecs. (IV.1.24a), (IV.1.24b) y (IV.1.24c) por los factores α_1 , α_2 y α_3 , respectivamente, y sumándolas para eliminar los términos ΔT_S :

$$\alpha_1 \Delta[T_o(\Delta P_o - \gamma_o \Delta D)] + \alpha_2 \Delta[T_v(\Delta P_v - \gamma_v \Delta D)] +$$

$$\alpha_3 \Delta[T_g(\Delta P_g - \gamma_g \Delta D)] + \alpha_3 \Delta[R_s T_o(\Delta P_o - \gamma_o \Delta D)] + q =$$

$$C \Delta T_P + \alpha_1 C_{o2} \Delta T_{S_o} + \alpha_2 C_{v2} \Delta T_{S_v} + \alpha_3 C_{g2} \Delta T_{S_g} + \alpha_3 C_{g3} \Delta T_{S_o},$$

..... (IV.1.25)

donde

$$q = \alpha_1 q_o + \alpha_2 q_v + \alpha_3 q_g \quad (IV.1.26)$$

$$C = \alpha_1 C_{o1} + \alpha_2 C_{v1} + \alpha_3 C_{g1} \quad (IV.1.27)$$

La igualdad

$$S_o + S_v + S_g = 1 \quad (II.2.2)$$

implica la condición:

$$\Delta tS_o + \Delta tS_v + \Delta tS_g = 0 \quad (\text{IV.1.28})$$

por lo tanto, de (IV.1.25) se tiene que:

$$(\alpha_1 C_{o2} + \alpha_3 C_{g2}) \Delta tS_o + \alpha_2 C_{v2} \Delta tS_v + \alpha_3 C_{g2} \Delta tS_g = 0 \quad (\text{IV.1.29})$$

lo que implica que para que (IV.1.29) se cumpla sus coeficientes deben ser iguales, es decir:

$$\alpha_1 C_{o2} + \alpha_3 C_{g2} = \alpha_3 C_{g2} \quad (\text{IV.1.30a})$$

$$\alpha_2 C_{v2} = \alpha_3 C_{g2} \quad (\text{IV.1.30b})$$

El sistema de Ecs. (IV.1.30) tiene un número infinito de soluciones ya que tiene tres incógnitas y sólo dos ecuaciones. Una de estas soluciones se encuentra al considerar $\alpha_1 = 1,0$

$$\alpha_1 = 0 \quad (\text{IV.31a})$$

$$\alpha_2 = \left[\frac{B_v}{B_o - R_s B_g} \right]^{n+1} \quad (\text{IV.31b})$$

$$\alpha_3 = \left[\frac{B_g}{B_o - R_s B_g} \right]^{n+1} \quad (IV.31c)$$

para el caso de flujo de tres fases.

Estos valores α son aplicables cuando tienen las tres fases presentes en una celda. Para el caso en que no haya gas libre en una celda, la ecuación de conservación del gas (III.2.3) es redundante con la ecuación del aceite ya que $S_g=0$, por lo tanto $K_{rg}=0$ y $\Delta(T_g \Delta \bar{x}_g)=c$ y $R_s=R_{sa}$ y se puede cancelar de ambos lados de la ecuación del gas quedando una ecuación idéntica a la del aceite. En este caso hay que considerar solamente las ecuaciones de aceite y agua y los factores a utilizar son los siguientes.

$$\alpha_1 = 1.0 \quad (IV.1.32a)$$

$$\alpha_2 = \left[\frac{B_v}{B_o} \right]^{n+1} \quad (IV.1.32b)$$

Los valores de α_1 , α_2 y en su caso α_3 , reducen el lado derecho de la Ec. (IV.1.25) a $C \Delta P$ en donde:

$$C = \frac{V_p^0}{\Delta t} \left\{ S_o^n \left[(1 + Cr\delta P_v)^{n+1} \left(\frac{1}{B_o} \right)' + \frac{Cr}{B_o^n} \right] + \left[\frac{B_v}{B_o - R_s B_g} \right]^{n+1} \right.$$

$$S_v^n \left[(1 + Cr\delta P_v)^{n+1} \left(\frac{1}{B_v} \right)' + \frac{Cr}{B_v^n} \right] + \left[\frac{B_g}{B_o - R_s B_g} \right]^{n+1} \left\{ (1 + Cr\delta P_v)^{n+1} \right.$$

$$\left. \left[S_g^n \left(\frac{1}{B_g} \right)' + S_o^n \left(\frac{R_s}{B_o} \right) \right] + Cr \left[\frac{S_g^n}{B_g^n} + R_s^n \frac{S_o^n}{B_o^n} \right] \right\} . \quad (IV.1.33)$$

Para tres fases y

$$C = \frac{V_p^0}{\Delta t} \left\{ S_o^n \left[(1 + Cr\delta P_v)^{n+1} \left(\frac{1}{B_o} \right)' + \frac{Cr}{B_o^n} \right] + \frac{B_v^{n+1}}{B_o^{n+1}} \right.$$

$$S_v^n \left[(1 + Cr\delta P_v)^{n+1} \left(\frac{1}{B_v} \right)' + \frac{Cr}{B_v^n} \right] \left. \right\} , \quad (IV.1.34)$$

para dos fases (o, w).

Sin embargo, los términos de flujo aún están en función de las tres incógnitas P_o^{n+1} , P_v^{n+1} y P_g^{n+1} . Para reducir únicamente en número de incógnitas a la presión del aceite, se utilizan las ecuaciones de presión capilar (II.2.3) y (II.2.4) y la suposición (IV.1.8) del método IMPES. Es decir, los términos del flujo quedarán ahora en función de la presión del aceite (P^{n+1}) al nuevo nivel de tiempo P^{n+1} mientras que las presiones capilares se evaluarán utilizando las saturaciones al nivel conocido de tiempo:

$$P_o^{n+1} = P^{n+1} \quad (IV.1.35a)$$

$$P_v^{n+1} = P^{n+1} - P_{cvo}(S_v^{n+1}) \quad (IV.1.35b)$$

$$P_g^{n+1} = P^{n+1} + P_{cgo}(S_g^n) \quad (IV.1.35c)$$

Con esto la Ec. (IV.1.25) se puede expresar como :

$$\begin{aligned} & \alpha_1 \Delta(T_o \Delta P^{n+1}) - \alpha_1 \Delta(T_o \gamma_o \Delta D) \\ & + \alpha_2 \Delta(T_v \Delta P^{n+1}) - \alpha_2 \Delta(T_v \gamma_v \Delta D) - \alpha_2 \Delta(T_v \Delta P_{cvo}) \\ & + \alpha_3 \Delta(T_g \Delta P^{n+1}) - \alpha_3 \Delta(T_g \gamma_g \Delta D) + \alpha_3 \Delta(T_g \Delta P_{cgo}) \\ & + \alpha_4 \Delta(R_e T_o \Delta P^{n+1}) - \alpha_4 \Delta(R_e T_o \gamma_o \Delta D) + q = C \Delta t P \end{aligned} \quad (IV.1.36)$$

Definiendo los siguientes términos para simplificar el análisis:

$$\Delta \bar{T} \Delta P^{n+1} = \alpha_1 \Delta(T_0 \Delta P^{n+1}) + \alpha_2 \Delta(T_v \Delta P^{n+1}) + \alpha_3 \left[\Delta(T_g \Delta P^{n+1}) + \Delta(R_0 T_0 \Delta P^{n+1}) \right] \quad (\text{IV.1.37})$$

y

$$B_1 = \alpha_1 \Delta(T_0 \gamma_0 \Delta D) - \alpha_2 \Delta(T_v \gamma_v \Delta D) - \alpha_3 \left[\Delta(T_g \gamma_g \Delta D) + \Delta(R_0 T_0 \gamma_0 \Delta D) \right] - \alpha_2 \Delta(T_v \Delta P_{cvo}) + \alpha_3 \Delta(T_g \Delta P_{cgo}) \quad (\text{IV.1.38})$$

La Ec. (IV.1.36) se puede escribir ahora como:

$$\Delta \bar{T} \Delta P^{n+1} + B_1 + q = C \Delta P \quad , \quad (\text{IV.1.39})$$

Donde el término B_1 representa el flujo neto de fluidos debido a los efectos gravitacionales y de presión capilar. Como se puede apreciar en (IV.1.38), B_1 cambia de valor durante el proceso iterativo debido solamente a que α_1 , α_2 y α_3 cambian de una iteración a otra.

Una vez obtenida la convergencia para la ecuación de presión, es necesario calcular los valores de S_o^{n+1} y S_v^{n+1} usando las Ecs. (IV.1.24a) y (IV.1.24b) respectivamente. Si no hay gas libre en la celda, solamente una de estas ecuaciones necesita resolverse.

$$S_{ol,j,k}^{n+1} = S_{ol,j,k}^n +$$

$$\frac{1}{C_o} \left[\Delta(Tv^n \Delta P^{n+1}) - \Delta(Tv^n \gamma_o^n \Delta D) + q_o - C_{oi} \Delta P \right]_{t,j,k} \quad (IV.1.40a)$$

$$S_{vi,j,k}^{n+1} = S_{vi,j,k}^n + \frac{1}{C_{vz}} \left[\Delta(Tv^n \Delta P^{n+1}) - \Delta(Tv^n \gamma_v^n \Delta D) - \Delta(Tv^n \Delta P_{cvo}) + q_v - C_v \Delta P \right]_{t,j,k} \quad (IV.40b)$$

$$S_{gl,j,k}^{n+1} = 1.0 - S_{ol,j,k}^{n+1} - S_{vi,j,k}^{n+1} \quad (IV.40c)$$

Los cálculos correspondientes al intervalo de tiempo "n+1" se finalizan obteniendo los nuevos valores de presión capilar $P_{cvo,t,j,k}$ y $P_{cgv,t,j,k}$ en función de los nuevos valores de saturación calculados, $S_{vi,j,k}^{n+1}$ y $S_{gl,j,k}^{n+1}$ respectivamente.

IV.2. METODO DE SOLUCION SIMULTANEA (S S)^{4,214}

La esencia de este método es escribir las derivadas de saturación en el lado derecho de las Ecs. (II.2.1) o (II.2.2) en términos de C_r y de las derivadas de presión y la solución de las ecuaciones resultantes para presiones.

La selección de las aproximaciones en tiempo es crucial para acoplar las Ecs. (II.2.1) ya que éstas son de forma parabólica. Sin embargo, cualquier método rara vez trabaja cuando es aplicado a sistemas de ecuaciones acoplados no lineales de este tipo. Un método confiable es la aproximación en diferencias regresivas, el cual ha mostrado ser estable para este tipo de problemas y es uno de los más usados para la simulación de yacimientos.

Vamos por lo tanto a discretizar el lado derecho de las Ecs. (II.2.1) por aproximación en diferencias regresivas. El concepto de aproximación en tiempo tal que cumple la conservación de masa Ec. (II.1.1).

En este método se suponen condiciones de no flujo en la frontera. Cualquier flujo a través de ella se toma en cuenta para los términos de producción en las fronteras entre celdas. Dichas condiciones se imponen para simplificar la

etapa a cero de todas las transmisividades para el flujo a través de las fronteras del yacimiento.

En el SS los términos del tipo $\Delta t S$ son reemplazados por términos del tipo $S' \Delta P_c$. Si las curvas de presión correspondientes a P_c igual a constante, entonces S' tiende a infinito y el método SS es inválido debido a que una dP_c/dS de cero no puede ser usada en los cálculos.

OBSERVACIONES SOBRE EL METODO SS.

El método SS requiere que las presiones capilares no sean cero ya que las ecuaciones para las presiones se acoplan a través de la S_v . Como la inclinación de la curva de P_c decrece, la matriz D llega a ser dominante y el sistema de ecuaciones puede llegar a ser singular. Por lo tanto, si se desea simular el caso de presión capilar igual a cero un valor pequeño en la curva de P_c puede usarse, la mejor selección es la lineal.

Después que una etapa de tiempo se ha completado, S_v debe ser reevaluado. Esta etapa incluye el tratamiento de las no linealidades debido a la presión capilar.

Ya que el número de incógnitas es $N \times$ el número de fases, el método SS llega a ser muy costoso para problemas multidimensionales. El valor real de la aproximación SS está

en conjunción con el tratamiento de las transmisividades.

Usando la definición de "potencial de flujo"

$$\phi = Pt - \gamma tD \quad (\text{II.1.5})$$

donde $l = u, v, o$ y g , se pueden escribir las Ecs. (II.2.1)

como:

$$\nabla \left\{ \frac{k k_{ro}}{B_o \mu_o} \nabla \phi_o \right\} \pm \frac{q_o^*}{V_b B_o} = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\phi S_o}{B_o} \right\} \quad (\text{II.2.1a})$$

$$\nabla \left\{ \frac{k k_{rv}}{B_v \mu_v} \nabla \phi_v \right\} \pm \frac{q_v^*}{V_b B_v} = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\phi S_v}{B_v} \right\} \quad (\text{II.2.1b})$$

$$\begin{aligned} \nabla \left\{ \frac{k k_{rg}}{B_g \mu_g} \nabla \phi_g \right\} + \nabla \left\{ \frac{k k_{ro}}{B_o \mu_o} R_s \nabla \phi_o \right\} \pm \frac{q_g^*}{V_b B_g} \\ = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\phi S_g}{B_g} + \frac{\phi R_s S_o}{B_o} \right\} \quad (\text{II.2.1c}) \end{aligned}$$

en forma de diferencias finitas estas ecuaciones son:

$$\Delta(T_o \Delta \phi_o^{n+1}) - q_o c_{ce} = \frac{V_b}{\Delta t} \Delta t \left[\frac{\phi S_o}{B_o} \right] \quad (\text{III.2.1})$$

$$\Delta(T_v \Delta \phi_v^{n+1}) - q_v c_{ce} = \frac{V_b}{\Delta t} \Delta t \left[\frac{\phi S_v}{B_v} \right] \quad (\text{III.2.2})$$

$$\Delta(T_o R_s \Delta \phi_o^{n+1}) + \Delta(T_g \Delta \phi_g^{n+1}) - q_g T_{ce} =$$

$$\frac{V_b}{\Delta t} \left[\frac{\phi S_g}{B_g} + \frac{\phi R_s S_o}{B_o} \right] \quad (\text{III.2.3})$$

donde las transmisividades aqui son:

$$T_{o1+1/2,j,k} = \left[\frac{k k_{ro} \bar{\gamma}_o \Delta y \Delta z}{\mu_o B_o \Delta x} \right] \quad (\text{IV.2.1})$$

y definiciones similares se manejan para el agua y para el gas. Se buscan las expansiones del lado derecho de estas ecuaciones de la forma:

$$\frac{V_b}{\Delta t} \Delta t \left[\frac{\phi S_o}{B_o} \right] = C_{o1} \Delta t \bar{\phi}_v + C_{o2} \Delta t \bar{\phi}_o + C_{o3} \Delta t \bar{\phi}_g \quad (\text{IV.2.2a})$$

$$\frac{V_b}{\Delta t} \Delta t \left[\frac{\phi S_v}{B_v} \right] = C_{v1} \Delta t \bar{\phi}_v + C_{v2} \Delta t \bar{\phi}_o + C_{v3} \Delta t \bar{\phi}_g \quad (\text{IV.2.2b})$$

$$\frac{V_b}{\Delta t} \Delta t \left[\frac{\phi R_o S_o}{B_o} + \frac{\phi S_g}{B_g} \right] = C_{g1} \Delta t \bar{\phi}_v + C_{g2} \Delta t \bar{\phi}_o + C_{g3} \Delta t \bar{\phi}_g$$

..... (IV.2.2c)

La inserción de estas expansiones en las Ecs. (III.2.1), (III.2.2) y (III.2.3) da por lo tanto tres ecuaciones en las tres presiones desconocidas P_v^{n+1} , P_o^{n+1} y P_g^{n+1} , por lo cual estas ecuaciones pueden ser resueltas simultáneamente.

Se demostrará el procedimiento para la obtención de los coeficientes C_{ij} por expansión de los términos $\Delta t \left[\frac{\phi S_o}{B_o} \right]$. Como fue dado en la Ec. (IV.1.4).

$$\Delta t \left[\frac{\phi S_o}{B_o} \right] = \left[\frac{\phi}{B_o} \right]^{n+1} \Delta t S_o + S_o^n \phi^{n+1} \Delta t \left[\frac{1}{B_o} \right] + S_o^n \left[\frac{1}{B_o} \right]^n \Delta t \phi$$

..... (IV.2.3)

Usando las definiciones de presiones capilares, Ecs. (II.2.2) y (II.2.3).

$$\begin{aligned} \Delta t S_o &= -\Delta t S_v - \Delta t S_g = -S_v' \Delta t P_{cvo} - S_g' \Delta t P_{cgo} \\ &= -S_v' (\Delta t P_o - \Delta t P_v) - S_g' (\Delta t P_g - \Delta t P_o) \end{aligned} \quad (IV.2.4)$$

donde

$$\begin{aligned} S_v' &= \frac{S_v^{n+1} - S_v^n}{P_{cvo}^{n+1} - P_{cvo}^n} \\ S_g' &= \frac{S_g^{n+1} - S_g^n}{P_{cgo}^{n+1} - P_{cgo}^n} \end{aligned} \quad (IV.2.5)$$

A partir de la Ec. (II.1.5) se obtiene que

$$\Delta t P_l = \bar{\gamma}_l \Delta t \bar{h}_l, \quad (IV.2.6)$$

tal que l es un subíndice que representa las fases aceite, agua o gas, y $\bar{\gamma}$ es un peso específico promedio en el intervalo de presión P^n a P^{n+1} , dependiendo de la fase de que se trate. De esta forma la Ec. (IV.2.4), es:

$$\Delta t S_0 = S_v^* \bar{\gamma}_v \Delta t \bar{\phi}_v - (S_v^* - S_g^*) \bar{\gamma}_0 \Delta t \bar{\phi}_0 - S_g^* \bar{\gamma}_g \Delta t \bar{\phi}_g \quad (\text{IV.2.7})$$

de la ecuación

$$\Delta t \phi = \phi_b C_f \Delta t P_v = \phi_b C_f \bar{\gamma} \phi \Delta t \bar{\phi}_v \quad (\text{IV.2.8})$$

por último

$$\Delta t \left[\frac{1}{B_0} \right] = \left[\frac{1}{B_0} \right]^* \Delta t \bar{\phi}_0 \quad (\text{IV.2.9})$$

donde

$$\left[\frac{1}{B_0} \right]^* = \frac{\frac{1}{B_0^{n+1}} - \frac{1}{B_0^n}}{P_0^{n+1} - P_0^n}$$

Sustituyendo las Ecs. (IV.2.7), (IV.2.8) y (IV.2.9) en (IV.2.3) resulta

$$\Delta t \left[\frac{\phi S_o}{B_o} \right] = \bar{\gamma}_v \left\{ \left[\frac{\phi}{B_o} \right]^{n+1} S_v' + S_o^n \frac{\phi^n C_r}{B_o^n} \right\} \Delta t \bar{\phi}_v +$$

$$\left\{ S_o^n \phi^{n+1} \left[\frac{1}{B_o} \right]^n - \bar{\gamma}_o (S_v' - S_g') \left[\frac{\phi}{B_o} \right]^{n+1} \right\} \Delta t \bar{\phi}_o -$$

$$\bar{\gamma}_g S_g' \left[\frac{\phi}{B_o} \right]^{n+1} \Delta t \bar{\phi}_g \quad . \quad (IV.2.10)$$

Las expansiones para las otras dos fases se realiza de manera similar, las cuales se pueden agrupar formando los siguientes coeficientes:

$$C_{o1} = \frac{V_p}{\Delta t} \bar{\gamma}_v \left\{ S_v' \left[\frac{\phi}{B_o} \right]^{n+1} + S_o^n \phi^n C_r \left[\frac{1}{B_o} \right]^n \right\}$$

$$C_{o2} = \frac{V_p}{\Delta t} \left\{ S_o^n \phi^{n+1} \left[\frac{1}{B_o} \right]^n - \bar{\gamma}_o (S_v' - S_g') \left[\frac{\phi}{B_o} \right]^{n+1} \right\}$$

$$C_{03} = \frac{V_P}{\Delta t} \left[\frac{\phi}{B_0} \right]^{n+1} S_g' \bar{\gamma}_g$$

$$C_{v1} = \frac{V_P}{\Delta t} \bar{\gamma}_v \left\{ S_v^n \phi^n C_r \left[\frac{1}{B_v} \right]^n + S_v^n \phi^{n+1} C_v \left[\frac{1}{B_v} \right]^n - \left[\frac{\phi}{B_v} \right]^{n+1} S_v' \right\}$$

$$C_{v2} = \left[\frac{\phi}{B_v} \right]^{n+1} S_v' \bar{\gamma}_0$$

$$C_{g1} = \frac{V_P}{\Delta t} \bar{\gamma}_v \left\{ S_v' \left[\frac{R_a \phi}{B_0} \right]^{n+1} + \left[S_0^n \left[\frac{1}{B_0} \right]^n + S_g^n \left[\frac{1}{B_g} \right]^n \right] \phi^n C_r \right\}$$

$$C_{g2} = \frac{V_P}{\Delta t} \left\{ S_0^n \phi^{n+1} \left[\frac{R_a}{B_0} \right]^n - \bar{\gamma}_0 (S_v' - S_g') \left[\frac{R_a \phi}{B_0} \right]^{n+1} - \bar{\gamma}_g S_g' \left[\frac{\phi}{B_g} \right]^{n+1} \right\}$$

$$C_{g3} = \frac{V_P}{\Delta t} \left\{ S_g^n \phi^{n+1} \left[\frac{1}{B_g} \right]^n + S_g' \bar{\gamma}_g \left[\left[\frac{\phi}{B_g} \right]^{n+1} - \left[\frac{R_a \phi}{B_0} \right]^{n+1} \right] \right\}$$

..... (IV.2.11)

Las definiciones de los términos introducidos es la siguiente:

$$\left[\frac{1}{B_g} \right]' = \frac{\left[\frac{1}{B_g^{n+1}} - \frac{1}{B_g^n} \right]}{P_g^{n+1} - P_g^n}$$

$$\left[\frac{R_a}{B_o} \right]' = \frac{\left[\frac{R_a^{n+1}}{B_o^{n+1}} - \frac{R_a^n}{B_o^n} \right]}{P_o^{n+1} - P_o^n} \quad (\text{IV.2.12})$$

Sustituyendo las Ecs. (IV.2.2) en las Ecs. (III.2.1), (III.2.2) Y (III.2.3) se tienen las tres ecuaciones de flujo siguientes.

$$\Delta(T_o \Delta P_o^{n+1}) - q_v = C_{o1} \Delta t P_v + C_{o2} \Delta t P_o + C_{o3} \Delta t P_g$$

$$\Delta(T_v \Delta P_v^{n+1}) - q_v = C_{v1} \Delta t P_v + C_{v2} \Delta t P_o + C_{v3} \Delta t P_g$$

$$\Delta(T_o R_a \Delta P_o^{n+1}) + \Delta(T_g \Delta P_g^{n+1}) - q_g =$$

$$C_{g1} \Delta t P_v + C_{g2} \Delta t P_o + C_{g3} \Delta t P_g \quad (\text{IV.2.13})$$

Estas ecuaciones se pueden escribir en una sola en forma matricial:

$$\Delta T \Delta P_{ijk}^{n+1} - q_{ijk} = C_{ijk} \Delta P_{ijk}, \quad (\text{IV.2.14})$$

donde,

$$T = \begin{Bmatrix} T_o & 0 & 0 \\ 0 & T_v & 0 \\ 0 & T_o R_u & T_g \end{Bmatrix} \quad C = \begin{Bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{Bmatrix}$$

$$P = \begin{Bmatrix} P_o \\ P_v \\ P_g \end{Bmatrix} \quad q = \begin{Bmatrix} q_o \\ q_v \\ q_g \end{Bmatrix}. \quad (\text{IV.2.15})$$

La Ec. (IV.2.14) se aplica en cada celda de la malla del yacimiento.

La Ec. (IV.2.14) es implícita en presión y saturación. Es decir, no se tienen datos de presión capilar del nivel de tiempo anterior como en el método IMPES. Los cambios en la presión sobre la etapa de tiempo automáticamente se suman para los cambios en la saturación a través de las Ecs. (IV.2.4).

IV.3. METODO DE SOLUCION SECUENCIAL (SEQ)^{1,12,13}

Los métodos IMPES y SS tienen limitaciones por la estabilidad debido al tratamiento explícito de las transmisividades. Esto puede ser resuelto en el SS mediante el tratamiento de los coeficientes. La idea principal del SEQ es mejorar la estabilidad del IMPES incorporando el tratamiento implícito de las saturaciones, pero sin resolver simultáneamente para presiones y saturaciones. El método SEQ consiste de dos etapas. La primera es para obtener una solución de la presión implícita en la misma forma que el método IMPES. La segunda es una solución implícita para las saturaciones usando transmisividades implícitas linealizadas. Por lo tanto, el método puede ser visto (y derivado) en dos formas: cómo una división del método SS con transmisividades linealizadas, o como una aproximación implícita para la saturación (flujo fraccional).

METODO SEQ PARA EL FLUJO DE DOS FASES.

Vamos a introducir el método SEQ considerando un caso sencillo con valores de $C_r=0$ y $\Delta z=0$. La ecuación de SS (IV.2.13) con transmisividades linealizadas puede escribirse en la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
& T_{i-1/2}^{n+1} (P_{i-1} - P_i)^{n+1} - T_{i-1/2}^n (S_v^{n+1} - S_v^n) + \\
& T_{i+1/2}^{n+1} (P_{i+1} - P_i)^{n+1} + T_{i+1/2}^n (S_v^{n+1} - S_v^n) + \\
& = \frac{V_p}{\Delta t} \left[(1/B_L)^{n+1} \Delta t S_L + S_L^n (1/B_L)^n \Delta t P_L \right] + Q_L \\
& + Q^*_{lv} \Delta t S_v + Q^*_{lp} \Delta t P_L, \tag{IV.3.1}
\end{aligned}$$

donde el flujo es de i a $i+1$

$$T_{i+1/2}^{n+1} = (P_{i+1} - P_i)_L^n \frac{\partial T_{i+1/2}}{\partial S_{vi}} \tag{IV.3.2}$$

$Q^*_{lv} \Delta t S_v$ y $Q^*_{lp} \Delta t P$ son las contribuciones implícitas con respecto a S_v y P_L respectivamente. Los operadores $+$ y $-$ en los términos $(S_v^{n+1} - S_v^n)$ denotan los valores corriente arriba. En la primera etapa del método SEQ los términos T^*_L y Q^*_{lv} son despreciados y las ecuaciones para las dos fases se combinan como en el método IMPES con $\Delta t P_v = \Delta t P_n = \Delta t P$ para obtener una sola ecuación de presión en $P=P_n$.

$$\begin{aligned}
& (B\bar{V}^i T\bar{V}_{i-1/2}^i + B\bar{N}^i T\bar{N}_{i-1/2}^i) (P_{i-1} - P_i)^{n+1} \\
& + (B\bar{V}^i T\bar{V}_{i+1/2}^i + B\bar{N}^i T\bar{N}_{i+1/2}^i) (P_{i+1} - P_i)^{n+1} \\
& = \left\{ \frac{V_p}{\Delta t} \left[S\bar{D} B\bar{V}^{i+1} (1/B_w) + (1-S\bar{D}) B\bar{N}^{i+1} (1/B_w) \right] \right. \\
& \left. + Q_{vp} B\bar{V}^{i+1} + Q_{np} B\bar{N}^{i+1} \right\} (P^{n+1} - P^n)_i + B\bar{V}^i [T\bar{V}_{i-1/2}^i (P_{i-1} - P_i)^n \\
& + T\bar{V}_{i+1/2}^i (P_{i+1} - P_i)^n] + Q_v B\bar{V}^{i+1} + Q_n B\bar{N}^{i+1} . \tag{IV.3.3}
\end{aligned}$$

Esta es una ecuación parabólica y la expresión dentro de $\{ \}$ en el lado derecho representa la compresibilidad total C_t para el bloque (obsérvese que los términos Q^*lp contribuyen en C_t y pueden posiblemente hacerla negativa).

Después de resolver las Ecs. (IV.3.3) sepuede resolver la ecuación de saturación en forma explícita (IMPES) de la Ec. (IV.1.40) y llamar al resultado S_v^* . Sin embargo no es necesario ejecutar explícitamente éste paso (ver Ec. (IV.3.6)).

Derivando una ecuación de saturación implícita empezando con la Ec. (IV.3.1) y utilizando la solución de la presión ya obtenida:

$$\begin{aligned}
 & T_{i-1/2}^D (P_{i-1} - P_i)^{n+1} + T_{i+1/2}^D (P_{i+1} - P_i)^{n+1} \\
 = & \frac{V_p}{\Delta t} \left((1/B_v)^* (S_i^* - S_i^D) + S_i^D (1/B)^* \Delta P \right) + T_{i-1/2}^D (P_{ci-1} - P_{ci})^n \\
 & + T_{i+1/2}^D (P_{ci+1} - P_{ci})^n + Q_i^D + Q_{vp} (P^{n+1} - P^n)_i, \quad (IV.3.4)
 \end{aligned}$$

donde $(1/B)^*$ es el valor de $(1/B)^{n+1}$ para la etapa de presión.

Sustituyendo la Ec. (IV.3.4) en (IV.3.1) escrita para $l=v$ nos proporciona la ecuación para la segunda etapa del método SEQ:

$$\begin{aligned}
 - & T_{i-1/2}^D (\Delta t S_v)_- + T_{i+1/2}^D (\Delta t S_v)_+ + T_{i-1/2}^D z \Delta P_{ci-1} \\
 - & (T_{i-1/2}^D + T_{i+1/2}^D) \Delta t P_{ci} + T_{v(i+1/2)} \Delta t P_{ci+1} \\
 = & \frac{V_p}{\Delta t} \left[(1/B_v)^* (S_i^{v+1} - S_i^v) \right]_i + Q_{vv} \Delta t S_{vi} \quad (IV.3.5)
 \end{aligned}$$

Estas ecuaciones contienen los términos implícitos con respecto a saturación y presión capilar en cada etapa de tiempo. Los términos ΔPc aparecen aquí debido a que en IMPES se supone $P_c^{n+1} = P_c^n$. Es importante por estabilidad incluir los términos de P_c en esta etapa. La Ec. (IV.3.5) puede ser reordenada en términos de ΔSv solamente:

$$\begin{aligned}
 & -T_{vi-1/2}(\Delta Sv)_i + T_{vi+1/2}(\Delta Sv)_i + \left[T_{vi-1/2} P_{ci-1} \Delta Sv_{i-1} \right. \\
 & \left. - (T_{vi-1/2} + T_{vi+1/2})^n P_{ci} \Delta Sv_i + T_{vi+1/2} P_{ci+1} \Delta Sv_{i+1} \right] \\
 & = \left[\frac{V_p}{\Delta t} (1/B_v)^* + Q_{vv} \right]_i \Delta Sv_i - \left[-\frac{V_p}{\Delta t} (1/B_v)^* (S_v^* - S_v^n) \right]_i, \quad (IV.3.6)
 \end{aligned}$$

donde el valor del último término puede obtenerse de la Ec. (IV.3.4) sin calcular S_v^* . La Ec. (IV.3.6) puede escribirse en forma matricial como:

$$(T_e + T_{pc} - D_e) \Delta Sv = R_e, \quad (IV.3.7)$$

donde T_e y T_{pc} son las matrices tridiagonales de los términos de flujo implícito debido a los cambios en la permeabilidad y presión capilar en cada etapa de tiempo y D_e es la matriz diagonal de acumulación. La parte de la ecuación debida a los

cambios en la permeabilidad relativa tiene carácter hiperbólico y la parte debido a los cambios en la presión capilar tiene carácter parabólico.

La solución de la Ec. (IV.3.3) da las nuevas presiones y la solución de la Ec. (IV.3.7), las nuevas saturaciones, en una forma secuencial. Ambas etapas requieren de la solución de una matriz de ecuaciones del mismo tamaño. Por lo tanto, el trabajo para una etapa de tiempo con el SEQ es aproximadamente dos veces el trabajo para el IMPES respecto al dimensionamiento del problema. Esto hace que el método SEQ sea mucho más rápido comparado con el SS en problemas de dos y tres dimensiones.

Se analizarán los cálculos de saturación implícita de la Ec. (IV.3.7) en detalle. Primero, en una etapa de tiempo en el IMPES satisface el balance de materia. Si se suman en la Ec. (IV.3.6) todos los términos de transmisividades en el lado izquierdo serán cancelados. La ecuación resultante es.

$$0 = \sum \left[\frac{V_p}{\Delta t} (1/B_v)^n (S_v^{n+1} - S_v^n) \right]_i + \sum Q_{vv} \Delta t S_{vi}$$

Ya que $(1/B_v)^{n+1} = (1/B_v)^n$, la ecuación anterior puede escribirse como:

$$0 = \sum_i \frac{V_p}{\Delta t} \left[(S_v/B_v)^{n+1} - (S_v/B_v)^n \right]_i + \sum_i \Delta t Q_{vi}, \quad (\text{IV.3.8})$$

denotando por $\Delta t Q$ la contribución implícita del ritmo de producción Q . La Ec. (IV.3.8) es una ecuación de balance de materia para las contribuciones implícitas de la fase mojanete. Por lo tanto, en todas las etapas de tiempo los cálculos son conservadores para la fase mojanete.

Los cambios de S_v de S_v^n a S_v^{n+1} también traen cambios en flujos y acumulaciones de la fase no mojanete. El cambio en los términos de acumulación es $(V_p/\Delta t B_n^*) (S_v^{n+1} - S_v^n)$, el cual se obtiene de la Ec. (IV.3.6) multiplicándola por $a_i = (B_v^*/B_n^*)_i$. Por lo tanto, ajustando la solución de la fase mojanete de acuerdo a la Ec. (IV.3.6) es equivalente para resolver la siguiente ecuación para la fase no mojanete:

$$\begin{aligned} & - a_i T_{vi-1/2} (\Delta t S_v) - a_i T_{vi+1/2} (\Delta t S_v) + a_i (T_{vi-1/2} P_{ci-1} \Delta t S_{vi-1} \\ & - (T_{vi-1/2} + T_{vi+1/2})^n P_{ci} \Delta t S_{vi} + T_{vi+1/2} P_{ci+1} \Delta t S_{vi+1}) \\ & = - \frac{V_p}{\Delta t} (1/B_n)^* (S_v^{n+1} - S_v^n)_i + a_i Q_{vvi} \Delta t S_{vi} \\ & = \frac{V_p}{\Delta t} (1/B_n)^* (S_v^{n+1} - S_v^n)_i + \Delta t Q_{ni} \end{aligned} \quad (\text{IV.3.9})$$

Esto puede también verse como sigue. Ya que la segunda etapa del SEQ trata al flujo como incompresible, cualquier cambio en el flujo entre bloques de la fase mojanete debe ser balanceada por un cambio opuesto en la fase no mojanete sobre la base de un yacimiento volumétrico. Por ejemplo, los ajustes de flujo $q_{i+1/2}$, en el yacimiento pueden ser obtenidos de la Ec. (IV.3.6):

$$\Delta q_{i+1/2} = \frac{1}{(1/B_{vt})} (T_{vt_{i+1/2}}(\Delta t_{sv}) + T_{vt_{i+1/2}}(P_{ci_{i+1}} \Delta t_{sv}) - P_{ci} \Delta t_{sv}) \quad (IV.3.10)$$

Esta ecuación tiene dos partes: una debida a la permeabilidad relativa (k_r) y la otra debida a los cambios en la presión capilar (P_c). Cada cambio en el flujo es balanceada independientemente por un término correspondiente en la Ec. (IV.3.9), si esta ecuación se divide por $(1/B_n)^*$ para obtener unidades de volumen de yacimiento. Similarmente, los términos de acumulación también son balanceados.

El balance de materia para la fase no mojanete se obtiene ahora por la suma de las Ecs. (IV.3.9) para cada celda o bloque. Para hacerla es necesario considerar la dirección de flujo. Para flujo de izquierda a derecha (en la dirección de incremento) se tiene:

$$- \sum_{i=1}^{N-1} (a_{i+1} - a_i) T V_{i+1} / z \Delta t S v_i$$

$$+ \sum_{i=1}^{N-1} (a_{i+1} - a_i) T V_{i+1} / z (P_{ci} \Delta t S v_i - P_{ci+1} \Delta t S v_{i+1})$$

$$= \sum_{i=1}^N \frac{V P_i}{\Delta t} \left[(S_n / B_n)^{n+1} - (S_n / B_n)^n \right]_i + \sum_{i=1}^n \Delta t Q_{ni} \quad (\text{IV.3.11})$$

El lado derecho de estas ecuaciones es la expresión de balance de materia, y por lo tanto las sumas del lado izquierdo deben ser cero. Desafortunadamente esto se garantiza solamente para flujo incompresible. Por lo tanto:

La etapa implícita del método SEQ no siempre satisface el balance de materia de la fase no mojanie. El error es proporcional a la variación del área $(1/B_n)$ ¹² $(1/B_v)$.

Los errores de balance de materia son normalmente despreciables para sistemas aceite-agua, pero pueden ser cuestionables para gas-agua, y especialmente para tres fases, donde los errores son también dependientes de la variación de R_a .

Un segundo problema del método consiste en el tratamiento de los términos de producción. Es necesario por estabilidad incluir los términos de producción implícitas en la segunda etapa. Una vez más, ya que esta etapa es incompresible, la suma de los cambios implícitos en los ritmos de producción deben ser cero en un yacimiento volumétrico:

$$B_v \Delta t Q_{vi} + B_n \Delta t Q_{ni} = 0 \quad (IV.3.12)$$

De acuerdo a la experiencia, dos iteraciones son suficientes usualmente, pero los tiempos de cómputo se incrementan proporcionalmente con el número de iteraciones, y el método llega a ser poco atractivo.

METODO SECUENCIAL (SEQ) PARA FLUJO DE TRES FASES.

DERIVACION DEL METODO.

Como se ha visto, se puede partir de diferentes definiciones de los coeficientes dependiendo de cómo las ecuaciones son derivadas. Mientras que esto no es crítico usualmente para flujo de dos fases, esto no sucede para el flujo de tres fases. Por ejemplo, de acuerdo a la definición de la transmisividad empleada en la Ec. (IV.3.5) puede causar problemas de estabilidad en tres fases.

$$T^{i+1/2} = \frac{d T_v}{d S_v} \Delta \phi_{i+1/2} \quad (\text{IV.3.5})$$

Los ajustes implícitos entre bloques denota que Δt_l son expresados como:

$$\Delta t_{qv} + \Delta t_{qo} + \Delta t_{qg} = 0, \quad (\text{IV.3.13})$$

independientemente de cada bloque en la frontera. Los cambios Δt_l son expresadas como

$$\Delta t_l = (T_l^{n+1} - T_l^n) \Delta \phi_l = T_{lv} \Delta t_{Sv} + T_{lg} \Delta y_{Sg}, \quad (\text{IV.3.14})$$

donde se seleccionan Δt_{Sv} y Δt_{Sg} como variables. Debido a que estas dos son independientes, las definiciones de T_l deben satisfacer

$$\sum_l T_{lv} = 0 \quad \text{y} \quad \sum_l T_{lg} = 0 \quad (\text{IV.3.15})$$

las cuales son obtenidas de la Ec. (IV.3.14) por etapa $\Delta t_{Sg}=0$ y $\Delta t_{Sv}=0$ respectivamente. El problema ahora es definir dos términos del tipo T_{lv} tales que un tercero definido por la Ec. (IV.3.15), también sea razonable

físicamente. Las definiciones que satisfacen esa ecuación se obtienen del gasto de la forma de flujo fraccional.

$$q_l = q_T \frac{\lambda_l}{\lambda_T} = q_T f_{lg} ,$$

donde q_l, q_T son gastos (en unidades de volumen de yacimiento). Entonces.

$$T_{lv} = q_T f_{lv} \quad T_{lg} = q_T f_{lg} , \quad (IV.3.16)$$

donde

$$f'_{ov} = \frac{1}{\lambda_T} \left[k \frac{k_{rov}}{\mu_o} - \frac{\lambda_o}{\lambda_T} \lambda_{Tv} \right]$$

$$f'_{og} = \frac{1}{\lambda_T} \left[k \frac{k_{rog}}{\mu_o} - \frac{\lambda_o}{\lambda_T} \lambda_{Tg} \right]$$

$$f'_{vw} = \frac{1}{\lambda_T} \left[k \frac{k_{rv}}{\mu_v} - \frac{\lambda_v}{\lambda_T} \lambda_{Tv} \right]$$

$$f'_{vg} = - \frac{\lambda_v}{\lambda_T} \lambda_{Tg}$$

$$f'_{gv} = \frac{\lambda_g}{\lambda_T} \lambda_{Tv}$$

$$f'_{gg} = \frac{1}{\lambda_T} \left[k \frac{k_{rg}}{\mu_g} - \frac{\lambda_g}{\lambda_T} \lambda_{Tg} \right]$$

$$\lambda_{Tv} = k \left(\frac{k_{rv}}{\mu_v} - \frac{k_{rov}}{\mu_o} \right)$$

$$\lambda_{Tg} = k \left(\frac{k_{rog}}{\mu_o} + \frac{k_{rg}}{\mu_g} \right) \quad (IV.3.17)$$

como $k_{rv} = f(S_v)$ y $k_{rg} = f(S_g)$. Debemos notar que

$$k_{rol} \equiv \frac{\partial k_{ro}}{\partial S_l} \quad l=w, g .$$

Las derivadas en la Ec. (IV.3.17) deben ser evaluadas en las saturaciones corriente arriba para cada fase (p.ej. ya sea i o $i+1$ para las transmisibilidades en $i+1/2$). Note que la Ec. (IV.3.17) puede también satisfacer la Ec. (IV.3.15) para el caso de flujo a contracorriente.

Se observa que la Ec. (IV.3.11) es un caso especial de la Ec. (IV.3.17) y también de la Ec. (IV.3.12), despreciando los cambios en la movilidad total. Las ecuaciones de saturación pueden ser expresadas en forma de matriz de la Ec. (IV.3.7); sin embargo, ahora los elementos son matrices de 2×2 .

Un método diferente de calcular el flujo implícito es definir T_w^k usando cuerdas en la ecuación de flujo fraccional entre las saturaciones S_i^k de S_i^{k+1} .

IV.4. METODO TOTALMENTE IMPLICITO (FULLY IMPLICIT) ^{4,7,11,14}

La formulación totalmente implícita proporciona una solución simultánea de las tres incógnitas. Su principal ventaja es su estabilidad incondicional. Sin embargo, el trabajo de cómputo requerido para obtener una solución es aproximadamente siete veces más que el método IMPES para una Δt dada. Aún así, los modelos totalmente implícitos son usados ampliamente en sistemas de aceite negro para estudios de conificación.

Las relaciones auxiliares Ecs. (II.2.2-II.2.4) son usadas para eliminar tres de las seis incógnitas (P_l y S_l , $h = v, o, g$) en las Ecs. (II.2.5). Típicamente las tres incógnitas restantes son los potenciales (o presiones) o dos saturaciones y una presión. Si los tres potenciales se desconocen, entonces son necesarios los datos de presión capilar diferentes de cero, en particular una pendiente diferente de cero de la presión capilar contra saturación. Se desearía para poder simular una situación en la que las presiones fueran cero, una pendiente ficticia de presión capilar puede introducirse y ser lo suficientemente pequeña para dar resultados esencialmente idénticos, que para el caso de pendientes iguales a cero. La principal ventaja de esta formulación es que las incógnitas son variadas suavemente no

obstante las discontinuidades de saturación. Esto conduce a una convergencia más rápida cuando se emplean procesos iterativos para resolver el problema de la matriz. Por métodos directos, los requerimientos de presión capilar diferente de cero son una limitación innecesaria y se prefiere la formulación alterna. En este caso, las tres incógnitas más frecuentes son P_o , S_v , S_g .

Las no linealidades del método son manejadas conforme al método iterativo de Newton-Raphson.

SOLUCION NUMERICA DE LAS ECUACIONES.

La solución numérica de las ecuaciones diferenciales (II.2.5) implica convertir su carácter continuo en espacio y tiempo por un carácter discreto.

La discretización de las ecuaciones diferenciales empleando el método de diferencias finitas, da lugar a las ecuaciones en diferencias:

Para el aceite,

$$\Delta T_o \Delta P_o - \Delta T_o \gamma_o \Delta D - q_o = \frac{V_b}{\Delta t} \Delta_t \left[\frac{\phi S_o}{B_o} \right] \quad (\text{III.2.1})$$

Para el agua,

$$\Delta T_v \Delta P_v - \Delta T_v \gamma_v \Delta D - q_v = \frac{V_b}{\Delta t} \Delta_t \left[\frac{\phi S_v}{B_v} \right] \quad (\text{III.2.2})$$

Para el gas,

$$\Delta T_g \Delta P_g - \Delta T_g \gamma_g \Delta D + \Delta T_o R_o \Delta P_o - \Delta T_o \gamma_o R_o \Delta D + q_g = \frac{V_b}{\Delta t} \Delta_t \left[\frac{\phi S_g}{B_g} + \frac{\phi R_o S_o}{B_o} \right] . \quad (\text{III.2.3})$$

Los términos $\Delta T \Delta P$, para cada fase, se definen en tres dimensiones como:

$$\Delta T \Delta P = \Delta_x T \Delta_x P + \Delta_y T \Delta_y P + \Delta_z T \Delta_z P ,$$

donde

$$\Delta_x T \Delta_x P = T_{i+1/2,j,k} (P_{i+1,j,k} - P_{i,j,k}) -$$

$$T_{i-1/2,j,k} (P_{i,j,k} - P_{i-1,j,k})$$

Las transmisividades se calculan en el nodo de mayor potencial. Esto es, en los términos correspondientes a las fronteras entre celdas se calculan por medio de un promedio ponderado.

Las ecuaciones en diferencias son no lineales. Su linealización se obtiene aplicando el método de iteración Newtoniana. Tal procedimiento es la base, como ya se mencionó previamente de un simulador totalmente implícito.

De acuerdo con el método de Newton-Raphson, se definen las siguientes funciones a partir de las Ecs. (III.2.1), (III.2.2) y (III.2.3).

Para el aceite:

$$F_{o,i,j,k}^{n+1} = \Delta T_o \Delta P_o - \Delta T_o \gamma_o \Delta D - q_o \Big]_{i,j,k}^{n+1}$$

$$-\frac{V_b}{\Delta t} \Delta_t \left[\frac{\phi S_o}{B_o} \right]_{i,j,k} = 0 \quad (\text{IV.4.1})$$

Para el agua:

$$F_{vt,j,k}^{n+1} = \left[\Delta T_v \Delta P_v - \Delta T_v \gamma_v \Delta D - q_v \right]_{l,j,k}^{n+1}$$

$$- \frac{V_b}{\Delta t} \Delta_l \left[\frac{\phi S_v}{B_v} \right]_{l,j,k} = 0 \quad (\text{IV.4.2})$$

Para el gas:

$$F_{gt,j,k}^{n+1} = \left[\Delta T_g \Delta P_g - \Delta T_g \gamma_g \Delta D + \Delta T_o R_o \Delta P_o - \Delta T_o \gamma_o R_o \Delta D + q_g \right]_{l,j,k}^{n+1}$$

$$- \frac{V_b}{\Delta t} \Delta_l \left[\frac{\phi S_g}{B_g} + \frac{\phi R_o S_o}{B_o} \right]_{l,j,k} = 0, \quad (\text{IV.4.3})$$

en donde las funciones F_{ik} , $f = o, w, g$ dependen de las siguientes variables:

$$F_{i,k} = F_{i,k} (P_{o,i,k-1}, S_{g,i,k-1}, S_{v,i,k-1}, P_{o-i,k},$$

$$S_{g-i,k}, S_{v-i,k}, P_{o,i,k}, S_{g,i,k}, S_{v,i,k}, P_{o+i,k},$$

$$S_{g+i,k}, S_{v+i,k}, S_{v-i,k}, P_{o,i,k+1}, S_{g,i,k+1}) \quad (IV.4.4)$$

Las funciones $F_{i,k}^{n+1}$ se aproximan iterativamente en términos de una expansión en series de Taylor truncada. Esto es:

$$F_{i,k}^{(D+1)} = F_{i,k}^{(D)} + \sum_{l,m} \left[\frac{\partial F_{i,k}^{(D)}}{\partial P_{o,l,m}} \delta P_{o,l,m}^{(D+1)} +$$

$$\left. \frac{\partial F_{i,k}^{(D)}}{\partial S_{g,l,m}} \delta S_{g,l,m}^{(D+1)} + \frac{\partial F_{i,k}^{(D)}}{\partial S_{v,l,m}} \delta S_{v,l,m}^{(D+1)} \right] \quad (IV.4.5)$$

$$l,m = i,k-1; i-1,k; i,k; i+1,k; i,k+1 \quad f = o,w,g$$

El superíndice (D) indica el nivel de iteración. También se tiene que:

$$\delta P_o = P_o^{(D+1)} - P_o^{(D)} \quad (IV.4.6)$$

En forma similar se definen δS_g y δS_v .

De la Ec. (IV.4.5) se obtiene lo siguiente;

$$\sum_{l,m} \left[\frac{\partial F_{l,k}}{\partial P_{ol,m}} \delta P_{ol,m}^{(D+1)} + \frac{\partial F_{l,k}}{\partial S_{gl,m}} \delta S_{gl,m}^{(D+1)} + \frac{\partial F_{l,k}}{\partial S_{vl,m}} \delta S_{vl,m}^{(D+1)} \right] = -F_{l,k}^{(D)} \quad (IV.4.7)$$

Nótese que los superíndices $n+1$ se omitieron en las Ecs. (IV.4.5), (IV.4.6) y (IV.4.7) para abreviar la escritura.

La Ec. (IV.4.7) al ser escrita para cada fase, $f=o,w,g$, en cada nodo i,k y en cada nivel de tiempo $n+1$, genera en cada iteración un sistema de $i \times k$ ecuaciones lineales. El proceso iterativo se inicia con la siguiente estimación:

$$P_{ol,k}^{(0)} = P_{ol,k}^n, \quad S_{gl,k}^{(0)} = S_{gl,k}^n \quad \text{y} \quad S_{vl,k}^{(0)} = S_{vl,k}^n \quad (IV.4.8)$$

en donde el superíndice n representa el nivel de tiempo conocido. El proceso iterativo termina cuando el cambio iterativo de las incógnitas, $\delta P_o^{(v+1)}$, $\delta S_v^{(v+1)}$ y $\delta S_g^{(v+1)}$, en todos los nodos, es menor que la tolerancia estipulada.

La Ec. (IV.4.7) puede también escribirse como:

$$\sum_{l,m} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial F_{l,k}}{\partial X_{j,l,m}} \delta X_{j,l,m} = -F_{l,k} \quad \begin{array}{l} i = 1,2,\dots,l \\ k = 1,2,\dots,k \end{array}$$

$l,m = i,k-1; i-1,k; i,k; i+1,k; i,k+1$

donde $X_1 = P_o$, $X_2 = S_g$ y $X_3 = S_v$, o simplemente como:

$$\bar{J} \delta X = -\bar{F} \quad (IV.4.9)$$

donde \bar{J} es la matriz jacobiana o matriz de derivadas, δX es el vector de incógnitas y \bar{F} es el vector de términos conocidos.

La matriz Jacobiana generada en este caso se caracteriza para un ordenamiento normal de las ecuaciones, es decir, para $i=1,2,\dots,I$; $k = 1,2,\dots,k$, por ser una matriz pentadiagonal en bloques. Esto es, los elementos de la matriz pentadiagonal están constituidos por submatrices de (3×3) .

Consecuentemente, los elementos de los vectores de incógnitas y de términos conocidos están constituidos por subvectores de tres elementos. Las submatrices del Jacobiano están estructuradas, por ejemplo $b_{i,k}$, como:

$$b_{i,k} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_{0i,k}}{\partial P_{0i+1,k}} & \frac{\partial F_{0i,k}}{\partial S_{0i+1,k}} & \frac{\partial F_{0i,k}}{\partial S_{0i+1,k}} \\ \frac{\partial F_{1i,k}}{\partial P_{0i+1,k}} & \frac{\partial F_{1i,k}}{\partial S_{0i+1,k}} & \frac{\partial F_{1i,k}}{\partial S_{0i+1,k}} \\ \frac{\partial F_{2i,k}}{\partial P_{0i+1,k}} & \frac{\partial F_{2i,k}}{\partial S_{0i+1,k}} & \frac{\partial F_{2i,k}}{\partial S_{0i+1,k}} \\ \frac{\partial F_{3i,k}}{\partial P_{0i+1,k}} & \frac{\partial F_{3i,k}}{\partial S_{0i+1,k}} & \frac{\partial F_{3i,k}}{\partial S_{0i+1,k}} \end{bmatrix} \quad \dots\dots (IV.4.10)$$

Similarmente, $e_{i,k}$, $c_{i,k}$, $a_{i,k}$ y $d_{i,k}$ son submatrices de 3×3 formadas por las derivadas parciales de las funciones en i,k con respecto a las variables en $i,k-1$; $i-1,k$; i,k ; k e $i,k+1$, respectivamente. La estructura de los subvectores $6 \times X$ y F es la siguiente:

$$\delta X_{t,k} = \begin{bmatrix} \delta P_{o,t,k} \\ \delta S_{g,t,k} \\ \delta S_{v,t,k} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.4.11})$$

$$F_{t,k} = \begin{bmatrix} F_{o,t,k} \\ F_{v,t,k} \\ F_{g,t,k} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.4.12})$$

C A P I T U L O V

PROGRAMA DE COMPUTO

Una vez expandida la ecuación de difusión en diferencias finitas , se codifica el programa para resolver el problema planteado.

El lenguaje utilizado es FORTRAN 77; las propiedades de los fluidos, permeabilidades relativas, y la presión capilar se proporcionan en forma de tabla.

Las subrutinas que se utilizan en el programa se enlistan a continuación, dando algunos detalles sobre ellas.

Subrutina IMPES. Esta subrutina resuelve las ecuaciones de flujo calculando en forma implícita la presión y en forma explícita la saturación.

Subrutina SS. Esta subrutina resuelve las ecuaciones de flujo en forma simultánea para presión y saturación.

Subrutina SEQ. Esta subrutina resuelve las ecuaciones de flujo en dos partes; la primera se resuelve para presión de igual forma que en el método IMPES, y la segunda es una solución implícita para las saturaciones usando transmisividades implícitas linealizadas.

Subrutina TOTALMENTE IMPLICITA. Esta subrutina resuelve las ecuaciones de flujo de forma totalmente implícita para las incógnitas: Presión y Saturación.

Subrutinas CAPE y XY3. Estas subrutinas calculan las pendientes de manera lineal, entre los valores que se proporcionan en la tabla y que se utilizan en la subrutina de interpolación XY3.

Subrutina PARCI. Esta subrutina calcula las derivadas entre los valores de las pendientes.

Subrutina THOMAS. Esta subrutina resuelve un sistema matricial tridiagonal de coeficientes, y presenta ventajas de almacenamiento y de tiempo de cómputo sobre la técnica de eliminación Gaussiana.

Subrutina BILRI. Esta subrutina resuelve un sistema matricial por bloques, de dos por dos, tridiagonal.

Error de Balance de Materia. Un criterio para determinar la compatibilidad de los valores de presión y de saturación que se obtienen de una simulación es el error de balance de materia. La forma de calcular éste, es conociendo los volúmenes de aceite en el yacimiento al principio y al final del intervalo de tiempo. La diferencia entre los valores deberá ser igual a la producción total durante el intervalo de tiempo, esto es:

$$MBEI = \frac{\sum_{f=1}^m \left[V_c \phi \frac{S_o}{B_o} \right]^n - \sum_{f=1}^m \left[V_c \phi \frac{S_o}{B_o} \right]^{n+1}}{q_o \Delta t} - 1$$

donde V_c es el volumen de la celda y la sumatoria se toma para las m celdas. Cabe advertir que es necesario obtener un valor pequeño de error por el método de balance de materia, pero esto no es suficiente para afirmar que la solución sea correcta. Un error pequeño indica que el aceite total que se tiene en el yacimiento a un nivel de tiempo $n+1$ es correcto, pero de ninguna manera esto garantiza que el aceite esté distribuido correctamente entre todas las celdas .

Volumen poroso inyectado. Se obtiene con la siguiente expresión:

$$V_{pi} = \frac{5.614q_{v@cy} t}{AL\phi^{n+1}}$$

en donde A es el área transversal en pie², L es la longitud total en pie, q_{v@cy} es el gasto total de inyección de agua, ϕ^{n+1} es la porosidad al nivel de tiempo n+1, en fracción, y t es el tiempo acumulado en la simulación en días.

Presión de fondo fluyendo. Como en el programa se especifica el gasto de producción y el de inyección, la P_{vf} se calcula para ambos casos con la siguiente expresión:

$$P_{vf} = P \pm \frac{q\mu B(\ln(r_o/r_w) - 3/4 + S)}{0.00707KK_r\Delta Z}$$

donde:

$$r_o = \sqrt{\frac{\Delta X \Delta Y}{\pi}}$$

Recuperación de Aceite. El cálculo de la recuperación de aceite se realizó en base al volumen original de la siguiente manera :

$$Rec = \frac{\sum_1^n (Vc \phi So)_{inicial} - \sum_1^n (Vc \phi So)^{n+1}}{\sum_1^n (Vc \phi So)_{inicial}}$$

A continuación se presenta un diagrama de bloques de la distribución del programa principal y de las subrutinas principales de los métodos de solución (IMPES, SS, SEQ y TOTALMENTE IMPLICITO).

DIAGRAMA DE BLOQUES

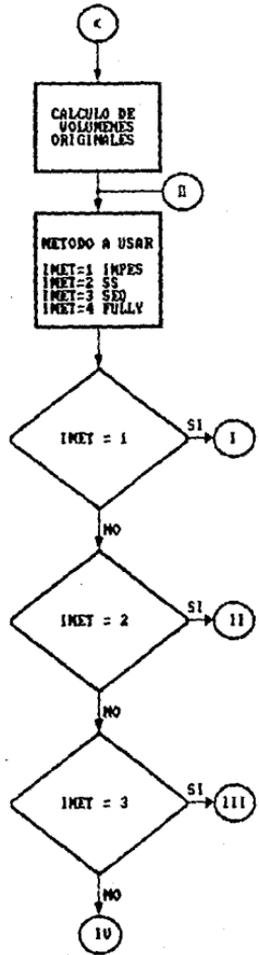


DIAGRAMA DE BLOQUES (CONT.)

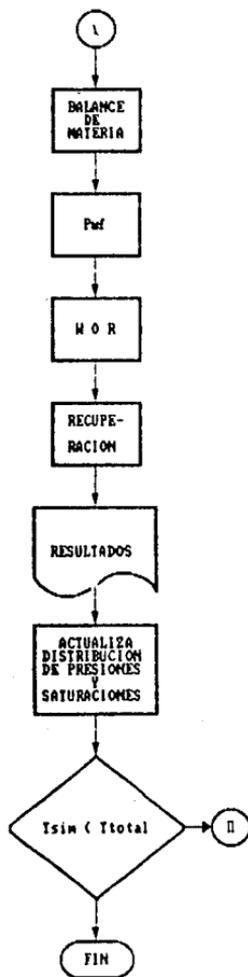


DIAGRAMA DE BLOQUES PARA IMPES

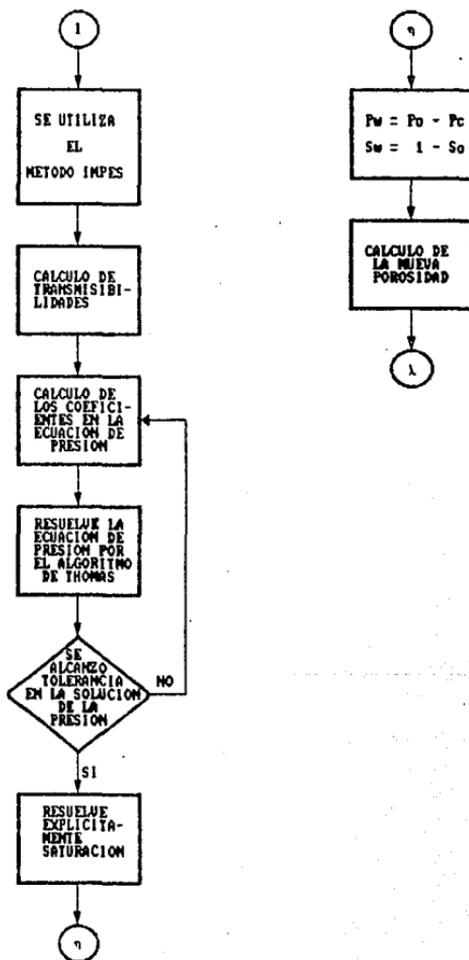


DIAGRAMA DE BLOQUES PARA SS

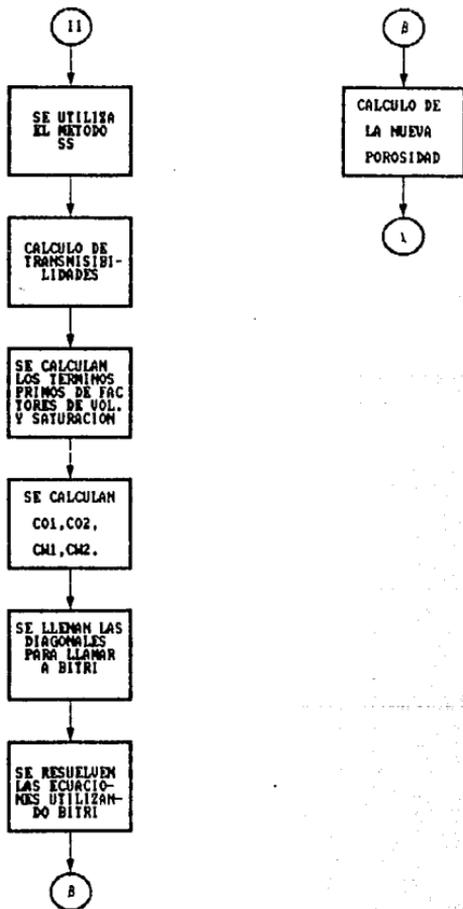


DIAGRAMA DE BLOQUES PARA EL METODO TOTALMENTE IMPLICITO



CAPITULO VI

EJEMPLO DE APLICACION

Para aplicar los conceptos antes vistos se resolverán numéricamente las ecuaciones que simulan el desplazamiento de aceite por agua en una dimensión (problema de Buckley-Leveret con $P_c=0$) por los métodos vistos con anterioridad. El yacimiento es horizontal y los fluidos se consideran incompresibles; las permeabilidades relativas se tomaron de la Fig.(VI.1). A continuación se presentan los datos del yacimiento.

Permeabilidad	(K)	300 mD.
Porosidad	(ϕ)	0.2 fracc.
Longitud del yacimiento	(Lx)	1000 pies.
Ancho del yacimiento	(Ly)	100 pies.
Espesor del yacimiento	(h)	100 pies.
Gasto de inyección	(qv)	76 BPD.
Viscosidad del aceite	(μ_o)	1.0 cp.
Viscosidad del agua	(μ_w)	1.0 cp.
Saturación de aceite inicial	(S _o)	0.84 fracc.
Saturación de agua inicial	(S _v)	0.16 fracc.

Número de bloques	(NB)	40
Longitud de bloque	(Δx)	25 pies.
Incremento de tiempo	(Δt)	10 días.

Para el caso de fluidos incompresibles, flujo de aceite y agua en una dimensión, las ecuaciones utilizadas son:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{k k_{rv}}{\mu v B_v} \frac{\partial \Phi_v}{\partial x} \right] - q_{vv} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\phi S_v}{B_v} \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{k k_{ro}}{\mu_o B_o} \frac{\partial \Phi_o}{\partial x} \right] - q_{vo} = \frac{\partial s_o}{\partial t} \left[\frac{\phi S_o}{B_o} \right]$$

(ver el desarrollo de aplicación de los métodos en el Apéndice A).

Para el caso del método SS, las corridas se realizaron con una pendiente de la curva de $P_o(dP_{cvo}/dS_v)$ de 0.5 y 0.1. La Fig (VI.2) muestra los resultados obtenidos.

Se realizaron varias corridas variando únicamente el Δt , con la finalidad de obtener la estabilidad de los métodos, los resultados se muestran en las Figs. (VI.3, VI.4 y VI.5).

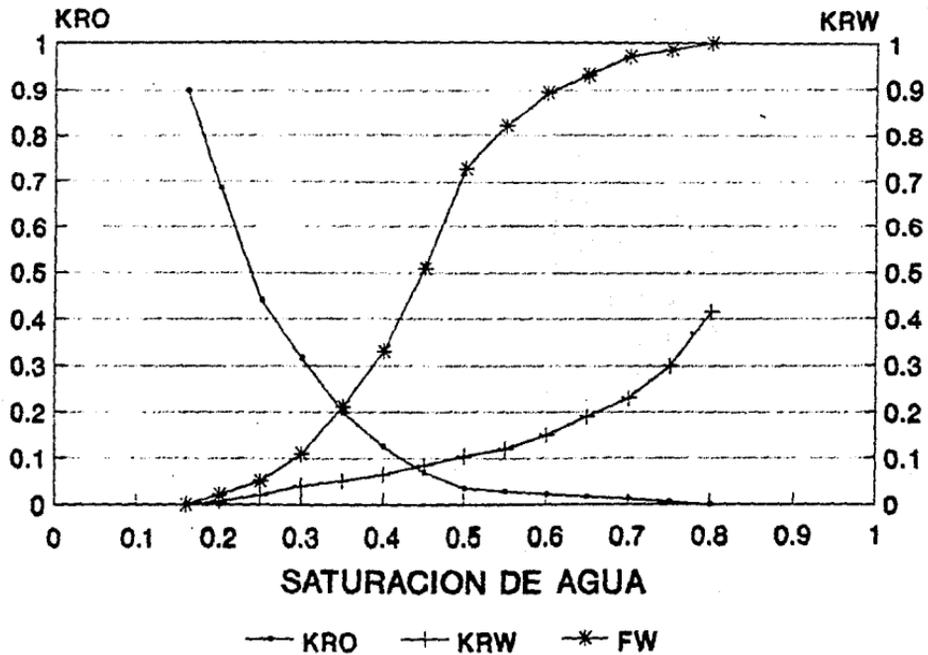


FIG.VI.1 PERMEABILIDADES RELATIVAS

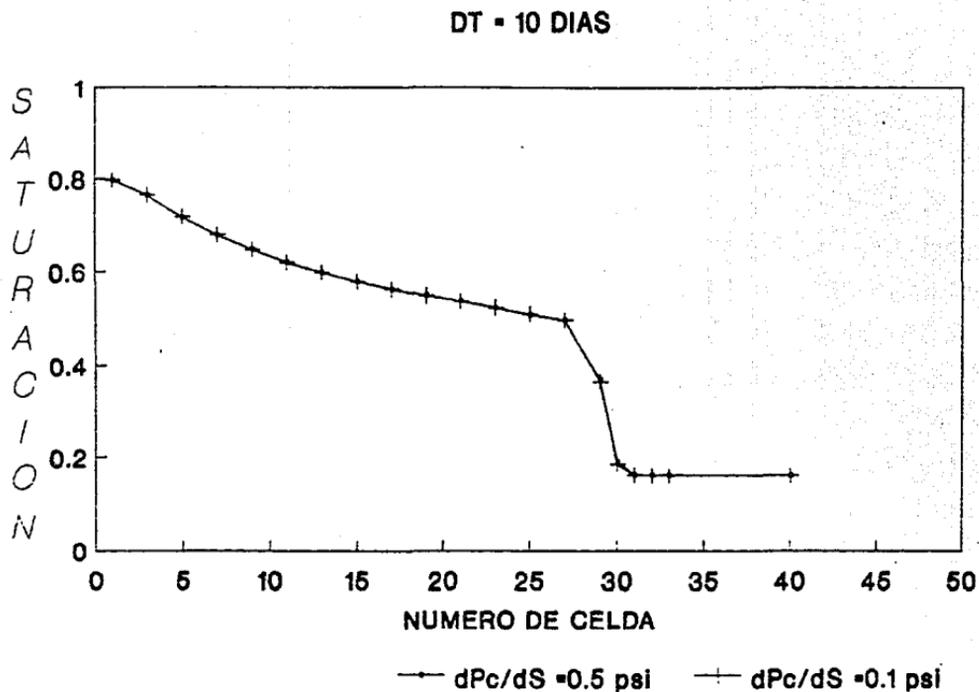


FIG.VI.2 METODO SS CON dP_c/dS DIFERENTES

100

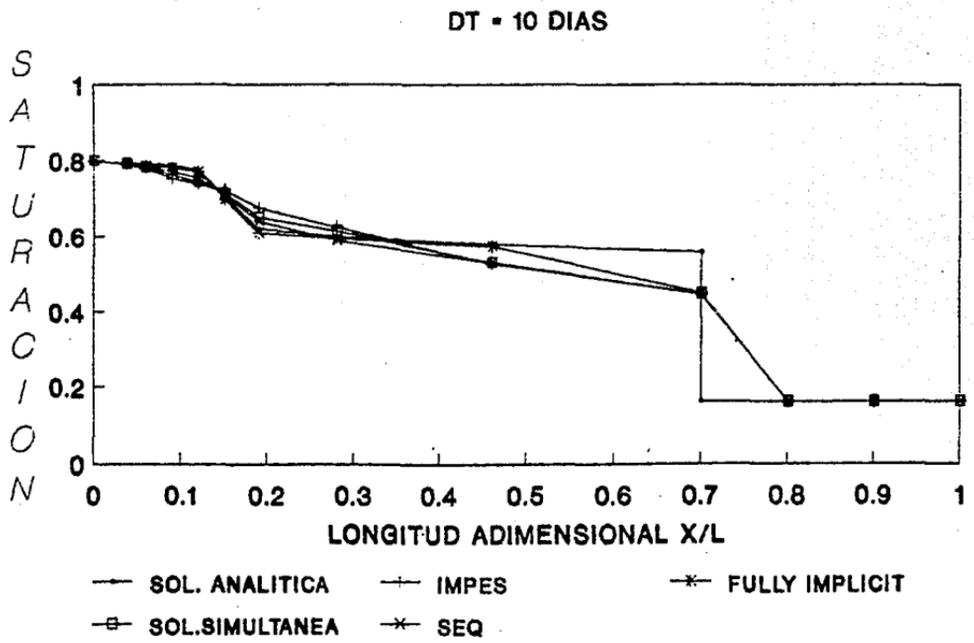


FIG.VI.3 COMPARACION DE RESULTADOS

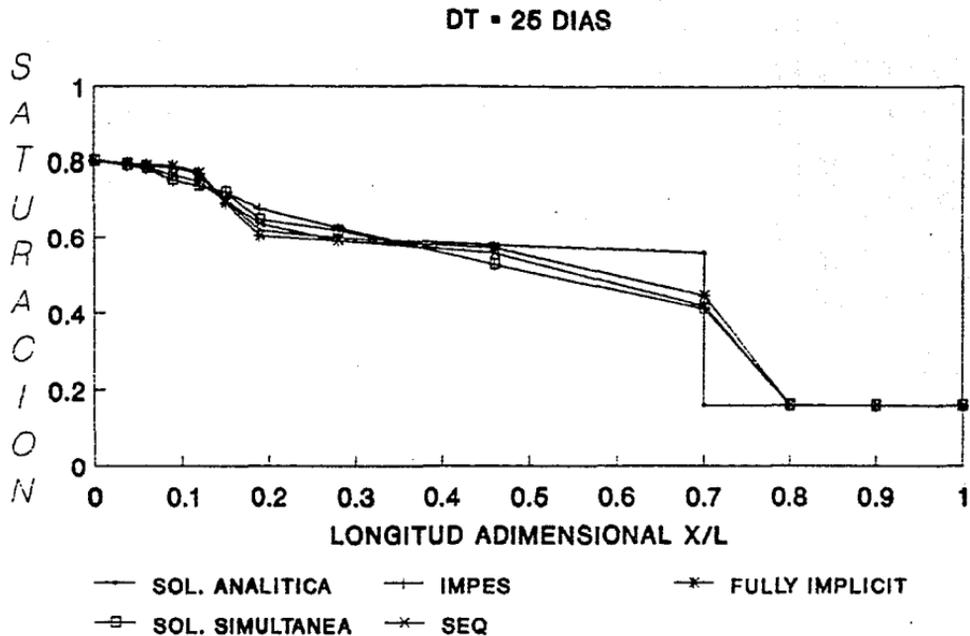


FIG.VI.4 COMPARACION DE RESULTADOS

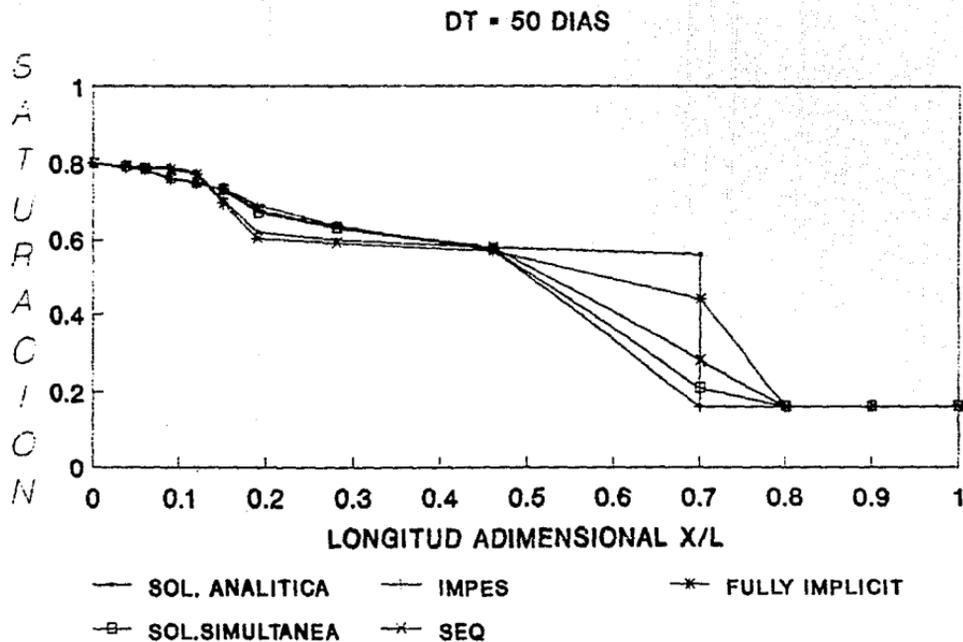


FIG. VI.5 COMPARACION DE RESULTADOS

CAPITULO VII

RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Analizando los resultados obtenidos al aplicar los cuatro métodos de solución al problema de aplicación planteado (IMPES, SS, SEQ, TOTALMENTE IMPLICIIO), se puede concluir lo siguiente:

La selección del método más eficiente para un problema dado depende de dos factores básicos:

- a) El trabajo necesario para obtener la solución de las ecuaciones en diferencias para una etapa de tiempo, depende del tamaño de la malla, el método en sí y el algoritmo empleado para resolver las ecuaciones algebraicas.
- b) El límite de estabilidad y por lo tanto la máxima etapa de tiempo (Δt) que puede usarse para un método dado, depende sobre todo del tipo de problema que se quiere resolver. Nótese que los requerimientos de exactitud pueden también limitar el tamaño de la máxima etapa de tiempo.

Al probarse el simulador para un Δt pequeño se observa que los resultados obtenidos por los cuatro métodos se acerca mucho a la solución analítica

Al incrementarse el Δt el método que se comporta con mayor estabilidad es el TOTALMENTE IMPLICITO, debido a su formulación totalmente implícita; sin embargo, el trabajo de cómputo requerido, para un Δt dado, para alcanzar la solución es aproximadamente siete veces mayor que en el método IMPES. Los modelos totalmente implícitos se usan principalmente para estudios de conificación en sistemas de aceite negro.

Una desventaja de los métodos que no son totalmente implícitos es que el incremento de tiempo debe ser pequeño para que sus resultados sean confiables, lo que implica en ocasiones costos que resultan prohibitivos.

El método SEQ es de 3 a 4 veces más rápido que el método SS. Esto es significativo debido a que el método SEQ elimina la inestabilidad de la P_c del IMPES

El trabajo del IMPES es independiente del número de fases, mientras que para el SS y el SEQ se incrementa drásticamente si se va de problemas de dos a tres fases. Los problemas de tres fases requieren de tres a cuatro veces más tiempo de máquina que problemas de dos fases cuando se

resuelven por los métodos SS o SEQ.

En general, el trabajo para el método SS se incrementa a la tercera potencia del número de fases (ecuaciones diferenciales que están siendo resueltas). Por esta razón, algunos autores (Spillette y colaboradores 1973)¹⁹ apoyan que el SEQ puede usarse como una base para propósito de un simulador general. Se encontró que la estabilidad del SEQ es ligeramente bajo, comparado con SS para problemas relativamente fáciles de conificación, pero puede deteriorarse en forma considerable para problemas difíciles. También, el hecho que el SEQ pueda rigurosamente satisfacer el balance de materia puede ser objetable en algunos casos. Sin embargo, donde se puede aplicar el método SEQ se obtendrán considerables ahorros sobre el SS.

Finalmente, se concluye que a mayor implicidad de la formulación, aumenta la estabilidad y los incrementos de tiempo que se pueden usar son mayores, pero se incrementa el trabajo de cómputo y; a menor implicidad disminuye la estabilidad, los incrementos de tiempo que se pueden usar son menores y el trabajo de cómputo requerido disminuye. Por lo tanto la selección de la formulación óptima va a depender del problema en cuestión.

A P E N D I C E

I M P E S

(METODO IMPLICITO EN PRESION, EXPLICITO EN SATURACION)

$$\frac{\partial}{\partial X} \left\{ \frac{K K_{ro}}{\mu \alpha \beta_0} \frac{\partial P_o}{\partial X} \right\} = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \phi \frac{S_o}{B_o} \right\} + \frac{q_o e c s}{V_c} \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial X} \left\{ \frac{K K_{rv}}{\mu \nu \beta_v} \frac{\partial (P_o - P_c)}{\partial X} \right\} = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\phi (1 - S_o)}{B_v} \right\} + \frac{q_v e c s}{V_c} \quad (2)$$

$$\frac{1}{\Delta X} \left\{ \lambda_{oi+1/2} \left[\frac{P_{oi+1} - P_{oi}}{\Delta X_{i+1/2}} \right] - \lambda_{oi-1/2} \left[\frac{P_{oi} - P_{oi-1}}{\Delta X_{i-1/2}} \right] \right\} =$$

$$\frac{1}{\Delta t} \Delta t \frac{(\phi S_o)}{B_o} + \frac{q_o e c s}{V_c} \quad (3)$$

$$\frac{1}{\Delta X} \left\{ \lambda_{vi+1/2} \left[\frac{(Poi+1 - Poi) - (Pci+1 - Pci)}{\Delta X_{i+1/2}} \right] \right\} -$$

$$\lambda_{vi-1/2} \left[\frac{(Poi - Poi-1) - (Pci - Pci-1)}{\Delta X_{i-1/2}} \right] \left. \right\} = \frac{1}{\Delta t} \Delta t \left[\frac{\phi(1 - S_o)}{B_v} \right] + \frac{q_v @ cs}{V_c} \dots (4)$$

Donde:

$$V_c = \Delta X \Delta Y \Delta Z$$

$$\lambda_o = (KK_{ro} / \mu_o B_o)$$

$$\lambda_v = (KK_{rv} / \mu_v B_v)$$

multiplicando las Ecs. (3 y 4) por el volumen de celda (V_c) se tiene:

$$\Delta Y \Delta Z \left\{ \lambda_{oi+1/2} \left[\frac{Poi+1 - Poi}{\Delta X_{i+1/2}} \right] - \lambda_{oi-1/2} \left[\frac{Poi - Poi-1}{\Delta X_{i-1/2}} \right] \right\} =$$

$$\frac{V_c}{\Delta t} \Delta t \frac{(\phi S_o)}{B_o} + q_o @ cs \quad (5)$$

$$\Delta Y \Delta Z \left\{ \lambda_{vi+1/2} \left[\frac{(Poi+1 - Poi) - (Pci+1 - Pci)}{\Delta Xi+1/2} \right] \right\} -$$

$$\lambda_{vi-1/2} \left[\frac{(Poi - Poi-1) - (Pci - Pci-1)}{\Delta Xi-1/2} \right] \left\} = \frac{Vc}{\Delta t} \Delta t \left[\frac{\phi(1 - So)}{Bv} \right] + qv@cs \dots (6)$$

pero, ya que

$$T_{oi+1/2} = \Delta Y \Delta Z \frac{\lambda_{oi+1/2}}{\Delta Xi+1/2}$$

$$T_{oi-1/2} = \Delta Y \Delta Z \frac{\lambda_{oi-1/2}}{\Delta Xi-1/2}$$

$$T_{vi+1/2} = \Delta Y \Delta Z \frac{\lambda_{vi+1/2}}{\Delta Xi+1/2}$$

$$T_{vi-1/2} = \Delta Y \Delta Z \frac{\lambda_{vi-1/2}}{\Delta Xi-1/2}$$

sustituyendo en las Ecs. (5 y 6)

$$T_{oi+1/2} [Poi+1 - Poi] - T_{oi-1/2} [Poi - Poi-1] = \frac{Vc}{\Delta t} \Delta t \left[\frac{\phi So}{Bo} \right] + qo@cs \dots (7)$$

$$T_{vi+1/2} \left[(P_{oi+1}) - (P_{ci+1} - P_{ci}) \right] -$$

$$T_{vi-1/2} \left[(P_{oi} - P_{oi-1}) - (P_{ci} - P_{ci-1}) \right] = \frac{V_c}{\Delta t} \Delta t \left[\frac{\phi(1-S_o)}{B_w} \right] + q_v @ c_s$$

..... (8)

De la suposición básica del IMPES " *La presión capilar no cambia a lo largo de un período de tiempo*", se tiene:

$$\Delta t P_{cov} = 0$$

de donde se deduce que:

$$\Delta t P_o = \Delta t P_v$$

A partir de la suma de las saturaciones se tiene:

$$\Delta t (S_o + S_v) = \Delta t (1) = 0$$

de donde $\Delta t S_v = -\Delta t S_o$, con lo que se puede tomar $S_o = S$.
Sustituyendo en el lado derecho de las Ecs. (7 y 8), y haciendo su respectiva expansión se tiene:

$$\Delta(T_0^n \Delta P_0) + q_0 = \frac{V_{c1}}{\Delta t} \left\{ S^n \phi^n \left[(1+C_r \delta P) \left(\frac{1}{B_0} \right)^* + \frac{C_f}{B_0^n} \right] \Delta t P \right. \\ \left. + \left(\frac{\phi}{B_0} \right)^{n+1} \Delta t S \right\} \quad (9)$$

$$\Delta(T_0^n \Delta P_v) + q_v = \frac{V_{c1}}{\Delta t} \left\{ (1-S)^n \phi^n \left[(1+C_r \delta P) \left(\frac{1}{B_v} \right)^* + \frac{C_f}{B_v^n} \right] \Delta t P \right. \\ \left. - \left(\frac{\phi}{B_v} \right)^{n+1} \Delta t S \right\} \quad (10)$$

Al multiplicarse la Ec. (9) por un factor A, sumándola a la Ec. (10), y haciendo que todos los factores que están asociados con $\Delta t S$ se anulen o sea que:

$$A \left(\frac{\phi}{B_0} \right)^{n+1} \Delta t S - \left(\frac{\phi}{B_v} \right)^{n+1} \Delta t S = 0$$

de donde se concluye que:

$$A \left(\frac{B_0}{B_v} \right)^{n+1}$$

Recuérdese que las unidades manejadas son las de Darcy, por lo que si se quiere utilizar otro sistema, se debe realizar la transformación correspondiente. En este trabajo se utilizan las unidades inglesas de campo con lo que se tiene:

$$\begin{aligned}
 & AT_{0i+1/2}^n (P_{i+1}^{n+1} - P_i^{n+1}) - AT_{0i-1/2}^n (P_i^{n+1} - P_{i-1}^{n+1}) + \\
 & T_{vi+1/2} \left\{ (P_i^{n+1} - P_{cov}^n)_{i+1} - (P_i^{n+1} - P_{cov}^n)_i \right\} - \\
 & T_{vi-1/2} \left\{ (P_i^{n+1} - P_{cov}^n)_i - (P_i^{n+1} - P_{cov}^n)_{i-1} \right\} +
 \end{aligned}$$

$$887.16755 (Aq_0 + q_v)$$

$$= 158.3285 \frac{V_c}{\Delta t} (AC_{10} + C_{20}) (P^{n+1} - P^n)_i$$

donde:

$$A \left(\frac{B_o}{B_w} \right)^{n+1}$$

$$C_{10} = S^n \phi^n \left[(1 + Cr \delta P) \left(\frac{1}{B_o} \right)^n + \frac{Cr}{B_o^n} \right]$$

$$C_{20} = (1-S)^n \phi^n \left[(1+Cr\delta P) \left[\frac{1}{B_v} \right]^* + \frac{Cr}{B_v^n} \right]$$

$$\left[\frac{1}{B_o} \right]^* = \frac{\frac{1}{B_o^{n+1}} - \frac{1}{B_o^n}}{P_o^{n+1} - P_o^n}$$

$$\left[\frac{1}{B_v} \right]^* = \frac{\frac{1}{B_v^{n+1}} - \frac{1}{B_v^n}}{P_o^{n+1} - P_o^n}$$

Los términos C_{10} , C_{20} , y A se actualizan en cada iteración hasta alcanzar la tolerancia fijada para la presión. Ordenando términos se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
& \left\{ AT_{i-1/2}^n + T_{i-1/2}^n \right\} P_i^{n+1} + \\
& \left\{ -AT_{i+1/2}^n - AT_{i-1/2}^n - T_{i+1/2}^n - T_{i-1/2}^n - \right. \\
& 158.3285 \frac{V_c}{\Delta t} (AC_{10} + C_{10}) \left. \right\} P_i^n \\
& \left\{ AT_{i+1/2}^n + T_{i+1/2}^n \right\} P_{i+1}^{n+1} - \\
& \left\{ 158.3285 \frac{V_c}{\Delta t} (AC_{10} + C_{20}) P_i^n - T_{i+1/2}^n P_{i+1}^n + \right. \\
& T_{i+1/2}^n P_{i+1}^n + T_{i-1/2}^n P_{i+1}^n - T_{i-1/2}^n P_{i+1}^n + \\
& \left. 887.16755 (Aq_0 + qv) \right\} \quad (11)
\end{aligned}$$

Al aplicar la Ec. (11) a cada una de las celdas de la malla se genera un sistema de ecuaciones algebraicas tridiagonal, el cual se resuelve por el algoritmo de Thomas.

Una vez que se ha encontrado la nueva distribución de presiones; se procede a calcular la distribución de la saturación, utilizando explícitamente cualquiera de las ecuaciones de flujo, Por ejemplo, tomando la ecuación del aceite se tiene:

$$S_o^{n+1} = \frac{B_o^{n+1} \left\{ \frac{\Delta t (\Delta(T_o \Delta P_o)_i + 887.16755 q_{oi})}{158.3285 V_{ct}} + \frac{\phi_i^n S_o^n}{B_o^n} \right\}}{\phi_i^{n+1}}$$

METODO DE SOLUCION SIMULTANEA (SSS)

Expandiendo el lado derecho de la ecuación del aceite (7), se obtiene:

$$\Delta t \left[\frac{\phi S_o}{B_o} \right] = \left[\frac{\phi}{B_o} \right]^{n+1} \Delta t S_o + S_o^n \phi^{n+1} \Delta t \left[\frac{1}{B_o} \right] + S_o^n \left[\frac{1}{B_o} \right]^n \Delta t \phi \quad (12)$$

idem para el agua

$$S_o + S_v = 1$$

$$\Delta t S_o = -\Delta t S_v = -S_v' \Delta t P_{cvo} = -S_v' \left[\Delta t P_o - \Delta t P_v \right] \quad (13)$$

$$S_v = \frac{S_v^{n+1} - S_v^n}{P_{Cv}^{n+1} - P_{Cv}^n}$$

$$\phi^{n+1} = \phi^n(1 + CrdP); \Delta t \phi = \phi^n Cr \Delta t P \quad (14)$$

Por último:

$$\Delta t \left[\frac{1}{B_o} \right] = \left[\frac{1}{B_o} \right]^* \Delta t P_o \quad (15)$$

donde:

$$\left[\frac{1}{B_o} \right]^* = \frac{\frac{1}{B_o^{n+1}} - \frac{1}{B_o^n}}{P_o^{n+1} - P_o^n} \Delta t P_o$$

Sustituyendo (13), (14) y (15) en (12) se tiene:

$$\Delta t \left[\frac{\phi S_o}{B_o} \right] = \left[\left(\phi / B_o \right)^{n+1} S_v^* + S_o^n \left(1 / B_o \right)^n \phi^n Cr \right] \Delta t P_v + \left[S_o^n \phi^{n+1} \left(1 / B_o \right)^* - S_v^* \left(\phi / B_o \right)^{n+1} \right] \Delta t P_o \quad (16)$$

de manera idéntica para el agua:

$$\Delta t \left[\frac{\phi S_v}{B_v} \right] = \left[S_v^n \phi^{n+1} C_v \left(1/B_v \right)^n + S_v^n \left(1/B_v \right)^n \phi^n C_r - \left(\phi/B_v \right)^{n+1} S_v^* \right] \Delta t P_v$$

$$+ \left[\left(\phi/B_v \right)^{n+1} S_v^* \right] \Delta t P_o \quad (17)$$

$$C_{o1} = \frac{V_b}{\Delta t} \left[\left(\phi/B_o \right)^{n+1} S_v^* + S_o^n \left(1/B_o \right)^n \phi^n C_r \right]$$

$$C_{o2} = 158.3285 \frac{V_b}{\Delta t} \left[S_o^n \phi^{n+1} \left(1/B_o \right)^n - S_v^* \left(\phi/B_o \right)^{n+1} \right]$$

$$C_{v1} = 158.3285 \frac{V_b}{\Delta t} \left[S_v^n \phi^{n+1} C_v \left(1/B_v \right)^n + S_v^n \left(1/B_v \right)^n \phi^n C_r \right. \\ \left. - \left(\phi/B_v \right)^{n+1} S_v^* \right]$$

$$C_{v2} = 158.3285 \frac{V_b}{\Delta t} + \left[\left(\phi/B_v \right)^{n+1} S_v^* \right]$$

Sustituyendo estos términos en las Ecs. (7) y (8):

$$T_{v1+s/2} \begin{bmatrix} P_{o1+s}^{n+1} & P_{o1+s}^{n+1} \\ P_{o1+s} & -P_{o1+s} \end{bmatrix} - T_{v1-s/2} \begin{bmatrix} P_{o1-s}^{n+1} & P_{o1-s}^{n+1} \\ P_{o1-s} & -P_{o1-s} \end{bmatrix} =$$

$$C_{o1}\Delta t P_v + C_{o2}\Delta t P_o + 887.16755q_o \quad (18)$$

$$T_{v1+s/2} \begin{bmatrix} P_{v1+s}^{n+1} & P_{v1+s}^{n+1} \\ P_{v1+s} & -P_{v1+s} \end{bmatrix} - T_{v1-s/2} \begin{bmatrix} P_{v1-s}^{n+1} & P_{v1-s}^{n+1} \\ P_{v1-s} & -P_{v1-s} \end{bmatrix} =$$

$$+ C_{v1}\Delta t P_v + C_{v2}\Delta t P_o + 887.16755q_v \quad (19)$$

$$\Delta t \Delta P_{i, n+1} = C_i \Delta t P + q_i$$

donde:

$$T = \begin{bmatrix} T_o & 0 \\ 0 & T_v \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} C_{o1} & C_{o2} \\ C_{v1} & C_{v2} \end{bmatrix}; \quad P = \begin{bmatrix} P_o \\ P_v \end{bmatrix}; \quad q = \begin{bmatrix} q_o \\ q_v \end{bmatrix}$$

METODO SOLUCION SECUENCIAL

La primera parte se resuelve utilizando el método IMPES hasta la Ec. (11); la segunda parte, que es la solución de la saturación, se resuelve con las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 & -T_{vi-1/2}(\Delta t S_v)_- + T_{vi+1/2}(\Delta t S_v)_+ + \left[T_{vi-1/2} P_{ci-1} \Delta t S_{vi-1} \right. \\
 & \left. - (T_{vi-1/2} + T_{vi+1/2})^n P_{ci} \Delta t S_{vi} + T_{vi+1/2} P_{ci+1} \Delta t S_{vi+1} \right] \\
 & = \left[\frac{V_p}{\Delta t} \left(\frac{1}{B_v} \right)^* + Q_{vv} \right]_i \Delta t S_{vi} - \left[\frac{V_p}{\Delta t} \left(\frac{1}{B_v} \right)^* + (S^* - S_{ci}^0) \right]_i
 \end{aligned}
 \tag{20}$$

$$-T_{v_{i-1/2}}^n (S_{i-1}^{n+1} - S_{i-1}^n) + T_{v_{i+1/2}}^n (S_{i+1}^{n+1} - S_{i+1}^n) + [T_{v_{i-1/2}}^n P_{ci-1}^n$$

$$(S_{v_{i-1}}^{n+1} - S_{v_{i-1}}^n) - (T_{v_{i-1/2}}^n + T_{v_{i+1/2}}^n)^n P_{ci}^n (S_{v_i}^{n+1} - S_{v_i}^n) +$$

$$T_{v_{i+1/2}}^n P_{ci+1}^n (S_{v_{i+1}}^{n+1} + S_{v_{i+1}}^n) =$$

$$\left[\frac{V_p}{\Delta t} \left(\frac{1}{B_v} \right)^* + Q_{vv}^* \right]_i (S_{v_i}^{n+1} - S_{v_i}^n)$$

$$- \left[\frac{V_p}{\Delta t} \left(\frac{1}{B_v} \right)^* + (S_v^* - S_v^n) \right]_i \quad (21)$$

$$-T_{i-1/2}^* S_{i-1}^{*+} + T_{i+1/2}^* S_{i+1}^{*+} + T_{i-1/2}^* P_{i-1}^* S_{i-1}^{*+} -$$

$$-(T_{i-1/2}^* - T_{i+1/2}^*) P_{i-1}^* S_{i-1}^{*+} + T_{i+1/2}^* P_{i+1}^* S_{i+1}^{*+} -$$

$$-\left[158.3285 \frac{V_p}{\Delta t} \left(\frac{1}{B_v} \right)^* + 887.16755 Q_{vw} \right]_i S_{i-1}^{*+} =$$

$$-T_{i-1/2}^* S_{i-1}^* + T_{i+1/2}^* S_{i+1}^* + T_{i-1/2}^* P_{i-1}^* S_{i-1}^* -$$

$$(T_{i-1/2}^* - T_{i+1/2}^*) P_{i-1}^* S_{i-1}^* + T_{i+1/2}^* P_{i+1}^* S_{i+1}^* -$$

$$\left[158.3285 \frac{V_p}{\Delta t} \left(\frac{1}{B_v} \right)^* + 887.16755 Q_{vw} \right]_i S_{i-1}^* -$$

$$\left[158.3285 \frac{V_p}{\Delta t} \left(\frac{1}{B_v} \right)^* + (S_{i-1}^* - S_{i-1}^{*+}) \right]_i \quad (22)$$

METODO TOTALMENTE IMPLICITO (FULLY IMPLICIT)

Haciendo las funciones para el agua y el aceite e igualando a cero se tiene:

$$F_o = T_{oi+1/2} [P_{oi+1} - P_{oi}] - T_{oi-1/2} [P_{oi} - P_{oi-1}]$$

$$- \frac{V_{pi}}{\Delta t} \Delta t \left[\frac{(1+Cr\delta P) S_o}{B_o} \right]_i + q_o @ c_s = 0 \quad (23)$$

$$F_v = T_{vi+1/2} [(P_{oi+1}) - (P_{ci+1} - P_{ci})] -$$

$$T_{vi-1/2} [(P_{oi} - P_{oi-1}) - (P_{ci} - P_{ci-1})]$$

$$- \frac{V_{pi}}{\Delta t} \Delta t \left[\frac{(1+Cr\delta P) (1-S_o)}{B_v} \right] + q_v @ c_s = 0 \quad (24)$$

Derivando las funciones con respecto a P_o y S_o se tiene, para el nodo $i-1$:

$$\begin{cases} 0 & \text{si } \Delta P \geq 0 \\ [] & \text{si } \Delta P < 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial F_o}{\partial P_{oi-1}} = T_{oi-1/2} - T_{oi-1/2} \Delta P \left[-\frac{B_o^*}{B_o} - \frac{\mu_o^*}{\mu_o} \right]$$

$$\frac{\partial F_o}{\partial S_{oi-1}} = -\Delta P T_{oi-1/2} \left[\frac{K_{ro}^*}{K_{ro}} \right]$$

$$\frac{\partial F_v}{\partial P_{oi-1}} = T_{vi-1/2} - T_{vi-1/2} (\Delta P - \Delta P_c) \left[-\frac{B_v^*}{B_v} - \frac{\mu_v^*}{\mu_v} \right]$$

$$\frac{\partial F_v}{\partial S_{oi-1}} = -T_{vi-1/2} \frac{\partial P_c}{\partial S_o} - [\Delta P - \Delta P_c] T_{vi-1/2} \left[\frac{K_{rv}^*}{K_{rv}} - P_c^* \right]$$

$$\left\{ -\frac{B_v^*}{B_v} - \frac{\mu_v^*}{\mu_v} \right\}$$

$$\frac{\partial F_o}{\partial P_{oi}} = -T_{oi+1/2} + T_{oi+1/2} \Delta P \left[-\frac{B_o^*}{B_o} - \frac{\mu_o^*}{\mu_o} \right] \begin{cases} 0 & \text{si } DP_{i+1} \geq 0 \\ 1 & \text{si } DP < 0 \end{cases}$$

$$-T_{oi-1/2} - T_{oi-1/2} \Delta P \left[-\frac{B_o^*}{B_o} - \frac{\mu_o^*}{\mu_o} \right] \begin{cases} 0 & \text{si } DP_i < 0 \\ 1 & \text{si } DP \geq 0 \end{cases}$$

$$- \frac{V_{pi}}{\Delta t} S_o^{n+1} \left\{ (1 + C_r \delta P) \left[-\frac{B_o^*}{B_o} \right] + \left[\frac{1}{B_o^{n+1}} \right] C_r \right\}$$

$$\frac{\partial F_0}{\partial S_{0t}} = \Delta P T_{0t+1/2} \left[\frac{K_{r0^*}}{K_{r0}} \right] \begin{cases} 0 & \text{si } DP_{t+1} \geq 0 \\ [] & \text{si } DP_{t+1} < 0 \end{cases}$$

$$- \Delta P T_{0t-1/2} \left[\frac{K_{r0^*}}{K_{r0}} \right] - \frac{V_{pt}}{\Delta t} \frac{1}{B_0^{n+1}} (1 + Cr \delta P) \begin{cases} 0 & \text{si } DP_t < 0 \\ [] & \text{si } DP_t \geq 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial F_v}{\partial P_{0t}} = -T_{vt+1/2} + T_{vt+1/2} (\Delta P - \Delta P_c) \left\{ \frac{B_{v^*}}{B_v} - \frac{\mu_{v^*}}{\mu_v} \right\}$$

$$-T_{vt-1/2} - T_{vt-1/2} (\Delta P - \Delta P_c) \left\{ \frac{B_{v^*}}{B_v} - \frac{\mu_{v^*}}{\mu_v} \right\}$$

$$- \frac{V_{pt}}{\Delta t} (1 - S_0)^{n+1} \left\{ (1 + Cr \delta P) \left[- \frac{B_{v^*}}{B_v^2} \right] + \left[\frac{1}{B_0^{n+1}} \right] Cr \right\}$$

$$+ q_0 \left[\frac{T_{vt}}{T_{0t}} \right] \left\{ \left[\frac{B_{0^*}}{B_0} - \frac{\mu_{0^*}}{\mu_0} \right] - \left[\frac{B_{v^*}}{B_v} - \frac{\mu_{v^*}}{\mu_v} \right] \right\}$$

$$\frac{\partial F_v}{\partial S_{0i}} = T_{vi+1/2} \frac{\partial P_c}{\partial S_0} + [\Delta P - \Delta P_c] \left\{ T_{vi+1/2} \left[\frac{K_{rv}^*}{K_{rv}} - P_c^* \right. \right.$$

$$\left. \left. \left[-\frac{B_v^*}{B_v} - \frac{\mu_v^*}{\mu_v} \right] \right\} \right\} \begin{cases} 0 & \text{si } DP_{i+1} \geq 0 \\ \{ \} & \text{si } DP_{i+1} < 0 \end{cases}$$

$$+ T_{vi-1/2} \frac{\partial P_c}{\partial S_{0i}} - [\Delta P - \Delta P_c] \left\{ T_{vi-1/2} \left[\frac{K_{rv}^*}{K_{rv}} - P_c^* \right. \right.$$

$$\left. \left. \left[-\frac{B_v^*}{B_v} - \frac{\mu_v^*}{\mu_v} \right] \right\} \right\} \begin{cases} 0 & \text{si } DP_i < 0 \\ \{ \} & \text{si } DP_i \geq 0 \end{cases}$$

$$- \frac{V_{pi}}{\Delta t} (1 + C_r \delta P) \left[-\frac{1}{B_v} + (1 - S_0) P_c^* \left[\frac{B_v^*}{B_v^2} \right] \right]$$

$$+ q_0 \left[\frac{T_{vi}}{T_{oi}} \right] \left\{ \left[\frac{K_{rv}^*}{K_{rv}} - P_c^* \right] \left[-\frac{B_v^*}{B_v} - \frac{\mu_v^*}{\mu_v} \right] - \frac{K_{rc}^*}{K_{rci}} \right\}$$

$$\frac{\partial F_0}{\partial P_{0i+1}} = T_{oi+1/2} + T_{oi+1/2} \Delta P \left[-\frac{B_o^*}{B_o} - \frac{\mu_o^*}{\mu_o} \right] \left\{ \begin{array}{l} [] \text{ si } \Delta P \geq 0 \\ 0 \text{ si } \Delta P < 0 \end{array} \right. \quad i+1$$

$$\frac{\partial F_o}{\partial S_{oi+1}} = \Delta P_{Tot+1/2} \left[\frac{K_{ro}^*}{K_{ro}} \right]$$

$$\frac{\partial F_v}{\partial P_{oi+1}} = T_{vi+1/2} + T_{vi+1/2}(\Delta P - \Delta P_c) \left[-\frac{B_v^*}{B_v} - \frac{\mu_v^*}{\mu_v} \right]$$

$$\frac{\partial F_v}{\partial S_{oi+1}} = -T_{vi+1/2} \frac{\partial P_{ci+1}}{\partial S_{oi+1}} + [\Delta P - \Delta P_c] T_{vi+1/2} \left[\left[\frac{K_{rv}^*}{K_{rv}} \right] - P_c^* \right]$$

$$\left[-\frac{B_v^*}{B_v} - \frac{\mu_v^*}{\mu_v} \right]$$

NOMENCLATURA

- Bt = factor de volumen de la fase líquida.
- Cr = compresibilidad de la roca.
- D = profundidad con respecto a un nivel de referencia.
- f_l = coeficiente de flujo fraccional.
- k = permeabilidad absoluta.
- k_{rl} = permeabilidad relativa de la fase líquida.
- P_{ego} = presión capilar gas-aceite.
- P_{evo} = presión capilar agua-aceite.
- P = presión del aceite.
- P_l = presión de la fase líquida.
- q_l = gasto de producción de la fase líquida @ c.s.
- q* = gasto de producción de la fase líquida @ c.y.
- R_o = Relación gas-aceite instantánea.
- S_l = saturación de la fase líquida.
- t = tiempo.
- T_l = transmisibilidad de la fase líquida.
- V_b = volumen de un elemento de malla = Δx Δy Δz.
- V_p = volumen de poros en un elemento de malla = V_b φ_o.
- Δt = intervalo de tiempo tⁿ⁺¹ - tⁿ.
- x,y,z = coordenadas cartesianas.
- γ_l = peso específico de la fase líquida.
- Δ = operador en diferencias del tiempo.
- μ_l = viscosidad de la fase líquida.
- φ = porosidad.

ϕ_0 = porosidad a una presión base P^0 .

$\bar{\phi}$ = potencial de flujo.

ρ_l = densidad de la fase líquida @ c.y.

SUPERINDICES

n = nivel de tiempo.

k = nivel de iteración.

SUBINDICES

g = gas

o = aceite

w = agua

@cs = medido a condiciones estándar.

@cy = medido a condiciones de yacimiento.

i = índice de ordenamiento de malla en la dirección x.

REFERENCIAS.

- 1.- Aziz K. y Settari A. "Petroleum Reservoir Simulation." Applied science publishers LTD London, 1979.
- 2.- Coats, K. K.; "Elements of Reservoir Simulation." Engineering Institutes college of Engineering June 9-13-1969. University of Texas.
- 3.- Eichelow. R. B.; "Modern Reservoir Engineering a Simulation Approach."; Prentice-Hall inc. 1977.
4. Forsythe, G. et al.: "Computer Methods for Mathematical Computations."; Prentice-Hall inc 1977.
5. Facultad de Ingeniería, UNAM; "Apuntes de Simulación Matemática de los Yacimientos."; 1984. México, D.F.
- 6.- Pirson, J.G.; "Oil Reservoir Engineering."; New York. Mc-Graw Hill, 1958. 2^o Ed pp. 577.
- 7.- Rodríguez de la Garza F.; "EOKSAP: Un Simulador Numérico del Fenómeno de Condensación"; Publicación del S.M.P.

- 8.- Jprvak, A. and Coats, K. H.; "Numerical Simulation of Coning Using Implicit Production Terms"; *JPSJ* pp 257-267 (September 1970).
- 9.- Muskat, M.; "The Flow of Homogeneous Fluids Through Porous Media", New York, Ann Arbor J. W. Edward, 1946.
- 10.- Limón Hernandez Rafael.; "Modelo Matemático Para Simular el Comportamiento de Yacimientos de Aceite, Gas y Agua."; *Publicación de la ASPM. Ingeniería Petrolera. Octubre 1973 México, D.F.*
- 11.- A. Cellari. and K. Aziz. "Treatment of Nonlinear Terms in the Numerical Solution of Partial Differential Equations for Multiphase Flow in Porous Media."; *Int. J. Multiphase Flow, Vol. 1. pp. 817 - 844. Pergamon Elsevier, 1975. Great Britain.*
- 12.- A.G. Spilleke, J.G. Hillestad, and H.L. Stone, "A High Stability Sequential Solution approach to Reservoir Simulation." ; *JPS 4542, October 1973.*
- 13.- Pilego. D. Cesar Augusto; "Modelo Lineal para Inyección de Agua en Yacimientos de Aceite ". *Tesis de Licenciatura Fac. Ingeniería. UNAM., 1990.*

14.- G. V. Thomas; "Principles of Hydrocarbon Reservoir";
International Human Resources Development Corporation;
1982.