

26
2^{ej.}



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

SOLUCION NUMERICA DE LA ECUACION
DE DIFUSION POR EL METODO DE
ELEMENTO FINITO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

INGENIERO PETROLERO

P R E S E N T A :

JUAN MANUEL RODRIGUEZ DOMINGUEZ



MEXICO, D. F.

1992

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE

INTRODUCCION.....	1
I.- DEFINICION DEL PROBLEMA.....	4
II.- DESARROLLO DEL MODELO MATEMATICO.....	6
II.1.- DESARROOLLO DEL MODELO MATEMATICO.....	6
II.1.1.- ECUACION DE CONTINUIDAD.....	6
II.1.2.- ECUACION DE MOVIMIENTO.....	12
II.1.3.- ECUACION DE ESTADO.....	13
II.1.4.- MODELO MATEMATICO.....	15
II.2.- CARACTERISTICAS DEL MODELO MATEMATICO.....	17
III.- TEORIA DEL ELEMENTO FINITO.....	20
III.1.- CONCEPTO DEL ELEMENTO FINITO.....	20
III.2.- PLANTEAMIENTO ADECUADO DE LA ECUACION DE LA DIFUSION.....	21
III.3.- CARACTERIZACION VARIACIONAL.....	27
III.4.- PLANTEAMIENTO DE LA SOLUCION APROXIMADA.....	32
IV.- SOLUCION DEL MODELO MATEMATICO POR ELEMENTO FINITO..	40
IV.1.- METODO DE SOLUCION.....	40
IV.2.- EJEMPLO ILUSTRATIVO.....	44

V.- EJEMPLO DE APLICACION.....	52
V.1.- EJEMPLOS DE APLICACION.....	52
V.2.- COMPARACION CON DIFERENCIAS FINITAS.....	74
V.I.- PROGRAMA DE COMPUTO.....	93
VI.1.- CARACTERISTICAS DEL PROGRAMA.....	93
VII.- RESULTADOS Y CONCLUSIONES.....	105
NOMENCLATURA.....	109
BIBLIOGRAFIA.....	111
APENDICE A.....	113
APENDICE B.....	121

INTRODUCCION

Los hidrocarburos han sido y serán un factor muy importante para el desarrollo de nuestro país . En el futuro, su explotación óptima y su aprovechamiento racional deberán ser los principios que normen su destino. Por lo tanto, los estudios e investigaciones que contribuyan a desarrollar nuevas técnicas para para alcanzar los objetivos anteriormente mencionados serán fundamentales, y contribuirán para obtener un mayor beneficio económico. En el ámbito de la ingeniería, la simulación matemática es de suma importancia para solucionar una gran variedad de problemas. La simulación es un proceso donde el ingeniero integra diversos factores para generar un modelo que permita reproducir en forma adecuada un fenómeno físico, para que posteriormente cuente con elementos de juicio y pueda tomar las decisiones pertinentes.

En el caso específico de la Ingeniería Petrolera, se ha utilizado la simulación matemática con buenos resultados para predecir el comportamiento de los yacimientos. En la predicción del comportamiento de flujo de fluidos a través

de medios porosos, normalmente se tienen que resolver sistemas de ecuaciones diferenciales parciales no lineales, cuya solución analítica es imposible. Los métodos de diferencias finitas son los que más se han utilizado para obtener soluciones aproximadas a tales sistemas. Sin embargo, para la descripción adecuada de algunos fenómenos se tuvo la necesidad de estudiar otras alternativas de solución. Una de éstas es por medio de los métodos variacionales y muy concretamente por el método del elemento finito.

Con el método de diferencias finitas es posible obtener soluciones definidas sobre puntos discretos en espacio y tiempo; en cambio, los métodos variacionales (elemento finito) nos pueden proporcionar soluciones continuas, lo que implica una ventaja importante.

En este trabajo se presenta una introducción al método del elemento finito, así como la aplicación de éste en la solución de la ecuación de difusión, con el propósito de generar un modelo matemático que represente en forma adecuada el comportamiento de un yacimiento.

Antes de aplicar el método del elemento finito, se tiene que plantear el problema a resolver en forma adecuada. Posteriormente se utilizarán conceptos del cálculo variacional para transformar la ecuación de difusión en una ecuación integro-diferencial que tendrá incorporadas tanto las condiciones iniciales como las de frontera, para

después obtener el funcional que minimizaremos mediante la aplicación de esta técnica numérica.

CAPITULO I

DEFINICION DEL PROBLEMA.

El problema consistirá en resolver un modelo matemático que represente el fenómeno físico del escurrimiento de un fluido ligeramente compresible a través de un medio poroso, en un yacimiento determinado, para poder predecir su comportamiento.

En el pasado se han utilizado técnicas que presentan grandes limitaciones, como lo es la aplicación de la ecuación de balance de materia; ésta en realidad es un balance volumétrico, que considera al yacimiento como un tanque.

Se han desarrollado métodos y modelos que presentan menos limitaciones y más exactitud en los resultados obtenidos. El método más utilizado es el de diferencias finitas y permite resolver la ecuación de difusión en forma satisfactoria.

Sin embargo, en este trabajo se presentará un método basándose en el elemento finito, que nos permitirá dar solución numérica a la ecuación de difusión y así dejar

las bases para que posteriormente se pueda predecir el comportamiento de un yacimiento . Una de las ventajas del método que se presentará, es la que se refiere a la solución que proporciona, ya que será continua en espacio y tiempo.

CAPITULO II

DESARROLLO DEL MODELO MATEMATICO.

En este capítulo se presenta el desarrollo del modelo matemático, que permitirá predecir el comportamiento de un yacimiento de aceite.

II.1.- Desarrollo del Modelo Matemático.

La ecuación que describe matemáticamente el flujo de una sola fase a través de un medio poroso, se desarrolla a partir de la combinación de los siguientes conceptos¹:

- Principio de conservación de la masa.
- Ecuación de movimiento.
- Ecuación de estado.

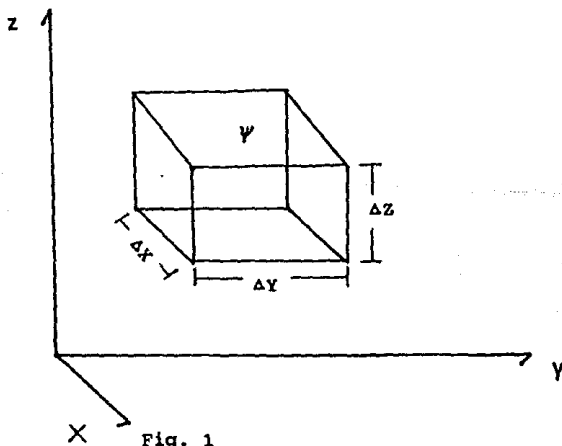
II.1.1.- Ecuación de Continuidad.

La ecuación de continuidad describe el principio de

conservación de la masa. Esta ecuación establece que:

$$\left[\begin{array}{l} \text{MASA QUE} \\ \text{ENTRA EN} \\ \text{EL SISTEMA} \end{array} \right] - \left[\begin{array}{l} \text{MASA QUE} \\ \text{SALE DEL} \\ \text{SISTEMA} \end{array} \right] \pm \left[\begin{array}{l} \text{MASA EXTRAIDA} \\ \text{O ADICIONADA AL} \\ \text{AL SISTEMA EN } \Delta t \end{array} \right] = \left[\begin{array}{l} \text{CAMBIO DE MASA EN EL} \\ \text{SISTEMA EN UN } \Delta t \end{array} \right]$$

Para obtener la expresión matemática que representa el principio de conservación de la masa, se considera un elemento diferencial del medio poroso, cuyas dimensiones son ΔX , ΔY y ΔZ , existiendo flujo en todas las superficies a través del elemento, como se muestra en la Fig. 1.



Realizando un balance de materia para un pequeño intervalo de tiempo Δt , la cantidad de masa que entra en la dirección X es:

$$\left[\rho v \right]_x \Delta Y \Delta Z \Delta t^* .$$

De forma análoga, para las direcciones Y y Z:

$$\left[\rho v \right]_y \Delta X \Delta Z \Delta t$$

$$\left[\rho v \right]_z \Delta X \Delta Y \Delta t .$$

La cantidad de masa que sale del volumen de control para cada dirección es:

$$\left[\rho v \right]_{x+\Delta x} \Delta Y \Delta Z \Delta t$$

$$\left[\rho v \right]_{y+\Delta y} \Delta X \Delta Z \Delta t$$

$$\left[\rho v \right]_{z+\Delta z} \Delta X \Delta Y \Delta t .$$

El término de cambio de masa en el volumen de control es igual a la masa en el tiempo $t+\Delta t$ menos la masa en el tiempo t , es decir:

* Nomenclatura y referencias al final.

$$\left[\begin{array}{l} \text{TERMINO DE} \\ \text{CAMBIO DE} \\ \text{MASA EN } \Delta t. \end{array} \right] = \left[\left[\psi \rho \right]_{x+\Delta x} - \left[\psi \rho \right]_x \right] \Delta X \Delta Y \Delta Z$$

La adición o extracción de masa del elemento se puede presentar como:

$$W(x, y, z) = q \rho,$$

cuyo signo depende de si se extrae o se inyecta fluido.

Aplicando el principio de conservación de la masa:

$$\begin{aligned} & \left[\left[\rho v \right]_x - \left[\rho v \right]_{x+\Delta x} \right] \Delta Y \Delta Z \Delta t + \\ & \left[\left[\rho v \right]_y - \left[\rho v \right]_{y+\Delta y} \right] \Delta X \Delta Z \Delta t + \\ & \left[\left[\rho v \right]_z - \left[\rho v \right]_{z+\Delta z} \right] \Delta X \Delta Y \Delta t \pm W(x, y, z) = \\ & \left[\left[\psi \rho \right]_{t+\Delta t} - \left[\psi \rho \right]_t \right] \Delta X \Delta Y \Delta Z . \end{aligned}$$

Dividiendo la ecuación entre $\Delta X \Delta Y \Delta Z$ y Δt , y arreglando términos, se tiene:

$$\begin{aligned}
 & \left[\frac{[\rho v]_{x+\Delta x} - [\rho v]_x}{\Delta x} + \right. \\
 & \frac{[\rho v]_{y+\Delta y} - [\rho v]_y}{\Delta y} + \\
 & \left. \frac{[\rho v]_{z+\Delta z} - [\rho v]_z}{\Delta z} \right] + \\
 & \frac{W(x, y, z)}{\Delta x \Delta y \Delta z \Delta t} = \\
 & \psi \frac{[\rho_t \Delta t - \rho_t]}{\Delta t} .
 \end{aligned}$$

Obteniendo límites cuando Δx , Δy , Δz , y Δt tienden a cero:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{[\rho v]_{x+\Delta x} - [\rho v]_x}{\Delta x} \right] +$$

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left[\frac{[\rho v]_{y+\Delta y} - [\rho v]_y}{\Delta y} \right] +$$

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left[\frac{[\rho v]_{z+\Delta z} - [\rho v]_z}{\Delta z} \right] +$$

$$\frac{W(x, y, z)}{\Delta x \Delta y \Delta z \Delta t} =$$

$$- \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\psi [\rho_t + \Delta t - \rho_t]}{\Delta t} \right]$$

De la definición de derivada, queda:

$$- \left[\frac{\partial (\rho v)_x}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)_y}{\partial y} + \frac{\partial (\rho v)_z}{\partial z} \right] =$$

$$\psi \frac{\partial \rho}{\partial t} . \quad (II.1.1)$$

Esta ecuación se puede expresar en forma vectorial considerando el término fuente o sumidero, como:

$$-\nabla(\rho v) \pm \left[\frac{\alpha \rho}{\text{vol}} \right] = \psi \frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad (\text{II.1.2})$$

que es la forma general del principio de conservación de la masa.

II.1.2.- Ecuación de Movimiento.

El movimiento de fluidos en un medio poroso esta determinado por la ley de Darcy, la cual establece que el flujo por unidad de área en un medio poroso, es proporcional al gradiente del potencial en la dirección de flujo. La forma general de la ley de Darcy es:

$$v = - \frac{k}{\mu} \nabla \phi. \quad (\text{II.1.3})$$

La Ec.(II.1.3) se puede escribir despreciando los efectos capilares y gravitacionales como:

$$v_x = - \frac{k_x}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (\text{II.1.4})$$

$$v_y = - \frac{k_y}{\mu} \frac{\partial P}{\partial y} \quad (\text{II.1.5})$$

$$v_z = - \frac{k_z}{\mu} \frac{\partial P}{\partial z} \quad (II.1.6)$$

II.1.3.- Ecuación de Estado.

Una ecuación de estado indica la variación de la densidad del fluido con respecto a la presión y la temperatura. Para un fluido su compresibilidad isotérmica se define como:

$$c = - \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T \quad (II.1.7)$$

Expresando la Ec.(II.1.7) en función de la densidad, se tiene:

$$\rho = \frac{m}{V} \quad \triangleright \quad V = \frac{m}{\rho}$$

$$c = \frac{1}{\left(\frac{m}{\rho} \right)} \frac{\partial \left(\frac{m}{\rho} \right)}{\partial P}$$

Se sabe que:

$$\partial \left(\frac{m}{\rho} \right) = - \frac{m}{\rho^2} \partial \rho$$

por lo tanto:

$$C = \frac{1}{\left(\frac{m}{\rho}\right)} \frac{\left(\frac{m}{\rho^2}\right) \delta \rho}{\delta P}$$

Finalmente:

$$C = \frac{1}{\rho} \frac{\delta \rho}{\delta P} \quad (\text{II.1.8})$$

Resolviendo la ecuación diferencial anterior se tiene:

$$C \int_{P_0}^P \frac{1}{\rho} dP = \int_{P_0}^P \frac{\delta \rho}{\rho}$$

$$C (P - P_0) = \ln \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)$$

Finalmente:

$$\rho = \rho_0 e^{C(P - P_0)}, \quad (\text{II.1.9})$$

Si se sabe que:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} \dots$$

entonces la Ec. (II.1.9), se puede escribir como:

$$\rho = \rho_0 \left[1 + C (P - P_0) \right], \quad (\text{II.1.10})$$

que es la ecuación de estado para un fluido ligeramente compresible (aceite).

II.1.4.- Modelo Matemático.

Ahora se relacionarán los principios mencionados en la sección II.1.

Sustituyendo las Ecs. (II.1.4), (II.1.5) y

(II.1.6), en la Ec. (II.1.2), se tiene:

$$\frac{\partial \left(\frac{k}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \rho \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left(\frac{k}{\mu} \frac{\partial P}{\partial y} \rho \right)}{\partial y} + \frac{\partial \left(\frac{k}{\mu} \frac{\partial P}{\partial z} \rho \right)}{\partial z} = - \psi \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (II.1.11)$$

Desarrollando términos:

$$\left[\left(\frac{k}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{k}{\mu} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \rho \right) + \left(\frac{k}{\mu} \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{k}{\mu} \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \rho \right) + \left(\frac{k}{\mu} \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{k}{\mu} \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \rho \right) \right] = - \psi \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Aplicando la regla de la cadena:

$$\left[\left(\frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \rho \right) + \left(\frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial \rho}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \rho \right) + \left(\frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial \rho}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \rho \right) \right] =$$

$$\psi \frac{\partial \rho}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial t} \frac{\mu}{k} .$$

Despreciando los gradientes de presión al cuadrado por ser muy pequeños, y agrupando términos queda:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = \frac{\psi \mu}{k} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial t} .$$

y finalmente agregando el término fuente:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + \left[\frac{q \rho}{\text{vol}} \right] =$$

$$\frac{\psi \mu C_t}{k} \frac{\partial P}{\partial t} .$$

La ecuación anterior se puede expresar en forma compacta como²:

$$\nabla^2 P + \left[\frac{q \rho}{\text{vol}} \right] = \frac{\psi \mu C_t}{k} \frac{\partial P}{\partial t} \quad (\text{II.1.12})$$

que es la ecuación de difusión . Esta representa el flujo de un fluido ligeramente compresible a través de un medio poroso.

II.2.- Características del Modelo Matemático.

Para tener definido el problema completamente se tienen que involucrar las condiciones iniciales y de frontera.

La condición inicial está dada por:

$$P (x , y , 0) = P_i$$

En las fronteras se consideró un gradiente constante y por lo tanto si existirá flujo a través de éstas.

Las condiciones de frontera están dadas por:

$$\left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{x=0} = \text{Cte} \qquad \left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{x=Lx} = \text{Cte}$$

$$\left. \frac{\partial P}{\partial y} \right|_{y=y_0} = \text{Cte} \qquad \left. \frac{\partial P}{\partial y} \right|_{y=L_y} = \text{Cte}$$

El modelo matemático desarrollado tiene las siguientes características y suposiciones:

- El fluido es ligeramente compresible.
- La viscosidad del fluido es constante.
- Flujo monofásico en las direcciones (X-Y).
- La saturación de aceite es constante.
- No hay reacción química entre el fluido y el medio poroso.
- La permeabilidad es independiente de la presión y la temperatura.
- Se desprecian efectos gravitacionales y capilares.
- Flujo laminar e isotérmico.
- Medio poroso, incompresible, homogéneo e isótropo.
- Se desprecian los gradientes de potencial al cuadrado.

Se debe aclarar en que las secciones que siguen la ecuación de difusión no se utilizará de la forma (II.1.12); el término $\psi \mu c_i/k$ se igualará con ϕ^2 , que posteriormente se igualó $\phi^2=1$, es decir: $\psi \mu c_i/k = \phi^2=1$; la presión será ahora el potencial ϕ . La solución que se obtenga en las secciones siguientes será general para la ecuación de difusión y en desarrollos posteriores se podrá fácilmente adaptar el método para las condiciones específicas de un yacimiento bajo saturado.

CAPITULO III

TEORIA DEL ELEMENTO FINITO.

III.1.- Concepto del Elemento Finito.

La idea esencial del método del elemento finito consiste básicamente en dividir una región Ω en un número determinado de elementos finitos o subdominios Ω^e , para construir una aproximación $\hat{\phi}$ en cada subdominio; para ésto se utilizará un conjunto de funciones que constan en combinaciones lineales de cierta base de funciones N_1 , N_2 , ..., N_n . Dichas funciones deben ser linealmente independientes y tales que hagan que $\hat{\phi}$ satisfaga las condiciones de frontera impuestas, además de que son continuas en cada elemento o subdominio. Desde un enfoque variacional, el objetivo principal será encontrar una aproximación $\hat{\phi}$ a la solución de la ecuación diferencial; lo anterior se logrará encontrando una función u que satisfaga la condición inicial y de frontera, y que a su vez haga que el funcional ^{3,4,7}:

$$\Pi = \int_{\Omega} F \left(\phi, \frac{\partial \phi}{\partial x}, \dots \right) d\Omega + \int_{\Gamma} E \left(\phi, \frac{\partial \phi}{\partial x}, \dots \right) d\Gamma$$

adquiera un valor mínimo, lo que implica que $\delta\Pi=0$; es decir, que la variación del funcional sea cero^{6,7}.

En el funcional anterior ϕ es una función desconocida y F y E son operadores diferenciales específicos.

El planteamiento adecuado en el caso particular de la ecuación de difusión y el desarrollo para encontrar el funcional que se ha de minimizar a partir de ésta, tomando en cuenta la condición inicial y las condiciones de frontera, se presentará en las secciones siguientes.

III.2.- Planteamiento Adecuado de la Ecuación de Difusión.

Para aplicar el método del elemento finito a un problema específico, se tiene que plantear el mismo de una forma adecuada, por lo tanto es preciso darle una formulación variacional⁶, la cual se ve en la sección III.3.

El objetivo principal consistirá en encontrar una función $\phi(x,y,z)$ definida en una región del espacio para un tiempo t, que satisfaga a la ecuación de difusión con sus condiciones iniciales y de frontera:

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (\text{III.2.1})$$

condición inicial:

$$\phi (x , y , z , 0) = \phi_0 (x , y , z)$$

condición de frontera:

$$\phi (x , y , z , t) = U (x , y , z) .$$

Una parte fundamental del problema será la transformación de una ecuación diferencial (ecuación de difusión) a una ecuación integro-diferencial, con el objeto de involucrar en la ecuación de difusión la condición inicial.

Primero se aplicará un proceso de transformación , en el que se utilizará la transformada de Laplace y la operación convolución.

Aplicando la transformada de Laplace a los dos miembros de la ecuación de difusión:

$$L_t \left[\nabla^2 \phi \right] = L_t \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} \right] \quad (\text{III.2.2})$$

Para el primer miembro de la Ec. (III.2.1):

$$L_t \left[\nabla^2 \phi \right] = \int_0^{\infty} e^{-st} (\nabla^2 \phi) dt .$$

Como el operador nabla ∇ no depende del tiempo, se puede sacar de la integral junto con la constante ϕ :

$$L_t \left[\varphi^2 \nabla^2 \phi \right] = \varphi^2 \nabla^2 \int_0^{\infty} e^{-st} \phi(x, y, z, t) dt.$$

Por lo tanto la transformación quedará:

$$L_t \left[\varphi^2 \nabla^2 \phi(x, y, z, t) \right] = \varphi^2 \nabla^2 w(x, y, z, s) \quad (III.2.3)$$

Ahora para el segundo miembro de la Ec. (III.2.2):

$$L_t \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} \right] = \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{\partial \phi}{\partial t} dt.$$

Efectuando la integración por partes, donde:

$$u = e^{-st} \quad du = -s e^{-st} dt$$

$$dv = \frac{\partial \phi}{\partial t} dt \quad v = \phi$$

entonces:

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \frac{\partial \phi}{\partial t} dt = \left[e^{-st} \phi \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \phi (-s e^{-st}) dt.$$

Como $\phi = \phi(x, y, z, t)$ y recordando la definición de

transformada de Laplace:

$$w(x, y, z, s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \phi(x, y, z, t) dt$$

$$s \int_0^{\infty} e^{-st} \phi dt = s w(x, y, z, s)$$

finalmente:

$$L_t \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} \right] = \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{\partial \phi}{\partial t} dt =$$

$$\left[e^{-st} \phi \right]_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} e^{-st} \phi dt .$$

En conclusión:

$$L_t \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} \right] = -\phi(x, y, z, 0) + s w(x, y, z, s) \quad (\text{III.2.4})$$

Igualando las Ecs. (III.2.3) y (III.2.4),
y dividiendo la expresión anterior entre s :

$$\frac{\phi^2}{s} \nabla^2 w(x, y, z, s) - w(x, y, z, s) = -\frac{1}{s} \phi_0(x, y, z) \quad (\text{III.2.5})$$

Se puede sustituir en la Ec. (III.2.5) las transformadas por sus equivalentes respectivas:

$$\nabla^2 \left[L_t(\varphi^2) L_t(\phi(x,y,z,t)) \right] - L_t(\phi(x,y,z,t)) = -\phi_0(x,y,z) L_t(1). \quad (\text{III.2.6})$$

Para aplicar la transformada inversa de Laplace, se utilizará una de las propiedades de la operación convolución.

$$L_t(\varphi^2) L_t(\phi(x,y,z,t)) = L_t(\varphi^2 * \phi)$$

$$L_t(\varphi^2) L_t(\phi(x,y,z,t)) = \frac{\varphi}{s} w(x,y,z,s).$$

Por lo tanto la Ec.(III.2.6) queda de la forma siguiente:

$$L_t \left[\nabla^2 (\varphi^2 * \phi) \right] - L_t(\phi) = -\phi_0 L_t(1) \quad (\text{II.2.7})$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace a la Ec.(III.2.7), se obtiene:

$$\nabla^2 (\varphi^2 * \phi) - \phi = -\phi_0$$

y como el operador ∇ no depende del tiempo:

$$\varphi^2 * \nabla^2 \phi - \phi = -\phi_0 \quad (\text{III.2.8})$$

La expresión anterior es una ecuación integro-diferencial, por intervenir en ella la operación convolución. El objetivo de aplicar la transformada de Laplace y la operación convolución en el procedimiento anterior fue la de incorporar la condición inicial a la ecuación de difusión.⁸

III.3.- Caracterización Variacional.

La descripción del problema desde el punto de vista variacional para la ecuación de difusión, consiste en encontrar, en un conjunto de funciones $\phi(x,y,z,t)$ definidas en una región R, y que satisfagan las condiciones iniciales y de frontera:

$$\phi(x,y,z,t) = U(x,y,z) ; (x,y,z) \in \text{frontera de R.}$$

$$\phi(x,y,z,t) = \phi_0(x,y,z)$$

aquella que haga que el funcional:

$$\Omega_t(\phi) = \iiint_V (\phi^2 * \nabla \phi * \nabla \phi + \phi * \phi - 2\phi_0 * \phi) dx dy dz$$

adquiera un valor extremo (mínimo en este caso). En la optimización de la integral anterior es adecuado aplicar el método del elemento finito.

A continuación se presenta el desarrollo para llegar al funcional anterior, a partir de la ecuación de difusión, donde ya están involucradas las condiciones iniciales y de frontera.

Considerando un conjunto de funciones $\phi(x,y,z,t)$ que satisfacen la condición de frontera:

$$\left\{ \phi(x,y,z,t) \mid \phi(x,y,z,t) = U(x,y,z); (x,y,z) \in \text{frontera de R} \right\}$$

$$0 < t < \infty \quad (\text{ III.3.1 })$$

Si se considera un incremento $\delta\phi(x,y,z,t)$ de dicha función, en donde también estará restringido por la condición: $\delta\phi(x,y,z,t) = 0$; (x,y,z) c frontera de R -(III.3.2) si ϕ es una función del conjunto (III.3.1) y $\delta\phi$ satisface la condición (III.3.2), entonces las funciones

($\phi + \lambda \delta\phi$) satisfacen:

($\phi + \lambda\delta\phi$)= $U(X,Y,Z)$; (x,y,z) c frontera de R $0 < t < \infty$ para todo número λ , y así ($\phi + \lambda\delta\phi$) es un elemento del conjunto de funciones (III.3.1).

Si $\Omega_t(\phi)$ es un funcional que a cada función $\phi(x,y,z,t)$ del conjunto (III.3.1) le asocia un número para cada tiempo 't', es de interés calcular el incremento del funcional correspondiente a un incremento $\delta\phi$ de la función ϕ , restringido por (III.3.2). Se define:

$$\delta\Omega_t(\phi) = \left[\frac{d}{d\lambda} \Omega_t(\phi + \lambda \delta\phi) \right]_{\lambda=0} \quad (III.3.3)$$

El funcional $\Omega_t(\phi)$ alcanza un valor extremo para la función ϕ si:

$$\delta\Omega_t(\phi) = 0 .$$

Ahora se obtendrá un funcional $\Omega_t(\phi)$ en base al conjunto de funciones (III.3.1), tal que alcance un valor extremo (mínimo) para aquella función ϕ que satisfaga la ecuación integro-diferencial (III.2.8), y como

consecuencia la ecuación diferencial (III.2.1), y las condiciones de frontera e iniciales.

Para lograr ésto, la variación de $\Omega_t(\phi)$ para una variación $\delta\phi(x,y,z,t)$ de ϕ está dada por:

$$\delta\Omega_t(\phi) = 2 \iiint_R (-\varphi^2 * \nabla^2 \phi + \phi - \phi_0) * \delta\phi \, dx \, dy \, dz, \quad (\text{III.3.4})$$

la cual es cero para aquella función que satisfaga la Ec.(III.2.1) y las condiciones iniciales y de frontera. Para encontrar el funcional $\Omega_t(\phi)$ del cual se puede reproducir (III.3.4), se tendrá que transformar el primer término del integrando de (III.3.4). Por lo que se utilizarán algunos desarrollos que vienen en el apéndice. Del apéndice (B) sabemos que:

$$\varphi^2 * \nabla^2 \phi = \text{div} (\varphi^2 * \nabla \phi) \quad (\text{III.3.5})$$

en donde se considera que $\nabla^2 \varphi^2 = 0$.

Sustituyendo (III.3.5) en (III.3.4), se tiene:

$$\Omega_t(\phi) = 2 \iiint_R \left[-\text{div}(\varphi^2 * \nabla \phi) + \phi - \phi_0 \right] * \delta\phi \, dx \, dy \, dz =$$

desarrollando:

$$2 \iiint_R \left[-\operatorname{div}(\rho^2 * \nabla \phi) * \delta \phi + (\phi - \phi_0) * \delta \phi \right] dx dy dz$$

De una de las expresiones del apéndice(B), se puede escribir:

$$\delta \Omega_{\epsilon}(\phi) = 2 \iiint_R \left[\rho^2 * \nabla \phi * \nabla(\delta \phi) - \operatorname{div}(\rho^2 * \nabla \phi * \delta \phi) + (\phi - \phi_0) * \delta \phi \right] dx dy dz$$

Utilizando el teorema de la divergencia para transformar la segunda integral, se tiene:

$$\delta \Omega_{\epsilon}(\phi) = 2 \iiint_R \left[\rho^2 * \nabla \phi * \nabla(\delta \phi) + (\phi - \phi_0) * \delta \phi \right] dx dy dz - 2 \iint_A \left[\rho^2 * \frac{\partial \phi}{\partial n} * \delta \phi \right] dA$$

en donde $(\nabla \phi) \cdot \vec{n} = \frac{\partial \phi}{\partial n}$ y \vec{n} es un vector unitario normal a la frontera de R y apuntando hacia afuera ; $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ es la derivada direccional de ϕ en la dirección de \vec{n} .

Debido a la condición (III.3.2), la integral de superficie vale cero, y así queda:

$$\delta \Omega_{\underline{t}}(\phi) = 2 \iiint \left[\phi^2 * \nabla \phi * \nabla \phi + \phi * \phi - 2\phi_0 * \phi \right] dx dy dz \quad (\text{II.3.6})$$

De la expresión anterior (III.3.6) para $\delta \Omega_{\underline{t}}(\phi)$ se puede obtener $\Omega_{\underline{t}}(\phi)$, utilizando la definición (III.3.3):

$$\Omega_{\underline{t}}(\phi) = \iiint_R \left[\phi^2 * \nabla \phi * \nabla \phi + \phi * \phi - 2\phi_0 * \phi \right] dx dy dz \quad (\text{III.3.7})$$

La expresión anterior es consistente con (III.3.6).

Finalmente, la expresión (III.3.7) es el funcional que minimizaremos por el método del elemento finito.

III.4.- Planteamiento de la Solución Aproximada.

Para encontrar el valor extremo mínimo del funcional (III.3.6), se considerará un punto en el interior de un elemento finito. En algun instante t , el potencial en ese punto será una combinación lineal de las coordenadas espaciales X y Y ,

$$\phi (x , y , t) = \alpha + \beta x + \gamma y ,$$

donde α , β y γ son funciones de los potenciales en cada nodo ϕ_1 , ϕ_j , ϕ_k y éstos últimos están a su vez en función del tiempo.

En la Fig. (III.1) se puede observar una región dividida en diferentes elementos finitos. Los triángulos son frecuentemente utilizados, ya que permiten ajustarse a las formas complejas que puedan tener las regiones. En la misma figura se puede observar que el elemento triangular tiene en los vértices los nodos i , j y k que están colocados en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

Como la forma del elemento finito es triangular, se seleccionó una función $N_i^s(x,y)$ tal que tenga un valor de uno en el nodo i y cero en los restantes; s se refiere al elemento analizado e i , j y k se refieren a nodos de dicho elemento.

El requerimiento de continuidad se incluye con la siguiente función base:

$$N_i^e = \alpha_i^e + \beta_i^e x + \gamma_i^e y$$

sobre cada elemento e.

Las constantes α_i^e , β_i^e , γ_i^e de la expresión anterior se obtienen haciendo $N_i^e(x_i, y_i) = 1$, $N_j^e(x_j, y_j) = 0$ y $N_k^e(x_k, y_k) = 0$, y las coordenadas de los nodos son determinadas por la posición de éstos con respecto a un marco de referencia que tiene un origen de coordenadas (0,0) en un lugar determinado. En la Fig. (IV.2) se puede observar que el origen se colocó en la esquina inferior izquierda, y cada elemento finito tiene forma triangular de ciertas dimensiones, y se puede ver la forma en que se numeró la malla.

Satisfaciendo las condiciones antes mencionadas se resuelve el siguiente sistema de ecuaciones que se forma:

$$\begin{aligned} N_i^e &= \alpha + \beta x_i + \gamma_i y \\ N_j^e &= \alpha + \beta x_j + \gamma_j y \\ N_k^e &= \alpha + \beta x_k + \gamma_k y \end{aligned}$$

En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_i^e \\ \beta_j^e \\ \gamma_k^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

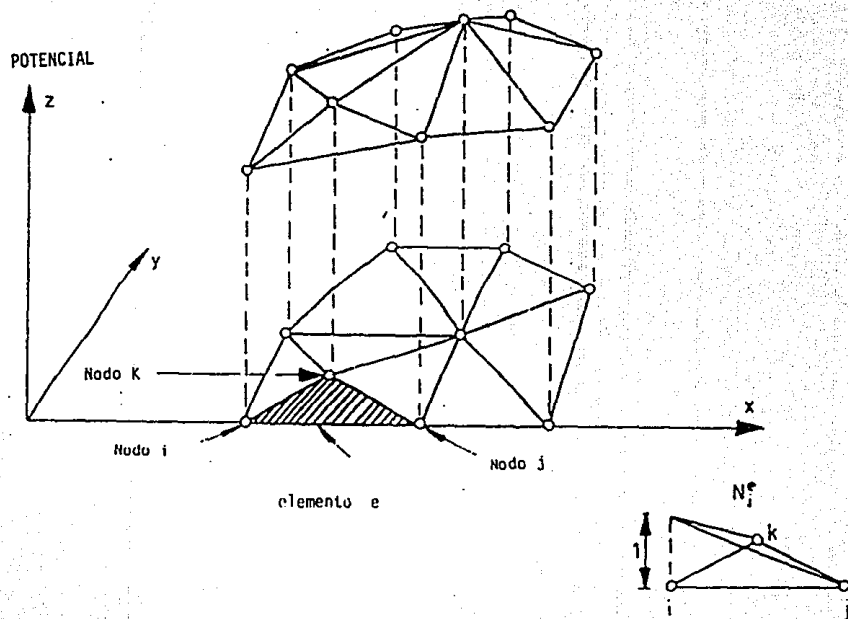


Fig. III.1 REGION

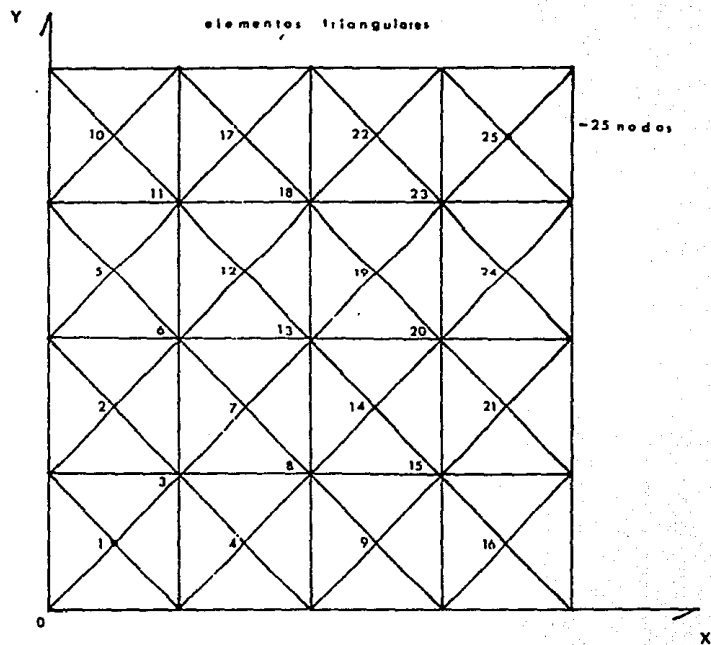


Fig. III.2 NUMERACION DE LA MALLA

y obtenemos por el método de Cramer la solución:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1^0 &= \frac{x_j Y_k - x_k Y_j}{2 A^0} \\ \beta_j^0 &= \frac{Y_j - Y_k}{2 A^0} \\ \gamma_k^0 &= \frac{x_k - x_j}{2 A^0} \end{aligned} \right\} \text{---(III.4.1)}$$

Resolviendo el determinante:

$$2 A^0 = \det \begin{vmatrix} 1 & x_1 & Y_1 \\ 1 & x_j & Y_j \\ 1 & x_k & x_k \end{vmatrix}$$

se obtiene el área de cada elemento e.

Ahora se generará una aproximación a una función ϕ desconocida de la siguiente forma:

$$\phi = \hat{\phi} = \sum_{m=1}^N \phi_m N_m \quad \text{en } \Omega \quad \text{(III.4.2)}$$

donde ϕ_m es el valor de la aproximación en el nodo m y N es el número de nodos.

El caso particular es resolver la ecuación diferencial:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial \phi}{\partial t} - Q = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (\text{III.4.3})$$

para lo cual el tiempo se discretizará.

Los términos en donde aparecen segundas derivadas de la Ec. (II.4.3) se pueden eliminar utilizando la integración por partes conocida como teorema de Green⁹, ver apéndice(B):

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\Omega} Q N_1 dx dy - \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} n_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} n_y \right) N_1 d\Gamma + \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

$i = 1, 2, \dots, N$

Sustituyendo la aproximación (III.4.2), generada con las funciones base, se tiene:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial N_m}{\partial y} + \frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial N_m}{\partial y} \right) dx dy = - \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} n_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} n_y \right) N_1 d\Gamma - (Q N_1) + \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (\text{III.4.4})$$

con lo cual se genera un sistema de ecuaciones, donde los elementos de la matriz K son determinados sumando la contribución individual de cada elemento finito.

Como se mencionó anteriormente, el tiempo será discretizado; por lo tanto nos interesa saber la variación del potencial ϕ con respecto al tiempo. Entonces en vez de tener un sistema de ecuaciones de la forma $k \phi = f$ (que representa un régimen donde la variación del potencial con respecto al tiempo es nula), se formará un sistema de ecuaciones de la forma:

$$K \phi + C \frac{d \phi}{d t} = f , \quad (\text{III.4.5})$$

donde, en forma general, se pueden definir los elementos de cada matriz que interviene en el sistema de Ecs. (III.4.5):

$$\left. \begin{aligned} C_{in} &= \int_{\Omega} N_i N_n \, dx \, dy \\ K_{in} &= \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_n}{\partial y} \, dx \, dy \\ f_i &= \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) N_i \, d\Gamma \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.4.6})$$

con el vector solución:

$$\phi^T = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)$$

que son los valores del potencial en cada nodo.

Finalmente, se puede proponer una aproximación de la forma:

$$\hat{\phi} = \sum_{n=1}^N \phi_n(t) N_n(x,y).$$

En el siguiente capítulo se mostrará cómo se generan las matrices en forma detallada.

CAPITULO IV

SOLUCION DEL MODELO MATEMATICO POR ELEMENTO FINITO.

En este capítulo se presenta la solución al modelo matemático, que se vio en el capítulo precedente, así como el enfoque variacional del mismo.

Ahora se aplicarán las expresiones anteriores en un problema específico para mostrar la forma en que se generan los sistemas de ecuaciones lineales que han de resolverse.

IV.1.- Método de Solución.

Cuando se tiene que dar solución a una ecuación diferencial parcial por el método del elemento finito, el resultado es un sistema de ecuaciones lineales. Este tipo de sistemas lineales de ecuaciones generan un tipo especial de matriz, que depende de la forma en que se numeró la malla que se utilizó para cubrir la región de interés; también depende de la forma de cada elemento finito.

Las expresiones (III.4.6) definen los elementos de las matrices C , K y el vector f del sistema de ecuaciones:

$$K \phi + C \frac{d\phi}{dt} = f \quad (\text{IV.1.1})$$

donde el tiempo esta discretizado y $dt = \Delta t$, así como

$$d\phi = \Delta\phi.$$

Las coordenadas de los nodos están especificadas por la subdivisión que se realizó del dominio Ω en triángulos. A continuación se muestra la forma general de la matriz K y en la Fig. (IV.1) se puede observar también, en forma general, un elemento e, con nodos i, j, k, colocados en el sentido contrario al de las manecillas del reloj. La Ec. (IV.1.4) representa a la matriz K con cada elemento que la compone; dichos elementos provienen de hacer las derivadas parciales correspondientes, que se pueden apreciar en las expresiones (IV.1.2). Como se puede ver la expresión (IV.1.3) es el área de cada elemento.²

La matriz C está definida de la siguiente manera:

$$C = \left(N_i \quad N_j \right)$$

$$K^e = \int_{\Omega^e} \begin{bmatrix} \left[\left(\frac{\partial N_i^e}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial N_i^e}{\partial y} \right)^2 \right] & \left[\frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial N_j^e}{\partial x} + \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \right] & \left[\frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial N_k^e}{\partial x} + \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial N_k^e}{\partial y} \right] \\ \left[\frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial N_j^e}{\partial x} + \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \right] & \left[\left(\frac{\partial N_j^e}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial N_j^e}{\partial y} \right)^2 \right] & \left[\frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial N_k^e}{\partial x} + \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial N_k^e}{\partial y} \right] \\ \left[\frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial N_k^e}{\partial x} + \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial N_k^e}{\partial y} \right] & \left[\frac{\partial N_j^e}{\partial x} \frac{\partial N_k^e}{\partial x} + \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \frac{\partial N_k^e}{\partial y} \right] & \left[\left(\frac{\partial N_k^e}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial N_k^e}{\partial y} \right)^2 \right] \end{bmatrix} dx dy$$

$$42 \quad \frac{\partial N_i^e}{\partial x} = \beta_i^e, \quad \frac{\partial N_i^e}{\partial y} = \gamma_i^e \quad (\text{IV.1.2})$$

$$\int_{\Omega^e} dx dy = A^e \quad (\text{IV.1.3})$$

$$k^e \phi^e = \Delta^e \begin{bmatrix} (\beta_i^e)^2 + (\gamma_i^e)^2 & \beta_i^e \beta_j^e + \gamma_i^e \gamma_j^e & \beta_i^e \beta_k^e + \gamma_i^e \gamma_k^e \\ \beta_i^e \beta_j^e + \gamma_i^e \gamma_j^e & (\beta_j^e)^2 + (\gamma_j^e)^2 & \beta_j^e \beta_k^e + \gamma_j^e \gamma_k^e \\ \beta_i^e \beta_k^e + \gamma_i^e \gamma_k^e & \beta_j^e \beta_k^e + \gamma_j^e \gamma_k^e & (\beta_k^e)^2 + (\gamma_k^e)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \\ \phi_k \end{bmatrix} \quad (\text{IV.1.4})$$

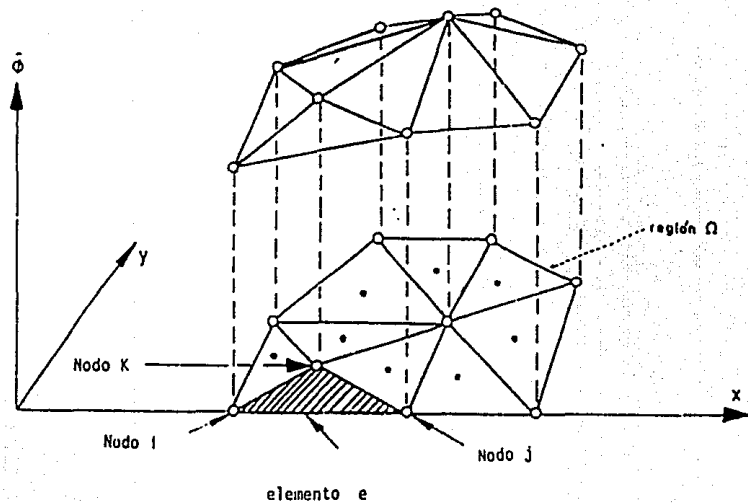


Fig. IV.1

ELEMENTOS DE LA REGION

IV.2.- Ejemplo Ilustrativo.

A continuación se presenta un problema concreto, en el cual se podrá apreciar la forma práctica de generar las matrices del sistema (IV.1.1).

El problema consiste en resolver la ecuación de difusión:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \frac{\partial \phi}{\partial t} - Q = 0 ,$$

con las siguientes condiciones de frontera:

$$\phi(0,y,t) = 1 , \quad \partial\phi/\partial x(2,y,t) = 0 , \quad \partial\phi/\partial y(x,0,t) = 0$$

$$\partial\phi/\partial y(x,2,t) = 0 , \quad \phi(x,y,0) = 1 , \quad (x > 0)$$

y el término fuente localizado en:

$$Q(x,y) = Q(1,1) \delta(x-1,y-1), \quad Q=1$$

En la Fig. (IV.2) se puede ver que hay cuatro elementos: I, II, III, y IV. La región consta de cinco nodos y cada triángulo tiene las longitudes señaladas en la misma figura.

El primer paso es generar las matrices correspondientes a cada elemento utilizando la Ec.(IV.1.4), donde los subíndices indican los nodos locales de cada triángulo y el superíndice . indica el elemento específico de la región.

REGION DIVIDIDA EN CUATRO ELEMENTOS

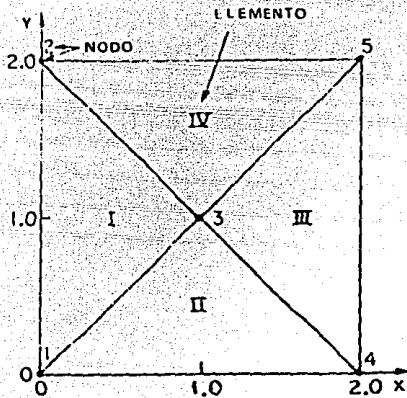


Fig.IV.2 ELEMENTO FINITO TRIANGULAR DEL PROBLEMA

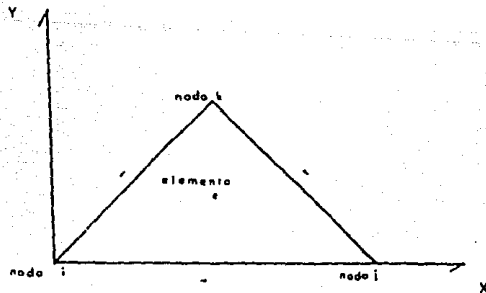


TABLA I

Matriz	NUMERO DE NODOS	
	Global	Elemento
Elemental I		
$\begin{bmatrix} (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) & (-\frac{1}{2} + 0) & (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}) \\ (-\frac{1}{2} + 0) & (1 + 0) & (-\frac{1}{2} + 0) \\ (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}) & (-\frac{1}{2} + 0) & (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) \end{bmatrix}$	1 3 2	1 2 3
Elemental II		
$\begin{bmatrix} (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) & (-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) & (0 - \frac{1}{2}) \\ (-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) & (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) & (0 - \frac{1}{2}) \\ (0 - \frac{1}{2}) & (0 - \frac{1}{2}) & (0 + \frac{1}{2}) \end{bmatrix}$	1 4 3	1 2 3
Elemental III		
$\begin{bmatrix} (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) & (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}) & (-\frac{1}{2} + 0) \\ (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}) & (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) & (-\frac{1}{2} + 0) \\ (-\frac{1}{2} + 0) & (-\frac{1}{2} + 0) & (1 + 0) \end{bmatrix}$	4 5 3	1 2 3
Elemental IV		
$\begin{bmatrix} (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) & (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) & (0 - \frac{1}{2}) \\ (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) & (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) & (0 - \frac{1}{2}) \\ (0 - \frac{1}{2}) & (0 - \frac{1}{2}) & (0 + \frac{1}{2}) \end{bmatrix}$	4 5 3	1 2 3

TABLA I

Matriz	NUMERO DE NODOS	
	Global	Elemento
Elemento I		
$\begin{bmatrix} (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) & (-\frac{1}{2} + 0) & (\frac{1}{4} - \frac{1}{4}) \\ (-\frac{1}{2} + 0) & (1 + 0) & (-\frac{1}{2} + 0) \\ (\frac{1}{4} - \frac{1}{4}) & (-\frac{1}{2} + 0) & (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) \end{bmatrix}$	1	1
	3	2
	2	3
Elemento II		
$\begin{bmatrix} (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) & (-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) & (0 - \frac{1}{2}) \\ (-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) & (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) & (0 - \frac{1}{2}) \\ (0 - \frac{1}{2}) & (0 - \frac{1}{2}) & (0 + 1) \end{bmatrix}$	1	1
	4	2
	3	3
Elemento III		
$\begin{bmatrix} (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) & (\frac{1}{4} - \frac{1}{4}) & (-\frac{1}{2} + 0) \\ (\frac{1}{4} - \frac{1}{4}) & (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) & (-\frac{1}{2} + 0) \\ (-\frac{1}{2} + 0) & (-\frac{1}{2} + 0) & (1 + 0) \end{bmatrix}$	4	1
	5	2
	3	3
Elemento V		
$\begin{bmatrix} (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) & (-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) & (0 - \frac{1}{2}) \\ (-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) & (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) & (0 - \frac{1}{2}) \\ (0 - \frac{1}{2}) & (0 - \frac{1}{2}) & (0 + 1) \end{bmatrix}$	5	1
	2	2
	3	3

Como se puede ver en la Tabla I hay cuatro matrices cuadradas de orden 3, y cada una representa a un elemento o triángulo. Los elementos de cada matriz se obtuvieron de las Ecs.(III.4.1), siguiendo las coordenadas de cada nodo con respecto al origen. Como se puede apreciar el área de cada elemento es uno; es decir:

$$\int_{\Omega^e} dx dy = 1 .$$

En la parte derecha de la tabla citada se puede observar la numeración de los nodos, tanto en forma global como en forma local para cada elemento. La numeración de los nodos en ambas formas servirá para ensamblar las matrices anteriores en una sola matriz que represente la región del problema. La numeración global es la que indica qué lugar le corresponde a cada elemento de las matrices particulares dentro de la matriz global.

Haciendo el ensamble de las matrices resulta la siguiente matriz:

$$\begin{bmatrix} (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) & 0 & (-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}) & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) & (-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}) & 0 & 0 \\ (-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}) & (-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}) & (1 + 1 + 1 + 1) & (-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}) & (-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}) \\ 0 & 0 & (-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}) & (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) & 0 \\ 0 & 0 & (-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}) & 0 & (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) \end{bmatrix}$$

Pero las condiciones de frontera impuestas en el problema se deben de llevar a la matriz también:

$$\left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \int (\partial\phi/\partial n)\phi_1 ds \\ \int (\partial\phi/\partial n)\phi_2 ds \\ -Q \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = 0$$

Como las incógnitas son los valores del potencial en los nodos: ϕ_3, ϕ_4, ϕ_5 ; se tiene:

$$\left[\begin{array}{ccc} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{Bmatrix} \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -Q + \phi_1 + \phi_2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

La matriz C está dada por:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

Como los elementos tienen la misma geometría y las mismas dimensiones, entonces la matriz anterior es válida para éstos; sólo cambia la numeración global para hacer el ensamble.

La matriz C ensamblada quedaría:

$$\begin{bmatrix} (\frac{1}{2} + \frac{1}{6}) & \frac{1}{12} & (\frac{1}{12} + \frac{1}{12}) & \frac{1}{12} & 0 \\ \frac{1}{12} & (\frac{1}{6} + \frac{1}{6}) & (\frac{1}{12} + \frac{1}{12}) & 0 & \frac{1}{12} \\ (\frac{1}{12} + \frac{1}{12}) & (\frac{1}{12} + \frac{1}{12}) & (\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}) & (\frac{1}{12} + \frac{1}{12}) & (\frac{1}{12} + \frac{1}{12}) \\ \frac{1}{12} & 0 & (\frac{1}{12} + \frac{1}{12}) & (\frac{1}{6} + \frac{1}{6}) & \frac{1}{12} \\ 0 & \frac{1}{12} & (\frac{1}{12} + \frac{1}{12}) & \frac{1}{12} & (\frac{1}{6} + \frac{1}{6}) \end{bmatrix} = [C]$$

Sustituyendo en la expresión siguiente:

$$K \phi + c \frac{d \phi}{dt} = f$$

y tomando el tiempo en forma discreta:

$$+ \frac{1}{12 \Delta t} \begin{bmatrix} 4 & 1 & \vdots & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & \vdots & 2 & 0 & 1 \\ \hline 2 & 2 & \vdots & 8 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & \vdots & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & \vdots & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{1,1} - \phi_{1,0} \\ \phi_{2,1} - \phi_{2,0} \\ \vdots \\ \phi_{3,1} - \phi_{3,0} \\ \phi_{4,1} - \phi_{4,0} \\ \phi_{5,1} - \phi_{5,0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \int (\partial \phi / \partial n) \phi_1 ds \\ \int (\partial \phi / \partial n) \phi_2 ds \\ \vdots \\ -Q \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

donde $\Delta \phi = \phi_1 - \phi_0$.

Introduciendo la condición inicial, las condiciones de frontera y un incremento de tiempo de $\Delta t = 1/12$ se tiene:

$$\begin{bmatrix} 12 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{3,1} \\ \phi_{4,1} \\ \phi_{5,1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

donde en las matrices han sido excluidos los valores de ϕ conocidos.

Para el nivel de tiempo $t = 1$ con un $\Delta t = 1/12$, y calculando la inversa de la matriz se tiene la solución:

$$\begin{Bmatrix} \phi_{3,1} \\ \phi_{4,1} \\ \phi_{5,1} \end{Bmatrix} = \frac{1}{280} \begin{bmatrix} 24 & -4 & -4 \\ -4 & 59 & -11 \\ -4 & -11 & 59 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 13 \\ 7 \\ 7 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.914 \\ 1.01 \\ 1.01 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \phi(1, 1, \frac{1}{12}) \\ \phi(2, 0, \frac{1}{12}) \\ \phi(2, 2, \frac{1}{12}) \end{Bmatrix}$$

Para un nivel de tiempo $t=2$ con un $\Delta t=1/6$, los valores calculados para un $\Delta t=1/12$ se sustituyen como las condiciones iniciales en este nivel de tiempo, y se vuelve a resolver el sistema, obteniendo la solución siguiente:

$$\begin{Bmatrix} \phi_{3,1} \\ \phi_{4,1} \\ \phi_{5,1} \end{Bmatrix} = \frac{1}{280} \begin{bmatrix} 24 & -4 & -4 \\ -4 & 59 & -11 \\ -4 & -11 & 59 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 12.34 \\ 6.88 \\ 6.88 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.861 \\ 1.003 \\ 1.003 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \phi(1, 1, \frac{1}{6}) \\ \phi(2, 0, \frac{1}{6}) \\ \phi(2, 2, \frac{1}{6}) \end{Bmatrix}$$

Con el ejemplo anterior se ilustró la forma práctica en que se aplica el método del elemento finito.

En el capítulo siguiente se generalizará el método para problemas con regiones divididas en más elementos, en los cuales se requiere de un programa de cómputo.

CAPITULO V

EJEMPLO DE APLICACION

En el presente capítulo se dará solución a la ecuación de difusión por el método del elemento finito y se hará una comparación con la solución obtenida de la misma ecuación por el método de diferencias finitas.

V.1.- Ejemplos de Aplicación.

La malla que se utilizó para la aproximación a una región determinada fue hecha con triángulos en el caso del elemento finito; en el caso de diferencias finitas fue hecha con rectángulos, como se puede ver en la Fig. (V.1).

En la malla del elemento finito los nodos están en cada vértice de los triángulos; en cambio, en diferencias finitas los nodos están en el centro de cada rectángulo; por lo tanto, los valores del potencial a diferentes niveles de tiempo se conocerán en los vértices de cada triángulo y en el centro de los rectángulos estarán los valores de potencial que se obtienen por diferencias finitas.

Como se dijo en las secciones precedentes, el tiempo está en forma discreta y el $\Delta t = 1$ para todos los ejemplos.

En los siguientes casos se considerarán las fronteras abiertas con potencial constante en las mismas.

En este primer ejemplo, ver Fig.(V.2), la región consta de 145 nodos y 364 elementos triangulares, cada rectángulo tiene la longitud de 2 , por lo que el área de cada triángulo es 1.

Las condiciones de frontera y la inicial a las que está sujeta la ecuación de difusión son las siguientes:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \frac{\partial \phi}{\partial t} - Q = 0$$

$$\phi(0, y, t) = 1. , \quad \phi(x, 0, t) = 1.$$

$$\phi(18, y, t) = 1. , \quad \phi(x, 18, t) = 1.$$

$$\phi_0(x, y, 0) = 1. \quad 0 \leq x \leq 18 \quad 0 \leq y \leq 18$$

y las fuentes se encuentran localizadas en cada uno de los nodos, donde cada una vale $Q = 1$. El tiempo de simulación fue para 10 pasos de tiempo. En la Fig.(V.3) se puede apreciar una gráfica que muestra las curvas correspondientes a cada nivel de tiempo. En los nodos centrales se puede apreciar una caída de potencial mayor que en los nodos que se encuentran cerca de la frontera, ya que éstos reciben más directamente el efecto de las fronteras por su cercanía a los mismos. Para ilustrar mejor el comportamiento del potencial a través de los pasos de tiempo que se realizaron en la corrida, se pueden observar la Figs.(V.4) y (V.5) que corresponden respectivamente a la superficie que representa al

potencial en la región donde se encuentran los nodos. La Fig.(V.4) corresponde al nivel de tiempo $t=1$, y se puede ver que los nodos que se encuentran en el centro de la región causan una depresión mayor en el potencial, ya que hay fuentes de extracción en ellos. En la Fig.(V.5) se aprecia que la depresión es aún mayor porque corresponde al nivel de tiempo $t=4$. Las Figs.(V.6) y (V.7) muestran un corte transversal de las Figs.(V.4) y (V.5) y se observa que la caída de potencial es mayor en el centro, ya que ahí los efectos de las fronteras se sienten menos que en las zonas cercanas a éstas (orillas de la región). Para mayor ilustración de los resultados del problema, se puede observar en la Fig.(V.8) la distribución de las líneas equipotenciales, tanto para el tiempo $t=1$ como para el nivel de tiempo $t=4$.

En la Fig.(V.9) se puede ver la gráfica correspondiente al problema anterior, solamente que ahora las condiciones de frontera y la condición inicial tienen un valor mayor y las dimensiones de los triángulos se mantienen iguales:

$$\phi(0,y,t) = 100. \quad , \quad \phi(x,0,t) = 100.$$

$$\phi(18,y,t) = 100. \quad , \quad \phi(x,18,t) = 100.$$

$$\phi_0(x,y,t) = 100. \quad 0 \leq x \leq 18 \quad 0 \leq y \leq 18$$

Como se puede apreciar, el comportamiento a través del tiempo del potencial, tiende a disminuir por el efecto de las fuentes. En las Figs.(V.3) y (V.9) las escalas de las graficas sólo cambian para el eje correspondiente al potencial, mientras que los nodos no varían en su número.

En la Fig.(V.10) se ve una gráfica que representa un caso donde se disminuyó el número de las fuentes y el número de nodos. Las fuentes se localizan ahora en el nodo 1 y en el nodo 49; en la gráfica se puede apreciar que en tales nodos la caída de potencial es grande: disminuye aproximadamente a 4. En este caso la corrida se realizó para 85 nodos con las siguientes condiciones de frontera:

$$\phi(0,y,t) = 10. \quad , \quad \phi(x,0,t) = 10.$$

$$\phi(14,y,t) = 10. \quad , \quad \phi(x,14,t) = 10.$$

y la condición inicial:

$$\phi_0(x,y,t) = 10. \quad 0 \leq x \leq 14 \quad , \quad 0 \leq y \leq 14$$

para 10 pasos de tiempo. La fuente del nodo 1 es igual a 20. ($Q = 20.$), y la del nodo 49 fue igual a 20. ($Q = 20.$). La Fig.(V.11) tiene la gráfica que representa el comportamiento del potencial en el tiempo, con las mismas condiciones de frontera, el mismo número de nodos y la misma condición inicial; sólo que se cambiaron los valores de las fuentes; en el nodo 1 $Q_1 = 10.$, y en el nodo 49 se mantuvo como en el anterior. En la gráfica de la Fig.(V.11) se ve que en el nodo uno hubo un

decremento menor en el potencial que en el nodo 49, debido a que la fuente del nodo 49 es mayor.

A continuación se podrán observar diferentes corridas que se realizaron variando la localización de las fuentes así como su magnitud y las condiciones en la frontera; en cada caso se presentarán las gráficas y los valores de cada parámetro que intervino en los cálculos.

En la Fig.(V.12) se pueden ver los resultados que se obtuvieron en 7 pasos de tiempo con una condición inicial de 10. El potencial decrece en cada nivel de tiempo y del nodo 1 al nodo 50 aproximadamente, la fuente es más grande que en los nodos siguientes; por lo que ahí las curvas muestran más caída en el potencial; en cambio los nodos que están después del nodo 50 muestran una menor disminución del potencial, ya que en éstos la fuente fue menor ($Q=2$), sólo en el último nodo la fuente fue de 1 ($Q=1$) y se muestra la caída de potencial. En los nodos del 1 al 50 la fuente fue de 4 ($Q=4$).

En la Fig.(V.13) se puede ver la localización de las fuentes en la malla que consta de 113 nodos, con potencial constante en las fronteras.

En la Fig.(V.14) se puede observar la gráfica con los resultados de una corrida para 5 pasos de tiempo, con una condición inicial de 20 ($\phi_0=20$) y una malla de 145 nodos con un potencial en las fronteras constante de 20.

Ahora las fuentes de más valor se localizaron en los nodos

de la segunda parte superior de la malla, ver Fig.(V.15); las fuentes tienen un valor de 5 ($Q=5$) en dichos nodos.

La Fig.(V.16) muestra la gráfica que corresponde a las condiciones siguientes: el potencial inicial fue de 100 ($\phi_0=100$), el potencial en las fronteras fue de 100., con valores en las fuentes de $Q=60$ para el nodo 1 y $Q=30$ para el último nodo; en este caso también las fuentes se localizaron en la forma que muestra la Fig.(V.15) con 145 nodos y 5 pasos de tiempo en la simulación.

Los casos anteriores tiene diferentes condiciones de frontera y diferentes condiciones iniciales; el número varió, así como la localización de las fuentes. El objetivo de los ejemplos anteriores fue ilustrar la forma en que se comportaba el potencial a través del tiempo resolviendo la ecuación de difusión por elemento finito, con ciertas condiciones específicas; las corridas en la computadora se hicieron para diferentes niveles de tiempo, como se puede apreciar en las gráficas, donde cada curva representa los resultados a un nivel de tiempo determinado.

ELEMENTO FINITO



DIFERENCIAS FINITAS

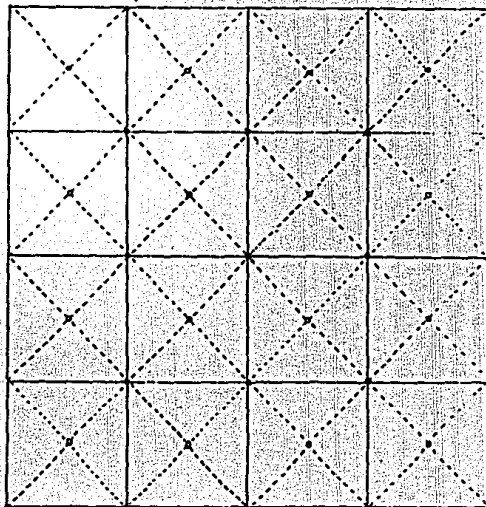


Fig. V.1 MALLAS COMPARADAS

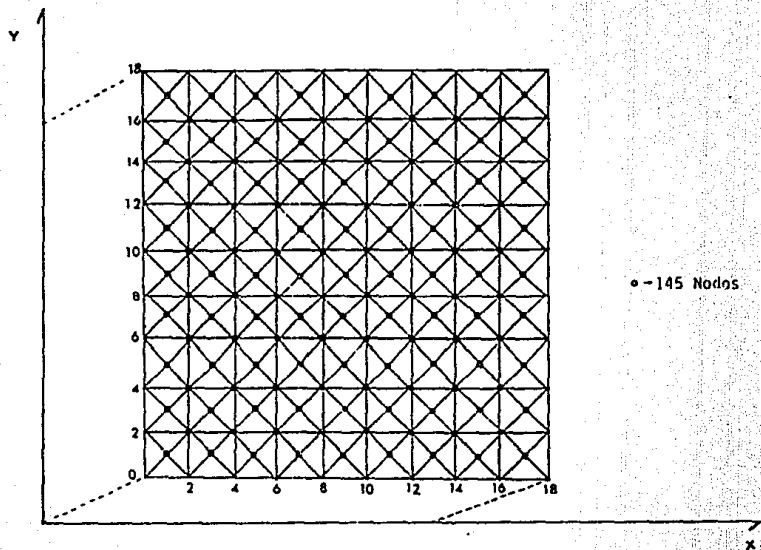


Fig. V.2

Región dividida en elementos finitos triangulares

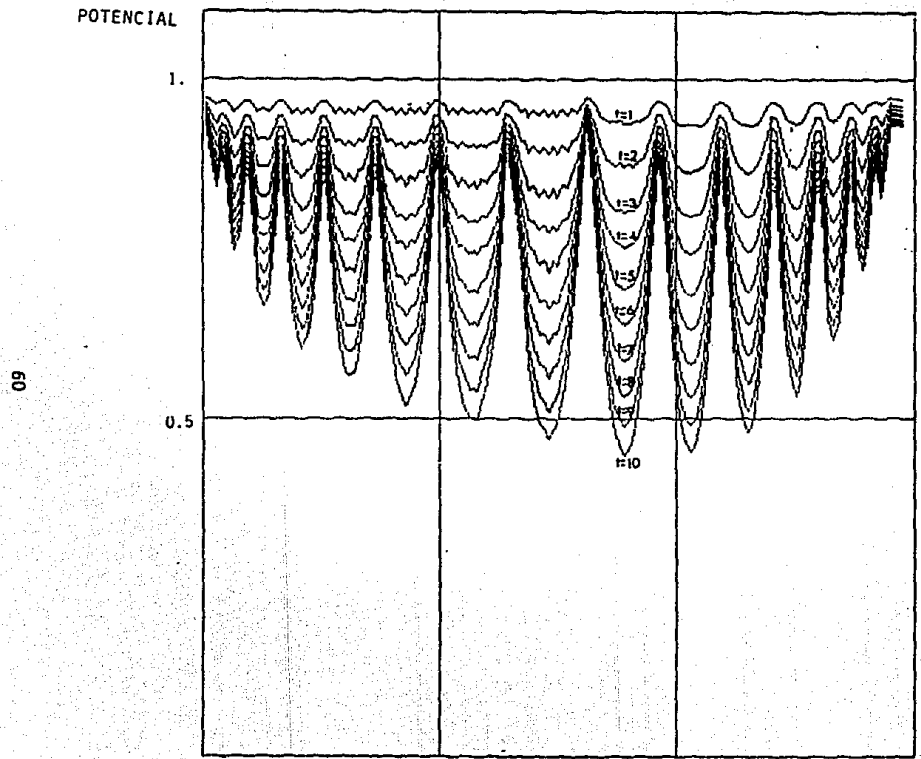


Fig. V.3 GRAFICA DEL POTENCIAL EN DIFERENTES TIEMPOS

Fig. V.4 SUPERFICIE QUE REPRESENTA AL POTENCIAL

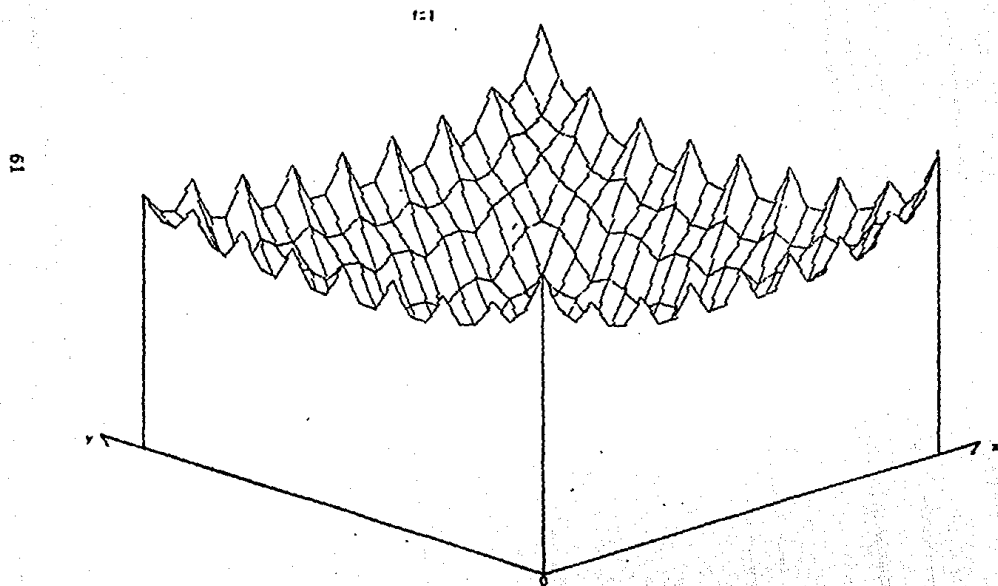
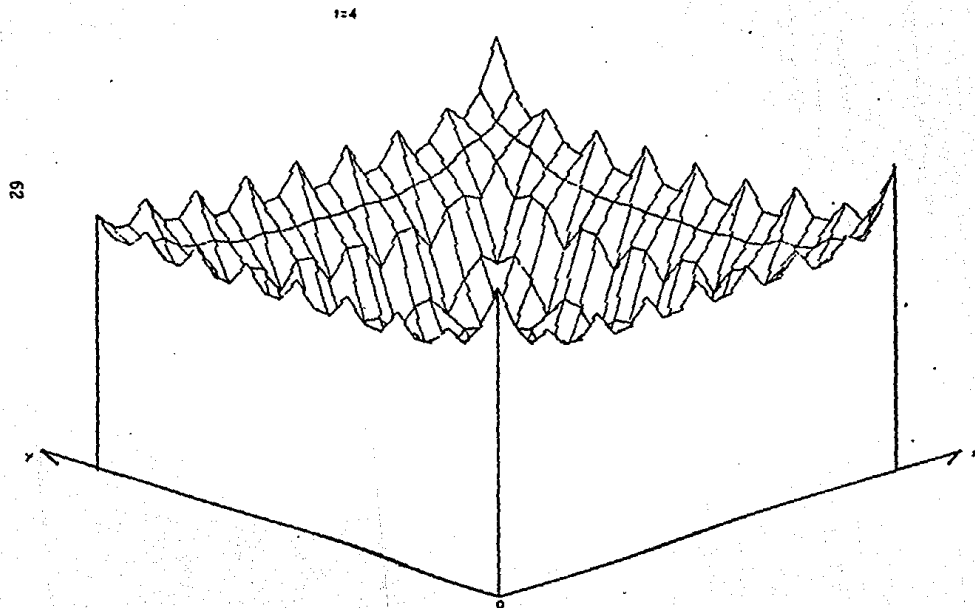


Fig. 5.5 SUPERFICIE QUE REPRESENTA AL POTENCIAL



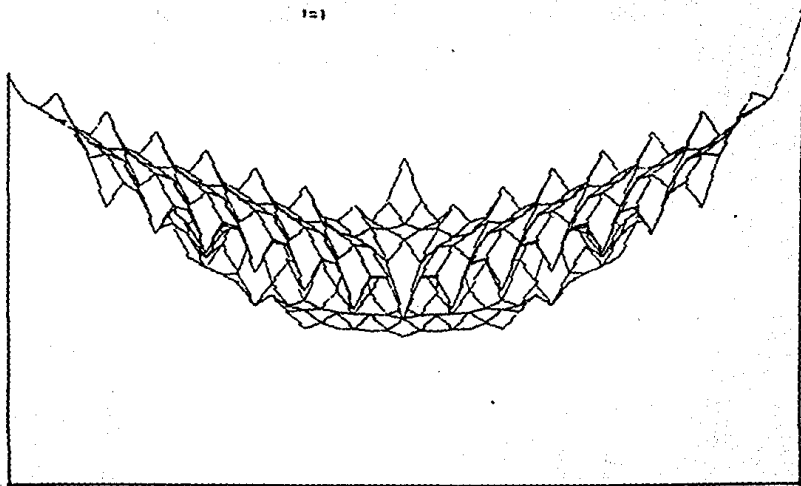


Fig. V.6

VISTA TRANSVERSAL DEL POTENCIAL

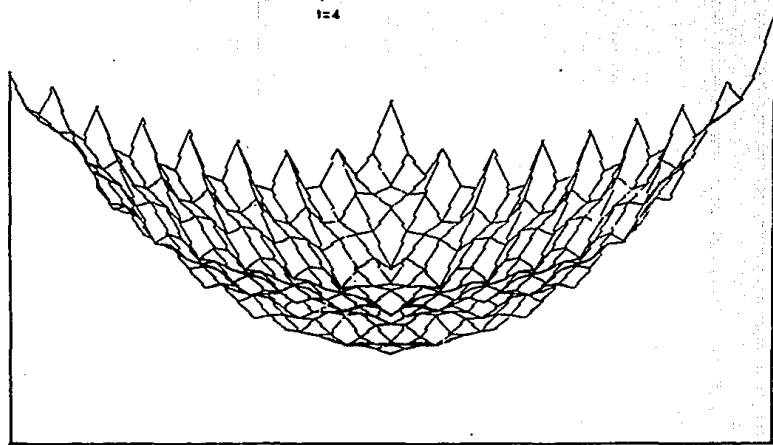
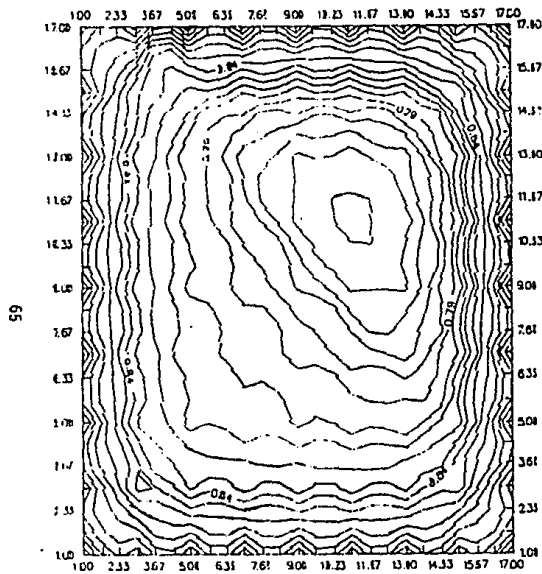
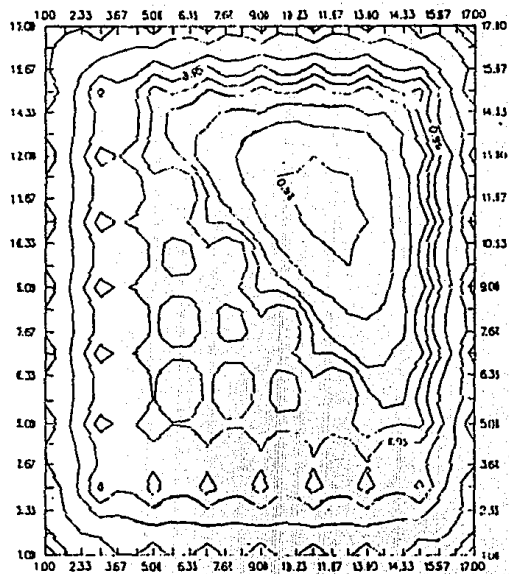


Fig. V.7 VISTA TRANSVERSAL DEL POTENCIAL



t=1



t=4

Fig. V.8 LINEAS EQUIPOTENCIALES

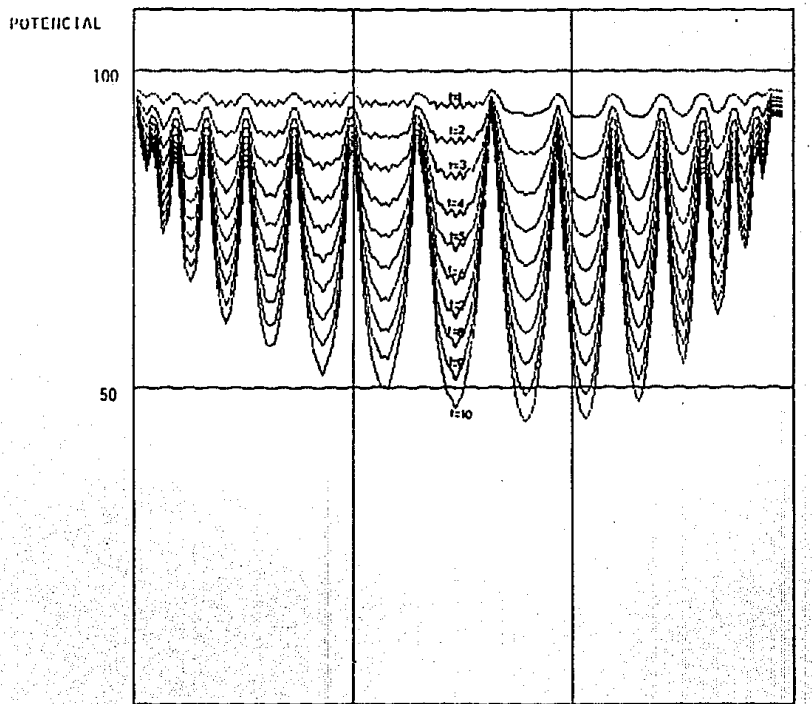


Fig. V.9 GRAFICA DEL POTENCIAL EN DIFERENTES TIEMPOS

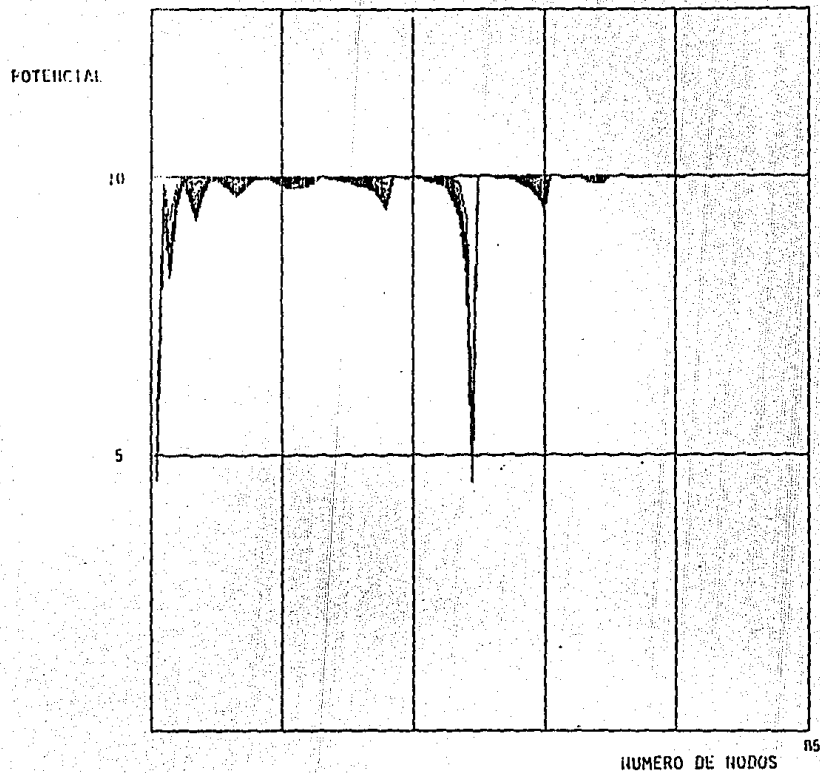


Fig. V.10 GRAFICA DEL POTENCIAL EN DIFERENTES TIEMPOS

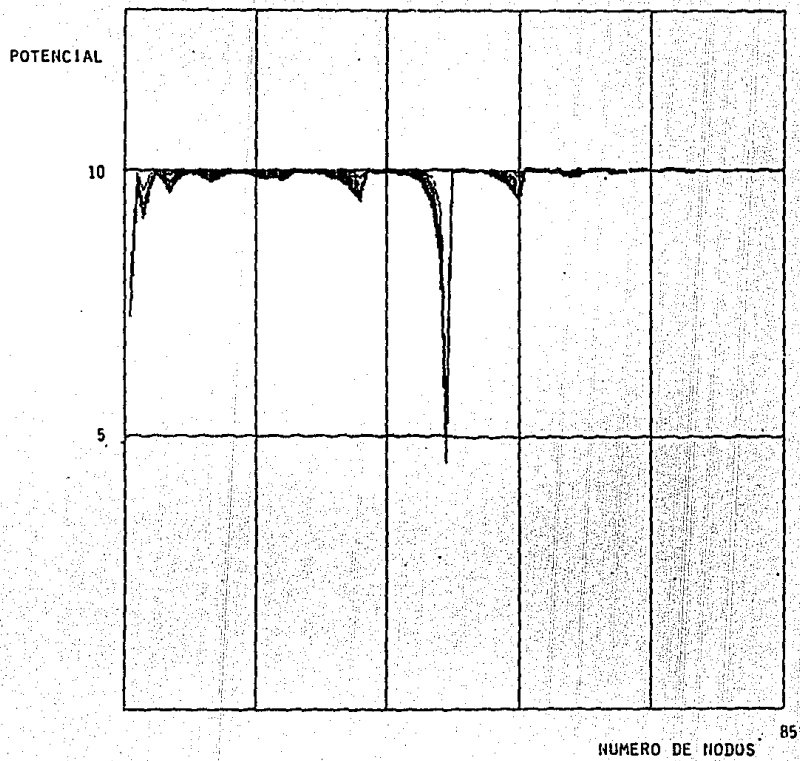


Fig. V.11 GRAFICA DEL POTENCIAL EN DIFERENTES TIEMPOS.

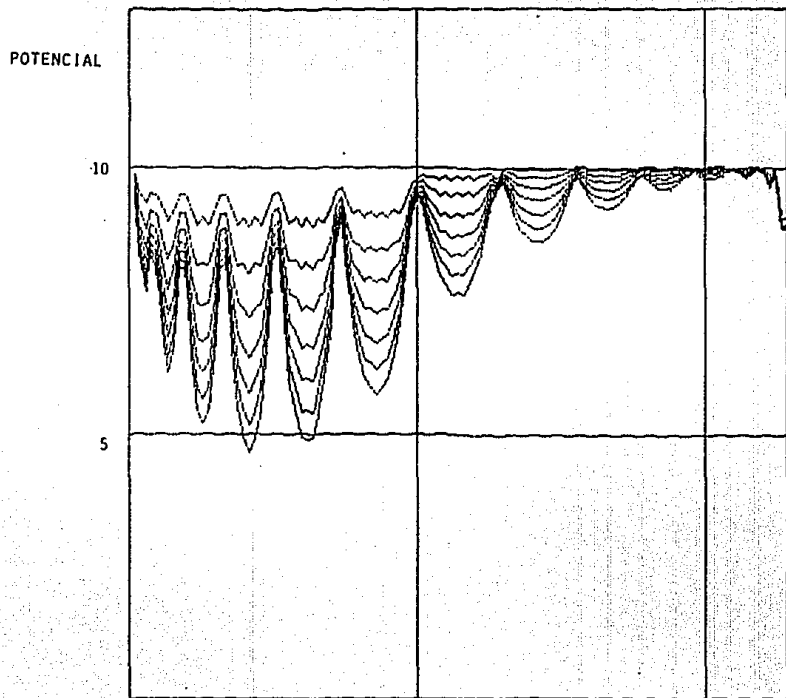


Fig. v.12 GRAFICA DEL POTENCIAL EN DIFERENTES TIEMPOS

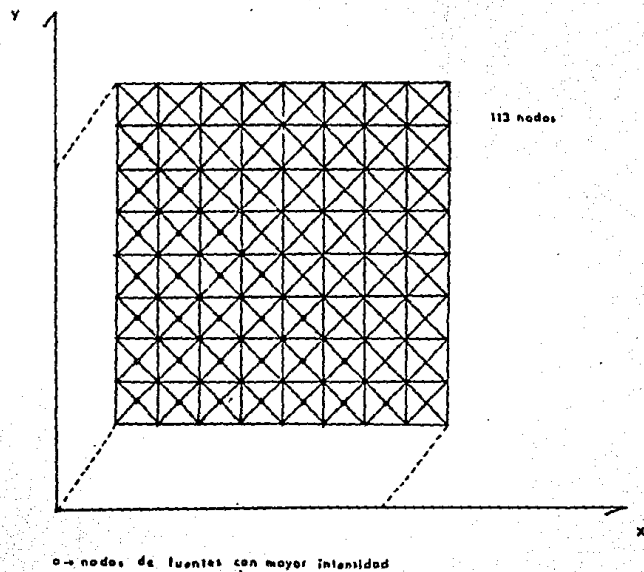


Fig. V.13

LOCALIZACION DE FUENTES

71

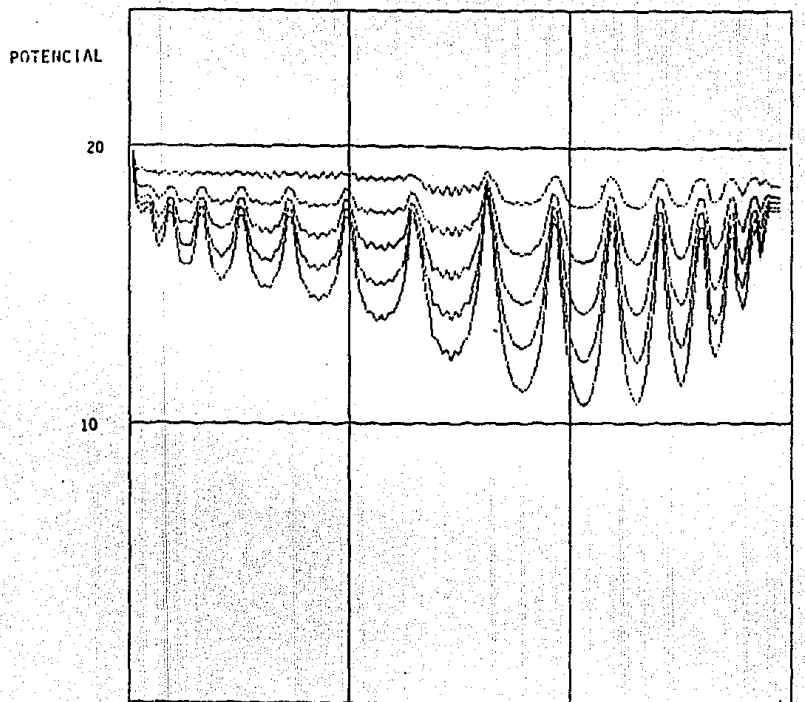
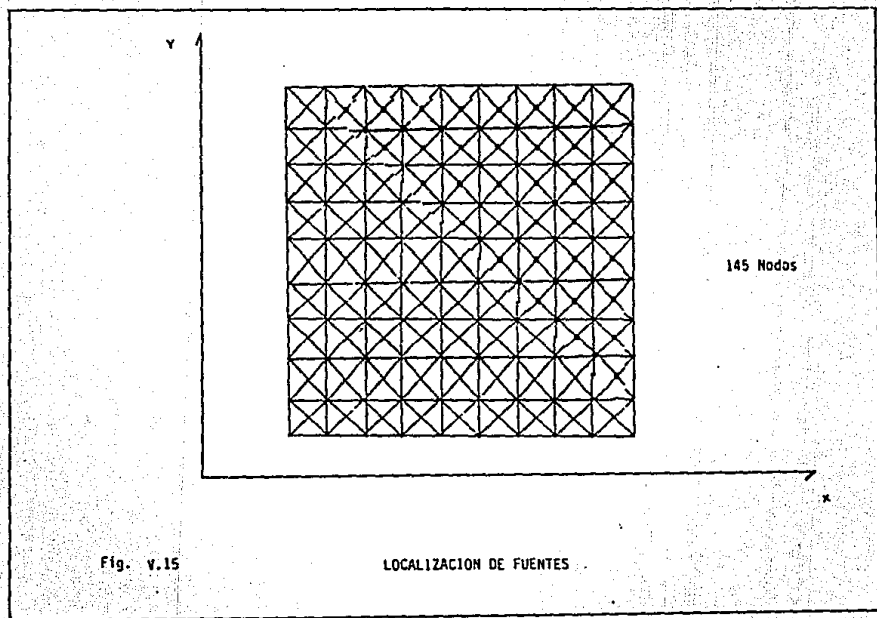


Fig. V.14 GRAFICA DEL POTENCIAL EN DIFERENTES TIEMPOS



73

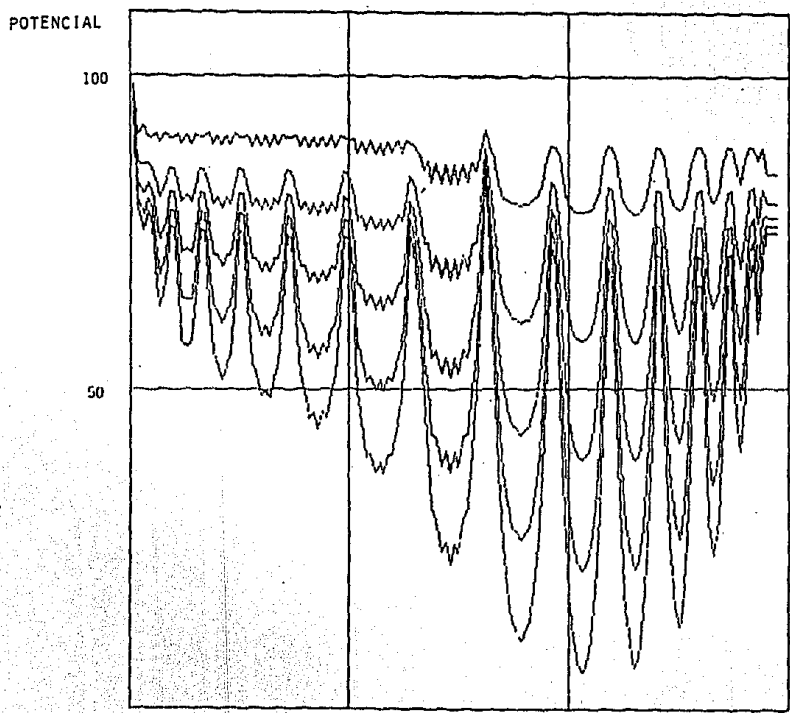


Fig. V.16 GRAFICA DEL POTENCIAL EN DIFERENTES TIEMPOS

V.2.- Comparación con Diferencias Finitas.

En la presente sección se mostrarán diversos casos en los cuales se resolverá la ecuación de difusión , tanto por el método del elemento finito como por diferencias finitas, para comparar los resultados.

En la Fig.(V.17) se puede apreciar la numeración que se propuso en cada método para identificar a los nodos en las mallas respectivas; como se puede ver, la malla correspondiente al elemento finito tiene más nodos (uno en cada vértice de los triángulos); por las dimensiones de cada rectángulo en diferencias finitas, en cada uno puede haber cuatro triángulos .

Lo anterior se debe considerar para comparar los resultados arrojados por cada método. Para más detalle del método de diferencias finitas ver el apéndice(A).

El primer caso que se muestra resuelto por los dos métodos es el siguiente: como en los casos anteriores se trata se resolver la ecuación de difusión :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \frac{\partial \phi}{\partial t} - Q = 0$$

con determinadas condiciones de frontera y determinadas condiciones iniciales.

En la Fig.(V.18) se puede observar la gráfica que representa los resultados obtenidos por el método del elemento finito y en la Fig.(V.19) se pueden ver los resultados obtenidos por diferencias finitas; para este ejemplo las condiciones fueron iguales en ambos casos: la condición inicial fue de 100 ($\phi_0=100$), el área abarcada por ambas mallas es la misma. la presión fue constante en las fronteras con un valor de 100, con un valor en la fuente de 160 en el primer nodo de cada malla, y con 10 pasos de tiempo para ambas corridas. El número de nodos es lo único que difiere; en elemento finito son 113 nodos y en diferencias finitas son 64 nodos; pero ambas mallas cubren la misma área.

Como se puede ver en la Fig.(V.18), el comportamiento del potencial en el primer nodo que es en donde esta la fuente es muy similar en los dos métodos.

En la Fig.(V.20) se observa la gráfica con los resultados obtenidos por elemento finito, y la Fig.(V.21) corresponde a los resultados obtenidos por diferencias finitas. En ambos casos la corrida se realizó para 10 pasos de tiempo, con las siguientes condiciones: el potencial inicial fue de 100 ($\phi_0=100$), el potencial en las fronteras fue de 100, y en lo único que fueron diferentes es en el número de nodos; en elemento finito fueron 113 nodos y en diferencias finitas 64 nodos. Hay que subrayar que a pesar de que son diferentes

en el número de nodos en ambos casos la malla abarca la misma área y por lo tanto se pueden comparar los resultados. Hubo dos fuentes para ambos casos; la primera estuvo localizada en el nodo 1 de cada malla con $Q=160$ y la segunda, localizada en el último nodo de ambas mallas con $Q=-250$; es decir en el primer nodo existió extracción y en el último inyección; por lo que en el nodo 1 de ambas mallas hay un decremento en el potencial y en el último de cada malla hay un incremento (Los signos de las fuentes se tomaron (+) para la extracción y (-) para la inyección). En la Fig.(V.22) se puede ver la colocación de los nodos en ambas mallas. La Fig.(V.23) que corresponde a los resultados obtenidos por elemento finito y la Fig.(V.24) que corresponde a los resultados de diferencias finitas muestran en tres dimensiones la superficie que representa al potencial en la última etapa de tiempo ($t=10$). En la primera figura se puede apreciar la depresión que se forma en la superficie (potencial) donde se encuentra el nodo 1; y en contraposición se puede apreciar al último nodo, donde la superficie muestra un levantamiento, ya que ahí se está inyectando. Lo mismo se puede apreciar para la Fig.(V.24) que corresponde a diferencias finitas.

La Fig.(V.25) muestra las líneas equipotenciales del ejemplo anterior, tanto para elemento finito como para diferencias finitas; en la figura se puede observar que

hay una gran semejanza en la distribución de las curvas de igual potencial a través del área que cubren las mallas respectivas, lo que indica que los resultados de ambos métodos son muy similares.

Antes de presentar algunos ejemplos más para ilustrar mejor la comparación de los métodos, cabe resaltar que las matrices que se generan tanto por elemento finito como por diferencias finitas son totalmente diferentes. En diferencias finitas en el caso de dos dimensiones la matriz será siempre pentadiagonal; mientras que en elemento finito la matriz incrementa sus diagonales a medida que crece el número de elementos en cada dirección; además en este último método las matrices son de mayor orden porque es mayor el número de nodos. En la comparación se cubrió una región con un área igual para los dos métodos, lo que permitió comparar resultados.

A continuación se presentan ejemplos diversos con gráficas que muestran los resultados obtenidos en varias corridas.

En las gráficas se puede apreciar que hay una gran similitud en el comportamiento del potencial en los diferentes niveles de tiempo por ambos métodos. En las Figs. (V.26) y (V.27) se puede ver el comportamiento del potencial en 10 pasos de tiempo. En la Fig. (V.26) se puede apreciar la corrida para elemento finito y en la Fig. (V.27) se puede apreciar la corrida para diferencias

finitas; en ambos casos las condiciones fueron las siguientes: en el primer nodo hay una fuente de extracción de 160, y en el último nodo hay una fuente de inyección de 250, con una condición inicial de 100 ($\phi_0 = 100$), y potencial constante en las fronteras de 60.

En las Figs. (V.28) y (V.29) se muestran respectivamente el comportamiento del potencial tanto para elemento finito como para diferencias finitas; aquí las condiciones fueron: en el primer nodo, en la fuente hay una fuente de extracción de 20. y en el último de 250, la condición inicial es de 100 y la potencial en la frontera de 40.

En los ejemplos anteriores la malla es del mismo tamaño, y se puede observar también que el potencial en la frontera es menor que el potencial inicial, por lo que las curvas en las gráficas tienden a decaer más rápidamente.

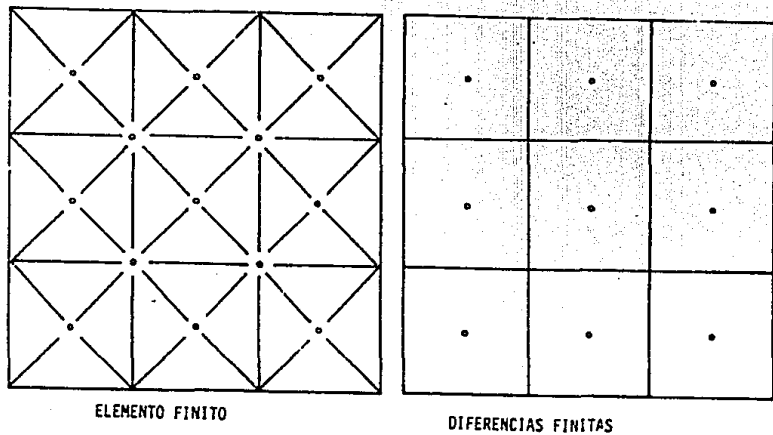


Fig. v.17

COLOCACION DE LOS NODOS

ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA

08

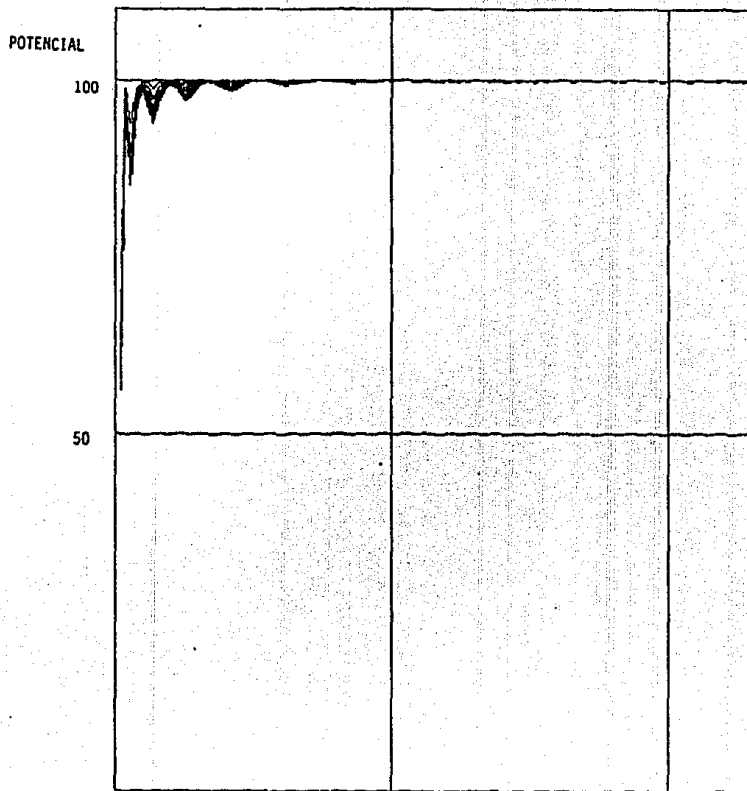


Fig. v.18

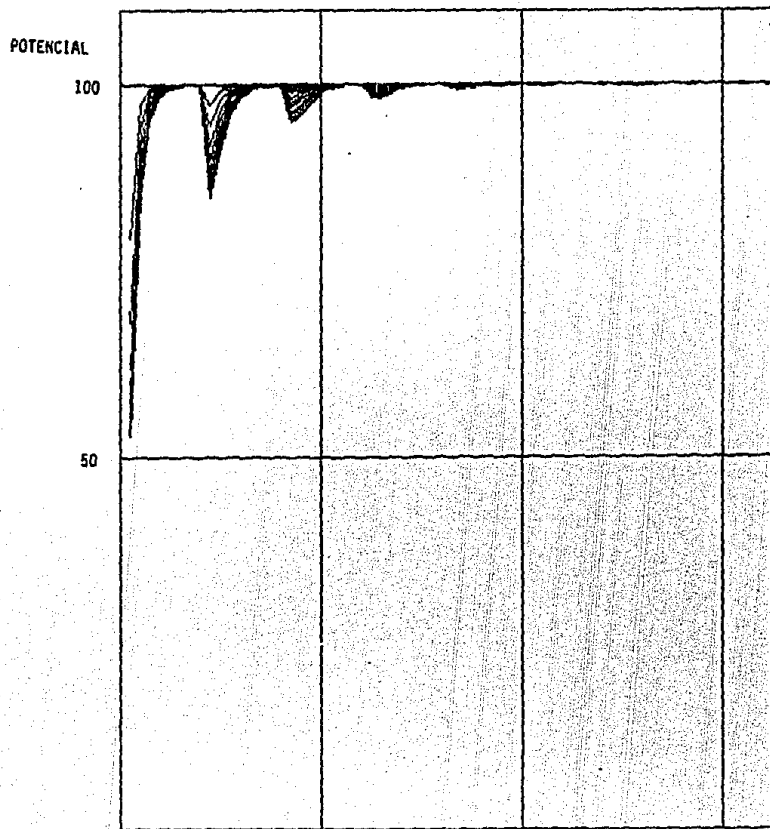
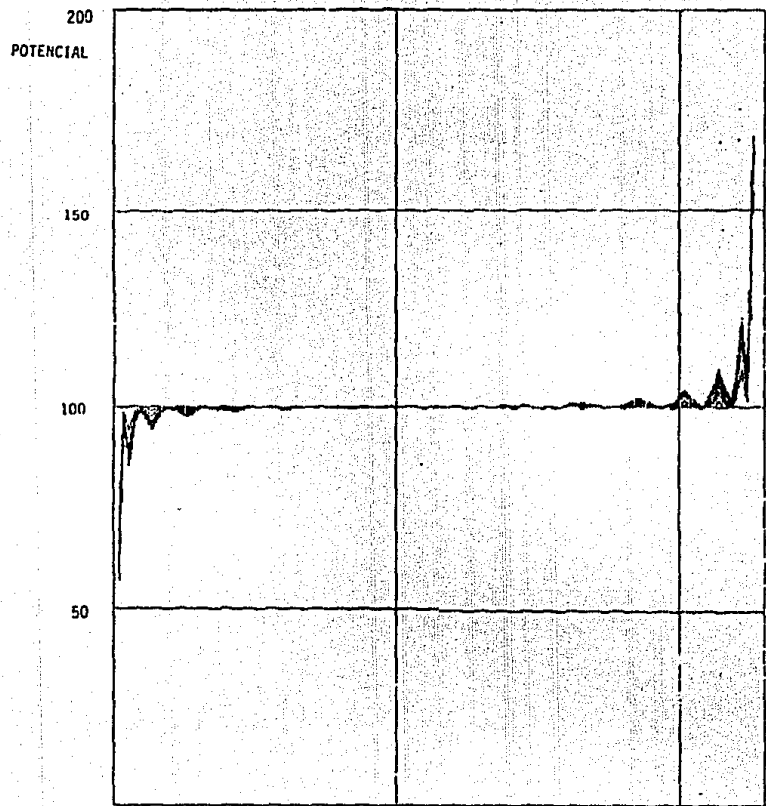


Fig. V.19



GRAFICA DEL POTENCIAL EN DIFERENTES TIEMPOS

NUMERO DE NODOS 113

Fig. v.20

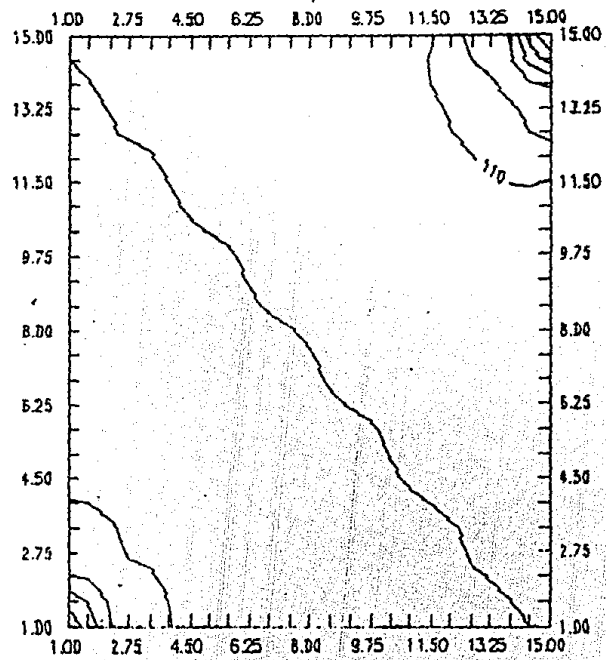
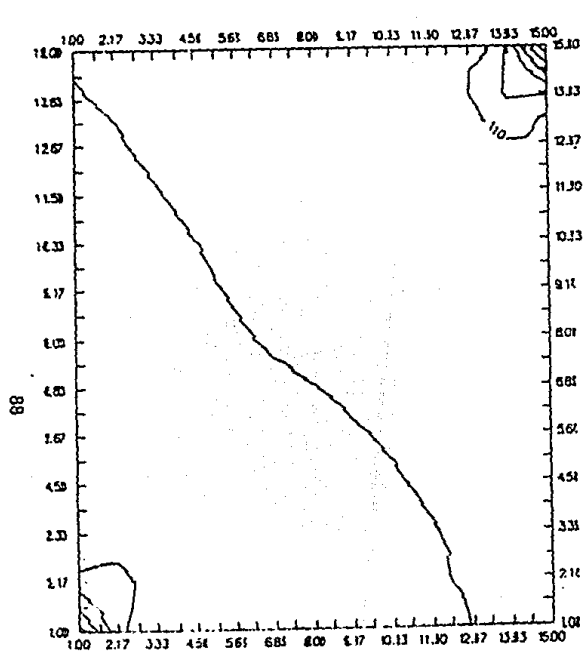


Fig.V.25 LINEAS EQUIPOTENCIALES

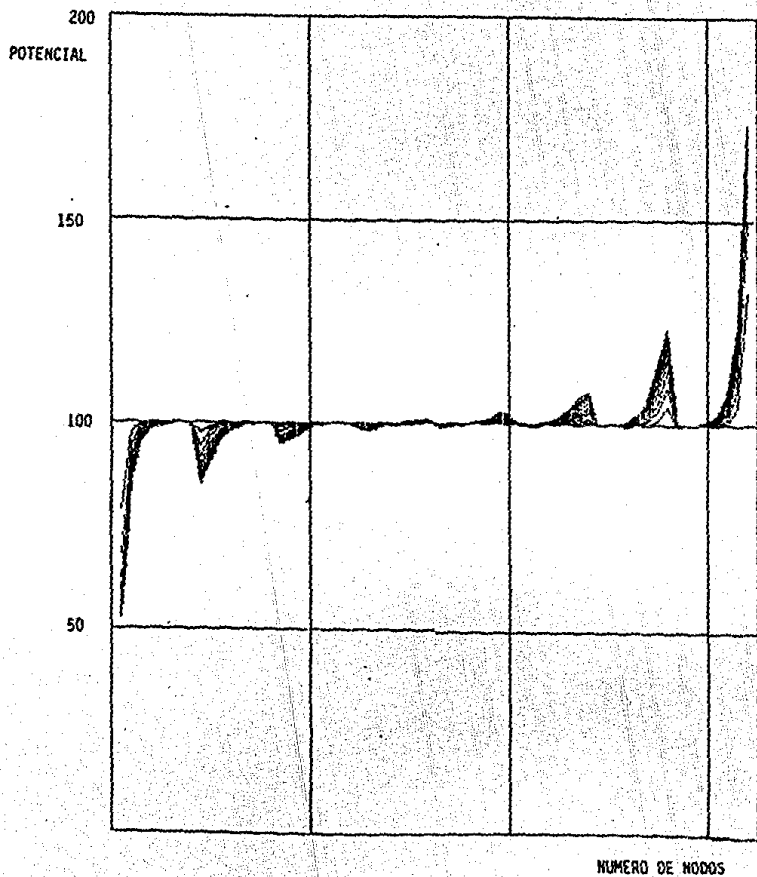


Fig. V.21

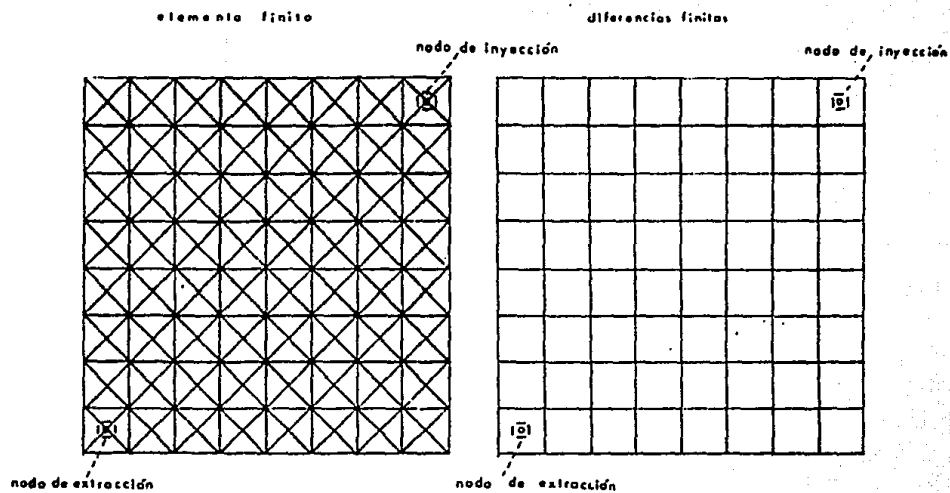


Fig. V.22 LOCALIZACION DE FUENTES

Fig. V.23 ELEMENTO FINITO

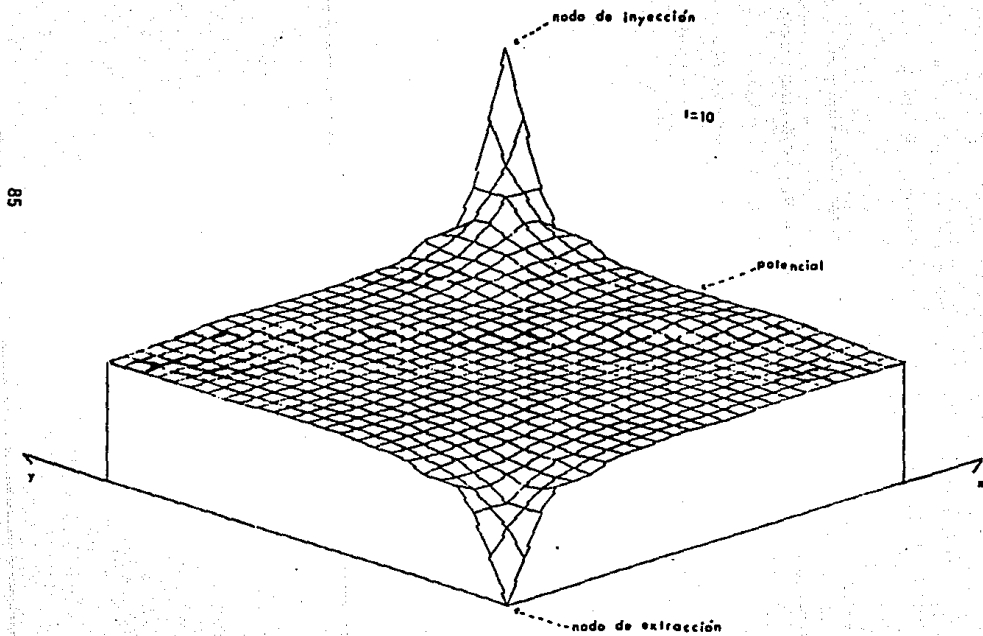
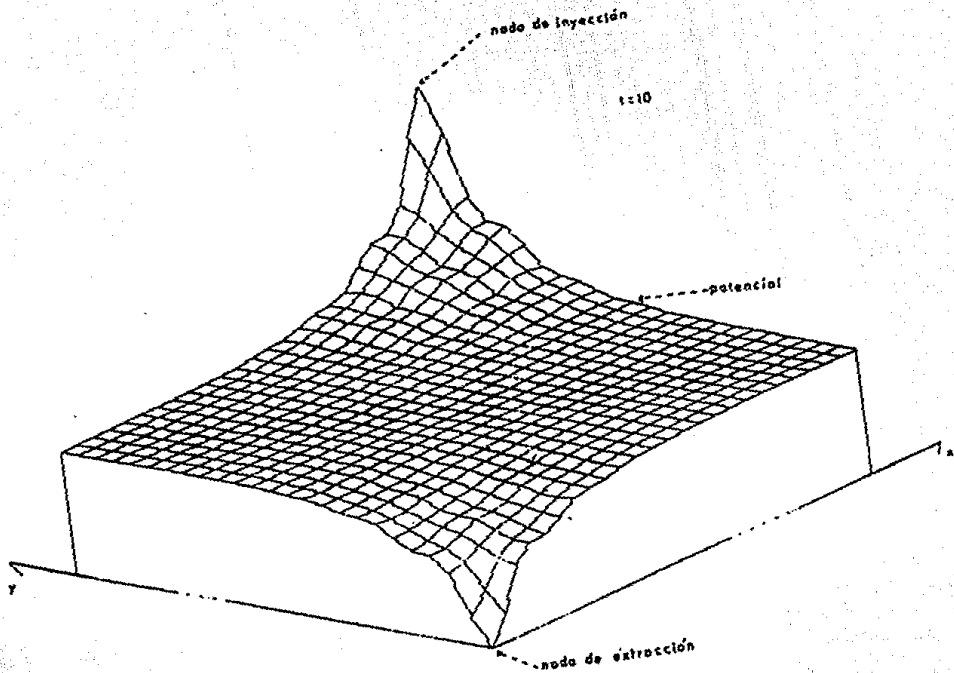
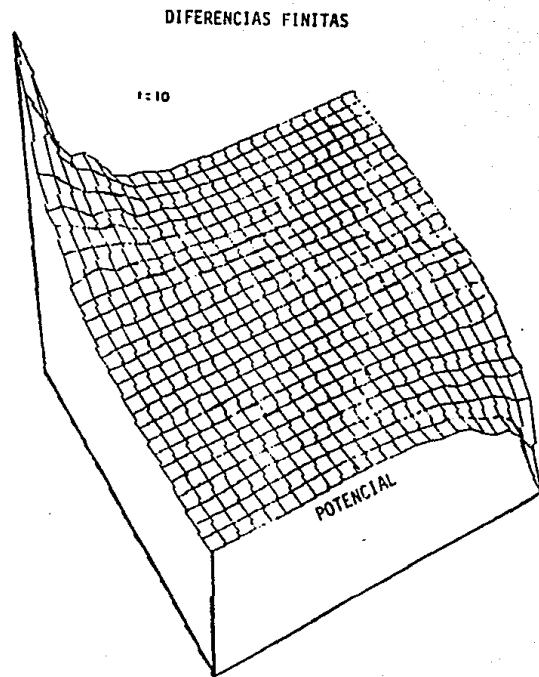
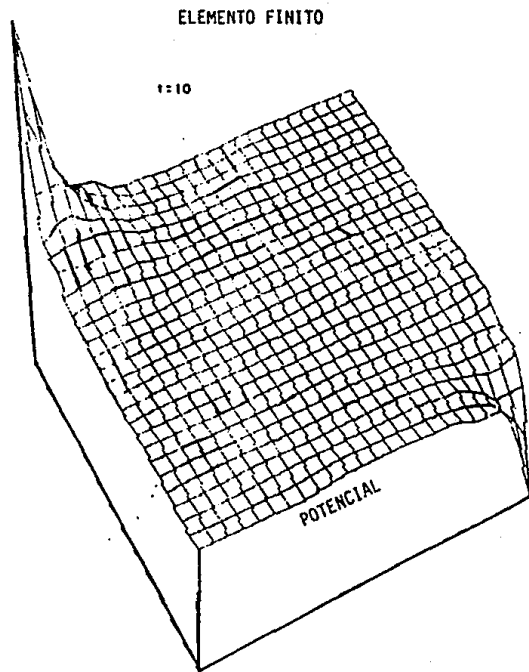


Fig. V.24 DIFERENCIAS FINITAS





Resultados Comparativos de las Figs. V.23 y V.24

VISTA EN PERSPECTIVA

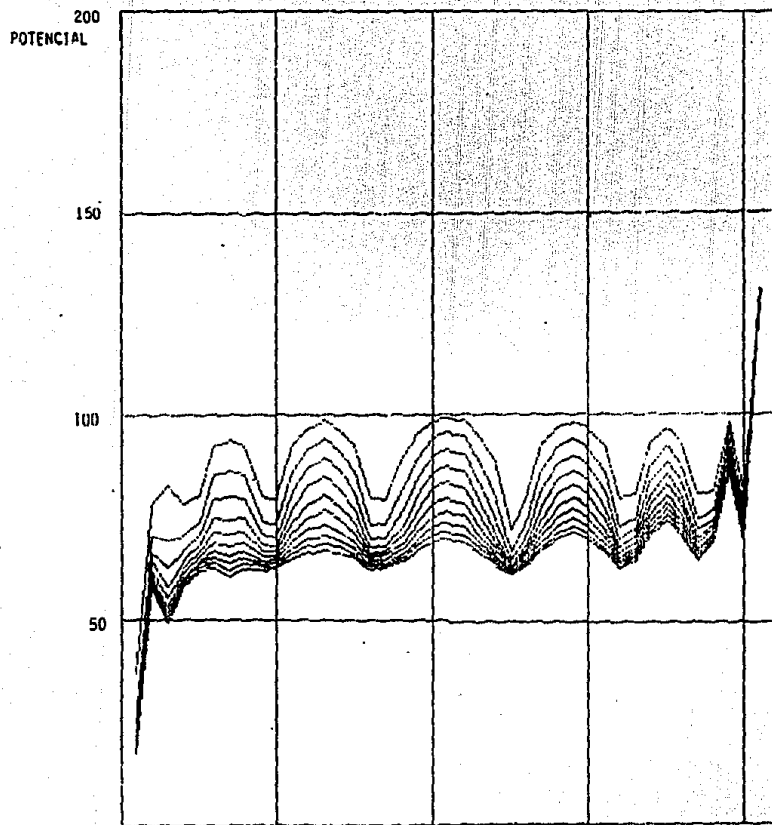
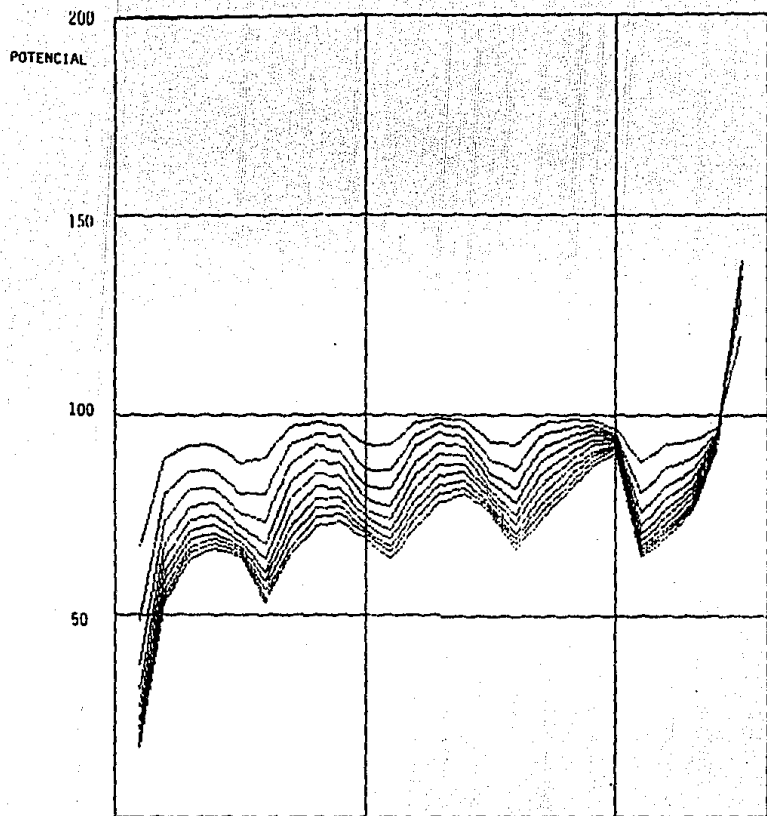
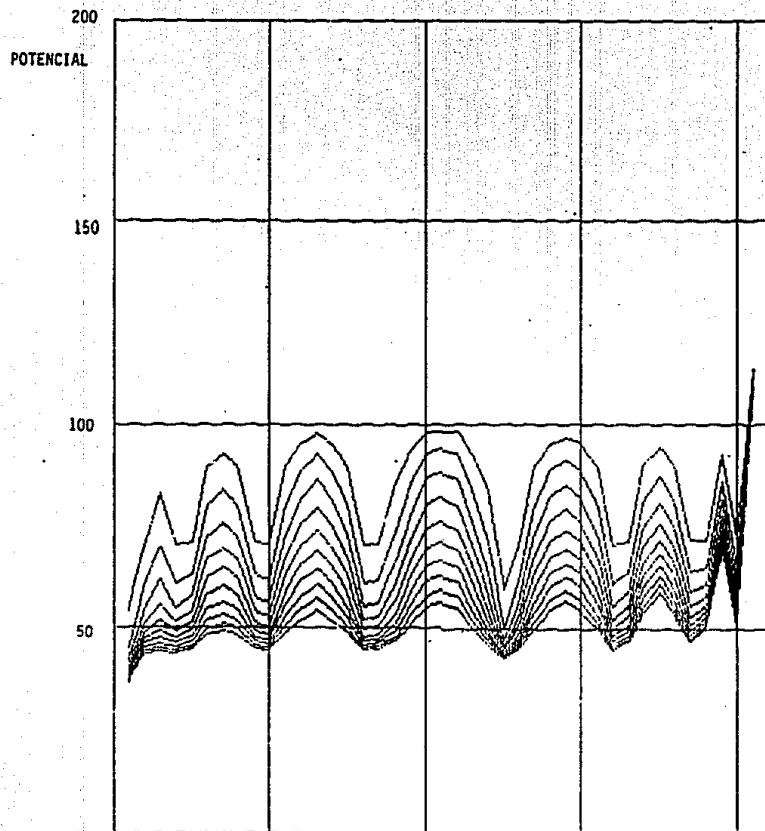


Fig. V.26

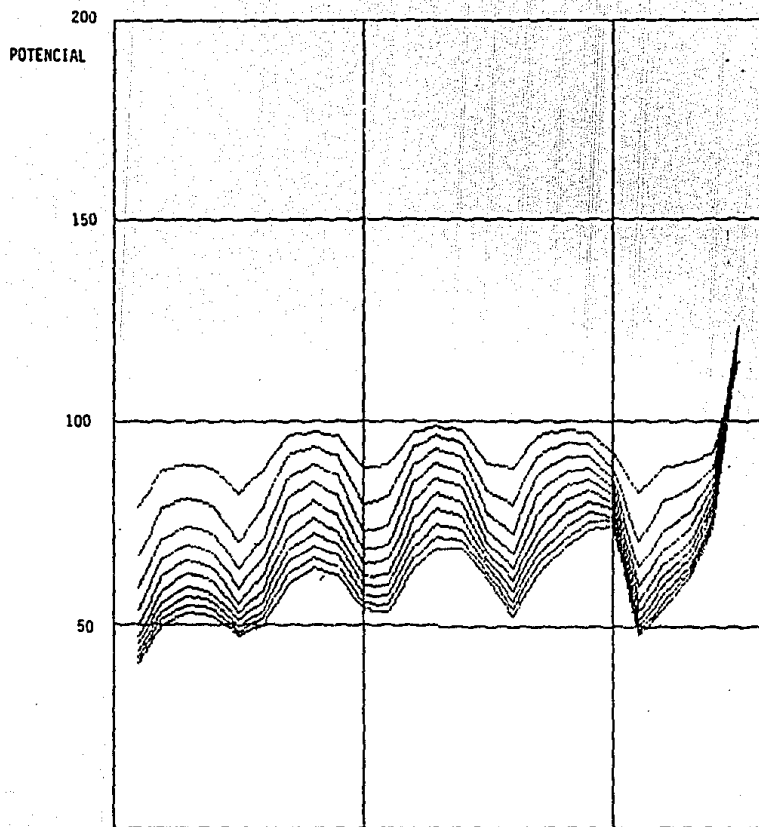


GRAFICAS DEL POTENCIAL EN DIFERENTES TIEMPOS

NUMERO DE NODOS



GRAFICAS DEL POTENCIAL EN DIFERENTES TIEMPOS NUMERO DE NODOS 41



GRAFICAS DEL POTENCIAL EN DIFERENTES TIEMPOS

CAPITULO VI

PROGRAMA DE COMPUTO

El programa de cómputo se realizó en el lenguaje de programación FORTRAN 77 del compilador del sistema GOULD NP-1; se seleccionó dicho lenguaje por considerársele el mejor para operaciones numéricas. A continuación se presenta un diagrama de bloques del programa, así como el listado del mismo.

VI.1.- Características del Programa.

Los datos que se le tienen que proporcionar son los siguientes:

- tiempo de simulación.
- número de celdas en ambas direcciones.
- las magnitudes de las fuentes en diferentes posiciones de la malla.
- la condición inicial.
- el potencial en las fronteras.

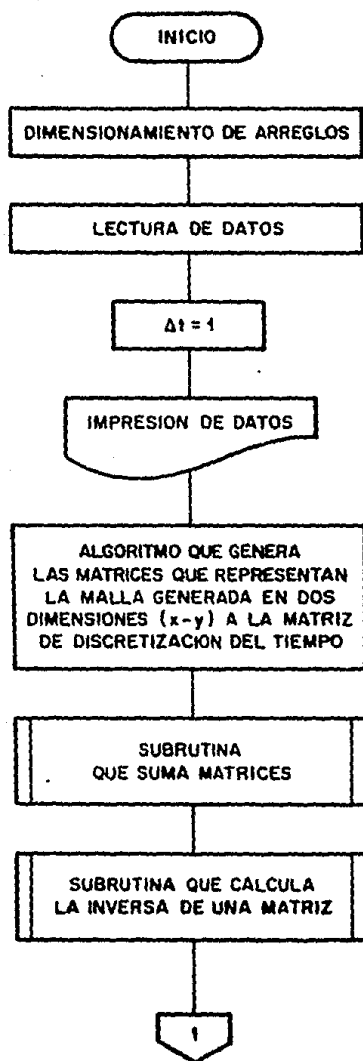
El orden de las matrices que genera el programa por medio

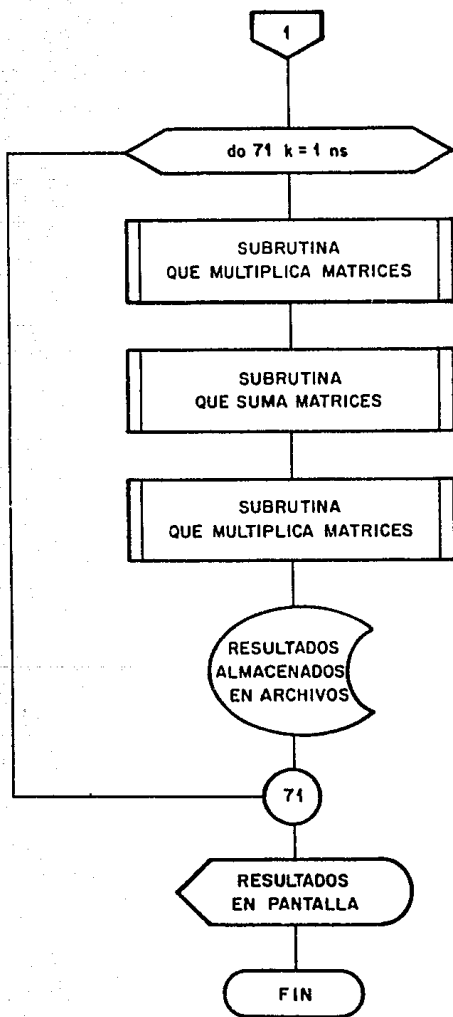
de un algoritmo (diseñado específicamente para eso) depende del número de nodos de la región estudiada.

El algoritmo que genera la matrices K y C requiere solamente el número de elementos que serán en ambas direcciones, y a partir de este dato genera dichas matrices; también genera un vector que corresponde a f .

Para resolver el sistema de ecuaciones lineales que resultan de la aplicación del método del elemento finito, se utiliza una subrutina que calcula la inversa de una matriz, que resuelve satisfactoriamente el sistema; también se ocupan subrutinas auxiliares de multiplicación y suma de matrices. Posteriormente en un ciclo iterativo se calculan las incógnitas (valores del potencial en cada nodo) a través de cada nivel de tiempo; estos resultados los guarda en un archivo para que después se presenten en una gráfica, donde los ejes corresponden a el potencial contra el número de nodos, lo que permite observar el comportamiento del potencial en cada nivel de tiempo en los diferentes nodos de la malla.

DIAGRAMA DE BLOQUES






```

1          a0(i,1)=asd
2          a(i,1)=4.
3
4          ccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
5
6          primera parte del algoritmo
7
8          ccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc

```

```

          do 2 i=1, n
            ncont=0
            do 3 j=i*2- (i-1), i*2
              if (j. eq. n**2) then
                a(j, j-1)=-1.
                c(j, j-1)=2. /12.
                c(j, j)=4. /6.
                b(j, 1)=3*as-abci
              elseif(j. eq. 1)then
                a(j, j+2*i)=-1.
                a(j, j+1)=0.
                c(j, j+2*i)=2. /12.
                c(j, j+1)=0.
                c(j, j)=4. /6.
                b(j, 1)=3*as-abc
              elseif(j. eq. (i**2- (i-1)))then
                a(j, j+1)=-1.
                a(j, j+2*i)=-1.
                c(j, j+1)=2. /12.
                c(j, j+2*i)=2. /12.
                c(j, j)=4. /6.
                b(j, 1)=2*as-abcf
              elseif(j. eq. (i**2))then
                a(j, j-1)=-1.
                a(j, j+2*i)=-1.
                c(j, j-1)=2. /12.
                c(j, j+2*i)=2. /12.
                c(j, j)=4. /6.
                b(j, 1)= as-abcf
            elseif(i. eq. n)then
                a(j, 1)=-1.
                a(j, 1)=-1.
                a(j, j+2*(i-1))=-1.
                a(j, j-2*(i-1))=-1.
                c(j, j+1)=2. /12.
                c(j, j-1)=2. /12.
                c(j, j+2*(i-1))=2. /12.
                c(j, j-2*(i-1))=2. /12.
                c(j, j)=4. /6.
                b(j, 1)=0. -abcf
            else

```

else

```

        a(j, j+1)=-1.
        a(j, j-1)=-1.
        a(j, j+2*(i-1)+2)=-1.
        a(j, j-2*(i-1))=-1.
        c(j, j+1)=2. /12.
        c(j, j-1)=2. /12.
        c(j, j+2*(i-1)+2)=2. /12.
        c(j, j-2*(i-1))=2. /12.
        c(j, j)=4. /6.
        b(j, 1)=0. -abce

    end if

    if((i**2-2*(i-1)+1 .le. i**2-1). and. (j. ge. i**2-2*(i-1)
&+1))then
        if(j. eq. 3)then
            c(j, j+2*(i-1)+3)=2. /12.
            c(j, j+2*(i-1)+1)=2. /12.
            c(j, j)=8. /6.

        elseif(j. eq. n**2-1)then
            c(j, j+2*(i-1)-1)=2. /12.
            c(j, j-2*(i-1)-1)=2. /12.
            c(j, j)=8. /6.

        elseif(j. eq. n**2-2*(n-1)+1)then
            c(j, j+2*(i-1)+2-1)=2. /12.
            c(j, j-2*(i-1)+1)=2. /12.
            c(j, j)=8. /6.

        elseif(j. eq. i**2-2*(i-1)+1)then
            c(j, j+2*(i-1)+2+1)=2. /12.
            c(j, j+2*(i-1)+2-1)=2. /12.
            c(j, j-2*(i-1)+1)=2. /12.
            c(j, j)=8. /6.

        elseif(j. eq. i**2-1)then
            c(j, j+2*(i-1)+3)=2. /12.
            c(j, j+2*(i-1)+1)=2. /12.
            c(j, j-2*(i-1)-1)=2. /12.
            c(j, j)=8. /6.

    end if
end if

    if(i**2-2*(i-1)+3. le. i**2 )then
        if((j. eq. i**2-2*(i-1)+3+ncont). and. (j. le. i**2-3))then
            ncont=ncont+2
            if(i. eq. n)then
                c(j, j-2*(i-1)+1)=2. /12.
                c(j, j+2*(i-1)-1)=2. /12.
                c(j, j-2*(i-1)+1)=2. /12.
                c(j, j-2*(i-1)-1)=2. /12.
                c(j, j)=8. /6.
            end if
        end if
    end if

```



```

        else
            c(j, j+2*(i-1)+2+1)=2. /12.
            c(j, j+2*(i-1)+2-1)=2. /12.
            c(j, j-2*(i-1)+1)=2. /12.
            c(j, j-2*(i-1)-1)=2. /12.
            c(j, j)=8. /6.
        end if
    end if
end if
3      continue
2      continue

c      ccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
c      segunda parte del algoritmo.
c      ccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc

        do 44 i=2,n
            ncon=0
        do 55 j=n**2+(n-1)**2-(n-i+1)**2+1, n**2+(n-1)**2-(n-i)
            if(j.eq. (n**2+(n-1)**2)) then
                a(j, j-2*(n-i+1))=-1.
                c(j, j-2*(n-i+1))=2. /12.
                c(j, j)=4. /6.
                b(j, 1)=3*as-abcd
            elseif(j.eq. (n**2+(n-1)**2-(n-i+1)**2+1)) then
                a(j, j+1)=-1.
                a(j, j-2*(n-i+1))=-1.
                c(j, j+1)=2. /12.
                c(j, j-2*(n-i+1))=2. /12.
                c(j, j)=4. /6.
                b(j, 1)=2*as-abcf
            elseif(j.eq. (n**2+(n-1) - (2*(n-i)**2)/2)) then
                a(j, j-1)=-1.
                a(j, j-2*(n-i+1))=-1.
                c(j, j-1)=2. /12.
                c(j, j-2*(n-i+1))=2. /12.
                c(j, j)=4. /6.
                b(j, 1)=2*as-abcf
            else
                a(j, j+1)=-1.
                a(j, j-1)=-1.
                a(j, j+2*(n-i))=-1.
                a(j, j-2*(n-i+1))=-1.
                c(j, j+1)=2. /12.
                c(j, j-1)=2. /12.
                c(j, j+2*(n-i))=2. /12.
                c(j, j-2*(n-i+1))=2. /12.
                c(j, j)=4. /6.
                b(j, 1)=0. -abcf
            end if
        end do
    end do

```

```

end if

if(n**2+(n-1)**2-(n-1+1)**2+1 .le. n**2+(n-1)**2
&-(n-1)**2-1)then
  if(j .eq. n**2+(n-1)**2-2)then
    c(j, j-2*(n-1+1)+1)=2. /12.
    c(j, j-2*(n-1+1)-1)=2. /12.
    c(j, j)=8. /6.

elseif(j .eq. n**2+(n-1)**2-(n-1+1)**2+1+1)then
  c(j, j+2*(n-1)+1)=2. /12.
  c(j, j-2*(n-1+1)+1)=2. /12.
  c(j, j-2*(n-1+1)-1)=2. /12.
  c(j, j)=8. /6.

elseif(j .eq. n**2+(n-1)**2-(2*(n-1)**2/2)-1)then
  c(j, j+2*(n-1)-1)=2. /12.
  c(j, j-2*(n-1+1)+1)=2. /12.
  c(j, j-2*(n-1+1)-1)=2. /12.
  c(j, j)=8. /6.

endif
endif

if(n**2+(n-1)**2-(n-1+1)**2+1+3. le. n**2+(n-1)**2
&-(n-1)**2-1-3)then
  if(j .eq. n**2+(n-1)**2-(n-1+1)**2+1+3+ncont
&.and. j .le. n**2+(n-1)**2-(n-1)**2-1-3)then
    ncont=ncont+2
    c(j, j+2*(n-1)+1)=2. /12.
    c(j, j+2*(n-1)-1)=2. /12.
    c(j, j-2*(n-1+1)+1)=2. /12.
    c(j, j-2*(n-1+1)-1)=2. /12.
    c(j, j)=8. /6.

endif
endif

55      continue
44      continue
      D(43, 1)=0, -ab

      n=n**2+(n-1)**2
      m=n
      do 4 i=1, n
        do 4 j=1, n
          cas(i, j)=c(i, j)+at
4         ts=0.0
              call madit(a, cas, sur+s, m, n)
              call minvt(sures, n, 4)

C       ccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
C       @@@@@@@@@@@@@@      comienzan iteraciones. @@@@@@@@@@@@@@@@@@@
C       ccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc

```

```

do 71 k=1,ns
      ts=ts+at
      print*, 'etapa de tiempo=', k, ' tiempo de sim. =', ts
      call matmu(cas, ao, sur, n, n, 1)
      call madit(sur, b, sura, n, 1)
      call matmu(y, sura, x, n, n, 1)
      do 22 i=1, n
        write(6, 33) i, x(i, 1)
      continue
22      format(7x, 'potencial en el nodo', i4, '= ', e9.4)
33      open(i, file='tez')
      do 46 l=1, n
        write(1, *) l, x(l, 1)
      continue
46      write(1, *) "\"_\"_"
      do 91 i=1, n
        ao(i, 1) = x(i, 1)
      continue
91      continue
71      continue

close(i)

print*, ' resultados en la ultima etapa de tiempo'
do 17 ij=1, N
17      write(6, 99) ij, X(ij, 1)
99      format(10X, 'potencial en el nodo', I4, '= ', F9.4)

211      print*, 'se termino la simulacion.'
210      stop
      END

C      CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
c      CCCCCCCCCCCC      subrutinas      CCCCCCCCCCCCCCCCCC
C      CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC

c      CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
c      CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
c      subrutina inversa de una matriz.
c      CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
c      SUBROUTINE MINVT(Y, N, X)
C      ESTA SURUTINA CALCULA LA INVERSA DE UNA MATRIZ N POR N
      DIMENSION X(150, 150), Y(150, 150)
      NC=N*2
      DO 10 IT=1, N
        DO 10 JT=1, N
          X(IT, JT)=Y(IT, JT)
10      CONTINUE

      DO 40 I=1, N
        DO 40 J=1, N
          JOHN=J-N
          IF (1-J) 20, 30, 20
20          X(I, JOHN)=0.0
          GO TO 40
30          X(I, JOHN)=1.0

```

```

40          CONTINUE
          DO 180 L=1, N
            LM=L
            NST=L+1
            IF(NST-N)50, 50, 80
50          DO 70 I=NST, N
            IF(ABS(X(LM, L))-ABS(X(I, L)))60, 70, 70
60          LM=I
70          CONTINUE
80          IF(ABS(X(LM, L))-1.0E-7)90, 90, 110
C          PRUEBA. EL TAMANO DEL PIVOTE
90          PRINT*, 'EL PIVOTE ES PEQUEÑO Y NO HAY INVERSA'
          RETURN
110         IF(LM-L)120, 140, 120
120         DO 130 J=L, NC
          XL=X(L, J)
          X(L, J)=X(LM, J)
130         X(LM, J)=XL
140         XL=X(L, L)
          X(L, L)=1.0
          DO 150 J=NST, NC
150         X(L, J)=X(L, J)/XL
          DO 180 I=1, N
            IF(I-L)160, 180, 160
160         XL=X(I, L)
          DO 170 J=L, NC
170         X(I, J)=X(I, J)-XL*X(L, J)
180         CONTINUE
          IC=N+1
          DO 190 I=1, N
            DO 190 J=IC, NC
              JX=J-N
              X(I, JX)=X(I, J)
          RETURN
          END
    
```

C ESTA SUBROUTINA MULTIPLICA MATRICES

```

SUBROUTINE MATMU(A, B, C, M, N, K)
C A*B=C DONDE: A ES M POR N Y B ES N POR K Y C ES M POR K
DIMENSION A(150, 150), B(150, 150), C(150, 150), D(150, 150)
DO 20 I=1, M
  DO 20 J=1, K
    X=0.0
    DO 10 L=1, N
      X=X+A(I, L)*B(L, K)
10    D(I, J)=X
    DO 30 I=1, M
      DO 30 J=1, K
        C(I, J)=D(I, J)
    RETURN
    
```

END

```
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC  
C      subrutina para sumar matrices c=a+b  
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
```

```
subroutine madit(a,b,c,m,n)  
dimension a(150,150),b(150,150),c(150,150)  
do 5 i=1,m  
  do 5j=1,n  
    c(i,j)=a(i,j)+b(i,j)  
  return  
end
```

CAPITULO VII

RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Al comparar los resultados obtenidos por el método del elemento finito con los resultados obtenidos por el método de diferencias finitas, se observó que son muy similares. En el capítulo V se presentaron resultados de varias corridas con diferentes condiciones de frontera e iniciales y se colocaron fuentes en diferentes nodos, para ver el comportamiento del potencial a través de diferentes niveles de tiempo; los ejemplos de dicho capítulo muestran que tanto por elemento finito como por diferencias finitas los resultados son muy similares.

En el ejemplo que se ilustra en las Figs.(V.20) y (V.21) se pueden comparar los resultados para ver en forma amplia el problema que se resolvió; las Figs.(V.23) y (V.24) muestran en tres dimensiones la superficie que representa al potencial en la región estudiada. Las escalas en las gráficas en tres dimensiones se conservan iguales en ambos casos y se pueden ver que los resultados son muy similares y por lo tanto satisfactorios.

Otros ejemplos se presentaron donde se resolvió la ecuación de difusión para diferentes condiciones, variando la posición de las fuentes y la comparación de resultados fue satisfactoria. La aplicación de los métodos antes mencionados da como resultado un sistema de ecuaciones lineales, cuyo número de incógnitas está determinado por el número de nodos en la malla propuesta. En las secciones precedentes se mencionó que en el elemento finito se dividió la región estudiada en triángulos, mientras que para diferencias finitas, en rectángulos.

Las matrices que representan los sistemas de ecuaciones lineales son completamente diferentes, tanto en su orden como en la disposición de las diagonales de las mismas; para dos dimensiones la matriz que resulta en diferencias finitas es una matriz pentadiagonal; en cambio en el elemento finito conforme crece el número de elementos en ambas direcciones el ancho de banda de la matriz aumenta. En ambos casos se realizaron corridas de prueba, donde se le dio valor nulo a la fuente, es decir, no existió ni extracción ni inyección, y el potencial a través del tiempo permaneció sin ningún cambio, lo que indica que el sistema estaba en equilibrio y la igualdad se cumplía, dando a través de todos los niveles de tiempo el potencial inicial. Se debe subrayar el aspecto de que los sistemas de ecuaciones generados por ambos métodos cubrieron la misma área; aunque en el método del elemento finito proporcionó más valores del potencial, ya que éste

proporciona el valor del potencial en el vértice de cada elemento triangular, lo que permite mayor exactitud.

Conclusiones.

La comparación de los dos métodos dio resultados muy similares, lo que indica que la solución de la ecuación de difusión por el método del elemento finito fue satisfactoria; por lo tanto se alcanzó el objetivo planteado inicialmente.

El propósito de utilizar el método del elemento finito para resolver la ecuación de difusión fue el de buscar nuevas alternativas para atacar problemas de Ingeniería de Yacimientos en donde se generan ecuaciones diferenciales parciales que describen el flujo de fluidos en medios porosos.

Las ventajas principales del método del elemento finito son las siguientes: permite ajustar una malla a regiones en el espacio de forma compleja, ya que se puede diseñar una malla en triángulos de diferentes tamaños que cubra una área de interés; la afinación de la malla puede ser muy grande, y en zonas específicas se puede afinar la malla tanto como se quiera para tener valores del potencial más exactos, y se puede obtener una solución continua a partir de los valores nodales que obtenemos en

diferentes tiempos, ya que las funciones base en combinación con dichos valores generan un polinomio de aproximación en función de las coordenadas espaciales, lo cual permite conocer los valores del potencial en zonas donde no exista un nodo.

En este trabajo en particular se pueden obtener polinomios continuos en el espacio para cada Δt , ya que como se mencionó anteriormente, el tiempo se discretizó. En trabajos posteriores se podrá tomar el tiempo como una variable independiente y se logrará obtener un polinomio que represente la solución continua en espacio y tiempo.

Cuando hay más caminos para resolver un problema, mejor serán los resultados que se obtengan, pues se tendrán elementos de juicio para escoger un método adecuado a las exigencias de un problema concreto. Proponer un camino fue la finalidad de esta tesis, para que posteriormente se utilice este método (elemento finito) en los problema de Ingeniería de Yacimientos en que se requiera.

NOMENCLATURA

A	Area.
C	Matriz de discretización del tiempo.
e	Elemento finito.
f	Vector.
K	Matriz espacio.
N	Función base.
t	Tiempo.
w	Término de adición o extracción de masa.

LETRAS GRIEGAS.

ϕ	Potencial.
μ	Viscosidad.
ψ	Porosidad.
ΔZ	Longitud vertical.
ΔY	Longitud en Y.
ΔX	Longitud en X.
Δt	Intervalo de tiempo.
ρ	Densidad.
Ω	Región.
∇	Término de frontera.

$\delta\Omega_t$	Incremento del funcional.
$\delta\phi$	Incremento de la función.
Π	Funcional general.
γ, β, α	Coefficientes de la función base.
φ	Constante de propiedades.

SUBINDICES Y SUPERINDICES.

i, j, k	Nodos.
i, m	Posición en la matriz generada.
a	Número de nodos.
n	Número de funciones base.
e	Elemento finito.

BIBLIOGRAFIA.

- 1) Rodríguez Nieto Rafael.: "Apuntes de Mécanica de Yacimientos", Facultad de Ingeniería.
- 2) Crichlow, B.: "Modern Reservoir Engineering: A simulation Approach" Prentice Hall Inc.
- 3) Pinder, George, William G. Gray: "Finite Element Simulation in Surface and Subsurface Hidrology", Academic Press, 1977.
- 4) Zienkiewicz O.C: "The Finite Element Method", Mc Graw-Hill.
- 5) Zienkiewicz, O. C.: "The Finite Element Method in Engieneering Science", Mc Graw Hill, 1971.
- 6) Quintero, A. R.: "Formulación Variacional" , Instituto Mexicano del Petroleo, 1975.
- 7) Elsgoltz, L.: "Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Variacional", Ediciones de Cultura Popular, 1975.
- 8) Quintero. A. R.: " Aplicación de los Métodos del Cálculo Variacional en la Solución de Problemas de Flujo a través de Medios Porosos", Instituto Mexicano del Petroleo.
- 9) Rodríguez Nieto Rafael.: "Matemáticas Aplicadas a Flujo de Fluidos en Medios Porosos", Instituto Mexicano del Petróleo.

- 10) Livesley, R.: "Elemento Finito. Introducción para Ingenieros", Limusa, 1988.
- 11) Javandel and Witherspoon: "Application of the Finite Element Method to Transient Flow in Porus Media", SPEJ, Sep. 1968.
- 12) Gulbrandsen and Wille: "A Finite Element Formulation of the Two- Phase Flow Equations for Oil Reservoirs", SPE, March 1985.
- 13) Hernández, G. y Domínguez V.: "Apuntes de Simulación Matemática de Yacimientos", Facultad de Ingeniería.
- 14) Borden, L. y Faires, D.: "Análisis Numérico", Iberoamericana.
- 15) Iriarte, V. y Balderrama R.: "Apuntes de Métodos Numéricos", Facultad de Ingeniería.
- 16) Larry c. Young: "A Finite Element Method for Reservoir Simulation", SPE, Oct. 1978.
- 17) Vilgeir Dalen: "Simplified Finite Element Models for Reservoir Flow Problems.", SPE, Nov. 1978.

APENDICE A

METODO DE DIFERENCIAS FINITAS.

La ecuación de difusión es una ecuación diferencial parcial continua, que se puede transformar a una discreta utilizando el método de diferencias finitas; este método consiste en sustituir las derivadas parciales de la ecuación por su equivalente en diferencias finitas, las cuales se pueden obtener por medio del polinomio de Taylor.

La ecuación ya discretizada permitirá determinar los valores de la variable dependiente en puntos discretos en espacio y tiempo. En el espacio se utilizarán diferencias centrales y en el tiempo, regresivas. El polinomio de Taylor se define de la siguiente forma:

$$f(x) = f(b) + (x-b) f'(b) + \frac{(x-b)^2}{2!} f''(b) + \dots$$

A partir de la expresión anterior podemos aproximar las derivadas parciales.

Siguiendo la expansión de Taylor hacia adelante y hacia atrás:

$$\phi(x_{1,1}) = \phi(x_1 + \Delta x) = \phi_1 + \Delta x \left. \frac{d\phi}{dx} \right|_1 + \frac{\Delta x^2}{2} \left. \frac{d^2\phi}{dx^2} \right|_1 + \dots \quad (\text{A.1})$$

$$\phi(x_{1,-1}) = \phi(x_1 - \Delta x) = \phi_1 - \Delta x \left. \frac{d\phi}{dx} \right|_1 + \frac{\Delta x^2}{2} \left. \frac{d^2\phi}{dx^2} \right|_1 - \dots \quad (\text{A.2})$$

Sumando las expresiones (A.1) y (A.2) y despejando la segunda derivada:

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} \Big|_i = \frac{\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}}{\Delta x^2}$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\phi_{i,j}^{n+1} - \phi_{i,j}^n}{\Delta t}$$

De forma análoga para la dirección Y y reuniendo términos:

$$\frac{\phi_{1,j+1}^n - 2\phi_{1,j}^n + \phi_{1,j-1}^n}{\Delta y^2} + \frac{\phi_{i+1,j}^n - 2\phi_{i,j}^n + \phi_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} = \frac{\phi_{i,j}^{n+1} - \phi_{i,j}^n}{\Delta t} \quad (\text{A.3})$$

Aplicando la Ec.(A.3) en una región determinada, se genera un sistema de ecuaciones lineales, que en dos dimensiones da origen a una matriz pentadiagonal.

c234567

IMPLICIT REAL*(A-H,O-Z)
DIMENSION A(150,150),B(150),X(150),Y(150,150)

C PROGRAMA DE COMPUTO EN LENGUAJE FORTRAN
C QUE RESUELVE LA ECUACION DE DIFUSION POR
C DIFERENCIAS FINITAS; TOMANDO EN CUENTA
C LA CONDICION INICIAL Y LAS CONDICIONES
C DE FRONTERA.


```
10           print*, 'orden de la matriz'  
            READ(5,*)N  
30           IF (N-99)30,210,210  
            M=N  
            print*, 'condicion inicial'  
            read(5,*)pi  
            print*, 'presion en la frontera'  
            read(5,*)pii  
            print*, pi  
            print*, 'long. de celda'  
            read(5,*)ax  
            print*, ax  
            print*, 'fuente1: + extraccion'  
            read(5,*)q  
            print*, q  
            print*, 'fuente central nodo'  
            read(5,*)qp  
            print*, qp  
            print*, 'fuente2: + extraccion'  
            read(5,*)fuentea  
            print*, fuentea  
            print*, 'fuente3: + extraccion'  
            read(5,*)fuenteb  
            print*, fuenteb  
            print*, 'fuente4: + extraccion'  
            read(5,*)qu  
            print*, qu  
            print*, 'tiempo de simulacion'  
            read(5,*)ttot  
            print*, ttot  
            print*, 'numero de celdas en x'  
            read(5,*)ii  
            print*, ii  
            print*, 'numero de celdas en y'  
            read(5,*)iii  
            print*, iii
```



```

        at=1.
        ns=ttot/at
        ilm=ii+iii
        iki=ii

c         Fuente = q*vis/(h*per)
           fuente=q
c         alfa = 119.56*(por*vis*cmp*ax*ax)/(per*at)
           alfa=ax*ax/at
           ara=-alfa*pi

C         CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
c         CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC Formacion de la matriz CCCCCCCCCCCCCCCCCC
C         CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC

c         CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
C         CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC Llenado de la Diagonal Principal (C)
c         CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
C         CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
           ni = ii

           A(1,1)=-(.4.+alfa)
           B(1)=-2*pii+ara-fuente
           do 32 i=2,ii-1
           A(i,1)=-(.4.+alfa)
           B(i)=-pii+ara+fuentea
32          continue
           A(ii,ii)=-(.4.+alfa)
           B(ii)=-2*pii+ara+fuenteb
           iqf=iii
           do 735 j=1,iqf-2
           A(ii+1,ii+1)=-(.4.+alfa)
           B(ii+1)=-pii+ara+fuentec
           do 201 i=ii+2,ii+iqf-1
           A(i,1)=-(.4.+alfa)
           B(i)=0.+ara+fuentec
201          A(ii+iqf,ii+iqf)=-(.4.+alfa)
           B(ii+iqf)=-pii+ara+fuentec
           ii=ii+iqf

735          continue
           A(ii+1,ii+1)=-(.4.+alfa)
           B(ii+1)=-2*pii+ara+fuentec
           do 401 i=ii+2,ilm-1
           A(i,1)=-(.4.+alfa)
           B(i)=-pii+ara+fuentec
401          A(ilm,ilm)=-(.4.+alfa)
           B(ilm)=-2*pii+ara-qu
c           B(7)=0.0-qu

C         CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
c         CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC Llenado de la Diagonal Superior I+IK: (D)
C         CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
c         CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
           do 33 i=1,ilm-ii
           A(i,ii+iki)=1.

```

```

33          continue
C          ccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
C          Llenado de la Diagonal Inferior I+IKI (E)
C          ccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
C          do 34 i=1, ilm-ii
C              A(i+iki, i)=1.
34          continue
C          ccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
C          Llenado de la Diagonal Superior I (A)
C          ccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
C              lk=iii
C              do 4 i=1, ilm-1
C                  if(i.eq.lk)then
C                      A(i, i+1)=0.
C                      lk=lk+i
C                  else
C                      A(i, i+1)=1.
C                  end if
C              continue
4          ccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
C          Llenado de la Diagonal Inferior I (B)
C          ccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
C              jk=ii
C              do 5 i=1, ilm-1
C                  if(i.eq.jk)then
C                      jk=jk+i
C                      A(i+1, i)=0.
C                  else ..
C                      A(i+1, i)=1.
C                  end if
5          continue

C          ccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
C          ccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
C          ccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc

          CALL MINVT(A, N, Y)
          CALL MATHU(Y, B, X, N, N, 1)
          ts = 0.0

          ii=nx
          ilm=ii+iii

C          ccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
C          ccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
C          ccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
C          iteraciones en el tiempo. ccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
C          ccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccccc
C          do 71 k=1, ns
C              ts = ts + at
C          print*, 'Etapa de tiempo =', k, ' Tiempo Sim. = ', ts
C              CALL MATHU(Y, B, X, N, N, 1)
C              do 1 ij=1, N
C                  write(6, 99)X(ij)
1          format(20X, 'potencial=', 10F10.5)
99

```

```

open(1, file='dif')
do 988 l=1, ilm
  write(1, *) l, r(1)
  continue
  write(1, *) "\_ \_"

      ii=ns
      iii=ny
      ilm=ii+iii
      iqf=iii
      B(1)=-2*pii+(-alfa*X(1))-fuente
do 333 i=2, ii-1
  B(i)=-pii+(-alfa*X(i))+fuentes
  B(ii)=-2*pii+(-alfa*X(ii))+fuentes;
  iqf=iii
do 777 j=1, iqf
  B(ii+1)=-pii+(-alfa*X(ii+1))+fuentec
do 222 i=ii+2, ii+iqf-1
  B(i)=0. 0+(-alfa*X(i))+fuentec
  B(ii+iqf)=-pii+(-alfa*X(ii+iqf))+fuentec
  ii=ii+iqf'
777 continue
  B(ii+1)=-2*pii+(-alfa*X(ii+1))+fuentec

do 444 i=ii+2, ilm-1
  B(i)=-pii+(-alfa*X(i))+fuentec
  B(ilm)= pii+(-alfa*X(ilm))-qu
  B(7)=0. 0-qp
c continue
71 close(1)
210 stop
END

```

```

c #####
C ##### SUBROUTINAS #####
C #####

```

```

c #####
c ##### subrutina inversa de una matriz: #####
c #####

```

```

SUBROUTINE MINVT(Y, N, X)
  IMPLICIT REAL*8(A-H, O-Z)
  C ESTA SURUTINA CALCULA LA INVERSA DE UNA PATRIZ N POR N
  DIMENSION X(150, 150), Y(150, 150)
  NC=N*2
  DO 10 IT=1, N
    DO 10 JT=1, N
      X(IT, JT)=Y(IT, JT)
    CONTINUE
  DO 40 I=1, N

```

```

DO 40 J=1,N
    JOHN=J+N
    IF(I-J)20,30,20
    X(I,JOHN)=0.0
    GO TO 40
30    X(I,JOHN)=1.0
40    CONTINUE
C
    DO 180 L=1,N
        LM=L
        NST=L+1
        IF(NST-N)50,50,80
50        DO 70 I=NST,N
            IF(ABS(X(LM,L))-ABS(X(I,L)))60,70,70
60        LM=I
70        CONTINUE
80        IF(ABS(X(LM,L))-1.0E-7)90,90,110
C        PRUEBA EL TAMAÑO DEL PIVOTE
90        PRINT*, 'EL PIVOTE ES PEQUEÑO Y NO HAY INVERSA'
            RETURN
110        IF(LM-L)120,140,120
120        DO 130 J=L,NC
            XL=X(L,J)
            X(L,J)=X(LM,J)
130        X(LM,J)=XL
140        XL=X(L,L)
            X(L,L)=1.0
        DO 150 J=NST,NC
            X(L,J)=X(L,J)/XL
150        DO 180 I=1,N
            IF(I-L)160,180,160
160        XL=X(I,L)
        DO 170 J=L,NC
            X(I,J)=X(I,J)-XL*X(L,J)
170        CONTINUE
180        IC=N+1
            DO 190 I=1,N
            DO 190 J=IC,NC
                JX=J-N
                X(I,JX)=X(I,J)
            RETURN
190
    END

```

CCC
 CCCCCCCCCC ESTA SUBROUTINA MULTIPLICA MATRICES CCCCCCCCCC
 CCC

```

SUBROUTINE MATMU(A,B,C,M,N)
IMPLICIT REAL*(A-H,O-Z)
C A=B*C DONDE: A ES M POR N Y B ES N POR K Y C ES N POR K
DIMENSION A(150,150),B(150),C(150),D(150)
DO 20 I=1,M
  X=0.0
DO 10 L=1,N

```

10
20
30

```
X=X+A(I,L)*B(L)
D(I)=X
DO 30 I=1,M
  C(I)=D(I)
RETURN
```

END

APENDICE B
DEFINICIONES.

La operación convolución de dos funciones cualesquiera $f(t)$ y $g(t)$ se define como:

$$f(t)*g(t) = \int_0^t f(t-r) g(r) dr$$

donde r es un parámetro que varía en: $0 \leq r \leq t$.

Definiciones de operaciones:

$$\nabla u * \nabla v = \frac{\partial u}{\partial x_1} * \frac{\partial v}{\partial x_2} + \frac{\partial u}{\partial x_2} * \frac{\partial v}{\partial x_1}$$

$$g * \nabla^2 u = \operatorname{div}(g * \nabla u) - \nabla g * \nabla u$$

$$g * \nabla u * \nabla(\delta u) = \operatorname{div}(g * \nabla u \delta u) - \operatorname{div}(g * \nabla u) * \delta u$$

Teorema de Green:

Sea R una región regular cerrada, limitada por un conjunto de curvas suaves a trozos.

Si $P(x,y)$, $Q(x,y)$, $\partial P/\partial y$, $\partial P/\partial x$, son continuas en R :

$$\int_C P dx + Q dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$