

00382
7
C.J.



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

ESTUDIOS EN MEDIOS GRANULADOS: DINAMICA DE
AVALANCHAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADEMICO DE

DOCTOR EN CIENCIAS (FISICA)

P R E S E N T A

ABRAHAM MEDINA OVANDO

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

MEXICO. D.F.

1992



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

INDICE

1	INTRODUCCION	1
1.1	Motivación	1
1.2	Medios Granulados	2
1.3	Antecedentes	5
1.4	Objetivos del Trabajo	9
2	ESTUDIO EXPERIMENTAL SOBRE LA FORMACION Y EVOLUCION DE AVALANCHAS	11
2.1	Introducción	11
2.2	El Estado del Arte en Estudios Experimentales Sobre Avalanchas	12
2.3	Nuevos Estudios en el Sistema del Cilindro Circular Giratorio	18
	a) Diseño del Experimento	18
	b) Experimentos en Dos Dimensiones	22
	c) Experimentos en Tres Dimensiones	40
2.4	Discusión	46
	a) Sistemas Bidimensionales	46
	b) Sistemas Tridimensionales	49
3	ESTUDIOS TEORICOS SOBRE DINAMICA GRANULAR Y SUS IMPLICACIONES EN LA FORMACION Y EVOLUCION DE AVALANCHAS	51
3.1	Introducción	51
3.2	Predicciones de la Teoría del Continuo en Medios Granulados	55
3.3	Principales Resultados de la Teoría Cinética de Medios Granulados	72
3.4	Modelos de Automatas Celulares	81
3.5	Conclusiones	86
4	CONCLUSIONES GENERALES	88
	BIBLIOGRAFIA	93

CAPITULO 1

INTRODUCCION

1.1 MOTIVACION

La física de medios granulados constituye, en términos de su fundamentación, un problema abierto; las ecuaciones de movimiento con sus relaciones constitutivas y condiciones de frontera aún no se establecen con precisión. Con el fin de construir una teoría completa, algunos modelos experimentales han sido propuestos con anterioridad, más aún, existen modelos muy limitados que explican la estática o la dinámica de un medio granulado para estos experimentos específicos. Dentro del gran espectro de problemas en medios granulados hay uno que debido a su formidable ocurrencia tiene un interés sobresaliente: El problema de las avalanchas.

En efecto, el estudio del origen y evolución de avalanchas es ahora un problema clásico en medios granulados. En el contexto más amplio posible las avalanchas son flujos de material granular (seco o mezclado con fluidos) originados por condiciones de esfuerzo tales que el material fluye parcial o totalmente. En general, la superficie que se "fluidiza" forma pendientes características respecto a la horizontal y tiene un espesor no uniforme. El tamaño de las avalanchas es variable y depende basicamente del tamaño de los granos (polvos, arenas o rocas) y de las propiedades del fluido si los granos estan inmersos en alguno. Ejemplos típicos de avalanchas naturales de diferentes escalas (de magnitud) son los siguientes: al arar los campos agrícolas con tractores se observa que la cantidad de tierra arrastrada mantiene una altura casi constante, pequeñas avalanchas se crean y son las que en realidad permiten que los montones de tierra arrastrados no crezcan indefinidamente. Avalanchas de tamaño intermedio son fáciles de observar en las dunas o en los montones de granos agrícolas almacenados. Avalanchas muy grandes ocurren en las cadenas montañosas debido a la precipitación de la nieve o al

desgajamiento de los cerros bajo intensas lluvias.

El interés por comprender desde el punto de vista físico la formación y evolución de avalanchas es realmente sorprendente y es motivado por sistemas como los mencionados arriba, por su gran ocurrencia en procesos industriales y de ingeniería, y porque en la física actual tiene gran importancia el conocer cómo un sistema formado por elementos discretos (granos) llega a adquirir un comportamiento organizado (propiedades de bulto), complejo (comportamiento como fluido o sólido), y crítico (ocurrencia de avalanchas). Al menos desde Coulomb [1] se han realizado estudios teóricos y experimentales en medios granulados; a la fecha hay un conjunto de resultados que conforman un conocimiento limitado a condiciones experimentales muy específicas e idealizadas. No obstante, veremos en los siguientes capítulos que una teoría general de alcances más amplios se ve aún lejana. Ello motiva un estudio que se centre en aspectos básicos comunes a todo tipo de medio granulado; la forma, la rugosidad y el tamaño de los granos o el contenido de fluido, etc., son propiedades de los medios que siempre pueden ser caracterizadas. Nuestro interés será estudiar cómo estas propiedades afectan la formación y evolución de avalanchas.

1.2 MEDIOS GRANULADOS

La abundancia de los medios granulados se pone de manifiesto en la constitución de los suelos, en la enorme cantidad de arena en las playas y desiertos, en el almacenamiento de granos agrícolas, en la gran variedad de polvos que usamos en la vida diaria como medicinas y alimentos secos, etc.. Sin embargo, las leyes físicas que gobiernan estos medios no han sido formuladas con precisión y aún hoy en día aparecen fenómenos que no entendemos ni siquiera de manera aproximada.

Parece ser que en medios granulados los fenómenos físicos son cualitativamente los mismos independientemente de la escala de magnitud de los sistemas (choques entre granos, flujos No-Newtonianos, empaquetamientos, etc.); por ejemplo, en el caso de avalanchas, éstas ocurren en pequeños montones del orden de

centímetros, o en montañas con dimensiones del orden de kilómetros. Es así poco restrictivo trabajar con materiales granulares ideales. Un medio granulado ideal es un agregado de granos rígidos de igual tamaño, sin cohesión, esto es, donde las fuerzas de corto alcance, salvo las de contacto, son despreciables (los tamaños de grano en experimentos con materiales granulares fluctúan entre 10^{-1} mm y 10^3 mm).

La dinámica de los medios granulados depende críticamente de la microestructura; por ejemplo, la forma de los agregados granulares no sólo se determina por la forma de los granos (las pendientes características cambian para esferas o discos), sino también por el proceso mecánico de distribución de esfuerzos y la geometría del acomodo o empaquetamiento (fracción del volumen ocupado por los granos en un cierto elemento material).

El empaquetamiento de granos de igual tamaño y forma puede generar diferentes arreglos (cristalinos o no cristalinos) con lo cual la densidad local media del agregado y la concentración local (que en sistemas tridimensionales varía del 13 al 74%), cambian [2-4]. Por ello, para un mismo tipo de grano, podemos tener diferentes densidades y concentraciones locales.

Aquí empaquetamiento y concentración son sinónimos (son la medida del volumen ocupado por los granos en un elemento de volumen dado). No obstante, el empaquetamiento puede dar una idea geométrica del acomodo de los granos, p.e., un arreglo cristalino cúbico centrado en las caras de granos esféricos tiene un valor del empaquetamiento $\eta=0.52$ [2]. La densidad de bulto ρ en sistemas ideales es $\rho=\eta\rho_p$ donde ρ_p es la densidad de un grano. Si $\rho_p=1$ (con sus unidades adecuadas de masa sobre volumen), entonces $\eta=\rho$.

La distribución de esfuerzos depende del empaquetamiento mismo y en las situaciones estática o dinámica, esta distribución lleva a diferentes comportamientos macroscópicos; forma del agregado, propiedades de flujo, etc.

En el caso estático los medios granulados soportan esfuerzos cortantes sin deformación hasta ciertos valores críticos, ello parece corresponder al comportamiento de sólidos. En el caso dinámico los medios granulados se fluidizan, i.e., se generan

gradientes de velocidad bajo la aplicación de esfuerzos. Ocurren entonces dos casos límites de comportamiento global, uno el de sólido y otro el de fluido (no necesariamente Newtoniano). Cuando hay cohesión además de las fuerzas de contacto aparecen fuerzas electrostáticas y si las concentraciones son grandes, deformaciones en los granos, que nuevamente afectan la distribución de esfuerzos y las propiedades macroscópicas. Más aún, si los granos están inmersos en un fluido (cuyo flujo a menudo es turbulento), se tiene una situación muchísimo más complicada porque las fuerzas hidrodinámicas afectan el movimiento de los granos.

A este nivel sólo teorías semiempíricas son aplicables dada la complejidad del tratamiento hidrodinámico [5-11]. Combinaciones de las situaciones mencionadas arriba aparecen como las formas más comunes de medios granulados en la naturaleza y en la industria. Sin embargo, por simplicidad experimental, en este trabajo nos centraremos en el estudio de medios secos y monodispersos (ideales).

Los intentos por construir ecuaciones dinámicas para los medios granulados se basan principalmente en tres enfoques distintos; la teoría del medio continuo [2,12-19], la teoría cinética (incluyendo simulaciones del tipo de dinámica molecular) [20-24] y los autómatas celulares [25-27]. Refiriéndonos al caso de fluidos, sabemos que para fluidos Newtonianos la aplicación de los primeros dos enfoques permite deducir ecuaciones formalmente idénticas (ecuaciones de Navier-Stokes). La aplicación rigurosa de los autómatas celulares a fluidos está en discusión en virtud de que un fluido es un medio continuo, es decir, un sistema con un número infinito de grados de libertad, que nunca serán posibles de alcanzar a través de simulaciones de computadora.

Debemos comentar que la naturaleza de los materiales granulares es discreta. Surge entonces la pregunta de si adecuados procesos de promedio, como los del continuo o los de la teoría cinética, mantienen la riqueza y complejidad que se ve al considerar la microestructura. La construcción de cualquier clase de teorías debe ser crítica al considerar este hecho.

En un medio granulado condiciones similares a las que se proponen para deducir las ecuaciones de fluidos Newtonianos son difíciles de cumplir, lo que lleva a una considerable complejidad en la aplicación de cualquiera de los enfoques (teorías cinéticas y del continuo) que hasta ahora no ha sido totalmente superada. Existen varias aproximaciones que son válidas en condiciones de flujo muy restringidas que desde el punto de vista fundamental no constituyen una teoría general. La aplicación de autómatas celulares a medios granulados ha originado interesantes modelos teóricos que aunque no se ajustan a los resultados experimentales han dado un fuerte impulso a las investigaciones sobre avalanchas.

Debido al carácter de este trabajo, que se centra en un punto particular de la dinámica granular (avalanchas), será pertinente, por completéz, revisar brevemente los antecedentes históricos que llevan al estado actual de investigación teórica y experimental en medios granulados.

1.3 ANTECEDENTES

La fascinación sobre el hombre de los medios granulados siempre ha estado presente. Hay referencias en el Corán de la magnificencia de las dunas en los desiertos árabes. Los primeros estudios científicos sobre medios granulados se remontan al siglo XVIII y son debidos a Coulomb [1], quien estudió el origen de la cedencia de los suelos. La cedencia es un concepto básico en la ingeniería civil y es simplemente la condición de esfuerzos crítica para que, un suelo, a una pendiente dada ceda debido a su propio peso. La relación que encontró Coulomb es la misma que obedece un cuerpo sólido con componente normal N , en un plano inclinado justo antes de moverse al vencer la fricción estática, *i.e* ocurre cedencia cuando

$$|\tau| \geq N \tan \phi + C = N \mu + C, \quad (1.1)$$

donde $|\tau|$ es la magnitud del esfuerzo friccional cortante en la dirección tangente al plano (recordemos que el esfuerzo es la fuerza que actúa sobre un cuerpo por unidad de área), ϕ es el

ángulo de fricción interna (que en la teoría de Coulomb es una cantidad constante para cada material), μ es el coeficiente de fricción estática, y C es la cohesión del material. Si $C=0$ se dice que el material no contiene cohesión o es no cohesivo. La ecuación (1.1) se cumple aproximadamente y surge de suponer que una capa de espesor $\delta x = \text{cte.}$, que genera un esfuerzo normal N , se desliza uniformemente.

En la actualidad se sabe que la hipótesis del movimiento de una capa uniforme no es correcta porque el movimiento de la zona de cedencia es mucho más complicado. Debido a los márgenes de error aceptados en ingeniería, la relación (1), aún hoy, se mantiene como una buena y simple aproximación [14, 15] y constituye el primer intento por construir ecuaciones para los medios granulados.

Hagen [28], años después, se interesó por entender el comportamiento del flujo en relojes de arena y fue el primero en observar que en contenedores llenos a una altura suficientemente grande de material granular la presión en el fondo es independiente de la altura. Esto es debido a que los granos en contacto transmiten parte de los esfuerzos a las paredes (fenómeno conocido como arqueo), lo constituye una diferencia cualitativa respecto a fluidos donde la presión en el fondo es una función de la altura

Faraday [29], a principios del siglo XIX encontró que, al agitar una caja con arena (cuya superficie libre inicialmente es horizontal), cambiaba la pendiente de su superficie hasta un ángulo no nulo respecto a la horizontal. Esto constituye una diferencia cualitativa respecto a los fluidos y físicamente significa que el material granular soporta esfuerzos cortantes, sin movimiento, hasta ciertos límites. Mas aún, la inclinación puede ocurrir con igual probabilidad sobre cualquiera de las paredes del contenedor originándose con ésto la pregunta de cuál es el mecanismo que induce el rompimiento de simetría.

El concepto de dilatancia fue definido el siglo pasado por Reynolds [2] como una propiedad que tienen los medios granulados de alterar su volumen de acuerdo con un cambio en el arreglo de

sus granos. Por ejemplo, si tenemos una masa de granos en el arreglo más denso posible (ordered closed packing) y aplicamos una deformación cortante en cualquier lugar, el volumen de la masa aumenta, este fenómeno es puramente geométrico y surge del reacondo interno (separación) de los granos. A nivel dinámico, el desarrollo de los esfuerzos cortantes origina esfuerzos que tienden a expandir el material. Debido a la ocurrencia de dilatación, a pequeños o grandes cortes, los medios granulados también se conocen como materiales dilatantes.

A diferencia de Hagen y Coulomb, que estudiaron las propiedades de bulto de materia granular poco caracterizada, Faraday y Reynolds realizaron sus experimentos con granos esféricos, esto es, caracterizaron una propiedad local del material (la geometría de los granos). El cambio cualitativo en el tratamiento puso de relieve que los factores geométricos son de primera importancia.

La base de nuestro entendimiento actual de la dinámica granular fue establecida a través de los brillantes trabajos de Bagnold [12, 20, 30] realizados a mediados de este siglo. A él se debe la caracterización de tres diferentes regímenes de movimiento; el régimen friccional (dominado por las fuerzas de fricción entre granos), el régimen de inercia de grano o colisional (donde la dinámica es principalmente dominada por colisiones no importando que haya un fluido intersticial) y el régimen macroviscoso (donde la viscosidad del fluido en el que se encuentra el material granular domina el movimiento de los granos). Bagnold [20, 30] también encontró que las propiedades de los medios granulados en movimiento se alejan de aquellas de los fluidos Newtonianos (esto es, el tensor de esfuerzos y el gradiente del campo de velocidades no son proporcionales).

Investigadores de la ingeniería civil [14, 31], de la ingeniería química [15, 32, 33], de la hidrodinámica [9, 34, 35] etc., han invertido un esfuerzo considerable en el estudio de los medios granulados. La finalidad es la formulación de las ecuaciones de movimiento y las relaciones constitutivas con la intención de aplicarlas de modo práctico. Por claridad, recordemos que las relaciones constitutivas son relaciones entre el esfuerzo

y la deformación, p.e., para materiales elásticos se cumple la ley de Hooke $\sigma_x = E \epsilon_x$, donde σ_x es el esfuerzo elástico, ϵ_x es la deformación elástica y E el módulo de elasticidad.

En medios granulados la parte de investigación básica a seguido a partir de Bagnold dos líneas principales de trabajo. La de las teorías microestructurales y las de las teorías de continuo. Las teorías microestructurales consideran la materia granular en sus constituyentes más básicos, los granos. El programa de trabajo a partir de estas consideraciones es similar al de la teoría cinética [21-23] donde se consideran cierto tipo de propiedades y de interacciones de los granos. Ecuaciones de movimiento y relaciones constitutivas se han conseguido para ciertos márgenes de concentraciones y de gradientes de esfuerzos. No obstante, algunas de las hipótesis y conclusiones en estos estudios no son satisfactorias. Revisión y críticas de estos modelos serán presentadas en el capítulo 3.

Las teorías del continuo en medios granulados surgen desde Coulomb y dependiendo de la situación estática [14, 36], o dinámica [15, 19, 34], modelan la materia granular como sólido o como fluido con propiedades reológicas obtenidas del experimento. Exitos parciales de estas teorías aparecen en el caso estático y en dos o tres configuraciones dinámicas muy idealizadas (específicamente en los sistemas de canal inclinado, arcones de almacenamiento i.e., relojes de arena, y cilindros concéntricos) [33, 37, 38]. Conexiones entre el caso estático (dominado por fricción) y el dinámico (dominado por colisiones) son el motivo de los estudios más recientes (teorías cinético-friccionales) [32, 33]. En el capítulo 3 presentamos una discusión de las teorías del continuo, las teorías cinético-friccionales no se discuten porque contienen la misma problemática que las teorías cinéticas, en las cuales se basan.

Recientemente, a partir de los trabajos sobre Criticalidad Auto Organizada de Bak, Tang y Wiesenfeld [25] y de otros autores [27], el tema de los medios granulados ha sido considerado por la comunidad de físicos. Los estudios en Criticalidad Auto Organizada suponen que existe una situación crítica (el ángulo de reposo en

avalanchas, θ_r) bajo la cual un montón de granos, formado por agregación discreta y azarosa de granos, produce avalanchas a ángulos mayores que θ_r , correlacionadas temporal y espacialmente. Correlación temporal es que la ocurrencia de una avalancha depende de las anteriores. En la correlación espacial el movimiento de un grano sobre la superficie libre afecta el movimiento de los otros (correlación de largo alcance). Más aún, un estado críticamente organizado se alcanza cuando ocurren avalanchas de todos los tamaños y tiempos de duración. Más claramente, las distribuciones de tamaños y de tiempos obedecen leyes de potencias lentamente decrecientes.

Se ha probado a partir de estudios experimentales [39, 40] que las avalanchas en medios granulados reales no presentan correlaciones y distribuciones de este tipo. Sin embargo, modelos de Criticalidad Auto Organizada son de utilidad en otras áreas de la física [41] porque introducen autómatas celulares que de otra manera hubieran sido difíciles de justificar. Mayor discusión de autómatas típicos en Criticalidad Auto Organizada y en avalanchas reales será presentada en el capítulo 3.

La discusión previa ilustra que el interés por los medios granulados se ha dado en distintos grados y con diferentes enfoques. Una constante en todos los estudios es el papel que ha jugado la experimentación, cualitativa y cuantitativa, en la formulación o en la crítica de las teorías.

1.4 OBJETIVOS DEL TRABAJO

Nuestro objetivo central en este trabajo será mostrar la dependencia de los ángulos, y de otras cantidades asociadas a éstos, respecto de las propiedades microestructurales del material como la forma, el empaquetamiento, la rugosidad y el tamaño de los granos y del tamaño y dimensionalidad de los contenedores. Estudios que hasta ahora no han sido realizados y que mostraremos son básicos en la formulación de teorías para estos medios.

Después de justificar la necesidad de nuevos estudios en avalanchas, presentaremos un estudio experimental que, a partir de las propiedades de bulto (los ángulos de inclinación de las

pendientes), nos permitira entender cualitativamente el origen y evolución las avalanchas en términos de variaciones en la densidad de bulto (cambio en el arreglo de los granos), y en los mecanismos de disipación de energía (friccionales y colisionales). Entendemos a los ángulos como una propiedad de bulto ya que se requiere de una gran cantidad de granos para hablar de ángulos característicos del montón.

El método que utilizaremos será el del cilindro circular giratorio, descrito más adelante, el cual permite la generación de avalanchas continuas e intermitentes. Los efectos de dimensionalidad, de frontera, y de tamaño finito serán explorados para una clase de sistemas. El estudio experimental y su discusión lo presentamos en el capítulo 2. En el capítulo 3 discutiremos las teorías básicas que en la actualidad describen aproximadamente algunos de los regímenes estáticos o dinámicos de los medios granulados. Mostraremos que las teorías del continuo (teoría de la plasticidad), pueden brindar una adecuada descripción del proceso de origen y evolución de avalanchas. En este capítulo discutimos también, de un modo crítico, las teorías cinéticas y de autómatas celulares y la aplicación de éstas (bajo ciertas aproximaciones) al problema de las avalanchas. Mostramos que dichas teorías no permiten aún encontrar buenos resultados al problema.

CAPITULO 2

ESTUDIO EXPERIMENTAL SOBRE LA FORMACION Y EVOLUCION DE AVALANCHAS

2.1 INTRODUCCION

La formulación precisa de las ecuaciones dinámicas para medios granulados es una meta aún no alcanzada. En el capítulo 1 mencionamos que la dificultad en el tratamiento teórico y experimental puede darse a dos niveles: Uno en el cual la composición misma del material es compleja, por ejemplo, en los llamados flujos de desechos [10] hay una gran dispersión de tamaños y formas de granos que se mezclan con agua y aire de manera no homogénea. Otro nivel de complejidad se presenta cuando el flujo mismo es difícil de caracterizar porque pueden coexistir zonas con regímenes laminares y turbulentos y al mismo tiempo regiones con propiedades reológicas muy diferentes [9, 38]. En este capítulo limitaremos experimentalmente esa complejidad de tal forma que podamos caracterizar plenamente la composición del medio y una vez logrado ésto estudiar la dinámica del flujo.

El fenómeno que nos ocupa en este trabajo es el de entender y explicar, con base en los experimentos, la formación y evolución de avalanchas. La ocurrencia de una avalancha es un fenómeno de bulto y en él están involucrados muchos factores; El empaquetamiento granular, la disipación de energía por colisiones inelásticas y fricción, la distribución de esfuerzos, las propiedades del flujo, etc.. Por medio de la medición de propiedades de bulto investigaremos que influencia tienen algunos de estos factores.

Por claridad, consideremos el caso ideal en el cual tenemos una superficie horizontal sobre la que generamos, bajo la acción de la gravedad, un montón de granos por apilamiento. Observamos que el montón forma ángulos respecto a la horizontal. Estos ángulos son de dos tipos: aquellos bajo los cuales, sí se interrumpe el proceso de apilamiento, no ocurre ningún movimiento del montón, y otros en los que al interrumpir dicho apilamiento ocurre un

deslizamiento de la superficie libre del montón. Más aún, cuando ocurre un deslizamiento, *i. e.*, una avalancha, los ángulos respecto a la horizontal son máximos y al terminar el deslizamiento los ángulos son mínimos. Los valores medios de los ángulos serán llamados ángulos máximo ($\bar{\phi}_m$) y de reposo ($\bar{\theta}_r$), respectivamente.

Como mencionamos anteriormente nuestro interés central será el de mostrar la dependencia de los ángulos respecto del tamaño de los contenedores y a las propiedades del material.

Franklin y Johanson [42] propusieron en 1959 un dispositivo para la generación de un gran número de avalanchas (ver más adelante, Fig. 4). Este es un cilindro circular horizontal que gira a baja velocidad angular, y que está lleno a una cierta porción de su volumen de material granular seco. En el presente capítulo describimos como dicho dispositivo se usa para estudiar experimentalmente los ángulos característicos y otras cantidades asociadas con las avalanchas. En la sección 2.2 discutimos los resultados experimentales hasta ahora conocidos y planteamos la necesidad de nuevos estudios. En la sección 2.3 realizamos nuevos estudios basados en los efectos de frontera, dimensionalidad, y tamaño finito de los contenedores en el sistema del cilindro circular giratorio. Finalmente, en la sección 2.4 discutimos los principales resultados encontrados.

2.2 EL ESTADO DEL ARTE EN ESTUDIOS EXPERIMENTALES SOBRE AVALANCHAS

A nivel experimental la generación de avalanchas en sistemas ideales es muy variada. Historicamente, el primer método de generación de avalanchas que conocemos es el propuesto por Faraday [29]. Su dispositivo consistía en cajas de vidrio con arena que agitaba verticalmente a una cierta frecuencia.

Faraday observó que, dependiendo de la amplitud y de la frecuencia de la oscilación (entre 10 y 100 Hertz), la superficie libre de la arena, que originalmente era horizontal, podía cambiar. Primero, al aumentar la frecuencia (de 0 a 20 Hertz) se generaban montones sostenidos por alguna de las paredes del recipiente, y después, a una frecuencia crítica (ligeramente mayor que 20 Hertz), aparecían montones simétricos en el centro del

contenedor, que eventualmente alcanzaban el ángulo de reposo $\bar{\theta}_r$, (que tiene un valor particular para cada material). Al alcanzar el sistema el ángulo de reposo (con las vibraciones mantenidas) se producían avalanchas. Si las vibraciones no se mantuvieran el ángulo de reposo no permite la generación de avalanchas, son las vibraciones la causa de que aún a θ_r aparezcan avalanchas. En nuestros experimentos este efecto no es explorado.

Faraday y otros autores [43, 44] explicaban este fenómeno cómo una convección ascendente de granos desde el fondo producida por el agitación y por la influencia del aire filtrado durante la agitación. De esta forma ocurriría una corriente de granos, desde el fondo, que generan la avalancha, i.e., la inestabilidad en la superficie libre. Recientemente [45], se ha mostrado por medio de experimentos que el montón central es independiente de la forma del contenedor y que la influencia del aire en la generación de avalanchas aún a altas frecuencias es despreciable. Estos experimentos [45, 46], a diferencia de los resultados previos de Faraday [29], Evesque et al [43], y Laroche et al [44], muestran que ocurre una zona de inestabilidad en la parte superior del montón y otra zona donde, aún a altas frecuencias, el resto del montón se mueve cómo un sólido durante vibraciones, i.e., no hay convección o ésta es intermitente. La inestabilidad se origina (en un material compuesto de canicas de vidrio de diámetro 2.99 mm) a una aceleración de la mesa vibrante de $\Gamma_c = (1.2 \pm 0.05)g$, i.e., ligeramente mayor que la aceleración, g , de la gravedad. La zona de inestabilidad durante vibraciones tiene un grosor uniforme dado por $h_f = IT(\Gamma)$, donde $IT(\Gamma)$ es el "grosor de movimiento" o "grosor de invasión" definido por el grosor de la capa donde hay fluidización a la amplitud $\Gamma > \Gamma_c$. El origen de nuevas avalanchas es propiciado por disparos cuasiperiódicos hacia arriba de material granular en el centro del montón. El mecanismo que limita la amplitud del disparo involucra a la fricción y a los choques entre granos.

La introducción de vibraciones permite hacer una analogía del comportamiento de los medios granulados con el de un gas, es decir, es posible tratar el problema del movimiento de un material

granular a partir de la teoría cinética. A juicio de algunos investigadores [16-18, 21-24] lleva a la aparición de una temperatura efectiva o temperatura granular. En efecto, en la teoría cinética la temperatura de un gas clásico está relacionada con las fluctuaciones en la velocidad respecto a la velocidad de la corriente media u . Así, $T = \frac{1}{3}m\langle C^2 \rangle$, donde T es la temperatura, $C = c - u$ es la velocidad peculiar, es decir, la velocidad relativa de una partícula respecto al flujo macroscópico, c es la velocidad de las partículas de masa m respecto a un sistema de referencia, y u es la velocidad media de bulto. De acuerdo a los experimentos de Evesque et al [45] esta temperatura es nula en la parte que se mantiene sólida en los sistemas con vibraciones verticales. De esta forma la introducción de teorías cinéticas para describir la parte no fluidizada no aporta nada nuevo y simplemente da un criterio para formalmente fijar la temperatura granular, en la parte con movimiento de sólido, como cero.

Hay otros experimentos, pero ahora en mesas con vibraciones horizontales, en los cuales se producen avalanchas sobre montones de granos. De esta forma Goodman et al [47], construyeron un dispositivo para ver cómo un montón de arena (Monterrey Sand), justo a su ángulo de reposo, responde a estas vibraciones. Goodman et al encontraron que el desplazamiento, x , medido respecto a la base inferior del montón, sigue la ley, $x_f = x_1/f^2$, donde x_1 es el desplazamiento para una frecuencia de un ciclo por segundo y, x_f es el desplazamiento a una frecuencia f , mayor que un hertz. Una revisión crítica de este resultado, similar al hecho por Evesque et al [45] con vibraciones verticales, no ha sido realizada.

Mencionamos en la sección 1.3 que uno de los enfoques teóricos más atrayentes es el de la Criticalidad Auto Organizada (CAO) [25]. Físicamente, la CAO establece que existe un estado crítico (ángulo de reposo en el caso de avalanchas) a partir del cual ocurren eventos de todos los tamaños (un evento en este caso es la ocurrencia de una avalancha). A diferencia de un fenómeno crítico de segundo orden en el cual la longitud de correlación espacial se hace infinita y ocurre a un valor experimental bien caracterizado (el punto crítico) en CAO existe en punto crítico a partir del

cual eventos de todos los tamaños pueden ocurrir a distintas escalas de tiempo. En la teoría de fenómenos críticos el tiempo no aparece, por lo que, como veremos enseguida, la analogía puede esconder la riqueza de la dinámica.

En CAO la ocurrencia de eventos en todas las escalas de tiempo implica que éstas están correlacionadas temporalmente y que el punto crítico es un atractor, en el espacio fase, para el sistema dinámico. El sistema dinámico para avalanchas con CAO tiene la peculiaridad de que los eventos son supercríticos ya que estos pueden ocurrir a valores mayores o iguales al ángulo de reposo; el fenómeno crítico no se observa igual arriba del punto crítico ($\theta > \theta_r$) que abajo de él ($\theta < \theta_r$). En el caso de avalanchas el atractor sería el ángulo de reposo θ_r , en la medida de que a partir de él la ocurrencia de avalanchas de todos los tamaños, en todos los tiempos de duración de avalanchas y entre avalanchas, es posible. Modelos de autómatas celulares con CAO [25-27] llevan a que la distribución de tamaños (F) y de tiempos (T) de avalanchas obedecen, en varias décadas, leyes de potencias de la forma F^{-a} y T^{-b} (con a y $b > 0$).

El comportamiento de estas distribuciones lleva a que el número de eventos (tamaños y tiempos de avalanchas) es muy grande cerca de θ_r y a medida que se aleja uno, en varias décadas, de θ_r , el número de eventos disminuye siguiendo una ley de potencias. Puede mostrarse [25] que cuando las distribuciones de eventos son leyes de potencias, sus espectros de potencia (que de acuerdo el teorema de Wiener-Khintchine son la transformada inversa de Fourier de la función de correlación) obedecen también una ley de potencias en la frecuencia f , del tipo $f^{-\alpha}$, con $\alpha > 0$.

Jaeger et al [40] realizaron experimentos de avalanchas en cilindros circulares cerrados (llenos hasta la mitad de su volumen de material granular seco) que rotaban a baja velocidad angular y en sistemas abiertos que bajo avalanchas vaciaban sus granos en capacitores capaces de detectar hasta un grano. El material granular consistía de grupos monodispersos de canicas de vidrio de diámetros entre 0.07mm y 0.54mm. La distribución de tiempos entre avalanchas Δt , y de tiempos de duración de avalanchas $\Delta \tau$, para

cilindros con razón de aspecto (ancho/largo) desde 1/3 a 3 y velocidad angular $\Omega=1.3^\circ/\text{minuto}$, son mostradas en las figuras 1(a) y 1(b). Las distribuciones de los tiempos característicos muestran claramente que las distribuciones esperadas de los modelos de CAO no ocurren. La distribución de "tamaños" de avalanchas se obtiene de mediciones del cambio en la capacitancia; la serie de tiempo para un experimento típico es mostrada en la figura 2. Nótese que avalanchas de unos pocos granos son también detectadas ya que el cambio en la capacitancia es proporcional a la cantidad de granos que caen al capacitor.

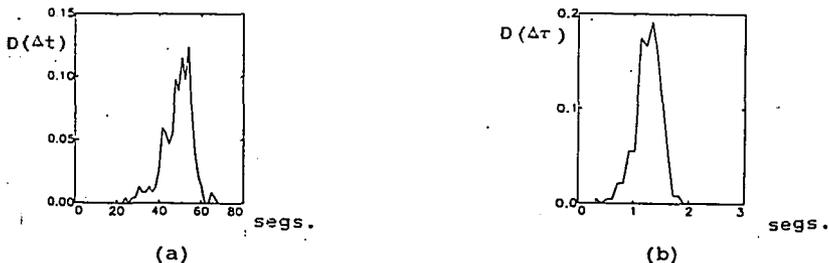


Fig. 1. (a) Distribución de tiempos entre avalanchas, $D(\Delta t)$, y de duración de avalanchas, $D(\Delta \tau)$, para un sistema de canicas de vidrio de 0.54mm, con $\Omega=1.3^\circ/\text{minuto}$ [40].

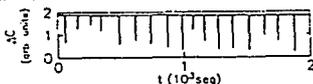


Fig. 2. Serie de tiempo para el cambio en la capacitancia en un semicilindro con $\Omega=1.3^\circ/\text{minuto}$ y canicas de vidrio de 0.54mm [40].

El espectro de potencias, $S(f)$, para la serie de la figura 2 se muestra en la figura 3 (en escala log-log). El primer pico de derecha a izquierda en el espectro está asociado con la frecuencia $1/\overline{\Delta t}$ ($\overline{\Delta t}$ es el tiempo medio entre avalanchas). El ancho en el pico para $f=1/\overline{\Delta t}$ esta asociado con la dispersión en los valores de Δt .

La caída de la curva a partir de la frecuencia $1/\overline{\Delta t}$ y mayores (donde $\overline{\Delta t}$ es el tiempo medio de duración de avalanchas) está asociada con la dispersión de los valores individuales de estos tiempos.

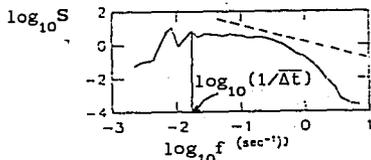


Fig. 3. Espectro de potencia para la serie de la figura 2 (curva sólida). $1/\overline{\Delta t}$ es la frecuencia asociada con el valor medio del tiempo entre avalanchas. Como referencia la línea punteada es el espectro $1/f$ [40].

La aparición de un ancho en el pico $1/\overline{\Delta t}$ indica desde el punto de vista experimental la cuasiperiodicidad para los eventos Δt (tiempos entre avalanchas), que será discutida en la sección siguiente en relación con nuestros experimentos. El espectro de potencias esperado por la CAO se muestra como referencia. La conclusión experimental es que la descripción de avalanchas y sus consecuencias a partir de la teoría de CAO no es correcta, por lo menos para estos experimentos.

Recientemente Held *et al* [48], construyeron un dispositivo para mostrar que pequeñas avalanchas presentan CAO. Su dispositivo experimental consistió de una placa circular horizontal de 4cm de diámetro sostenida por una balanza capaz de detectar pesos de 0.0001 gramos. Granos de arena con pesos promedios de 0.0006 gramos fueron depositados individual y azarosamente desde una recipiente que se encuentra a una altura constante. Avalanchas hasta de un grano fueron detectadas.

Los resultados de la medición de un gran número de eventos parecen indicar que ocurren avalanchas de todos los tamaños y tiempos, compatibles con el tamaño del sistema. Sin embargo, los

mismos autores realizaron el experimento en una placa circular de 8cm de diámetro y la distribución de eventos fué muy similar a la mostrada en la figura 2, con lo cual se origina la pregunta de cuál es el efecto del tamaño finito de los contenedores sobre las distribuciones de eventos. La pregunta ha merecido al menos dos respuestas: Una, conectada con el experimento anterior, es debida a Liu et al [49], que argumenta que hay una longitud característica L de la superficie libre del montón granular ($L \leq 30d$, con d el diámetro de grano), abajo de la cual el tamaño finito de los granos no permite distinguir entre el ángulo de reposo y cualquier otro ángulo en el que se originan las avalanchas. Esta respuesta sólo es válida en contenedores abiertos como los del experimento de Held et al [48]. Otra respuesta la proponemos en este trabajo y es, como veremos en la siguiente sección, que en contenedores cerrados, a medida que el sistema disminuye su tamaño (relativo a los granos) la diferencia entre los ángulos medios $\bar{\theta}_r$ y $\bar{\phi}_m$ aumenta. Esto permite inferir que las condiciones de esfuerzos en contenedores abiertos o cerrados introducen de diferente manera los efectos de tamaño finito. En la discusión de la sección 2.4 trataremos nuevamente este punto.

Otros grupos experimentales [39, 40] han probado que para avalanchas grandes ($L > 30d$) no ocurre CAO, sin embargo la pregunta de cuál es el efecto del tamaño finito de los contenedores cerrados sobre los ángulos permanece aún poco explorada, en la sección siguiente discutimos mediante experimentos ésta y otras preguntas.

Los resultados experimentales anteriormente descritos muestran claramente que los medios granulados, y en particular, el problema de las avalanchas presentan peculiaridades que dificultan la formulación precisa de teorías. Nuevos experimentos, presentados en este trabajo, permitirán justificar el uso de teorías plásticas para modelar el régimen de avalanchas.

2.3 NUEVOS ESTUDIOS EN EL SISTEMA DEL CILINDRO CIRCULAR GIRATORIO

a) Diseño del Experimento

En apariencia los ángulos característicos de avalanchas no

deben de depender del tamaño de los granos (recordemos el ejemplo dado al inicio de la sección anterior en el cual construíamos montones de granos, bajo la acción de la gravedad, sobre una superficie horizontal infinita). No obstante, experimentalmente los montones de granos están confinados en recipientes de tamaño finito. Aparece entonces una relación de la forma (tamaño de contenedor)/(tamaño de grano) que, como veremos en este trabajo es fundamental en la manera en la que se distribuyen los granos y en el origen y evolución dinámica de las avalanchas. Podemos entonces plantearnos las siguientes preguntas:

- I. ¿Cómo afecta la relación [tamaño de contenedor/tamaño de grano] los ángulos mismos i.e. la distribución de esfuerzos?
- II. ¿En promedio los ángulos característicos dependen de la forma y tamaño de los granos?.
- III. ¿Dependen los ángulos de la dimensionalidad de los contenedores, esto es, si los montones estan confinados a 2 o 3 dimensiones?.
- IV. ¿La rugosidad es un factor esencial?.
- V. ¿Cuál es la zona de movimiento en las avalanchas?.
- VI. ¿Existe alguna correlación entre avalanchas?.

Cualquier teoría completa de medios granulados debe incluir estos factores.

En la investigación sobre medios granulados es crítico el contar con experimentos que respalden u orienten las teorías propuestas. Para dar respuesta a las preguntas arriba planteadas desarrollamos un conjunto de experimentos en el sistema del cilindro circular giratorio [42].

El dispositivo experimental, como se ilustra en la figura 4, consiste de un cilindro circular horizontal de diámetro D y longitud L . El cilindro es girado a velocidades angulares constantes muy bajas Ω , entre 0.03 y 3rpm, y es llenado exactamente a la mitad de su volumen de material granular bien caracterizado. En nuestro caso trabajamos con dos grupos de cilindros circulares de acrílico.

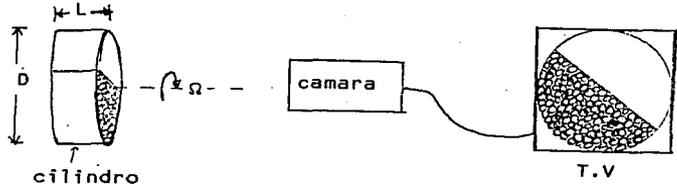


Fig. 4. Dispositivo Experimental: Cilindro circular con eje horizontal. En el grupo A (ver texto), D es fijo y L variable. En el grupo B, D es variable y L es fijo.

El grupo A (que llamaremos sistemas tridimensionales) consiste de cilindros de diámetro $D=14.6\text{cm}$, con paredes lisas, a los cuales se les varió la longitud desde 0.7cm hasta 16cm .

En el grupo B los cilindros son de diámetro variable, paredes rugosas (formadas de granos similares al del material granular) y tienen longitud L , que es ligeramente mayor que el diámetro d de los granos. Así, el movimiento de los granos se realiza entre dos placas circulares verticales. Los diámetros de estos cilindros se variaron entre 14.6cm y 48cm . Para todos los sistemas del grupo B, que llamaremos bidimensionales, $L=d+0.6\text{mm}$.

Conviene aclarar, con el fin de evitar confusión, que los granos en los sistemas bidimensionales realizan su movimiento, durante avalanchas, sobre un plano y en ese sentido entendemos los sistemas bidimensionales. En los sistemas tridimensionales los granos se mueven a lo largo, ancho, y alto (respecto a la pendiente crítica) y en este sentido entendemos los sistemas tridimensionales.

El material granular consistió de varios grupos de canicas de vidrio de diámetros constantes, lisas al tacto o ligeramente rugosas, con tamaños desde 3.18mm a 6.28mm (con dispersión relativa de 0.01%), fichas circulares de plástico de 2.3cm de diámetro por 2.2mm de espesor y de 2.88cm de diámetro por 2.7mm de espesor (con igual porcentaje de dispersión que la canicas) y arena redondeada de Ottawa con dispersión de tamaños medios en el

interválo de 0.54mm a 0.84mm. Experimentalmente podemos caracterizar dos tipos de densidades; aquella llamada densidad de bulto, que es la densidad media de los granos y el medio en el que estan contenidas (aire, agua, lodo, etc.) y la densidad de cada grano, que en este trabajo denominaremos genéricamente como densidad de grano. La densidad de las canicas es de 2.45gr/cm^3 , la de las fichas de 1.05gr/cm^3 y la de la arena de 2.58gr/cm^3 . La elección de canicas y fichas fué hecha para evitar dos de las principales dificultades cuando se caracteriza al material granular: las definiciones de forma y tamaño [50-53].

La dificultad al caracterizar el tamaño de un grano muy irregular estriba en el hecho de que pueden haber una longitud máxima, una mínima y un promedio o combinación de ambas que no han sido universalmente aceptadas en la literatura [51, 52]. Más dificultades surgen en las definiciones cuantitativas de la forma, donde una gran cantidad de parámetros existen para caracterizarla. No obstante, la gran mayoría de los autores toman a la esfera o al disco como patrones de referencia [51, 53]. La arena de Ottawa, que la usamos aquí para comparación, fué tamizada dentro del interválo mencionado y muestreada para obtener la distribución de tamaños.

Durante la realización de los experimentos se tuvo especial cuidado de eliminar la grasa de las paredes de los cilindros y en mantener las arenas secas para evitar cohesión. Las velocidades angulares que se manejaron fueron de 0.06rpm, 0.07rpm, 0.08rpm, 0.1rpm, 1 rpm y 2rpm. Al limitar el espectro de velocidades se ganó precisión en éstas; todas las velocidades tienen alrededor de 0.01% de error. Con algunos cilindros trabajamos a velocidades angulares muy bajas (menores que 0.1rpm) con la finalidad de evitar efectos inerciales sobre los granos (y sobre los ángulos de avalancha) en los sistemas de diámetro muy grande. Así, los valores de los ángulos y de los tiempos de avalanchas en los sistemas lentos dependen poco del giro de los cilindros.

El lento giro produjo avalanchas que se filmaron con una cámara CCD SONY a una velocidad de obturación de 1/60 de segundo. La reproducción de la película en nuestra cámara es de 30 cuadros por

segundo. La filmación de las avalanchas se realizó después de poner a girar los cilindros al menos 10 minutos. Esto tiene como objeto eliminar cualquier posible dependencia en las condiciones iniciales y eliminar la posible estructuración que puede ocurrir aún en pequeñas muestras monodispersas en los sistemas bidimensionales [54].

El lento giro de los cilindros, a una velocidad angular constante dada, tiene la finalidad de cargar los sistemas a razón $d\theta/dt = \Omega = \text{constante}$ y mantener pequeña la velocidad tangencial de los granos ($v = \Omega r$) con el objeto de no introducir efectos inerciales. Ello significa también que el esfuerzo tangencial sobre la superficie del montón aumenta y el esfuerzo normal disminuye generándose una situación crítica de esfuerzos que origina el movimiento de la superficie libre (condición de cedencia)

b) Experimentos en Dos Dimensiones

Conviene recordar que estamos interesados en caracterizar los ángulos y los tiempos (de duración y entre) avalanchas. Mostraremos que cuando los efectos de tamaño finito son importantes estas cantidades dependen de la microestructura del material granular (tamaño y rugosidad de los granos). Por claridad debemos hacer ver los siguientes hechos: en todos los experimentos en cilindros pueden caracterizarse dos parámetros, uno relacionado con el contenedor, que se conoce como la razón de aspecto Γ , definido por $\Gamma = \text{ancho/largo}$ (en el caso de cilindros $\Gamma = D/L$) y otro que da una medida del tamaño de los contenedores en términos de diámetros de grano, D/d (un tercer parámetro que depende de Γ y de D/d es la cantidad L/d).

Para los sistemas bidimensionales, descritos en la sección anterior y llenados hasta la mitad, las dimensiones del contenedor pueden ser expresadas a través del cociente $s = D/d$, que es también una medida de cuántos granos caben a lo largo del diámetro de un cilindro dado. En los sistemas tridimensionales s es constante porque nuestros experimentos fueron hechos en cilindros con $D = 14.3 \text{ cm}$ y con granos rugosos de diámetro $d = 3.18 \text{ mm}$, en este caso

definimos otro parámetro que es $l=L/d$, que mide cuántos granos caben a lo largo de los cilindros.

En la medición de los ángulos y de los tiempos característicos de avalanchas seguimos dos criterios: El primero consiste en que avalanchas de muy pocos granos (menos de cuatro) fueron despreciadas (debido a la dificultad de su observación, porque son eventos muy poco frecuentes y porque no dan cambios significativos en los ángulos). El segundo criterio consiste en que el inicio y terminación de avalanchas se determina de manera visual cuando el primer grano se mueve (inicio) y cuando el último deja de hacerlo (término). Los tiempos de inicio y terminación están determinados hasta $1/60$ de segundo, que es la resolución de la cámara. La resolución en la medición de los ángulos es de $1/2^\circ$. La figura 5 ilustra las cantidades medidas, i.e., el ángulo de reposo θ_r , que es el ángulo al que relaja el sistema después de una avalancha, el ángulo ϕ_m , que es el ángulo al que se dispara la avalancha, la velocidad angular Ω , el tiempo entre avalanchas, Δt , y el tiempo de duración de avalanchas, $\Delta \tau$.

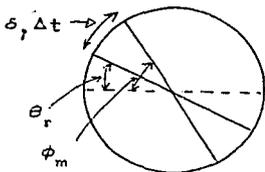


Fig. 5. Angulos y tiempos característicos de avalanchas. $\Delta \tau$ es el tiempo de relajación de una avalancha al pasar de ϕ_m a θ_r .

En un experimento, en donde los diámetros de canica y de cilindro son constantes y la velocidad angular es fija, generamos un gran número de avalanchas individuales (del orden de 100). Cada valor medio $\bar{\theta}_r$ y $\bar{\phi}_m$ de los ángulos y $\overline{\Delta t}$ y $\overline{\Delta \tau}$ de los tiempos lo conseguimos con alrededor de 100 mediciones individuales de θ_r , ϕ_m , Δt y $\Delta \tau$.

En los sistemas bidimensionales trabajamos con varios grupos monodispersos de canicas con diámetros de 3.18mm, 5.15mm y 6.28mm, por lo cual la l de estos sistemas varía entre 1.09 y 1.18, que para propósitos experimentales es constante y no es tomada en cuenta en el análisis de los resultados. De igual forma la razón de aspecto, Γ , toma valores entre 20 y 50 que son mayores en un orden de magnitud comparados con los valores de Γ en los experimentos de Jaeger et al [40].

La medición de los ángulos y de los tiempos para cada avalancha da la posibilidad de encontrar distribuciones de ángulos y tiempos. La distribución de ángulos para cualquier experimento típico bi o tridimensional es mostrada en la figura 6. Distribuciones de los ángulos no se encuentran en la literatura. Estas resultan de nuestro método experimental.

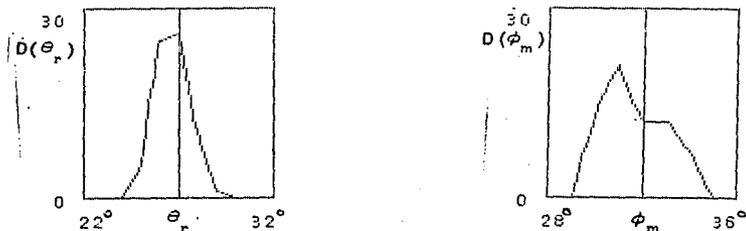


Fig. 6. Distribución típica de los ángulos θ_r y ϕ_m para experimentos en dos o tres dimensiones (las figuras corresponden en este caso a un sistema tridimensional con $l=6$ y $\Omega=0.1\text{rpm}$).

Experimentos de Evesque et al [39] y de Jaeger et al [40] mostraron que las avalanchas en cilindros rotantes presentan cuasiperiodicidad, es decir, Δt , el tiempo entre avalanchas, y Δt_c , el tiempo de duración de avalanchas, no son constantes sino que varían alrededor de un valor medio. En nuestros experimentos los mismos resultados de cuasiperiodicidad son reproducidos.

Durante la generación y evolución de avalanchas intervienen muchos factores (reacomodo de granos y disipación de energía

durante el movimiento) que complican la dinámica. Desde un punto de vista simple (*i.e.* prescindiendo de tal complicación) la generación y evolución de avalanchas en un experimento a velocidad angular constante se vería como el ilustrado en la figura 7.

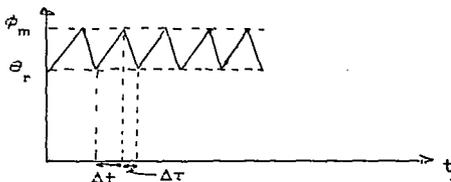


Fig. 7. Modelo simple de la formación y evolución de avalanchas en el sistema del cilindro que rota a velocidad angular constante.

En la figura 7 el paso de θ_r a ϕ_m se realiza en un cierto tiempo Δt y relaja en otro tiempo $\Delta \tau$. El incremento lineal entre θ_r y ϕ_m es debido a que el aumento del ángulo respecto al tiempo es constante en los cilindros rotantes. Esto es fácil de justificar si tomamos en cuenta que los cilindros están llenos hasta la mitad y que $d\theta/dt$ da el cambio del ángulo en el tiempo, que es constante y es la velocidad angular. La evolución de θ (el ángulo entre θ_r y ϕ_m) al pasar de ϕ_m a θ_r no necesariamente es lineal (no lo podemos medir en los experimentos), pero puede ser supuesto lineal si tomamos en cuenta que $\Delta \tau$ es pequeño respecto a Δt .

Para el cálculo de los espectros de potencia (que proporcionan información sobre la existencia de períodos y frecuencias características) es preciso contar con valores de los ángulos a intervalos de tiempo constantes. En los experimentos reales los ángulos varían alrededor de un valor medio (fig.6), también ocurre cuasiperiodicidad con lo cual las series de tiempo no son tan uniformes como las de la figura 7. Resulta entonces necesario hacer una interpolación para calcular los valores de los ángulos. Realizamos una interpolación lineal y elegimos como período fundamental $\overline{\Delta t}$, un resultado típico de una serie de tiempo con esta interpolación es el mostrado en la figura 8. Experimentos con

otros valores de s o de Ω o con sistemas tridimensionales proporcionan series similares.

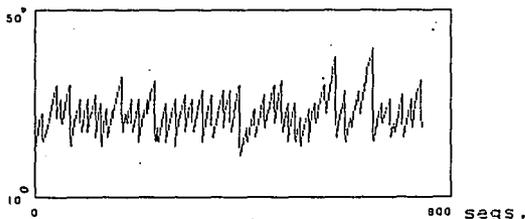


Fig. 8. Evolución experimental de los ángulos como función del tiempo para un experimento típico de avalanchas (en este caso $\Omega=0.1\text{rpm}$ y $s=84.8$).

A partir de la aproximación experimental antes descrita (interpolación) calculamos los espectros de potencia.

El espectro de potencia S , de la serie de tiempo $\{\alpha(t)\}$ (donde $t=0, \dots, N-1$, son los tiempos unitarios y α el ángulo θ), se define [55] como la norma de la transformada de Fourier de dicha serie:

$$F(f) = \sum_{t=0}^{N-1} \alpha(t) \exp[-2\pi i f t / N], \quad (2.1)$$

donde $n=0, \dots, N-1$. En el cálculo de $F(f)$ usamos como tiempo unitario el valor medio de $\overline{\Delta t}$. El espectro de potencia $S=|F(f)|$ es una función real de f . Debe observarse que en nuestros experimentos los valores que resultan de la interpolación lineal son en realidad las derivadas $d\theta/dt$, por lo que los espectros de potencia para los ángulos se obtienen al multiplicar por $1/(\overline{\Delta t})$ los espectros para las derivadas. Los espectros de potencia encontrados tienen la forma del espectro de la figura 9 que no muestra una diferencia importante entre los casos bi o tridimensionales.

Nuestros espectros de potencia para los ángulos no muestran una diferencia cualitativa respecto a los espectros encontrados por

otros autores [40] (fig.3), pero sí respecto a Criticalidad Auto Organizada (CAO). La frecuencia $1/(\overline{\Delta\tau})$ se manifiesta en el primer pico, de derecha a izquierda, del espectro; el ancho de este pico

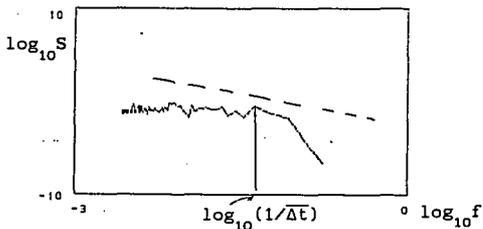


Fig. 9. Espectro de Potencia para una serie de tiempo típica bi o tridimensional (en este caso $\Omega=0.1\text{rpm}$, $s=70$, $\overline{\Delta\tau}=12.6$ y $\log[1/\overline{\Delta\tau}]=-1.1$). Como referencia se ilustra el espectro $1/f$ de la CAO.

muestra la dispersión en los datos (cuasiperiodicidad). La caída del espectro para valores mayores que $1/(\overline{\Delta\tau})$ implica la mayor dispersión asociada con $\Delta\tau$.

El espectro $1/f$ no se manifiesta para nuestros sistemas, como podría esperarse de los argumentos de Liu et al [49]. Su argumento básico consiste en suponer que para sistemas muy pequeños ($L \leq 30d$, donde L es el diámetro de los cilindros y d el diámetro de grano) la diferencia entre θ_r y ϕ_m es pequeña y da origen a valores de los ángulos casi indistinguibles entre sí que siguen distribuciones aproximadas por leyes de potencias. En nuestros experimentos, como veremos adelante, estas diferencias no son pequeñas y no siguen leyes de potencias, como se ve de las distribuciones de la figura 6.

En los experimentos en dos dimensiones exploramos varios efectos. Primeramente estudiamos el efecto de cargar los sistemas, a velocidad angular constante $d\theta/dt = \Omega = 0.1\text{rpm}$, como en el modelo de la figura 7. Esto fué hecho para diferentes tamaños de contenedor y de granos de manera que s fuera creciendo, asimismo la longitud de los cilindros $l=L/d$ se mantuvo constante. El cambio en s fué

hecho por dos vías alternativas. s puede crecer al aumentar D , el diámetro de los contenedores (con d fijo), o disminuyendo el diámetro d de las canicas o discos (con D fijo). Realizamos experimentos en esta dirección y medimos los ángulos y los tiempos de avalanchas para valores de s desde 20 hasta 151 diámetros de grano ($d=3.18\text{mm}$). La figura 10 (pagina siguiente) muestra los valores de los ángulos medios $\bar{\phi}_m$, $\bar{\theta}_r$ y de δ , la diferencia de ángulos, como función de s y $\Omega (=0.1\text{rpm}=0.6^\circ/\text{seg})$. Cada valor medio es el resultado de promediar ángulos y tiempos en alrededor de 100 avalanchas individuales con s y Ω fijos.

La figura 10 contiene varios hechos interesantes; el ángulo de fricción interna ϕ es el ángulo, para cada valor de s , a partir del cual avalanchas pueden ocurrir. Este valor se calcula de la diferencia del ángulo $\bar{\phi}_m$ y la desviación estandar σ (en la función de distribución de ϕ_m los valores experimentales en un intervalo de ancho 2σ , respecto al valor medio, son los más significativos

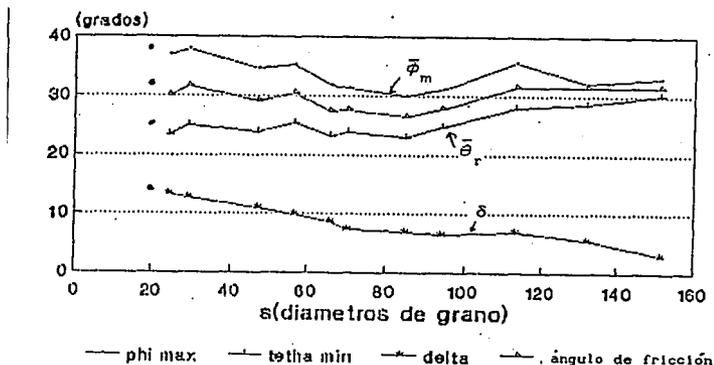


Fig. 10. Ángulos característicos como función de s en sistemas bidimensionales con $\Omega=0.1\text{rpm}=0.6^\circ/\text{seg}$. La figura con triángulos corresponde al ángulo de fricción interna (ϕ), i.e., el ángulo (como función de s) a partir del cual avalanchas pueden ocurrir. δ es la diferencia de ángulos medios $\bar{\phi}_m - \bar{\theta}_r$.

en el cálculo de los valores medios). Desde el punto de vista experimental la cantidad $\bar{\phi}_m - \sigma$ es entonces el valor experimental más pequeño de los ángulos ϕ_m . La aparición de este ángulo es el resultado de que los valores individuales de ϕ_m no son constantes en un sistema con Ω , s y l constantes.

Experimentalmente encontramos que, para los sistemas bidimensionales, $\sigma = \delta/2$ para todos los valores de s . Este resultado tiene un significado muy importante respecto a la dinámica de los sistemas bidimensionales que discutiremos en la sección 2.4.

De la figura 10 observamos también que $\bar{\phi}_m$ y $\bar{\theta}_r$ son funciones oscilatorias de s . La cantidad δ , que es la diferencia de ángulos medios $\bar{\phi}_m - \bar{\theta}_r$, no oscila y decrece su valor asintóticamente a cero para valores grandes de s , lo que implicaría que a medida que crece s , con $\Omega = \text{cte.}$ el sistema tiende a fluidizarse. La exploración de este hecho para valores más grandes que $s=151$ diámetros de grano no fué posible por limitaciones experimentales.

Debemos observar que las oscilaciones de los ángulos medios como función de s no son fluctuaciones porque son resultados completamente reproducibles.

Las curvas de la figura 10 presentan la peculiaridad de que cualquier valor de los ángulos obedece un escalamiento. Este escalamiento se entiende de la siguiente manera: los valores de los ángulos medios, de la diferencia de ángulos medios, y de los tiempos medios (que se muestran en la figura 11) no cambian cuando algún valor de s es alcanzado variando d o D , es decir, ocurre un escalamiento geométrico y dinámico para estos sistemas.

A manera de ejemplo, el punto a la extrema izquierda, que no está unido por curvas, corresponde a $s=20.86$, $\Omega=0.1\text{rpm}$ y se consiguió para fichas de plástico con diámetro $d=2.3\text{cm}$ y diámetro de cilindro $D=48\text{cm}$ o con fichas de diámetro $d=2.88\text{cm}$ y diámetro de cilindro $D=60\text{cm}$; lo mismo ocurre para cualquier punto de las curvas que corresponden a canicas de vidrio rugosas. Este escalamiento puede verse también como un efecto dimensional: los discos, moviéndose en un plano, y las esferas, con un grado de libertad rotacional adicional al de los discos, se comportan de igual forma en términos del escalamiento, esto es, la gravedad no

es un factor esencial en estos sistemas.

Dentro de la discusión experimental conviene mencionar que al crecer s se observan cambios en los arreglos de granos en el seno del material, esto es, cambios en el empaquetamiento, lo que se refleja en la variación de los ángulos medios como función de s . Mayor discusión de las oscilaciones será presentada en la sección 2.4.

Pasamos ahora a discutir la cuestión de los tiempos. Mencionamos al inicio de esta sección que las avalanchas individuales se presentan a un tiempo entre avalanchas Δt (tiempo entre el fin de una avalancha y el inicio de otra) y tienen una duración $\Delta \tau$ (tiempo entre el movimiento del primer grano y el último en una avalancha). La figura 11 muestra la dependencia de los tiempos medios $\overline{\Delta t}$ y $\overline{\Delta \tau}$ como función de s .

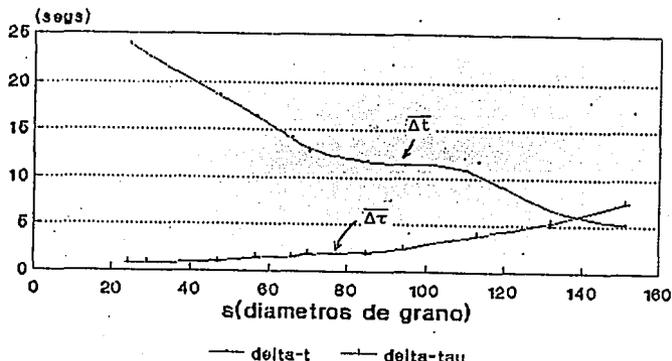


Fig. 11. Tiempos característicos de evolución de avalanchas en sistemas bidimensionales como función de s . $\Omega=0.6^\circ/\text{seg}$.

Los tiempos medios $\overline{\Delta t}$ y $\overline{\Delta \tau}$ son también funciones de s . En la figura 11 notamos que a medida que se incrementa el tamaño de los cilindros, respecto al tamaño de las canicas, el tiempo medio entre avalanchas $\overline{\Delta t}$ disminuye de manera monótona decreciente mientras el tiempo de duración de avalanchas $\overline{\Delta \tau}$ crece

uniformemente. Los tiempos característicos están asociados probablemente con la estabilidad de las pendientes de granos ya que a medida que s crece la longitud de las pendientes es mayor y por tanto mayor la probabilidad de que halla más granos en una situación inestable, i.e., susceptibles de moverse y disparar la avalancha. El que halla más granos en situación inestable para s grandes también explica que la duración de las avalanchas sea mayor.

En la figura 12 mostramos la evolución de los cocientes $\delta/\Delta\bar{t}$ y $\delta/\Delta\bar{\tau}$ como función de s .

La cantidad $\delta/\Delta\bar{t}$ es la variación en el tiempo del ángulo θ desde $\bar{\theta}_r$ a $\bar{\theta}_m$ y coincide con el valor de Ω . Constituye también una medida de los errores introducidos durante el proceso de medición de los ángulos y de los tiempos entre avalanchas. En los experimentos, el máximo error relativo respecto a Ω es del 2%. La cantidad $\delta/\Delta\bar{\tau}$ es una medida del flujo de granos durante avalanchas, la curva de la figura 12 muestra que este flujo disminuye al aumentar el tamaño de los cilindros.

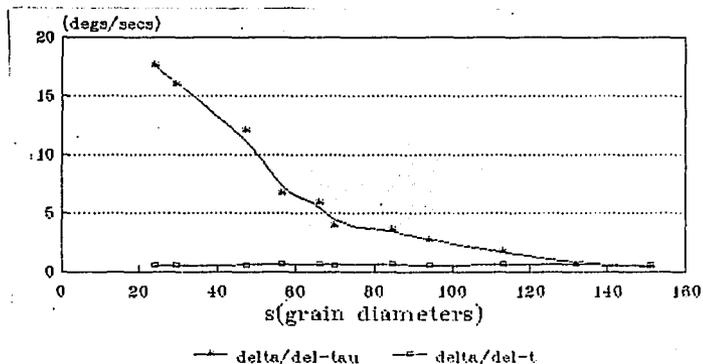


Fig. 12. Cocientes característicos $\delta/\Delta\bar{t}$ y $\delta/\Delta\bar{\tau}$ como funciones de s en sistemas bidimensionales, $\Omega=0.1\text{rpm}$.

El área efectiva movilizadada durante avalanchas intermitentes

(esto es, cuando δ no es cero), es mostrada en la figura 13. En estas avalanchas el área de la zona I se traslada a la zona II. Esta conclusión se sigue de visualización en experimentos de avalanchas pequeñas con granos coloreados.

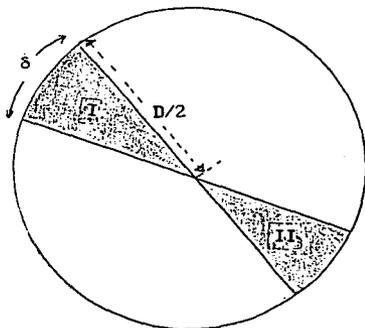


Fig. 13. Area efectiva movilizada en una avalancha.

Siguiendo este criterio podemos construir la curva del área movilizada como función de s . El área movilizada es el área de un sector circular de radio $D/2$ (o $s/2$ en unidades de diámetros de grano) y arco δ , que es $\pi(D/2)^2\delta/360$ (o $\pi[s/2]^2\delta/360$). Esta curva se ilustra en la figura 14, donde se observa un aumento monótono creciente del área para pequeños valores de s y una repentina caída para valores de s mayores de 131 diámetros de grano. La curva no es una parábola, como se espera de la dependencia cuadrática en D (o en s), ésto es debido a que δ es una función de D (o de s).

Al observar las figuras 11 y 14 (mostrada más adelante), notamos la situación aparentemente contradictoria, que para sistemas grandes ($s > 130$) $\overline{\Delta\tau} > \overline{\Delta T}$, es decir el tiempo de duración de avalanchas es mayor que el tiempo entre ellas. En efecto, si mantuvieramos el resultado observado en sistemas pequeños, de que una avalancha moviliza áreas como en la figura 12, concluiríamos

que los granos en la posición $\bar{\phi}_m - \delta$ alcanzan el ángulo máximo $\bar{\phi}_m$ antes de que la avalancha finalice, i.e., el sistema debería estar fluidizado.

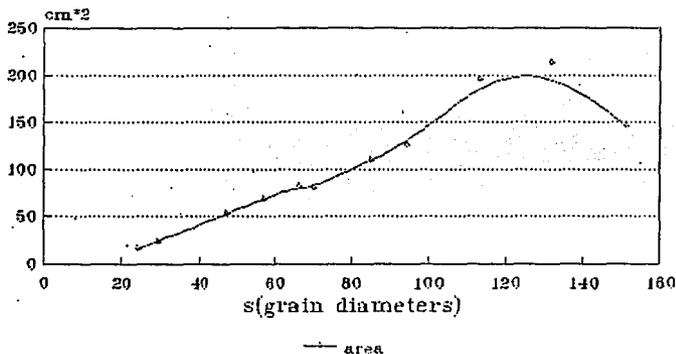


Fig. 14. Area movilizada en sistemas bidimensionales con velocidad angular constante.

Ya que esto no se observa en los experimentos con s grande, debe ocurrir que el mecanismo de evolución de áreas para estos sistemas sea otro. De hecho si durante una avalancha seguimos los granos que están en la posición $\bar{\phi}_m - \delta$ observamos que los granos, durante $\bar{\Delta t}$, no barren el arco δ sino que se introducen muy lentamente (tocando otros granos) en el seno del material y reajustan la pendiente de manera que, en $\bar{\Delta t} > \bar{\Delta t}$, no alcanzan $\bar{\phi}_m$ sino $\bar{\theta}_r$. Esto tiene otra consecuencia igualmente importante; el mecanismo de disipación de energía es friccional.

La variación de el área como función del tiempo (en unidades de diámetros de grano) está dada por básicamente por la cantidad $s^2 \delta / \bar{\Delta t}$ que graficamos en la figura 14', esta cantidad también es proporcional al flujo promedio de granos movilizados durante avalanchas. La figura presenta un comportamiento peculiar; al crecer el tamaño de los cilindros el flujo se incrementa hasta un máximo y despues disminuye monotónicamente. Los últimos puntos en la gráfica deben tomarse con reserva pues el criterio de evolución

de áreas presentado en la figura 13 no se mantiene. De cualquier forma la disminución del flujo tiene un significado importante: el área movilizada durante una avalancha o es menor o se moviliza más lentamente. Ambos comportamientos son observados simultaneamente segun lo ilustran las figuras 11 y 14 para los tiempos y el área, respectivamente

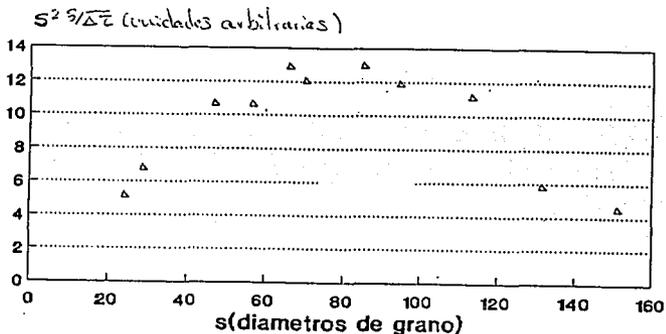


Fig. 14'. Evolución, como función de s , de la cantidad $s^2 \delta / \Delta \tau$ que es proporcional al flujo promedio en sistemas bidimensionales con velocidad angular constante ($\Omega=0.1$ rpm. $d=3.18$ mm)

Otro tipo de experimentos en dos dimensiones se consiguen al aumentar Ω , a $s=cte.$, para observar la naturaleza de los efectos inerciales en los valores de los ángulos y de los tiempos.

El primer resultado interesante es que en los sistemas de canicas la velocidad angular de 1 rpm es suficiente para fluidizar los sistemas ($\delta=0$), aún los más pequeños. Por esta razón trabajamos con los sistemas de fichas de plástico ($s=20.86$). La figura 15 ilustra los resultados encontrados para los ángulos dinámicos medios. La palabra dinámico se refiere explícitamente a la dependencia de $\bar{\phi}_m$ o $\bar{\theta}_r$ en Ω .

Los puntos se unieron con rectas que, extrapoladas, se intersectan en aproximadamente $\Omega=8.5$ rpm. Los primeros tres puntos para cada cantidad ($\bar{\phi}_m$, $\bar{\theta}_r$, y $\bar{\delta}$) obedecen relaciones lineales, la

extrapolación se hace suponiendo que esta linealidad se mantiene.

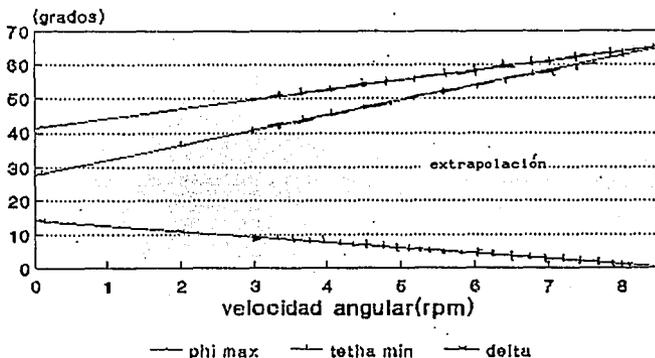


Fig. 15. Angulos dinámicos medios característicos como función de la velocidad angular (la parte acciurada corresponde a extrapolación, dos tercios de esta grafica fueron extrapolados) $s=20.86$.

La figura 15 claramente indica, para sistemas en los que los efectos de tamaño finito son importantes, que los valores medios de los ángulos característicos son función de Ω . Nótese que las figuras 10 y 15 muestran como δ se va a cero de dos formas cualitativamente distintas: una por el incremento en el tamaño (fig. 10) y otra por incremento en la velocidad (fig 15).

Una última clase de experimentos bidimensionales fueron realizados para mantener pequeña la velocidad tangencial de los granos, aún para los cilindros más grandes. Por ello, a medida que el diámetro de los sistemas bidimensionales se incrementó la velocidad angular fué disminuida. Esto fué necesario porque la rapidéz tangencial, $v=\Omega r$, crece si el diámetro aumenta y la velocidad angular se mantiene fija. Esto introduce un efecto inercial que eliminamos disminuyendo la velocidad angular de manera que la rapidéz tangencial v , en los sistemas grandes, sea similar a la de los sistemas pequeños.

En la figura 16 graficamos los valores medios de los ángulos característicos como función de s . Todas las avalanchas fueron generadas con canicas en sistemas con $\Omega=0.6^\circ/\text{seg}$. salvo las de los últimos tres puntos del lado derecho que fueron generadas con $\Omega=0.5^\circ/\text{seg}$, $0.43^\circ/\text{seg}$ y $0.37^\circ/\text{seg}$, para $s=113$, 131.5 y 151 , respectivamente. Esto se hizo para mantener $v=\text{cte}$. Mantuvimos los mismos grupos de valores de s que los usados en los experimentos con $\Omega=\text{cte}$.

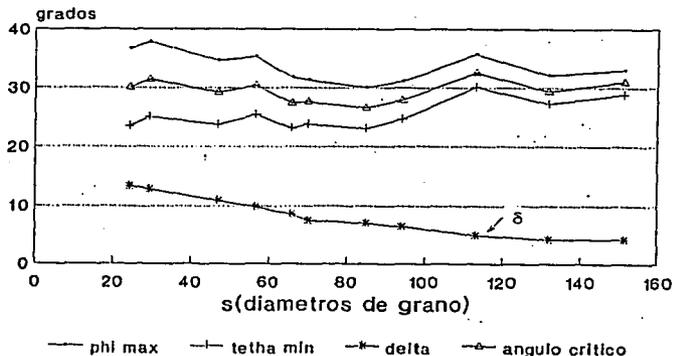


Fig. 16. Variación de los ángulos característicos como función de s en sistemas bidimensionales con $v=\text{cte}$. δ es la diferencia de los ángulos medios $\bar{\phi}_m - \bar{\theta}_r$, ϕ es el ángulo de fricción interna. Todos los puntos fueron conseguidos con $\Omega=0.6^\circ/\text{seg}$ salvo los tres últimos con s grande que se consiguieron con $s=0.5^\circ/\text{seg}$, $0.43^\circ/\text{seg}$ y $0.37^\circ/\text{seg}$, respectivamente, como se indica en el texto.

De la figura 16 nuevamente observamos diferencias entre $\bar{\theta}_r$ y $\bar{\phi}_m$ como en los experimentos con $\Omega=\text{cte}$. Sin embargo, para valores grandes de s los ángulos máximo y de reposo parecen mantener una diferencia casi constante. La constancia de $\delta(s)$ sugiere que los efectos de tamaño finito se han eliminado para $s \geq 131$. Las oscilaciones en los valores medios de los ángulos como función de s y el escalamiento de los ángulos y de los tiempos (fig. 17)

nuevamente se reproducen en estos experimentos.

La evolución de los tiempos medios para sistemas bidimensionales como función de s es mostrada en la figura 17. Estos son importantes porque dan una medida de los tiempos medios de carga ($\overline{\Delta t}$) y relajación ($\overline{\Delta \tau}$) como función de la velocidad angular y del cociente de tamaños.

La figura 17 muestra resultados distintos a aquellos encontrados con $\Omega = \text{cte.}$ En primer lugar al incrementarse el tamaño de los cilindros, respecto a los granos, el tiempo de duración de avalanchas $\overline{\Delta \tau}$ crece monotonamente mientras la cantidad $\overline{\Delta t}$ se hace constante para sistemas grandes, lo que aparentemente confirma la independencia respecto al tamaño de los contenedores. El tiempo

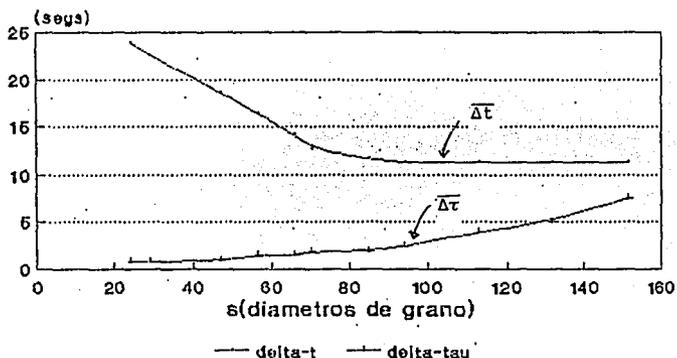


Fig. 17 Tiempos característicos de avalanchas para sistemas bidimensionales (con $v = \text{cte.}$) como función de s , $\overline{\Delta t}$ es el tiempo medio entre avalanchas, $\overline{\Delta \tau}$ es el tiempo medio de duración de avalanchas. Los parámetros experimentales son los mismos que los de la figura 16.

entre avalanchas siempre es mayor que el tiempo de duración de avalanchas, por lo que tal vez aquí si se mantiene el resultado del traslado de áreas discutido anteriormente (tratamos este punto más adelante). Más importante es el hecho de la constancia de δ y

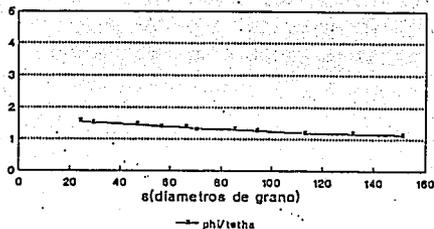


Fig. 19. Cociente $\bar{\phi}_m / \bar{\theta}_r$ para sistemas bidimensionales con velocidad tangencial constante.

La curva de la figura 19 muestra cómo los ángulos medios se aproximan uno al otro al crecer s y manteniendo la velocidad tangencial constante. Los últimos dos puntos ($s=131.5$ y 151) de la curva tienen el mismo valor del cociente. Ello confirma que el límite de independencia respecto al tamaño de los cilindros tal vez ya ha sido alcanzado.

Con los datos de la figura 16 y con el criterio de movilización de áreas de la figura 13 calculamos el área movilizada durante avalanchas para los sistemas bidimensionales con velocidad tangencial constante y s variable. En la figura 20 mostramos la variación del área como función de s .

La figura 20 no muestra una dependencia cuadrática en s (el diámetro de los cilindros en unidades de diámetros de grano) como debería esperarse por la relación del área con D (el área de un sector con arco δ y radio $s/2$ es $\pi(s/2)^2\delta/360$). La diferencia es debida a la dependencia de δ en s . La brusca caída que observamos en los experimentos con $\Omega=\text{cte.}$ no se observa en estos experimentos.

de $\bar{\Delta\tau}$ para valores grandes de s , lo que tal vez implica que una vez alcanzada la independencia respecto al tamaño finito de los contenedores, los ángulos (cuando s crece) simplemente oscilan alrededor de un valor medio y las pendientes del montón toman el mismo tiempo en ir de $\bar{\theta}_r$ a $\bar{\phi}_m$. Observamos que las mismas limitaciones de tamaños, que en el caso de $\Omega = \text{cte.}$, se mantienen en estos experimentos.

Otra cantidad de interés para la discusión es el cociente $\delta/\bar{\Delta\tau}$, que como vimos en los experimentos con Ω constante es proporcional al flujo de granos movilizados durante avalanchas, esta cantidad se ilustra en la figura 18.

El cociente $\delta/\bar{\Delta\tau}$ disminuye rápidamente cuando s crece, lo que indica que el flujo durante avalanchas disminuye cuando aumenta el tamaño del sistema hasta alcanzar un valor casi constante. Una medida de la forma en la que se aproxima $\bar{\theta}_r$ a $\bar{\phi}_m$ es dada por δ , sin embargo el cociente $\bar{\phi}_m/\bar{\theta}_r$ ilustra esta tendencia más claramente.

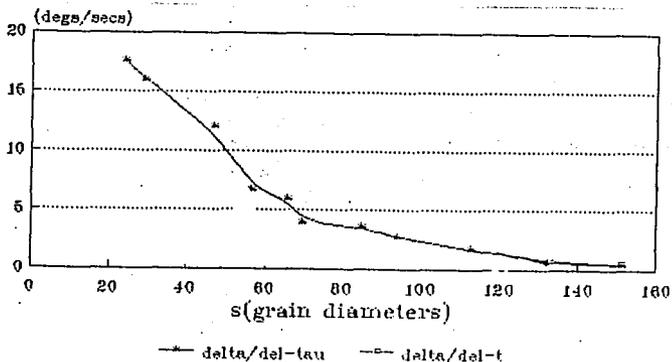


Fig. 18. Cociente característico $\delta/\bar{\Delta\tau}$ como función de s para sistemas bidimensionales con velocidad angular variable y velocidad tangencial constante. Los valores de los parámetros experimentales de la figura 16 se mantienen.

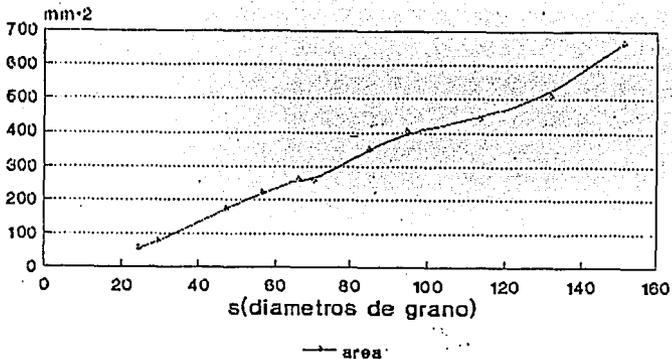


Fig. 20. Area movilizada durante avalanchas en sistemas bidimensionales con s variable y velocidad tangencial constante.

Los experimentos bidimensionales muestran, a través de este conjunto de experimentos, una riqueza de resultados que en la parte de discusión (sección 2.4) y en capítulo 3 trataremos de entender. Avalanchas bidimensionales no ocurren en la naturaleza, sin embargo pueden ser de importancia para entender los mecanismos de disipación de energía u orientar modelos físicos del continuo, y de automatitas celulares. Pasamos ahora a estudiar sistemas más realistas, esto es sistemas en tres dimensiones.

c) Experimentos en Tres Dimensiones

Los sistemas tridimensionales que aquí estudiamos pueden tener una conexión directa con sistemas de avalanchas naturales. En los sistemas tridimensionales el diámetro de los cilindros (14.6cm) y el diámetro de las canicas (3.18mm) se mantuvieron constantes y su longitud l se varió (en lo que sigue l la expresamos en cm, o en diámetros de grano, lo que haremos explícito). Resultados similares a los de los sistemas bidimensionales los discutimos a continuación. La velocidad angular se mantuvo en $0.6^\circ/\text{seg}$. La figura 21 muestra el efecto de incrementar l desde 2.22 a 50.23 diámetros de grano.

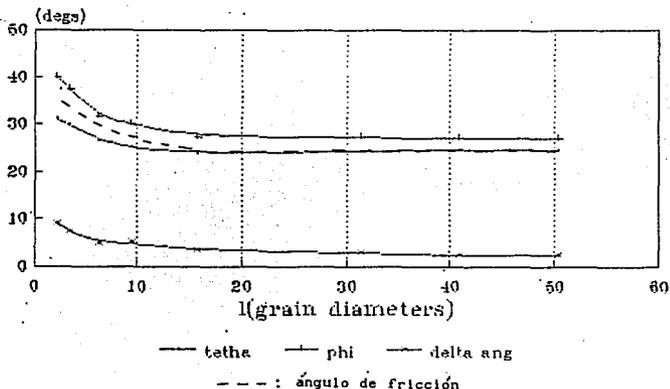


Fig. 21. Angulos característicos como función de l (en diámetros de grano, $d=3.18\text{mm}$), $\Omega=0.6^\circ/\text{seg}=0.1\text{rpm}$. - - - -: ángulo de fricción interna.

De la figura 21 observamos que ocurre una rápida convergencia de los valores de los ángulos en estos sistemas, los últimos puntos son practicamente independientes de la longitud de los cilindros. El ángulo de fricción interna $\phi = \bar{\phi}_m - \sigma$ (que es el ángulo al que pueden iniciarse avalanchas individuales) se comporta, para pequeñas longitudes, como en el caso bidimensional ($\bar{\phi} = \bar{\phi}_m - \delta/2$). Para longitudes mayores o iguales a 15 diámetros de grano el ángulo de fricción sigue otro comportamiento; ϕ coincide con el ángulo $\bar{\theta}_r$ (por lo que $\sigma = \delta$). Mostraremos más adelante que el movimiento de los granos tiene importantes implicaciones sobre los valores de los ángulos medios. En esta parte solamente mencionamos, como una observación experimental, que el movimiento de los granos (en cilindros con l mayor o igual a 15), justo en al inicio de la avalancha, se da en la parte inferior de los cilindros.

Similar al caso bidimensional con $v = \text{cte.}$, la independenciam respecto al tamaño finito de los contenedores se alcanza a partir de una longitud característica. La figura 22 muestra la evolución

de los tiempos característicos como función de la longitud, también se observa la rápida independencia de los tiempos medios en la longitud de los cilindros.

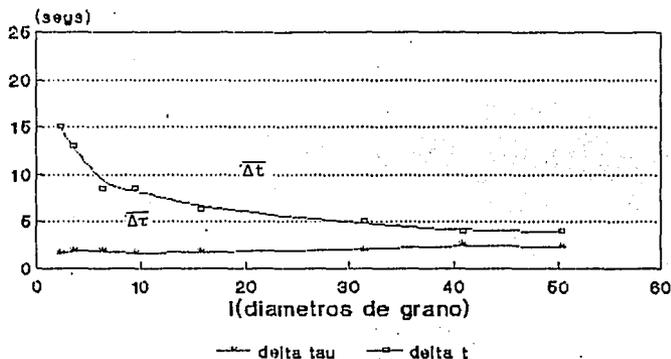


Fig. 22. Tiempos característicos de avalanchas como función de l en sistemas tridimensionales, $\Omega=0.6^\circ/\text{seg}$.

Los cocientes de ángulos a tiempos son graficados en la figura 23, el cociente $\bar{\delta}/\Delta t$ mantiene un valor constante igual a $0.6^\circ/\text{seg}$, que es el valor de la velocidad angular de los cilindros.

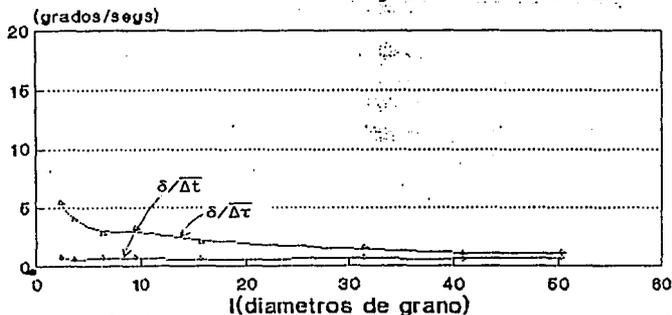


Fig. 23. Cocientes de ángulos a tiempos como función de l , $\Omega=0.1\text{rpm}$.

El volumen movilizado en avalanchas es graficado como función

de 1 en la figura 24. La curva que une los puntos experimentales,

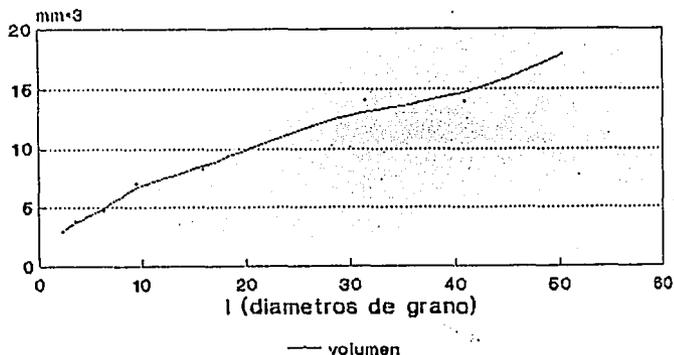


Fig. 24. Volumen movilizado en avalanchas de sistemas tridimensionales como función de l. $\Omega=0.1\text{rpm}$.

a diferencia del caso bidimensional, es monótona creciente pero, en apariencia, no es lineal. Esta curva se obtuvo observando que el volumen movilizado en una avalancha es el contenido entre un sector circular cilíndrico de radio $D/2$, amplitud δ , y longitud l. Así, el volumen es $\pi(D/2)^2 l \delta / 360$ (o en diámetros de grano $\pi[s/2]^2 l \delta / 360$).

En los sistemas tridimensionales podemos variar también el diámetro de las canicas, esta variación lleva a un comportamiento esencialmente diferente. Por ejemplo, en la figura 25 mostramos el efecto, sobre los ángulos, de cambiar los diámetros de las canicas de la siguiente forma: el cuarto punto de izquierda a derecha se consiguió con un cilindro de $L=5\text{cm}$ y diámetro de canica $d=6.28\text{mm}$, el sexto punto se obtuvo para un cilindro de $L=5\text{cm}$ y canica con $d=5.15\text{mm}$, el penúltimo punto se obtuvo para $L=13\text{cm}$ y $d=3.18\text{mm}$ para $L=21\text{cm}$ y $d=5.15\text{mm}$. Los puntos cuarto y sexto muestran una fuerte dependencia en el tamaño del contenedor, el penúltimo punto conseguido al cambiar en 2mm el diámetro de las canicas originales no muestra ninguna dependencia en la longitud del contenedor, lo

que confirma que los efectos de tamaño finito se han eliminado.

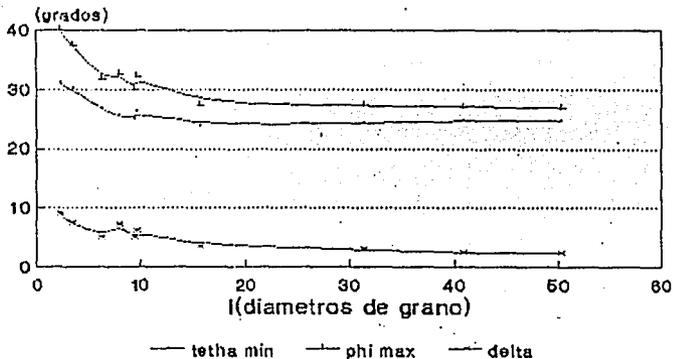


Fig. 25. Ángulos característicos, como función de l , en sistemas tridimensionales con cambio en algunos de los valores de los diámetros de grano. $\Omega=0.1\text{rpm}$.

Como en el caso bidimensional (sección anterior), variamos ahora la velocidad angular de los cilindros tridimensionales, la figura 26 muestra cómo cambian los ángulos característicos como función de Ω . El sistema tridimensional tiene $l=7.1\text{mm}$ y $d=3.18\text{mm}$ ($l=2.23$).

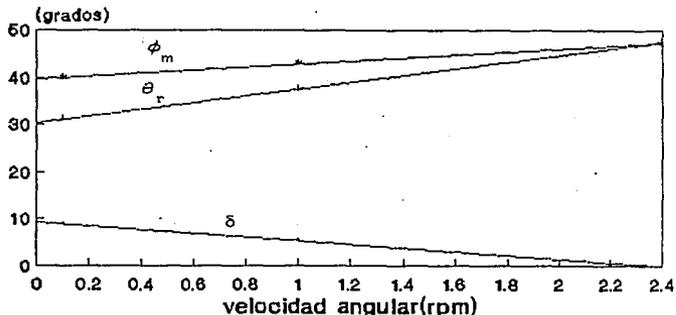


Fig. 26. Ángulos característicos en sistemas tridimensionales con velocidad angular variable. $L=7.1\text{mm}$ ($o\ l=2.23$), $d=3.18\text{mm}$.

El aumento en l dificulta las mediciones, esto es, a medida que los cilindros se hacen más largos el régimen continuo ($\delta=0$ o $\bar{\phi}_m = \bar{\theta}_r$) se alcanza a menor velocidad angular. En los sistemas bidimensionales supusimos un comportamiento lineal de los ángulos como función de Ω (extrapolación lineal), en los sistemas tridimensionales se encuentran experimentalmente relaciones lineales entre los ángulos y Ω .

Las figuras 27 y 28 muestran la evolución de los tiempos y de las razones temporales como función de la velocidad angular, respectivamente.

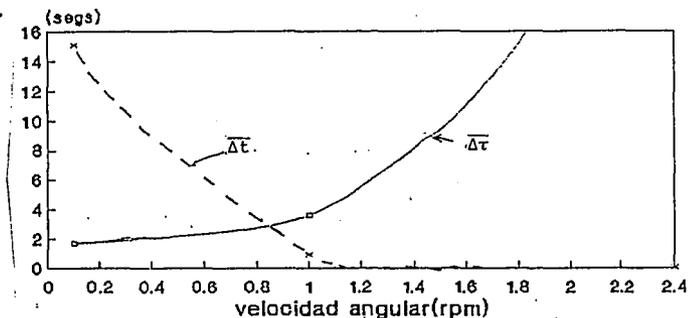


Fig. 27 Tiempos característicos en sistemas tridimensionales como función de la velocidad angular, los datos son los mismos que en la figura 26.

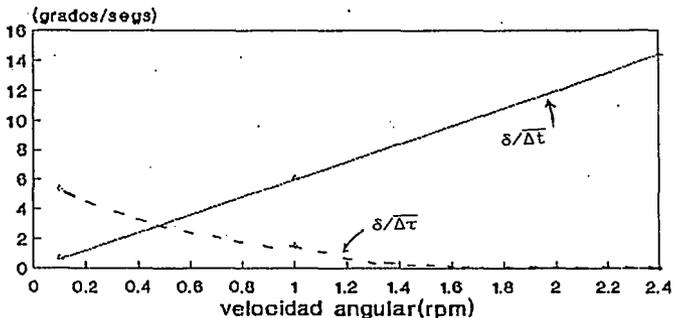


Fig. 28. Cocientes $\overline{\delta/\Delta t}$ y $\overline{\delta/\Delta \tau}$ como función de la velocidad angular. Los datos son los mismos que los de la figura 26.

El cambio de canicas lisas al tacto por canicas rugosas no introdujo diferencias cuantitativas en cualquiera de las cantidades arriba mencionadas. Esto se debe a la leve diferencia entre rugosidades.

2.4 DISCUSION

Discutimos ahora los resultados experimentales encontrados en los sistemas bi y tridimensionales. Los resultados experimentales se refieren a la variación de los ángulos y los de los tiempos de avalancha cuando cambiamos alguna propiedad de los sistemas, p.e., el tamaño de los cilindros relativo a los granos, la rugosidad de los granos, la rugosidad de las paredes o la velocidad angular de los cilindros.

Los resultados más importantes son los que se refieren a la forma en la que ocurren las diferencias entre los ángulos $\bar{\phi}_m$ y $\bar{\theta}_r$ (i.e. existencia de δ) respecto al tamaño de los contenedores, la dimensionalidad, y la velocidad angular de los cilindros. La existencia y comportamiento de δ es de gran importancia para proponer modelos o enfoques teóricos para avalanchas. Recordemos que en la teoría de Coulomb $\delta=0$ y que ésta es la base de muchos estudios en Mecánica de Suelos). Relacionados con δ diferencias cualitativas importantes se presentan en los casos bi y tridimensional; discutimos ahora estas diferencias.

a) Sistemas Bidimensionales

Los cilindros de longitud muy pequeña, con granos esféricos, (en los que la razón experimental de aspecto $\Gamma=D/L$ varió entre 20 y 150) pueden ser considerados como sistemas bidimensionales, debido a que los granos tienen movimiento traslacional casi en dos dimensiones. En el caso de sistemas con discos los movimientos traslacional y rotacional se dan efectivamente en un plano. Más aún, la propiedad de escalamiento ocurre en sistemas plenamente bidimensionales (como los sistemas con discos) o en los sistemas cuasi bidimensionales de canicas.

Durante la medición de los ángulos en un experimento con s y Ω constantes encontramos distribuciones para los ángulos máximo y de

reposo, esto es, los ángulos no son constantes. En nuestros experimentos los ángulos máximos tienen la peculiaridad de ser eventos catastróficos en los que ocurren avalanchas que involucran a toda la superficie libre, avalanchas de pocos granos casi no ocurren.

Uno de los resultados más interesantes en los sistemas bidimensionales (con $\Omega = \text{cte.}$ o con $v = \text{cte.}$) es el de las oscilaciones en los valores medios de los ángulos característicos como función de s . Las oscilaciones ocurren a la misma frecuencia espacial y a la misma fase, como puede verse en la figura 10 (en donde $\Omega = \text{cte.}$), y tienen la peculiaridad de no ser fluctuaciones, porque son valores completamente reproducibles. Cada punto es el resultado de promediar alrededor de 100 mediciones.

Más interesante es el hecho de que las oscilaciones se dan en cualquier intervalo de s . La cantidad s mide el diámetro de los sistemas bidimensionales, por lo cual un intervalo $\Delta s = s_2 - s_1$, contiene sistemas con diámetros entre s_1 y s_2 ($s_1 < s_2$). El mayor intervalo en nuestros experimentos con canicas es $\Delta s = s_f - s_1 = 126.9$ diámetros de grano ($s_f = 151$ es el valor mayor de s en las curvas de la figura 11, $s_1 = 24.1$ es el primer punto para dichas curvas). En este intervalo ocurren oscilaciones; al disminuir Δs las oscilaciones persisten, aún para intervalos muy cortos.

El que estas oscilaciones se mantengan a cada intervalo Δs , no importando que tan pequeña sea Δs , implica que existe un comportamiento auto semejante. Exploramos, a través del espectro de potencia, la posible existencia de frecuencias espaciales características, pero no encontramos ninguna de estas, salvo la fundamental ($\Delta s = 126.9$). Creemos que esto es debido a la poca cantidad de datos en nuestras gráficas.

Refiriendonos a la figura 10 observamos que δ , la diferencia de ángulos, es una función monótona decreciente de s , que no oscila y tiende aparentemente a cero, lo que implicaría que a medida que s crece los sistemas se fluidizan (a $\Omega = 0.6^\circ/\text{seg}$). Observamos de la figura 10 que las oscilaciones en los valores medios de los ángulos como función de s están en fase.

Los sistemas pequeños presentan valores de δ que no están de

acuerdo con la conclusión de Liu *et al* [49] en el sentido de que δ disminuye al decrecer s , el diámetro de los contenedores en diámetros de grano, en contenedores cerrados. Este hecho se explica entendiendo que la condición de esfuerzos para contenedores cerrados es diferente a aquella que se presenta en sistemas abiertos.

La disminución (en terminos absolutos) en el valor $\bar{\phi}_m(s)$ al crecer s (fig. 10) creemos que es debida a que al aumentar el tamaño del sistema hay más granos susceptibles de estar en una situación inestable y, por tanto, de disparar la avalancha. Lo mismo es válido para los tiempos de avalanchas en la figura 11.

En los sistemas bidimensionales hay un escalamiento para los ángulos y para los tiempos ya que es indistinto, los ángulos y los tiempos, que s se consiga variando d o D . Estos parámetros no son funciones de la gravedad.

En algunos cilindros cambiamos la rugosidad de las paredes (sobre el diámetro) de los sistemas bi y tridimensionales. Encontramos que los valores de los ángulos y de los tiempos no cambian lo cual implica que las avalanchas son fenómenos principalmente superficiales, ello constituye una diferencia importante respecto a los fluidos donde las condiciones de frontera de adherencia o deslizamiento afectan la dinámica de los flujos.

Los ángulos característicos y por consecuencia los tiempos y otras cantidades asociadas dependen de la velocidad angular (fig. 15). Para sistemas con $s > 20.48$ y $\Omega > 1$ la medición de los ángulos es difícil de realizar con lo cual se evidencia que δ y Ω no son independientes.

En la figura 15, que corresponde a sistemas con discos y $s = 20.48$, encontramos relaciones aparentemente lineales entre los ángulos y la velocidad angular. Conviene mencionar que los espectros de potencia para sistemas con $\Omega \approx 0.6^0/\text{seg}$. no presentan diferencias cualitativas comparados los de los sistemas con $\Omega = 0.6^0/\text{seg}$.

Como una conclusión debemos mencionar que en el proceso de medición de los ángulos individuales de avalancha ϕ_m estos

presentan grandes variaciones alrededor de su valor medio. La medida de estas variaciones la da la desviación estandar σ . En particular, a medida que se aumenta la longitud de los contenedores, l (fig. 21), σ disminuye hasta un valor constante cuando los ángulos dejan de depender del tamaño de los contenedores. La forma en la que σ varía depende de la dimensión. En el caso bidimensional las variaciones respecto a $\bar{\phi}_m$ van como $\sigma=\delta/2$. En los sistemas tridimensionales inicialmente van como $\sigma=\delta/2$ y para $l \geq 15.7$ como $\sigma=\delta$. Estos resultados experimentales tienen una explicación (cambios en la densidad que inducen los cambios en los ángulos, debido a que las distribuciones de esfuerzo cambian con la densidad) propuesta por otros autores [57], a partir del cual podemos obtener información sobre las características del material. Es decir, como veremos en el siguiente capítulo, que éste, durante avalanchas, se comporta macroscópicamente como un plástico con cedencia gobernada por fuerzas de fricción.

b) Sistemas Tridimensionales

Los sistemas tridimensionales (fig. 21) presentan una rápida y suave independencia de sus propiedades de bulto como función del tamaño de los contenedores. Sin embargo, el cambio en el tamaño de los granos, cuando los efectos de tamaño finito son importantes, puede afectar la suave convergencia; el cambio en las propiedades de bulto (fig. 25) es más sensible a pequeñas longitudes del contenedor. La velocidad angular, al igual que en sistemas bidimensionales, cambia los valores de los ángulos y de los tiempos (fig. 26). Aparecen relaciones lineales de los ángulos como función de la velocidad angular.

En los sistemas tridimensionales de menor longitud ($l < 3.4$) los ángulos son mayores o iguales que los que aparecen en los sistemas bidimensionales (fig. 23). Creemos, por los arreglos de granos que se dan, que esto es debido a la suma de los efectos de las fuerzas de fricción entre los granos y con las paredes. Para mayores longitudes, la suma estos efectos deja de ser importante. Observamos que a pequeñas longitudes de cilindro el movimiento

inicial de los granos durante avalanchas ocurre en la mitad superior de los montones y en los sistemas de longitud grande el movimiento inicial ocurre en la mitad inferior de los cilindros. El que en los sistemas pequeños el movimiento inicial sea en la parte superior implica que los granos gastan gran parte de su energía potencial en el contacto con otros granos, i.e., en fricción. Para los sistemas de longitud grande, el movimiento de los granos en la parte inferior de los montones induce, primero, un rápido arribo de los granos a las paredes del contenedor, y después, un continuo choque de los granos que provienen de la parte alta del contenedor que frena a los granos, i.e., un régimen colisional. Estos resultados serán discutidos en la discusión de la sección 3.2, donde presentamos una discusión en términos de una teoría del continuo sobre la aparición de los ángulos de avalanchas. El análisis de los cambios en la densidad de bulto será fundamental para entender las oscilaciones en los ángulos para diferentes tamaños..

En el siguiente capítulo discutiremos los resultados encontrados a partir de una de las teorías más exitosas del continuo. Mostraremos también que las teorías cinéticas y de autómatas celulares aún no son capaces de dar una adecuada descripción de la evolución de avalanchas. Más aún, evidenciaremos que en apariencia sólo las teorías del continuo describen adecuadamente la evolución de avalanchas en sistemas pequeños (bi o tridimensionales) de granos secos.

CAPITULO 3

ESTUDIOS TEORICOS SOBRE DINAMICA GRANULAR Y SUS IMPLICACIONES EN LA FORMACION Y EVOLUCION DE AVALANCHAS

3.1 INTRODUCCION

La descripción teórica del comportamiento de los medios granulados, en cualquier régimen, es un problema difícil debido a la gran cantidad de fenómenos involucrados (principalmente la naturaleza discreta de estos materiales, los fuertes cambios en la velocidad de los granos respecto a la velocidad de la corriente media, en la concentración o empaquetamiento granular y a la aparición de diversos mecanismos de disipación de energía).

La mayoría de los modelos teóricos hasta ahora conocidos idealizan las condiciones de flujo, la interacción entre granos, las condiciones de frontera, y la geometría de los contenedores a un grado tal que los modelos tienen poco que ver con sistemas reales.

En el caso de avalanchas hemos observado experimentalmente que aparecen tres zonas (no claramente separadas) con propiedades distintas: La zona sólida (que soporta esfuerzos sin movimiento), la zona fluidizada (en la que aparecen gradientes de velocidad) y la zona de transición. Al mismo tiempo, las condiciones de frontera en el caso estático son de frontera libre, y en el caso dinámico, de fronteras con movimiento relativo de granos en la zona de transición; aparecen también fronteras libres difusas debido al movimiento superficial de los granos.

Desde el punto de vista teórico cada zona puede aproximarse por un cierto régimen de movimiento. Como referencia, mencionamos los distintos regímenes de flujo que experimentalmente se han caracterizado para un medio granulado (aquí la palabra flujo está relacionada, como en la teoría de sólidos y fluidos, a las deformaciones elásticas y plásticas o al movimiento del material como un fluido).

Bagnold [12, 20] caracterizó experimentalmente tres diferentes

regímenes de flujo granulado. A grandes rasgos son:

El Régimen cuasiestacionario, que se caracteriza por las altas concentraciones o empaquetamiento de granos (>0.5) y pequeñas razones de deformación (gradientes del campo de velocidad); en este régimen los efectos friccionales entre granos son muy importantes y ocurre poca influencia de la viscosidad del fluido intersticial sobre el movimiento de los granos (no obstante, cuando hay humedad en el material granular, i.e., poco contenido de agua, aparece fuerzas electrostáticas que mantienen unidos a los granos, la manifestación macroscópica de estas fuerzas es conocida como cohesión). Por ejemplo, un suelo, seco o húmedo, en situación estática puede soportar grandes esfuerzos cortantes con pequeñas deformaciones; un ejemplo más es el de nuestros montones (en 2 o 3 dimensiones) antes de avalanchas.

El Régimen de inercia de grano o colisional, en el que hay pequeñas a moderadas concentraciones de granos (<0.5) y grandes razones de deformación. La influencia de la viscosidad del fluido intersticial es despreciable y los granos en este régimen transmiten la mayor parte del momento y la energía via colisiones elásticas o inelásticas, p.e., la zona de rápido movimiento de nuestros montones granulares durante avalanchas.

Y el Régimen macroviscoso en el que hay una gran influencia de la viscosidad del fluido intersticial sobre el medio que contiene pequeñas fracciones de sólido y pequeñas razones de deformación. Por ejemplo, en la formación de dunas por el viento, muy cerca del suelo, se crea una capa límite en la cual los granos casi no chocan entre si pero sienten la viscosidad del aire [19].

Pueden existir otras combinaciones de parámetros (concentraciones, gradientes de velocidad, etc.) que corresponden a otros regímenes, no obstante, muchas situaciones teóricas y experimentales suelen aproximarse por alguno de los anteriores regímenes o por las transiciones entre ellos.

Conviene recordar (para tener una idea de las concentraciones involucradas) que en el caso de esferas pueden existir diversos tipos de empaquetamientos; por ejemplo, el empaquetamiento de mínima estabilidad mecánica se conoce como empaquetamiento suelto

aleatorio con un valor de 0.56 (i.e. dado un volumen sólo el 56% de este puede ser ocupado con éste empaquetamiento). El empaquetamiento cercano aleatorio se consigue cuando un recipiente lleno de esferas se agita hasta lograr un empaquetamiento muy estable, su valor es de 0.64. El empaquetamiento cercano ordenado es el máximo empaquetamiento posible de alcanzar con esferas, su valor preciso no se conoce pero se estima que está alrededor de 0.74 [4]. En el caso de discos se estima que el empaquetamiento aleatorio está entre 0.82 y 0.89 y que el empaquetamiento cercano ordenado es 0.9069 [3].

En la sección 2.4 del capítulo anterior discutimos nuestros experimentos con canicas. Hicimos un gran número de mediciones de los ángulos y los tiempos característicos de avalanchas. El estudio estadístico de este gran número de mediciones nos llevo a encontrar que las avalanchas en promedio ocurren a un valor medio que llamamos $\bar{\phi}_m$ (ángulo máximo) y que relajan a un ángulo menor que llamamos $\bar{\theta}_r$ (ángulo de reposo). Notamos también que avalanchas a ángulos menores que $\bar{\phi}_m$ pueden ocurrir, los valores de estos ángulos, que dan una contribución significativa al valor medio, tienen como cota mínima a la cantidad $\phi = \bar{\phi}_m - \sigma$, donde σ es la desviación estandar que es una función de la dimensionalidad, ϕ es llamado el ángulo de fricción interna.

A través de visualización observamos que previo al inicio de una avalancha se mantiene el régimen cuasiestacionario, es decir, las pendientes soportan esfuerzos tangenciales sin movimiento hasta un límite experimental que llamamos el ángulo máximo $\bar{\phi}_m$ (y en algunas ocasiones al ángulo ϕ). $\bar{\phi}_m$ (y ϕ) depende del material, del tamaño de los cilindros (s o l), de la velocidad angular Ω de los cilindros, y de la dimensionalidad. Durante una avalancha hay una clara separación entre una zona con movimiento y una zona estática; en la parte móvil pueden dominar (dependiendo de la dimensionalidad) los efectos colisionales o friccionales; al mismo tiempo, la parte que no cede se mantiene en un régimen francamente estacionario. Finalmente, al terminar la avalancha, el montón relaja su pendiente a un ángulo menor que $\bar{\phi}_m$ (y que ϕ) llamado $\bar{\theta}_r$.

Debido a la aparición de varios ángulos que caracterizan las

avalanchas podemos preguntarnos: ¿Hay alguna influencia, sobre los ángulos, de los efectos friccionales y colisionales en los diferentes tipos de avalanchas?. ¿Si la hay, cómo se manifiesta? Las respuestas, desde un punto de vista cuantitativo, no se conocen. Sin embargo, podemos afirmar que los efectos dominantes dependen de la dimensionalidad. Esta afirmación la discutiremos a partir de pruebas triaxiales en sistemas con empaquetamientos variables [57], que conectamos después con nuestros resultados experimentales.

Con miras a la construcción de una teoría y hablando en términos generales pueden usarse diferentes enfoques teóricos para deducir las ecuaciones de movimiento e introducir o construir las relaciones constitutivas. Los modelos para el régimen cuasiestacionario son llamados modelos friccionales porque ya sea a nivel macroscópico o microestructural se considera la fricción como un elemento fundamental. En el caso macroscópico se usan hipótesis del continuo; elementos de volumen interactúan entre sí a través de fuerzas de fricción y de cohesión (si hay humedad). Las ecuaciones que se obtienen son del tipo de teoría de la plasticidad (donde las deformaciones no son linealmente proporcionales a los esfuerzos). Las ecuaciones plásticas actuales no describen todos los fenómenos en el régimen cuasiestacionario (la relación de Coulomb de la sección 1.3 es el ejemplo más acabado de ecuación plástica para medios granulados, no obstante, no explica la aparición de diferencias entre ϕ y $\bar{\phi}_m$ que observamos en nuestros experimentos). Extensiones o mejoras pueden ser introducidas a partir de nuestra información experimental, estas serán discutidas en la sección 3.2.

En el régimen colisional las teorías microestructurales han permitido un primer planteamiento del problema de los medios granulados en términos de ecuaciones y relaciones constitutivas derivadas de la teoría cinética. La aproximación de la teoría cinética para avalanchas consiste en suponer [16, 17, 31, 58] que la zona fluidizada mantiene una pendiente constante respecto a la horizontal y que el movimiento puede verse como un flujo colisional en un canal, cuya base es una superficie de granos.

Esta aproximación, en el régimen de avalanchas intermitentes (que es el de interés para nosotros), no es correcta debido a la ocurrencia simultánea de varios regímenes de flujo y a la continua variación de la pendiente de avalancha respecto a la horizontal que se observa en experimentos reales. Con el fin de conocer las limitaciones de la teoría en el problema de las avalanchas intermitentes, en la sección 3.3 presentamos una crítica al uso de estas teorías.

En la sección 3.4 discutimos modelos de autómatas celulares que presentan Criticalidad Auto Organizada (CAO), Bak et al [25], Kadanoff et al [26]. En base a la discusión de la sección 2.2, y a los resultados específicos de estos modelos, mostramos que los modelos de CAO no constituyen hasta el momento una representación realista de la evolución de las avalanchas, pero desde el punto de vista teórico-computacional (que nos permite a menudo lograr realizaciones similares a las del experimento), son un método que en forma más acabada podría permitir un tratamiento más adecuado.

3.2 PREDICCIONES DE LA TEORIA DEL CONTINUO EN MEDIOS GRANULADOS

Desde el punto de vista de flujo se ha tratado el problema de la descripción de un medio granulado con dos enfoques teóricos diferentes; la teoría cinética y la teoría del continuo. El propósito final de ambas es formular ecuaciones de movimiento y relaciones constitutivas que, al menos de una manera aproximada, describan el comportamiento básico de estos medios.

La teoría del continuo más exitosa en la descripción de medios granulados es la teoría de la plasticidad. En esta teoría es fundamental el concepto esfuerzo, que ahora formalizamos.

Toda teoría del continuo parte de analizar elementos de volumen material, que se suponen pequeños desde el punto de vista macroscópico y grandes microscópicamente para que contengan un gran número de moléculas. En medios granulados una aproximación adicional es necesaria; los elementos de volumen contienen partículas sólidas y fluido por lo que una densidad (media) de bulto debe ser introducida. En nuestros experimentos la densidad dominante es la de los sólidos con lo cual la densidad (media) de

bulto es casi la de los sólidos.

Incluyendo esta aproximación podemos calcular la fuerza total en una porción del cuerpo. Primero, esta fuerza total es igual a la suma de todas las fuerzas en todos los elementos de volumen de aquella porción del cuerpo., i.e. esto puede escribirse como la integral de volumen $\int F dv$, donde F es la fuerza por unidad de volumen y $F dv$ es la fuerza sobre el elemento de volumen dv . Segundo, las fuerzas con las cuales varias partes de la porción considerada actúan una sobre otra no pueden dar sino cero en la resultante total, ya que ellas se cancelan por tercera ley de Newton. La fuerza requerida, por tanto, puede ser considerada como la suma de las fuerzas ejercidas sobre la porción dada del cuerpo por las porciones que la rodean. No obstante, estas fuerzas actúan sobre la superficie de aquella porción, y así la fuerza resultante puede ser representada como la suma de fuerzas actuando sobre todos los elementos de superficie, es decir como una integral sobre la superficie.

Así, para cualquier porción del cuerpo, cada una de sus tres componentes $\int F_i dv$ de la resultante de todos los esfuerzos internos puede ser transformada en una integral sobre la superficie. Sabemos de análisis vectorial que la integral de un escalar sobre un volumen arbitrario puede ser transformada en una integral sobre la superficie si el escalar es la divergencia de un vector. En el caso presente tenemos la integral de un vector, no de un escalar. De aquí el vector F_i debe ser la divergencia de un tensor de rango dos, es decir debe ser de la forma

$$F_i = \partial \sigma_{ik} / \partial x_k, \quad (3.1)$$

Entonces la fuerza sobre cualquier elemento de volumen puede ser escrita como la integral sobre una superficie cerrada rodeando aquel volumen:

$$\int F_i dv = \int (\partial \sigma_{ik} / \partial x_k) dv = \int \sigma_{ik} df_k, \quad (3.2)$$

donde df_i son las componentes del vector elemento de superficie

df, dirigida a lo largo de la normal exterior. El tensor σ_{ik} es llamado el tensor de esfuerzos. Como vemos de (3.2), $\sigma_{ik} df_k$ es la i-ésima componente de la fuerza sobre el elemento de superficie df. Tomando elementos de area en los planos xy, yz, zx, encontramos que la componente σ_{ik} del tensor de esfuerzos es la i-ésima componente de la fuerza en la unidad del área perpendicular al eje x_k . Por ejemplo, la fuerza por unidad de área, perpendicular al eje x, es σ_{xx} , y los esfuerzos tangenciales (al área cuya normal esta en x) a lo largo de y y de z son σ_{yx} y σ_{zx} , respectivamente. En nuestros experimentos los materiales son no cohesivos por lo que no soportan esfuerzos tensiles. En lo que sigue los esfuerzos normales serán compresivos por lo que las fuerzas normales están dadas por $\sigma_{ii} df_i$ con df_i a lo largo de la normal interior.

En las teorías del continuo la deducción de las ecuaciones (friccionales) para avalanchas es puramente fenomenológica. El modelo de más éxito en estas teorías es el modelo friccional de Coulomb de la condición crítica para la cedencia de un suelo.

La cedencia es un concepto importante en la teoría de la plásticidad, y es la condición para que un material tenga una deformación plástica excesiva, en materiales granulados la cedencia produce fracturas y, por tanto, un cambio permanente en la forma del material. Un problema de gran importancia en plasticidad es el de deducir relaciones matemáticas para predecir las condiciones a las cuales cedencia plástica comienza cuando un material es sujeto a cualquier posible combinación de esfuerzos.

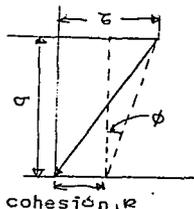
Vimos en la sección 1.3 que historicamente el primer modelo friccional del continuo que describe la cedencia de un medio granulado es debido a Coulomb [1]. El modelo de Coulomb se basa en el criterio de que un bloque de material granular que genera esfuerzos normales σ y tangenciales τ se desliza sin separarse siguiendo la relación:

$$|\tau| \geq k + \sigma \tan \phi = k + \sigma \mu, \quad (3.3)$$

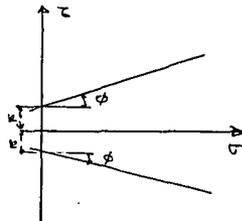
donde (usando la notación estandar de mecánica de suelos [14]) k es la cohesión, ϕ el ángulo de fricción interna, $|\tau|$ es el valor absoluto del esfuerzo tangencial y μ es el coeficiente de fricción. La figura 30 aclara de manera gráfica el modelo de Coulomb. Cuando τ satisface la relación (3.3) el material se deforma permanentemente, es decir, plásticamente.



(a)



(b)



(c)

Fig. 29. Modelo de Coulomb para la cedencia de un material granular.

La figura 29(c) muestra que un material granular con cohesión puede mantener un esfuerzo friccional cortante, τ , sin originar movimiento macroscópico.

El movimiento en una avalancha real de granos secos no obedece exactamente este modelo. En particular el modelo de Coulomb [1], no explica la existencia de variaciones en los ángulos de avalancha (i.e. de acuerdo a Coulomb, para una avalancha individual, $\theta_r = \phi_m = \phi$, o $\delta = 0$). Estudios en celdas triaxiales nos permitirán entender, en términos de cambios en la densidad, las variaciones en el ángulo ϕ_m .

Previo a la discusión de las pruebas triaxiales, discutimos dos conceptos importantes en la interpretación de estas pruebas; el círculo de Mohr y el esfuerzo desviador.

Tomemos los ejes coordenados en la dirección de los ejes principales (esto es, un sistema donde $\sigma_{ik} = 0$ cuando $i \neq k$, por lo

cual no hay componentes cortantes del esfuerzo). Consideremos ahora los esfuerzos normal $S_n = \sigma$, y tangencial $S_\tau = \tau$, actuando sobre un plano oblicuo al sistema de ejes principales. Estos esfuerzos siempre pueden expresarse en términos de las componentes principales de esfuerzos σ_i ($\sigma_i = \sigma_{11}$, y $i=1, 2, 3$.) y de sus cosenos directores l, m, n , como

$$\sigma = l^2 \sigma_1 + m^2 \sigma_2 + n^2 \sigma_3, \quad (3.4.a)$$

y

$$\tau^2 + \sigma^2 = l^2 \sigma_1^2 + m^2 \sigma_2^2 + n^2 \sigma_3^2. \quad (3.4.b)$$

Las relaciones (3.4) junto con la identidad $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ constituyen tres ecuaciones para l^2, m^2 , y n^2 , que resolviendo dan

$$l^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)},$$

$$m^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma - \sigma_3)(\sigma - \sigma_1)}{(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1)}, \quad (3.5)$$

$$n^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2)}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)}.$$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$. Entonces, ya que $l^2 \geq 0$ y $(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3) \geq 0$, de la primera ecuación (3.5) obtenemos que

$$\tau^2 + (\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3) \geq 0. \quad (3.6)$$

Que puede ser escrita como

$$\tau^2 + \left(\sigma - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}\right)^2 \geq \left[(\sigma_2 - \sigma_3)/2\right]^2. \quad (3.7)$$

Si usamos la igualdad en (3.7), esta ecuación representa un círculo en el plano τ - σ que es mostrado por C_1 en la figura 31. El centro está en $(0, (\sigma_2 + \sigma_3)/2)$ y cruza el eje σ en $\sigma = \sigma_2$ y $\sigma = \sigma_3$. Por tanto, la región definida por la ecuación (3.7), está afuera del círculo e incluye a éste como una frontera.

Considerando la segunda ecuación de (3.5), y ya que $(\sigma_2 - \sigma_3) > 0$ y $(\sigma_2 - \sigma_1) < 0$, el numerador debe ser menor o igual a cero:

$$\tau^2 + (\sigma - \sigma_3)(\sigma - \sigma_1) \leq 0,$$

o

$$\tau^2 + \left(\sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right)^2 \leq [(\sigma_1 - \sigma_3)/2]^2, \quad (3.8)$$

que representa una familia de círculos con centros en $(0, (\sigma_1 + \sigma_3)/2)$ y radio igual o menor que $(\sigma_1 - \sigma_3)/2$. Esto se ilustra por el interior del círculo C_2 en la figura 30. Finalmente, la tercera ecuación de (3.5) da

$$\tau^2 + (\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2) \geq 0,$$

o

$$\tau^2 + \left(\sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)^2 \geq [(\sigma_1 - \sigma_2)/2]^2, \quad (3.9)$$

que representa la región exterior del círculo C_3 con centro en $(0, (\sigma_1 + \sigma_2)/2)$ y que cruza el eje σ en σ_1 y σ_2 . Se sigue de (3.7)-(3.9) que los valores admisibles de τ y σ están en la región sombreada de la figura 30, acotada por los círculos C_1 , C_2 y C_3 . El máximo esfuerzo cortante (para una situación dada de esfuerzos), como es claro de la figura, está representado por la ordenada, AB, que es el radio del círculo C_2 y es por tanto igual a $(\sigma_1 - \sigma_3)/2$. El valor de σ correspondiente al máximo esfuerzo cortante es $(\sigma_1 + \sigma_3)/2$ (el centro del círculo C_2).

Con la discusión anterior vemos que el llamado diagrama de Mohr permite una útil representación de las condiciones de esfuerzos máximos normales y tangenciales.

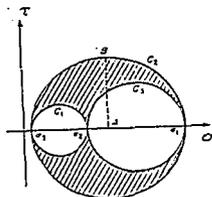


Fig. 30. Diagrama de Mohr.

Es conveniente, para la interpretación de las pruebas triaxiales y como una metodología en teoría de plasticidad [14, 59], dividir el tensor de esfuerzos en dos partes, una llamada tensor esférico de esfuerzo y otra que es el tensor de esfuerzo desviador. El tensor esférico es el tensor cuyos elementos son $\sigma_m \delta_{ij}$, donde σ_m es el esfuerzo medio, es decir,

$$P_{ij} = \sigma_m \delta_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix}, \quad (3.10)$$

donde

$$\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = (1/3)I_1, \quad (\sigma_1 = \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z) \quad (3.11)$$

I_1 es el primer invariante del tensor de esfuerzos. De (3.11) es claro que σ_m es el mismo para todas las posibles orientaciones de los ejes, de ahí su nombre de esfuerzo esférico. Ya que σ_m es el mismo en todas direcciones, este puede ser considerado como el esfuerzo hidrostático.

Se encuentra en experimentos [14] de mecánica de suelos que la cedencia y el flujo plástico son independientes de la presión hidrostática, por lo cual, si se desea, se puede trabajar con un sistema de esfuerzos obtenido de restar la parte esférica del

esfuerzo real. Definimos tal tensor como el esfuerzo desviador S_{ij} , que es

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - p_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_m \delta_{ij} \quad (3.12)$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_1 - \sigma_m & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \sigma_2 - \sigma_m & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_3 - \sigma_m \end{bmatrix}. \quad (3.13)$$

En el sistema de ejes principales tenemos que

$$S_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma'_1 - \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma'_2 - \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma'_3 - \sigma_m \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

Podemos ver que que el esfuerzo desviador involucra esfuerzos cortantes. Por ejemplo, refiriéndonos al esfuerzo S_{11} en el sistema de ejes principales, tenemos que

$$S_{11} = \frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{3} = [(\sigma_1 - \sigma_2) + (\sigma_1 - \sigma_3)]/3 = \frac{2}{3}[\sigma_1 - \sigma_2]/2 + (\sigma_1 - \sigma_3)/2] \\ = (2/3)[\tau_3 - \tau_2], \quad (3.15)$$

donde τ_3 y τ_2 son los esfuerzos principales cortantes. Desde el punto de vista físico podemos concluir que la componente desviadora del tensor de esfuerzos involucra esfuerzos cortantes, que son importantes en la deformación plástica. Una vez definidos el círculo de Mohr y la conexión entre el esfuerzo desviador y los esfuerzos cortantes discutimos las pruebas triaxiales.

Las pruebas triaxiales consisten en aplicar un esfuerzo en la

dirección del eje de un cilindro que, en el caso más general, está lleno de material granular cohesivo. Después se miden los esfuerzos resultantes (a través de la presión hidrostática y el esfuerzo desviador). El eje del cilindro se considera como una de las direcciones de los ejes principales y se miden los otros dos esfuerzos, que por la simetría, son radiales y de igual magnitud. En el círculo de Mohr (fig. 30) tendremos entonces dos esfuerzos normales, $\sigma_{\max} = \sigma_1$ y $\sigma_{\min} = \sigma_2 = \sigma_3$. Esta distribución específica de esfuerzos la ilustramos en la figura 31.

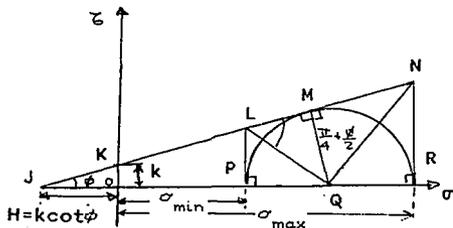


Fig. 31. Círculo de Mohr para pruebas Triaxiales. ϕ es el ángulo de fricción interna, k es la cohesión.

De acuerdo a la figura 31, encontramos que $H = k \cot \phi$, así que

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{\max} + H}{\sigma_{\min} + H} &= \frac{JR}{JP} = \frac{RN}{PL} \quad (\Delta JPL \text{ es similar a } \Delta JRN) \\ &= \frac{MN}{ML} \quad (\text{tangentes al círculo entre } N \text{ y } L) \\ &= \frac{QM \tan \widehat{MQN}}{QM \cot \widehat{MLQ}}, \end{aligned}$$

pero $\widehat{MQN} = (\pi/4 + \phi/2) = \widehat{MQL}$, así que

$$\frac{\sigma_{\max} + H}{\sigma_{\min} + H} = \tan^2(\pi/4 + \theta/2) = \frac{1 + \text{sen}\phi}{1 - \text{sen}\phi} \quad (3.16)$$

En el caso en el que no hay cohesión (i.e., materiales secos)

$k=0=H$.

Las pruebas triaxiales comunmente son compresivas por lo que en el círculo de Mohr podemos suponer que $\sigma_{\max}=\sigma_1$, y $\sigma_{\min}=\sigma_2=\sigma_3$, y entonces

$$\sigma_1 = \left(\frac{1 + \text{sen}\phi}{1 - \text{sen}\phi} \right) \sigma_3, \quad (3.17)$$

La presión p , y el esfuerzo desviador q , se calculan a partir de (3.11) y de (3.15), respectivamente, por lo que

$$p = \left(\frac{\sigma_1 + 2\sigma_3}{3} \right), \quad q = (\sigma_1 - \sigma_3), \quad (3.18)$$

donde hemos usado que $\sigma_1 \neq \sigma_2 = \sigma_3$ y que $q = (3/2) S_{11}$.

Por otra parte, de (3.17) podemos despejar $\text{sen}\phi$, por lo cual

$$\text{sen}\phi = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3}, \quad (3.19)$$

que relaciona el ángulo de fricción interna con los esfuerzos normales en el sistema de ejes principales.

En medios granulados sin cohesión el cociente $M=(q/p)$, puede relacionarse con el criterio de estabilidad de Coulomb (3.3) haciendo $p=\sigma$, $q=\tau$ y $M=\tan\phi$ (ver figura 32). En la teoría clásica de Coulomb la cantidad $M=q/p$ es una medida del máximo esfuerzo cortante que soporta un material antes de una fractura. Este cociente puede ser expresado en términos de ϕ usando las relaciones (3.18) y (3.19), de donde obtenemos que

$$M = (q/p)_{\max} = \frac{6\text{sen}\phi}{3 - \text{sen}\phi}. \quad (\text{con } \sigma_1 > \sigma_3) \quad (3.20)$$

Finalmente, la relación entre ϕ , el ángulo de fricción interna, y M , el nivel desviador, la encontramos de (3.20), y resulta ser

$$\text{sen}\phi = \frac{3M}{M + 6}. \quad (3.21)$$

La figura 32 ilustra el criterio de Mohr-Coulomb para el límite

en los tres ejes principales (x_1, x_2, x_3), perpendiculares uno a otro ($\sigma_2 = \sigma_3$, debido a la simetría axial). En el experimento que ahora discutimos [57], σ_1 , el esfuerzo normal compresivo en la dirección del eje del cilindro, se varió y se mantuvieron constantes $\sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_0$. A partir de esto se midieron las deformaciones principales ($\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$) inducidas por el cambio en σ_1 . $\epsilon_2 = \epsilon_3$ cuando el material de prueba es mantenido homogéneo. En el experimento hay cuatro parámetros importantes p, q, ϵ_1 que controla la compresión o extensión de la muestra y la extensión volumétrica $\epsilon_v = \epsilon_1 + 2\epsilon_2$ que mide el cambio en el volumen de la muestra.

En las pruebas compresivas de Evesque [57] se midió σ_1 para diferentes valores de ϵ_1 y $(d\epsilon_1/dt)$ se mantuvo pequeña y constante. Durante el experimento también se midieron q, ϵ_1 , y ϵ_v como funciones del tiempo. Después, se graficaron q/p (el nivel desviador) y ϵ_v como funciones de ϵ_1 con $p = q/3 + \sigma_0$ que resulta de (3.18). En la figura 33 se reportan tres comportamientos típicos para arena que corresponden a tres diferentes pruebas triaxiales con la misma muestra granular pero con tres diferentes densidades iniciales o empaquetamientos.

De la figura 33 observamos que las variaciones plásticas (i.e. no lineales) de q/p vs ϵ_1 indican que el cociente del esfuerzo desviador tiende al mismo límite M a grandes ϵ_1 independientemente de la densidad inicial (del empaquetamiento); más aún, una investigación experimental sistemática demuestra que M es independiente del esfuerzo medio p ; M depende de la naturaleza del material y puede entonces ser considerada como un parámetro intrínseco del material que corresponde al coeficiente de fricción macroscópico $\tan\phi$ de un material dilatante no cohesivo. En mecánica de suelos se dice que el material está en su estado crítico [14] si $q/p = M$ (ésta es la razón por la que diferentes materiales granulares tienen diferentes ángulos característicos). A partir de pruebas experimentales se encuentra también que el empaquetamiento η_c del material en el estado crítico es independiente del material mismo y depende sólo del esfuerzo medio [14].

La peculiaridad del estado crítico consiste en ser un estado límite para distintos empaquetamientos y en obedecer un criterio de estabilidad de Coulomb con M independiente de p , y η_c dependiente de p e independiente del material. Ya que η_c es proporcional a la densidad, ρ y M son independientes en el estado crítico.

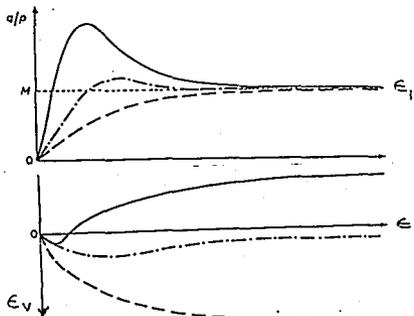


Fig. 33. Comportamientos típicos del mismo material con diferentes empaquetamientos en una celda triaxial ($\sigma_2 = \sigma_3$). (— empaquetamiento denso; - - empaquetamiento suelto; -.- empaquetamiento intermedio). q y p son los esfuerzos desviador y compresivo respectivamente, y ϵ_1 es la deformación en la dirección x_1 . ϵ_v es positivo cuando el montón se contrae. [57]

El modo en que el estado crítico se alcanza depende de su densidad inicial (i.e empaquetamiento), como se ve en la figura 33. Para un material inicialmente muy suelto (que es raro), q/p crece monótonicamente y el material está siempre contrayéndose y compactándose (gráfica inferior en la fig. 33). Para un empaquetamiento denso, el nivel desviador q/p comienza a crecer, cruza M y alcanza un máximo q_m/p (que depende de la densidad inicial del empaquetamiento) y decrece antes de alcanzar el valor M asintóticamente. Las variaciones en la deformación volumétrica ϵ_v indican que el material se contrae primeramente hasta que q/p cruza M ; entonces se expande hasta que q/p alcanza asintóticamente el valor M .

En el estudio referido conviene enfatizar lo siguiente.

a) Las curvas q/p no siempre comienzan en el punto $(\epsilon_1=0, q=0)$, sino que pueden empezar a algún valor más pequeño que $q_m(\epsilon_1=0, q_0)$ dependiendo del modo en que la muestra fué preparada.

b) Las curvas en la figura 33 se obtuvieron manteniendo la razón dc_1/dt pequeña y constante. Así, la fig. 33 da las relaciones entre ϵ_1 , ϵ_v y q/p para una muestra sometida a esfuerzos cortantes en equilibrio cuasiestático. La fig. 33 indica también que los valores de q/p en equilibrio decrecen a grandes ϵ_1 para muestras suficientemente densas (es decir, en muchos casos). Este hecho lleva a predecir que pruebas triaxiales ejecutadas bajo el control de dc_1/dt o bajo el control de $d\sigma_1/dt$ dan resultados diferentes. En los experimentos de Evesque [57] se hicieron pruebas triaxiales con $d\sigma_1/dt = \text{cte.}$; al principio de la prueba q crece lentamente y hay un único conjunto (ϵ_1, ϵ_v) que satisface el equilibrio y una evolución continua del montón; no obstante cuando q alcanza su valor máximo q_m , un ligero incremento de q_m a $q_m + \delta q$ no corresponde a cualquier equilibrio, sino que se genera una cedencia que incrementa ϵ_1 . Luego, esta cedencia decrece el valor de q en equilibrio $q(\epsilon_1)$ (con $q(\epsilon_1) < q_m$); esto incrementa la diferencia $q_m + \delta q - q(\epsilon_1)$ entre el esfuerzo aplicado y el valor de equilibrio, lo cual, finalmente, acelera la dinámica de la cedencia y amplifica cualquier cambio en la densidad; el material se rompe. Otros experimentos [14] muestran también que pruebas con $d\sigma_1/dt = \text{cte.}$ sobre un medio denso llevan siempre a un rompimiento y falla que no ocurre con pruebas de control de deformación.

Regresemos ahora al problema de avalanchas en cilindros rotantes. En cilindros semi llenos, como los de nuestros experimentos, la longitud de su pendiente es D (o s en diámetros de gramo) y su longitud axial es L (o l en diámetros de grano). El esfuerzo hidrostático medio p y el esfuerzo desviador q tienden a cero cerca de la superficie inclinada (lo que está de acuerdo con la aproximación de Coulomb de que la zona que se desliza tiene un cierto grosor) pero su cociente q/p está relacionado a la

pendiente θ ($\phi \leq \theta \leq \phi_m$) de la superficie libre de acuerdo a (3.21) o a $q/p = 6 \text{sen}\theta / (3 - \text{sen}\theta)$. Así, el incrementar θ continuamente (lo que es posible para empaquetamientos intermedios y grandes) lleva a disminuir la estabilidad de la pendiente incrementando q/p en la superficie libre, a una razón controlada de crecimiento $d(q/p)/dt = 18\Omega \cos\theta / (3 - \text{sen}\theta)^2$, con $\Omega = d\theta/dt$ la velocidad angular. De acuerdo a esto el método del cilindro rotante no funciona controlando dc_1/dt sino como en el caso del comentario b).

Por tanto, considerando el caso de empaquetamiento denso (que se da en los sistemas de cilindro rotante por la compactación espontánea debida al giro) y de acuerdo a la figura 33, el cociente q/p (y el ángulo θ) puede crecer continuamente respecto a M (y a ϕ) sin pérdida de equilibrio estático; no obstante, el montón no es muy estable cuando q/p (y θ) es mayor que q_m/p (ϕ_m), (q_m/p y ϕ_m dependen de la densidad inicial); ϕ_m es mayor que ϕ ya que q_m/p es mayor que M . Como en el comentario b), un ligero incremento en θ cuando ϕ_m se alcanza genera un movimiento macroscópico de canicas, ya que este genera un pequeño deslizamiento, que en resumen origina una pequeña dilatación y reduce el valor q/p necesario para mantener el montón en equilibrio; de aquí que este proceso amplifica la diferencia entre el valor aplicado q/p y el de equilibrio y la dinámica se acelera; cuando el deslizamiento transcurre, esta diferencia alcanza su valor límite $(q_m/p) - M$, como en el caso b) y de acuerdo a la fig. 33. El equilibrio del montón puede sólo ser restablecido si la cantidad q/p aplicada llega a ser menor que M , lo que implica que $\theta_r < \phi$. Claramente esto lleva al montón a cambiar de forma para restablecer el equilibrio estático y la pendiente final θ_r es menor que ϕ . Esto también implica que una parte del montón fluye hacia abajo en un evento macroscópico (la avalancha).

Los valores precisos de los ángulos ϕ , ϕ_m y θ_r dependen del régimen que finaliza la avalancha. De acuerdo a Evesque [57], Rajchenbach [60], y a nuestras observaciones experimentales, ocurren dos principales mecanismos de paro de avalanchas.

En los sistemas bidimensionales la zona de más inestabilidad, esto es, la que origina la avalancha se presenta en la mitad

superior del montón. Una vez iniciado el movimiento de los granos (que no tienen gran energía cinética) éste se ve frenado por el continuo roce de unos con otros lo que implica que gran parte de la energía potencial se convierte rápidamente en energía cinética y esta a su vez es disipada por fricción.

En los sistemas tridimensionales de pequeña longitud (menores que 15.7 diámetros de grano) el movimiento de las avalanchas es similar al de los sistemas bidimensionales. Más allá de esta longitud, el movimiento en las avalanchas sigue otro comportamiento; la zona de más movimiento al principio de la avalancha ocurre en la mitad inferior del montón. Los granos de esa zona alcanzan más rápido las paredes del contenedor generando entonces un frente de choque que se propaga rápidamente hacia arriba y que frena a los granos.

Evesque [57] conjeturó que el ángulo θ_r de la nueva pendiente estabilizada depende del proceso de disipación de energía: θ_r puede ser el ángulo de fricción ϕ (que corresponde a M) si la energía cinética de deslizamiento del montón es completamente disipada por colisiones contra las paredes del cilindro cuando la inclinación del montón llega a ϕ ; no obstante, θ_r también puede ser $\theta_r = \phi - (\phi_m - \phi)$ si el proceso de disipación ocurre a través de la fricción canica-canica, ya que la energía cinética que se almacena durante el cambio de la superficie libre de ϕ_m a ϕ se disipa a través de fricción durante el cambio de pendiente de ϕ a θ_r .

La diferencia de ángulos $\sigma = \phi_m - \phi$ se relaciona entonces al valor $(q_m/p - M)$ que depende de la densidad del montón (fig. 34); así que las variaciones σ del ángulo máximo ϕ_m están relacionadas a las variaciones de $(q_m/p - M)$ y son inducidas por cambios en la densidad en la vecindad de la superficie libre del montón en reposo de una avalancha a otra.

Por tanto, de acuerdo a esta aproximación de estado crítico [14] parece que una avalancha es un plástico macroscópico con cedencia gobernada por fuerzas de fricción y controlada por el deslizamiento de una capa típica sobre otra; estas dos capas están inclinadas al ángulo ϕ_m que sobrepasa el ángulo de fricción ϕ por $\sigma = \phi_m - \phi$. σ es entonces $\phi_m - \theta_r$ o $(\phi_m - \theta_r)/2$ dependiendo del proceso

final de disipación.

Parece ser que a partir de nuestros experimentos ambos mecanismos de disipación de energía pueden ser más propiamente entendidos. En la figura 10 del capítulo 2 graficamos $\phi(s)$, el ángulo de fricción interna para sistemas bidimensionales con $\Omega = \text{cte.}$, que concuerda con la conjetura de Evesque [57] mencionada arriba; en promedio, durante el proceso de medición de los ángulos individuales de avalancha se registraron valores entre ϕ_m y $\phi_m - \sigma$, i.e., valores máximos de ángulos de avalancha iguales a ϕ_m y mínimos iguales a $\phi_m - \sigma$ que claramente sobrepasan θ_r . En estos experimentos σ resultó ser igual a $(\phi_m - \theta_r)/2$ por lo que $\phi = \phi_m - \sigma = \phi_m - \delta/2$ (δ es la diferencia de ángulos medios $\phi_m - \theta_r$, que manejamos en el capítulo anterior).

Para los sistemas tridimensionales en la figura 21 graficamos el valor de ϕ que depende de las variaciones experimentales en los ángulos de avalanchas. Hasta el valor de $l \leq 15.7d$ los valores de los ángulos de avalancha están comprendidos entre $\phi_m - \sigma$ y ϕ_m con $\sigma = (\phi_m - \theta_r)/2$; como en el caso bidimensional $\phi = \phi_m - \sigma$. Para valores de $l > 15.7d$ los ángulos de avalancha varían entre θ_r y $\phi = \theta_r + \sigma$, donde $\sigma = \delta = \phi_m - \theta_r$ y $\phi = \theta_r$.

Los resultados anteriores permiten afirmar que los efectos friccionales al final de las avalanchas son los responsables de que los sistemas bidimensionales y tridimensionales cortos alcancen el ángulo de reposo θ_r . En los sistemas tridimensionales largos los ángulos de reposo $\theta_r(1)$ son alcanzados por otro mecanismo; las colisiones entre granos durante el proceso de evolución de avalanchas.

Resumiendo, parece que los resultados de las celdas triaxiales para materiales granulares secos permiten entender nuestros experimentos de avalanchas: estos ayudan a pensar que la cedencia en montones de granos es gobernada por un coeficiente de fricción único (que es un valor límite para todos los empaquetamientos, $\mu = \tan \phi$) a grandes deformaciones cuando el montón ha alcanzado una densidad bien definida.

Los experimentos de Evesque [57] permiten también calificar el efecto de la dilatancia (cambio en la densidad), sobre los ángulos

característicos en nuestros sistemas, y mostrar que el empaquetamiento granular puede mantener las razones de corte (que son proporcionales a los ángulos) mayores que aquellas calculadas con el coeficiente de fricción de Coulomb; los experimentos también predicen que un medio denso se rompe cuando su razón máxima de corte se alcanza (es decir cuando la diferencia $(q_m/p)-M$ es máxima). Ello manifiesta la mayor dificultad para obtener diferencias notorias entre $\bar{\theta}_r$ y $\bar{\phi}_m$ en materiales sueltos (*i.e.*, los materiales sueltos obedecen muy aproximadamente el modelo de Coulomb (3.3)). Nuestros argumentos, para entender los efectos dominantes en los experimentos en dos y tres dimensiones, permiten suponer que es posible construir un modelo simple basado en la deformación plástica controlada por fricción para entender primeramente la existencia de eventos catastróficos (avalanchas) y después su dinámica.

3.3 PRINCIPALES RESULTADOS DE LA TEORIA CINETICA DE MEDIOS GRANULADOS

Mencionamos en la introducción de este capítulo que en una avalancha en sistemas pequeños existen zonas con diferentes características de flujo y diferentes condiciones de frontera.

Por ejemplo, en los sistemas tridimensionales la zona que se fluidiza alcanza, en el caso de esferas, bajas concentraciones, al menos más bajas que el límite mecánicamente estable $\eta=0.56$, y altas razones de corte (gradientes del campo de velocidades). A diferencia de las avalanchas que se producen en sistemas con vibraciones verticales, las avalanchas en los sistemas de cilindro rotante no tienen un grosor uniforme sino que en promedio movilizan áreas de la manera ilustrada en la figura 15 del capítulo 2.

Las condiciones de frontera durante avalanchas son básicamente de dos tipos: fronteras con movimiento relativo entre sólidos y fronteras libres.

Debido a lo anterior, resulta difícil utilizar teorías cinéticas para describir la zona fluidizada. No obstante, presentamos una revisión de estas teorías para comprender la

validéz de sus resultados.

Dentro de las teorías cinéticas hay diferentes enfoques, dependiendo de los supuestos básicos para tratar el problema de la dinámica granular (interacciones entre granos, aproximaciones de grano grueso, etc.). En esta sección presentamos una discusión de la teoría cinética más exitosa [22], haciendo énfasis en sus hipótesis y en sus fallas fundamentales.

Al cuestionar la validéz de las teorías cinéticas, en el régimen en el que en apariencia éstas tienen sentido, debemos observar que recientes estudios de computadora [24] y de laboratorio [58] han mostrado que existen serias deficiencias en sus fundamentos [21-23]. Estas deficiencias se deben principalmente a la idealización que se hace para tratar de conseguir una descripción aproximada de los medios granulados.

El uso de las teorías cinética sólo se justifica en el régimen colisional, donde la concentración de granos es muy baja y éstos interaccionan a través de choques de corta duración. La introducción de razones de corte, necesaria para la aparición del flujo granular, permite establecer una analogía con el movimiento de las moléculas en un gas.

La teoría cinética que aquí discutimos es análoga a la teoría de Chapman-Enskog para gases densos [22]. En efecto, en la teoría cinética de Chapman-Enskog [61, 62] se considera que los gases densos están constituidos por moléculas con tamaño, por lo cual la hipótesis de colisiones localizadas debe ser sustituida por otra que tome en cuenta la dependencia espacial de las funciones de distribución en el término colisional. La dependencia espacial en las colisiones sugiere la introducción de una correlación espacial entre partículas; se supone, además, que esta correlación tiene la misma forma funcional que la encontrada en equilibrio. La densidad del gas es tal que la hipótesis de colisiones binarias se mantiene. De acuerdo a lo anterior, en un sistema fuera de equilibrio, la probabilidad conjunta de encontrar una partícula en el elemento de volumen dr_1 centrada en el punto r_1 , y teniendo velocidad dentro del intervalo c_1+dc_1 , y a otra partícula en el elemento dr_2 con velocidad en c_2+dc_2 está dada por

$f^{(2)}(r_1, c_1; r_2, c_2; t) dr_1 dr_2 dc_1 dc_2$, donde,

$$f^{(2)}(r_1, c_1; r_2, c_2; t) = g(r_1, r_2) f^{(1)}(c_1, r_1; t) f^{(1)}(c_2, r_2; t).$$

(3.22)

La cantidad $g(r_1, r_2)$ es la función de distribución radial que depende de la separación entre partículas, y es una función de la densidad. $f^{(1)}(c, r, t)$ denota la función de distribución de velocidades de una partícula, r es el vector de posición y c es vector de velocidad, al tiempo t . El producto $f^{(1)}(c, r, t) dc$ es la fracción de partículas por unidad de volumen en r , al tiempo t , con velocidades entre c y $c+dc$. La cantidad dc es el elemento de volumen en el espacio de las velocidades. La integración de $f^{(1)}$ sobre todas las velocidades da la densidad numérica local de partículas,

$$\int f^{(1)}(c, r, t) dc = n(r, t).$$

(3.23)

La aplicación de la teoría cinética de gases densos a medios granulados toma las siguientes hipótesis: Se consideran sistemas diluidos con grados de libertad puramente traslacionales; no hay fronteras que contengan al medio; los granos son esféricos, duros y lisos; los choques son instantáneos y no necesariamente elásticos por lo cual se define un coeficiente de restitución e , definido de la manera usual y finalmente, las colisiones son binarias.

De acuerdo a Lun et al [22] y a las bases de la teoría cinética, dada la propiedad $\Psi(c)$, su valor medio está determinado en términos de $f^{(1)}$ por

$$\langle \Psi \rangle = \frac{1}{n} \int f^{(1)}(c, r, t) \Psi(c) dc.$$

(3.24)

Conviene comentar que, para asegurar la validéz de la hipótesis

del continuo, el elemento de volumen dr debe simultáneamente satisfacer los requerimientos que éste contenga suficientes partículas para que Ψ , $f^{(1)}$ y n sean estadísticamente significativas, y suficientemente pequeñas para que los cambios de estas cantidades a través de éste sean despreciables.

En medios granulados la función de distribución de una partícula usualmente es supuesta Maxwelliana (en presencia de una corriente de bulo u , si tal no ocurre, $u=0$), por lo que

$$f^{(1)}(c, r) = n(2\pi T)^{-3/2} \exp[-(c-u)^2/2T], \quad (3.25)$$

donde T es la temperatura granular (que definimos más adelante), c es la magnitud de c y u es la magnitud de la velocidad de la corriente macroscópica media.

Consideremos ahora la propiedad microscópica Ψ y veamos como cambia la cantidad $\langle n\Psi \rangle$ en el elemento dr , con el tiempo. El cambio en $\langle n\Psi \rangle$ es fácil de calcular [22] y es debido a tres razones: porque la velocidad c de las partículas varía (debido a la presencia de campos externos); porque partículas que tienen la propiedad Ψ entran y salen del elemento dr ; por las colisiones entre partículas en dr , así

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle n\Psi \rangle = n \langle D\Psi \rangle - \nabla \cdot \langle nc\Psi \rangle + \phi_c, \quad (3.26)$$

donde, $D\Psi = (dc/dt) \cdot (d\Psi/dc) = F/m \cdot (\partial\Psi/\partial c)$ y F es la fuerza externa actuando sobre la partícula de masa m . ϕ_c se conoce como el término colisional y da la rapidéz media de cambio de Ψ por colisiones en la unidad de volumen. El cálculo de ϕ_c requiere de analizar el detalle de las colisiones.

El término colisional, que de acuerdo a la teoría de Chapman-Enskog debe de tomar en cuenta las correlaciones espaciales, se calcula [22] suponiendo colisiones binarias (con vector velocidad relativa c_{12}) entre granos lisos de diámetro σ , La hipótesis de inelasticidad se introduce a posteriori. El resultado del cálculo de ϕ_c puede ser expresado como

$$\Phi_c = -\nabla \cdot \Theta + \xi, \quad (3.27)$$

donde el vector Θ es

$$\Theta = -(\sigma^3/2) \int_{c_{12} \cdot k > 0} (\Psi'_2 - \Psi_1) (c_{12} \cdot k) k [1 - \frac{1}{2} \sigma k \cdot \nabla + \frac{1}{3!} (\sigma k \cdot \nabla)^2 + \dots] f^{(2)}(r, c_1; r + \sigma k, c_2; t) dk dc_1 dc_2, \quad (3.28)$$

Y

$$\xi = (\sigma^2/2) \int_{c_{12} \cdot k > 0} (\Psi'_2 + \Psi'_1 - \Psi_2 - \Psi_1) (c_{12} \cdot k) f^{(2)}(r - \sigma k, c_1; r, c_2; t) dk dc_1 dc_2, \quad (3.29)$$

las cantidades primadas aparecen cuando se toman en cuenta las colisiones inversas, k es vector unitario a lo largo de los centros.

Tomando Ψ como m , mc y $\frac{1}{2}mc^2$ en las relaciones (3.26)-(3.29) se encuentran ecuaciones de la forma

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla \cdot u, \quad (3.30)$$

$$\rho \frac{du}{dt} = \rho b - \nabla \cdot \bar{p}, \quad (3.31)$$

$$(3/2) \rho \frac{dT}{dt} = -\bar{p} : \nabla u - \nabla \cdot q - \gamma. \quad (3.32)$$

En estas ecuaciones, d/dt es la derivada material, $\rho = mn = \eta \rho_p$ es la masa del bulto, η es el empaquetamiento, ρ_p es la densidad de una partícula individual, $u = \langle c \rangle$ es la velocidad de bulto, \bar{p} el tensor de presión, $\gamma = -\xi (\frac{1}{2}mc^2)$ es la razón colisional de disipación por unidad de volumen y b es la fuerza de cuerpo por unidad de masa. Finalmente, $(3/2)T = 1/2 \langle C^2 \rangle$ es la energía cinética que especifica las fluctuaciones de la velocidad traslacional ($C = c - u$ es velocidad peculiar) y es conocida como la temperatura granular

es el vector de flujo de energía.

El tensor de presión total \bar{p} es la suma de una parte cinética

$$\bar{p}_k = \rho \langle CC \rangle, \quad (3.33)$$

y una parte colisional

$$\bar{p}_c = \Theta \underline{m} C. \quad (3.34)$$

Similarmente, el flujo de energía q es la suma de una parte cinética

$$q_k = (1/2) \rho \langle C^2 C \rangle, \quad (3.35)$$

y una parte colisional

$$q_c = \Theta \left(\frac{1}{2} m C^2 \right). \quad (3.36)$$

Hasta aquí las ecuaciones son formalmente exactas y ninguna aproximación física relacionada con los medios granulados se ha introducido.

El cálculo del término colisional requiere de especificar las características de las colisiones y las funciones de distribución radial y conjunta $f^{(2)}$. Relacionados con g (la función de distribución radial), sabemos que en avalanchas, y en general, en flujos de material granular bajo la acción de la gravedad, hay un flujo cortante que introduce un ingrediente de inhomogeneidad en la distribución de las colisiones. g debe depender entonces de c_1 , c_2 y μ de T . En la literatura éste hecho no es tomado en cuenta, tampoco hay un claro acuerdo en la forma en que g depende de la concentración granular [15, 22-24]

Para ilustrar el uso del formalismo anteriormente descrito Lun et al [22], propusieron el estudio de una muestra granular bajo la

acción de un flujo cortante simple. Fig. 35.

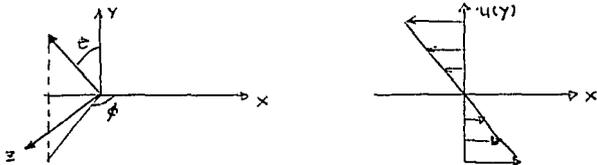


Fig. 35 Sistema de referencia para un flujo cortante simple.

En el flujo cortante simple (i.e. donde la razón de corte $\dot{\gamma} = \text{cte.}$) que aquí tratamos, hacemos $u = u(y)e_x$ y $\rho = \text{cte.}$ Para este flujo, $T = \text{cte.}$ y $q = 0$, por lo que la ecuación de energía traslacional (3.32) se reduce a

$$p_{xy} (du/dy) + \gamma = 0. \quad (3.37)$$

Para evaluar p_{xy} y la razón de disipación $\gamma = \xi (\frac{1}{2} m c^2)$ se hace uso de la función completa $f^{(2)}$ dada por (3.22). En ella debe incluirse, además de la anisotropía, el hecho de que en general las colisiones entre granos son inelásticas (en la evaluación del término colisional se consideran las velocidades antes y después de las colisiones) por lo que debemos introducir un coeficiente normal de restitución definido por

$$k \cdot c'_{12} = -e (k \cdot c_{12}), \quad (3.38)$$

Parte de la anisotropía espacial en $f^{(2)}$ es incorporada en la expresión para g y parte se incluye en las funciones de distribución Maxwellianas de una partícula alrededor de su velocidad local media (ec. 3.23). La expresión de g fué propuesta con argumentos dimensionales por Lun et al [22] como

$$g(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = g_0(\eta) [1 - \sigma(\pi T)^{-1/2} \mathbf{k} \mathbf{k} : \nabla \mathbf{u}], \quad (3.39)$$

donde $g_0(\eta)$ es la función de distribución radial de contacto para un gas de esferas duras,

$$g_0(\eta) = [1/(1-\eta)] + [3\eta/2(1-\eta)^2] + [\eta^2/2(1-\eta)^3], \quad (3.40)$$

que se propone para reducir (3.39) a $g_0(\eta)$ cuando $\nabla \mathbf{u} = 0$, es decir, cuando no hay anisotropía introducida por la corriente.

Bajo estas aproximaciones el cálculo de p_{xy} lleva a que

$$p_{xy} \approx p_{C_{xy}} = -\frac{6}{5} (3\pi)^{-1/2} [1+e] \eta \rho g_0 \sigma \langle C^2 \rangle^{1/2} u_{x,y}, \quad (3.41)$$

donde $u_{x,y} = \partial u_x / \partial y$. En (3.41), $p_{xy} = p_{C_{xy}}$ implica el hecho de que la contribución importante al esfuerzo cortante es dada por las colisiones.

De manera análoga, pero ahora usando la ecuación (3.31), se calcula la componente normal del esfuerzo p_{yy} , que resulta ser

$$p_{yy} \approx p_{C_{yy}} = p_{C_{xx}} = p_{C_{zz}} = \frac{2}{3} (1+e) \eta g_0 \rho \langle C^2 \rangle. \quad (3.42)$$

La componente normal del esfuerzo es principalmente colisional y coincide con las otras componentes colisionales normales del esfuerzo.

La comparación contra experimentos de flujo cortante simple de material granular seco, hechos en una celda de Couette-Taylor [16], es mostrada en la figura 36 y 37. Se usaron canicas de vidrio y poliestireno como materiales granulares. La normalización

por $\rho\sigma^2(u_{x,y})^2$ se hace para tener cantidades adimensionales.

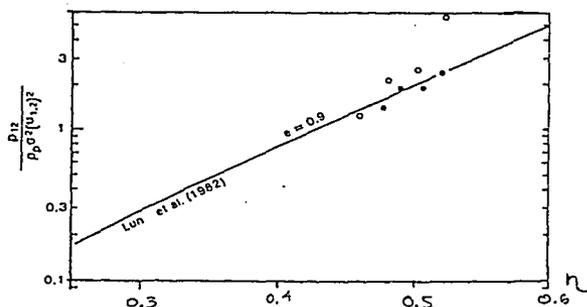


Fig. 36. Gráfica de p_{xy} como función del empaquetamiento η para material granular seco. (o) canicas de poliestireno. (•) canicas de vidrio [22].

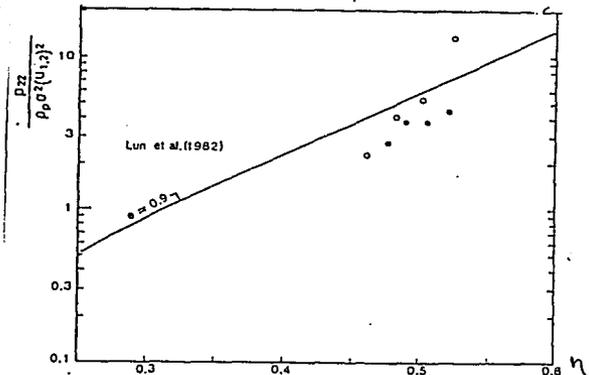


Fig. 37. Gráfica de p_{yy} como función del empaquetamiento η . (o) canicas de poliestireno. (•) canicas de vidrio, [22].

La curva teórica de Lun et al [22] para p_{xy} se ajusta adecuadamente a los datos experimentales, mientras la curva para p_{yy} no lo hace. El argumento de Lun et al para justificar el desacuerdo entre la teoría y los datos experimentales de la componente normal del tensor de esfuerzos, es que no se toma en

cuenta la fricción entre granos ni su inercia rotacional durante colisiones. La inercia rotacional provocaría que los granos, al chocar unos con otros (con giro), disminuyan su velocidad angular de manera que los esfuerzos también disminuirían. La fricción durante colisiones puede probablemente incrementar las razones impulsivas de corte y amortiguar las fluctuaciones. Estos dos efectos dan contribuciones opuestas, durante un proceso de promedio, para los esfuerzos cortantes. De aquí puede esperarse que la consideración de la fricción en los granos puede reducir los esfuerzos normales más que los cortantes.

Experimentos en el régimen colisional [58] muestran, en efecto, que la fricción y la rotación de los granos dan contribuciones importantes a la pérdida de la energía. Otras críticas también son propuestas a partir de estos estudios: En el caso de $f^{(2)}$ una hipótesis importante es la considerar caos molecular, por lo cual $f^{(2)}$ se puede expresar como producto de funciones de distribución de una partícula (independencia estadística). Es claro que la aparición de inhomogeneidades en las colisiones también conlleva a que esta aproximación es comúnmente violada. Colisiones binarias no son comunes en flujos granulados, como lo probó Drake [58], aún para flujos con bajas razones de corte, colisiones de más de tres partículas son frecuentes.

Drake [58] probó también que las colisiones tangenciales son comunes. Sólo muy recientemente [63], el problema de establecer un coeficiente de restitución tangencial ha sido resuelto, por lo que la mayoría de los trabajos que lo proponían en analogía con el coeficiente normal de la ecuación (3.37) acarrearán un inadecuado balance de la energía total [15, 23].

Los defectos de construcción de las funciones de distribución y las simples aproximaciones de despreciar la fricción y los modos rotacionales hacen evidente que las teorías cinéticas, hasta el momento, tienen problemas desde el punto de vista físico por lo que subestiman cantidades importantes en la dinámica granular.

3.4 MODELOS DE AUTOMATAS CELULARES

Los modelos de autómatas celulares no presentan dificultades

como las que aparecen en las teorías cinéticas (porque no se consideran interacciones detalladas). Las interacciones detalladas entre granos son sustituidas por reglas de autómatas celulares (reglas simples, desde el punto de vista físico, donde los granos no tienen tamaño y su evolución se realiza a tiempos discretos en una computadora).

Bak, Tang y Wiesenfeld [25] propusieron autómatas celulares para, aparentemente, describir la dinámica de avalanchas en medios granulados ideales. Los modelos son construidos por una adición aleatoria de granos en el sistema hasta que el montón se hace inestable y se desliza (o cede). Bak et al [25] afirmaron que de este modo la pendiente del montón alcanza un valor crítico (el ángulo de avalancha θ_c). Así, el correspondiente estado crítico Auto Organizado es un atractor para la dinámica del sistema. Kadanoff et al [26] construyeron autómatas en dos dimensiones que tampoco son realistas, sin embargo, para ilustración discutimos uno de estos modelos. En los modelos $h(i)$ es la variable básica, $i=(x,y)$ es un índice espacial y h es una variable entera que da la altura del montón en un punto dado. Todos los modelos involucran dos tipos de pasos. Primero, una partícula es añadida en un sitio aleatorio i y entonces

$$h(i)=h(i) + 1. \quad (3.43)$$

Segundo, después de la adición, un conjunto de reglas de autómatas celulares son aplicadas, lo que da un algoritmo para determinar si las pendientes del montón son suficientemente grandes para que un deslizamiento ocurra y cómo exactamente el montón se rearregla a sí mismo. Estas reglas son aplicadas repetidamente hasta que todas las pendientes son lo suficientemente pequeñas en cuyo caso la avalancha cesa. El criterio que determina qué es estable y las reglas para que un sistema inestable se auto organice a sí mismo, hasta que alcance la estabilidad, dependerá de las reglas particulares del modelo; un grano, si es inestable, se moverá a los sitios más cercanos. Si este alcanza una frontera, se elimina (i.e. sale del sistema).

En estos modelos se examinaron dos funciones de distribución diferentes; para cada avalancha, se calcula el número de granos que salen de la orilla, D , y el número total de saltos, F . Para cada cantidad puede obtenerse la distribución de tales eventos para sistemas de diferente tamaño lineal L . Las funciones de distribución de probabilidad $\rho(D, L)$ y $\rho(F, L)$ varían para diferentes modelos (esto es, el conjunto de reglas propuestas para cómo un estado inestable se reorganiza). Un sitio aleatoriamente escogido $i=(x, y)$ es usado para iniciar la avalancha. Uno añade un grano en la red de acuerdo a (3.43). Una vez que la adición es realizada, se checa si un deslizamiento puede ocurrir en cualquiera de los sitios de la red i . Diferentes modelos tienen diferentes criterios de deslizamiento. Para todos los sitios i que son inestables, las alturas del montón pueden cambiarse de acuerdo a

$$h(i+r) \rightarrow h(i+r) - \delta h(r), \quad (3.44)$$

los valores exactos de $\delta h(r)$ dependen del modelo. El criterio más común es el de imponer las condiciones de frontera abiertas, lo que significa que un grano que se mueve a la orilla del sistema debe salirse y no contribuye a la altura en ningún lugar. Los modelos son locales en el sentido de al moverse los granos caen sobre un sitio que es ya sea vecino cercano o próximo cercano del sitio i . Aún con estas limitaciones las avalanchas bidimensionales son complicadas porque los granos tienen más de una dirección para moverse.

Dos hechos relevantes de estos modelos son la direccionalidad y la naturaleza del criterio de deslizamiento.

En la direccionalidad hay dos grupos de procedimientos de disparo que parecen dar dos diferentes resultados en el número promedio de saltos. Para describir estas reglas se usa $\delta h(r)$ definido en (3.44) para cambiar la altura en el sitio $r+i$ en un proceso elemental de deslizamiento iniciado en el sitio i . Un grupo de procedimientos de salto satisface la condición

$$J = \sum_r \delta h(r) r = 0, \quad (\text{deslizamientos no dirigidos}) \quad (3.45)$$

para cada evento de salto dentro del interior del montón. Se llama a tal proceso no dirigido para distinguirlo de aquellos en los cuales el deslizamiento básico define una dirección, con un vector de dirección definido por

$$J = \sum_r \delta h(r) r \neq 0. \quad (\text{deslizamientos dirigidos}) \quad (3.46)$$

J es un vector constante que es el mismo para todos los eventos de deslizamiento en el interior del montón.

En el criterio de deslizamiento se calcula una pendiente proporcional a la diferencia de alturas entre apilamientos vecinos del montón, el símbolo σ se usa para indicar tal pendiente. De hecho pueden proponerse diferentes definiciones de $\sigma(x, y)$. Cualquiera que se escoja, si la cantidad es una pendiente, cambiando la altura de todos los vecinos cercanos por una cantidad fija deberá mantenerse invariante $\sigma(x, y)$. Con la pendiente definida de esta forma, el criterio de deslizamiento es

$$\sigma(x, y) > \sigma_c, \quad (3.47)$$

que corresponde a modelos con pendiente crítica. Cuando esta condición es satisfecha, el sitio (x, y) es inestable y h deberá cambiar.

Una última restricción en estos modelos es que los granos deben fluir, desde un sitio inestable, en direcciones no colineales. De lo contrario se tendría un comportamiento unidimensional.

Como ejemplo especificamos ahora un modelo dirigido ($J \neq 0$) con pendiente crítica. Definimos la pendiente como

$$\sigma(x, y) = h(x, y) - h(x+1, y) + h(x, y) - h(x, y+1), \quad (3.48)$$

si $\sigma > \sigma_c$ el punto (x, y) será inestable y habrá un deslizamiento desde aquel punto. La regla de deslizamiento es que el punto

inestable (x, y) cederá un grano al más bajo de sus dos vecinos cercanos $(x+1, y)$ o $(x, y+1)$. Si los dos vecinos tienen la misma altura, el grano se moverá a cualquier sitio con igual probabilidad. Después de un gran número de pasos, la pendiente local de cualquier sitio será σ_c y la forma del montón ya no cambiará. Las partículas que se añadan posteriormente saldrán del sistema.

Las distribuciones del tiempo de relajación y del número de saltos serán las mismas. Por ejemplo

$$\rho(F, L) = \begin{cases} \frac{2(L-F)+1}{L^2} & \text{para } 1 \leq F \leq L \\ 0 & \text{otra cosa} \end{cases} \quad (3.49)$$

para una matriz de $L \times L$.

El modelo anterior fué propuesto como un ejemplo simple de sistemas dependientes del tiempo en los cuales hay un comportamiento invariante de escala generado automáticamente por el proceso dinámico. Desde el punto de vista formal la invariancia de escala puede ser probada utilizando técnicas de escalamiento de tamaño finito y de ajuste multifractal [26]. En el caso de escalamiento de tamaño finito la función de distribución ρ es de la forma:

$$\rho(F, L) = L^{-\beta} g(F/L^\nu), \quad \text{con } L, F \gg 1 \quad (3.50)$$

β y ν son índices críticos que describen la probabilidad, y g es llamada la función de escalamiento. Para el caso de ajuste multifractal la función ρ obedece la relación:

$$\log_{10} \rho(F, L) / \log_{10} (L/L_0) = f(\log_{10} (F/F_0) / \log_{10} (L/L_0)), \quad (3.51)$$

donde L_0 y F_0 son constantes que dan las unidades apropiadas de la longitud y el tamaño de los saltos. Las formas (3.50) y (3.51) sólo coinciden cuando g es una ley de potencia simple y f es una

función lineal, en cuyo caso la función de distribución es descrita por sólo dos índices de escalamiento. La función de distribución (3.49), del ejemplo propuesto, satisface la invariancia de escala para $L, F \gg 1$, en donde $\beta=1$ y $\nu=1$. Lo que significa que la distribución de tiempos de relajación y de número de saltos es la misma (básicamente una función inversa de L) para tamaños grandes de la red.

El comportamiento para la distribución de tiempos de relajación de avalanchas encontrado en el modelo anterior no se observa en nuestros experimentos en dos dimensiones, aún en los sistemas grandes donde se alcanza la independencia en los efectos de tamaño finito. Modelos de autómatas celulares en más de dos dimensiones han sido propuestos [64], sin embargo estos presentan CAO y no son adecuados para interpretar la dinámica de avalanchas. En particular, Lomnitz et al [65] propusieron autómatas que no presentan CAO y que pueden constituir una representación que, con adecuadas mejoras, podrían describir avalanchas reales.

3.5 CONCLUSIONES

En este capítulo hemos presentado una discusión para entender las variaciones en los ángulos de avalanchas. Hicimos ver que los ángulos a los que se generan las avalanchas pueden ser vistos como variaciones respecto al ángulo máximo medio $\bar{\phi}_m$. Las variaciones máximas σ , respecto a $\bar{\phi}_m$ esencialmente determinan el tipo de dinámica que detiene a la avalancha. Nuestros resultados son consistentes con la conjetura de Evesque [57] de que hay esencialmente dos diferentes mecanismos de detenimiento de avalanchas, el friccional, en el caso bidimensional, y el colisional, en los sistemas tridimensionales largos.

Mostramos en la discusión de la sección 3.3 que las teorías cinéticas presentan serias dificultades en su fundamentación y en las aproximaciones que se hacen para tomar en cuenta las interacciones entre granos, lo que afecta críticamente el cálculo del término colisional a partir del cual las ecuaciones macroscópicas son obtenidas. Modelos más realistas de interacción y de funciones de distribución son necesarios con miras a la

construcción de una teoría microestructural bien fundamentada.

Los modelos de autómatas celulares no contienen las dificultades que surgen al proponer un cierto tipo de interacción detallada y de estadística en la teoría cinética. Con todo, no hay hasta el momento autómatas celulares que reproduzcan la estadística de los eventos de avalanchas. Lomnitz et al [65] mostraron en un estudio reciente que es posible construir autómatas que no presenten CAO. La mejora de estos modelos puede ser orientada, quizá, con experimentos como los aquí realizados.

CAPITULO 4

CONCLUSIONES GENERALES

En el presente trabajo hemos estudiado el problema de las avalanchas desde diferentes perspectivas e imponiendo algunas limitaciones de caracter experimental. La limitaciones las basamos en el criterio de tener sistemas simples en composición y en la dinámica introducida. Nuestra opinión es que los sistemas, aún con dichas limitaciones, presentan comportamientos comunes a los sistemas con avalanchas reales.

Desde el punto de vista histórico (capítulo I) mencionamos que Coulomb [1] propuso un modelo de cedencia en el cual consideraba únicamente un ángulo de avalancha (el ángulo de fricción interna ϕ) dependiente solo de las propiedades del material, pero no del empaquetamiento, ni de las condiciones de frontera, ni de los efectos de tamaño finito. Estudios de otros autores [42-49] y los presentados en este trabajo muestran claramente que, al menos para sistemas pequeños (con razones de tamaño de contenedor a tamaño de grano menores que 1000), se manifiesta claramente la fuerte dependencia en el tamaño finito y con ello la aparición de dos ángulos característicos medios: el ángulo de reposo $\bar{\theta}_r$ al que relaja una avalancha y el ángulo de avalancha o ángulo máximo $\bar{\phi}_m$ al que se inicia una avalancha.

En el presente trabajo estudiamos principalmente los efectos de tamaño finito y dimensionalidad sobre los ángulos medios de avalancha y sobre sus tiempos característicos medios. Dichos efectos los estudiamos usando contenedores cilindricos pequeños (con diámetros de cilindro menores que 200 diámetros de grano), y que giran horizontalmente a baja velocidad angular Ω ($0.3^\circ/\text{seg} < \Omega < 18^\circ/\text{seg}$). Los cilindros fueron llenados con materiales granulares ideales secos (canicas de vidrio de 3mm a 6mm), en los que los efectos de la polidispersión y el cambio en la forma de los granos no fueron introducidos. Recordemos que los sistemas bidimensionales consisten de cilindros construidos con dos placas circulares con separación entre ellas de casi un diámetro de

grano. El diámetro de los cilindros lo medimos en diámetros de grano i.e. $s=D/d$, donde D es el diámetro del cilindro y d es el diámetro de las canicas ($d=3.18\text{mm}$). Los sistemas tridimensionales consistieron de cilindros circulares con diámetro constante $D=14.6\text{cm}$ y largo variable. La longitud de los cilindros la expresamos en diámetros de grano $l=L/d$, donde L es la longitud del cilindro.

Hemos insistido en que los experimentos son de crucial importancia para el conocimiento de éstos medios. Por un lado orientan los enfoques teóricos, y por otro, ponen de manifiesto cualidades que no aparecen en la mayoría de los materiales. Fenómenos como el arqueo, la fluidización, las variaciones en la densidad, los efectos del empaquetamiento (que es una función de la dimensionalidad), etc., constituyen un conjunto de fenómenos difíciles de imaginar y de explicar sin una previa información experimental.

A manera de conclusión podemos decir que las avalanchas deben su origen y su evolución (movimiento de los granos) a las variaciones en la densidad granular o empaquetamiento. El modelo de Coulomb representa una buena aproximación para la cedencia en materiales en el estado crítico (esto es un estado en el que el empaquetamiento es independiente de la presión), sin embargo no explica las variaciones observadas en el ángulo crítico o ángulo de fricción ϕ para materiales con empaquetamiento medio o denso.

Un efecto que debemos mencionar es que en los sistemas bidimensionales al disminuir el tamaño de los cilindros relativo a los granos, el empaquetamiento cambia mucho entre una avalancha y otra, lo que genera grandes cambios en los ángulos individuales de avalancha y por tanto mayor dispersión, σ , respecto al valor medio $\bar{\phi}_m$. Los sistemas tridimensionales cortos (con longitud menor de 15 diámetros de grano) también presentan grandes variaciones en el empaquetamiento y por tanto dispersión similar a la de los sistemas bidimensionales. Cuantitativamente, en los sistemas bidimensionales y en los sistemas tridimensionales cortos, $\sigma=8/2$. Ello, como discutimos en la sección 3.2, indica que el régimen que detiene la avalancha está dominado básicamente por la fricción

debida al contacto entre granos. En los sistemas tridimensionales largos ($l \geq 15.7$), $\sigma = \delta$, por lo que, como vimos en 3.2, el régimen dominante durante la avalancha es colisional, es decir, los granos pierden la mayor parte de su energía cinética en colisiones.

Otro resultado de interés es el relacionado con el traslado de áreas (o volúmenes) que ocurre durante avalanchas. En los sistemas bidimensionales a medida que se aumenta el tamaño de los cilindros el traslado de áreas no es tan simple como el ilustrado en la figura 13 del capítulo II. Más aún, para cilindros grandes los granos penetran en el seno del material (lo que puede tomarse como una base para elaborar modelos difusivos en sistemas grandes). Otra implicación de aumentar el tamaño de los sistemas bidimensionales es que en general el flujo de material granular durante avalanchas crece para pequeños valores de s (fig. 14' capítulo II), a valores intermedios de s el flujo alcanza un máximo y después disminuye monotónicamente con s ($s > 100$). Esto lleva a pensar que el área movilizada no es un triángulo inscrito en un círculo sino más bien una pequeña zona de longitud s y grosor variable y que finalmente los modelos de Coulomb pueden ser adecuados para describir avalanchas en el límite de sistemas bidimensionales de grandes tamaños. Otro indicio de la validez del modelo de Coulomb para sistemas bidimensionales es el hecho de que para s grandes aparentemente $\delta \rightarrow 0$ lo cual implicaría que existe un solo ángulo de avalancha. Las teorías de Criticalidad Auto Organizadas que están basadas finalmente en la existencia de dicho ángulo pueden posiblemente presentar un adecuado tratamiento para este régimen.

Desde el punto de vista del continuo el origen y evolución de las avalanchas pueden ser bien interpretadas via teoría de la plásticidad. Para ello introdujimos el concepto de nivel desviador q/p cuyo uso facilita el tratamiento teórico y la conexión con pruebas experimentales. Recordemos que el nivel desviador se define como el cociente de la magnitud del esfuerzo desviador q (que es el esfuerzo sin la parte que corresponde a la presión hidrostática, es decir, un esfuerzo cortante, y que es básicamente el responsable de las deformaciones plásticas y de la cedencia) y

el esfuerzo hidrostático p . Mayor nivel desviador significa mayor esfuerzo cortante.

Las variaciones en los ángulos son debidas a la fuerte dependencia del nivel desviador en la densidad; una vez que se alcanza un valor crítico de q/p el montón cede (esto es, se deforma plásticamente). Este valor crítico puede sobrepasar el llamado estado crítico del material. El estado crítico es el estado en el cual la tangente del ángulo de fricción interna ϕ es igual al nivel desviador ($q_m/p = \tan\phi$, que se conoce como ley de Coulomb para la cedencia de los suelos) y en el que, para un material poco empacado ocurre una avalancha. El valor máximo (antes de cedencia) para q/p no siempre es igual a $\tan\phi$ sino que puede sobrepasar este valor. Ello depende de los valores de la densidad. Sistemas muy empacados llevan a valores de q/p mayores que los valores de q_m/p correspondientes a sistemas pobremente empacados.

Con miras a formalizar una posible teoría debemos hacer notar que la forma funcional de q/p debe involucrar, al menos, a las deformaciones ϵ y a la densidad. Una ecuación plástica que involucre estos factores está en espera de deducción.

Posibles orientaciones respecto a la construcción de una teoría son los efectos de tamaño finito. Ellos siempre deben ser considerados como caso límite en la formulación y prueba de las teorías. Interesantes propiedades ocurren en nuestros sistemas; el escalamiento geométrico y temporal en sistemas bidimensionales consiste en que los ángulos y los tiempos característicos de avalanchas son funciones del cociente $s=D/d$ donde D es el diámetro de los cilindros y d es el diámetro de las canicas. Iguales ángulos o tiempos se alcanzan si los diámetros son multiplicados por un factor común. Las distribuciones de ángulos y tiempos para un valor dado de s que conducen a calcular los valores medios de θ_r y ϕ_m también se escalan.

En los sistemas tridimensionales una rápida independencia respecto al tamaño de los contenedores es alcanzada. En los sistemas bidimensionales esta independencia puede ser conseguida manteniendo la velocidad tangencial pequeña a fin de no introducir

efectos inerciales.

Los sistemas bidimensionales con velocidad angular constante o con velocidad tangencial constante presentan fuerte dependencia en los ángulos y los tiempos respecto a la cantidad s (el diámetro de los contenedores en unidades de diámetros de grano). Esta dependencia consiste en funciones oscilatorias de los ángulos con diferencia de ángulos $\delta = \bar{\phi}_m - \bar{\theta}_r$, tendiendo rápidamente a cero cuando s crece. Las oscilaciones pueden ser debidas a los diferentes empaquetamientos que se van dando a medida que s crece.

Otro resultado interesante consiste en que para $s \leq 30$ las diferencias δ crecen, contrario al resultado de Liu *et al* [49] que para contenedores abiertos δ se mantiene constante para ese mismo intervalo de s . Esta diferencia no es necesariamente una contradicción puesto que puede estar relacionada con las diferentes condiciones de esfuerzos entre sistemas abiertos y cerrados.

Una observación final es que cambiamos la rugosidad de las paredes de los cilindros en los casos bi y tridimensionales. Notamos que los valores de los ángulos y de los tiempos característicos de avalancha no se ven modificados por este hecho lo que confirma la naturaleza superficial de la evolución de las avalanchas.

El trabajo futuro y perspectivas tiene varias direcciones; una es la construcción de modelos del continuo tipo modelos de materiales plásticos a partir de considerar las variaciones en la densidad en el nivel desviador. Es posible a través de técnicas de digitación evaluar la densidad en cada instante de tiempo durante el proceso de formación o evolución de avalanchas. Esto permitiría evaluar la densidad y a partir de ello su relación con la deformación.

La construcción de autómatas más realistas puede ser orientada por nuestros experimentos con avalanchas bidimensionales y tridimensionales de granos de igual tamaño. Observación cuidadosa y detallada del movimiento de los granos es necesaria para la formulación de estos autómatas.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Coulomb, C. A. (1776). Essai sur une application des règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique, relatifs à l'architecture. Memoires de Mathématique de l'Academie Royale des Sciences (Paris) 7, 343.
- [2] Reynolds, O. (1885). On the dilatancy of media composed of rigid particles in contact, *Phyl. Mag.* 20, 469.
- [3] Berryman, J. (1983). Random close packing of hard spheres and disks, *Phys. Rev. A* 27, 1053.
- [4] Onoda, G. Y. y Liniger, E. G. (1990). Random loose packings of uniform spheres and the dilatance onset, *Phys. Rev. Lett.* 64, 2727.
- [5] Owen, P.R. (1964). Saltation of uniform grains in air, *J. Fluid Mech.* 20, 225.
- [6] Francis, J. R. D. (1973). Experiments on the motion of solitary grains along the bed of a water-stream, *Proc. Roy. Soc. A* 332, 443.
- [7] Bagnold, R. A. (1973). The nature of saltation and of bead-load transport in water, *Proc. Roy. Soc. A* 332, 473.
- [8] Fredsoe, J. (1974). On the development of dunes in erodible channels, *J. Fluid Mech.* 64, 1.
- [9] Wieghardt, K. (1975). Experiments in a granular flows, *Ann. Rev. Fluid Mech.* 7, 89.
- [10] Takahashi, T. (1981). Debris Flow, *Ann. Rev. Fluid Mech.* 13, 57.
- [11] Hopfinger, E. J. (1983). Snow avalanche motion and related phenomena, *Ann. Rev. Fluid Mech.* 15, 47.
- [12] Bagnold, R. A. (1965). The physics of blown sand and desert dunes, Methuen, Londres.
- [13] Sokolovskii, V. V. (1965). Statics of granular media, Pergamon Press, N. Y.
- [14] Schofield A. y Wroth, P. (1968). Critical state soil mechanics, McGraw-Hill, Londres.

- [15] Jackson, R. (1983). Some mathematical and physical aspects of continuum models for the motion of granular materials, en Theory of dispersed multiphase flow. Editado por R. E. Meyer, Academic Press, N. Y.
- [16] Savage, S. B. (1979). Gravity flow of cohesionless granular materials in chutes and channels, *J. Fluid Mech.* 92, 53.
- [17] Sayed, M. y Savage, S. B. (1983). Rapid gravity flow of cohesionless granular materials down inclined chutes, *J. Appl. Math. Phys. (ZAMP)* 34, 84.
- [18] Haff, P. K. (1983). Grain flow as a fluid-mechanical phenomenon, *J. Fluid Mech.* 134, 401 .
- [19] Schaeffer, D. G., Shearer, M., y Pitman, E. B., (1990). Instability in Critical State Theories of Granular Flow, *SIAM J. Appl. Math.* 24, 289.
- [20] Bagnold, R. A. (1954). Experiments on a gravity free dispersion of large solid spheres in a Newtonian fluid under shear, *Proc. Roy. Soc. Serie A. Londres*, 225, 49.
- [21] Shen, H., y Ackermann, N. L., (1982). Constitutive relationship for fluid-solid mixtures, *J. Eng. Mech. ASCE* 108, 748.
- [22] Lun, C. K. K., Savage, S. B., Jeffrey, D. J. y Chepuriniy, N., (1984). Kinetic theories for granular flow: inelastic particles in Couette flow and slightly inelastic particles in a general flowfield, *J. Fluid Mech.* 140, 223.
- [23] Jenkins, J. T. y Mancini, F., (1989). Kinetic theory for binary mixtures of smooth, nearly elastic spheres, *Phys. Fluids A* 1, 2050.
- [24] Campbell, C. S., (1989). The stress tensor for simple shear flows of a granular material, *J. Fluid Mech.* 203, 449.
- [25] Bak, P., Tang, C. y Weisenfeld, K., (1987). Self-Organized criticality: an explanation of $1/f$ noise, *Phys. Rev. Lett.* 59, 381.
- [26] Kadanoff, L. P., Nagel, S. R., Wu, L. y Zhou, S., (1989). Scaling and universality in avalanches, *Phys. Rev. A* 39, 6524.

- [27] Carlson, J. M., Chayes, J. T., Grannan, E. R. y Swindle G. H., (1990). Self-Organized Criticality in Sandpiles: Nature of a Critical Phenomenon, *Phys. Rev. A* **42**, 2467.
- [28] Hagen, G., (1852). *Berlin Monatsber. Akad. Wiss.* **35**.
- [29] Faraday, M., (1831). *Phil. R. Soc.* **52**, 299, London.
- [30] Bagnold, R. A., (1966). The Shearing and Dilatation of Dry Sand and the 'Singing' Mechanism, *Proc. R. Soc. Serie A, Londres*, **295**, 219.
- [31] Savage, S. B., (1989). Flow of Granular Materials. en Theoretical and Applied Mechanics, P Germain, M. Piau, y D. Caillerie. Eds. IUTAM, Elsevier.
- [32] Johnson, P. C. y Jackson, R., (1987). Frictional-Collisional Constitutive Relations for Granular Materials, with Application to Plane Shearing. *J. Fluid. Mech.* **176**, 67.
- [33] Johnson, P. C., (1990). Frictional-Collisional Equations of Motion for Particulate Flows and their Application to Chutes, *J. Fluid Mech.* **210**, 501.
- [34] Mello, T. M., Diamond, P. H. y Levine, H., (1991). Hydrodynamic Modes of a Granular Shear Flow, *Phys. Fluids A* **3**, 2067.
- [35] Babic, M., Shen, H. H. y Shen, H. T., (1990) The stress tensor in granular shear flows of uniform, deformable disks at high solid concentrations, *J. Fluid Mech.* **219**, 81.
- [36] Sokolovskii, V. V., (1965). Statics of Granular Media, Pergamon Press.
- [37] Prakash, J. R. y Kesava Rao, K., (1991). Steady Compressible Flow Cohesionless Granular Materials Through a Wedge-Shaped Bunker, *J. Fluid Mech.* **225**, 21.
- [38] Savage, S. B., (1984). The Mechanics of Rapid Granular Flows en *Advances In Applied Mechanics*, **24**, 289.
- [39] Evesque, P., y Rajchenbach, J., (1988) Caractérisation d'avalanches de billes dans un cylindre tournant, *C. R. Acad.Sci. (Paris)* **307**, Ser II, 223.
- [40] Jaeger, H. M., Liu, C., y Nagel S. R., (1989) Relaxation at the angle of repose, *Phys. Rev. Lett.* **62**, 40.

- [41] Jaeger H. M. y S. R. Nagel, (1991). Physics of the Granular State, The James Frank Institute and The Physics Department. Universidad de Chicago. (Preprint)
- [42] Franklin, F.C. y Johanson, L.N., (1959). Flow of Granular Material Through a Circular Orifice, Chem. Eng. Sci. 4, 119.
- [43] Evesque, P. y Rajchenbach, J., (1989). Instability in a Sand Heap, Phys. Rev. Lett. 62, 44.
- [44] Laroche, C., Douady, S. y Fauve, S., (1989). Convective Flow of Granular Masses Under Vertical Vibrations, J. Phys. (Paris) 50, 699.
- [45] Evesque, P., Smatula, E. y Denis, J.-P., (1990). Surface Fluidization of a Sand Pile, Europhys. Lett. 12, 623.
- [46] Clement, E. y Rajchenbach, J., (1991). Fluidization of a Bidimensional Powder, Europhys. Lett. 16, 133.
- [47] Goodman, R. E. y Seed, H. B., (1966). Earthquake-Induced Displacements in a Sand Embankment, J. Soil Mech. and Foundations Div. ASCE, SM2, 92, 4736.
- [48] Held, G. A., Solina II, D. H., Keane, D.T., Haag, W. J., Horn, P. M. y Grinstein, G., (1990). Experimental Study of Critical-Mass Fluctuations in a Evolving Sandpile, Phys. Rev. Lett. 65, 1120.
- [49] Liu, C., Jaeger, H. M. y Nagel, S. R., (1991). Finite-Size Effects in a Sandpile, Phys. Rev. A 43, 7091.
- [50] Friedman, G. M., (1961). Distinction Between Dune, Beach, and River Sands from Their Textural Characteristics, J. Sedim. Petr. 31, 514.
- [51] Klinzing, G. E., (1981). Gas-Solid Transport, McGraw-Hill. Capitulo I.
- [52] Forrest, J. y Clark, N. R., (1989). Characterizing Grain Size Distributions, Sedimentology 27, 291.
- [53] Barret, P. J., (1980). The Shape of Rock Particles, A Critical Review, Sedimentology 27, 291.
- [54] Meakin, P. y Jullien, R., (1991). Periodic Disc Packings Generated by a Random Deposition in Narrow Channels, Europhys. Lett. 15, 851.

- [55] Ramirez, R. W., (1985). The Fast Fourier Transform Fundamentals and Concepts. Prentice-Hall, N. Y.
- [56] Feder, J., (1988). Fractals, Plenum Press, N. Y.
- [57] Evesque, P., (1991). Analysis of Process Governing Sandpile Avalanches Using Triaxial Test and "Critical State" of Soil Mechanics. *Europhys. Lett.* **14**, 427.
- [58] Drake, T. G., (1991). Granular Flow: Physical experiments and their implications for microstructural theories, *J. Fluid Mech.* **225**, 121.
- [59] Mendelson, A., (1968). Plasticity: Theory and Application. Robert E. Krieger Publishing Co. Malabar, Florida
- [60] Rajchenbach, J., (1990) Flow of powders: From discrete avalanches to continuous regime, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 2221.
- [61] Chapman, S. y Cowling, T. G., (1952). The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases. Cambridge University Press. Cambridge, Inglaterra.
- [62] Harris, S., (1971). An Introduction to the Theory of The Boltzmann Equation. Holt, Rinehart & Winston, N.Y.
- [63] Stronge, W. J., (1991). Friction in Collisions: Resolutoon of a Paradox, *J. Appl. Phys.* **69**, 610.
- [64] O'Brien, K., Wu, Lei, y Nagel, S. R., (1991). Avalanches in Three and Four Dimensions, *Phys. Rev. A.* **43**, 2052.
- [65] Lomnitz-Adler, J., Knopoff, L., y Martínez-Mekler, G. (1992) Avalanches and Epidemic Models of Fracturing in Earthquakes, *Phys. Rev. A* **45**, 2211.