17A
2ej-

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Facultad de Ciencias

EXISTENCIA DE ÓRBITAS PERIÓDICAS MÚLTIPLES EN SUPERFICIES HAMILTONIANAS ESTRELLADAS.

TESIS
que para obtener el título de:
MATEMÁTICO
presenta
JOSÉ MARTÍNEZ LEÓN

México D.F. primavera de 1992

INDICE

CAPITULO 1

INTRODUCCION

En el presente trabajo se exhibe la existencia de órbitas periódicas múltiples, en un numero optimo, sobre una superficie $\Sigma \subset \mathbf{R}^{2N}$, sujeta a ciertas condiciones geométricas, para el sistema Hamiltoniano

$$\frac{dx}{dt} = J\nabla H(x(t)) \qquad (SH)$$

donde $J = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$, I es la matriz identidad en $M_{N\times N}$, $H \in C^2(\mathbf{R}^{2N}, \mathbf{R})$ y $H^{-1}(1) = \Sigma$.

Consideremos un caso particular muy sencillo del problema general que nos ocupará.

Sea $H : \mathbf{R}^{2N} \longrightarrow \mathbf{R}$ $\quad H(x) := x \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix} x^t$ donde $\omega = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_N \end{pmatrix}$ con $a_1, \ldots, a_N > 0$, es decir, $H(x) = (a_1x_1^2 + \ldots + a_Nx_N^2 + a_1x_{N+1}^2 + \ldots + a_Nx_{2N}^2$. H es una función C^∞ con $H'(x) = (2a_1x_1, \ldots, 2a_Nx_N, 2a_1x_{N+1}, \ldots, 2a_Nx_{2N})$. Por lo que $H'(x) \neq 0 \ \ \forall\ x \neq 0$. Así el elipsoide $\xi = H^{-1}(1)$ es una variedad.

Cuántas curvas periódicas existirán sobre el elipsoide que satisfagan (SH) ? En forma obvia la respuesta depende de las a_i's. Si tomamos el plano P_i , generado por e_i, e_{i+N} con $1 \leq i \leq N$ (donde e_i $1 \leq i \leq 2N$ es la base canónica de $\mathbf{R}^{2N}$), intersección con ξ obtendremos una trayectoria que de ser parametrizada sea una curva que satisfaga (SH). Si $x(t)$ es una de tales curvas las únicas reparametrizaciones que satisfacen (SH) son $x(t+\theta)$, $\theta \in [0,T]$ (donde T es el periodo de $x(t)$). Todas estas curvas son en esencia iguales y definen una única órbita de periodo T. A dos curvas que determinen diferentes órbitas las llamaremos independientes.

Si $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_{2N}(t))$ es cualquier curva en ξ que satisface

$$\dot{x}(t) = J\nabla H(x(t))$$

entonces

$$\dot{x}_i(t) = -2a_ix_{N+i}(t)$$

y

$$\dot{x}_{i+N}(t) = 2a_ix_i(t), \quad \text{si } 1 \leq i \leq N$$

Por lo tanto

$$\ddot{x}_i(t) + 4a_i^2x_i(t) = 0 \ \ \text{si} \ \ 1 \leq i \leq N \qquad (1)$$

Esta última es una ecuación lineal homogénea de segundo orden, normal en $(-\infty, \infty)$, por lo que su espacio de soluciones tiene dimensión 2 y está generado por

$$\{\ \cos(2a_it)\ ,\ \textit{sèn}(2a_it)\ \}$$

Así las soluciones de (1) son de la forma

$$x_i(t) = \lambda_i \cos(2a_i t) + \mu_i sen(2a_i t)$$
$$x_{i+N} = -\frac{1}{2a_i}\dot{x}_i(t) \qquad \text{donde } \lambda_i,\ \mu_i \in \mathbf{R}\ ,\ 1 \leq i \leq N.$$

De la continuidad de x_i, x_{i+N} se sigue que su periodo mínimo de cada x_i es

$$T_i = \frac{q_i \pi}{a_i} \qquad p.a.\quad q_i \in \mathbf{Q} \quad 1 \leq i \leq N$$

Así para que la curva se cierre debe pasar que si

$$\lambda_i \neq 0 \ \text{ó}\ \mu_i \neq 0, \text{ entonces } [T_i] = c \in \mathbf{R}\ /\mathbf{Q}^* \ \text{ con } c \text{ fijo.}$$

donde $\mathbf{Q}^*$ denota a los racionales menos el cero y $\mathbf{R}\ /\mathbf{Q}^*$ denota el grupo cociente tomando como operación la multiplicación. Pero como $[T_i] = [T_j]$ si y sólo si $a_i/a_j \in \mathbf{Q}$ podemos construir un elipsoide que tenga exactamente N órbitas periódicas pidiendo que $[a_i] \neq [a_j]$ si $i \neq j$. Por lo que el número N es óptimo en las condiciones del

TEOREMA Sea $H \in C^2(\mathbf{R}^{2N}, \mathbf{R})$ tal que

(i) El conjunto $A := \{ x \in \mathbf{R}^{2N} \ :\ H(x) \leq 1 \}$ es no vacio, compacto,estrictamente estrellado (para definición ver 4.1) y $\Sigma := H^{-1}(1)$ es la frontera de A.

(ii) $x \cdot \nabla H(x) \neq 0 \ \ \forall\, x \in \Sigma$.

Si $R^2 < 2\rho^2$ donde R es tal que $A \subset \{x \in \mathbf{R}^{2N} \ :\ |x| \leq R\ \}$ y ρ es el maximo número para el cual $(T_x\Sigma + x) \cap \{x \in \mathbf{R}^{2N} :\ |x| \leq \rho\ \} = \emptyset$ para todo $x \in \Sigma$. Entonces (SH) tiene al menos N distintas órbitas periódicas en Σ.

La idea de la demostración es la siguiente:

Se muestra que las soluciones de (SH) están en correspondencia biunívoca con los puntos críticos de una funcional ϕ definida sobre una variedad de Hilbert M estrictamente estrellada contenida en $H^{1/2}(\mathbf{S}^1\ , \mathbf{C}^N)$. Utilizando un principio de minimax (teorema 3.8) se prueba que hay al menos N distintos niveles críticos (un nivel crítico es $\phi^{-1}(a)$ p.a. $a \in \mathbf{R}$ tal que existe $x \in \phi^{-1}(a)$, x punto crítico de ϕ) o un nivel crítico con un número infinito de puntos críticos independientes (i.e. no son reparametrizaciones de una misma curva). En la demostración del teorema 3.8 se utiliza una versión del lema de deformación [Su] página 246 que echa mano de una condición C^* más fuerte que la usual de Palais-Smale lo cual repercute en que la teoría de índice tenga una definición menos general (definición 2.1 inciso (iv)) que la desarrollada en [BLMR]. Por último se exhibe que en cada uno de los N niveles críticos, los puntos críticos tiene periodo 2π y así son independientes. Quedando demostrado el teorema.

CAPITULO II

TEORIA DE INDICE

En este capítulo se define el índice y el índice relativo como en [BLMR] con la variante introducida por [Su] (en (iv) de la definición 2.1 de que $K(A)$ sea acotado), y se prueban algunas propiedades tales como la propiedad de continuidad como lo hace [Be], la propiedad del mapeo en la cual se sigue a [Su], el cálculo del índice para conjuntos radiálmente homeomorfos a ciertas esferas (propiedad No.3) el el cual se sigue a [BLMR] y la subaditividad en donde se tomaron ideas de [BLMR] y [Su].

La teoría de índice desarrollada en [BLMR] para acciones de $\mathbf{S}^1$, sobre E un espacio de Hilbert separable, las cuales tienen un espacio de puntos fijos de dimensión finita tiene reminiscencias de las nociones de índice e índice relativo introducido por E. Fadell, S. Husseini y P.H. Rabinowitz [FHR]. Los cuales usando herramientas de topología algebraica construyen una teoría general de índice relativo para espacios provistos de alguna G-acción donde G es un grupo de Lie compacto. Beretycki et al. dan una construcción geométrica del índice relativo, usando herramienta de análisis que reduce la topología algebraica al uso de una versión del teorema de Borsuk-Ulam para acciones de $\mathbf{S}^1$.

En la propiedad 3 del índice relativo, la cual es más general que la analoga de [BLMR], se usa una versión más fuerte del teorema de Borsuk-Ulam en donde se permite que los puntos fijos sean mapeados por un homeomorfismo que no necesariamente es la identidad. En el apéndice B se presenta una demostración de esta versión del teorema de Borsuk-Ulam que se debe a la Dra. Monica Clapp.

§2.1 Notación y definiciones básicas

Sean E un espacio de Hilbert separable /$\mathbf{C}$ e Isom(E) = { $L : E \longrightarrow E$: L es una isometría lineal }. Sea T : $\mathbf{S}^1 \longrightarrow$ Isom(E) una representación unitaria de $\mathbf{S}^1$ en E i.e. T es continua y $T_{\theta+\theta'} = T_\theta \circ T'_\theta \;\forall\; \theta, \theta' \in \mathbf{S}^1 = \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$,en adelante se hara referencia a un elemento de $\mathbf{S}^1$ por $e^{i\theta}$ o sólo por $\theta \in \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ (Nótese que $\|T_\theta(u)\| = \|u\| \;\; \forall \;\; u \in E \; , \forall \; \theta \in \mathbf{S}^1$).

En lo sucesivo se omitirá el término unitaria al referirse a una representación y a lo largo de este capítulo supondremos que E está provisto de una representación T de $\mathbf{S}^1$.

Definiciones:

· Representación regular

Una representación R de $\mathbf{S}^1$ en $\mathbf{C}^k$ se dice **regular** si 0 es el único **punto fijo** ,es decir, el único $u \in \mathbf{C}^k$ tal que $R_\theta(u) = u \ \ \forall \ \theta \in \mathbf{S}^1$

· Subconjunto T-invariante

Un subconjunto $A \in E$ se dice **invariante bajo T o T- invariante** si $T_\theta A = A \ \ \forall\, \theta \in \mathbf{S}^1$

· Funcional T-invariante

Una función continua $f : E \longrightarrow \mathbf{R}$ es una **funcional T-invariante** si $f(T_\theta(u)) = f(u) \ \ \forall \ u \in E \ \ \forall \ \theta \in \mathbf{S}^1$

Cuando del contexto sea claro que representación se esta usando, a los conceptos anteriores nos referiremos como subconjunto invariante y como funcional invariante respectivamente.

·Función equivariante

Sea F un espacio de Hilbert y R una representación de $\mathbf{S}^1$ en F. Sea $A \subset E$ un subconjunto invariante bajo T. Una función $\phi : A \longrightarrow F$ se dice **(T,R)-equivariante** si $\phi \circ T_\theta = R_\theta \circ \phi \ \ \forall\, \theta \in \mathbf{S}^1$.

Cuando del contexto sea claro que representaciones se están usando a este concepto nos podremos referir como función equivariante.

$$E^0 := \{\ u \in E : \ T_\theta(u) = u \ \ \forall\, \theta \in \mathbf{S}^1 \ \}$$

Es inmediato de la definición que E^0 es un espacio vectorial. De aquí en adelante se supondrá que el espacio vectorial de puntos fijos ,E^0, tiene **dimensión finita** .

§2.2 Indice relativo.

Sea $E' \subset E$ un subespacio vectorial cerrado e invariante. Denotemos por $Z = E' \cap E^0$, $Y = Z^\perp \cap E'$ donde $Z^\perp$ denota el complemento ortogonal de Z ,los complementos ortogonales se tomarán siempre en E, por P_Y P_0 las proyecciones ortogonales de E sobre Y y E^0 respectivamente.

Tomemos

$$\mathcal{C} := \{\ \ A \subset E \setminus E^0 : A \text{ es cerrado e invariante bajo } T\ \}$$

$$\mathcal{F} := \{ A \subset E \setminus \{0\} : A \text{ es cerrado e invariante bajo } T \}$$

DEFINICION 2.1 Sean $A \in \mathcal{F}$ y R una representación regular de $\mathbf{S}^1$ en $\mathbf{C}^k$. Definimos $D_k(A, E', R)$ como el conjunto de las funciones h tales que:

(i) $h : A \longrightarrow E' \times \mathbf{C}^k$, $h(u) = (h_1(u), h_2(u))$, h es continua y (T, R) equivariante,

(ii) h(u)=(u,0) $\forall\ u \in A \cap E^0$,

(iii) $(0,0) \in Imh$,

(iv) $P_Y h_1 = P_Y + K$ con $K : A \longrightarrow Y$ función compacta (i.e. K es una función continua que manda conjuntos acotados en conjuntos con cerradura compacta) y $K(A)$ es acotado.

DEFINICION 2.2 Sea A $\in \mathcal{F}$. El índice de A relativo a E' es

$$\gamma_{E'}(A) = \ min\{ k \in \mathbf{N} \ : D_k(A, E', R) \neq \emptyset \text{ para alguna representación regular } R \text{ de } \mathbf{S}^1 \text{ en } \mathbf{C}^k \},$$

$$\gamma_{E'}(A) = \ \infty \text{ si no existe tal k},$$

$$\gamma_{E'}(\emptyset) = \ 0.$$

Notación. Sean A $\in \mathcal{F}$ y R una representación regular de $\mathbf{S}^1$ en $\mathbf{C}^k$.

$$\gamma(A) := \gamma_{\{0\}}(A) \ ,$$

fijemos X un subespacio cerrado e invariante tal que $X^\perp \supset E^0$

$$D_k(A, R) := D_k(A, X^\perp, R)$$
$$\gamma_r(A) := \gamma_{X^\perp}(A) \ .$$

Observaciones:

(1) $\gamma_r(\ )$ está bien definido. Ya que X es un subespacio cerrado e invariante si y sólo si $X^\perp$ es un subespacio cerrado e invariante.

(2) Como para calcular el índice relativo $\gamma_r(\ )$ hemos fijado un subespacio X cerrado e invariante tal que $X^\perp \supset E^0$

$$E = X \oplus X^\perp = X \oplus E^0 \oplus (X \oplus E^0)^\perp$$

$$\Rightarrow \quad X^\perp = E^0 \oplus (X \oplus E^0)^\perp$$

$$\Rightarrow \quad E^{0\perp} = (X \oplus E^0)^\perp$$

Por tanto

$$Y = (X \oplus E^0)^\perp.$$

(3) Sean A $\in \mathcal{F}$. Calculemos γ (A)

Caso 1. Si $A \cap E^0 \neq \emptyset$. Es claro que cualquier función

$$h : A \longrightarrow \{0\} \times \mathbf{C}^k$$

no satisface (ii) de la definición 2.1. Por tanto no existe $k \in \mathbf{N}$ y R representación regular de $\mathbf{S}^1$ en $\mathbf{C}^k$ tal que $D_k(A, \{0\}, R) \neq \emptyset$.
Por tanto

$$\gamma(A) = \infty$$

Caso 2. Si $A \cap E^0 = \emptyset$. Veamos que el conjunto $D_k(A, \{0\}; R)$ está en correspondencia biunívoca con

$M_k(A, R) := \{ \phi : A \longrightarrow \mathbf{C}^k \setminus \{0\} : \phi$ es continua y equivariante tomando en $\mathbf{C}^k$ la representación regular R }

para todo $k \in \mathbf{N}$ y para toda representación regular R de $\mathbf{S}^1$ en $\mathbf{C}^k$.
Sea $h \in D_k(A, \{0\}, R)$, $h : A \longrightarrow \{0\} \times \mathbf{C}^k$ $h(u) = (0, h_2(u))$. Como h satisface (i) en la definición 2.1 h_2 es equivariante. Porque h satisface (iii) ,de la misma definición 2.1, $h_2 : A \longrightarrow \mathbf{C}^k \setminus \{0\}$. Por tanto $h_2 \in M_k(A; R)$.
E inversamente si $\phi \in M_k(A, R)$ definimos
$h : A \longrightarrow \{0\} \times \mathbf{C}^k$ h(u)=(0,ϕ (u)).
Veamos que satisface la definición 2.1
(i) ϕ continua implica h continua,
(ii) se satisface por vacuidad,
(iii) $0 \notin$ Im ϕ implica $(0,0) \notin$ Im h,
(iv) $P_Y = 0$.
Por tanto

$$h \in D_k(A, \{0\}, R)$$

Por lo que hubiéramos podido definir $\gamma(A)$ para $A \in \mathcal{C}$ como

DEFINICION 2.3 Sea $A \in \mathcal{C}$. Definimos el índice de A

γ (A) := min { $k \in \mathbf{N}$: Existe una representación regular R de $\mathbf{S}^1$ sobre $\mathbf{C}^k$ con $M_k(A, R) \neq \emptyset$}

$\gamma(\emptyset) := 0$

$\gamma(A) := \infty$ si no existe k con la propiedad requerida.

En lo siguiente se exhibirán algunas propiedades del índice relativo que se necesitarán posteriormente:

1. Si $A \in \mathcal{F}$ y $A \cap X = \emptyset$ entonces $\gamma_r(A) = 0$.

Sea A un subconjunto de E y $\delta > 0$. Denotemos por

$$N_\delta(A) = \{ x \in E : d(x, A) \leq \delta \}$$

donde $d(x, A)$ es la distancia de x a A.

2. (Propiedad de continuidad) Si $A \in \mathcal{C}$ y es compacto entonces

$$\gamma(A) = \gamma(N_\delta(A)) \ \ \textit{para algun } \delta > 0 .$$

3. Sea $G \subset X$ un subespacio invariante de dimensión finita. Sean $S = \{ x \in X^\perp \oplus G : \|x\| = 1 \}$ y $A \in \mathcal{F}$ tal que A es radiálmente homeomorfo a S. Entonces

$$\gamma_r(A) = \ dim_{\mathbf{C}}\, G.$$

4.(Propiedad del mapeo) Sean A,$B \in \mathcal{F}$ y $g : A \longrightarrow B$ función continua tal que $g(x) = e^{-\xi(x)\ L}x - K(x)$ (para definición de $e^{-\xi(x)L}x$ ver el párrafo anterior a proposición 2.9) donde

(a) $L : E \longrightarrow E$ es lineal , autoadjunta (lo cual implica acotado) , equivariante y $LX^\perp \subset X^\perp$,

(b) $\xi : A \longrightarrow \mathbf{R}$ continua , invariante y $\xi(A)$ es acotado,

(c) $K : A \longrightarrow E$ equivariante compacta y $K(A)$ acotado.

Si $\xi|_{A\cap E^0} = 0$ y $K|_{A\cap E^0} = 0$ (i.e. $g|_{A\cap E^0} = I|_{A\cap E^0}$ donde I es la función identidad) entonces

$$\gamma_r(A) \leq \gamma_r(B)$$

5.(Subaditividad). Sean A $\in \mathcal{F}$ y B $\in \mathcal{C}$. Entonces

$$\gamma_r(A \cup B) \leq \gamma_r(A) + \gamma(B).$$

PROPOSICION 2.4 Sea $A \in \mathcal{F}$ tal que $A \cap X = \emptyset$ entonces $\gamma_r(A) = 0$.

Demostración

Definimos $h: A \longrightarrow X^\perp \times \{0\}$ donde h_1 es la proyección ortogonal sobre $X^\perp$, $h_2 = 0$.
(i) La proyección ortogonal sobre un subespacio invariante es equivariante. Por tanto h es equivariante.
(ii) Como $E^0 \subset X^\perp$ $h(u) = (u, 0)$ $\forall\, u \in A \cap E^0$.
(iii) Como $A \cap X = \emptyset$ y $u = h_1(u) + \pi_X(u)$ donde π_X es la proyección ortogonal de E sobre X.

$$h_1(u) \neq 0 \quad \forall\, u \in A$$

Por tanto (0,0)$\notin$ h(A).
(iv) $P_Y h_1 = P_Y$.
Por tanto $\gamma_r(A) = 0$. ∎

Si bien la propiedad de monotonia puede ser probada utilizando la propiedad del mapeo, propiedad 4, resulta más natural hacer la prueba directamente de las definiciones.

PROPOSICION 2.5 (Monotonía) Si $A,B \in \mathcal{F}$ y $A \subset B$ entonces $\gamma_r(A) \leq \gamma_r(B)$.

Demostración

El resultado es trivial si $\gamma_r(B) = \infty$. Supongamos que $\gamma_r(B) = k < \infty$. Tomando $f \in D_k(B, R)$ es inmediato de la definición que

$$A \xhookrightarrow{i} B \xrightarrow{f} \mathbf{C}^k \setminus \{0\}$$

está en $D_k(A, R)$. ∎

En algunas de las proposiciones siguientes se utizará el proceso de integración para construir funciones equivariantes. La integral que se usará es la integral de Cauchy-Bochner. Para su definición y propiedades básicas sera suficiente consultar el material que al respecto presenta [AMR] y [Di].

PROPOSICION 2.6 (Propiedad de continuidad) Si $A \in \mathcal{C}$ y es compacto entonces $\gamma(A) = \gamma(N_\delta(A))$ *para algun* $\delta > 0$. donde $N_\delta(A) := \{ x \in E : d(x, A) \leq \delta \}$ y d(x,A) es la distancia de x a A.

Demostración

Sea A un subconjunto compacto de E tal que $A \in \mathcal{C}$. Sea $\delta \geq 0$.

De la definición de $N_\delta(A)$ usando que T_θ es isometría $\forall\ \theta$ y que A es invariante se sigue que $N_\delta(A)$ es invariante.

Porque $d(\ ,B) : E \longrightarrow \mathbf{R}$ es continua para todo subconjunto $B \subset E$

$$N_\delta(A) = d(\ ,A)^{-1}[0,\delta] \text{ es cerrado } \forall\, \delta \geq 0.$$

Por ser A compacto, E^0 cerrado y $A \cap E^0 = \emptyset$ $\delta_1 = \frac{d(A,E^0)}{2} > 0$. Asi

$$N_{\delta_1}(A) \cap E^0 = \emptyset.$$

Por tanto

$$N_\delta(A) \in \mathcal{C} \quad \text{si} \quad \delta_1 \geq \delta > 0.$$

Sea $\gamma(A) = k$, $f = (f_1, \ldots, f_k) \in M_k(A, R)$. Aplicando a la parte real y a la parte imaginaria de cada f_i , $1 \leq i \leq k$ el teorema de extensión de Tietze obtenemos una función continua $\tilde{f} : E \longrightarrow \mathbf{C}^k$ que extiende a f.

Ahora construyamos a partir de $\tilde{f}$ una función en $M_k(N_\delta(A), R)$, para ello consideremos

$$L(E) := \{\ \tilde{L} : E \longrightarrow E\ \ :\ \tilde{L} \text{ es lineal y continua }\}$$
$$\text{con la norma usual } \|\tilde{L}\| = \sup_{\|x\|=1} \|\tilde{L}(x)\|.$$

Definimos

$$e(\cdot,\cdot) : L(E) \times E \longrightarrow E \quad , e(\tilde{L}, x) = \tilde{L}(x).$$

$e(\cdot,\cdot)$ es bilineal y $\|e(\tilde{L},x)\| \leq \|\tilde{L}\|\ \ \|x\|\ \ \forall\ \tilde{L} \in L(E)\ \ \forall\, x \in E$

$$\Rightarrow \quad e(\cdot,\cdot) \textit{ es continua.}$$

Porque

$$R_{-\theta}\tilde{f}T_\theta(x) = e(\cdot,\cdot) \circ (R \circ h \circ \pi_{\mathbf{S}^1}, \tilde{f} \circ e(\cdot,\cdot) \circ (T \times I_E))(\theta, x)$$
$$\textit{donde } h : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{S}^1 \quad , \pi_{\mathbf{S}^1} : \mathbf{S}^1 \times E \to \mathbf{S}^1$$
$$e^{i\theta} \mapsto e^{i\theta} \qquad\qquad (\theta, x) \mapsto \theta$$

es composición de continuas

$$\zeta : E \times \mathbf{S}^1 \longrightarrow \mathbf{C}^k \quad \zeta(x,\theta) = R_{-\theta}\tilde{f}T_\theta(x)$$

es continua. Por tanto

$$\hat{f}(x) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R_{-\theta}\tilde{f}T_\theta(x)\, d\theta \quad \text{está bien definida.}$$

Ahora ζ continua y $\mathbf{S}^1$ compacto y Hausdorff implica que la función inducida $\bar{\zeta} : E \longrightarrow C(\mathbf{S}^1, \mathbf{C}^k)$ es continua con la topología compacto abierta en $C(\mathbf{S}^1, \mathbf{C}^k)$ (ver p.e. [Mu] página 287). Porque $\mathbf{C}^k$ es métrico y $\mathbf{S}^1$ compacto la topología compacto abierta coincide con la topología inducida por la métrica uniforme ([Mu] página 283 , 286).

A partir de que

$$\|\int_0^{2\pi} \alpha_1(\theta) - \alpha_2(\theta))\, d\theta\| \leq \int_0^{2\pi} \|\alpha_1(\theta) - \alpha_2(\theta)\|\, d\theta \quad \forall\ \alpha_1, \alpha_2 \in C(\mathbf{C}^1, \mathbf{C}^k) \quad ([\mathrm{Di}]\ \mathrm{pag.}\ 167)$$

se sigue que la integral $\int : C(\mathbf{S}^1, \mathbf{C}^k) \longrightarrow \mathbf{C}^k$ es continua tomando la métrica uniforme en $C(\mathbf{S}^1, \mathbf{C}^k)$. Por tanto

$$\hat{f} = \int \circ \bar{\zeta} \quad \textit{es continua}$$

Veamos que $\hat{f}$ es equivariante

$$\begin{aligned}
\hat{f}T_{\theta_1}(x) &= \tfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} R_\theta \tilde{f} T_{\theta+\theta_1}(x)\ d\theta \\
&= \tfrac{1}{2\pi}\int_{\theta_1}^{2\pi+\theta_1} R_{\theta_1-\theta} \tilde{f} T_\theta(x)\, d\theta \quad \text{cambio de variable} && ([Di]pag.167) \\
&= R_{\theta_1}\big(\tfrac{1}{2\pi}\int_{\theta_1}^{2\pi+\theta_1} R_{-\theta}\tilde{f}T_\theta(x)\, d\theta\ \big) && ([Di]pag.167) \\
&= R_{\theta_1}\hat{f}(x).
\end{aligned}$$

Por último exhibamos una función en $M_k(N_\delta(A), R)$. Por ser A T-invariante y $\tilde{f}$ extensión de f

$$R_\theta \tilde{f} T_\theta(x) = R_{-\theta} f T_\theta(x) = x \quad \forall\, x \in A.$$

Por tanto $\hat{f}(A) = f(A)$.

Como $f(A)$ es compacto (porque A lo es) y $0 \notin f(A)$, existe V vecindad abierta de $f(A)$ tal que $0 \notin V$. Así

$$0 \notin Im\hat{f}|_{N_\delta(A)} \qquad \textit{donde } 0 \leq \delta \leq \tfrac{d(\partial(\hat{f}^{-1}(V)), A)}{2} = \delta_2.$$

Si además pedimos que $\delta < \delta_1$ (para que $N_\delta(A) \in \mathcal{C}$). Entonces

$$\hat{f}|_{N_\delta(A)} \in M_k(N_\delta(A), R)$$

$$\Rightarrow \quad \gamma(N_\delta(A)) \leq \gamma(A).$$

Es inmediato de la proposición 2.5 que $\gamma(A) \leq \gamma(N_\delta(A))$. Por tanto

$$\gamma(A) = \gamma(N_\delta(A)) \quad \text{si } 0 < \delta \leq min\{\delta_1, \delta_2\}. \ \blacksquare$$

PROPOSICION 2.7 Sea $A \in \mathcal{F}$. Supongamos que $X = F_1 + F_2$ con F_1 y F_2 subespacios ortogonales invariantes y $dim_{\mathbf{C}}\ F_1 = k < \infty$. Si $A \cap F_2 = \emptyset$ entonces $\gamma_r(A) \leq k$.

Demostración
Si $F_1 = \{0\}$ entonces $\gamma_r(A) = 0$, por la proposición 2.4. Supongamos que F_1 contiene propiamente a $\{0\}$. Por ser F_1 de dimensión finita es cerrado. Tomemos $\Pi_{F_1} : E \longrightarrow F_1$, $\Pi_{X^\perp} : E \longrightarrow X^\perp$ las proyecciones ortogonales en F_1 y $X^\perp$ respectivamente.

$X^\perp, F_1$ *invariantes* $\Rightarrow$ $h : A \longrightarrow X^\perp \times F_1$ $h(a) = (\Pi_{X^\perp}(a), \Pi_{F_1}(a))$ *es equivariante.* Sea $\{v_1, ..., v_k\}$ una base ortonormal de F_1. Entonces

$$\nu : F_1 \longrightarrow \mathbf{C}^k \qquad \nu(\textstyle\sum_{i=1}^k \lambda_i v_i\ ) = (\lambda_1, ..., \lambda_k)$$

es una isometría lineal.

Definimos

$$R_\theta = \nu T_\theta|_{F_1}\nu^{-1} \quad \forall\, \theta \in \mathbf{S}^1\ .$$

R_θ es isometría lineal por ser composición de isometrías lineales. Además

$$\begin{aligned} R_\theta \circ R_{\theta'} &= \nu T_\theta|_{F_1}\nu^{-1}\nu T_{\theta'}|_{F_1}\nu^{-1} \\ &= \nu T_{\theta+\theta'}|_{F_1}\nu^{-1} && \textit{por ser } F_1 \textit{ invariante} \\ &= R_{\theta+\theta'}\ , \end{aligned}$$

$$\|R_\theta - R_{\theta'}\| \le \|T_\theta|_{F_1} - T_{\theta'}|_{F_1}\| \le \|T_\theta - T_{\theta'}\|\ ,$$

y el único punto fijo de R es 0 ya que $E^0 \subseteq X^\perp$. Asi R es una representación de $\mathbf{S}^1$ en $\mathbf{C}^k$. De la definición de ν es claro que es $(T|_{F_1}, R)$ equivariante. Por lo que

$$l = (1_{X^\perp} \times \nu) \circ h$$

es equivariante respecto a (T, R). Por lo tanto l satisface (i) de la definición 2.1. Es inmediato a partir de la definición de $l = (l_1, l_2)$ que satisface (ii) e (iii) de la definición 2.1 ,veamos:
(ii) Sea $a \in A \cap E^0$.

$$E^0 \subset X^\perp \Rightarrow \Pi_{X^\perp}(a) = a.$$

$$F_1 \subset X \Rightarrow F_1 \cap E^0 = \emptyset \Rightarrow \Pi_{F_1}(a) = 0$$

Por tanto $\qquad l(a) = (a, 0).$

(iii) Sea $a \in A$.

$$l(a) = 0 \Leftrightarrow a \in F_1^\perp \cap X = F_2.$$

Pero $A \cap F_2 = \emptyset$.

Por último

$$\begin{aligned} &P_Y l_1 = P_Y \Pi_{X^\perp} = P_Y && \text{ya que } (Y \oplus E^0) = X^\perp \\ &\Rightarrow l \in D_k(A, R) \end{aligned}$$

Por tanto

$$\gamma_r(A) \le k. \ \blacksquare$$

PROPOSICION 2.8 Sea $G \in X$ un subespacio invariante de dimension finita. Sean $S = \{\ x \in X^\perp \oplus G\ :\ \|x\| = 1\ \}$, $A \in \mathcal{F}$ radialmente homeomorfo a S. Entonces $\gamma_r(A) = dim_{\mathbf{C}}\ G$.

Demostración
Notemos que A radialmente homeomorfo a S implica que $A \subset X^\perp \oplus G$. Como $E = X^\perp \oplus X = X^\perp \oplus (G \oplus (X^\perp \oplus G)^\perp)$ y $A \cap (X^\perp \oplus G)^\perp = \emptyset$ por la proposición 2.7 $\gamma_r(A) \le dim_{\mathbf{C}}\ G$.

Observemos que:

Porque E es separable y Y cerrado , Y es un espacio de Hilbert separable. Por lo que para Y existe una base de Hilbert numerable $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ tal que $Y^i = < e_i >$ sea un subespacio T-invariante.

Sea $Y_n = \oplus_{i=1}^{n} Y^i$. Por ser $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ base de Hilbert de Y y $Y = Y_n \oplus Y_n^{\perp_Y}$, $Y_n^{\perp_Y}$ tiene a $\{e_i\}_{i=n+1}^{\infty}$ como base de Hilbert ($^{\perp_Y}$ denota el complemento ortogonal restringuido a Y). Asi si $u \in Y$ $u = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i + \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i e_i \in Y_n \oplus Y_n^{\perp_Y}$. Sea $x \in E = Y \oplus Y^{\perp}$, $x = u + v$ *con* $u = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i$, $v \in Y^{\perp}$. Porque $\sum_{i=1}^{n} a_i e_i \underset{n \to \infty}{\longrightarrow}$ u entonces

$$P_n(x) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} P_Y(x) \tag{1}$$

$\forall$ $x \in E$, donde P_n es la proyección ortogonal de E sobre Y_n.

Procedamos por reducción al absurdo para probar que $\gamma_r(A) \geq dim_{\mathbf{C}}\ G$. Supongamos que $j = \gamma_r(A) < dim_{\mathbf{C}}\ G = k$. Entonces existe R representación regular de $\mathbf{S}^1$ en $\mathbf{C}^j$ y $h = (h_1, h_2) \in D_j(A, R)$.

Definamos $h^n = (h_1^n, h_2^n) : S_{Y_n \oplus E^0 \oplus G} \longrightarrow Y_n \oplus E^0 \times \mathbf{C}^j$ como la composición de las funciones que aparece en el primer renglon del siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
S_{Y_n \oplus E^0 \oplus G} & \xrightarrow{\bar{\rho}} & (Y_n \oplus E^0 \oplus G) \cap A & \xrightarrow{(h_1, h_2)} & X^{\perp} \times \mathbf{C}^j & \xrightarrow{(P_n + P_0) \times 1_{\mathbf{C}^j}} & (Y_n \oplus E^0) \times \mathbf{C}^j \\
\downarrow T_\theta & \mathrm{I} & \downarrow T_\theta & \mathrm{II} & \downarrow T_\theta \times R_\theta & \mathrm{III} & \downarrow T_\theta \times R_\theta \\
S_{Y_n \oplus E^0 \oplus G} & \xrightarrow{\bar{\rho}} & (Y_n \oplus E^0 \oplus G) \cap A & \xrightarrow{(h_1, h_2)} & X^{\perp} \times \mathbf{C}^j & \xrightarrow{(P_n + P_0) \times 1_{\mathbf{C}^j}} & (Y_n \oplus E^0) \times \mathbf{C}^j
\end{array}$$

donde $S_{Y_n \oplus E^0 \oplus G} = \{\ x \in Y_n \oplus E^0 \oplus G : \|x\| \leq 1\ \}$ $\rho : A \longrightarrow S$ $\rho(x) = x/\|x\|$ y $\bar{\rho} \circ \rho = 1_A$, $\rho \circ \bar{\rho} = 1_S$.

Sea $x \in A$.

$$T_\theta(\rho(x)) = \frac{T_\theta(x)}{\|x\|} = \frac{T_\theta(x)}{\|T_\theta(x)\|} = \rho(T_\theta(x)) \ \ \forall\ \theta \in \mathbf{S}^1$$

$$\Rightarrow \quad \bar{\rho} T_\theta = T_\theta \bar{\rho} \qquad \text{por ser } \rho \text{ inyectiva}$$

$\Rightarrow$ I conmuta.

II conmuta por definición de h,

III conmuta por ser P_n, P_0 proyecciones ortogonales sobre los subespacios invariantes Y^n, E^0 respectivamente. Por tanto

$$h^n(x) = (P_n h_1 \bar{\rho}(x) + P_0 h_1 \bar{\rho}(x), h_2 \bar{\rho}(x)) \quad \text{es equivariante.}$$

Si $x \in S_{Y_n \oplus E^0 \oplus G} \cap E^0$ entonces

$$\begin{aligned} h^n(x) &= ((P_n + P_0)\bar{\rho}(x), 0) \qquad\qquad \textit{ya que } \bar{\rho}(x) \in E^0 \\ &= (\bar{\rho}(x), 0). \end{aligned}$$

A apartir de h^n inducimos un mapeo $\bar{h}^n$ continuo equivariante, respecto a las acciones inducidas por T, $T \times R$ en $\mathbf{C}^{n+l+k}$, $\mathbf{C}^{n+l+j}$ respectivamente,

$$\bar{h}^n : S_{\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^l \times \mathbf{C}^k} \longrightarrow \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^l \times \mathbf{C}^j \quad \textit{con } k < j \ \ y \ \ l = dim_{\mathbf{C}}\ E^0$$

que restringido a los puntos fijos es el homeomorfismo inducido por $\bar{\rho}|_{S_{E^0}} : S_{E^0} \longrightarrow A \cap E^0$ mediante la identificación hecha para obtener $\bar{h}^n$.

Como consecuencia del teorema de Borsuk-Ulam relativo para acciones de $\mathbf{S}^1$ (ver apéndice B) h^n tiene al menos un cero.

Así existe $u_n \in S_{Y_n \oplus E^0 \oplus G}$ tal que $h^n(u_n) = 0 \quad n = 1, 2, \ldots$

Veamos que la sucesión $(\bar{\rho}(u_n))$ tiene una subsucesión acotada.

Por definición de h_1^n

$$
\begin{aligned}
0 = h_1^n(u_n) &= P_n h_1 \bar{\rho}(u_n) + P_0 h_1 \bar{\rho}(u_n) \\
\Rightarrow \quad P_n h_1 \bar{\rho}(u_n) &= -P_0 h_1 \bar{\rho}(u_n) = 0 \quad \text{ya que } \; Y_n \cap E^0 = \{0\} \\
\Rightarrow \quad 0 = P_n h_1 \bar{\rho}(u_n) &= P_n(P_Y + K)\bar{\rho}(u_n) \quad \text{por (iv) en def 2.1} \\
&= P_n \bar{\rho}(u_n) + P_n K \bar{\rho}(u_n).
\end{aligned} \tag{2}
$$

Como $K(A) \subset \{x \in Y \; : \; \|x\| \leq R_1\}$ p.a. $R_1 > 0$

$$\|P_n \bar{\rho}(u_n)\| \leq \|P_n\| \; \|K \bar{\rho}(u_n)\| \leq R_1.$$

Ahora

$$(u_n) = P_n(u_n) + P_0(u_n) + P_G(u_n).$$

Porque $(P_0(u_n))_{n=1}^{\infty}$ y $(P_G(u_n))_{n=1}^{\infty}$ pertenecen a esferas unitarias de espacios de dimensión finita, las cuales son compactas, tienen subsucesiones convergentes digamos ellas mismas. (3)

Esto implica

$$
\begin{gathered}
(\|\bar{\rho} P_0(u_n)\|)_{n=1}^{\infty} \; y \; (\|\bar{\rho} P_G(u_n)\|)_{n=1}^{\infty} \; \text{están acotadas} \\
\Rightarrow \quad \|\bar{\rho}(u_n)\| \leq \|P_n \bar{\rho}(u_n)\| + \|P_0 \bar{\rho}(u_n)\| + \|P_G \bar{\rho}(u_n)\| \leq R_2 \quad \forall \, n
\end{gathered}
$$

ya que $P_0 \bar{\rho} = \bar{\rho} P_0$, $P_G \bar{\rho} = \bar{\rho} P_G$ y $(P_n \bar{\rho}(u_n))$ está acotado.

Ahora probemos que la sucesión $(\bar{\rho}(u_n))$ tiene una subsucesión convergente.

Por ser K función compacta $(K(\bar{\rho}(u_n)))_{n=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión convergente, digamos ella misma. Así

$$-K \bar{\rho}(u_n)_{n \to \infty} \longrightarrow y \in Y \tag{4}$$

$$\Rightarrow \quad P_n \bar{\rho}(u_n)_{n \to \infty} \longrightarrow P_Y(y) \quad = y \tag{5}$$

ya que

$$
\begin{aligned}
\|P_n \bar{\rho}(u_n) - P_Y(y)\| &= \| - P_n K \bar{\rho}(u_n) - y\| && \text{por (2)} \\
&\leq \|P_n\| \; \| - K \bar{\rho}(u_n) - y\| + \|P_n(y) - y\|
\end{aligned}
$$

esto último por (4) y (1) puede hacerse tan pequeño como se quiera si n es suficientemente grande.

De (3) y (5) se sigue que

$$P_n \bar{\rho}(u_n) + P_0 \bar{\rho}(u_n) + P_G \bar{\rho}(u_n) = \bar{\rho}(u_n)_{\; n \to \infty} \longrightarrow \bar{y} \; .$$

A cerrado y $\bar{\rho}$ biyección $\Rightarrow \quad \bar{y} = \bar{\rho}(u) \quad p.a. \ u \in S.$

Por último

$$0 = h_1^n(u_n) = P_n h_1 \bar{\rho}(u_n) + P_0 h_1 \bar{\rho}(u_n)_{n \to \infty} \longrightarrow P_Y h_1 \bar{\rho}(u) + P_0 h_1 \bar{\rho}(u) = h_1(\bar{\rho}(u))$$

ya que $P_0 h_1$ es continua y

$$\begin{aligned} \|P_n h_1 \bar{\rho}(u_n) - P_Y h_1 \bar{\rho}(u)\| &\leq \|P_n h_1 \bar{\rho}(u_n) - P_n h_1 \bar{\rho}(u)\| + \|P_n h_1 \bar{\rho}(u) - P_Y h_1 \bar{\rho}(u)\| \\ &\leq \|h_1 \bar{\rho}(u_n) - h_1 \bar{\rho}(u)\| + \|P_n h_1 \bar{\rho}(u) - P_Y h_1 \bar{\rho}(u)\| \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

esto último por la continuidad de h_1, por (1) y para n suficientemente grande.

Y como $0 = h_2^n(u_n) = h_2(\rho(u_n))$ entonces $h(\bar{\rho}(u)) = (h_1(\bar{\rho}(u)), h_2(\bar{\rho}(u))) = 0$. Contradicción a que $h \in D_j(A, R)$ ((iii) en definición 2.1). Por tanto

$$\gamma_r(A) = dim_{\mathbf{C}}\ G. \ \blacksquare$$

Sean $h : E \longrightarrow E$, $\xi : E \longrightarrow \mathbf{R}$ funciones continuas y $L : E \longrightarrow E$ operador lineal acotado (el término acotado para operadores lineales es equivalente a continuo). Definimos

$$e^{\xi(\cdot)L}h(\cdot) : E \longrightarrow E$$

$$e^{\xi(x)L}h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n(x)L^n(h(x))}{n!} \quad .$$

Esta función tiene las siguientes propiedades:

- $e^{\xi(\cdot)L}h(\cdot)$ es continua, (6)

- Si ádemas pedimos que ξ y h manden acotados en acotados entonces $e^{\xi(\cdot)L}h(\cdot)$ manda acotados en acotados, (7)

- Si $h(x) \neq 0$ entonces $e^{\xi(x)L}h(x) \neq 0$. (8)

PROPOSICION 2.9 (Propiedad del mapeo) Sean $A, B \in \mathcal{F}$ y $g : A \longrightarrow B$ función continua tal que $g(x) = e^{-\xi(x)L}x - K(x)$ donde:

(a) $L : E \longrightarrow E$ es lineal, autoadjunta (lo cual implica acotado), equivariante y $L(X^{\perp}) \subset X^{\perp}$.

(b) $\xi : A \longrightarrow \mathbf{R}$ es continua, invariante y $\xi(A)$ es acotado.

(c) $K : A \longrightarrow E$ es equivariante, compacto y $K(A)$ es acotado.

Si $\xi|_{A\cap E^0} = 0$ y $K|_{A\cap E^0} = 0$ (*i.e.* $g|_{A\cap E^0} = 1_{A\cap E^0}$) entonces

$$\gamma_r(A) \le \gamma_r(B).$$

Demostración

Si $\gamma_r(B) = \infty$ no hay nada que probar.

Sean $A, B \in \mathcal{F}$ tal que $\gamma_r(B) = k < \infty$, $f = (f_1, f_2) \in D_k(B, R)$ y $P_Y f_1 = P_Y + C$ con C función compacta con imagen acotada. Sea $g : A \longrightarrow B$ como en el enunciado. Definimos

$$\varphi : A \longrightarrow X^{\perp} \times \mathbf{C}^k$$

$$\varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x)) = (e^{\xi(x)L} f_1 g(x), f_2 g(x)).$$

Por (6) φ_1 es continua. Y φ_2 es composicion de continuas por lo tanto φ es continua.

Por ser L equivariante, ξ funcional invariante y T_θ un operador lineal continuo

$$\begin{aligned} e^{\xi(T_\theta(x))L} T_\theta(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n(T_\theta(X))L^n(T_\theta(x))}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T_\theta(\xi^n(x)L^n(x))}{n!} \\ &= T_\theta e^{\xi(x)L} x \quad \forall\, \theta \in \mathbf{S}^1 . \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$e^{\xi(x)L} x \quad \text{es equivariante.}$$

De que f, $e^{\xi(x)L}x$, K y g sean equivariantes se sigue que φ es equivariante respecto a (T, R). Por tanto φ satisface (i) en definición 2.1.

(ii) Si $f_2 g(x) = 0$ entonces $f_1 g(x) \neq 0$ porque $(0,0) \notin f(g(A)) \subset f(B)$.

$$f_1 g(x) \neq 0 \;\Rightarrow\; e^{\xi(x)L} f_1 g(x) \neq 0 \quad \text{por (8)}$$

$$(0,0) \notin \varphi(A) .$$

(iii) Si $x \in A \cap E^0 \;\Rightarrow\; g(x) = x \in B \cap E^0$ por hipótesis. Así por definición de $f = (f_1, f_2)$ y $e^{\xi(x)L}x$

$$\varphi(x) = (e^{\xi(x)L}x, 0) = (x, 0).$$

(iv) Recordemos que $E = X \oplus X^{\perp} = X \oplus (Y \oplus E^0)$ y notemos que de las hipótesis de que $L(X^{\perp}) \subset X^{\perp}$ y de que L es autoadjunto tenemos que

$$L(X) \subset X.$$

ádemas por ser L equivariante

$$L(E^0) = E^0.$$

Así

$$LP_Y = P_Y L.$$

Esto y que P_Y es un operador lineal continuo

$$\begin{aligned}\Rightarrow \quad P_Y e^{\xi(x)L} x &= P_Y\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n(x)L^n(x)}{n!}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n(x)P_Y L^n(x)}{n!} \\ &= e^{\xi(x)L} P_Y(x).\end{aligned}$$

Ahora

$$\begin{aligned}P_Y \varphi_1(x) &= (e^{\xi(x)L}(P_Y + C)(e^{-\xi(x)L} x - K(x)) \\ &= P_Y(x) + e^{\xi(x)L}(-P_Y K(x) + Cg(x)).\end{aligned}$$

Sea W subconjunto acotado. Entonces $P_Y(\overline{K(W)})$ es compacto, por ser K función compacta y P_Y continua. Y $\overline{Cg(W)}$ es compacto por (7) y por que C es función compacta. Por tanto $e^{\xi(W)L}(-P_Y K + Cg)(W)$ tiene cerradura compacta.

Por último $(-P_Y K + Cg)(A)$ está acotado porque $K(A)$, $C(B)$ están acotados (por definición de K y C). Esto y que $\xi(A)$ está acotado implican $Im\ e^{\xi(\cdot)L}(-P_Y K + Cg)(\cdot)$ está acotada. ∎

En la siguiente proposición necesitamos extender una función compacta con imagen acotada de tal forma que preserve estas características. En ([De] pagina 44) se prueba un teorema que modificaremos minimamente para obtener lo que necesitamos.

LEMA 2.10 Sean X y Y espacios normados, $A \subset X$ cerrado y $F : A \longrightarrow Y$ función compacta con imagen acotada. Entonces F tiene una extensión compacta $\tilde{F} : X \longrightarrow Y$ con imagen acotada.

Demostración
(Seguiremos la prueba que se hace en [De] pag 44 a la cual remitimos para un mayor detalle).
La cubierta abierta de $X \setminus A$ dada por $\{B_x\}_{x \in X \setminus A}$ con $B_x = B_r(x) := \{\, y \in X \ : \ \|x - y\| < r\}$. (9)
$r = min\{d(x,A)/6, 1/2\}$ (pedir $r < 1/2$ es el único ajuste que necesita la demostración original del teorema antes mencionado) admite un refinamiento localmente finito $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$. Entonces se definen

$$\varphi_\lambda(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin U_\lambda \\ d(x, \partial U_\lambda) & \text{si } x \in U_\lambda \end{cases}$$

$$\psi_\lambda(x) = \frac{\varphi_\lambda(x)}{\sum_{\mu \in \Lambda} \varphi_\mu(x)}.$$

Ahora se eligen $a_\lambda \in A$ tal que $d(a_\lambda, U_\lambda) < 2d(U_\lambda, A)$ y se define

$$\tilde{F}(x) = \begin{cases} F(x) & \text{si } x \in A \\ \sum_\lambda \psi_\lambda(x) F(a_\lambda) & \text{si } x \notin A\ . \end{cases}$$

Es claro que $\tilde{F}$ es una extensión de F y que $\tilde{F}(X) \subset convF(A)$.
En [De] se prueba la continuidad de $\tilde{F}$. Probemos que es compacta.

Sea $B_r(0) = \{ x \in X : \|x\| < r\}$. Tomemos $x \in B_r(0) \cap (X \setminus A)$ y $\lambda \in \Lambda$ tal que $\psi_\lambda(x) \neq 0$.

$$\Rightarrow \quad x \in U_\lambda \subset B_z \quad p.a. \quad z \in X \setminus A,$$

ya que $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ es refinamiento de $(B_z)_{z \in X \setminus A}$.

Porque

$$\begin{aligned} d(0, a_\lambda) &\leq d(0, x) + d(x, a_\lambda) \\ &\leq d(0, x) + d(a_\lambda, U_\lambda) + diam\ U_\lambda \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} d(a_\lambda, U_\lambda) &\leq 2d(A, U_\lambda) && \text{por elección de } a_\lambda \\ &\leq 2(d(A, 0) + d(0, x)) \\ \Rightarrow \quad d(0.a_\lambda) &\leq r + 2(d(A, 0) + r) + 1 && (\ por\ (9)\ ) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad C_r = \{ a_\lambda\ \lambda \in \Lambda : \psi_\lambda(x) \neq 0 \quad p.a.\ \ x \in B_r \cap X \setminus A \ \} \text{ está acotado}$$

$$\Rightarrow \quad \overline{F(C_r)} \text{ es compacto.}$$

Como $\tilde{F}(B_r(0) \cap (X \setminus A)) \subset convF(C_r) \subset conv\overline{F(C_r)}$ y las envolventes convexas de compactos son compactas

$$\tilde{F}(B_r(0)) = \tilde{F}(B_r(0) \cap A) \cup \tilde{F}(B_r(0) \cap (X \setminus A))$$

tiene cerradura compacta.

Por último, como $\tilde{F}(X) \subset convF(A)$ y $F(A)$ está acotado

$$\tilde{F}(X) \text{ está acotado.} \ \blacksquare$$

PROPOSICION 2.11 (Subaditividad) Si $A \in \mathcal{F}$ y $B \in \mathcal{C}$ entonces $\gamma_r(A \cup B) \leq \gamma_r(A) + \gamma(B)$.

Demostración

Basta considerar el caso en que $\gamma_r(A) = k < \infty$, $\gamma(B) = m < \infty$. Sean $f = (f_1, f_2) \in D_k(A, R)$, $g \in M_m(B, S)$ con $P_Y f_1 = P_Y + K$, K función compacta con imagen acotada. Notemos que K es equivariante pues P_Y y f_1 lo son.

Por el lema 2.10 K tiene una extensión compacta $\tilde{K} : E \longrightarrow Y$ con $\|\tilde{K}(x)\| \leq r_1 \quad \forall x \in E \ \ p.a.\ r_1 > 0$.

Procediendo como en la demostración de la proposición 2.6 se prueba que

$$\hat{K}(X) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T_{-\theta} \tilde{K} T_\theta(x) \ \ d\theta$$

es una extensión de K continua y equivariante. Que $\hat{K}$ tiene imagen acotada se sigue de

$$\|\hat{K}(x)\| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|\tilde{K}T_\theta(x)\| \, d\theta \ \leq r_1 .$$

Probemos que $\hat{K}$ es compacta. Sea $r > 0$. Tomemos $x \in B_r(0) \cap (X \setminus A)$, $\theta \in \mathbf{S}^1$ y $\lambda \in \Lambda$ tal que $\psi_\lambda(T_\theta(x)) \neq 0$ (seguiremos la demostración del lema 2.10 y usaremos la notación ahí desarrollada). Entonces $T_\theta(x) \in U_\lambda \subset B_z$ $p.a.$ $z \in E \setminus A$.

Porque

$$\begin{aligned} d(0, a_\lambda) &\leq d(0, T_\theta(x)) + d(T_\theta(x), a_\lambda) \\ &\leq d(0, T_\theta(x)) + d(a_\lambda, U_\lambda) + diam\, U_\lambda \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} d(a_\lambda, U_\lambda &\leq 2d(A, U_\lambda) \\ &\leq 2(d(A,0) + d(0, T_\theta(x))) \\ \Rightarrow \quad d(0, a_\lambda) &\leq d(0, T_\theta(x)) + 2(d(A,0) + d(0, T_\theta(x))) + 1 \\ &\leq r + 2(d(A,0) + r) + 1 = b \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $C_\theta := \{ \, a_\lambda \ \lambda \in \Lambda : \psi_\lambda(T_\theta(x)) \neq 0 \quad p.a. \ x \in B_r(0) \cap (E \setminus A) \, \}$ está acotado por b $\forall \ \theta \in \mathbf{S}^1$

$\Rightarrow$ $D_\theta := \{ \, T_\theta(a_\lambda) : a_\lambda \in C_\theta \, \}$ está acotado por b $\forall \ \theta \in \mathbf{S}^1$, dado que T_θ es isometría $\forall \ \theta \in \mathbf{S}^1$

$\Rightarrow$ $\overline{K(\cup_{\theta \in \mathbf{S}^1} D_\theta)}$ es compacto, porque K es una función compacta. Como $T_{-\theta}\tilde{K}T_\theta(x) = T_{-\theta}(\sum_\lambda \psi_\lambda(T_\theta(x))K(a_\lambda) \ ) = \sum_\lambda \psi_\lambda(T_\theta(x))K(T_{-\theta}(a_\lambda))$ entonces

$T_{-\theta}\tilde{K}T_\theta(x) \in conv \ \overline{K(\cup_{\theta \in \mathbf{S}^1} D_\theta)}$ la cual es compacta, pues la envolvente convexa de compactos es compacta

$$\Rightarrow \quad \hat{K}(x) \in conv(conv\, \overline{K(\cup_{\theta \in \mathbf{S}^1} D_\theta)} \ = conv\, \overline{K(\cup_{\theta \in \mathbf{S}^1} D_\theta)} \, .$$

Por tanto

$\hat{K}$ es una función compacta

Ahora

$f_2 : A \longrightarrow \mathbf{C}^k$ la extendemos a $\hat{f}_2 : E \longrightarrow \mathbf{C}^k$ continua y equivariante,

$P_0 f_1 : A \longrightarrow E^0$ la extendemos a $\widehat{P_0 f_1} : E \longrightarrow E^0$ continua y equivariante,

$g : B \longrightarrow \mathbf{C}^m \setminus 0$ la extendemos $\hat{g} : E \longrightarrow \mathbf{C}^m$ continua y equivariante, y tal que $\hat{g}(A \cap E^0) = 0$.

Las extensiones se hacen en forma análoga a como se hizo en la proposición 2.6.

Por último definamos

$$h : A \cup B \longrightarrow Y \times \mathbf{C}^{k+m}$$

$$h(x) = (h_1(x), h_2(x)) = (\widehat{P_0 f_1}(x) + P_Y(x) + \hat{K}(x), \hat{f}_2(x), \hat{g}(x)).$$

(i) Porque todas las funciones involucradas son equivariantes h es equivariante.

(ii) Sea $x \in E^0 \cap (A \cup B) = E^0 \cap A$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad h(x) &= (P_0 f_1(x) + P_Y f_1(x), f_2(x), \hat{g}(x)) \\ &= (x, 0, 0). \end{aligned}$$

(iii) Si $x \in A$ entonces

$$(P_0 f_1(x) + P_Y f_1(x), f_2(x)) = (f_1(x), f_2(x)) \neq (0,0)$$

entonces

$$h(x) \neq 0$$

Si $x \in B$ entonces $\hat{g}(x) = g(x) \neq 0$. Por lo tanto $(0,0) \notin$ Im h.

(iv) $P_Y h_1 = P_Y + \hat{K}$ con $\hat{K}$ función compacta con Im $\hat{K}$ acotada.

Por tanto

$$\gamma_r(A \cup B) \leq \gamma_r(A) + \gamma(B). \blacksquare$$

COROLARIO 2.12 Sean $A \in \mathcal{F}$ y $B \in \mathcal{C}$ con $\gamma(B) < \infty$. Entonces $A \setminus B \in \mathcal{F}$ y $\gamma_r(\overline{A \setminus B}) \geq \gamma_r(A) - \gamma(B)$.

Demostración
Es claro que $0 \notin \overline{A \setminus B} \subset A$. Que $A \setminus B$ sea T-invariante implica que $\overline{A \setminus B}$ es T-invariante. Por tanto $\overline{A \setminus B} \in \mathcal{F}$. Por la proposición 2.11 y 2.5

$$\gamma_r(A) \leq \gamma_r(A \cup B) \leq \gamma_r(\overline{A \setminus B} \cup B) \leq \gamma_r(\overline{A \setminus B}) + \gamma(B)$$

$$\Rightarrow \quad \gamma_r(A) - \gamma(B) \leq \gamma_r(\overline{A \setminus B}). \blacksquare$$

CAPITULO 3.

UN PRINCIPIO DE MINIMAX

§3.1 Resultados preliminares de sistemas dinámicos

En la prueba del lema de deformación, sección 3.2, necesitamos encontrar solución al problema de valor inicial

$$\frac{d\eta}{dt} = \mathcal{X}(\eta(t,x)) \qquad \eta(0,x) = x \qquad x \in \mathcal{M} \;\; C^{1,1} \text{ variedad}$$

para un campo $\mathcal{X}$ localmente lipschitz. Exhibir que bajo las condiciones que se presentarán en el lema de deformación tal problema tiene solución única es el objetivo de estas consideraciones preliminares, que en esencia es el material presentado por [AMR] en la seccion 4.1 y a la cual remitimos para un mayor detalle. En este capítulo cuando se haga referencia a una variedad será una variedad de Hilbert (ver p.e. [AMR] capítulo 2).

DEFINICION 3.1 (Curva en un punto m) Sea Uun subconjunto abierto de un espacio de Banach $\tilde{E}$. Una curva c en un punto m de Ues un función $c : I \longrightarrow U$ de clase C^1 con $0 \in I$, intervalo abierto de $\mathbf{R}$, tal que $c(0) = m$.

DEFINICION 3.2 (Curva integral) Sea Uun subconjunto abierto de un espacio de Banach $\tilde{E}$ y $\mathcal{X} : U \longrightarrow \tilde{E}$ un campo vectorial . Una curva integral del campo vectorial $\mathcal{X}$ en $m \in U$ es una curva c en m tal que $c'(t) = \mathcal{X}(c(t))$ para cada $t \in I$.

TEOREMA 3.3 Sean $\tilde{E}$ un espacio de Banach, $U \subset \tilde{E}$ subconjunto abierto y $\mathcal{X} : U \subset \tilde{E} \longrightarrow \tilde{E}$ un campo localmente lipschitz tal que $\|\mathcal{X}(x)\| \leq A \;\; \forall\, x \in U$ y p.a. $A > 0$. Entonces para cada $x_0 \in U$ existe una curva $c : I \longrightarrow U$ en x_0 tal que $c'(t) = \mathcal{X}(c(t)) \;\; \forall\, t \in I$.

Cualesquiera dos de tales curvas son iguales en la intersección de sus dominios. Ademas existe una vecindad $U_0 \subset U$ de x_0, un real $\alpha > 0$ y una función

$$F : U_0 \times I \longrightarrow U \qquad I = (-\alpha, \alpha), \text{ tal que}$$

(i) $C_x(t) := F(x,t)$ es una curva en x que satisface la ecuación diferencial $c_x'(t) = \mathcal{X}(c_x(t)) \;\; \forall\, t \in I$,

(ii) F es continua,

(iii) $F(\cdot, t) : U_0 \longrightarrow U$ es localmente lipschitz $\forall\; t \in I$.

Demostración

Sea $x_0 \in U$. Por ser U abierto y $\mathcal{X}$ localmente lipschitz existen $K > 0$ y $B_{b_1}(x_0) := \{x \in \tilde{E} : \|x - x_0\| \leq b_1 \;\} \subset U$ tal que $\|\mathcal{X}(x) - \mathcal{X}(y)\| \leq K\|x - y\| \;\; \forall\, x, y \in B_{b_1}(x_0)$. Sean $U_0 = B_b(x_0)$ y $\alpha = min\{(1/2)K, b/(2A)\}^{\bullet}$ donde $b = b_1/2$. Se toma $y \in B_b(x_0)$ y se construyen las curvas $x_n(t)$

inductivamente

$$\left.\begin{aligned} x_0(t) &= y \\ &\vdots \\ x_{n+1}(t) &= y + \int_0^t \mathcal{X}(x_n(s))\, ds \end{aligned}\right. \quad t \in [-\alpha, \alpha]$$

y se prueba que:

- $x_n(t) \in B_{b_1}(x_0) \;\; \forall\, t \in [-\alpha, \alpha], \forall\, n = 1, 2, \ldots$ (aquí se usa que $\|\mathcal{X}(x)\| \leq A \quad \forall\, x \in B_{b_1}(x_0)$ y que $y \in B_b(x_0)$),

- (x_n) es una sucesión de Cauchy en $C([-\alpha, \alpha], B_{b_1}(x_0))$ con la métrica uniforme (usando que $\|x_{n+1}(t) - x_n(t)\| \leq AK^n|t - t_0|^{n+1}$).

Por lo que

$$x_n \longrightarrow x \in C([-\alpha, \alpha], B_{b_1}(x_0)).$$

Después usando que el límite es único se muestra que la curva $x(t)$ satisface

$$x(t) = y + \int_0^t \mathcal{X}(x(s))\, ds \; . \tag{1}$$

Esto es equivalente, por el teorema fundamental del cálculo (ver [AMR] pagina 73), a que

$$\begin{aligned} x'(t) &= \mathcal{X}(x(t)) \qquad \forall\, t \in (-\alpha, \alpha) \\ x(0) &= y. \end{aligned}$$

Sea $z : [-\alpha, \alpha] \longrightarrow B_{b_1}(x_0)$ continua tal que $z|_{(-\alpha,\alpha)}$ es una curva integral en y. Utilizando el teorema fundamental del cálculo y la definición de $x_n(t)$ se prueba que

$$\begin{aligned} &\|z(t) - x_n(t)\| \leq AK^n|t|^n \leq A/2^n \qquad \forall\, t \in [-\alpha, \alpha] \\ &\Rightarrow z(t) = x(t) \qquad \forall\, t \in [-\alpha, \alpha]. \end{aligned}$$

Con este argumento local probamos en particular que para cada $x_0 \in U$ cualesquiera dos curvas integrales de $\mathcal{X}$ en x_0 son iguales en la intersección de sus dominios.

Definamos

$$F : U_0 \times I \longrightarrow U \qquad F(y, t) = c_y(t) \text{ donde } I = (-\alpha, \alpha),$$

y $c_y(t)$ es la única curva integral que satisface

$$\begin{aligned} c_y'(t) &= \mathcal{X}(c_y(t)) \qquad \forall\, t \in (-\alpha, \alpha), \\ c_y(0) &= y. \end{aligned}$$

Demostremos (ii). Sea $t > t'$. Porque

$$\|F(x,t) - F(y,t')\| \leq \|F(x,t) - F(y,t)\| + \|F(y,t) - F(y,t')\|,$$

$$\begin{aligned} \|F(y,t) - F(y,t')\| &\leq \int_t^{t'} \|\mathcal{X}(c_y(s))\|\, ds \\ &\leq A|t' - t| \end{aligned}$$

y

$$
\begin{aligned}
\|F(x,t) - F(y,t)\| &= \|\textstyle\int_0^t \mathcal{X}(c_x(s)) - \mathcal{X}(c_y(s))\, ds\, \| + \|x-y\| \\
&\leq \|x-y\| + K\textstyle\int_0^t \|F(x,s) - F(y,s)\|\, ds \\
&\leq e^{K|t|}\|x-y\| \qquad \text{por la desigualdad de Gronwall([AMR] 4.1.7).}
\end{aligned}
$$

entonces F es continua.

De la última desigualdad se desprende que $F(\cdot,t) : U_0 \longrightarrow U$ es localmente lipschitz $\forall\ t \in (-\alpha,\alpha)$. Por lo que queda demostrado (iii). ∎

PROPOSICION 3.4 Sean $(\hat{E}, <\cdot,\cdot>)$ un espacio de Hilbert, $U \subset \hat{E}$ un subconjunto abierto y $\mathcal{X} : U \subset \hat{E} \longrightarrow \hat{E}$ un campo vectorial localmente lipschitz tal que $\|\mathcal{X}(x)\| \leq A\ \ \forall\, x \in U$ y p.a. $A > 0$. Sean $\psi \in C^1(\hat{E}, \mathbf{R}\,)$ tal que $\mathcal{M} = \psi^{-1}(1) \neq \emptyset$.

Supongamos que $\mathcal{M} \subset U$, $\nabla\psi(x) \neq 0$ y que $< \nabla\psi(x), \mathcal{X}(x) >= 0\ \ \forall\, x \in U$. Entonces existe

$$\eta : \mathcal{M} \times \mathbf{R} \longrightarrow \mathcal{M} \quad \text{tal que}$$

(i) $\eta(m,\cdot)$ es una curva integral de $\mathcal{X}$ en m,

(ii) $\eta(\cdot,t) : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ es un homeomorfismo $\forall\ t \in \mathbf{R}$,

(iii) $\eta(\cdot,0) = 1_{\mathcal{M}}$.

Demostración

Definamos $\mathcal{D}_{\mathcal{X}} = \{\ (m,t) : \text{existe una curva integral } c : I \longrightarrow \mathcal{M} \subset U \text{ de } \mathcal{X} \text{ en m con } t \in I\ \}$.

Sea $m \in \mathcal{M}$. Como $\mathcal{M} \subset U$ por el teorema 3.3 existe $c : I \longrightarrow U$ curva integral de $\mathcal{X}$ en m. Así

$$
\begin{aligned}
& \frac{d}{dt}\psi \circ c(t) =< \nabla\psi(c(t)), \frac{dc}{dt}(t) > \\
& \qquad\qquad =< \nabla\psi(c(t)), \mathcal{X}(c(t)) > \\
& \qquad\qquad = 0 \qquad\qquad \text{por hipótesis} \\
\Rightarrow \quad & \psi \circ c(t) = cte \\
\Rightarrow \quad & \psi \circ c(t) = \psi \circ c(0) = 1 \quad \forall t \in I.
\end{aligned}
$$

Por tanto si $m \in \mathcal{M}$ y c es una curva integral de $\mathcal{X}$ en m entonces $c(t) \in \mathcal{M}\ \ \forall\ t \in I$. (2)

Por tanto

$$\mathcal{D}_{\mathcal{X}} \neq \emptyset.$$

Además por el teorema 3.3 y por (2) para $m \in \mathcal{M}$ existen una vecindad U_0 de m en U y un real $\alpha > 0$ tal que $(U_0 \cap \mathcal{M}) \times I \subset \mathcal{D}_{\mathcal{X}}$ donde $I = (-\alpha,\alpha)$. Por tanto $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}$ es abierto.

Ahora sea $(m,t) \in \mathcal{D}_{\mathcal{X}}$. Por de definición de $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}$ existe una curva integral $c : (a,b) \longrightarrow \mathcal{M}$, de $\mathcal{X}$ en m con $t \in (a,b)$.

Sea $t_n \nearrow b$. Si $m \geq n$

$$\begin{aligned} \|c(t_n) - c(t_m)\| &\leq \int_{t_n}^{t_m} \|c'(t)\|\, dt & \text{Por el teorema fundamental del cálculo} \\ &\leq A|t_m - t_n| \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad (c(t_n))$ es de Cauchy.

Porque $\mathcal{M}$ es cerrada en $\hat{E}$ y $\hat{E}$ es un Hilbert $\exists x \in \mathcal{M} \subset U$ tal que $c(t_n) \longrightarrow x$. Porque $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}$ es abierto y $(x,0) \in \mathcal{D}_{\mathcal{X}}$ existe una curva integral $c_1 : (-\tau, \tau) \longrightarrow \mathcal{M}$ de $\mathcal{X}$ en x.

Definimos

$$\sigma(t) = \begin{cases} c(t) & \text{si } \ t \in (a,b) \\ c_1(t-b) & \text{si } \ t \in (b-\tau, b+\tau). \end{cases}$$

Por el teorema 3.3 dos curvas integrales son iguales en la intersección de sus dominios. Así $\sigma(t)$ está bien definida y es una curva integral en m. Por tanto el dominio de la curva integral de $\mathcal{X}$ en m lo podemos extender tanto como se quiera. Por tanto

$$\mathcal{D}_{\mathcal{X}} = \mathcal{M} \times \mathbf{R} .$$

Definamos

$$\eta : \mathcal{M} \times \mathbf{R} \longrightarrow \mathcal{M}$$

$\eta(m,t) = c_m(t) =$ la única curva integral c_m de $\mathcal{X}$ en m recorrida hasta el tiempo t.

Observemos que:

- η es continua por el teorema 3.3.

- $\eta(\cdot, -t) \circ \eta(\cdot, t)(m) =$ recorrer la única curva integral de $\mathcal{X}$ en m hasta el tiempo t y después partiendo de ese punto, $\eta(m,t)$, recorrer la misma curva integral hasta el tiempo $-t = m$.

Por tanto

$\eta(\cdot, t) : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ es un homeomorfismo $\forall \ t \in \mathbf{R}$ y $\eta(\cdot, 0) = 1_{\mathcal{M}}$. ∎

LEMA 3.5 Sean $(\hat{E}, < \cdot, \cdot >)$ un espacio de Hilbert, $U \subset \hat{E}$ un subconjunto abierto y $\mathcal{X}: U \longrightarrow \hat{E}$ un campo localmente lipschitz tal que $\|\mathcal{X}(x)\| \leq A \quad \forall\, x \in U$ y p.a. $A > 0$. Entonces existe

$$\eta: \hat{E} \times \mathbf{R} \longrightarrow \hat{E} \qquad \text{tal que}$$

(i) $\eta(m, \cdot)$ es una curva integral de $\mathcal{X}$ en m,

(ii) $\eta(\cdot, t): \hat{E} \longrightarrow \hat{E}$ es un homeomorfismo $\forall\, t \in \mathbf{R}$,

(iii) $\eta(\cdot, 0) = 1_{\hat{E}}$.

Demostración

Es la misma que la de la proposición 3.4 con los cambios obvios. ∎

Necesitaremos saber cuando un campo es localmente lipschitz, por lo que se darán algunos criterios elementales

PROPOSICION 3.6 Sea U subconjunto abierto de un espacio de Hilbert $(\hat{E}, <,>)$. Sean $f, g, h : U \longrightarrow \mathbf{R}$, $G, H : U \longrightarrow \hat{E}$ funciones localmente lipschitz. Además h es tal que para cada $x_0 \in U$ existen U_0 vecindad de x_0 y un número real $a(x_0) > 0$ tal que $a(x_0) \leq |h(x)|$ $\forall\, x \in U_0$.

Entonces

- $f + g$, $f \cdot g$ y f/h son localmente lipschitz,
- $fG, G + H$ son localmente lipschitz,
- $< G, H >$ es localmente lipschitz.

Demostración

Sea $x_0 \in U$.

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(x)}{h(x)} - \frac{f(y)}{h(y)}\right| &\leq \frac{|f(x)||h(y) - h(x)| + |h(x)||f(x) - f(y)|}{|h(x)||h(y)|} \\
&\leq \frac{((|f(x)|/|h(x)|)K_h + K_f)}{a}||x - y|| \\
&\leq K_3||x - y|| \qquad \text{por continuidad de } f/h \text{ en } x_0.
\end{aligned}$$

para todo x, y en una vecindad adecuada de x_0. ∎

§3.2 Lema de deformación y principio de minimax.

En esta sección probamos el lema de deformación y un principio de minimax como lo presenta y prueba [Zu], siguiendo las referencias que hace a [Ra1] en la demostración del lema de deformación. Una referencia más extensa para los metodos de minimax y el lema de deformación es [Ra1].

Sean E un espacio de Hilbert $/\mathbf{R}$ con producto interior $<,>$ y T una representación de $\mathbf{S}^1$ en E. Sea $L : E \longrightarrow E$ un operador lineal acotado, equivariante y autoadjunto.

Definamos
$$\phi(x) = \frac{1}{2} < Lx, x > .$$

Sean $\psi : E \longrightarrow \mathbf{R}$, $\psi \in C^{1,1}(E, \mathbf{R})$ una funcional invariante positivo homogenea de grado 2 (i.e. $\psi(tx) = t^2\psi(x) \ \ \forall\, t > 0, \forall\, x \in E$) tal que ψ' es una función compacta y $\psi^{-1}(1) \neq \emptyset$ y $M := \psi^{-1}(1)$.

Sea
$$W = \{ \, x \in E \ : \ \psi(x) \geq \frac{1}{2} \, \}.$$

Y definamos
$$\lambda(x) = \frac{< Lx, \psi'(x) >}{||\psi'(x)||^2} \qquad x \in W.$$

ϕ , ψ , $\mathcal{M}$ $\lambda(x)$ tienen las siguientes propiedades:

(i) ϕ es una funcional invariante,

(ii) $\phi'(x) = Lx$ (via el teorema de representación de Riez),

(iii) $< \psi'(x), x >= 2\psi(x) \ \ \forall\, x \in W$. Y si B es un subconjunto acotado de W entonces existe $a > 0$ tal que $a \leq ||\psi'(x)|| \ \ \forall\, x \in W$,

(iv) λ esta bien definida y es localmente lipschitz,

(v) $\mathcal{M}$ es una $C^{1,1}$ variedad y $Lx - \lambda(x)\psi'(x) \in T_x\mathcal{M}$.

Demostración
(i) Sea $\theta \in \mathbf{S}^1$
$$\begin{aligned} \phi(T_\theta(x)) &= \frac{1}{2} < LT_\theta x, T_\theta x > \\ &= \frac{1}{2} < T_\theta Lx, T_\theta x > && \text{L es equivariante} \\ &= \phi(x) && T_\theta \text{ es isometría.} \end{aligned}$$

(ii) **P.D.** $D\phi(x) =< Lx, \cdot >$. Porque $\phi = \frac{1}{2} < \cdot, \cdot > \circ (L \times 1_E)$. Y como $L \times 1_E$ es C^∞ ya que es lineal y continua. Y $\frac{1}{2} < \cdot, \cdot >$ es bilineal y continua por tanto C^∞. Por la regla de la cadena ϕ es C^∞ y
$$\begin{aligned} D\phi(x) &= \frac{1}{2}[D < \cdot, \cdot > (Lx, x)] \circ D(L \times 1_E)(x) \\ &= \frac{1}{2}[< Lx, \cdot > + < \cdot, x >] \circ L \times 1_E \end{aligned}$$

Así
$$\begin{aligned} D\phi(x)(v) &= \frac{1}{2}(< Lx, v > + < Lv, x >) \\ &=< Lx, v > \quad \forall\, v \in E \qquad \text{(Por ser } L \text{ autoadjunta).} \end{aligned}$$

Por el teorema de representación de Riez
$$Lx = \phi'(x) \in E.$$

$$
\begin{aligned}
(iii) \qquad < \psi'(x), x > &= D\psi(x)(x) \\
&= \frac{d}{dt}\psi \circ \beta(0) \qquad \text{donde } \beta(t) = (1+t)x \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{\psi((1+t)x) - \psi(x)}{t} \\
&= 2\psi(x) \qquad \psi \text{ es positivo homogenea de grado 2.}
\end{aligned}
$$

Por tanto

$$< \psi'(x), x > = 2\psi(x) \qquad \forall\, x \in W$$

Ahora sea $B_r = \{\ x \in W : \|x\| \leq r\ \}$.

$$1 \leq < \psi'(x), x > \leq \|\psi'(x)\|\ \|x\| \quad \forall\, x \in W \Rightarrow \frac{1}{r} \leq \|\psi'(x)\| \quad \forall\, x \in B_r.$$

(iv) Porque

$$< \psi'(x), x > = 2\psi(x) \geq 1 \qquad \forall\, x \in W$$

entonces $\psi'(x) \neq 0 \ \ \forall\, x \in W$. Por tanto $\lambda(x)$ está bien definida.

Porque $\|Lx - Ly\| \leq \|L\|\ \|x - y\|$ y porque ψ' por hipótesis es localmente lipschitz es inmediato de (iii) y proposición 3.6 que λ es localmente lipschitz.

(v) Por (iii)

$$
\begin{aligned}
&< \psi'(x), x > = 2 \qquad \forall\, x \in \mathcal{M} \\
&\Rightarrow 1 \text{ es un valor regular de } \psi \\
&\Rightarrow \psi^{-1}(1) = \mathcal{M} \text{ es una } C^{1,1} \text{ variedad (ver p.e. [AMR] pag. 162).}
\end{aligned}
$$

En lo que sigue se necesitará que $\phi_{\mathcal{M}}$ satiafaga una condición más fuerte que la usual de Palais-Smale.

(C^*) Si $(x_n) \subset \mathcal{M}$ es una sucesión tal que $\phi(x_n) \longrightarrow c \in \mathbf{R}$ y $\frac{Lx_n - \lambda(x_n)\psi'(x_n)}{(\|x_n\|+1)^{1/2}} \longrightarrow 0$ entonces (x_n) tiene una subsucesión convergente.

Por último sean

$$\phi_c = \{\ x \in \mathcal{M}\ :\ \phi(x) \leq c\}$$

y

$$K_c = \{\ x \in \mathcal{M}\ :\ \phi(x) = c, Lx = \lambda(x)\psi'(x)\ \}.$$

LEMA 3.7 (Lema de deformación) Sean ϕ , ψ , y $\mathcal{M}$ como al comienzo de esta sección 3.2 y supongamos que $\phi|_{\mathcal{M}}$ satisface (C^*). Dados $c \in \mathbf{R}$, $\bar{\varepsilon} > 0$ y una vecindad U de K_c en $\mathcal{M}$ existen $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon})$ y una función $\eta : [0,1] \times \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ que satisfacen:

(i) $\eta(t, \cdot)$ es un homeomorfismo $\forall\ t \in [0,1]$,

(ii) $\eta(0, x) = x \ \ \forall\, x \in \mathcal{M}$

(iii) $\eta(1, x) = x \ \ \forall\, x \in \mathcal{M}$, tal que $\phi(x) \notin (c - \bar{\varepsilon}, c + \bar{\varepsilon})$,

(iv) $\|\eta(1,x)-x\| \leq \|L\|\ \forall\, x \in \mathcal{M}$ ($\|L\|$ es la norma del operador),

(v) $\eta(1, \phi_{c+\varepsilon} \setminus U) \subset \phi_{c-\varepsilon}$,

(vi) $\eta(1,x) = e^{-\theta(x)L}x - K(x)$ donde $\theta(x) \in [0,1]\ \forall\, x \in \mathcal{M}$, K es compacto y $K(\mathcal{M})$ es acotado.

(vii) $\eta(t,\cdot)$ es equivariante para todo $t \in [0,1]$

Demostración
Porque $\phi|_{\mathcal{M}}$ satisface (C^*) K_c es compacto.
K_c compacto y ∂U cerrado $\Rightarrow \delta = \frac{d(\partial K_c, \partial U)}{2} > 0$

$$\Rightarrow N_\delta(K_c) := \{\ x \in \mathcal{M}\ :\ d(x,K_c) \leq \delta\ \} \subset U.$$

Si probáramos el lema para $N_\delta(K_c)$, (v) seguiría siendo válida para la U original. Así, tomemos $U = N_\delta(K_c)$.

Se afirma que existe $\hat{\varepsilon} \in (0,\bar{\varepsilon})$ y $b > 0$ tal que

$$\|Lx - \lambda(x)\psi'(x)\| \geq b(\|x\|+1)^{1/2}\ \ \forall\, x \in \phi_{c+\hat{\varepsilon}} \setminus (\phi_{c-\hat{\varepsilon}} \cup N_{\delta/8}(K_c) \tag{3}$$

En caso contrario existirían $b_n \longrightarrow 0$, $\hat{\varepsilon}_n \longrightarrow 0$ y $x_n \in \phi_{c+\hat{\varepsilon}_n} \setminus (\phi_{c-\hat{\varepsilon}_n} \cup N_{\delta/8}(K_c))$ tal que

$$\|Lx_n - \lambda(x_n)\psi'(x_n)\| < b_n(\|x_n\|+1)^{1/2}$$

entonces (x_n) satisface las hipótesis de la condición (C^*). Por tanto (x_n) tiene una subsucesión convergente, digamos ella misma.

$$x_n \longrightarrow x$$

Además es inmediato que $x \in K_c$. Pero $x_n \notin N_{\delta/8}(K_c)$ para $n = 1,2,\ldots$ por tanto

$$x \notin N^{\circ}_{\delta/8}(K_c)\ .$$

Contradicción. Así existen $\hat{\varepsilon}$, $b > 0$ como se afirmaba en (3). Elijamos

$$\hat{\varepsilon}\ ,\ b \text{ tal que } b^2 > 2\hat{\varepsilon},\ \ b < \delta/8 \ \text{ y } \ \varepsilon \in (0,\hat{\varepsilon}). \tag{4}$$

Sean E' un subconjunto del espacio de Hilbert E y

$$\mathbf{N}_\delta\ (E') := \{\ x \in E\ :\ d(x,E') \leq \delta\ \}.$$

Sean $C := \phi^{-1}[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$ y $V := \phi^{-1}(c-\hat{\varepsilon}, c+\hat{\varepsilon})$. Definamos

$$\chi_1,\ \chi_2 : E \longrightarrow [0,1]$$

$$\chi_1(x) = \frac{d(x, E\setminus V)}{d(x,E\setminus V) + d(x,C)} \qquad\qquad \chi_2(x) = \frac{d(x, \mathbf{N}_{\delta/8}\ (K_c))}{d(x,\mathbf{N}_{\delta/8}\ (K_c)) + d(x, E \setminus \mathbf{N}^{\circ}_{\delta/4}\ (K_c))}$$

Observemos que:

- χ_1, χ_2 son funcionales invariantes localmente lipschitz,

- $\chi_1 = 1$ si $x \in C$, $\chi_1(x) = 0$ si $x \notin \phi^{-1}(c - \hat{\varepsilon}, c + \hat{\varepsilon})$.

Y $\chi_2(x) = 1$ si $x \notin N^{\circ}_{\delta/4}(K_c)$, $\chi_2(x) = 0$ si $x \in N_{\delta/8}(K_c)$.

$$\begin{aligned} \phi \text{ funcional invariante} &\Rightarrow E \setminus V, C \text{ son subconjuntos invariantes} \\ &\Rightarrow \text{la función distancia es invariante} \\ &\Rightarrow \chi_1, \chi_2 \text{ son funcionales invariantes.} \end{aligned}$$

Que son localmente lipschitz se sigue de que la función distancia es uniformemente continua y de la proposición 3.6. La segunda observación es inmediata de las definiciones de χ_1, χ_2 y de que $\mathbf{N}_\delta\ (K_c) \cap \mathcal{M} = N_\delta(K_c)$. Sean

$$\chi(x) = \chi_1(x)\chi_2(x)$$

y

$$\mathcal{X}(x) = \frac{\chi(x)}{||x|| + 1}(Lx - \lambda(x)\psi'(x)) \quad x \in W.$$

Consideremos el problema de valor inicial

$$\frac{d\eta}{dt} = -\mathcal{X}(\eta(t,x)) \qquad \eta(0,x) = x \quad \forall\, x \in W. \tag{5}$$

Veamos que $\mathcal{X}$ satisface las hipótesis de la proposición 3.4.

Porque $\psi \in C^{1,1}(E, \mathbf{R}\ )$, χ_1 y χ_2 son localmente lipschitz, $||Lx - Ly|| \leq ||L||\ ||x - y||$ y por (iv) al principio de la sección 3.2 se sigue de la proposición 3.6 que $\mathcal{X}$ es localmente lipschitz en W.

Ahora

$$||\mathcal{X}(x)|| \leq \frac{1}{||x|| + 1}||Lx - \lambda(x)\psi'(x)||$$

y

$$\begin{aligned} ||Lx - \lambda(x)\psi'(x)||^2 &=< Lx, Lx > -2\lambda^2(x)||\psi'(x)||^2 + \lambda^2||\psi(x)||^2 \\ &=< Lx, Lx - \lambda(x)\psi'(x) > \qquad\qquad \text{por definición de } \lambda \\ &\leq ||Lx||\ ||Lx - \lambda(x)\psi'(x)|| \\ \Rightarrow \qquad ||\mathcal{X}(x)|| &\leq \frac{||L||\ ||x||}{||x|| + 1} \leq ||L||. \end{aligned}$$

Por tanto $\mathcal{X}: W \subset E \longrightarrow E$ es un campo vectorial localmente lipschitz tal que

$$||\mathcal{X}(x)|| < ||L|| \quad \forall\, x \in W.$$

Además por (iii) y (v) al principio de esta sección 3.2 se satisface las hipótesis de la proposición 3.4. Así existe una única función $\eta: [0,1] \times \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ tal que

(i) $\eta(t, \cdot) : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ es un homeomorfismo $\forall\ t \in [0,1]$.

(ii) $\eta(0,x)=x \quad \forall\, x \in \mathcal{M}$.

Además

(iii) Porque $\mathcal{X}(x)=0$, si $x \notin \phi^{-1}(c-\bar{\varepsilon}, c+\bar{\varepsilon})$, por (1) y definición de η

$$\eta(1,x)=c_x(1)=x \quad \forall x \in \mathcal{M} \text{ tal que } \phi(x) \notin (c-\bar{\varepsilon}, c+\bar{\varepsilon}).$$

(iv) $\|\eta(1,x)-x\| \leq \int_0^1 \|\mathcal{X}(c_x(s))\| \; ds \; \leq \|L\| \quad \forall\, x \in \mathcal{M}$.

(v) $\frac{d}{dt}\phi(\eta(t,x)) = < L\eta, \frac{d\eta}{dt} > = \frac{-\chi(\eta)}{\|\eta\|+1} < L\eta, L\eta - \lambda(\eta)\psi'(\eta) >$

$$= \frac{-\chi(\eta)}{\|\eta\|+1}\|L\eta - \lambda(\eta)\psi'(\eta)\|^2 \leq 0 \ . \tag{6}$$

Así $\phi(\eta(t,x))$ es decreciente conforme t crece.

Sea $x \in \phi_{c+\varepsilon} \setminus U$. Si $x \in \phi_{c-\varepsilon}$ entonces

$$\phi(\eta(1,x)) \leq \phi(\eta(0,x)) \leq c-\varepsilon.$$

Si $\eta(t,x) \in \phi_{c+\varepsilon} \setminus (\phi_{c-\varepsilon} \cup U) \quad \forall\, t \in [0,1]$ entonces tenemos, por definición de $\mathcal{X}$, que $\mathcal{X}(\eta(t,x))=1 \quad \forall\, t \in [0,1]$. De esto, por (6) y de la elección de b tenemos

$$\frac{d\phi \circ \eta}{dt}(t,x) \leq -b^2$$
$$\Rightarrow \qquad b^2 \leq \phi(x) - \phi(\eta(1,x)).$$

Ahora cuando $\phi(\eta(1,x)) \leq c-\varepsilon$ no hay nada que probar. Supongamos que $\phi(\eta(1,x)) > c-\varepsilon$. Entonces

$$b^2 \leq \phi(x) - \phi(\eta(1,x)) < c+\varepsilon-(c-\varepsilon) = 2\varepsilon.$$

Contradicción a la elección de ε y b (ver 4).

Por último veamos que para $x \in \phi_{c+\varepsilon} \setminus (\phi_{c-\varepsilon} \cup U)$ la curva integral $\eta(t,x)$ no puede adentrarse en $N_{\delta/2}(K_c)$ por lo que $\mathcal{X}(\eta(t,x)) < 1$ p.a. $t \in [0,1]$ si y sólo si $\eta(t,x) \in \phi_{c-\varepsilon} \setminus \{\ x \ : \ \phi(x)=c\ \}$. En cuyo caso $\eta(1,x) \in \phi_{c-\varepsilon}$.

Así sea $x \in \phi_{c+\varepsilon} \setminus (\phi_{c-\varepsilon} \cup U)$ y $\eta(t,x) \in \phi_{c+\varepsilon} \setminus (\phi_{c-\varepsilon} \cup N_{\delta/2}(K_c))$

$$\Rightarrow \phi(x) - \phi(\eta(t,x)) \leq 2\varepsilon < 2\hat{\varepsilon}.$$

Ahora

$$
\begin{aligned}
b\|\eta(t,x)-x\| &\leq b\int_0^t \|\mathcal{X}(\eta(s,x))\|\,ds \\
&\leq \int_0^t \frac{\chi(\eta)\|L(\eta)-\lambda(\eta)\psi'(\eta)\|^2}{\|\eta\|+1}\,ds \quad \text{por la elección de b} \\
&= -\int_0^t < L\eta, \mathcal{X}(\eta) > \; ds \quad \text{por (6)} \\
&= \int_t^0 \frac{d}{ds}\phi \circ \eta(s,x)\,ds \\
&= \phi(x) - \phi(\eta(t,x)) \\
&< 2\hat{\varepsilon}
\end{aligned}
$$

por lo que

$$\|\eta(t,x)-x\| \leq \frac{2\hat{\varepsilon}}{b} < \frac{\delta}{8} \qquad \text{por (4)}$$

Por tanto

$$\eta(t,x) \;\; \text{nunca entra en } N_{\delta/2}(K_c).$$

(vi) La solución a la ecuación diferencial (5) puede ser representada de la forma

$$\eta(1,x) = e^{-\theta(x)L}x - K(x)$$

donde $\theta(x)=\theta(1,x)$, $\theta(t,x)=\int_0^t \omega(\eta(s,x))\,ds \in [0,1]$ para $t\in[0,1]$, $\omega(x)=\dfrac{\chi(x)}{\|x\|+1}$

y $K(x) = -\int_0^1 [exp(\theta(t,x)-\theta(1,x))L]\omega(\eta(t,x))\lambda(\eta(t,x))\psi'(\eta(t,x))\,dt$

Veamos que $K(\mathcal{M})$ es acotada.

$$\|\omega(x)\lambda(x)\psi'(x)\| = \frac{|\chi(x)|}{\|x\|+1}\frac{|< Lx,\psi'(x) >|}{\|\psi'(x)\|^2}\|\psi'(x)\| \leq \frac{\|L\|\,\|x\|}{\|x\|+1} \leq \|L\|$$

$$\Rightarrow \|K(x)\| \leq \int_0^1 e^{|\theta(t,x)-\theta(1,x)|\|L\|}\frac{\|Lx\|}{\|x\|+1}\,dt \;\leq \|L\|e^{\|L\|} \qquad \forall\, x\in\mathcal{M}$$

Por último probemos que K es una función compacta. Para ello comencemos probando que $\lambda\psi'$ es una función compacta. Sea $B_{r_0}=\{\, x\in\mathcal{M} \;:\; \|x\|\leq r_0 \,\}$ con $r_0>0$.

$$|\lambda(x)| \leq \frac{\|Lx\|\,\|\psi'(x)\|}{\|\psi'(x)\|^2} \leq \frac{\|L\|r_0^2}{2} \qquad \forall\, x\in B_{r_0}$$

por (iii) al principio de esta sección. Como

$$\overline{(\lambda\psi')(B_{r_0})} \subset [-\frac{\|L\|r_0^2}{2}, \frac{\|L\|r_0^2}{2}]\overline{\psi'(B_{r_0})}$$

y por hipótesis ψ' es una función compacta entonces $\lambda\psi'$ es una función compacta.

Analicemos $\theta(t,x)$. Sean $t < \tilde{t} < 1$ y $x, \tilde{x} \in \mathcal{M}$. Entonces

$$\int_0^{\tilde{t}} \omega(\eta(s,\tilde{x}))\, ds - \int_0^{t} \omega(\eta(s,x))\, ds \leq \|\omega(\eta(\cdot,\tilde{x})) - \omega(\eta(\cdot,x))\|_\infty + |t-\tilde{t}|\, \|\omega(\eta(\cdot,\tilde{x}))\|_\infty .$$

De esto y de la continuidad de $x \longmapsto \omega(\eta(\cdot,x)) \in C([0,1],[0,1])$ con la topología de la metrica uniforme en $C([0,1],[0,1])$ (para la continuidad de esta función ver en la proposición 2.6 la demostración de la continuidad de ζ) se sigue la continuidad de $\theta(\cdot,\cdot)$.

Sea $Y = \{\, e^{\alpha L}\beta z \;:\; \alpha \in [-1,0],\ \beta \in [0,1]$ y $z \in \overline{\lambda\psi'(\eta([0,1]\times B_{r_0}))}\ \}$. Como

$$\|\eta(t,x)\| = \|x + \int_0^t \mathcal{X}(\eta(s,x))\, ds\| \leq r_0 + \|L\| \quad \forall\, t \in [0,1] \text{ y } \forall x \in B_{r_0},$$

y $\lambda\psi'$ es una función compacta entonces $\overline{\lambda\psi'(\eta([0,1]\times B_{r_0}))}$ es compacto.

Porque $(\alpha,\beta,z) \longmapsto e^{\alpha L}\beta z$ es continua entonces Y es compacto.Tomemos

$$\alpha(t) = \theta(t,x) - \theta(1,x)$$
$$\beta(t) = \omega(\eta(t,x)),$$
$$z(t) = \lambda(\eta(t,x))\psi'(\eta(t,x)).$$

Por la continuidad de α, β, z $e^{\alpha L}\beta z$ es continua. Ahora como $K(x) \in conv Y$ $\forall\, x \in B_{r_0}$ y como la envolvente convexa de compactos es compacto entonces $\overline{K(B_{r_0})}$ es compacto. Por lo tanto

K es una función compacta.

(vii) Porque en la definición del campo $\mathcal{X}$ estan involucradas sólo funciones equivariantes y funcionales invariantes, $\mathcal{X}$ es equivariante .

$$\mathcal{X}(T_\theta\eta(t,x)) = T_\theta\mathcal{X}(\eta(t,x)) = T_\theta\frac{d\eta}{dt}(t,x) = \frac{d}{dt}T_\theta\eta(t,x)$$

$\Rightarrow T_\theta\eta(t,x)$ es una curva integral en $T_\theta(x)$.

Por la unicidad de la curva integral

$$T_\theta\eta(\cdot,x) = \eta(\cdot,T_\theta(x)) \quad \forall\, x \in \mathcal{M}$$

Por tanto

$\eta(t,\cdot)$ es equivariante. ∎

TEOREMA 3.8 Sean L, ϕ , ψ , $\mathcal{M}$ como antes y supongamos que $\phi|_{\mathcal{M}}$ satisface (C^*). Sea $E = X^\perp \oplus X$, X subespacio cerrado T-invariante tal que $X^\perp \supset E^0$, y $LX^\perp \subset X^\perp$. Tomemos $\gamma_r(\cdot)$ el índice relativo a $X^\perp$ y defínamos

$$\Gamma_j = \{\, A \in \mathcal{F} \;:\; A \subset \mathcal{M}\ ,\ \gamma_r(A) \geq j\ \}$$

y

$$c_j = \inf_{A\in\Gamma_j} \sup_{x\in A} \phi(x) \qquad j = 1\dots N.$$

Supóngase además que existen a, $b \in \mathbb{R}$ tal que $c_j \in (a,b)$ para $1 \le j \le N$ y $E^0 \cap \phi^{-1}[a,b] = \emptyset$. Entonces c_j es un valor crítico de $\phi|_{\mathcal{M}}$ para $1 \le j \le N$. Además si $c_j = \dots = c_{j+p}$ para algún j y algún $p \ge 0$ entonces $\gamma(K_{c_j}) \ge p+1$.

Demostración

Es suficiente probar la segunda afirmación, ya que tomando $p = 0$ tenemos que $\gamma(K_{c_j}) \ge 1$ para $\forall\ 1 \le j \le N$. Entonces $K_{c_j} \neq \emptyset$ para todo $j = 1,\dots,N$ por definición de índice.

Sea $c_j = \dots = c_{j+p} = c$, $p \ge 0$. Notemos que $K_c \in \mathcal{C}$ ya que:

- $K_c \cap E^0 \subset \phi^{-1}[a,b] \cap E^0 = \emptyset$,

- K_c es compacto por (C^*) y

- K_c es T-invariante porque $\mathcal{M}$ es T-invariante, ϕ es funcional invariante y L, $\lambda\psi'$ son equivariantes.

Procedamos por reducción al absurdo. Supongamos que $\gamma(K_c) \le p$. Por la proposición 2.6 existe $\delta > 0$ tal que

$$\gamma(K_c) = \gamma(\mathbf{N}_\delta\ (K_c)).$$

Porque $\mathcal{M}$ es invariante y cerrada $N_\delta(K_c) = \mathbf{N}_\delta\ (K_c) \cap \mathcal{M} \in \mathcal{C}$. Además porque $K_c \subset N_\delta(K_c) \subset \mathbf{N}_\delta\ (K_c)$ por proposición 2.5

$$\gamma(K_c) = \gamma(N_\delta(K_c)).$$

Sean $\bar{\varepsilon} < min\{b-c, c-a\}$, $U = N_\delta(K_c)$ y ε, η como en la conclución de lema 3.7. Por definición de c y de c_{j+p} podemos encontrar $A \in \Gamma_{j+p}$ tal que $\phi(A) \subset \phi_{c+\varepsilon}$. Por el corolario 2.12

$$\gamma_r(\overline{A \setminus N_\delta(K_c)}) \ge \gamma_r(A) - \gamma(N_\delta(K_c)) \ge j+p-p = j$$

$$\Rightarrow \quad \overline{A \setminus N_\delta(K_c)} \in \Gamma_j.$$

Sea $B = \eta(1, \overline{A \setminus N_\delta(K_c)})$. Por definición de $\bar{\varepsilon}$

$$\phi^{-1}(c-\bar{\varepsilon}, c+\bar{\varepsilon}) \cap E^0 \subset \phi^{-1}(a,b) \cap E^0 = \emptyset \qquad \text{(por hipótesis)}$$
$$\Rightarrow \eta(1,x) = x \quad \forall\, x \in \overline{A \setminus N_\delta(K_c)} \cap E^0 \qquad \text{(por (iii) del lema 3.7)} \qquad (7)$$

Ahora veamos que $g = \eta(1,\cdot)|_{\overline{A\setminus N_\delta(K_c)}}$ satisface las hipótesis de la propiedad del mapeo (proposición 2.9).

$$g(x) = e^{-\theta(x)L}x - K(x) \qquad \text{por (vi) lema 3.7}$$

(a) Se satisface por hipótesis,
(b) $\theta(x) \in [0,1] \quad \forall\, x \in A \setminus N_\delta(K_c)$, por (vi) en lema 3.7. Y

$$\begin{aligned}\theta(t, T_\theta(x)) &= \textstyle\int_0^t \omega(\eta(s, T_\theta(x)))\, ds \\ &= \textstyle\int_0^t \omega(T_\theta\eta(s,x))\, ds \qquad \text{por (vii) en lema 3.7} \\ &= \theta(t,x) \qquad \text{porque } \omega \text{ es funcional invariante}\end{aligned}$$

Por tanto $\theta(x) = \theta(1, x)$ es funcional invariante.

(c) Por (vi) en lema 3.7 K es compacto y tiene imagen acotada. Y se checa fácilmente que K es equivariante.

Además por (7)

$$g|_{\overline{A \setminus N_\delta(K_c)} \cap E^o} = 1|_{\overline{A \setminus N_\delta(K_c)} \cap E^o}.$$

Así por la proposición 2.9

$$\gamma_r(B) \geq \gamma_r(\overline{A \setminus N_\delta(K_c)}) \geq j$$
$$\Rightarrow \exists\ x \in B \text{ tal que } \phi(x) \geq c$$

Contradicción ya que por (v) del lema 3.7 $B \subset \phi_{c-\epsilon}$. ■

Comentario:

Si $\gamma(K_{c_j}) \geq 2$ entonces K_{c_j} tiene un número infinto de órbitas (la órbita de un punto x es $\{T_\theta(x)\}_{\theta \in S^1}$) ver [Be].

CAPITULO 4.

EXISTENCIA DE ORBITAS

§4.1 Enunciado del teorema principal

DEFINICION 4.1 (Vecindad estrictamente estrellada) Sea $U \subset \mathbf{R}^{2N}$ una vecindad del cero. U se dice estrictamente estrellada si $\bar{\zeta} : \partial U \longrightarrow \mathbf{S}^{2N-1}$, $\bar{\zeta}(x) = x/|x|$ está bien definida y es un difeomorfismo de clase C^2 (i.e. $\bar{\zeta}$ tiene inversa y ambas son de clase C^2).

Sea $H \in C^2(\mathbf{R}^{2N}, \mathbf{R})$ tal que

(i) $\Sigma = H^{-1}(1)$ es compacta,

(ii) Σ acota una vecindad estrictamente estrellada del origen (i.e. Σ es su frontera), y

(iii) $x \cdot \nabla H(x) \neq 0 \ \forall\, x \in \Sigma$, donde "$\cdot$" denota el producto interior usual de $\mathbf{R}^{2N}$.

Notemos que de estas hipótesis se desprende que:

· 1 es valor regular de H i.e.

$$\nabla H(x) \neq 0 \ \ \forall\, x \in \Sigma = H^{-1} \tag{1}$$

· Existe $\rho > 0$ con la propiedad de ser el mayor número para el cual

$$T_x\Sigma + x \cap \{\, y \in \mathbf{R}^{2N} \ : \ |y| < \rho \,\} = \emptyset \ \ \forall x \in \Sigma. \tag{2}$$

Porque la distancia del hiperplano $T_x\Sigma + x$ al origen está dada por

$$\xi : \Sigma \longrightarrow \mathbf{R} \qquad \xi(x) = |\nabla H(x) \cdot x| / |\nabla H(x)| \tag{3}$$

, que por (iii) está bien definida y es diferente de cero, y porque ξ es continua y Σ compacto existe $0 < \rho = \min_{x \in \Sigma} \xi(x)$ con la propiedad requerida.

· Por la compacidad de Σ y continuidad de $|\cdot|$ existen r, $R > 0$ tal que

$$r \leq |x| \leq R \ \ \forall\, x \in \Sigma \tag{4}$$

En lo siguiente se exhibira la existencia de orbitas periódicas en Σ para el sistema Hamiltoniano

$$\dot{x} = J\nabla H(x)\ , \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} \text{ con } I = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}_{N \times N} \tag{SH}$$

El objetivo es probar el siguiente

TEOREMA 4.2 Sea $H \in (\mathbf{R}^{2N}, \mathbf{R})$ tal que:

(i) El conjunto $A = \{ x \in \mathbf{R}^{2N} : H(x) \leq 1 \}$ es no vacio, compacto, estrictamente estrellado y $\Sigma := H^{-1}(1)$ es la frontera de A.

(ii) $x \cdot \nabla H(x) \neq 0 \ \forall x \in \Sigma$.

Si $R^2 < 2\rho^2$, donde R, ρ son las definidas en (2) y (4), entonces (SH) tiene al menos N distintas órbitas periódicas en Σ.

§4.2 El problema variacional

En esta sección exhibiremos que existe una correspondencia biunívoca entre las órbitas periódicas de (SH) y los puntos críticos de una cierta funcionál $\phi|_{\mathcal{M}}$.

En lo sucesivo sera util identificar a $\mathbf{R}^{2N}$ con $\mathbf{C}^N$ via

$$x = (p, q) \in \mathbf{R}^{2N} \longleftrightarrow p + iq \in XCX^N.$$

Así

$$Jx \longleftrightarrow i(p + iq).$$

Aunque la notación no sea convencional podemos usar sólo la notación $x = (p, q)$ para ambas formas de visualizar un elemento, ya sea en $\mathbf{R}^{2N}$ o en $\mathbf{C}^N$, del contexto sera claro cual de las dos se está elijiendo. Cuando utilicemos en las ecuaciones siguientes " $\cdot$ " nos referiremos al producto interior usual de $\mathbf{R}^{2N}$.

Comencémos introduciendo los espacios de Hilbert $L^2(\mathbf{S}^1, \mathbf{C}^N)$, $H^{1/2}(\mathbf{S}^1, \mathbf{C}^N)$ y $H^1(\mathbf{S}^1, \mathbf{C}^N)$.

El espacio de Hilbert

$$L^2(\mathbf{S}^1, \mathbf{C}^N) := \oplus_{i=1}^N L^2(\mathbf{S}^1, \mathbf{C}) \text{ con } (u, v)_{L^2} := \sum_{i=1}^N (u_i, v_i)_{L^2} \ u, v \in L^2(\mathbf{S}^1, \mathbf{C}).$$

Notemos que dado $x \in L^2(\mathbf{S}^1, \mathbf{C}^N)$ podemos definir $\bar{x}: \mathbf{S}^1 \longrightarrow \mathbf{C}^N$ por $\bar{x}(\theta) = (x_1(\theta), \ldots, x_N(\theta))$. E inversamente dado $\bar{x}: \mathbf{S}^1 \longrightarrow \mathbf{C}^N$ podemos definir $x = (\pi_1 \bar{x}, \ldots, \pi_N \bar{x}) \in L^2(\mathbf{S}^1, \mathbf{C}^N)$ donde $\pi_j: \mathbf{C}^N \longrightarrow \mathbf{C}$ es la proyección j-esima. Y mediante la identificación de $\mathbf{C}^N$ y $\mathbf{R}^{2N}$ a un elemento $x \in L^2(\mathbf{S}^1, \mathbf{C}^N)$ lo podemos ver como una curva en $\mathbf{R}^{2N}$ donde cada una de sus curvas coordenadas son funciones de $L^2(\mathbf{S}^1, \mathbf{R})$ e inversamente.

Observemos que si u, $v \in L^2(\mathbf{S}^1, \mathbf{C}^N)$

$$(u, v)_{L^2} := \sum_{i=1}^N \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_i \bar{v}_i \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (u, v)_{\mathbf{C}^N} \, dt .$$

Por el corolario A.6, en el apéndice A, si $u \in L^2(\mathbf{S}^1, \mathbf{C}^N)$

$$u = \sum_{k \in \mathbf{Z}} u_k \mathbf{e}^{ikt} \quad \text{donde } u_k \in \mathbf{C}^N, \ \mathbf{e}^{ikt} = (e^{ikt}, \ldots, e^{ikt}) \in L^2(\mathbf{S}^1, \mathbf{C}^N). \tag{5}$$

Ahora a partir de esta expresión única de los elementos de $L^2(\mathbf{S}^1, \mathbf{C}^N)$ definimos los espacios de Sobolev

$$H^{1/2}(\mathbf{S}^1, \mathbf{C}^N) := \{ u \in L^2(\mathbf{S}^1, \mathbf{C}^N) : \textstyle\sum_{k\in\mathbf{Z}} (1+|k|)|u_k|^2 < \infty \}$$

$$H^1(\mathbf{S}^1, \mathbf{C}^N) := \{ u \in L^2(\mathbf{S}^1, \mathbf{C}^N) : \sum_{k\in\mathbf{Z}} (1+|k|^2)|u_k|^2 < \infty \}$$

provistos con el producto interiór

$$< u, v >_{H^{1/2}} := \sum_{k\in\mathbf{Z}} (1+|k|) u_k \bar{v}_k \quad u, v \in H^{1/2}(\mathbf{S}^1, \mathbf{C}^N)$$

$$< u, v >_{H^1} := \sum_{k\in\mathbf{Z}} (1+|k|^2) u_k \bar{v}_k \quad u, v \in H^1(\mathbf{S}^1, \mathbf{C}^N)$$

que los hacen espacios de Hilbert.

Una norma equivalente a la $H^{1/2}$ es

$$\|u\|^2 := 2\pi(|u_0|^2 + \sum_{k\in\mathbf{Z}} |k||u_k|^2) \quad u \in H^{1/2}(\mathbf{S}^1, \mathbf{C}^N)$$

la cual proviene del producto interior

$$< u, v > = 2\pi(u_0\bar{v}_0 + \sum_{k\in\mathbf{Z}} |k| u_k \bar{v}_k) \quad u, v \in H^{1/2}(\mathbf{S}^1, \mathbf{C}^N).$$

Que $\|\cdot\|_{H^{1/2}}$ y $\|\cdot\|$ son equivalentes es simple de comprobar.

Claramente

$$\frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \|u\|_{H^{1/2}} \leq \|u\| \leq (2\pi)^{1/2} \|u\|_{H^{1/2}}$$

por lo tanto las normas son equivalentes.

Denotemos por E a $(H^{1/2}(\mathbf{S}^1, \mathbf{C}^N), Re <,>)$. De aqui en adelante **a la parte real de** $<,>$ **la denotaremos** $<,>$.

Sea $E = E^- \oplus E^0 \oplus E^+$ la descomposición ortogonal de E correspondiente a la parte $k < 0$, $k = 0$ y $k > 0$ de (5). Sea $x \in E$ $x = x^- + x^0 + x^+$ y definamos

$$\psi : E \longrightarrow \mathbf{R} \quad \psi(x) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H(x(t))\, dt$$

$$L : E \longrightarrow E \quad L(x) := x^+ - x^-$$

$$\phi : E \longrightarrow \mathbf{R} \quad \phi(x) := \frac{1}{2}(\|x^+\|^2 - \|x^-\|^2) = \frac{1}{2} < Lx, x >$$

$$M := \psi^{-1}(1).$$

Es inmediato de la definición de L que es un operador lineal acotado y autoadjunto. Y además $D\phi(x)(\cdot) = < Lx, \cdot >$ (esto se probó al principio de la sección 3.2).

Supongamos que H ψ y $\mathcal{M}$ satisfacen las siguientes condiciones ,(*),:

$\cdot\ \nabla H(y)\cdot y = 2H(y) \quad \forall y \in \mathbf{R}^{2N}$ y $|\nabla H(y)|/|y| \leq K$ p.a. $K > 0$ y $\forall\, y \in \mathbf{R}^{2N}$

$\cdot\ < \nabla\psi(x), x >= 2\psi(x) \ \ \forall\, x \in E$, $\mathcal{M}$ es una C^1 variedad y $\nabla\psi(x) \perp T_x\mathcal{M} \ \ \forall\, x \in \mathcal{M}$, (*)

$\cdot\ < \nabla\psi(x), \xi >= D\psi(x)(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \nabla H(x(t))\cdot\xi(t)\, dt \quad \forall\, \xi \in E, \forall\, x \in E.$

Ahora exhibamos la correspondencia biunívoca entre las órbitas periodicas de (SH) y los puntos críticos de la funcional $\phi|_{\mathcal{M}}$ atravez de las dos siguiente proposiciones.

PROPOSICION 4.3 Existe una correspondencia biunívoca entre las soluciones de (SH) de periodo T contenidas en Σ y las soluciones de periodo 2π de

$$\dot{x} = \lambda J\nabla H(x) \quad \lambda > 0 \qquad (\overline{SH})$$

, donde λ depende de T, contenidas en Σ

PROPOSICION 4.4 x es solución de

$$\dot{x} = \lambda J\nabla H(x) \quad \text{donde} \quad \lambda = \phi(x)/2\pi$$

contenida en Σ si y sólo si x es punto critico de $\phi|_{\mathcal{M}}$.

Demostración de proposición 4.3
Sea $x(t)$ una solución de (SH) de periodo T, tomando $t(\tau) = \frac{2\pi}{T}\tau$, $z(\tau) := x \circ t(\tau)$ tenemos

$$\frac{dz}{d\tau}(\tau) = \frac{2\pi}{T}\dot{x}(t(\tau)) = \frac{2\pi}{T}J\nabla H(z(\tau)).$$

E inversamente tomando $\tau(t) = (T/2\pi)t$, $y(t) := z \circ \tau(t)$ tenemos

$$\frac{dy}{dt} = \frac{T}{2\pi}\dot{z}(\tau(t)) = J\nabla H(y(t))$$

Además $y(t) = x(t)$. ∎

Para la demostración de la proposición 4.4 necesitamos las siguientes proposiciones.

PROPOSICION 4.5 Sea $z \in H^1(\mathbf{S}^1, \mathbf{C}^N)$ entonces

$$< Lz, \xi >= -\int_0^{2\pi} J\dot{z}(t)\cdot\xi(t)\, dt \quad \forall\, \xi \in E$$

PROPOSICION 4.6 Sea x punto crítico de $\phi|_{\mathcal{M}}$ y $\lambda > 0$ entonces existe un único $\hat{x} = (p, q) \in H^1(\mathbf{S}^1, \mathbf{C}^N)$ tal que

$$\dot{\hat{x}} = \lambda J \nabla H(x) \quad \text{casi donde quiera (c.d.q.)}$$

y

$$[\hat{x}] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(t)\, dt \quad \text{donde } [\hat{x}] := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \hat{x}(t)\, dt\ .$$

Demostración de la proposición 4.4

$\Rightarrow$) Sea x solución de

$$\dot{x} = \lambda J H'(x) \text{ donde } \lambda = \phi(x)/2\pi$$

$$\begin{aligned}
< \nabla\psi(x), \xi > &= \frac{1}{2\pi\lambda}\int_0^{2\pi} \lambda\nabla(x(t)) \cdot \xi(t)\, dt && \text{por } (^*) \\
&= -\frac{1}{2\pi\lambda}\int_0^{2\pi} J\dot{x}(t) \cdot \xi(t)\, dt \\
&=< \frac{1}{2\pi\lambda}, \xi > \quad \forall\, \xi \in E && \text{por 4.5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow < \nabla\psi(x) - \frac{1}{2\pi\lambda} Lx, \xi >= 0 \quad \forall\, \xi \in E \\
&\Rightarrow \nabla\psi(x) = \frac{1}{2\pi\lambda} Lx \\
&\Rightarrow d\phi|_{\mathcal{M}}(x)(y) = D\phi(x)(y) \\
&\qquad\qquad =< Lx, y > \\
&\qquad\qquad =< 2\pi\lambda\nabla\psi(x), y >= 0 \quad \forall\, y \in T_x\mathcal{M} \text{ por } (^*).
\end{aligned}$$

$\Leftarrow$) Sea x un punto crítico de $\phi|_{\mathcal{M}}$. Entonces

$$\begin{aligned}
&0 = d\phi|_{\mathcal{M}}(x)(y) = D\phi(x)(y) =< Lx, y > \quad \forall\, y \in T_x\mathcal{M} \\
&\Rightarrow Lx = \bar{\lambda}(x)\nabla\psi(x) \text{ ya que por } (^*)\ \nabla\psi(x) \perp T_x\mathcal{M}.
\end{aligned}$$

Tomemos $\lambda = \bar{\lambda}/2\pi$. Por la proposición 4.6 existe un único $\hat{x} = (\hat{p}, \hat{q}) \in H^1(\mathbf{S}^1, \mathbf{C}^N)$ tal que

$$\dot{\hat{x}} = \lambda J \nabla H(x) \qquad \text{c.d.q.} \tag{6}$$

y

$$[\hat{x}] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(t)\, dt$$

Ahora sea $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in C^\infty(\mathbf{S}^1, \mathbf{C}^N)$ y tomemos el producto interior de $J\xi$ con (6)

$$\begin{aligned}
\lambda\int_0^{2\pi} \nabla H(x(t)) \cdot \xi(t)\, dt &= \int_0^{2\pi}(-\xi_2 \cdot \dot{\hat{p}} + \xi_1\dot{\hat{q}})\, dt \\
&= \int_0^{2\pi}(\dot{\xi}_2 \cdot \hat{p} - \dot{\xi}_1 \cdot \hat{q})\, dt \\
&= 2\pi Re(\hat{x}, \dot{\tilde{\xi}})_{L^2} \qquad \text{donde } \tilde{\xi} = (\xi_2, \xi_1).
\end{aligned}$$

En la penúltima igualdad se aplico integración por partes, valido porque $\hat{p}$, $\hat{q}$ son absolutamente continuas (ver [Co] página 189).

Por otra parte

$$\begin{aligned}
\frac{\bar{\lambda}}{2\pi}\int_0^{2\pi} \nabla H(x(t))\cdot\xi(t)\,dt &=< \bar{\lambda}\nabla\psi(x),\xi > && \text{por (*)}\\
&=< Lx,\xi > && \text{por ser x pto crítico}\\
&=< L\xi,x > && \text{por ser } L \text{ autoadjunto}\\
&= -\int_0^{2\pi} J\dot{\xi}(t)\cdot x(t)\,dt && \text{por 4.5}\\
&= 2\pi Re(x,\dot{\xi})_{L^2}
\end{aligned}$$

por tanto

$$Re(\hat{x},\dot{\xi})_{L^2} = Re(x,\dot{\xi})_{L^2} \quad \forall\, \xi \in C^\infty(\mathbf{S}^1, \mathbf{C}^N)$$

como $C^\infty(\mathbf{S}^1, \mathbf{C}^N)$ es denso en $L^2(\mathbf{S}^1, \mathbf{C}^N)$

$$\hat{x} = x \qquad \text{c.d.q.}$$

Asi x, $\hat{x}$ tienen los mismos coeficientes de la expresión (5). Entonces $x \in H^1(\mathbf{S}^1, \mathbf{C}^N)$, y por el corolario A.10, en el apéndice A, x es continua.

$$\begin{aligned}
\text{x continua} &\Rightarrow x = \hat{x}\\
&\Rightarrow \hat{x} \in C^1(\mathbf{S}^1, \mathbf{C}^N)
\end{aligned}$$

esto último por ser $\hat{x}$ solución de (6) y por ser $\lambda J\nabla H(x(t))$ continua. Por tanto $x \in C^1(\mathbf{S}^1, \mathbf{C}^N)$ y satiaface $(\overline{SH})$.

Por último por ser x solución de $(\overline{SH})$

$$\frac{d}{dt}H(x(t)) = \nabla H(x(t))\cdot\lambda J\nabla H(x(t)) = 0$$

$$\Rightarrow H(x(t)) = cte.$$

Como $x \in \mathcal{M}$

$$1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H(x(t))\,dt = H(x(t))$$

por definición de Σ

$$x(t) \in \Sigma \quad \forall\, t \in [0,2\pi].$$

Solo resta calcular el valor de λ.

$$\begin{aligned}
\phi(x) &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} -J\dot{x}\cdot x\,dt && \text{por proposición 4.5}\\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \lambda\nabla H(x(t))\cdot x(t)\,dt\\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 2\lambda H(x(t))\,dt && \text{por (*)}\\
&= 2\pi\lambda && \text{porque } x(t) \text{ está contenida en } \Sigma. \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Demostración de la proposición 4.5
Sea $z \in H^1(\mathbf{S}^1, \mathbf{C}^N)$ y $\xi \in E$. Expresemos a

$$z = \sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k e^{ikt}, \; \xi = \sum_{k\in\mathbf{Z}} b_k e^{ikt}$$

como en (5). Y calculemos

$$\begin{aligned}(\dot{z}, e^{ikt})_{L^2} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \dot{z} e^{-ikt}\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} z(t) ik e^{-ikt}\, dt \quad \text{integración por partes} \\ &= ika_k.\end{aligned}$$

Por el teorema A.2 (b) (apéndice A)

$$\dot{z} = \sum_{k\in\mathbf{Z}} ika_k e^{ikt}.$$

Ahora por definición de $<\cdot,\cdot>$ en E

$$< Lz, \xi >= 2\pi Re(\sum_{k\in\mathbf{Z}} ka_k \bar{b}_k).$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}-\int_0^{2\pi} J\dot{z}(t)\cdot\xi(t)\, dt &= -\int_0^{2\pi} i\dot{z}(t)\cdot\xi(t)\, dt \\ &= 2\pi Re(-i(\dot{z}(t), \xi(t))_{L^2}) \\ &= 2\pi Re \sum_{k\in\mathbf{Z}} ka_k \bar{b}_k.\end{aligned}$$

Por tanto

$$< Lz, \xi >= -\int_0^{2\pi} J\dot{z}(t)\cdot\xi(t)\, dt. \blacksquare$$

Demostración de la proposición 4.6
Veamos que se satisfacen las hipótesis de la proposición A.11, en el apéndice A.

Sea $\xi_j = (0, \dots, 1, 0, \dots 0) \in L^2(\mathbf{S}^1, \mathbf{C}^N)$. Porque $Lx = \bar{\lambda}(x)\nabla\psi(x)$

$$\begin{aligned} & 0 =< Lx, \xi_j >= \bar{\lambda}(x) < \nabla\psi(x), \xi_j > \\ \Rightarrow \quad & 0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \nabla H(x(t))\cdot\xi_j(t)\, dt \qquad 1 \le j \le N \qquad \text{por } (*) \\ \Rightarrow \quad & 0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \nabla H(x(t))\, dt .\end{aligned}$$

Por tanto $[\lambda J\nabla H(x)] = 0$.

Ahora $|\nabla H|^2$ continua y $x \in H^{1/2}(\mathbf{S}^1, \mathbf{C}^N) \subset L^2(\mathbf{S}^1, \mathbf{C}^N)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & |\nabla H(x(t))|^2 \quad \text{es medible} \\ \Rightarrow \quad & \int_0^{2\pi} |\nabla H(x(t))|^2\, dt \le \int_0^{2\pi} b\, dt < \infty \quad \text{b=cte} \\ \Rightarrow \quad & \nabla H(x(t)) \in L^2(\mathbf{S}^1, \mathbf{C}^N).\end{aligned}$$

La penúltima afirmación es debido a que ∇H es acotada en acotados, por una de las condiciones (*).

Porque $\nabla H(x(t)) \in L^2(S^1, \mathbf{C}^N)$ y $[\lambda J \nabla H(x)] = 0$, por proposición A.11, existe un único $\hat{x} = (\hat{p}, \hat{q}) \in H^1(S^1, \mathbf{C}^N)$ tal que $\dot{\hat{x}} = \lambda J \nabla H(x)$ c.d.q. y $[\hat{x}] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(t)\, dt$. ∎

§4.3 Cambiando el hamiltoniano

Antes de demostrar el teorema principal, teorema 4.2, cambiaremos la función $H \in C^2(\mathbf{R}^{2N}, \mathbf{R})$ original por una muy particular que satisface las condiciones (*) y cuyas órbitas periódicas en Σ están en correspondencia biunivoca con las del hamiltoniano original Además se harán algunas pruebas técnicas necesarias para aplicar la herramienta desarrollada en los capítulos 2 y 3, para la demostracíon del teorema 4.2. Cambiemos la función H por una más conveniente, definamos

$$\bar{H}(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{|x|^2}{|\zeta(x/|x|)|^2} & \text{si } x \neq 0 \end{cases} \qquad x \in \mathbf{R}^{2N} \qquad (7)$$

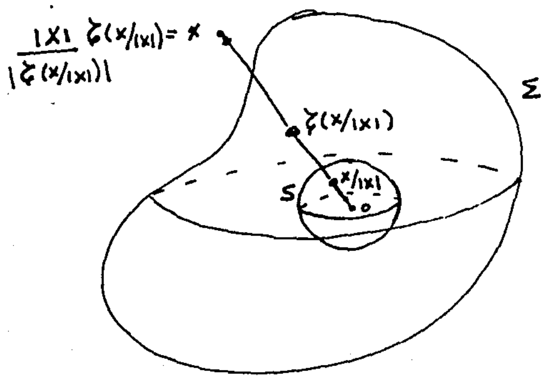

Figura 1.

donde $\zeta : S^{2N-1} \longrightarrow \Sigma$ es la inversa del C^2-difeomorfismo

$$\bar{\zeta} : \Sigma \longrightarrow S^{2N-1} \text{ con } S^{2N-1} := \{ x \in \mathbf{R}^{2N} : |x| = 1 \},\ \bar{\zeta}(x) = x/|x|.$$

$\bar{H}(x)$ es el cuadrado "de lo que tendriamos que dilatar o contraer radialmente a Σ para que contuviera a x", ver figura 1.

Notemos que $\bar{H}^{-1}(1) = \Sigma$.

Ejemplo. Una de las condiciones geometricas de Σ es que existan r, $R > 0$ tal que

$$r \leq |x| \leq R \qquad \forall\, x \in \Sigma \qquad\qquad (\text{ ver } 4).$$

Definamos $\bar{H}_0$, $\bar{H}_1$ como definimos $\bar{H}$ usando las superficies $\Sigma_0 = \{ \ x \in \mathbf{R}^{2N} : |x| = r \ \}$, $\Sigma_1 = \{ \ x \in \mathbf{R}^{2N} : |x| = R \ \}$ respectivamente. Entonces

$$\frac{|x|^2}{R^2} = \bar{H}_1(x) \leq \bar{H}(x) \leq \bar{H}_0(x) = \frac{|x|^2}{r^2}. \tag{8}$$

Supongamos probadas las siguientes propiedades de $\bar{H}$ (propiedades que se probarán en la proposición 4.8)

$\cdot \nabla \bar{H}(x) \cdot x = 2\bar{H}(x)$,
$\cdot \nabla \bar{H}$ es localmente lipschitz.

De la primera propiedad se desprende que 1 es un valor regular de $\bar{H}$. Como $\bar{H}^{-1}(1) = \Sigma$ entonces $\nabla \bar{H}(x) \perp T_x\Sigma \ \ \forall\, x \in \Sigma$. Pero por definicion de Σ $\nabla H(x) \perp T_x\Sigma$. Por tanto

$$\nabla H(x) \text{ es paralelo a } \nabla \bar{H}(x). \tag{9}$$

Notemos que las soluciones de

$$\dot{z} = J\nabla H(z) \tag{10}$$

pueden ser reparametrizadas y ser soluciones de

$$\dot{z} = J\nabla \bar{H}(z) \tag{11}$$

e inversamente. Más precisamente

PROPOSICION 4.7 Las curvas $z(t)$ contenidas en Σ que satisfacen $\dot{z} = J\nabla H(z)$ estan en correspondencia biunivoca con las curvas $y(t)$ contenidas en Σ y que satisfacen $\dot{y} = J\nabla \bar{H}(y)$.

Demostración
Sea $z(t)$ una curva contenida en Σ que es solución de (10). Y sea λ la función definida por

$$\nabla \bar{H}(x) = \lambda(x)\nabla H(x) \qquad\qquad x \in \Sigma.$$

Por (9) λ está bien definida y porque 1 es valor regular de $\bar{H}$ λ no se anula en Σ . Utilizando que ∇H, $\nabla \bar{H}$ son localmente lipschitz, que λ no se anula y los criterios de la proposición 3.6 es facil ver que

$\lambda(x)$ es localmente lipschitz.

Ahora concideremos el campo

$$\chi : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \qquad \chi(t) = \lambda \circ z(t).$$

Porque z es de clase C^1, z es localmente lipshitz. Así por proposición 3.6 χ es localmente lipschitz. Además $|\chi(t)| < c \quad \forall\, t \in \mathbf{R}$ y p.a. $c > 0$ ya que Σ es compacto y λ es continua. Por el lema 3.5 existe una función r tal que

$$\frac{dr}{dt} = \lambda \circ z \circ r(t) \qquad \forall\, t \in \mathbf{R}\ ,$$

y proponemos para la reparametrización a r y $y(t) := z(r(t))$.

Así

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= \lambda \circ z(r(t)) J \nabla H(z(r(t))) \\ &= J \nabla \bar{H}(y(t))\end{aligned}$$

$$\Rightarrow y(t) \text{ es solución de } (11).$$

La inversa se hace en forma analoga. ■

$\bar{H}$ tiene las siguientes propiedades, dentro de las cuales están las condiciones (*) impuestas a H en la sección anterior :

PROPOSICION 4.8 Sea $\bar{H} : \mathbf{R}^{2N} \longrightarrow \mathbf{R}$ definida como en (7). Entonces

(i) $\bar{H}$ es positivo homogenea de grado 2. Y $\nabla \bar{H}(x) \cdot x = 2\bar{H}(x)$,

(ii) Si $x \in \mathbf{R}^{2N} - \{0\}$ entonces

$$\nabla \bar{H}(x) = \bar{H}(x)^{1/2} \nabla \bar{H}(\bar{x}) \text{ con } x = \bar{H}(x)^{1/2}\bar{x}\ ,\ \bar{x} \in \Sigma$$

(iii) $\bar{H} \in C^2(\mathbf{R}^{2N} - \{0\}, \mathbf{R}\,) \cap C^{1,1}(\mathbf{R}^{2N}, \mathbf{R}\,)$

(iv) $|\nabla \bar{H}(x)|/|x|$ está acotado, $x \neq 0$.

Demostración
(i) Es inmediato de la definición de $\bar{H}$ que es positiva homogenea de grado 2 (i.e. $\bar{H}(tx) = t^2 \bar{H}(x)$, $t > 0$).

Además

$$\begin{aligned} \nabla \bar{H}(x)\cdot x &= \lim_{t\to 0}\frac{\bar{H}((1+t)x)-\bar{H}(x)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{(1+t)^2\bar{H}(x)-\bar{H}(x)}{t} \\ &= 2\bar{H}(x) \end{aligned}$$

por tanto $$\nabla \bar{H}(x)\cdot x = 2\bar{H}(x) \quad \forall\, x\in \mathbf{R}^{2N} \tag{12}$$

(ii) Sean $x_0 \in \mathbf{R}^{2N} - \{0\}$ y $\alpha = \bar{H}(x_0)^{1/2}$. Definamos

$$\Sigma_\alpha = \{\, \alpha x : x \in \Sigma \,\} .$$

A partir de la transformación lineal

$$\chi : \mathbf{R}^{2N} \longrightarrow \mathbf{R}^{2N} \quad \chi(x) = \alpha x$$

restringuida a

$$\chi| : \Sigma \longrightarrow \Sigma_\alpha$$

podemos ver que

$$T_{\bar{x}}\Sigma + \bar{x} \text{ es paralelo a } T_{\alpha\bar{x}}\Sigma_\alpha + \alpha\bar{x} \quad \forall\, \bar{x}\in\Sigma. \tag{13}$$

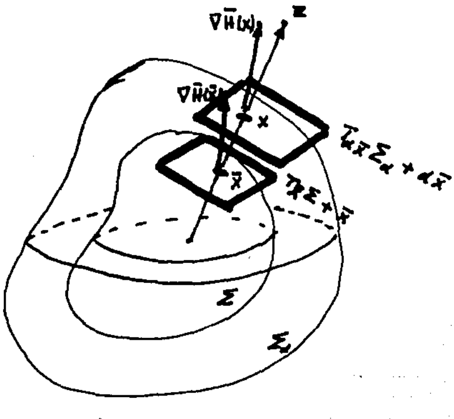

figura 2.

Por (i) α^2 es un valor regular de $\bar{H}$ y como

$$\bar{H}^{-1}(\alpha^2) = \Sigma_\alpha$$

entonces $\nabla\bar{H}(\alpha\bar{x}) \neq 0$ y $\nabla\bar{H}(\alpha\bar{x}) \perp T_{\alpha\bar{x}}\Sigma_\alpha \ \forall\, \bar{x} \in \Sigma$. Por tanto por (13) $\nabla\bar{H}(x)$ es paralelo a $\nabla\bar{H}(\bar{x}) \ \forall\, \bar{x} \in \Sigma$ donde $x = \alpha\bar{x}$. Definamos $\bar{H}_1(x)$ como se definio $\bar{H}(x)$ pero usando la superficie Σ_α. Sea $z \in \mathbf{R}^{2N} - \{0\}$ entonces

$$
\begin{aligned}
z &= \bar{H}_1(z)^{1/2}x && \text{definición de } \bar{H}_1(z)\\
&= \bar{H}_1(z)^{1/2}\alpha\bar{x} &&\\
\Rightarrow \bar{H}(z) &= \alpha^2\bar{H}_1(z) && \text{por definición de } \bar{H}\\
\Rightarrow \nabla\bar{H}(z) &= \alpha^2\nabla\bar{H}_1(z) && \text{donde } \bar{x}, x \text{ son como en la figura 2.}
\end{aligned}
$$

Por (12)

$$\nabla\bar{H}(\bar{x})\cdot\frac{\bar{x}}{|\bar{x}|} = 2\frac{\bar{H}(\bar{x})}{|\bar{x}|} = \frac{2}{|\bar{x}|} \qquad \forall\, \bar{x} \in \Sigma.$$

Tomando $z = x$

$$
\begin{aligned}
\nabla\bar{H}(x)\cdot\frac{x}{|x|} &= \alpha^2\nabla\bar{H}_1(x)\cdot\frac{x}{|\bar{x}|} && \text{donde } x = \alpha\bar{x} \text{ y } \bar{x} \in \Sigma\\
&= 2\alpha^2\bar{H}_1(x)/|\bar{x}| &&\\
&= 2\alpha/|\bar{x}|. && \text{porque } x \in \Sigma_\alpha.
\end{aligned}
$$

Por ser $\nabla\bar{H}(\bar{x})$ y $\nabla\bar{H}(x)$ paralelos y saber cual es su proyección sobre el vector unitario $x/|x|$ tenemos:

$$
\begin{aligned}
&\nabla\bar{H}(x) = \alpha\nabla\bar{H}(\bar{x}) = \bar{H}(x)^{1/2}\nabla\bar{H}(\bar{x}) \ ,\ \bar{x} = \bar{H}(x)^{-1/2}x \ ,\ \forall\, x \in \Sigma_\alpha\\
\Rightarrow\ &\nabla\bar{H}(x) = \bar{H}(x)^{1/2}\nabla\bar{H}(\bar{x}) \ ,\ \bar{x} = \bar{H}(x)^{-1/2}x \ ,\ \forall\, x \in \mathbf{R}^{2N} - \{0\}.
\end{aligned}
$$

(iii) $\bar{H}|_{\mathbf{R}^{2N}-\{0\}}$ es C^2 porque es composición de funciones C^∞ y C^2 entre variedades. Ahora es inmediato de la definición que $D\bar{H}(0) = 0$. Por (ii)

$$\lim_{x\to 0}\nabla\bar{H}(x) = 0$$

$$\bar{H} \in C^1(\mathbf{R}^{2N}, \mathbf{R}\ ).$$

Porque $C^2 \Rightarrow C^{1,1}$ $\bar{H}|_{\mathbf{R}^{2N}-\{0\}}$ es localmente lipschitz. Además $\bar{H}$ es lipschitz en 0 ya que

$$
\begin{aligned}
|\nabla\bar{H}(0) - \nabla\bar{H}(x)| &= \bar{H}(x)^{1/2}|\nabla\bar{H}(\bar{x})| && \text{por (ii)}\\
&= \frac{|x|}{|\bar{x}|}|\nabla\bar{H}(\bar{x})| && \text{definición de } \bar{H}(x)\\
&\leq |x|K && \text{K=cte por ser } \Sigma \text{ compacto.}
\end{aligned}
$$

(iv) De la última desigualdad de (iii) se sigue

$$\frac{|\nabla\bar{H}(x)|}{|x|} \leq K \qquad K = cte \quad \forall\, x \in \mathbf{R}^{2N} - \{0\}. \ \blacksquare$$

De aquí en adelante denotaremos a $\bar{H}$ por H.

Ahora probemos que usando esta H, ψ y $\mathcal{M}$ satisfacen las restantes condiciones $(*)$ de la sección anterior.

PROPOSICION 4.9 Sean ϕ , ψ y $\mathcal{M}$ como antes. Entonces

(i) $D\phi(x)(\cdot) =< Lx, \cdot >$ (via el teorema de representación de Riez),

(ii) ψ es positiva homogenea de grado 2 y $< \nabla\psi(x), x >= 2\psi(x) \quad \forall\, x \in E$,

(iii) $\psi \in C^{1,1}(E, \mathbf{R}\ )$ y ψ' es compacta,

(iv) $< \nabla\psi(x), y >= D\psi(x)(y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \nabla H(x(t)) \cdot y(t)\ dt$,

(v) $\mathcal{M}$ es una $C^{1,1}$ variedad,

(vi) $\mathcal{M}$ es estrictamente estrellada.

Demostración
(i) Ver prueba de (ii) al principio de la sección 3.2

(ii) Porque H es positivo homogenea de grado 2 (proposición 4.8 (i)) ψ tambien lo es. El resto ya se probó en (iii) al principio de la sección 3.2.

(iii) Concideremos primero algunos aspectos geometricos que nos permitiran hacer calculos. Definamos la función $\bar{\xi}$ como la proyección radial sobre Σ i.e.

$$\begin{tikzcd} \mathbf{R}^{2N} \setminus \{0\} \arrow[rr, "\bar{\xi}"] \arrow[dr, "x \mapsto x/\|x\|"'] & & \Sigma \\ & \mathbf{S}^{2N-1} \arrow[ur, "\zeta"'] & \end{tikzcd} \qquad \text{conmuta.}$$

Denotemos por $\alpha_x = H(x)^{1/2}$. Y definamos $\Sigma_{\alpha_x} = \alpha_x\Sigma$, para $x \neq 0$, y

$$\xi^x : \Sigma_{\alpha_x} \longrightarrow \Sigma \quad \xi^x(y) := \bar{y} = y/\alpha_x.$$

Claramente

$$\begin{aligned} &\bar{\xi}|_{\Sigma_{\alpha_x}} = \xi^x\ , \\ &d\xi^x_y : T_y\Sigma \longrightarrow T_{\bar{y}}\Sigma\ \ ,\ d\xi^x_y(u) = \frac{1}{\alpha_x} u \text{y} \\ &\mathbf{R}^{2N} = T_{\bar{x}}\Sigma \oplus < x >\ ,\ \bar{x} = \bar{\xi}(x),\ \ \forall\, x \neq 0. \end{aligned}$$

Sea $w = u + v \in T_{\bar{x}}\Sigma \oplus < x >$. Entonces

$$\begin{aligned} D\bar{\xi}(x)(w) &= D\bar{\xi}(x)(u) + D\bar{\xi}(x)(v) \\ &= d\xi^x_x(u) \\ &= \frac{1}{\alpha_x} u. \end{aligned}$$

Regresando al aspecto central de la prueba, por Taylor

$$\begin{aligned}|H(x+h)-H(x)-\nabla H(x)(h)| &\leq \frac{1}{2}|D^2H(c)(h,h)| \quad c=tx+(1-t)(x+h) \text{ p.a. } t\in[0,1]\\ &\leq \frac{1}{2}\|D^2H(c)\||h|^2\end{aligned}$$

donde $\|D^2H(c)\| := \sup_{|h_1|=|h_2|=1}|D^2H(c)(h_1,h_2)|$.

El objetivo es encontrar una cota de $\|D^2H(c)\|$ independiente de x, $h \in \mathbf{R}^{2N}-\{0\}$. (Aquí, en $\mathbf{R}^{2N}-\{0\}$, es donde H es C^2 ver (iii) proposición 4.8). Porque $\nabla H(x) = H(x)^{1/2}\nabla H(\bar{x})$ ((ii) proposición 4.8)

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x_j\partial x_i}\right) &= \left(\frac{\partial}{\partial x_j}(H(x)^{1/2})\frac{\partial H}{\partial x_i}(\bar{x}) + H(x)^{1/2}\frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial}{\partial x_i}H(\bar{x}))\right)\\ &= \left(\frac{1}{2}\frac{H(x)^{1/2}}{H(x)^{1/2}}\frac{\partial H}{\partial x_j}(\bar{x})\frac{\partial H}{\partial x_i}(\bar{x}) + H(x)^{1/2}\frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial}{\partial x_i}(\bar{x}))\right).\end{aligned}$$

$\frac{\partial H}{\partial x_i}(\bar{x})$ es una función continua sobre un compacto, por tanto acotada para $1\leq i\leq 2N$. Por lo que

$$\|\left(\frac{\partial H}{\partial x_j}(\bar{x})\frac{\partial H}{\partial x_i}(\bar{x})\right)\| \leq B_1.$$

Ahora sea $w=(w_1,\ldots,w_{2N})$, $\|w\|=1$

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial}{\partial x_i}H(\bar{x}))\right)\begin{pmatrix} w_1\\ \vdots\\ w_{2N}\end{pmatrix} &= D(\nabla H\circ\bar{\xi})(x)(w) = D\nabla H(\bar{\xi}(x))\circ D\bar{\xi}(x)(w)\\ &= D\nabla H(\bar{\xi}(x))(\frac{1}{\alpha_x}u) \quad w=u+v\in T_x\Sigma\oplus <x>\\ &= \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x_j\partial x_i}(\bar{x})\right)(\frac{1}{\alpha_x}u)^t\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow \|\left(H(x)^{\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial H}{\partial x_i}(\bar{x}))\right)\| \leq B_2\\ &\Rightarrow \|\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x_j\partial x_i}\right)\| \leq B.\end{aligned}$$

Por tanto

$$\|H(x+h)-H(x)-\nabla H(x)(h)\| \leq B|h|^2.$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow |\psi(x+h)-\psi(x)-Re(\nabla H\circ x,h)_{L^2}| &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|H(x+h)-H(x)-(\nabla H\circ x)\cdot h|\,dt\\ &\leq \frac{B}{2\pi}\|h\|_{L^2}^2\\ &\leq \frac{B}{2\pi}\|h\|^2\end{aligned}$$

$$\Rightarrow D\psi(x) = Re(\nabla H\circ x,\cdot)_{L^2}. \tag{14}$$

Utilizando el teoréma del valor medio y que $\|D^2 H(x)\| \leq B \ \ \forall x \in \mathbf{R}^{2N} - \{0\}$ se prueba que

$$|\nabla H(x+h) - \nabla H(x)| \leq B_0 |h| \qquad \forall\, x,\ h \in \mathbf{R}^{2N} - \{0\}.$$

Por lo que

$$\begin{aligned}
\|\psi'(x+h) - \psi'(x)\|_{E^*} := & \sup_{\substack{z \in E \\ \|z\| \leq 1}} \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\nabla H(x+h) - \nabla H(x)) \cdot z \, dt \right| \\
& \leq \sup_{\substack{z \in E \\ \|z\| \leq 1}} \left| \frac{B_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} |h(t)||z(t)| \, dt \right| \\
& \leq \sup_{\substack{z \in E \\ \|z\| \leq 1}} B_0 \| \, |h| \, \|_{L^2} \| \, |z| \, \|_{L^2} \\
& \leq B_0 \|h\|_{L^2} \leq B_0 \|h\|.
\end{aligned} \tag{15}$$

Por tanto

$$\psi' \in C^{1,1}(E, \mathbf{R}\ ).$$

Sea (x_j) una sucesión acotada en E. Porque E está compactamente encajada en $L^2(\mathbf{S}^1\ , \mathbf{C}^N)$ hay una subsucesión de (x_j) que converge en $L^2(\mathbf{S}^1\ , \mathbf{C}^N)$. Supongamos que $x_j \longrightarrow x$ en $L^2(\mathbf{S}^1\ , \mathbf{C}^N)$.

Esto y (15) implican

$$\|\psi'(x_j) - \psi'(x)\|_{E^*} \leq \frac{B_0}{2\pi} \|x_j - x\|_{L^2} \longrightarrow 0$$

Por tanto ψ' es compacta.

(iv) Utilizando el teorema de representación de Riez y (14).

(v) Ver prueba de (v) al principio de la sección 3.2.

(vi) Ver [Ra2] 2.18 página 603. ■

Por (8)

$$\|x\|_{L^2}^2 \leq 2\pi R^2 \int_0^{2\pi} \mathrm{H(x)}\ dt\ \leq 4\pi R^2 \quad \text{si } \psi(x) \leq 1. \tag{16}$$

En particular $\mathcal{M}$ está acotada en L^2.

§4.4 Condición C^*

(C^*) Si $(x_n) \subset \mathcal{M}$ es una sucesión tal que $\phi(x_n) \longrightarrow c \in \mathbf{R}$ y

$$\frac{Lx_n - \lambda(x_n)\psi'(x_n)}{(\|x_n\| + 1)^{1/2}} \longrightarrow 0$$

entonces (x_n) tiene una subsucesión convergente donde $\lambda(x_n) = \frac{<Lx_n, \psi'(x_n)>}{\|\psi'(x_n)\|^2}$.

LEMA 4.10 $\phi|_{\mathcal{M}}$ satisface la condición C^*.

Demostración
Sea

$$(x_n) \subset \mathcal{M} \text{ tal que } \phi(x_n) \longrightarrow c \text{ y } z_n = \frac{Lx_n - \lambda(x_n)\psi'(x_n)}{(\|x_n\|+1)^{1/2}} \longrightarrow 0. \tag{17}$$

Como

$$-a_0 \le 2\phi(x_n) \le a_0 \quad a_0 > 0 \tag{18}$$

y

$$\phi(x_n) = \frac{1}{2}\|x^+\|^2 - \frac{1}{2}\|x^-\|^2$$

entonces

$$\|x_n^+\| \le (a_0 + \|x_n^-\|^2)^{1/2} \le a_0^{1/2} + \|x_n^-\|$$

y

$$\|x_n^-\| \le (a_0 + \|x_n^+\|^2)^{1/2} \le a_0^{1/2} + \|x_n^+\|.$$

Por tanto

$$-a + \|x_n^+\| \le \|x_n^-\| \le a + \|x_n^+\| \quad \forall\, n \quad (a > 1). \tag{19}$$

De $< \psi'(x_n), x_n >= 2$, $< Lx_n, x_n >= 2\phi(x_n)$ y (17) se tiene que

$$\begin{aligned}|\lambda(x_n)| &= |\phi(x_n) - \frac{1}{2}(\|x_n\|+1)^{1/2} < z_n, x_n > | \\ &\le |\phi(x_n)| + \frac{1}{2}(\|x_n\|+1)^{1/2}\|z_n\|\,\|x_n\|.\end{aligned}$$

(x_n) no tiene una subsucesión convergente a cero, ya que $\mathcal{M}$ es cerrada y $0 \notin \mathcal{M}$, por lo que existe $a_1 > 0$ tal que $\|x_n\| + 1 \le a_1\|x_n\|$ $\forall\, n$. Esto, (18) y que $(\|z_n\|)$ esté acotada (por (17))

$$\Rightarrow \quad |\lambda(x_n)| \le a_2 + a_3\|x_n\|^{3/2}. \tag{20}$$

La multiplicación escalar de (17) por x_n^+ da

$$\begin{aligned}\|x_n^+\|^2 &= (\|x_n\|+1)^{1/2}(< z_n, x_n^+ > + \lambda(x_n) < \psi'(x_n), x_n^+ >) \\ &= (\|x_n\|+1)^{1/2}(< z_n, x_n^+ > + \frac{\lambda(x_n)}{2\pi}\int_0^{2\pi} \nabla H(x_n)\cdot x_n^+ \, dt\ ).\end{aligned}$$

Como $|\nabla H(x(t))|/|x(t)|$ está acotado (proposición 4.8 (iv)) y $\mathcal{M}$ está acotado en $L^2(\mathbf{S}^1, \mathbf{C}^N)$ (por (16))

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \nabla H(x_n(t))\cdot x_n^+(t)\, dt &\le \frac{1}{2\pi}\int_{\{t: x_n(t)\neq 0\}} |x_n(t)|\frac{|\nabla H(x_n(t))|}{|x_n(t)|}|x_n^+(t)|\, dt \\ &\le \frac{K}{2\pi}\int_0^{2\pi} |x_n(t)||x_n^+(t)|\, dt \\ &\le \frac{K}{2\pi}\int_0^{2\pi} |x_n(t)|^2\, dt \ \le b.\end{aligned}$$

Por tanto

$$\|x_n^+\|^2 \le a_4 + a_5\|x_n\|^{3/2}. \tag{21}$$

Dado que $\|x_n^0\|_{L^2} = \|x_n^0\|$, entonces (x_n^0) está acotada en E digamos

$$\|x_n^0\| < b \qquad \forall n = 1, 2, \dots \quad b > 0. \tag{22}$$

Esto y un cálculo utilizando (19) y (21) nos da que (x_n) está acotada en E. Veamos : si x_n es tal que $\|x_n^+\| \geq a$ entonces

$$\begin{aligned}\|x_n\|^2 &= \|x_n^-\|^2 + \|x_n^0\|^2 + \|x_n^+\|^2 \\ &\leq b^2 + (a + \|x_n^+\|^2) + \|x_n^+\|^2 && \text{por (19) y (22)} \\ &\leq b^2 + 3\|x_n^+\|^2 \\ &\leq b^2 + 3a_4 + 3a_5\|x_n\|^{3/2} && \text{por (21)}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|x_n\|(\|x_n\| - 3a_5\|x_n\|^{1/2}) \leq b^2 + 3a_4.$$

En caso de que $\|x_n\| - 3a_5\|x_n\|^{1/2} < 1$ entonces

$$\|x_n\| < (1 + 3a_5)^2.$$

En caso contrario $\|x_n\| - 3a_5\|x_n\|^{1/2} \geq 1$ entonces

$$\|x_n\| \leq b^2 + 3a_4.$$

Por tanto $\|x_n\|$ está acotada por $M_0 = max\{(1+3a_5)^2, b^2+3a_4\}$ si $\|x_n^+\| > a$. Si $\|x_n^+\| \leq a$ entonces

$$\|x_n^-\| \leq a + \|x_n^+\| \leq 2a \qquad \text{por (19)}$$

esto y (22) implican que x_n está acotado por $M_1 = 3a + b$. Por lo tanto $(\|x_n\|)$ está acotada por $M = max\{M_0, M_1\}$.

Ahora $L^2(\mathbf{S}^1, \mathbf{C}^N)$ es un espacio de Hilbert separable, por tanto la sucesión acotada (x_n^0) tiene una subsucesión convergente en $L^2(\mathbf{S}^1, \mathbf{C}^N)$ pero $\|\cdot\|_{L^2}$ es igual a $\|\cdot\|$ en E^0. Por tanto

$$x_n^0 \longrightarrow x^0 \qquad \text{en } E. \tag{23}$$

De (20) y de que (x_n) esté acotada en E se sigue que la sucesión $(\lambda(x_n))$ tiene una subsucesión convergente, digamos ella misma

$$\lambda(x_n) \longrightarrow \lambda.$$

Por la compacidad de ψ', $(\psi'(x_n))$ tiene una subsucesión convergente digamos ella misma

$$\psi'(x_n) \longrightarrow y.$$

Así de (17) se tiene que

$$L(x_n) = x_n^+ - x_n^- \quad \text{converge en E}$$

Como $T : E^- \oplus E^0 \oplus E^+ \longrightarrow E^- \oplus E^0 \oplus E^+$, $T(x^- + x^0 + x^+) = -x^- + x^0 + x^+$ es una isométria $(x_n^+ + x_n^-)$ converge en E.

Esto y (23) $\Rightarrow x_n$ converge en E. ∎

§4.5 Demostración del teorema principal

En esta sección tomaremos el producto interior en L^2 sin normalizar p.e. si $u, v \in L^2([0.T], \mathbf{C})$ entonces

$$(u,v)_{L^2} = \int_0^T u(t)\bar{v}(t)\, dt$$

. Definamos

$$T_\theta : E \longrightarrow E \quad T_\theta(x(t)) = x(t+\theta).$$

Es inmediato checar que T es una acción de $\mathbf{S}^1$ sobre E.

Tomemos la descomposición ortogonal de $E = E^- \oplus E^0 \oplus E^+$ debida a (5) correspondiente a $k < 0$, $k = 0$, $k > 0$ respectivamente. Notemos que $x \in E$ es un punto fijo

$$\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow T_\theta(x) = x \quad \forall\, \theta \in \mathbf{S}^1 \\
&\Longleftrightarrow x(t) = x(\theta + t) \quad \forall\, \theta \in \mathbf{S}^1 \quad \forall\, t \\
&\Longleftrightarrow x : \mathbf{S}^1 \longrightarrow E \quad \text{es una función constante} \\
&\Longleftrightarrow x \in E^0.
\end{aligned}$$

Por tanto $dim_{\mathbf{C}}\ E^0 = N < \infty$.

Definamos $L : E \longrightarrow E$, $Lx := x^+ - x^-$ donde $x = x^- + x^0 + x^+ \in E^- \oplus E^0 \oplus E^+$. L es autoadjunta y equivariante. Que es equivariante se checa en forma inmediata expresando $x(t) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} a_k e^{ikt}$.

Tomemos $\psi : E \longrightarrow \mathbf{R}$ y $\mathcal{M}$ como antes $\psi := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H(x(t))\, dt$ $\mathcal{M} := \psi^{-1}(1)$. Entonces

$$\psi(T_\theta(x)) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H \circ x(t+\theta)\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi+\theta} H \circ x(t)\, dt = \psi(x).$$

Por tanto ψ es una funcional invariante.

Tomemos, $\gamma_r(\cdot)$, el índice relativo al subespacio cerrado e invariante E^+ i.e.

$$\gamma_r(\cdot) := \gamma_{E^{+\perp}}(\cdot)$$

y como antes tomemos

$$\Gamma = \{\ A \in \mathcal{F} : A \subset \mathcal{M} \quad \gamma_r(A) \geq j\ \}\ ,\ j \geq 1.$$

y

$$c_j = inf_{A \in \Gamma_j} sup_{x \in A}\, \phi(x)$$

Sea $A \in \Gamma_j$. Entonces $\gamma_r(A) \geq 1$. Por lo que por la propiedad 2.4 del índice relativo γ_r $A \cap E^+ \neq \emptyset$

Sea $x \in A \cap E^+ \subset \mathcal{M} \cap E^+$. Entonces

$$\begin{aligned}
\phi(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2 \geq \frac{1}{2}\|x\|^2_{L^2} \geq \frac{r^2}{2}\int_0^{2\pi} H(x(t))\, dt \qquad \text{por (8)} \\
= \pi r^2.
\end{aligned}$$

Por tanto

$$c_j \geq \pi r^2 \quad 1 \leq j \leq N.$$

Sea E_1 el subespacio N dimensional de E^+ correspondiente a $k = 1$. Y sea $A = \mathcal{M} \cap (E^- \oplus E^0 \oplus E_1)$. $\mathcal{M}$ estrictament estrellada (proposición 4.9 (vi))implica A estrictamente estrellado. Por proposición 2.8 (de indice para esferas) $\gamma_r(A) = N$.

Si $x = x^- + x^0 + x^+ \in A$ entonces

$$\begin{aligned} \|x^+\|_{L^2}^2 \leq \|x\|_{L^2}^2 \leq R^2 \int_0^{2\pi} H(x(t))\, dt & \qquad \text{por (8)} \\ = 2\pi R^2. & \end{aligned}$$

Como $x^+ \in E_1$ entonces $\|x^+\| = \|x^+\|_{L^2}$.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \phi(x) = \frac{1}{2}\|x^+\|^2 - \frac{1}{2}\|x^-\|^2 \leq \frac{1}{2}\|x^+\|^2 \leq \pi R^2 \\ &\Rightarrow c_j \leq \pi R^2 \\ &c_j \in [\pi r^2, \pi R^2] \quad 1 \leq j \leq N. \end{aligned}$$

Si $x \in E^0$ entonces $\phi(x) = \frac{1}{2}\|x^+\|^2 - \frac{1}{2}\|x^-\|^2 = 0$. Por lo que $E^0 \cap \phi^{-1}[\pi r^2, \pi R^2] = \emptyset$.

Así se satisfacen todas las hipótesis del teorema 3.7. Por lo tanto $c_1, \ldots, c_N$ son valores criticos. Y si $c_i = c_{i+1} = \ldots = c_{i+p}$ $p \geq 1$ entonces $\gamma(K_{c_i}) \geq 2$. Por lo que existirá una infinidad de órbitas independientes. Si $c_i \neq c_j$ si $i \neq j$ basta probar que en cada K_{c_j} existe una solución de periodo mínimo 2π.

Sea $x \in K_{c_j}$ (p.a. $1 \leq j \leq N$) de periodo $T = \frac{2\pi}{m}$ $m \geq 1$. Entonces por proposición 4.4 x está contenida en Σ y satisface

$$\dot{x} = \lambda J \nabla H(x) \quad \text{con} \quad \phi(x) = 2\pi\lambda.$$

Sea $x(t) = \bar{x} + \tilde{x}(t)$ con $\bar{x} \in E^0$ y $\tilde{x}(t)$ tal que $\int_0^T \tilde{x}(t)\, dt = 0$ $(\tilde{x}(t) = \sum_{k\neq 0} a_k e^{ikt})$. Como

$$\begin{aligned} J\dot{x} \cdot x &= J\dot{\tilde{x}} \cdot x + J\dot{\tilde{x}} \cdot \bar{x} + J\dot{\tilde{x}} \cdot \tilde{x} \\ &= J\dot{\tilde{x}} \cdot \bar{x} + J\dot{\tilde{x}} \cdot \tilde{x} \end{aligned}$$

y

$$\int_0^{2\pi} J\dot{\tilde{x}} \cdot \bar{x}\, dt = \mathrm{Re}(i\dot{\tilde{x}}, \bar{x})_{L^2} = 0.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} -J\dot{x} \cdot x\, dt && \text{por proposición 4.5} \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} -J\dot{\tilde{x}} \cdot \tilde{x}\, dt && \\ &\leq \frac{1}{2}\|\dot{\tilde{x}}\|_{L^2}\|\tilde{x}\|_{L^2} && \\ &\leq \frac{1}{2m}\|\dot{\tilde{x}}\|_{L^2} && \text{Por la desigualdad de Wirtinger} \\ & && (2\pi|z|_{L^2} \leq T|\dot{z}| \text{ si } z \in H^1(S_T, \mathbf{R}^{2N}) \\ &= \frac{1}{2m}\|\dot{x}\|_{L^2}^2 && \text{ver [LP] página 91)} \\ &= \frac{1}{2m}\int_0^{2\pi} |\lambda \nabla H(x(t))|^2\, dt && \end{aligned}$$

Por (3) y por proposición 4.8 (i)

$$\rho|\nabla H(y)| \leq |\nabla H(y) \cdot y| \leq 2 \quad \forall\, y \in \Sigma$$

por tanto

$$|\nabla H(y)| \leq 2/\rho \quad \forall\, y \in \Sigma.$$

Así

$$c_j = \phi(x) \leq \frac{4\pi\lambda^2}{m\rho^2}$$

$$\Rightarrow m\rho^2\phi(x) \leq 4\pi\lambda^2 = \frac{\phi^2(x)}{\pi}$$
$$\Rightarrow \phi(x) \geq m\rho^2\pi.$$

Se sigue de la hipótesis $R^2 < 2\rho^2$ que

$$\pi m\rho^2 \leq c_j \leq \pi R^2 < 2\pi\rho^2$$

$$\Rightarrow m < 2$$

Por tanto el periodo mínimo de x es 2π. ■

APENDICE A

DEFINICION (base de Hilbert) Sean $(E, < \cdot >)$ un espacio de Hilbert /**K** (**K** =**R** o **C**) y $\{u_i\}_{i\in I} \subset E$ es una base de Hilbert de E si :

(a) $\{u_i\}_{i\in I}$es un conjunto ortonormal i.e. $< u_i, u_j >= \delta_{ij} \;\; \forall\, i, j \in I$.

(b) $E = \overline{< \{u_i\}_{i\in I} >}$ donde $< \{u_i\}_{i\in I} > := \{u \in E \; : \; u = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j u_j$ con $\lambda_j \in \mathbf{K}$, $u_j \in \{u_i\}_{i\in I} \;\; 1 \leq j \leq n$ y n algun natural $\}$.

TEOREMA A.1 (Riez-Fischer) Sea $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ un subconjunto ortonormal de un espacio de Hilbert $(E, < \cdot >)$. Para la sucesión de escalares $\{k_j\}$ las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) Existe $u \in E$ tal que $< u, u_j >= k_j \;\; j = 1, 2, \ldots$

(b) $\sum\limits_{j=1}^{\infty} |k_j|^2 < \infty$

(c) $\sum\limits_{j=1}^{\infty} k_j u_j$ converge en E. ■

Para su demostración ver p.e. [Li] página 191.

TEOREMA A.2 (Caracterización de bases de Hilbert) Sea $\{u_i\}_{i\in I}$ un subconjunto ortonormal del espacio de Hilbert E. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) $\{u_i\}_{i\in I}$ es una base de Hilbert de E

(b) Para cada $u \in E$ $u = \sum\limits_{j=1}^{\infty} < u, u_j > u_j$ donde $\{ u_i \;\; i \in I : < u, u_i > \neq 0 \} = \{ u_j : j = 1, 2, \ldots \}$.

(c) Si $u \in E$ y $< u, u_j >= 0 \;\; \forall\, i \in I$ entonces $u = 0$. ■

Para la demostracioń ver [Li] página 193.

PROPOSICION A.3 Sea $x \in L^1(\mathbf{S}^1, \mathbf{C})$. Si $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(t) e^{-int}\, dt = 0 \;\; \forall\, n = 1, 2, \ldots$ entonces $x = 0$ casi donde quiera (c.d.q.). ■

Para su demostración ver [Li] página 31.

PROPOSICION A.4 Si $x \in L^2(\mathbf{S}^1, \mathbf{C})$ entonces $x \in L^1(\mathbf{S}^1, \mathbf{C})$.

Demostración

Es una consecuencia inmediata de la desigualdad de Hölder. Tomando $y(t)$ igual a la función constante 1, por Hölder tenemos

$$\int_0^{2\pi} x(t)\, dt = \int_0^{2\pi} x(t)y(t)\, dt \leq \int_0^{2\pi} |x(t)|^2\, dt \int_0^{2\pi} |y(t)|^2\, dt < \infty.$$

Por tanto

$$x \in L^1(\mathbf{S}^1, \mathbf{C}). \blacksquare$$

COROLARIO A.5 $\{e^{ikt}\}_{k\in\mathbf{Z}}$ es una base de Hilbert de $L^2(\mathbf{S}^1, \mathbf{C})$.

Demostración

El producto interior para $x, y \in L^2(\mathbf{S}^1, \mathbf{C})$ esta definido por

$$(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(t)\bar{y}(t)\, dt.$$

Sea $x \in L^2(\mathbf{S}^1, \mathbf{C}^N)$ tal que $(x, e^{ikt}) = 0$ para $k = 1, 2, \ldots$. Entonces $x \in L^1(\mathbf{S}^1, \mathbf{C})$ por la proposición A.4. Asi por la proposición A.3

$$x = 0 \quad c.d.q.$$

Por tanto

$$\{e^{ikt}\}_{k\in\mathbf{Z}} \quad \text{es una base de Hilbert (por proposición A.2).} \blacksquare$$

Definamos

$$L^2(\mathbf{S}^1, \mathbf{C}^N) := \bigoplus_{i=1}^{N} L^2(\mathbf{S}^1, \mathbf{C})$$

$$(u,v)_{L^2} := \sum_{i=1}^{N} (u_i, v_i) \qquad u, v \in L^2(\mathbf{S}^1, \mathbf{C}^N)$$

Sea $\pi_j : L^2(\mathbf{S}^1, \mathbf{C}^N) \longrightarrow L^2(\mathbf{S}^1, \mathbf{C})$, $\pi_j(u_1, \ldots, u_N) = u_j$. Y sea (u_n) una sucesión en $L^2(\mathbf{S}^1, \mathbf{C}^N)$. Observemos que:

- (u_n) es de Cauchy si y sólo si $(\pi_j(u_n))$ es de Cauchy para $1 \leq j \leq N$,

- (u_n) converge si y sólo si $(\pi_j(u_n))$ converge para $1 \leq j \leq N$,

- Por lo anterior y porque $L^2(\mathbf{S}^1, \mathbf{C})$ es completo, $L^2(\mathbf{S}^1, \mathbf{C}^N)$ es un espacio de Hilbert.

COROLARIO A.6 Si $x \in L^2(\mathbf{S}^1, \mathbf{C}^N)$ entonces se puede expresar en forma única como

$$x = \sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k \mathbf{e}^{ikt} \text{ donde } a_k = (a^1, \ldots, a^N) \in \mathbf{C}^N \text{ y } \mathbf{e}^{ikt} = (e^{ikt}, \ldots, e^{ikt}) \in L^2(\mathbf{S}^1, \mathbf{C}^N).$$

Demostración

Basta probar que $\{\mathrm{e}_j^{ikt}\}_{k\in\mathbf{Z}\ \ 1\leq j\leq N}$ es una base de Hilbert de $L^2(\mathbf{S}^1, \mathbf{C}^N)$ donde $\mathrm{e}_1^{ikt}= (e^{ikt},0,\ldots,0)$ $\mathrm{e}_N^{ikt}= (0,\ldots,0,e^{ikt})$. lo cual es inmediato del teorema A.2, (c) y del corolario A.5. ■

Notemos que los elementos de $L^2(\mathbf{S}^1, \mathbf{C}^N)$ no son más que funciónes $x : \mathbf{S}^1 \longrightarrow \mathbf{C} \quad x(t) = (x_1(t),\ldots,x_N(t))$ tal que $x_i(t) \in L^2(\mathbf{S}^1, \mathbf{C})$ $1 \leq i \leq N$.

DEFINICION A.7 (función absolutamente continua) Una función $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$ se dice absolutamente continua si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que:

$$\sum_{i=1}^{n}(\beta_i - \alpha_i) < \delta \quad \text{implica} \quad \sum_{i=1}^{n}|f(\beta_i) - f(\alpha_i)| < \epsilon$$

donde $(\alpha_1,\beta_1),\ldots,(\alpha_n,\beta_n)$ son intervalos disjuntos.

TEOREMA A.8 Si $g \in L^1(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ y si

$$f(t) = \int_{\infty}^{t} g(s)\, ds \qquad (-\infty < t < \infty)$$

entonces f es absolutamente continua y

$$f'(t) = g(t) \qquad c.d.q. \ ■$$

Para su demostración ver [Ru] página 176.

Definamos el espacio de Sobolev

$$H^1(\mathbf{S}^1, \mathbf{C}) := \{\, x \in L^2(\mathbf{S}^1, \mathbf{C}) \ : \ \sum_{k\in\mathbf{Z}} (1+|k|^2)|a_k|^2 < \infty \text{ donde } x = \sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k e^{ikt} \,\}$$

y

$$H^1(\mathbf{S}^1, \mathbf{C}^N) = \oplus_{i=1}^{N} H^1(\mathbf{S}^1, \mathbf{C}).$$

Observemos que $x \in H^1(\mathbf{S}^1, \mathbf{C}^N) \subset L^2(\mathbf{S}^1, \mathbf{C}^N)$ si y sólo si

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}} (1+|k|^2)|a_k|^2_{\mathbf{C}^N} < \infty \text{ donde } x = \sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k \mathrm{e}^{ikt}.$$

PROPOSICION A.9 $x \in H^1(\mathbf{S}^1, \mathbf{C})$ si sólo si x es absolutamente continua y $\dot{x} \in L^2(\mathbf{S}^1, \mathbf{C})$.

Demostración

$\Leftarrow$) Sea x absolutamente continua con $\dot{x} \in L^2(\mathbf{S}^1, \mathbf{C})$, $x = \sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k e^{ikt}$.

$$\begin{aligned}(\dot{x}, e^{ikt}) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \dot{x}(t)e^{-ikt}\,dt \\ &= \frac{ik}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(t)e^{-ikt}\,dt \\ &= ika_k\end{aligned}$$

en la penúltima igualdad se aplico integración por partes, valido porque ambas funciones son absolutamente continuas (ver por ejemplo [Co]). Por el teorema A.2 (b)

$$\dot{x} = \sum_{k\in\mathbf{Z}} ika_k e^{ikt}.$$

Por Riez-Fischer

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}} |k|^2|a_k|^2 < \infty \qquad \text{y} \qquad \sum_{k\in\mathbf{Z}} |a_k|^2 < \infty$$

$$\Rightarrow \sum_{k\in\mathbf{Z}} (1+|k|^2)|a_k|^2 < \infty.$$

Por tanto $\quad x \in H^1(\mathbf{S}^1, \mathbf{C})$.

$\Rightarrow$) Sea $x \in L^2(\mathbf{S}^1, \mathbf{C})$, $\sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k e^{ikt}$ tal que $\sum_{k\in\mathbf{Z}} (1+|k|^2)|a_k|^2 < \infty$.

Probemos

(a) $y = \sum_{k\in\mathbf{Z}} ika_k e^{ikt} \in L^2(\mathbf{S}^1, \mathbf{C})$,

(b) $\sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k e^{ikt}$ converge uniformemente a $\tilde{x}$ función continua y $\tilde{x} = x \in L^2(\mathbf{S}^1, \mathbf{C})$,

(c) $\int_0^t y(s)\,ds = x(t) + x(0)$.

Antes de empezar la prueba notemos que de (c) y teorema A.8 se sigue que x es absolutamente continua y $\dot{x} = y \in L^2(\mathbf{S}^1, \mathbf{C})$.

(a) Es consecuencia inmediata de Riez-Fischer.

(b) $\|a_k e^{ikt}\|_\infty := sup_{t\in[0,2\pi]}|a_k e^{ikt}| = a_k$.

Como

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}} |a_k| = \sum_{k\in\mathbf{Z}} \frac{(1+|k|^2)^{1/2}|a_k|}{(1+|k|^2)^{1/2}} \leq (\sum_{k\in\mathbf{Z}} (1+|k|^2)|a_k|^2)^{1/2}(\sum_{k\in\mathbf{Z}} \frac{1}{1+|k|^2})^{1/2} < \infty$$

para la desigualdad se aplica Schwartz. Por el criterio M de Weierstrass

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k e^{ikt} \text{ converge uniformemente a } \tilde{x} \text{ función continua.}$$

Porque convergencia uniforme implica convergencia en $L^1(\mathbf{S}^1, \mathbf{C})$ y porque convergencia en $L^2(\mathbf{S}^1, \mathbf{C})$ implica convergencia en $L^1(\mathbf{S}^1, \mathbf{C})$, por Hölder y porque $[0, 2\pi]$ tiene medida finita, se tiene que $\tilde{x} = x \in L^2(\mathbf{S}^1, \mathbf{C})$.

(c) Sea $y(t) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} ika_k e^{ikt}$. Dado que $y \in L^2(\mathbf{S}^1, \mathbf{C})$ por la proposición A.4 $y \in L^1(\mathbf{S}^1, \mathbf{C})$. Concideremos

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} |x(t) - x(0) - \int_0^t y(s)\, ds|^2\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} |x(t) - x(0) - \int_0^t \sum_{k=-n}^{n} ika_k e^{iks}\, ds - \int_0^t \sum_{k=-n}^{n} ika_k e^{iks}\, ds - \int_0^t y(s)\, ds|^2\, dt \\
&\leq 2 \int_0^{2\pi} |x(t) - x(0) - \sum_{k=-n}^{n} (a_k e^{ikt} + a_k)|^2\, dt + 2 \int_0^{2\pi} | \int_0^t \sum_{k=-n}^{n} ika_k e^{iks} - y(s))\, ds|^2\, dt
\end{aligned}
$$

para la última desigualdad se usa que $|\alpha + \beta|^2 \leq 2|\alpha|^2 + 2|\beta|^2$. Por (b) el primer sumando es tan pequeño como se quiera si n es suficientemente grande.

Además por la desigualdad de Jensen (ver p.e. [Ru] página 63)

$$
\begin{aligned}
2 \int_0^{2\pi} | \int_0^t (\sum_{k=-n}^{n} ika_k e^{iks} - y(s))\, ds|^2\, dt &\leq 2 \int_0^{2\pi} \int_0^t | \sum_{k=-n}^{n} ika_k e^{iks} - y(s)|^2\, ds\, dt \\
&\leq 4\pi \int_0^{2\pi} | \sum k = -nnika_k e^{iks} - y(s)|^2\, ds \\
&= 8\pi^2 \| \sum_{k=-n}^{n} ika_k e^{iks} - y(s) \|_{L^2} < \epsilon \qquad \text{si n es} \\
&\qquad\qquad \text{suficientemente grande.}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow \int_0^{2\pi} |x(t) - x(0) - \int_0^t y(s)\, ds|^2\, dt = 0 \\
&\Rightarrow x(t) - x(0) = \int_0^t y(s)\, ds \quad c.d.q. \ \blacksquare
\end{aligned}
$$

COROLARIO A.10 Sea $x : \mathbf{S}^1 \longrightarrow \mathbf{C}^N$, $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_N(t))$. $x \in H^1(\mathbf{S}^1, \mathbf{C}^N)$ si y sólo si $x_i(t)$ es absolutamente continua y $\dot{x}_i(t) \in L^2(\mathbf{S}^1, \mathbf{C})$ para $1 \leq i \leq N$.

Demostración
Es inmediato de la proposición A.9. $\blacksquare$

PROPOSICION A.11 Sea $x \in L^2(\mathbf{S}^1, \mathbf{C})$ tal que $[x] = 0$. Entonces existe $y \in H^1(\mathbf{S}^1, \mathbf{C})$ tal que $x = \dot{y}$, y y está determinado en forma única si su valor medio es especificado.

Demostración
Por proposición A.4 $x \in L^2(\mathbf{S}^1, \mathbf{C}) \Rightarrow x \in L^1(\mathbf{S}^1, \mathbf{C})$. Definamos

$$y(t) = \int_0^t x(s)\, ds.$$

Por proposición A.8 $y(t)$ es absolutamente continua y $\dot{y}(t) = x(t) \in L^2(\mathbf{S}^1, \mathbf{C})$. Ahora si el valor medio de la solución está especificado (i.e. $[y] := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} y(t)\,dt$ está dado) la solución es única, ya que si $z \in H^1(\mathbf{S}^1, \mathbf{C})$ es tal que $\dot{z} = y$ c.d.q. z es absolutamente continua

$$\Rightarrow z(t) = z(0) + \int_0^t \dot{z}(t)\,dt \qquad \text{[Co] página 188}$$
$$\Rightarrow z(0) = 0$$

Por tanto

$$z(t) = y(t) \ \ \forall\, t \in [0, 2\pi]. \blacksquare$$

APENDICE B

§Cohomología de Borel.

Para cualquier grupo G de Lie compacto existe un G-haz universal $p : EG \longrightarrow BG$, i.e. un haz localmente trivial cuyo espacio total EG es contractil y un G-espacio libre y BG es el espacio de orbitas de EG [Hu]. BG es llamado el espacio de clasificación de G y es único salvo homotopias.

Dado un G-espacio X concideremos el producto $EG \times X$ con la acción diagonal y sea $EG \times_G X$ su espacio de órbitas. La proyección $EG \times X \rightarrow EG$ induce un mapeo $p_X : EG \times_G X \longrightarrow BG$ el cual es un haz fibrado con fibra X. Esta es llamada la construcción de Borel. Asociado a cada G-espacio X un espacio $EG \times_G X$ sobre BG y a cada G-mapeo $X \longrightarrow Y$ un mapeo, que preserva la fibra, $EG \times_G X \longrightarrow EG \times_G Y$ sobre BG.

Tomemos ahora la cohomologia singular H^* (con coeficientes en algun anillo R y apliquemosle la construcción de Borel:

$$H_G^* := H^*(EG \times_G X).$$

Esta es llamada la cohomologia de Borel. Y es una teoría de cohomologia multiplicativa G-equivariante. Su anillo de coeficientes es $H_G^*(pt) = H^*(BG)$, la cohomología de el espacio de clasificación de G.

§Teorema de Borsuk-Ulam relativo para acciones de $\mathbf{S}^1$

TEOREMA B.1 Sean V y W representaciones de $\mathbf{S}^1$ y supongamos que existe

$$\phi : SV \longrightarrow SW$$

$\mathbf{S}^1$ -equivariantes y tal que $\phi : SV^{\mathbf{S}^1} \cong SW^{\mathbf{S}^1}$. Entonces dim $V \leq$ dim W.

Sean $l = \dim V^{\mathbf{S}^1} = \dim W^{\mathbf{S}^1}$, $2n + l = \dim V$ y $2k + l = \dim W$. Y sea $h = H_{\mathbf{S}^1}^*(\cdot; XQX)$ la $\mathbf{S}^1$ -cohomologia de Borel con coeficientes racionales.

PROPOSICION B.2 Existe $\gamma \in h^l(SV, SV^{\mathbf{S}^1})$ tal que para cualesquiera $w_1, \ldots, w_{n-1} \in h^2(pt)$, el producto $\gamma w_1 \cdots w_{n-1} \neq 0$.

PROPOSICION B.3 Si $n > k \geq 0$ entonces $\phi^* : h^l(SW, SW^{\mathbf{S}^1}) \longrightarrow h^l(SV, SV^{\mathbf{S}^1})$ es suprayectiva.

PROPOSICION B.4 Existe $w_1, \ldots, w_k \in h^2(pt)$ cuyo producto anula a $h^*(SW, SW^{\mathbf{S}^1})$.

Demostración del teorema B.1

Sea γ como en B.2 y $w_1, \ldots, w_k$ como en B.4. Sea $\bar{\gamma} \in h^l(SW, SW^{S^1})$ tal que $\phi^*\bar{\gamma} = \gamma$. Entonces

$$\begin{aligned} 0 &= \phi^*(\bar{\gamma} w_1 \cdots w_k) = \gamma w_1 \cdots w_k \\ &\Rightarrow k > n-1 \end{aligned}$$

Por tanto

$$\dim W \geq \dim V. \blacksquare$$

Demostración de la proposición B.4

SW se puede escribir como la unión de abiertos $X_0, X_1, \ldots, X_k$ tales que X_0 contiene a SW^{S^1} como S^1 -retracto fuerte por deformación y X_i contiene a una órbita de tipo S^1/H_i, H_i finito, como retracto fuerte por deformación.

Como $h(S^1/H_i) = H^*(BH_i; XQX) = (XQX, 0)$, el generador w de $h^2(pt) = H^2(BS^1; XQX)$ está en el kernel de $h^2(pt) \longrightarrow h^2(S^1/H_i)$. Sea $w_i = w$. Sea $\gamma \in h^*(SW, SW^{S^1})$ un elemento arbitrario. De la sucesión exacta de la terna (SW, X_0, SW^{S^1})

$$\ldots \longrightarrow h(SW, X_0) \longrightarrow h(SW, SW^{S^1}) \xrightarrow{0} h(X_0, SW^{S^1}) \longrightarrow \ldots$$

se tiene que γ tiene una preimagen $\tilde{\gamma} \in h^*(SW, X_0)$. Como $w_i = 0$ en $h^2(X_i)$, $w_i \in h^2(SW)$ tiene una preimagen $\tilde{w}_i \in h^2(SW, X_i)$. Entonces $\tilde{\gamma}\tilde{w}_1 \cdots \tilde{w}_k \in h(SW, X_0 \cup X_1 \cup \cdots \cup X_k) = 0$. Por tanto su imagen $\gamma w_1 \cdots w_k \in h(SW, SW^{S^1})$ es cero. $\blacksquare$

Demostración de la proposición B.3

Concideremos la fibración $SV \longrightarrow SV \times_{S^1} ES^1 \xrightarrow{p} BS^1$. como SV es $(2n+l-1)$- conexa, p es una $(2n+l)$-equivalencia. Del diagrama

$$\begin{tikzcd} h^i(SV) & & h^i(SW) \arrow[ll, "\phi^*"'] \\ & h^i(pt) \arrow[ul, "p^*"] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

se tiene que ϕ^* es un epimorfismo para $i \leq 2n+l-1$, ya que en ese rango p^* es un isomorfismo. Consideremos ahora

$$\begin{tikzcd} \ldots \arrow[r] & h^{l-1}(SV) \arrow[r] & h^{l-1}(SV^{ZS^1}) \arrow[r] & h^l(SV, SV^{ZS^1}) \arrow[r] & h^l(SV) \arrow[r] & h^l(SV^{S^1}) \arrow[r] & \ldots \\ \ldots \arrow[r] & h^{l-1}(SW) \arrow[r] \arrow[u, "\phi^*"] & h^{l-1}(SW^{ZS^1}) \arrow[r] \arrow[u, "\cong \phi^*"] & h^l(SW, SW^{ZS^1}) \arrow[r] \arrow[u, "\phi^*"] & h^l(SW) \arrow[r] \arrow[u, "\phi^*"] & h^l(SW^{S^1}) \arrow[r] \arrow[u, "\cong \phi^*"] & \ldots \end{tikzcd}$$

Este es un diagrama conmutativo con renglones exactos. De ahi se sigue el resultado. $\blacksquare$

Demostración de la proposición B.2
Sea $V_0 = V^{S^1}$ y sea V_1 el complemento ortogonal de V_0 en V. Entonces

$$\begin{aligned}(SV, SV_0) &\overset{(H)}{\sim} (SV_0 \times DV_1 \cup DV_0 \times SV_1, SV_0 \times DV_1)\\ &\overset{EXC}{\sim} (DV_0, SV_0) \times SV_1\\ &= (DV_0, SV_0) \times SV_1\end{aligned}$$

Entonces la multiplicación con la clase de Thom $u \in h^l(DV_0, SV_0)$ induce un isomorfismo

$$\tau : h^i(SV_1) \longrightarrow h^{i+l}(SV, SV_0)$$

de $h(pt)$-modulos.

Como $p^* : h^i(pt) \longrightarrow h^i(SV_i)$ es un isomorfismo para $i \leq 2n-1$, el producto de cualesquiera $n-1$ clases de cohomología $w_1, \dots, w_{n-1} \in h^2(pt)$ es distinto de cero en $h^{2n-2}(SV_1)$.

Sea $\gamma := \tau(1) \in h^l(SV, SV^{S^1})$. Como τ es un isomorfismo $\tau(w_1 \cdots w_{n-1}) = \gamma \cdot w_1 \cdots w_{n-1} \neq 0$ en $h(SV, SV^{S^1})$. ∎

BIBLIOGRAFIA

[AMR] Abraham R., Marsden J.E., Ratiu T., Manifolds, Tensor analysis and applications, Addison-Wesley, 1983.

[Be] Benci V., A geometrical index for the group S^1 and some applications to the research of periodic solution of ODE's, Comm. pure appl. Math. 34, 393-432, 1981.

[BC] Bartsch T. y Clapp M., The compact category and multiple periodic solutions of Hamiltonian systems on symmetric starshaped energy surfaces., Pub. preliminares, Instituto de Matemáticas, 1991.

[BLMR] Berestycki H. Larsky J.M., Mancini G. y Ruf B., Existence of multiple periodic orbits on star-shaped Hamiltonian surfaces., Comm. pure appl. Math. 38, 253-289, 1985.

[CP] Clapp M. y Puppe D., Critical point theory with symmetries, J. reine angew. Math. 418 (1991), 1-29.

[Co] Cohn D.L., Measure theory, Birkhäuser Boston, 1980.

[De] Deimling K., Nonlinear functional analysis, Springer- Verlag Heidelberg 1985.

[Di] Dieudonne J., Foundation of modern analysis, Academic Press, 1969.

[FHR] Fadell, E., Husseini, S. y Rabinowitz, P.H., Borsuk-Ulam theorem for arbitrary S'-actions and applications, MRC Tech. Summary Report 2301, Madison, WI 53706, E.U.A.

[Hu] Husemoller D., Fibre bundles, Mc Graw-Hill 1966.

[LP] Lax y Phillips, Scattering theory, Academic Press, 1967.

[Li] Limaye B.V., Functional analysis, Wiley eastern limited 1981.

[Mu] Munkres J.R., Topology a first course, Prentice-Hall, New Jersey 1975.

[Ra1] Rabinowitz P.H., Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations, CBMS 65 American Mathematical Society, Providence, R.I.1986.

[Ra2] Rabinowitz P.H., On the existence of periodic solutions for a class of symmetric Hamiltonian systems., Nonl. Anal. theory methods appl., 11, 599-611, 1987.

[Ru] Rudin W., Real and complex analysis, Mc.Graw-Hill series in higher mathematics, 1974.

[Su] Szulkin A., An index theory and existence of multiple brake orbits for star-shaped Hamiltonian systems., Math. Ann. 285, 241-255, 1989.