

1
2ej.



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

MODELOS DE DIMENSIONAMIENTO
DE FRACTURAS INDUCIDAS
HIDRAULICAMENTE

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE
INGENIERO PETROLERO
P R E S E N T A N :
ACOSTA VELASCO GERARDO
GARCIA ROJAS SERGIO
SAN MARTIN RIVEROLL ARTURO



MEXICO, D. F.

1992

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**MODELOS DE DIMENSIONAMIENTO DE FRACTURAS
INDUCIDAS HIDRAULICAMENTE.**

INDICE GENERAL.

Cap.	pag.
I. INTRODUCCION.	... 1
II. ANTECEDENTES.	... 4
II.1. Derivada Parcial con respecto al Tiempo.	... 7
II.2. Derivada Total con respecto al Tiempo.	... 8
II.3. Derivada Substantial con respecto al Tiempo.	... 8
II.4. Leyes Fundamentales.	... 9
II.4.1. Ecuación de Continuidad.	... 9
II.4.2. Ecuación de Movimiento.	... 13
II.4.3. Ecuación de Energía Mecánica	... 22
II.5. Leyes Constitutivas.	... 25
II.5.1. Incompresibilidad.	... 25
II.5.2. Ley de Hooke.	... 25
II.5.3. Ley de Newton de la Viscosidad.	... 28
II.5.3.1. Newtonianos.	... 29
II.5.3.2. No-Newtonianos.	... 31
II.5.3.2.1. Independientes del Tiempo.	... 32
II.5.3.2.2. Dependientes del Tiempo.	... 34
III. MODELOS DE PROPAGACION DE FRACTURAS.	... 38
III.1. Mecánica de Fractura Linealmente Elástica.	... 40
III.1.1. Factores de Intensidad de Esfuerzos.	... 40
III.1.2. Energía Superficial	... 43
III.2. Criterios de Propagación de la Fractura.	... 44
III.3. Consideraciones Generales para un Modelo de Propagación de Fractura.	... 46
III.3.1. Problemática de la Mecánica de la Fractura Linealmente Elástica.	... 47
III.3.2. Ecuaciones de Flujo del Fluido Fracturante.	... 48

IV. MODELOS BIDIMENSIONALES.	... 50
IV.1. Condiciones de Esfuerzos Planos.	... 51
IV.1.1. Principios Mecánicos de Fracturas Inducidas Hidráulicamente.	... 52
IV.2. Modelos Bidimensionales.	... 56
IV.2.1. Modelo PKN.	... 56
IV.2.1.1. Sin Considerar Pérdida de Fluido.	... 56
IV.2.1.2. Considerando la Pérdida de Fluido.	... 60
IV.2.2. Modelo GDK.	... 61
IV.2.2.1. Sin Considerar Pérdida de Fluido.	... 61
IV.2.2.2. Considerando la Pérdida de Fluido.	... 64
IV.2.3. Modelos Radiales.	... 66
IV.2.3.1. Sin Considerar Pérdida de Fluido.	... 66
IV.2.3.2. Considerando la Pérdida de Fluido.	... 69
V. MODELOS TRIDIMENSIONALES.	... 71
V.1.1. Concepto del Modelo P-3D.	... 72
V.1.2. Efectos de los Diferentes Parámetros de la Formación en el Flujo Vertical.	... 74
V.1.3. Contención de la Fractura.	... 75
V.1.4. Elasticidad.	... 77
V.1.5. Flujo de Fluido 1D.	... 82
V.1.6. Solución al Conjunto de Ecuaciones.	... 84
V.2.1. Modelos 3D.	... 86
V.2.2. Elasticidad.	... 88
V.2.3. Flujo de Fluido 2D.	... 96
V.2.4. Avance de la Fractura.	...101
V.2.5. Solución al Conjunto de Ecuaciones.	...104
V.3. Ejemplos de Simulaciones.	...106
VI. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.	...121
APENDICES.	...125
NOMENCLATURA Y REFERENCIAS.	...160

CAPITULO I.
INTRODUCCION.

La técnica de Estimulación de Pozos por medio del Fracturamiento Hidráulico se empezó a aplicar en la década de los 50's. Un tratamiento de fracturamiento consiste esencialmente en producir una fractura hidráulicamente con un fluido inyectado a alta presión y alto gasto hacia la formación de interés; dicho fluido recibe el nombre de Fluido Fracturante y es acarreador de un agente, llamado Sustentante, el cual permite mantener abierta la fractura resultante.

El objetivo principal del Fracturamiento es crear un canal altamente permeable para permitir la conducción de los fluidos del yacimiento al pozo o del pozo al yacimiento. La fractura creada tendrá una marcada influencia en el patrón de flujo y la distribución de presiones en la formación, el efecto inmediato será una considerable reducción en la resistencia al flujo.

Las altas recuperaciones en formaciones de muy bajas permeabilidades son resultado del cambio en el patrón de flujo en la mayor parte del radio de drenaje, de tal modo que el fluido fluye solo una pequeña distancia a través de la roca compactada, hasta que alcanza el canal altamente permeable y de allí al pozo.

Un tratamiento de Fracturamiento Hidráulico constituye una tarea sumamente compleja, por lo que el objetivo principal de este trabajo es la Predicción de la Geometría de la Fractura mediante los diversos modelos desarrollados a través de los años.

Para tener un concepto más claro del tema se hace indispensable llevar a cabo una revisión de algunas de las principales formulaciones matemáticas conocidas como: LEYES FUNDAMENTALES Y LEYES CONSTITUTIVAS.

Los estudios de la Mecánica de la Fractura Linealmente Elástica (LEFM), los Criterios de Propagación de Fractura y las Consideraciones Generales para un Modelo de Propagación de Fractura son analizados antes de entrar de lleno a los Modelos de Predicción de las Dimensiones de la Fractura.

Los primeros Modelos de Predicción de las Dimensiones de la Fractura dentro de este trabajo son los así llamados "BIDIMENSIONALES" (2D), los cuales consideran una altura de fractura constante en cualquier punto a lo largo de la longitud de la misma. Dentro de estos modelos se encuentran: El Modelo PKN, El Modelo GDK y los Modelos RADIALES; un aspecto importante tomado en cuenta para dichos modelos fue la consideración de la Pérdida y la No Pérdida de Fluido.

Otras alternativas para predecir las dimensiones de la fractura (*amplitud, longitud y altura*) las constituyen los Modelos Pseudotridimensionales (P-3D) y los Modelos Tridimensionales (3D), los cuales son abordados en la última parte de este trabajo. Las características que los diferencian de los Modelos 2D son: La variación de la altura de la fractura con respecto al tiempo de inyección y a la longitud de la misma, y los Tiempos de Cómputo para dar solución que son excesivamente altos. Su aparición en la Literatura es reciente.

Finalmente, dentro del Capítulo V se hacen comparaciones entre las predicciones realizadas por los Modelos 2D, P-3D y 3D; mostrando que para diferentes casos, alguno de ellos lleva a cabo una mejor predicción que la realizada por los otros dos. Teniendo, entonces, con lo anterior un nuevo criterio para la selección adecuada del modelo a emplear.

C A P I T U L O I I .
A N T E C E D E N T E S .

La necesidad de predecir el comportamiento de un sistema o la interpretación de éste, nos lleva a describir la estructura y el desarrollo de un modelo el cual puede ser usado como una herramienta de predicción o interpretación. En general, un sistema puede ser descrito por un observador externo como un conjunto de datos de entrada (ejem: el gasto de inyección en un tratamiento o la concentración de un polímero) y un conjunto de medidas de salida (presión en la cabeza del pozo). Comúnmente el problema es predecir los valores de salida o las respuestas correspondientes a una acción dada, o bien, mantener a éstos en un nivel deseado.⁴

El modelado describe el contenido de la "caja negra"; la fig. II-1 permite con buena exactitud una razonable predicción o control del sistema.⁴

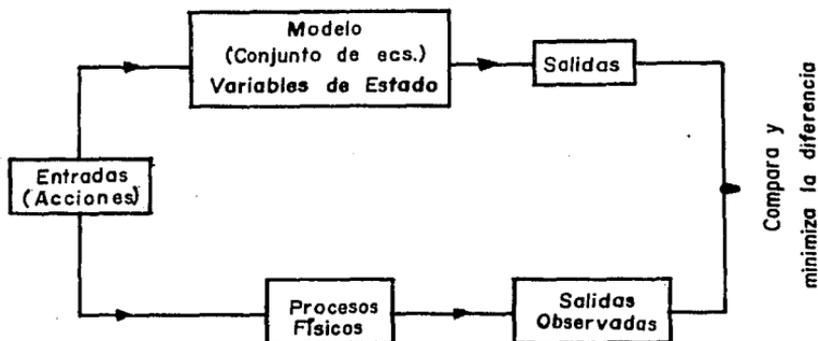


Fig. II-1. Filosofía del proceso de Modelado.

* Referencias al final del trabajo.

Un esquema más completo es mostrado en la *fig. II-2*, donde el operador requiere controlar el proceso para medir algunos de los parámetros del sistema (presiones de inyección, viscosidad de polímeros y pH del fluido) y así procesar el tratamiento deseado (ejem: longitud de la fractura o conductividad).⁴

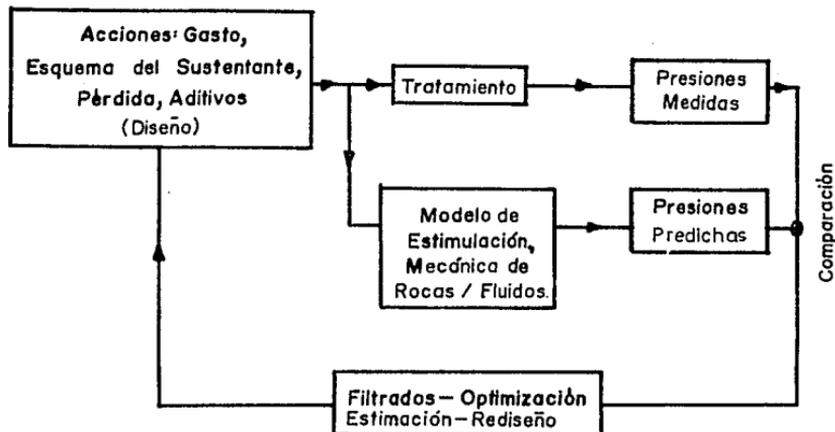


Fig. II-2. Uso del diseño y monitoreo en el modelado de una simulación

Para el tratamiento de estimulación, el modelado del contenido de la caja negra incluye un grupo de diferentes componentes tales como la mecánica de rocas, mecánica de fluidos, reología, calor transferido y reacciones cinéticas. Se requieren dos conjuntos de leyes:⁴

- Leyes Fundamentales (conservación de masa, de momentos y de energía).
- Leyes Constitutivas .

El primer conjunto de leyes relaciona principios físicos; el segundo incluye la elasticidad de la roca y la reología del fluido y describe el comportamiento de un sistema bajo cierto número de condiciones. Estas leyes son derivadas de suposiciones físicas o de observaciones experimentales.¹

Combinando estos dos conjuntos de ecuaciones "con las condiciones apropiadas de frontera", las cuales representan típicamente las acciones externas, dan como resultado una formulación matemática muy compleja. Para resolver el problema en su conjunto, es necesario realizar una discretización del dominio o de su frontera (tal como el yacimiento o una fractura), así como escribir las ecuaciones en una forma tal que puedan ser resueltas en una computadora digital.¹

Antes de entrar en el tema principal del capítulo, vamos a detenernos brevemente para hacer algunos comentarios acerca de los tres tipos de derivadas con respecto al tiempo que se utilizan en el presente trabajo. Para ilustrar esto utilizaremos un ejemplo simplista, como es el problema de referir la concentración de peces en un río. Puesto que los peces se están moviendo, su concentración C será una función de la posición (x,y,z) y del tiempo (t) .²

II.1. Derivada parcial con respecto al tiempo, $\partial c/\partial t$.²

Supongamos que observamos en un puente cómo varía la concentración de peces exactamente debajo de nosotros con el tiempo. Estamos observando cómo varía la concentración con el tiempo, para una posición fija en el espacio. De acuerdo con esto, $\partial c/\partial t$ indica la « parcial de c con respecto a t , manteniendo constantes x, y, z ».

II.2. Derivada total con respecto al tiempo, dc/dt .²

Supongamos ahora que en vez de estar en el puente vamos en una lancha que se mueve en el río en todas direcciones, unas veces en contra de la corriente, otras a través y tal vez otras a favor de la corriente. Al referir la variación de la concentración de peces con respecto al tiempo, los números que resultan han de reflejar también el movimiento de la lancha. La derivada total con respecto al tiempo está dada por :

$$\frac{dc}{dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial c}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial c}{\partial z} \frac{dz}{dt} \quad \dots (II-1)$$

en la que dx/dt , dy/dt y dz/dt son los componentes de la velocidad de la lancha.

II.3. Derivada substancial con respecto al tiempo, Dc/Dt .²

Supongamos que vamos en una canoa a la que no se comunica energía, sino que simplemente flota. En este caso, la velocidad del observador es exactamente la misma que la velocidad de la corriente v . Al referir la variación de la concentración de peces con respecto al tiempo, los números dependen de la velocidad local de la corriente. Esta derivada es una clase especial de derivada total con respecto al tiempo que se denomina « derivada substancial ». Está relacionada con la derivada parcial con respecto al tiempo de la forma siguiente:

$$\frac{Dc}{Dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + v_x \frac{\partial c}{\partial x} + v_y \frac{\partial c}{\partial y} + v_z \frac{\partial c}{\partial z} \quad \dots (II-2)$$

en la que v_x , v_y y v_z son los componentes de la velocidad local del fluido v .

Se deberá de entender perfectamente el significado físico de estas tres derivadas. Recordando que $\partial c/\partial t$ es la derivada para un punto fijo en el espacio y Dc/Dt es la derivada calculada por un observador que flota corriente abajo con el fluido.

II.4. LEYES FUNDAMENTALES.²

II.4.1. ECUACION DE CONTINUIDAD.²

Esta ecuación se deduce aplicando un Balance de Materia a un elemento estacionario de volumen $\Delta x \Delta y \Delta z$, a través del que está circulando el fluido (ver fig. II-3).

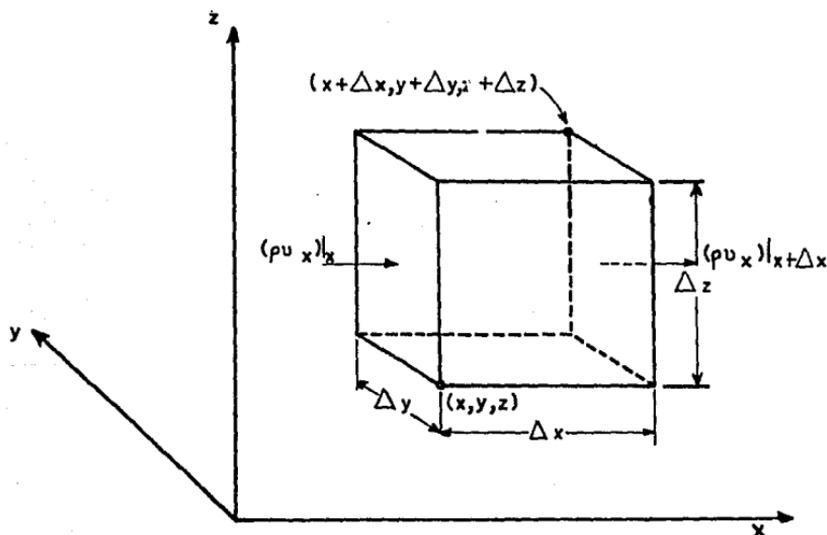


Fig. II-3. Región de volumen $\Delta x \Delta y \Delta z$ fija en el espacio, a través de la cual está circulando un fluido.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Vel. de acumu-} \\ \text{lación de mat.} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Vel. ent.} \\ \text{de materia} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{Vel. salida} \\ \text{de materia} \end{array} \right\} \quad \dots \text{(II-3)}$$

Considerando las caras perpendiculares a cada eje, tenemos que:²

Vel. de entrada de materia		Vel. de salida de materia		} (II-4)
CARA	EC. VELOCIDAD	CARA	EC. VELOCIDAD	
x	$(\rho v_x) _x \Delta y \Delta z$	x+Δx	$(\rho v_x) _{x+\Delta x} \Delta y \Delta z$	
y	$(\rho v_y) _y \Delta x \Delta z$	y+Δy	$(\rho v_y) _{y+\Delta y} \Delta x \Delta z$	
z	$(\rho v_z) _z \Delta x \Delta y$	z+Δz	$(\rho v_z) _{z+\Delta z} \Delta x \Delta y$	

Por otra parte, la velocidad de acumulación de materia en el elemento de volumen diferencial es igual al volumen diferencial por la variación de la densidad con respecto al tiempo, esto es:

$$\text{Velocidad de Acumulación de Materia} = (\Delta x \Delta y \Delta z) (\partial \rho / \partial t) \quad \dots \text{(II-5)}$$

Desarrollando y aplicando el concepto de derivada se obtiene la Ecuación de Continuidad. (Ver APENDICE A)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \left[\frac{\partial}{\partial x} \rho v_x + \frac{\partial}{\partial y} \rho v_y + \frac{\partial}{\partial z} \rho v_z \right] \quad \dots \text{(II-6)}$$

La definición de la divergencia de un campo vectorial es un escalar, definido en cada punto del campo y se denota como sigue:³

$$\nabla \cdot v = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Considerando en este caso que ρ es una función escalar y que v es una función vectorial y aplicando la definición de divergencia a la Ec. II-6 se obtiene:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - (\nabla \cdot \rho v) \quad \dots (II-7)$$

Donde $(\nabla \cdot \rho v)$, representa la velocidad neta con que disminuye la velocidad de flujo de materia por unidad de volumen. Siendo una notación equivalente de la Ecuación de Continuidad.

Teniendo presente la propiedad de la derivación que dice: " La derivada del producto de dos funciones, es igual a la suma del producto de la primera función por la derivada de la segunda función más el producto de la segunda función por la derivada de la primera función ". Del enunciado anterior expresándolo en función de derivadas parciales y considerando a u como una función escalar y a v como una función vectorial, obtenemos:⁹

$$\frac{\partial}{\partial x} (uv) = u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial x};$$

análogamente se obtiene para las direcciones "y" y "z".

Aplicando lo anterior al segundo miembro de la Ec. II-7, tenemos:

$$(\nabla \cdot \rho v) = \rho \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho \frac{\partial v_z}{\partial z} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z} \quad \dots (II-8)$$

Sí se factoriza la Ec. II-8 con respecto a ρ , tenemos:

$$(\nabla \cdot \rho v) = \rho \left[\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] + v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z} \quad \dots (II-9)$$

Sustituyendo la Ec. II-9 en la Ec. II-7 , obtenemos:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \left[\rho \left[\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] + v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z} \right] \dots (II-10)$$

Ordenando la Ec. II-10 de manera que el primer miembro contenga todos los términos de las derivadas de ρ , tenemos :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z} = - \rho \left[\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] \dots (II-11)$$

En el primer miembro de la Ec. II-11 tenemos la " *Derivada sustancial de la densidad con respecto al tiempo* ", es decir, la derivada con respecto al tiempo para un recorrido que sigue el movimiento del fluido. De acuerdo con esto, la Ec. II-11 puede expresarse abreviadamente de la siguiente forma:

$$\frac{D\rho}{Dt} = - \rho \left[\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] \dots (II-12)$$

El segundo miembro de la Ec. II-12 es la multiplicación de una función escalar por la divergencia de un campo vectorial; por lo que esta ecuación puede abreviarse como sigue:

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho (\nabla \cdot \mathbf{v}) \dots (II-13)$$

La Ec. II-13 describe la velocidad de variación de la densidad tal como la ve un observador que flota con el fluido, es decir, lo que sucede en la superficie del fluido en movimiento.

Una forma especial muy importante de la Ecuación de Continuidad, que se utilizará posteriormente, es la correspondiente a un fluido de densidad constante para el que se obtiene la siguiente expresión:

$$(\nabla \cdot v) = 0 \quad (\text{fluido incompresible}) \quad \dots \text{(II-14)}$$

La Ec. II-14 se puede comprobar viendo la Ec. II-11 en la cual aparecen las derivadas parciales de la densidad con respecto a "x", "y", "z" y t; pero por las propiedades de la derivación sabemos que "la derivada de una constante es cero", entonces todo el primer miembro de la Ec. II-11 se hace cero; teniendo así lo siguiente:

$$0 = -\rho \left[\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right]$$

$$\rightarrow \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

Donde por la definición de la divergencia tenemos:

$$(\nabla \cdot v) = 0,$$

quedando así demostrado.

II.4.2. ECUACION DE MOVIMIENTO.²

Para un elemento de volumen $\Delta x \Delta y \Delta z$, como el utilizado anteriormente, se puede escribir el siguiente Balance de Cantidad de Movimiento:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Vel. de acu-} \\ \text{mulación de} \\ \text{cantidad de} \\ \text{movimiento} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Vel. entrada} \\ \text{de cantidad} \\ \text{de movimiento} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{Vel. salida} \\ \text{de cantidad} \\ \text{de movimiento} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{Suma de las} \\ \text{fuerzas que} \\ \text{actúan sobre} \\ \text{el sistema} \end{array} \right\} \quad \dots \text{(II-15)}$$

Es importante hacer notar que la Ec. II-15 está referida para sistemas en estado estacionario.

Teniendo en cuenta el estado no estacionario, se supondrá que el fluido se mueve en una dirección arbitraria a través de las seis caras del elemento de volumen. Es preciso resaltar que la Ec. II-15 es la ecuación de un vector, con componentes para cada una de las tres direcciones coordenadas, "x", "y" y "z".

Para mayor sencillez, se comenzará considerando el componente "x" de cada uno de los términos de la Ec. II-15; los componentes "y" y "z" se pueden obtener por analogía.

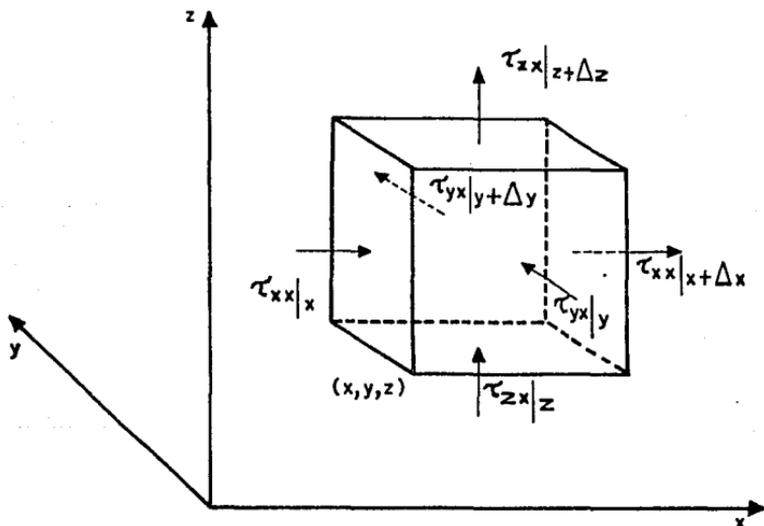


Fig. II-4. Elemento de volumen $\Delta x \Delta y \Delta z$, en el que se señala con flechas la dirección en que se transporta el componente "x" de la cantidad de movimiento a través de las superficies.

En primer lugar se consideran las velocidades de flujo del componente "x" de la cantidad de movimiento que entra y sale del elemento de volumen que se indica en la fig. II-4. La cantidad de movimiento entra y sale del elemento de volumen en virtud de dos mecanismos: por convección (es decir, debido al flujo global del fluido) y por transporte molecular (o sea, a causa de los gradientes de velocidad).

Vel. entrada por convección. Vel. salida por convección.

CARA	Ec. de Velocidad	CARA	Ec. de Velocidad
x	$(\rho v_x v_x) _x \Delta y \Delta z$	x+Δx	$(\rho v_x v_x) _{x+\Delta x} \Delta y \Delta z$
y	$(\rho v_y v_x) _y \Delta x \Delta z$	y+Δy	$(\rho v_y v_x) _{y+\Delta y} \Delta x \Delta z$
z	$(\rho v_z v_x) _z \Delta x \Delta y$	z+Δz	$(\rho v_z v_x) _{z+\Delta z} \Delta x \Delta y$

Por lo tanto, es preciso considerar el flujo convectivo de la Cantidad de Movimiento "x" a través de las seis caras y que el flujo convectivo neto de la Cantidad de Movimiento "x", en el elemento de volumen es:

$$\Delta y \Delta z (\rho v_x v_x|_x - \rho v_x v_x|_{x+\Delta x}) + \Delta x \Delta z (\rho v_y v_x|_y - \rho v_y v_x|_{y+\Delta y}) + \Delta x \Delta y (\rho v_z v_x|_z - \rho v_z v_x|_{z+\Delta z}) \quad \dots (II-16)$$

De igual forma, la velocidad con la que el componente "x" de la Cantidad de Movimiento entra por transporte molecular por las seis caras se puede expresar de la siguiente forma:

Vel. entrada transporte
molecular.

Vel. salida transporte
molecular.

CARA	Ec. de Velocidad	CARA	Ec. de Velocidad
x	$(\tau_{xx} _x) \Delta y \Delta z$	x+Δx	$(\tau_{xx} _{x+\Delta x}) \Delta y \Delta z$
y	$(\tau_{yx} _y) \Delta x \Delta z$	y+Δy	$(\tau_{yx} _{y+\Delta y}) \Delta x \Delta z$
z	$(\tau_{zx} _z) \Delta x \Delta y$	z+Δz	$(\tau_{zx} _{z+\Delta z}) \Delta x \Delta y$

Teniendo en cuenta que τ_{yx} es la densidad de flujo de Cantidad de Movimiento "x" a través de una cara perpendicular al eje "y". Sumando estas seis contribuciones, se obtiene:

$$\Delta y \Delta z (\tau_{xx}|_x - \tau_{xx}|_{x+\Delta x}) + \Delta x \Delta z (\tau_{yx}|_y - \tau_{yx}|_{y+\Delta y}) + \Delta x \Delta y (\tau_{zx}|_z - \tau_{zx}|_{z+\Delta z}) \quad \dots (II-17)$$

Observando que de igual forma que antes, estas densidades de flujo de Cantidad de Movimiento pueden considerarse como esfuerzos. Por lo tanto τ_{xx} es el esfuerzo normal que actúa sobre la cara "x" y τ_{yx} es el esfuerzo tangencial (o cortante) que actúa sobre la cara "y" en la dirección "x" y que resulta como consecuencia de las fuerzas viscosas.

En la mayoría de los casos, las únicas fuerzas importantes serán las procedentes de la presión del fluido P y la fuerza gravitacional por unidad de masa g. La resultante de estas fuerzas en la dirección "x" será, evidentemente:

$$\Delta y \Delta z (P|_x - P|_{x+\Delta x}) + \rho g_x \Delta x \Delta y \Delta z \quad \dots (II-18)$$

La presión de un fluido en movimiento está definida por la Ecuación de Estado $P = P(\rho, T)$, y es una magnitud escalar.

Finalmente, la velocidad de acumulación de cantidad de movimiento "x" en el elemento es $\Delta x \Delta y \Delta z (\partial \rho v_x / \partial t)$. Sustituyendo ahora las anteriores expresiones en la Ec. II-15 y dividiendo toda la ecuación que resulta por $\Delta x \Delta y \Delta z$ y tomando el límite cuando Δx , Δy y Δz , tienden a cero, se obtiene el componente "x" de la Ecuación de Movimiento:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho v_x = & - \left[\frac{\partial}{\partial x} \rho v_x v_x + \frac{\partial}{\partial y} \rho v_y v_x + \frac{\partial}{\partial z} \rho v_z v_x \right] \\ & - \left[\frac{\partial}{\partial x} \tau_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yx} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zx} \right] - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x \quad \dots (II-19) \end{aligned}$$

Los componentes "y" y "z", pueden obtenerse de una forma análoga, como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho v_y = & - \left[\frac{\partial}{\partial x} \rho v_x v_y + \frac{\partial}{\partial y} \rho v_y v_y + \frac{\partial}{\partial z} \rho v_z v_y \right] \\ & - \left[\frac{\partial}{\partial x} \tau_{xy} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yy} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zy} \right] - \frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y \quad \dots (II-20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho v_z = & - \left[\frac{\partial}{\partial x} \rho v_x v_z + \frac{\partial}{\partial y} \rho v_y v_z + \frac{\partial}{\partial z} \rho v_z v_z \right] \\ & - \left[\frac{\partial}{\partial x} \tau_{xz} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yz} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zz} \right] - \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z \quad \dots (II-21) \end{aligned}$$

Las magnitudes ρv_x , ρv_y , ρv_z son los componentes del vector velocidad másica ρv ; igualmente para g_x , g_y , g_z , son los componentes de la aceleración gravitacional g . Por otra parte, $\partial p / \partial x$, $\partial p / \partial y$, $\partial p / \partial z$, son los componentes de un vector ∇p , denominado « gradiente de P ».

Los términos $\rho v_x v_x$, $\rho v_x v_y$, $\rho v_x v_z$, $\rho v_y v_x$, etc., son los nueve componentes de la densidad de flujo convectivo de Cantidad de Movimiento $\rho v v$, que es el « producto diádico »* de ρv y de v . Análogamente, τ_{xx} , τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{yz} , etc., son los nueve componentes de τ , que es el « tensor esfuerzo ».

Como las Ecs. II-19, II-20, II-21 ocupan mucho espacio es conveniente combinarlas con el fin de obtener una ecuación vectorial más sencilla:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho v = - [\nabla \cdot \rho v v] - \nabla p - [\nabla \cdot \tau] + \rho g$$

<p>vel. de aumento de cantidad de movimiento por unidad de volumen.</p>	<p>vel. de ganancia de cantidad de movimiento por convección por unidad de volumen.</p>	<p>fuerza de presión que actúa sobre el elemento por unidad de volumen.</p>
	<p>vel. de ganancia de cantidad de movimiento por transporte viscoso por unidad de volumen.</p>	<p>fuerza de gravitación que actúa sobre el elemento por unidad de volumen.</p>

... (II-22)

Hay que tener presente que $[\nabla \cdot \rho v v]$ y $[\nabla \cdot \tau]$ no son divergencias simples, debido a la naturaleza tensorial de $\rho v v$ y τ . Sin embargo, la interpretación física es análoga a la de $(\nabla \cdot \rho v)$ en el desarrollo de la Ecuación de Continuidad; mientras que $(\nabla \cdot \rho v)$ representa la velocidad de pérdida de materia (un escalar) por unidad de volumen debido al flujo del fluido, la magnitud $[\nabla \cdot \rho v v]$ representa la velocidad de pérdida de Cantidad de Movimiento (un vector) por unidad de volumen debido al flujo del fluido. La Ec. II-19 puede reordenarse, con ayuda de la Ecuación de Continuidad para obtener:

* Por tratarse de tensores su estudio queda fuera de este trabajo.

$$\rho \frac{Dv_x}{Dt} = - \frac{\partial p}{\partial x} - \left[\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right] + \rho g_x \quad \dots (II-23)$$

Para los componentes "y" y "z" se obtienen expresiones análogas. Sumando vectorialmente los tres componentes, se llega a:

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = - \nabla p - [\nabla \cdot \tau] + \rho g$$

masa por unidad de volumen, multiplicada por - aceleración	fuerza de presión sobre el elemento - por unidad de volumen.	fuerza viscosa sobre el elemento por unidad de volumen.
	+ ρg	
	fuerza gravitacional sobre el elemento por unidad de volumen.	... (II-24)

La Ecuación de Movimiento, expresada en esta forma establece que un pequeño elemento de volumen que se mueve con un fluido es acelerado por las fuerzas que actúan sobre él. En otras palabras, es una expresión de la Segunda Ley de Newton, según la cual;

$$\text{masa} \times \text{aceleración} = \text{suma de fuerzas.}$$

Por lo tanto, el Balance de Cantidad de Movimiento es totalmente equivalente a la Segunda Ley de Newton del Movimiento. Las dos formas de la Ecuación de Movimiento que se dan en las Ecs. II-22 y II-24, corresponden a las dos formas de la Ecuación de Continuidad de las Ecs. II-7 y II-9. En cada caso la primera forma representa un balance aplicado a un elemento de volumen fijo en el espacio y la segunda es una descripción de las variaciones que tienen lugar en un elemento que sigue el movimiento del fluido. Es necesario tener en cuenta que las Ecs. II-19 a la II-24 son válidas para cualquier medio continuo.

Con el fin de utilizar estas ecuaciones para determinar las distribuciones de velocidad, hay que expresar los distintos esfuerzos en función de gradientes de velocidad y las propiedades del fluido. Para fluidos Newtonianos, estas expresiones son:

$$\tau_{xx} = -2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot v) \quad \dots (II-25)$$

$$\tau_{yy} = -2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot v) \quad \dots (II-26)$$

$$\tau_{zz} = -2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot v) \quad \dots (II-27)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\mu \left[\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right] \quad \dots (II-28)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = -\mu \left[\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right] \quad \dots (II-29)$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = -\mu \left[\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right] \quad \dots (II-30)$$

En realidad, los esfuerzos normales deberían contener un término adicional; por ejemplo la Ec. II-25 debería ser:

$$\tau_{xx} = -2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} + \left[\frac{2}{3} \mu - k \right] (\nabla \cdot v) \quad \dots (II-25a)$$

En la que k es la « viscosidad de conjunto ». La viscosidad de conjunto es cero para los gases monoatómicos a baja densidad y probablemente no es demasiado importante para los gases densos y los líquidos.

Las Ecs. II-25 a II-30 se han expuesto aquí sin demostración, debido a que es demasiado larga. Estas ecuaciones, que constituyen un planteamiento más general de la Ley de Newton de la Viscosidad, se aplican a los casos complejos de flujo, en los que el fluido circula en todas las direcciones.

Cuando el fluido circula en la dirección "x", entre dos láminas perpendiculares a la dirección "y" de forma que v_x es una función exclusiva de "y", de esta serie de seis ecuaciones se obtiene:

$$\tau_{xx} = \tau_{yy} = \tau_{zz} = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0 \quad \text{y} \quad \tau_{yx} = -\mu (dv_x/dy).$$

Sustituyendo las Ecs. II-25 a II-30 en la Ec. II-23 y las ecuaciones correspondientes para "y" y "z", se obtienen las ecuaciones generales de movimiento para un Fluido Newtoniano que presenta variación de la densidad y la viscosidad:

$$\begin{aligned} \rho \frac{Dv_x}{Dt} = & -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot v) \right] + \\ & \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \right] + \rho g_x \end{aligned}$$

... (II-31)

$$\begin{aligned} \rho \frac{Dv_y}{Dt} = & -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left[2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot v) \right] + \\ & \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \right] + \rho g_y \end{aligned}$$

... (II-32)

$$\rho \frac{Dv_z}{Dt} = - \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left[2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot v) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \right] + \rho g_z \dots (II-33)$$

Estas ecuaciones conjuntamente con la Ecuación de Continuidad, la Ecuación de Estado $P = P(\rho)$, la variación de la viscosidad con la densidad $\mu = \mu(\rho)$ y las condiciones iniciales y límite, determinan completamente la presión, densidad y los componentes de la velocidad para el flujo isotérmico de un fluido.

Rara vez se utilizan estas ecuaciones en su forma completa para el planteamiento de problemas de flujo, generalmente resulta más conveniente emplear fórmulas simplificadas de las mismas. (Ver APENDICE A)

Casos particulares :

(i) Para ρ constante y μ constante, las Ecs. II-31, II-32 y II-33 pueden simplificarse mediante la Ecuación de Continuidad $[(\nabla \cdot v) = 0]$ para obtener:

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = - \nabla P + \mu \nabla^2 v + \rho g \dots (II-34)$$

(ii) Para $[(\nabla \cdot \tau) = 0]$, la Ec. II-24 se reduce a:

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = - \nabla P + \rho g \dots (II-35)$$

II.4.3. ECUACION DE ENERGIA MECANICA.²

En esta parte se demostrará como utilizar la Ecuación de Movimiento para obtener una descripción de las interconversiones de Energía Mecánica que tienen lugar en un fluido en movimiento. Se inicia por formar el producto escalar de la velocidad v con la Ecuación de Movimiento correspondiente a la Ec. II-24:

$$\rho \frac{D}{Dt} (1/2 v^2) = - (v \cdot \nabla P) - (v \cdot [\nabla \cdot \tau]) + \rho (v \cdot g) \dots (II-36)$$

Esta ecuación escalar describe la velocidad de variación de la Energía Cinética por unidad de masa ($1/2 v^2$) para un elemento de fluido que se mueve con la corriente. Para el tratamiento que se hace a continuación, resulta más conveniente escribir esta ecuación en función de $\partial/\partial t$, utilizando la Ecuación de Continuidad; se separará también en dos términos cada una de las contribuciones, viscosa y de presión. Los términos de la ecuación que resultan pueden interpretarse en función de un elemento estacionario de volumen a través del que circula el fluido.

$$\frac{\partial}{\partial t} (1/2 \rho v^2) = - (\nabla \cdot 1/2 \rho v^2 v)$$

velocidad de incremento o de energía cinética por unidad de volumen.

velocidad neta de entrada de energía cinética debida al flujo global.

$- (\nabla \cdot Pv)$
velocidad de trabajo producida por la presión de los alrededores sobre el elemento de volumen.

$- P (-\nabla \cdot v)$
velocidad de conversión reversible en energía interna.

$- (\nabla \cdot [\tau \cdot v])$
velocidad de trabajo producida por las fuerzas viscosas que actúan sobre el elemento de volumen.

$- (-\tau : \nabla v)$
velocidad de conversión irreversible en energía interna.

$+ \rho (v \cdot g)$
velocidad de trabajo producida por la fuerza de gravedad que actúa sobre el elemento de volumen.

... (II-37)

En este momento no se ve con claridad la razón de haber atribuido el mencionado significado físico a los términos $P(\nabla \cdot v)$ y $(\tau : \nabla v)$; dicho significado no puede apreciarse de una forma adecuada por lo que se pide que por el momento se acepte tal y como se propone.

Es preciso hacer notar que para Fluidos Newtonianos $(-\tau : \nabla v)$ es siempre positivo ya que puede expresarse como una suma de términos elevada al cuadrado:

$$(-\tau : \nabla v) = \mu \nabla^2 v = \frac{1}{2} \mu \sum_i \sum_j \left[\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} (\nabla \cdot v) \delta_{ij} \right]^2 \quad \text{.. (II-38)}$$

en la que (i, j) afectan a los valores de "x", "y" y "z", siendo:

$$\delta_{ij} = 1 \quad \text{para } i = j.$$

$$\delta_{ij} = 0 \quad \text{para } i \neq j.$$

Esto indica que en todos los sistemas de flujo existe una degradación de Energía Mecánica o Energía Calorífica y que por lo tanto, los procesos reales no son reversibles. En ausencia del término $(\tau : \nabla v)$ todas las formas de energía comprendidas en la Ec. II-37 (Cinética, Interna y Potencial) serían completamente convertibles entre sí.

Debido a los términos $P(\nabla \cdot v)$ y $(\tau : \nabla v)$, el fluido puede calentarse (o enfriarse) internamente. Por lo tanto, cuando se habla de un « sistema isotérmico », en realidad nos referimos a un sistema en el que el calor generado (o absorbido) no da lugar a una variación apreciable de temperatura.

La variación de temperatura debido al término $P(\nabla \cdot v)$ es considerable en el caso de gases que sufren una expansión o compresión brusca, como en compresores, turbinas, etc.

La variación de temperatura que se produce a causa del término $(\tau : \nabla v)$ sólo puede apreciarse en sistemas con elevada velocidad de flujo, en los que los gradientes de velocidad son grandes como ocurre en el vuelo a alta velocidad y extrusión rápida.

II.5. - LEYES CONSTITUTIVAS.⁴

II.5.1. - INCOMPRESIBILIDAD.⁴

Para un gran número de fluidos, la densidad ρ no varía significativamente con el tiempo, con la presión o con la temperatura. Por lo tanto, para una densidad constante, por ejemplo un fluido incompresible, la Ecuación de Continuidad se simplifica y se convierte:

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad \dots(\text{II-39})$$

II.5.2. - LEY DE HOOKE.⁴

Los esfuerzos y deformaciones internas de un cuerpo, cuando no son excesivamente grandes, son proporcionales a las cargas o fuerzas soportadas por el mismo, lo cual implica una compresión elástica que desaparece si se suprime la carga o anula la fuerza.

Si al graficar el comportamiento Esfuerzo-Deformación, de cualquier cuerpo que se somete a un esfuerzo, se puede ajustar al indicado en la fig. II-5, el material sigue la LEY DE HOOKE. Donde m (pendiente de la recta), es la constante de proporcionalidad conocida como Módulo de Young o de Elasticidad (E).

El término F/A es conocido como esfuerzo (τ), para cada material se tiene un valor diferente de E ; por lo que el Módulo de Young es una propiedad intrínseca del material.

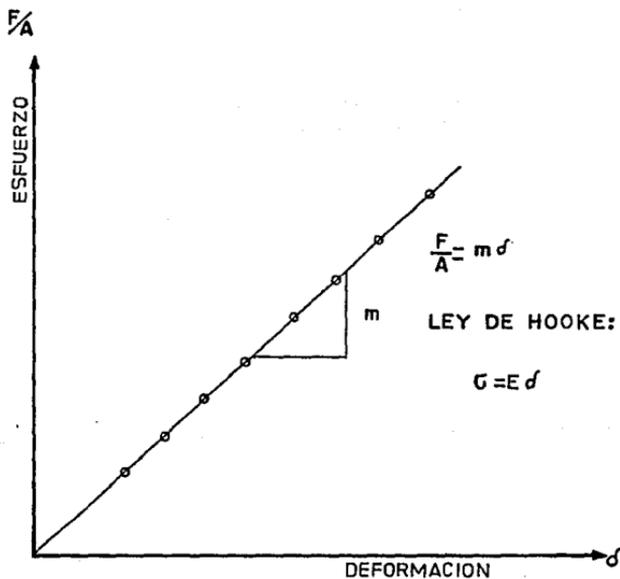


Fig. II-5. Figura de la Ley de Hooke.

No todos los materiales siguen el comportamiento Esfuerzo-Deformación antes indicado, por lo que básicamente se tienen dos casos: MATERIAL ELASTICO (sigue la LEY DE HOOKE) y MATERIAL PLASTICO. (ver *figs.* II-6A y II-6B, respectivamente)

Los Materiales Elásticos, al cesar la fuerza que los deforma, tienden a recuperar sus dimensiones originales; si la fuerza se incrementa paulatinamente se alcanzará un valor para el cual ya no se recuperará su forma original. Este valor se llama límite Elástico.

Si se continúa aumentando la fuerza aplicada, el material falla (se rompe); con lo cual se llega al Límite de Ruptura. La falla del material puede presentarse de inmediato al Límite Elástico, caso en el cual se llama falla frágil (ver *fig.* II-7A), o puede tolerar mayor esfuerzo después del Límite Elástico (ver *fig.* II-7B), denominándose Falla Dúctil.

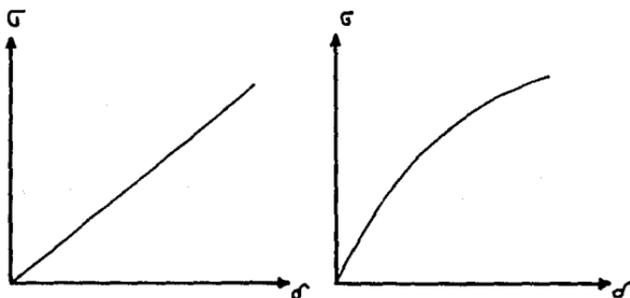


Fig. II - 6A Material Elástico. Fig. II - 6B Material Plástico.

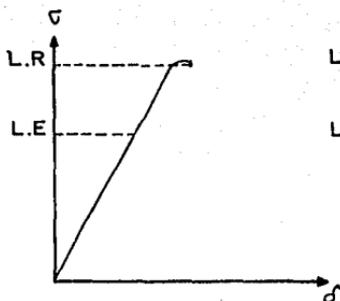


Fig. II-7A Falla Frágil.

L.E. Límite Elástico.

L.R. Límite de Ruptura.

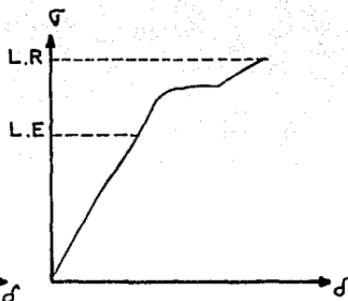


Fig. II-7B Falla Dúctil.

II.5.3. LEY DE NEWTON DE LA VISCOSIDAD.⁵

Un fluido ideal se define como aquel en el cual no existe fricción entre sus partículas, o sea sin viscosidad ($\mu = 0$). Un fluido de este tipo es solo una idealización, puesto que todos los fluidos, de una forma u otra, son viscosos y compresibles.

En el caso de un fluido real, siempre actúan fuerzas tangenciales o cortantes cuando hay movimiento, dando lugar a las fuerzas de fricción las cuales se deben a la propiedad de los fluidos llamada viscosidad.

Básicamente los fluidos se clasifican en dos grupos:⁶

●II.5.3.1. Newtonianos.

●II.5.3.2. No-Newtonianos.

II.5.3.2.1. Independientes del Tiempo.

A) Plástico de Bingham.

B) Pseudo-Plásticos y Dilatantes.

II.5.3.2.2. Dependientes del Tiempo.

- A) Tixotrópicos.
- B) Reopécticos
- C) Viscoelásticos
- D) Fluidos Complejos.

●II.5.3.1. Newtonianos.⁶

Son aquellos fluidos cuyo comportamiento de flujo está descrito por la "Ley de Resistencia de Viscosidad de Newton". Esta Ley establece que a una Temperatura y Presión dadas, el esfuerzo de corte es directamente proporcional a la velocidad de corte. Esta constante de proporcionalidad es la Viscosidad Verdadera de los fluidos Newtonianos. (Ver fig.II-8)

Matemáticamente:

esfuerzo de corte (τ) = viscosidad (μ) X velocidad de corte ($\dot{\gamma}$).

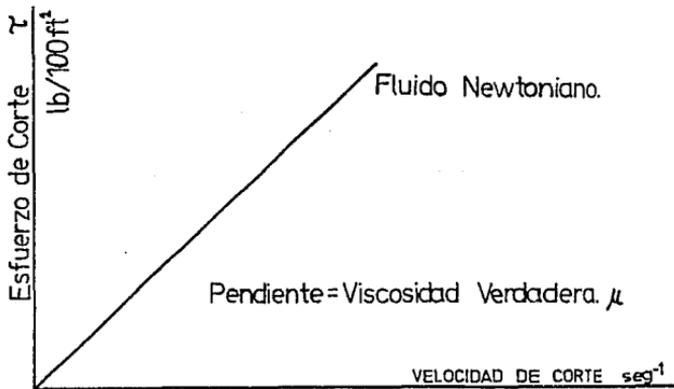


Fig. II-8 Relación de la velocidad de corte y esfuerzo de corte de un fluido Newtoniano.

La Ley de Newton de la Viscosidad se obtuvo considerando un fluido alojado entre dos grandes placas planas y paralelas, de área A , separadas por una distancia muy pequeña "y" (Ver fig. II-9). Suponiendo que el sistema está inicialmente en reposo, (a); en el tiempo $t = 0$, la lámina inferior se pone en movimiento en la dirección del eje "x", con una velocidad constante v , (b); conforme transcurre el tiempo (c); el fluido gana cantidad de movimiento y finalmente se establece el perfil de velocidad en régimen estacionario, (d). Una vez que se alcanza este estado estacionario de movimiento, es preciso aplicar una fuerza constante F para conservar el movimiento de la placa inferior. Esta fuerza está dada por la siguiente expresión, si se supone flujo laminar:

$$F \propto A \frac{v}{y}, \quad F = \mu A \frac{v}{y}$$

donde μ es la constante de proporcionalidad, llamada viscosidad del fluido.⁵

El esfuerzo cortante que se ejerce en la dirección "x", sobre la superficie del fluido fuerza por unidad de área situada a una distancia constante "y", por el fluido existente en la región donde "y" es menor, se designa por τ_{xy} :

$$\tau_{xy} = \frac{F}{A}, \quad \tau_{xy} = \mu \frac{dv}{dy}$$

Esta última expresión representa la Ley de Newton de la Viscosidad y los fluidos que la cumplen se denominan Newtonianos.⁵

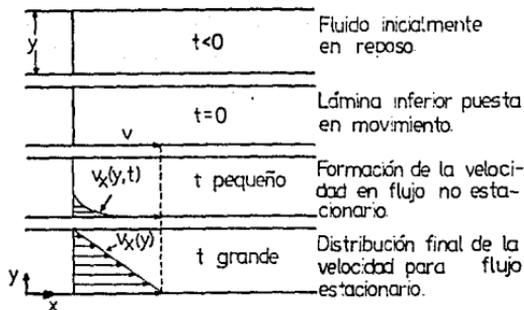


Fig. II-9. Formación del perfil de velocidad en estado estacionario para un fluido contenido entre dos láminas.

●II.5.3.2. No-Newtonianos.^a

Son aquellos fluidos que no manifiestan una relación lineal entre la velocidad de corte y el esfuerzo de corte y no pueden representarse por la Ecuación de la Viscosidad, los cuales se comportan de acuerdo a la "Reología" de cada uno. (Ver fig. II-10)

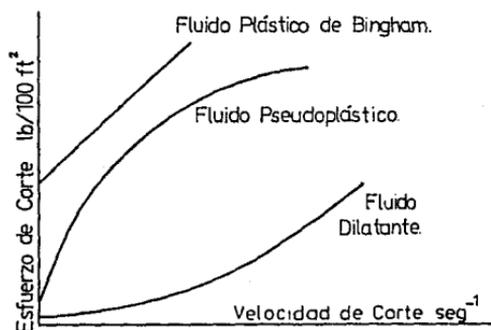


Fig. II-10. Relación de la velocidad de corte y esfuerzo de corte de los fluidos No-Newtonianos independientes del tiempo.

●II.5.3.2.1.- Independientes del Tiempo.^o

Son aquellos cuyo valor de corte y esfuerzo de corte no cambian con el tiempo. La fig. II-10 muestra la relación entre velocidad de corte y esfuerzo de corte de tres tipos de fluidos independientes del tiempo, No-Newtonianos.

A)-Plástico de Bingham.^o

Son aquellos cuya relación de velocidad de corte-esfuerzo cortante, está representado por una línea recta; ésta no pasa por el origen y por lo tanto intersecta el eje de los esfuerzos en un punto diferente del origen. La implicación física de este comportamiento es que el fluido Bingham requiere un valor finito del esfuerzo de corte para iniciar su flujo. Este valor mínimo del esfuerzo de corte se denomina Punto de Cedencia, el cual es un pseudo-número obtenido de acuerdo al modelo de Bingham.

En el campo el valor del Punto de Cedencia da una indicación de las fuerzas de atracción entre los sólidos y por lo tanto de la desviación del comportamiento No-Newtoniano del fluido. La pendiente de la línea que parte del valor del Punto de Cedencia, se llama Viscosidad Plástica, (μ_p) y es una medida del espesamiento del fluido y depende del contenido de sólidos, su tamaño y de la temperatura.

B)-Pseudoplásticos y Dilatantes.^o

Estos fluidos se caracterizan por las relaciones de velocidad de corte y esfuerzo de corte que se muestran en la fig. II-11. Ambas curvas, dibujadas en una gráfica logarítmica (*log-log*) proporcionan líneas rectas. El comportamiento de los fluidos Pseudoplásticos y Dilatantes, matemáticamente se pueden expresar a través de la siguiente ecuación empírica, conocida como *Ley de Potencias*.

esfuerzo de corte (τ) = $k' \times$ velocidad de corte (δ) ^{n'} .

La expresión anterior describe el esfuerzo de corte en función de dos constantes k' y n' . La constante k' , representa el coeficiente de la viscosidad del fluido, la cual es uniforme para un fluido dado y se determina por la intersección al extrapolar la recta con el valor del $\log 1$ en la escala logarítmica de la *fig. II-11*. El factor de potencia n' , es el exponente de la viscosidad y es una medida del grado de desviación del comportamiento de un flujo Newtoniano, el cual es uniforme para un fluido dado y se determina por la pendiente de la recta (*fig. II-11*).

Si el valor de n' es igual a 1 el fluido es Newtoniano. Si n' es mayor que 1 el fluido es Dilatante y si n' es menor que 1 el fluido es Pseudoplástico.

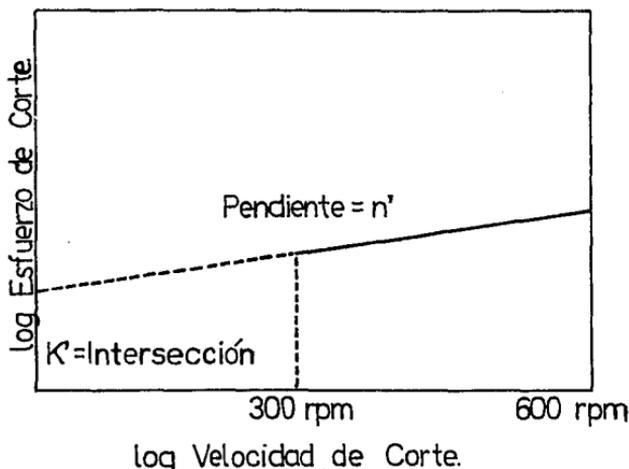


Fig. II-11. Relación de la velocidad de corte y esfuerzo de corte de la fuerza de flujo de los fluidos en escala logarítmica.

●II.5.3.2.2. Dependientes del Tiempo.⁶

Son aquellos que exhiben un comportamiento no lineal dependiendo del tiempo para un valor constante del esfuerzo cortante.

A) Tixotrópicos.⁶

La Tixotropía se puede definir como: "el fenómeno exhibido por algunos geles que se hacen fluidos con el movimiento, siendo este cambio reversible". Los fluidos Tixotrópicos tienen una estructura interna que aumenta su resistencia al esfuerzo cortante (gelatinosidad) mientras se encuentran en reposo. Las ecuaciones para los fluidos Plásticos de Bingham y la Ley de Potencias pueden ser utilizadas para el comportamiento del fluido Tixotrópico una vez que los efectos de la estructura gel ha desaparecido.

B) Reopécticos.⁶

Estos fluidos, al contrario de los fluidos Tixotrópicos, tienden a aumentar los esfuerzos estructurados (arriba de un límite) bajo un valor de velocidad de corte. Una característica de éstos es el incremento del esfuerzo cortante con respecto al tiempo, a una velocidad de corte constante. (Ver fig. II-12)

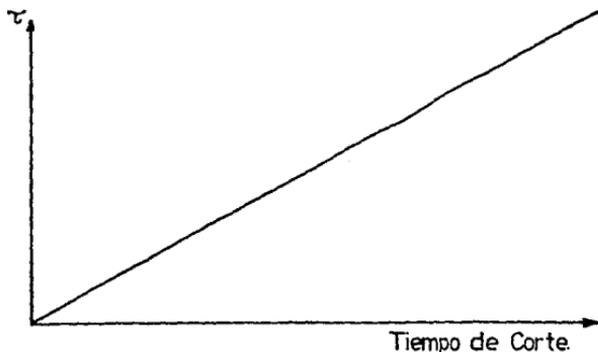


Fig. II-12. En un fluido Reopéctico el esfuerzo cortante aumenta con el tiempo cuando el fluido está sujeto a una velocidad de corte constante.

C) Viscoelásticos.⁶

Son aquellos cuyas propiedades viscosas muestran cierto grado de elasticidad, tienden a producir elongaciones cuando están sujetos a altos valores de velocidad de corte y a regresar a su condición inicial cuando dichos valores descienden a su nivel normal.

D) Complejos.⁶

Son aquellos que muestran en su comportamiento más de un tipo de los demás fluidos, es decir, fluidos que bajo condiciones variables de valor de velocidad de corte, temperatura, presión y tiempo muestran propiedades tixotrópicas, viscoelásticas y también se comportan como fluidos Plásticos de Bingham y Pseudoplásticos.

Tomando en cuenta lo expresado anteriormente, la Ley de Newton para fluidos Viscosos (dependientes del tiempo) se puede expresar de la siguiente manera:⁴

$$[\tau] = -\mu \frac{[\nabla \vec{u} + {}^t(\nabla \vec{u})]}{2} + \left(\frac{2}{3}\mu - \mu_k\right) (\nabla \vec{u})I \quad \dots (II-40)$$

El coeficiente μ es la viscosidad del fluido y μ_k es un término adicional llamado viscosidad dilatacional. Para fluidos incompresibles, el segundo término en el lado derecho de la Ec. II-40 es igual a cero (Ver Ec. II-39); por lo tanto, para fluidos incompresibles:⁴

$$\tau = -\mu \frac{[\nabla \vec{u} + {}^t(\nabla \vec{u})]}{2} = -\mu \dot{\gamma} \quad \dots (II-41)$$

donde $\dot{\gamma}$ es el tensor de la velocidad de corte.

Para los modelos de fractura en dos dimensiones el flujo se supone en una dirección, por ejemplo en la dirección "x"; por lo tanto, la velocidad u es de la siguiente forma:⁴

$$u_x = u_x(y) \quad , \quad \mu_y = 0 \quad \text{y} \quad \mu_z = 0 \quad \dots (II-42)$$

El esfuerzo de corte está definido para un componente (τ_{xy}) y es igual a $1/2 \, du_x/dy$, mientras la velocidad de deformación está dada por un escalar, $\dot{\gamma}_{xy}$, expresado de la siguiente manera:¹

$$\tau_{xy} = - \mu \dot{\gamma}_{xy} \quad \dots (II-43)$$

Para un fluido Newtoniano, juntando las dos primeras Relaciones de Conservación con las Leyes Constitutivas se obtiene la Ley Navier-Stokes expresada de la siguiente forma:¹

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} \right] = - \nabla P + \rho \vec{g} + \mu \nabla^2 \vec{u} \quad \dots (II-44)$$

donde $\rho \vec{g}$ es la fuerza gravitacional del cuerpo.

La Ley de Newton representa las relaciones simples *reológicas* aplicadas para algunos fluidos. Los fluidos No-Newtonianos (los cuales incluyen algunos polímeros y cementos) son incompresibles y presentan un comportamiento similar a un fluido Newtoniano simple, pero con una velocidad de corte dependiente de la viscosidad como se expresa a continuación:

$$\tau = - \mu \dot{\gamma} \quad \dots (II-45)$$

Donde μ depende de los componentes del tensor velocidad de corte, $\dot{\gamma}$. Diferentes modelos han sido desarrollados para describir el comportamiento de los fluidos fracturantes. Los modelos más comunes para flujo en una dirección son expresados a continuación.

● Modelo de la Ley de Potencias.¹

La viscosidad es una función de La Ley de Potencias de la velocidad de corte expresada en la siguiente forma:

$$\mu = K \dot{\gamma}^{n-1} \quad (II-46)$$

•Fluidos Plásticos de Bingham.¹

Estos fluidos presentan un punto de cedencia, τ_{yp} .

$$\mu = \mu_0 + \frac{\tau_{yp}}{\dot{\gamma}} \quad \text{para } \tau \geq \tau_{yp} \quad \dots(\text{II-47})$$

y

$$\mu = 0 \quad \text{para } \tau \leq \tau_{yp} \quad \dots(\text{II-48})$$

C A P I T U L O I I I .

MODELOS DE PROPAGACION DE FRACTURAS.

El modelado de los procesos de Estimulación es una labor compleja y ésta incluye todos los componentes previamente descritos. Un fluido inyectado en la formación modifica la distribución de presión y la del esfuerzo en la formación, creando condiciones favorables para la propagación de una fractura, que consiste de un angosto y largo canal, en el cual el fluido inyectado fluye; éste último intercambia calor con la formación y una parte fluye dentro de la formación no fracturada (Pérdida).⁴

El fluido inyectado, debido a las partículas del sustentante, es multifásico y finalmente, puede ocurrir una reacción química entre el fluido (si éste es un ácido) y la formación. La *fig. III-1* muestra la interacción entre los diferentes componentes del modelado.⁴

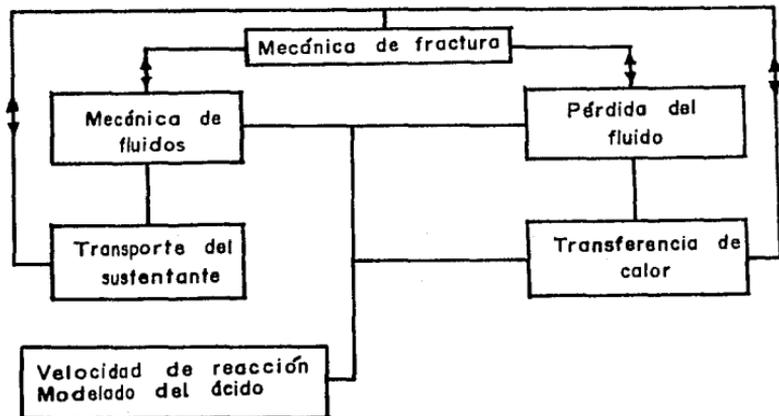


Figura III-1. Unión entre los diferentes componentes en un modelo de propagación de fractura.

III.1. Mecánica de Fractura Linealmente Elástica (LEFM).¹

Los esfuerzos en la formación, debidos a la deformación de una fractura hidráulicamente inducida, son relativamente pequeños. Como resultado, la formación puede suponerse que se deforma de una manera linealmente elástica. Una fractura en un medio linealmente elástico puede considerarse como una idealización del problema de la elipse (o elipsoide) con su excentricidad tendiendo a cero.

III.1.1. Factores de Intensidad de Esfuerzos.¹

Para una elipse uniformemente presurizada con semiejes a y b , en un campo de esfuerzo uniforme, puede demostrarse que cuando la relación de ejes tiende a cero ($b/a \rightarrow 0$), los esfuerzos cerca del extremo de la fractura llegan a presentarse en un sólo sentido, esto es:

$$\sigma_{xx} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \right) \dots \text{(III-1)}$$

$$\sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \right) \dots \text{(III-2)}$$

y

$$\tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \dots \text{(III-3)}$$

donde r es la distancia a partir del extremo de la fractura y θ es el ángulo de los ejes de la fractura.

En la vecindad del extremo de la fractura la velocidad de propagación de la fractura está dada por:

$$u_x = \frac{K_I}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} (1 - 2\nu + \sin^2 \frac{\theta}{2}) \quad \dots \text{(III-4)}$$

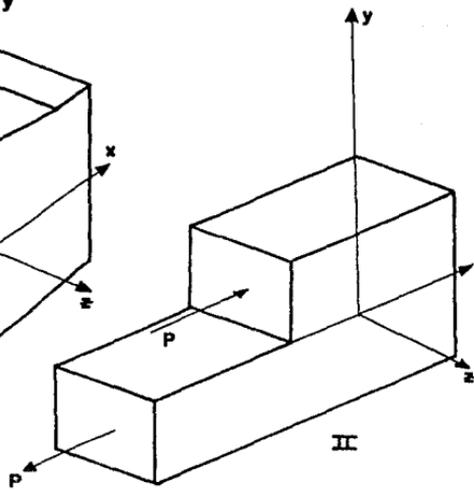
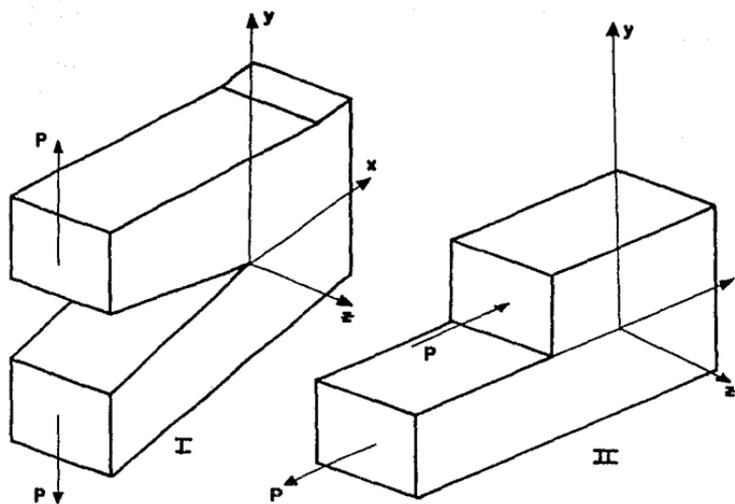
$$u_y = \frac{K_I}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} (1 - 2\nu + \cos^2 \frac{\theta}{2}) \quad \dots \text{(III-5)}$$

donde G es el módulo de corte y ν la relación de Poisson.

El factor K_I es llamado un *factor de intensidad de esfuerzo* para la forma de apertura y caracteriza la magnitud de los esfuerzos cerca del extremo de la fractura; este factor depende de la geometría de la fractura, del medio circundante y de las cargas aplicadas.

Más generalmente para un cuerpo arbitrariamente homogéneo tridimensional, tres formas fundamentales de cargas pueden ser definidas para una fractura (ver fig. III-2):

- Forma I o de apertura, corresponde a una tensión normal en el frente de la fractura.
- Forma II o de deslizamiento, asociado con un corte transversal (con un factor K_{II}).
- Forma III o de torsión, para un corte longitudinal (K_{III}).



- I. Forma de apertura.
- II. Forma de Desplazamiento.
- III. Forma de Torsión.

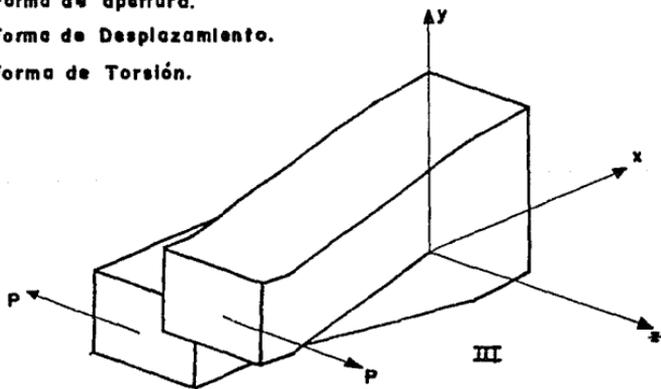


Figura III-2. Formas Fundamentales de Fracturamiento

En general, únicamente la Forma I o de apertura es aplicada para un plano de fractura creado por el fluido inyectado. Sin embargo, un fracturamiento complejo fuera del plano o cerca de las fisuras naturales puede conducir a las otras formas de fracturamiento.

III-1-2.- Energía Superficial.⁴

Dado un sistema de esfuerzos, es importante determinar si una fractura se iniciará y después se propagará en cualquier dirección y a partir de cualquier punto en la fractura creada. Griffith definió la energía superficial de una fractura, la cual puede ser asociada a la fuerza de cohesión atómica en el material.

Cuando una fractura se desarrolla es necesario considerar diferentes tipos de variación de energía, por ejemplo:

- ΔE_p : es la variación de energía potencial a partir de la superficie de desplazamiento.
- ΔE_e : es la variación en presión o energía elástica contenida en el cuerpo (ΔPV).
- ΔE_f : es la variación de energía superficial ($\gamma \Delta A$) asociada con un incremento ΔA del área de fractura; γ es la energía superficial específica.

El criterio de Griffith enuncia que se está en equilibrio si la energía superficial está relacionada con la variación de la energía interna U a través de la siguiente expresión:

$$2\gamma = - \frac{\partial U}{\partial A} \quad \dots \text{(III-6)}$$

En el caso de una fractura bajo una carga uniforme, la carga crítica σ_c y la energía superficial están relacionadas a través de:

$$\sigma_c = \left[\frac{2 E \gamma}{\pi x_f (1 - \nu^2)} \right]^{1/2} \quad \dots \text{(III-7)}$$

donde x_f es la mitad de la longitud de la fractura, E y ν son las constantes elásticas.

Otra noción importante es el factor de intensidad de esfuerzo crítico:

"Bajo una forma dada la condición para que una fractura este en equilibrio requiere que el factor de intensidad de esfuerzo asociado con la carga sea igual a un valor crítico K_{Ic} , el cual se considera como una propiedad del material y también es llamada la resistencia a la fractura".¹

Para la fractura presurizada uniformemente una relación simple puede ser desarrollada entre la energía superficial y K_{Ic} :

$$\gamma = \frac{(1 - \nu^2) K_{Ic}^2}{E} \quad \dots \text{(III-8)}$$

De esta manera, para un comportamiento linealmente elástico, esta última expresión indica que el criterio de la energía superficial γ y el factor de intensidad de esfuerzo crítico K_{Ic} están relacionados y juntos conforman un criterio unificado para la propagación.

III.2. Criterios de Propagación de la Fractura.¹

Se consideran dos tipos generales de criterios de propagación de fracturas para describir las condiciones bajo las cuales éstas se desarrollan:

- El Criterio Local (extremo de la fractura) que relaciona magnitudes definidas cerca del extremo de la fractura (factores de intensidad de esfuerzo).

● Los Criterios Globales los cuales están expresados como funciones de la energía del sólido.

Para una forma de fractura mezclada, fueron definidos tres criterios en la literatura:

● Máximo Esfuerzo Circunferencial.

Señalado primero por Erdogan y Sih, éste es un criterio local y establece que una fractura se desarrollará en una dirección normal al mínimo esfuerzo principal. Bajo las siguientes tres condiciones:

- La Fractura inicia extendiéndose cerca del extremo de la misma.
- La extensión ocurre en un plano normal a la dirección de la mayor tensión.
- La extensión se inicia cuando el máximo esfuerzo tangencial alcanza una constante crítica, σ_{ec} .

De lo anterior los esfuerzos son en un solo sentido en el extremo de la fractura, aplicando un criterio tal que los valores deben ser considerados a una distancia δ_0 a partir del extremo de la fractura la cual otra vez está siendo considerada como constante.

● Velocidad Mínima de la Energía del Esfuerzo.

Este principio introducido por Sih considera la velocidad mínima de energía del esfuerzo definida en un punto a una distancia δ_0 a partir del extremo de la fractura como:

$$S_r = \delta_0 \frac{\partial \nabla U}{\partial v} \quad \dots (III-9)$$

De acuerdo a este principio, la fractura debe extenderse:

- En la dirección a lo largo de la cual S_r es mínima.
- Cuando S_r alcanza un valor crítico el cual depende del material.

• Velocidad Máxima de Liberación de la Energía del Esfuerzo.

El anterior criterio, el cual fue discutido extensamente por Hussain y colaboradores considera una cantidad global (velocidad máxima de liberación de la energía del esfuerzo) y supone que la fractura debe:

- Crecer en la dirección para la cual la velocidad máxima de liberación de la energía del esfuerzo es máxima.
- Iniciar extendiéndose cuando la velocidad máxima de liberación de la energía del esfuerzo alcanza un valor crítico.

Debido a los problemas asociados con experimentos de "forma mezclada", se ha determinado que los tres criterios previos no han sido universalmente aceptados como válidos.

De una manera similar a los criterios de plasticidad, se puede definir una superficie de propagación como sigue:

$$F_K (K_I, K_{II}, K_{III}, K_{Ic}, K_{IIc}, K_{IIIc}, \dots) = 0 \quad \dots (III-10)$$

El problema principal asociado con tal formulación es que la precisión de la función, F_K , depende del tipo del material.

En el caso de una propagación de fractura en un solo plano ya sea el factor de intensidad crítica, K_{Ic} , o el valor de la energía superficial, γ , fijan las bases para el desarrollo de la fractura.

III.3. Consideraciones Generales para un Modelo de Propagación de Fractura.¹

Al simular la propagación de una fractura inducida hidráulicamente, se deben considerar fundamentalmente tres tipos de relaciones (excluyendo transferencia de calor o cualquier reacción química), la formulación de la Mecánica de Fractura Linealmente Elástica (LEFM), el Flujo del Fluido Fracturante y la Ecuación de Continuidad.¹

La mayoría de los Modelos de Fracturamiento Hidráulico consideran que la fractura se propaga en la Forma I, ver fig. III-2, aunque los Modelos Tridimensionales tienen la capacidad para simular las otras formas.

III.3.1. Problemática de la Mecánica de la Fractura Linealmente Elástica.¹

Dado un estado de esfuerzos (o presiones) inducidos por el fluido en la fractura y un conjunto de condiciones de frontera (esfuerzos confinados) se pueden calcular los desplazamientos (o la amplitud de la fractura). Debido a la singularidad del esfuerzo cerca de la fractura, las técnicas clásicas en la elasticidad tienen varias limitaciones y Barsoum usó elementos especiales en el extremo de la fractura para mejorar la exactitud del cálculo de los factores de intensidad de esfuerzo.

Algunas versiones de técnicas de Integrales de Frontera fueron más populares porque solucionaban el problema solamente en esta región (reduciéndose la dimensión del problema), llegando a una simple determinación de los factores de intensidad de esfuerzo. Su principal limitación radica en la dificultad de implementarse en medios no-homóneos (con módulos de elasticidad variables).

El caso más sencillo es una superficie elíptica uniformemente presurizada con semi ejes a y b (problema de Sneddon), la fractura tiene una geometría elíptica, el problema de presión uniforme corresponde a una situación donde no hay caída de presión ni flujo de fluido. La solución para la distribución de la amplitud de la fractura está dada como:

$$W(x) = \frac{4(1-\nu^2)}{E} \frac{b \Delta P}{E(k)} \left[1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right]^{1/2} \dots \text{(III-11)}$$

donde $E(k)$ es la integral elíptica completa del extremo estudiado, según Abramowitz y Stegun, $k = (1 - b^2/a^2)^{1/2}$ y ΔP es la diferencia entre la presión aplicada y el esfuerzo confinante.

En realidad se puede ver que para un medio isotrópico solamente es necesaria una combinación del Módulo de Young y Relación de Poisson, es decir, $E / (1 - \nu^2)$, la cual es conocida como el Módulo del esfuerzo plano, E' .

Otro punto importante es que para un medio homogéneo, el valor preciso de la relación de Poisson en el rango normal de rocas no afecta significativamente la solución.

Diferentes casos pueden ser desarrollados partiendo de la solución de Sneddon.

- $a < b$ (fracturas de Griffith)

$$W(x) = 4 \frac{\Delta P}{E'} \sqrt{b^2 - x^2} \quad \dots \text{(III-12)}$$

- $a = b = R$ (fractura circular o forma de penny)

$$W = 8 \frac{\Delta P}{E'} \sqrt{R^2 - r^2} \quad \dots \text{(III-13)}$$

III.3.2. Ecuaciones de Flujo del Fluido Fracturante.¹

La determinación de la distribución de presión en la fractura, debida al flujo de fluido, es necesaria para determinar la longitud de la fractura. En lugar de la solución de las ecuaciones generales de Navier-Stokes, las cuales pueden requerir un tiempo de cálculo considerable, la fractura es discretizada en una serie de líneas paralelas (o superficies) y el flujo es considerado quasi-estático.

La relación entre los ritmos de flujo y las caídas de presión en el caso de una fractura plana puede ser expresada como:

$$Q_x = - \frac{k_f}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \quad \dots \text{(III-14)}$$

$$Q_y = - \frac{k_f}{\mu} \frac{\partial P}{\partial y} \quad \dots \text{(III-15)}$$

donde k_f es proporcional al cuadrado de la amplitud de la fractura local ($k_f = w^2/12$) y puede ser interpretada como el canal altamente permeable y μ es la viscosidad efectiva del fluido en el canal fracturado.

CAPITULO IV.

MODELOS

BIDIMENSIONALES.

El primer Modelo para Simular la Propagación de Fracturas fue desarrollado por Khristianovitch y Zheltov. Esta formulación Bidimensional está basada sobre la consideración de esfuerzo plano y pueden ser distinguidos dos tipos:⁴

- Condición de esfuerzo plano en planos horizontales.
- Condición de esfuerzo plano en planos verticales.

Los Modelos Bidimensionales aparecen por la necesidad de obtener soluciones aproximadas a problemas complejos que involucran una interacción mecánica sólido/fluido. Dichos modelos requieren que la frontera de la fractura en el plano de propagación especifique su avance.⁷

En este capítulo se hace mención de los Modelos de Propagación de Fractura que suponen:

- Extensión Lineal.
- Extensión Radial.

Siendo los primeros los más ampliamente utilizados.⁷

IV.1.- Condiciones de Esfuerzos Planos.⁴

Si se considera a la zona productora como un medio elástico infinito, y que cada sección horizontal se deforma independientemente de las otras sin deformación vertical, entonces la condición de esfuerzo plano horizontal prevalece. La deformación correspondiente a los componentes z del tensor ϵ , se desprecian, aunque los esfuerzos en las tres direcciones x , y y z siguen actuando; quedando los componentes del tensor en las siguientes direcciones:

$$\epsilon_{xx} = \frac{1 + \nu}{E} \left[(1 - \nu) \sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy} \right] \quad \dots (IV-1)$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{1 + \nu}{E} \left[(1 - \nu) \sigma_{yy} - \nu \sigma_{xx} \right] \quad \dots (IV-2)$$

$$\epsilon_{xy} = \frac{1 + \nu}{E} \tau_{xy} \quad \dots (IV-3)$$

Y

$$\epsilon_{xz} = \epsilon_{yz} = \epsilon_{zx} = 0 \quad \dots (IV-4)$$

Para la geometría del plano horizontal de esfuerzos, la zona de fractura debe deformarse independientemente del estrato superior e inferior. Esto podría ocurrir para un desplazamiento libre sobre estos estratos y representar aproximadamente una fractura con una penetración horizontal mucho menor que la vertical. La forma de la fractura no deberá depender de la posición vertical.

IV.1.1. Principios Mecánicos de Fracturas Inducidas Hidráulicamente.^{7,8}

Las teorías para la amplitud de la fractura están basadas en la suposición de que la superficie de la fractura se deforma de una manera linealmente elástica. Para las condiciones de un esfuerzo plano, Englan y Green desarrollaron una ecuación para la amplitud de la fractura que es la siguiente:

$$W(x) = \frac{4(1-\nu)L}{\pi G} \left[\int_{f_L}^1 \frac{f_2 df_2}{(f_2^2 - f_L^2)^{1/2}} \int_0^{f_2} \frac{P(f_1) df_1}{(f_2^2 - f_1^2)^{1/2}} - \frac{\pi}{2} S (1 - f_L^2)^{1/2} \right] \quad \dots (IV-5)$$

donde:

$f_L = x / L$, representa la fracción de la extensión de la fractura, L .

P = presión local del fluido.

W = amplitud de la fractura.

G = módulo de corte.

ν = relación de Poisson.

L = longitud de la fractura. (un ala)

f_1 y f_2 = fracciones de la extensión de la fractura.

S = esfuerzo tectónico normal al plano de fractura.

La distribución de presión $\Delta P(f_1) = P(f_1) - S(f_L)$ sobre la fractura es la diferencia entre la presión hidráulica del fluido, P , en la fractura y el componente normal del esfuerzo tectónico in-situ, S , de la formación antes del fracturamiento y perpendicular a las paredes de la fractura; esto es, el mínimo esfuerzo horizontal. Esta complicada integral doble da mucha información sobre la amplitud de la fractura y la condición de equilibrio de la misma.⁷

El caso más simple es una distribución de carga uniforme, $\Delta P =$ constante, sobre la longitud total de la fractura, $2L$, esto es:

$$W(x) = \frac{2(1-\nu)L\Delta P}{G} \sqrt{(1-f_L^2)} \quad \dots \text{(IV-6)}$$

El proceso de Fracturamiento Hidráulico en un material frágil tal como la roca del yacimiento requiere una condición de frontera particular en el extremo de la fractura. Esta condición, primeramente sugerida por Zheltov y Khristianovitch, y más tarde detallada por Barenblatt, establece que en el caso de una fractura en equilibrio en movimiento propagándose en un sólido frágil, la distribución normal de la presión ejercida por el fluido fracturante sobre las paredes de la fractura debe ser de tal forma que las caras de la misma cierren suavemente en las orillas. Dicha condición implica que:⁸

$$\left[\frac{\partial w}{\partial f_L} \right]_{f_L=1} = 0$$

Barenblatt prevé que ésto asegura que el componente de esfuerzo normal en el extremo de la fractura es finito e igual a la resistencia a la tensión de la roca. La resistencia a la tensión puede ser considerada que es de influencia despreciable para fracturas de grandes dimensiones en el rango práctico de presiones de sobrecarga. Sustituyendo la condición de frontera anterior en la Ec. IV-5 se tiene lo siguiente:⁶

cambiando las variables en la Ec. IV-5 como sigue. -

$$f_L = f_1 = 0 ; \quad f_1 = f_L ; \quad f_2 = 1$$

$$W(x) = \frac{4(1-\nu)L}{\pi G} \left[\int_0^1 \frac{df_2}{(1^2 - 0^2)^{1/2}} \int_0^1 \frac{P(f_L)df_L}{(1^2 - f_L^2)^{1/2}} - \frac{\pi}{2} S (1-0)^{1/2} \right] \quad \dots (IV-5a)$$

de la condición de Barenblatt $dW/dL = 0$; entonces

$$\frac{dW}{dL} = \frac{4(1-\nu)}{\pi G} \left[\int_0^1 \frac{P(f_L)df_L}{(1^2 - f_L^2)^{1/2}} - \frac{\pi}{2} S \right] = 0$$

Finalmente se obtiene:

$$\int_0^1 \frac{P(f_L)df_L}{(1 - f_L^2)^{1/2}} = \frac{\pi}{2} S \quad \dots (IV-7)$$

Tomando en cuenta la resistencia a la tensión, la Ec. IV-7 puede ser escrita de la siguiente manera:

$$\int_0^1 \frac{P(f_L)df_L}{(1 - f_L^2)^{1/2}} = \frac{\pi}{2} S + \frac{K}{(2L)^{1/2}} \quad \dots (IV-7a)$$

donde: $K = \sqrt{\frac{\pi E \gamma}{1 - \nu^2}}$ = Módulo de Cohesión de Barenblatt.

En la expresión anterior E es el Módulo de Young y γ es la Energía Superficial Específica. Geertsma y de Klerk suponen que:⁸

$$2L \geq \frac{4 K^2}{\pi^2 S^2}$$

K también se puede relacionar con el factor de intensidad de esfuerzos crítico, K_{Ic} , a través de la ecuación que propone Irwin:⁷

$$K_{Ic} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} K \quad \dots (IV-8)$$

Trabajando la condición estática de equilibrio para lo cual se presenta una función seccionada para las siguientes condiciones de carga, prevaleciendo como sigue:

$$\Delta P_1 \quad \text{para} \quad 0 < \lambda < \lambda_0$$

y

$$\Delta P_2 \quad \text{para} \quad \lambda_0 < \lambda < 1$$

Ajustando las expresiones anteriores a la Ecuación de Barenblatt donde se tiene implícita dicha condición se obtiene:

$$\Delta P_1 \int_0^f \frac{d\lambda_0}{\sqrt{(1 - \lambda^2)}} + \Delta P_2 \int_f^1 \frac{d\lambda_0}{\sqrt{(1 - \lambda^2)}} = \frac{K}{\sqrt{2L}} = \frac{\pi K_{Ic}}{2\sqrt{L}}$$

Resolviendo las integrales por sustitución trigonométrica se obtiene:

$$\Delta P_1 (\text{ang sen } f) + \Delta P_2 (\text{ang sen } 1 - \text{ang sen } f) = \frac{\pi K_{Ic}}{2\sqrt{L}}$$

Desarrollando y despejando se llega a:

$$\Delta P_1 = \frac{\left[\frac{K_{1c}}{\sqrt{L}} - \Delta P_2 \right]}{\frac{2}{\pi} (\text{ang sen } f)} + \Delta P_2$$

IV.2. Modelos Bidimensionales.⁷

Los Modelos Bidimensionales describen la Propagación de Fracturas Inducidas Hidráulicamente; se incluyen dos formas de propagación, rectangular y radial. La mayoría de las fracturas inducidas hidráulicamente se propagan en un plano vertical, debido a la inyección de un Fluido Fracturante sobre un intervalo considerable.

Los modelos conocidos más ampliamente son los desarrollados por Perkins y Kern (Modelo PKN^o) y por Geertsma de Klerk (Modelo GDK^o). Una importante consideración en el Modelo GDK es el trabajo realizado por Zheltov y Khristianovitch¹⁰, quienes introdujeron el concepto de equilibrio en movimiento; es decir, la propagación de una fractura moviéndose lentamente como resultado de una acción hidráulica. Nordgren¹¹ se basa considerablemente en el trabajo desarrollado por Perkins y Kern y con esto da lugar al modelo PKN.

IV.2.1. Modelo PKN.^{7, o}

IV.2.1.1. Sin Considerar Pérdida de Fluido.^{7, o}

La propagación Lineal de una Fractura Vertical, según este Modelo (Ver fig. IV-1), considera las siguientes suposiciones:

- 1) La fractura tiene una altura constante, h_f , independiente de la longitud de la fractura.
- 2) La presión del Fluido Fracturante, P , es constante en las secciones transversales verticales y perpendiculares a la dirección de la propagación.

- 3) La dureza de la roca del yacimiento, su resistencia a la deformación bajo la acción de P , prevalece en el plano vertical. Es decir, cada sección transversal vertical se deforma individualmente y no es afectada por los estratos circundantes.
- 4) De acuerdo a lo expuesto anteriormente, la Ec. IV-6 relaciona la altura, h_f , la presión del fluido, P , y la amplitud local de la fractura. Las secciones verticales que se obtienen tienen una forma elíptica con una amplitud máxima en el centro.

Según la última consideración se puede escribir la siguiente ecuación:

$$W(x, t) = \frac{(1 - \nu) h_f (P - S)}{G} \quad \dots (IV-9)$$

- 5) El gradiente de presión del fluido en la propagación o en la dirección "x" está determinado por la resistencia al flujo en un angosto canal de forma elíptica. Para el comportamiento de flujo Newtoniano (con viscosidad, μ , y gasto, Q), se puede escribir la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial(P - S)}{\partial x} = - \frac{64}{\pi} \frac{Q \mu}{W^3 h_f} \quad \dots (IV-10)$$

- 6) La presión del fluido se abate desde el pozo hasta el extremo de la fractura o hasta que alcanza los límites, $x = L$ y $P = S$, para una razón no especificada.

La teoría original desprecia la influencia de la velocidad de crecimiento de la amplitud de la fractura en función del gasto de flujo; esto es, se supone que en ausencia de pérdida de fluido:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

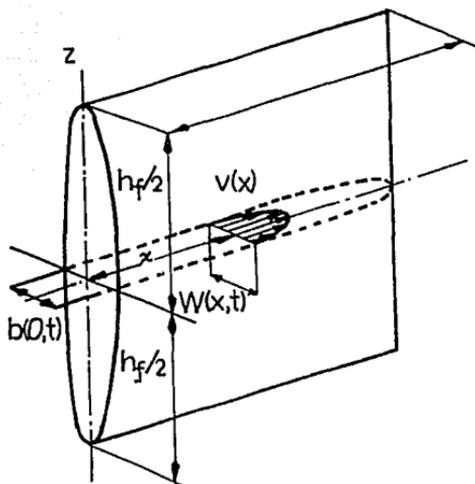


Figura IV-1. Representación Esquemática de una Fractura propagándose linealmente con flujo laminar de acuerdo con Perkins-Kern.

Con la anterior suposición es razonable el hecho de que la pérdida de fluido domine la Ecuación de Balance de Materia creando con esto un error numérico notable en el caso de una pequeña pérdida de fluido. Nordgren corrigió este efecto de la velocidad de crecimiento y reescribe la Ecuación de Continuidad de la siguiente forma:⁷

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = - \frac{\pi h_f}{4} \frac{\partial w}{\partial t} \quad \dots (IV-11)$$

La eliminación de $(P - S) = \Delta P$ y Q desde la Ec. IV-9, la Ec. IV-10 y la Ec. IV-11 se llega a una ecuación diferencial parcial no-lineal en términos de $w(x, t)$, la cual es:⁷

$$\frac{G}{64 (1 - \nu) h_f \mu} \frac{\partial^2 w^2}{\partial x^2} - \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \quad \dots (IV-12)$$

sujeta a la condición inicial:

$$W(x, 0) = 0 \quad \text{para } t = 0$$

y las condiciones de frontera:

$$W(x, t) = 0 \quad \text{para } x > L(t).$$

$$Q(0, t) = Q_0 \quad \text{para un ala de la fractura.}$$

La amplitud de la fractura entonces queda:

$$W(x, t) = W(x, 0) (1 - x/L)^{1/4}$$

El volumen de la fractura entonces queda:

$$V = \frac{\pi}{5} L h_f W(0, t) = Q_0 t.$$

Perkins y Kern trabajaron también para encontrar las amplitudes de las fracturas para diferentes tipos de flujo (laminar y turbulento). (Ver APENDICES B y C).

● Amplitud de una fractura resultante del flujo laminar de un fluido Newtoniano:

$$W(pg) = 0.38 \left[\frac{Q(\text{bl/min}) \mu(\text{cp}) L(\text{pie})}{E(\text{psi})} \right]^{1/4} \dots (\text{IV-13})$$

● Amplitud de una fractura resultante del flujo turbulento de un fluido Newtoniano:

$$W(pg) = 0.6 \left[\frac{Q^2(\text{bl/min}) S_p Gr L(\text{pie})}{E(\text{psi}) h(\text{pie})} \right]^{1/4} \dots (\text{IV-14})$$

● Amplitud de una fractura resultante del flujo laminar de un fluido No-Newtoniano:

$$W = 12 \left[\left(\frac{2^7}{5\pi} \right) (n'+1) \left(\frac{2n'+1}{n'} \right)^{n'} \right. \\ \left. \left(\frac{0.9775}{144} \right) \left(\frac{5.61}{60} \right)^{n'} \right]^{\frac{1}{2n'+2}} \left[\frac{Q^{n'} k' L h^{1-n'}}{E} \right]^{\frac{1}{2n'+2}} \dots (\text{IV-15})$$

IV.2.1.2. Considerando la Pérdida de Fluido.^{7P}

Perkins y Kern no consideraron en su trabajo original la pérdida de fluido en la formación, Nordgren da la solución a este problema que es más real en la práctica. Manejando la Ecuación de Continuidad Particular para esta situación, se tiene:⁷

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\pi h_f}{4} \frac{\partial W}{\partial t} + Q_L = 0 \quad \dots (IV-16)$$

El gasto de pérdida Q_L es considerado como la pérdida por unidad de longitud de fractura, el cual está dado:⁷

$$Q_L = \frac{2 h_f C}{\sqrt{L - \tau(x)}} \quad \dots (IV-17)$$

Desarrollando la Ec. IV-12 se llega a:

$$\frac{G}{64 (1 - \nu) h_f \mu} \frac{\partial^2 W^4}{\partial x^2} - \frac{\partial W}{\partial t} - \frac{B C}{\pi \sqrt{L - \tau(x)}} = 0 \quad \dots (IV-18)$$

sujeta a:

condición inicial.-	$W(x, 0) = 0$
condiciones de frontera.-	$W(x, t) = 0 \quad \text{para } x > L$

y

$$-\frac{\partial W^4(0, t)}{\partial x} = \frac{256 \mu (1 - \nu) Q}{\pi G} \quad \text{para una sola ala de la fractura.}$$

Este conjunto de ecuaciones puede solucionarse numéricamente. Porque el Modelo PK parece ser el más aplicable para tratamientos de larga duración, la aproximación queda:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + Q_L = 0$$

la cual parece apropiada bajo estas circunstancias. Así, se llega:

$$L \int_0^1 \frac{\partial \lambda}{\sqrt{t - \tau(x)}} = \frac{Q_0}{2 h_f C}$$

donde τ depende de $\lambda = x/L$ tal que $\tau[L(t')] = t'$ para $0 < t' < t$.

La solución anterior es similar a la obtenida por Carter, esto es

$$L \rightarrow \frac{1}{\pi} \frac{Q_0 \sqrt{t'}}{h_f C} \quad \text{y} \quad \frac{Q(\lambda)}{Q_0} = 1 - \frac{2}{\pi} \text{ang sen } (\lambda).$$

Esta es una buena aproximación para:

$$h_f L C^2 > Q_0 W(0).$$

Por esta condición se tiene:

$$\Delta P^4(0) = \frac{4^4}{\pi} \frac{\mu G^3 Q_0 L}{h_f^4 (1-\nu)^3} \int_0^1 (1 - \frac{2}{\pi} \text{ang sen } (\lambda)) d\lambda.$$

Finalmente se tienen las siguientes ecuaciones:

$$W(0) = 4 \left(\frac{2}{\pi^3} \right)^{1/4} \left[\frac{\mu (1-\nu) Q_0^2}{G h_f C} \right]^{1/4} t^{1/8} \quad \dots (IV-19)$$

$$\Delta P(0) = 4 \left(\frac{2}{\pi^3} \right)^{1/4} \left[\frac{\mu G Q_0^2}{h_f^5 (1-\nu)^3 C} \right]^{1/4} t^{1/8} \quad \dots (IV-20)$$

IV.2.2. Modelo GDK.^{7,8}

IV.2.2.1. Sin Considerar Pérdida de Fluido.^{7,8}

La propagación Lineal de una Fractura Vertical, según este modelo (Ver fig. IV-2), hasta cierto punto representa la contraparte de la teoría del Modelo PK. Por lo tanto, las suposiciones ahora son las siguientes:

- 1) La altura de la fractura es constante, h_f .
- 2) La dureza de la roca de la formación es tomada en cuenta en un plano horizontal únicamente.

- 3) El gradiente de presión del fluido en la dirección de propagación está determinado por la resistencia al flujo en una abertura rectangular angosta de amplitud constante en la dirección vertical:

$$P(0, t) - P(x, t) = P_f - P = \frac{12 \mu Q_o}{h_f} \int_0^x \frac{dx}{w^3(x, t)} \quad \dots (IV-21)$$

Con la condición de equilibrio en movimiento de la fractura, desarrollada por Barenblatt se tiene:

$$\int_0^L \frac{P(x, t) dx}{(L^2 - x^2)^{1/2}} = \frac{\pi}{2} S + \frac{K}{(2L)^{1/2}} \quad \dots (IV-7b)$$

La ecuación anterior es aplicada para una sola ala de la fractura y considerando un gasto de inyección total Q_o .

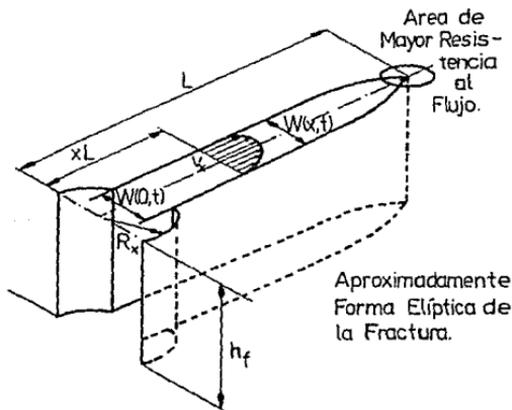


Figura IV-2. Representación esquemática de una fractura propagándose linealmente con flujo laminar de acuerdo al modelo de Geertma-de Klerk.

Zhel'tov y Khristianovitch proponen que la distribución de presión del fluido que satisface la ecuación anterior se puede aproximar por medio de:

$$P_f = P_o \quad \text{para} \quad 0 < \lambda < L_o/L \quad \text{y}$$

$$P_f = 0 \quad \text{para} \quad L_o/L < \lambda < 1.$$

donde $L_o/L = \lambda_o$ se cierra para la unidad. Esta suministra la condición de la longitud de la fractura "hmedecida"; esto es:

$$\lambda_o = L_o/L = \text{sen} \frac{\pi}{2} \left[\frac{S}{P_f} \frac{K_{Ic}}{P_f \sqrt{L}} \right] \quad \dots \text{(IV-22)}$$

La fórmula anterior se utiliza para iniciar el cálculo de la amplitud de la fractura. Esta aproximación es suficientemente buena para prevenir más simplificaciones tales como las realizadas por Daneshy. Además, en la formulación del Modelo GDK se desprecia el factor de intensidad de esfuerzos crítico, K_{Ic} , para L_o/L .

Con la excepción de los alrededores inmediatos del extremo de la fractura, la forma de ésta en el plano horizontal es elíptica con una amplitud máxima en la pared del pozo y expresada a través de la siguiente ecuación:

$$w(0, t) = \frac{2(1-\nu)L(P_f - S)}{G} \quad \dots \text{(IV-23)}$$

(Nota: la ecuación anterior es similar a la Ec. IV-9 de la teoría del Modelo PK, tomando $L = 1/2 h_f$).

Lo que resta es la determinación del nivel de P_f dado por la repentina caída de presión del fluido cerca del extremo de la fractura que cierra en forma de cuña. Una buena aproximación para determinar la resistencia al flujo de fluido en la fractura es:

$$\int_0^{\lambda_o} \frac{w^3(0, t)}{w^3(x, t)} d\lambda \approx \frac{7}{4} (1 - \lambda_o^2)^{-1/2} \quad \dots \text{(IV-24)}$$

Sustituyendo la ecuación anterior en la Ec. IV-21 y considerando además el volumen de la fractura para una sola ala de la misma se llega a:

$$V = h_f L W(0, t) \int_0^t (1 - \lambda^2)^{1/2} d\lambda = \frac{\pi}{4} h_f L W(0, t) = Q_o t \quad \dots (IV-25)$$

finalmente se obtienen las ecuaciones para calcular la amplitud y longitud de la fractura.

$$L(t) = 0.68 \left[\frac{G Q_o^3}{\mu (1 + \nu) h_f^3} \right]^{1/6} t^{2/3} \quad \dots (IV-26)$$

Y

$$W(0, t) = 1.87 \left[\frac{(1 + \nu) \mu Q_o^3}{G h_f^3} \right]^{1/6} t^{1/3} \quad \dots (IV-27)$$

Geertsma y de Klerk trabajaron en la formulación de la máxima amplitud en el origen de una fractura que se propaga linealmente y que tiene una geometría muy cercana a una elipse a lo largo del plano de propagación excepto en el extremo de la fractura.⁸

La ecuación que estos autores desarrollaron es la siguiente:
(VER APENDICE D)

$$W = \sqrt[4]{\frac{84 (1 - \nu)}{\pi} \frac{\mu Q L^2}{G h} \frac{P}{P_v}} \quad \dots (IV-28)$$

IV.2.2.2. Considerando la Pérdida de Fluido.^{7,8}

El modelo original de Geertsma y de Klerk está desarrollado para simular de una mejor manera las condiciones de campo para valores pequeños de α (VER APENDICE E); esto es, bajos coeficientes de pérdida y tiempos pequeños de tratamiento. La Ecuación de Balance de Materia según Carter, incluyendo la pérdida instantánea de fluido queda:

$$\frac{dV}{dt} = Q_o - Q_t - 2V_{sp} h_f \frac{dL}{dt} \quad \dots (IV-29)$$

El volumen de la fractura difiere de la fórmula de Carter debido

a la forma elíptica en las secciones transversales horizontales. Por lo tanto, la ecuación queda:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{4} h_f \left[W(0) \frac{dL}{dt} + L \frac{dW(0)}{dt} \right] = \frac{\pi}{4} h_f \left[W(0) + L \frac{dW(0)}{dL} \right] \frac{dL}{dt} \quad \dots (IV-30)$$

y

$$Q_t = 2 C h_f \int_0^L \frac{dL}{d\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{L-\tau}} \quad \dots (IV-31)$$

Para el Modelo GDK se encontró que:

$$L \frac{dW(0)}{dL} = 1/2 W(0)$$

Haciendo $L = C_1 t^{2/3}$ y $W(0) = C_2 t^{1/3}$, se tienen las siguientes ecuaciones:

$$W(0) = \frac{C_2}{\sqrt{C_1}} L^{1/2} \quad y \quad \frac{dW(0)}{dL} = \frac{1}{2} \frac{C_2}{\sqrt{C_1}} L^{-1/2}$$

donde $C_1 = 0.48$ y $C_2 = 1.32$.

Por lo que se llega a:

$$L \frac{dW(0)}{dL} = \frac{1}{2} \frac{C_2}{\sqrt{C_1}} L^{1/2} = \frac{1}{2} W(0)$$

Reacomodando la Ecuación de Balance de Materia se llega a la siguiente ecuación:

$$\frac{Q_o}{h_f} = \left[\frac{3\pi}{8} W(0, t) + 2 V_{sp} \right] \frac{dL}{dt} + 2 C \int_0^L \frac{dL}{d\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{L-\tau}} \quad \dots (IV-32)$$

Si la amplitud, W , fuese independiente de la longitud de la fractura, L , la solución de la Ec. IV-32 podría ser similar a la que obtuvo Carter. Esta solución puede aún ser usada porque en el producto $W(dL)/dt$, las variaciones en W como funciones del tiempo son mucho más pequeñas que aquellas de dL/dt .

El valor "constante" de W ha sido elegido de tal forma que la solución real para la no pérdida sea conocida. Por lo tanto, $W(0, t)$ en la Ec. IV-32 debe ser sustituido por $2/3 W(0, t_p)$, donde t_p representa el tiempo al cual el bombeo se suspende. Mediante el factor $2/3$ se obtiene la solución aproximada numéricamente igual a la "exacta", para $C = V_{sp} = 0$. Para $W(0, t_p)$ constante la Ec. IV-32 es similar a la obtenida por Carter (VER APENDICE E); por lo que se obtiene:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{Q_o}{h_f} \left[\frac{4}{\pi W(0, t_p) + 8 V_{sp}} \right] e^{\alpha_L^2} \operatorname{erfc} \alpha_L \quad \dots \text{(IV-33)}$$

donde:

$$\alpha_L = \frac{B C \sqrt{\pi t}}{\pi W(0, t_p) + 8 V_{sp}}$$

Integrando la Ec. IV-33 se obtiene: (VER APENDICE D)

$$L = \frac{Q_o}{16 \pi h_f C^2} \left[\pi W(0, t_p) + 8 V_{sp} \right] \left[\frac{2 \alpha_L}{\sqrt{\pi}} - 1 + e^{\alpha_L^2} \operatorname{erfc} \alpha_L \right] \quad \dots \text{(IV-34)}$$

La amplitud para una sola ala de la fractura está dada por:

$$W(0, t_p) = 2.27 \left[\frac{(1 - \nu) \mu Q_o L^2}{G h_f} \right]^{1/4} \quad \dots \text{(IV-35)}$$

IV.2.3. Modelos Radiales.^{1,7}

IV.2.3.1. Sin Considerar Pérdida de Fluido.^{1,7}

Los dos modelos anteriormente vistos consideran la propagación de una fractura vertical con una altura constante. Para formaciones duras (sin barreras), las fracturas verticales se propagan radialmente; por lo que se utilizan algunas de las ecuaciones ya manejadas, si el intervalo de inyección es pequeño comparado con la extensión de la fractura. Nuevamente se emplean las ecuaciones de Continuidad, Elasticidad y de Flujo de Fluido.⁴

En una geometría radial, la amplitud de la fractura $w(r, t)$ está relacionada con la distribución de presión (VER fig. IV-3), según la siguiente ecuación:¹

$$w(R, t) = \frac{8(1-\nu^2)}{\pi E} \int_{r_w}^{R(t)} \frac{r dr}{(R^2 - r^2)^{1/2}} \int_{r/R}^1 \frac{\xi}{(1-\xi^2)^{1/2}} \Delta P(\xi r) d\xi \quad \dots (IV-36)$$

La Ecuación de Continuidad en un sistema de Coordenadas Radiales puede ser escrita como:¹

$$\frac{\partial(w)}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rQ)}{\partial r} + Q_L = Q_L \delta$$

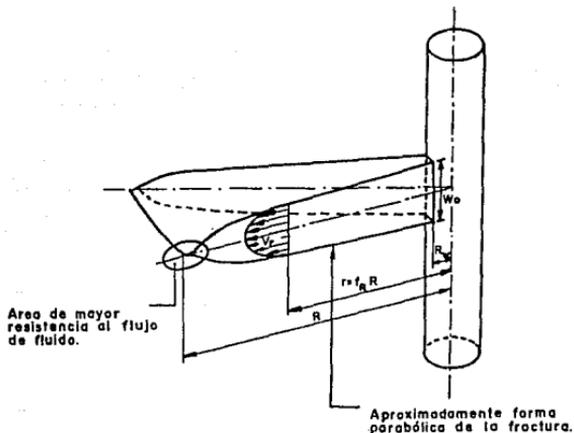


Figura IV-3. Representación esquemática de una fractura propagándose radialmente con flujo laminar.

Para el caso de los modelos radiales, la presión del fluido avanza logarítmicamente en el sentido del flujo a partir de la presión P_0 a la entrada ($r = r_w$) como resultado de la resistencia viscosa al flujo, hasta la presión P al extremo de la fractura ($r = R$), como se expresa a través de la siguiente ecuación:⁷

$$P = P_0 - \frac{6 \mu Q}{\pi W^3} \ln \frac{r}{r_v} \quad \dots (IV-37)$$

En el Modelo PKN, la presión en el extremo de la fractura se supone es igual al esfuerzo tectónico perpendicular al plano de fractura, S . En el Modelo GDK, la presión se reduce a cero cuando no hay pérdida de fluido en $r = R_0$, a un valor cercano a R , que es el radio real de la fractura.⁷

El esfuerzo tectónico siguiendo la teoría de Barenblatt para $r = R$ está dado por:⁷

$$\int_{\rho_v}^1 \frac{\rho F(\rho) d\rho}{\sqrt{(1-\rho^2)}} = S \quad \dots (IV-38)$$

donde: $\rho = r/R$.

Para tener una idea aproximada del valor de $R_0/R = \rho_0$, se puede utilizar la siguiente ecuación:⁷

$$(1 - \rho_0) \approx \frac{G}{10(1-\nu)R} \left(\frac{\mu Q}{S^4} \right)^{1/9} \quad \dots (IV-39)$$

La caída de presión total del fluido en la fractura es mucho mayor en el Modelo GDK que en el PKN. El efecto de palanca es mucho más pronunciado en el Modelo GDK. Como resultado de lo expuesto anteriormente, fracturas más angostas son predecidas por el Modelo Radial de GDK; aunque se encuentra una dependencia similar entre las variables. Por lo que se obtiene:⁷

$$W(0) = C_7 \left[\frac{(1-\nu) \mu Q_0 R}{G} \right]^{1/4} \quad \dots (IV-40)$$

donde para el Modelo PKN se obtiene un valor de $C_7 = 1.4$, mientras que para el Modelo GDK el valor es de 2.15.⁷

En el Modelo PKN, la amplitud promedio de la fractura está dada por:⁷

$$\bar{w} = 2/3 w(0),$$

para el Modelo GDK se tiene:

$$\bar{w} = 8/15 w(0),$$

considerando:

$$w^2 = w_0^2 (1 - R^2)$$

Debido a que $V = Q t$, finalmente las ecuaciones para los Modelos GDK y PKN son respectivamente las siguientes:⁷

$$R = \left[\frac{15 Q t}{8 \pi w(0)} \right]^{1/2} \quad \text{y} \quad R = \left[\frac{3 Q t}{2 \pi w(0)} \right]^{1/2}$$

para el Modelo GDK

para el Modelo PKN

IV.2.3.2. Considerando la Pérdida de Fluido.⁷

Para una fractura propagándose radialmente, la Ec. IV-32 se convierte en:

$$Q_0 = \left[\frac{3\pi}{5} w(0, t) + 2\pi V_{sp} \right] \frac{dR^2}{dt} + 2\pi C \int_0^t \frac{dR^2}{d\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \quad \text{(IV-41)}$$

Para obtener la solución "real", en el caso de no pérdida de fluido, se sustituye $w(0, t)$ en la ecuación anterior por $8/9 w(0, t_p)$ con lo que la solución está dada por:

$$R \frac{dR}{dt} = \frac{Q_0}{4\pi} \left[\frac{15}{4 w(0, t_p) + 15 V_{sp}} \right] e^{\alpha_r^2} \operatorname{erfc} \alpha_r$$

donde:

$$\alpha_r = \frac{15 C \sqrt{\pi t}}{4 w(0, t_p) + 15 V_{sp}}$$

Integrando la expresión anterior se llega a la siguiente ecuación:

$$R^2 = \frac{Q_o}{30 \pi^2 C^2} \left[4 W(0, c_p) + 15 V_{sp} \right] \left\{ \frac{2 \alpha_r}{\sqrt{\pi}} - 1 + e^{\alpha_r^2} \operatorname{erfc} \alpha_r \right\}$$

... (IV-42)

Debido a que la forma de propagación radial de una fractura usualmente ocurre durante las etapas iniciales del crecimiento de la misma, por ejemplo para pequeños valores de tiempo tales como aquellos usados en las pruebas de mini-fracturamiento. Haciendo uso de la Ec. IV-40 se puede obtener una ecuación que relacione R y $W(0)$ de la siguiente manera:

$$W(0) \approx 2.15 \left[\frac{\mu Q_o R (1 - \nu)}{G} \right]^{1/4}$$

CAPITULO V.

MODELOS

TRIDIMENSIONALES.

Los Modelos Pseudo-tridimensionales (P-3D) simulan la propagación vertical y lateral de una fractura vertical. en éstos se desecha la suposición de una altura constante y uniforme. Por lo tanto, el problema debe ser resuelto en el espacio tridimensional, el cual requiere de grandes tiempos de cómputo.¹²

V.1.1. Concepto del Modelo P-3D.¹

El concepto básico del Modelo P-3D es el mismo que el del Modelo PKN; esto es, los planos verticales se deforman independientemente, pero la altura de la fractura depende de la posición a lo largo de la misma y del tiempo. Asociado con el cambio de la altura, existe un componente vertical del flujo del fluido, pero es considerado como secundario con respecto a la dirección principal (ver fig. V-1). La suposición más importante es que la longitud de la fractura es suficientemente más grande que la altura de la misma.

Una fractura vertical puede desarrollarse en un medio estratificado como una función de las propiedades de los estratos, así como de las características del fluido inyectado. Los siguientes factores afectan el crecimiento de la fractura:

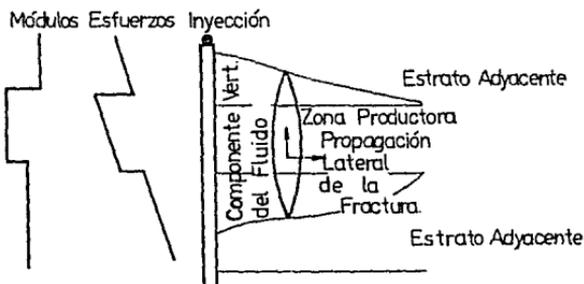


Fig. V-1. Propagación de la Fractura a través de los estratos usando un Modelo P-3D.

● Esfuerzos de Cierre.

Debido a los gradientes de presión existen variaciones lineales en los esfuerzos con la profundidad, los esfuerzos in-situ dependen también de la litología de la formación, de los componentes tectónicos y de la presión de poro. Las variaciones de los esfuerzos son generalmente el principal factor que afecta la extensión vertical de la fractura, debido a que la fractura se propaga en la dirección del mínimo esfuerzo.

● Rigidez.

Los contrastes en la rigidez de los estratos tienen importantes efectos sobre el crecimiento de la altura de la fractura para valores de rigidez mayores de 2000 a 3000 psi/pg^{1/2}.

● Pérdida.

Cuando la altura de la fractura crece dentro de un estrato con una pérdida de fluido relativamente alta, el ritmo de la pérdida adicionalmente retardará la propagación de la fractura a través de la zona.

● Módulos Elásticos.

Los contrastes en los Módulos de Young y las Relaciones de Poisson en los estratos adyacentes generalmente restringen el crecimiento de la altura de la fractura, para que dichas propiedades elásticas detengan el crecimiento de la fractura es necesario que se presenten combinados los factores antes citados (la extensión vertical es restringida si los estratos adyacentes son rígidos).

Como en el caso de los Modelos 2D, la Ecuación de Continuidad puede expresarse para los Modelos P-3D como una función de la posición lateral "x" de la siguiente forma:

$$\frac{\partial (\rho Q)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} [\rho h(x,t) W(x,t)] + 2\rho h Q_L = \rho Q_L \delta$$

... (V-1)

La diferencia primordial de los Modelos 2D con los Modelos P-3D es la estimación del término vertical del flujo de fluido. Si los esfuerzos en los estratos adyacentes son significativamente mayores que en la zona productora esta condición favorece el desarrollo efectivo de una altura de equilibrio debido a una presión prácticamente constante en la sección transversal de la fractura (El término vertical del flujo de fluido es despreciable).

Para la anterior suposición, el caso de tres estratos puede ser generalizado para estratos múltiples con diferentes esfuerzos y módulos para definir la altura y amplitud de la fractura, las cuales dependen de un exceso de presión para ser usada la suposición en un modelo P-3D.

Para el caso más general, Settari y Cleary dan soluciones para el crecimiento de la altura de la fractura, basándose en el flujo del fluido en una sección transversal vertical. Las variaciones de la altura y la amplitud son entonces consideradas para el modelo lateral, con lo cual se obtiene un sistema no-lineal complejo.

V.1.2. Efectos de los Diferentes Parámetros de la Formación en el Flujo Vertical.⁴

Generalmente, el flujo de fluido vertical será gobernado por la formación y las propiedades del fluido. En un sistema homogéneo (sin contraste de esfuerzos), la componente vertical del flujo de fluido puede ser simulada con el Modelo GDK.

La extensión de la altura de la fractura está dada por la relación del crecimiento de la longitud en el Modelo GDK, la cual puede ser reescrita en términos del crecimiento de la altura, h , según la siguiente ecuación:

$$\frac{h(x, t)}{h} = \frac{\lambda_c}{\tau_c} \quad \dots (V-2)$$

donde λ_c es la velocidad de propagación adimensional y τ_c es el tiempo característico para la propagación (cerca de la altura de equilibrio λ_c debe tender a cero). Ambos factores dependen de las propiedades elásticas de la formación y de las características del fluido inyectado (gasto, reología).

Debido al efecto de las diferentes propiedades del estrato, la sección transversal de la fractura no es elíptica. Si la formación superior es rígida; esto es, tiene un mayor E' o tiene un esfuerzo muy alto, la fractura es más angosta en este estrato. Settari obtiene una expresión aproximada para λ_c y τ_c como una función de las propiedades de los diferentes estratos.

Como previamente se mencionó, el factor principal para contener la fractura es el contraste de esfuerzos. El efecto es local, así que la fractura esta afectada únicamente por los esfuerzos cuando la fractura se desarrolla en los estratos. Por otro lado, los cambios en la elasticidad afectan la fractura antes que ésta alcance la interfase entre los estratos.

V.1.3. Contención de la Fractura.⁴

La geometría obtenida con un Fluido Newtoniano, para tres casos de contención está representada en la *fig. V-2*, con 50, 200 y 500 *psi* de contraste de esfuerzos entre la zona productora y el estrato adyacente (VER TABLA V-1). La fractura crece radialmente en la zona productora hasta que ésta alcanza los estratos adyacentes y posteriormente crece en longitud; esto es, en forma elongada.

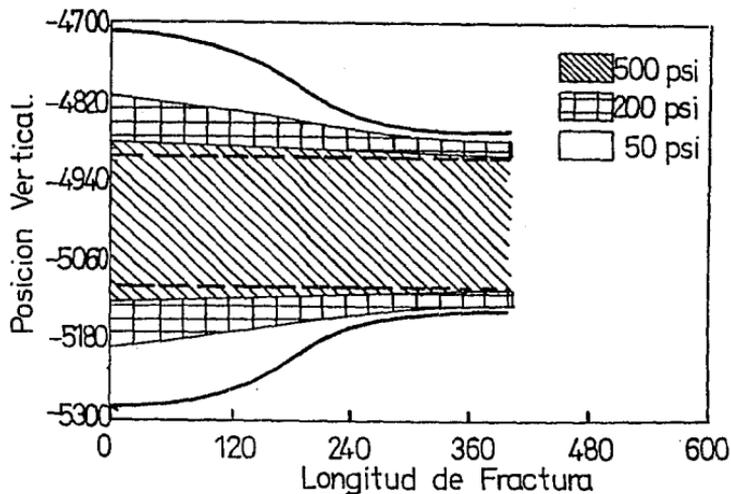


Fig. V-2. Crecimiento de la Fractura Vertical para varios contrastes de esfuerzos.

Datos de la Formación.	
Módulo de Young	5×10^6 psi
Relación de Poisson	0.25
Rigidez	1000 psi/pg ^{1/2}
Esfuerzo in-situ	Variable
Altura de la zona Productora	200 pie
Datos de Inyección.	
Viscosidad del Fluido	100 cp
Gasto de inyección	20 Bpm

TABLA V-1. Datos de la Simulación para esfuerzo constante.

La evolución del exceso de presión en la pared del pozo es mostrada en la *fig. V-3*. En la primera parte, el exceso de presión decrece, indicando una propagación radial con una pendiente de $-1/4$. Una vez que la fractura alcanza la barrera, la pendiente de la presión cambia. En el caso de la altura de la fractura contenida, la presión se incrementa como lo predice el Modelo PKN.

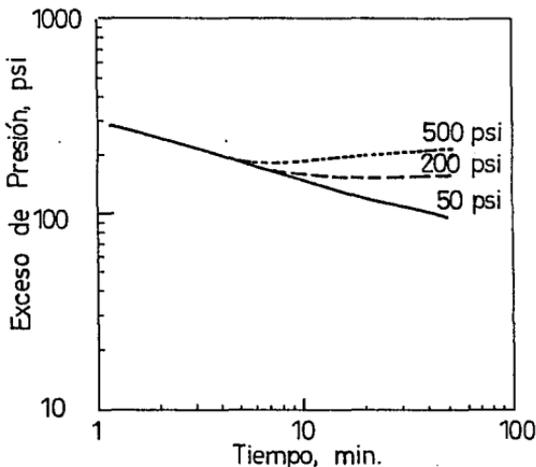


Fig. V-3. Exceso de Presión en la pared del pozo para diferentes niveles de Contención.

V.1.4. Elasticidad.¹²

En los Modelos P-3D, la elasticidad de la formación está aproximada por la suposición de que la longitud de la fractura es suficientemente más grande respecto a la altura, que lo que es la rigidez elástica efectiva (la relación entre la presión y la amplitud de la fractura), en todas las secciones transversales de $x = \text{cte}$, la elasticidad es independiente de la longitud de la fractura y la distancia horizontal desde la sección transversal al frente de la misma.

Bajo estas condiciones la amplitud de la fractura $W(x, y)$ en cada "x" es obtenida a partir de la solución de elasticidad de deformación plana para una altura de la fractura $h(x)$ sujeta a una distribución de presión $\Delta P(x, y)$.

El problema de elasticidad de deformación plana involucra únicamente la deformación en el plano yz , la coordenada "x" juega el papel de un parámetro que cuantifica las variaciones en la altura de la fractura y la presión a lo largo de la longitud de la misma. Para el caso homogéneo, isotrópico y linealmente elástico los investigadores R.J. Clifton y Brown U. dicen que: "la amplitud de la fractura $W(x, y)$ está relacionada con la diferencia de presión mediante la siguiente ecuación:¹²

$$W(x, y) = \int_{-h/2}^{h/2} \Delta P(x, y_0 + y') \left\{ \frac{(1-\nu)}{\pi E} \ln [R_y(y, y')] \right\} dy' \quad \dots (V-3)$$

Donde

$R_y(y, y') =$

$$\frac{(h/2 + y')^{1/2} (h/2 + y_0 - y)^{1/2} + (h/2 - y')^{1/2} (h/2 + y - y_0)^{1/2}}{|(h/2 + y')^{1/2} (h/2 + y_0 - y)^{1/2} - (h/2 - y')^{1/2} (h/2 + y - y_0)^{1/2}|}$$

La elevación "y" es medida a partir de la mitad de la altura de la zona productora, la elevación y' es medida a partir de la mitad de la altura de la fractura. El término dentro de las llaves en la Ec. V-3 representa la solución fundamental para amplitud de la fractura resultante a partir de un par de fuerzas lineales opuestas actuando sobre la cara de la fractura en y' .

La altura de la fractura $h(x) = H + \Delta h^a(x) + \Delta h^b(x)$, donde H es la altura de la zona productora y Δh^a y Δh^b son las distancias a las que la fractura se extiende dentro de los estratos superior e inferior de la zona productora, respectivamente. $y_0 = (\Delta h^a - \Delta h^b) / 2$ es la localización de la altura media de la fractura relacionada con la altura media de la zona productora.

La diferencia de presión se expresa generalmente como:

$$\Delta P(x, y) = P(x) - \sigma(y) \quad \dots (V-4)$$

Donde $P(x)$ es la presión del fluido fracturante supuesta como constante sobre la altura de la fractura y $\sigma(y)$ es el esfuerzo normal in-situ al plano de la fractura. Los gradientes de presión en la dirección "y", requeridos para que el flujo vertical de fluido llene la extensión vertical de la fractura, son a menudo despreciables. Esta suposición es apropiada para aplicaciones en las cuales la extensión vertical de la fractura es baja en relación a la extensión horizontal.

Medidas aproximadas para incluir los gradientes de presión en la dirección "y" han sido introducidas en algunos Modelos P-3D. Dentro de cada estrato de la formación, el esfuerzo in-situ $\sigma(y)$ de la Ec. V-4 es usualmente tomado ya sea como una constante o de variación lineal con respecto a la profundidad del estrato. Altos esfuerzos in-situ en los estratos limitantes en la zona productora proveen un mecanismo para contener la fractura vertical.

La integración de la Ec. V-3 es posible debido a la forma simple de la diferencia de presión $P(x, y)$. La forma general de las expresiones que obtuvieron Clifton y Brown es como sigue:

$$W(x, y) = f [y; P(x), h(x)] \quad \dots (V-5)$$

(Nota : el factor f está definido en la Ec. V-31)

Para el caso comúnmente supuesto de esfuerzo in-situ uniforme dentro de cada estrato, la Ec. V-5 puede ser escrita como:

$$W(x, y) = W_I - W_{II} - W_{III} \quad \dots (V-6)$$

Donde:

$$W_I = \frac{4}{E'} P [h^2/4 - (y - y_0)^2]^{1/2}$$

$$W_{II} = \frac{4 (\sigma^a - \sigma^p)}{E' \pi} \left[- \left[\frac{h}{2} - \Delta h^a - y + y_0 \right] \right. \\ \left. \times \cosh^{-1} \left[\frac{\frac{h^2}{4} - \left[\frac{h}{2} - \Delta h^a \right] (y - y_0)}{\frac{h}{2} \left| y - y_0 - \frac{h}{2} + \Delta h^a \right|} \right] + \right. \\ \left. \left[\frac{\pi}{2} - \sin^{-1} \left[\frac{h/2 - \Delta h^a}{h/2} \right] \right] \left[h^2/4 - (y - y_0)^2 \right]^{1/2} \right]$$

Y

$$W_{III} = \frac{4 (\sigma^b - \sigma^p)}{E' \pi} \left[- \left[\frac{h}{2} - \Delta h^b - y + y_0 \right] \right. \\ \left. \times \cosh^{-1} \left[\frac{\frac{h^2}{4} - \left[\frac{h}{2} - \Delta h^b \right] (y - y_0)}{\frac{h}{2} \left| y - y_0 - \frac{h}{2} + \Delta h^b \right|} \right] + \right. \\ \left. \left[\frac{\pi}{2} - \sin^{-1} \left[\frac{h/2 - \Delta h^b}{h/2} \right] \right] \left[h^2/4 - (y - y_0)^2 \right]^{1/2} \right]$$

En la cual $E' = E / (1 - \nu^2)$ y σ^a , σ^p , σ^b son los esfuerzos in-situ en el estrato superior, la zona productora y el estrato inferior, respectivamente. Para formas más complicadas de variación del esfuerzo in-situ con la profundidad, puede ser necesario integrar numéricamente la Ec. V-3. En cualquier caso, la formación linealmente elástica en las formulaciones P-3D es modelada por una relación de la forma dada en la Ec. V-5.

La extensión vertical de la fractura está controlada por el requerimiento de que el factor de intensidad de esfuerzo, K_I , cerca del extremo de la fractura sea igual al valor crítico, K_{Ic} . En cada sección transversal "x", este valor es considerado para la cima y la base de la fractura.

El factor de intensidad de esfuerzo en los estratos superior e inferior, Clifton y Brown lo definen mediante la siguiente expresión:

$$K_I^{a,b} = \frac{1}{\sqrt{\pi h/2}} \int_{-h/2}^{h/2} \Delta P(x, y_0 + y') \left[\frac{h - 2y'}{h + 2y'} \right]^{1/2} dy' \dots (V-7)$$

Sustituyendo la Ec. V-4 dentro de la Ec. V-7, con K_I^a y K_I^b igual a los valores críticos para el avance de la fractura, se obtiene un sistema de dos ecuaciones No-lineales para las distancias $\Delta h^a(x)$ y $\Delta h^b(x)$. Estas ecuaciones pueden simplificarse observando que las contribuciones de las diferencias de presión cerca de uno de los extremos de la fractura tienen un efecto relativamente pequeño sobre el factor de intensidad de esfuerzo del otro extremo. Cuando el esfuerzo in-situ es uniforme dentro de cada estrato, esta simplificación permite escribir la Ec. V-7 de la siguiente manera:

$$K_I^{a,b} = (P - \sigma^p) \left(\frac{\pi h}{2} \right)^{1/2} \left[1 - \frac{2}{\pi} \left(\frac{\sigma^{a,b} - \sigma^p}{P - \sigma^p} \right) \cos^{-1} \left(\frac{H}{h} \right) \right] \dots (V-8)$$

La Ec. V-8 se obtiene de la integración exacta de la Ec. V-7 para el caso simétrico en el cual los esfuerzos in-situ y las distancias de penetración de la fractura son las mismas para los dos estratos limitantes de la zona productora. Para casos asimétricos, la Ec. V-8 da una buena aproximación tan grande como la diferencia en los productos $(P - \sigma^a) \Delta h^a$ y $(P - \sigma^b) \Delta h^b$ sea pequeña comparada con sus sumas. Cuando este no es el caso, es necesario integrar la Ec. V-7 para la distribución preescrita del esfuerzo in-situ $\sigma(y)$.

En cualquier caso, se obtiene un sistema de dos ecuaciones para relacionar $\Delta h^a(x)$ y $\Delta h^b(x)$ con la presión del fluido $P(x)$. Por otro lado, $\Delta h^a(x)$ y $\Delta h^b(x)$ pueden ser obtenidas por la integración de ecuaciones diferenciales ordinarias a partir de la diferenciación de la Ec. V-7 con respecto a "x" para $K_I^{a,b}$ iguales

a los valores críticos constantes. Estas ecuaciones son integradas desde el frente de la fractura $x = L/2$ y hasta la pared del pozo $x = 0$; las condiciones iniciales $\Delta h^a = 0$ y $\Delta h^b = 0$ son usadas en $x = L/2$.

Los valores negativos que se observen indicarán que la fractura no se propaga dentro del estrato limitante correspondiente. Se supone que en los Modelos P-3D la altura de la fractura es siempre por lo menos tan grande como la altura de la zona productora h .

V.1.5. Flujo de Fluido 1D.¹²

En los Modelos P-3D, el flujo de fluido es idealizado como un flujo 1D a lo largo de la longitud de la fractura. La ecuación que gobierna el gasto de flujo $Q(x, t)$ es obtenida integrando el gasto de flujo $Q(x, y, t)$ por unidad de altura sobre la altura de la fractura. Clifton y Brown desarrollan la expresión resultante para el gasto de flujo total en "x", la cual es:¹²

$$Q(x, t) = \int_{-h/2}^{h/2} \left[\frac{w^{2n'+1}}{\eta'} \left| \frac{\partial p}{\partial x} \right| \right]^{1/n'} dy' \quad \dots (V-9)$$

El fluido sigue la Ley de Potencias caracterizada por los parámetros n' y η' (Nota: el parámetro η' está definido en la Ec. V-37). La ecuación anterior es resuelta para obtener el gradiente de presión como:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\eta' [Q(x, t)]^{n'}}{\int_{-h/2}^{h/2} w^{(2n'+1)/n'} dy'} \quad \dots (V-10)$$

El cual tiene la forma:

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial x} = g [P(x, t), Q(x, t)] \quad \dots (V-11)$$

Una vez que las Ecs. V-5 y V-7 son usadas para expresar la amplitud $W(x, y, t)$ y la altura $h(x, t)$ en términos de la presión $P(x, t)$ (o bien, $\Delta h^a(x, t)$ y $\Delta h^b(x, t)$ son obtenidas integrando sus ecuaciones diferenciales ordinarias a partir de la Ec. V-7). La condición física restante es la Conservación de la Masa del fluido fracturante, el cual se supone es incompresible. Esta condición se puede expresar como:

$$-\frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} = Q_l(x, t) + \frac{\partial A_c(x, t)}{\partial t} \quad \dots (V-12)$$

Donde $Q_l(x, t)$ es el gasto de pérdida en "x" por unidad de longitud en la dirección "x". Normalmente se supone que la pérdida ocurre sólo en la altura de la zona productora. Entoces, la expresión clásica de la pérdida tiene la forma:

$$Q_l(x, t) = \frac{2 K_L H}{\sqrt{t - \tau(x)}} \quad \dots (V-13)$$

Donde K_L es el coeficiente de la pérdida y $\tau(x)$ es el tiempo al cual la fractura alcanza la posición "x". El último término en la Ec. V-12 es el "almacenamiento" correspondiente al ritmo de cambio de la sección transversal de área $A_c(x, t)$, donde:

$$A_c(x, t) = \int_{-h/2}^{h/2} W(x, y_0 + y', t) dy' \quad \dots (V-14)$$

Diferenciando la Ec. V-14 con respecto al tiempo, usando la Ec. V-3 y la expresión para W_t de la Ec. V-6 se obtiene la Ec. V-12 la cual puede ser escrita como:

$$-\frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} = Q_l(x, t) + \frac{\pi h^2}{2E'} \frac{\partial P(x, t)}{\partial t} \quad \dots (V-15)$$

Las Ecs. V-10 y V-15 constituyen un sistema de dos ecuaciones diferenciales parciales No-lineales para la presión $P(x, t)$ y el gasto de flujo $Q(x, t)$.

V.1.6. Solución al Conjunto de Ecuaciones.¹²

Las soluciones de las Ecs. V-10 y V-15 tratan de satisfacer las condiciones de frontera siguientes:

$$Q(0, t) = Q_x(t)/2 \quad \dots(V-16)$$

y

$$\Delta P(L(t)/2, t) = P_L \quad \dots(V-17)$$

Donde $Q_x(t)$ es el gasto de inyección y P_L es el esfuerzo diferencial requerido para abrir la fractura una amplitud nominal en el frente de la misma. La Ec. V-16 se obtiene a partir de la suposición de la simetría de la fractura con respecto a $x = 0$. La Ec. V-17 es más difícil de calcular, porque las suposiciones del Modelo P-3D no se aplican cerca del frente de la fractura en $x = L/2$.

Si la amplitud de la fractura se supone cero en el frente de la misma en $x = L/2$, entonces la Ecuación del Flujo de Fluido Ec. V-10 no puede ser usada al aproximarse "x" al valor de $L/2$ debido a la singularidad en $W = 0$.

Esta dificultad puede superarse a pesar de que la fractura se extienda una pequeña distancia más allá de $x = L/2$. Entonces, la presión en $x = L/2$ puede tomar un valor que es aproximadamente el nivel correcto para el factor de intensidad de esfuerzos a lo largo del frente de la fractura supuesto a ser comparado con el valor crítico, K_{Ic} .

Una elección conveniente es la presión, P_L , a la cual los factores de intensidad de esfuerzos se obtienen a partir de la Ec. V-7 (o equivalente), para $\Delta h^a(L/2) = 0$ y $\Delta h^b(L/2) = 0$ dichos factores son iguales a K_{Ic} .

Varios métodos fueron usados para resolver el conjunto de ecuaciones de los Modelos P-3D. Un método satisfactorio, es el Avance del Frente de la Fractura a una distancia $\Delta L/2$ durante el intervalo de tiempo de t a $t + \Delta t$.

El intervalo Δt se refiere a un término desconocido a ser determinado por la condición de frontera de la Ec. V-16. Para un intervalo de tiempo Δt supuesto, el flujo en el frente $x = L/2$ al tiempo t puede ser obtenido a partir del requerimiento de que el gasto neto de flujo a través de $x = L(t)/2$ debe ser igual al gasto de pérdida en la región del frente más allá de $x = L/2$. Este requerimiento se puede expresar como:

$$Q(L(t)/2, t) - \nu A_c - 2\pi K_l \sqrt{\nu} (H/2)^{3/2} - 2C_p H \nu = 0 \quad \dots (V-18)$$

Donde ν es la velocidad del frente y C_p es el coeficiente de pérdida instantánea. El tercer término en la Ec. V-18 es obtenido para un frente parabólico en el plano xy y se extiende una distancia $(H/2)$ en frente de $x = L/2$. Las Ecs. V-17 y V-18 dan valores iniciales para $P(x, t)$ y $Q(x, t)$ y su evaluación se obtiene mediante la integración de las Ecs. V-11 y V-15 desde el frente $x = L/2$ y hasta la pared del pozo $x = 0$. El término $Q_l(x, t)$ en el lado derecho de la Ec. V-15 puede ser evaluado para un intervalo Δt supuesto.

El término que contiene a $\partial P / \partial t$ puede ser sustituido por la relación de diferencias de presión como sigue:

$$\frac{\partial P}{\partial t}(x, t) = [P(x, t + \Delta t) - P(x, t)] / \Delta t \quad \dots (V-19)$$

Debido a que $P(x, t)$ es conocida de la solución del intervalo de tiempo previo.

La Ec. V-15 se convierte en una ecuación diferencial ordinaria con "x" como la variable independiente. Las Ecs. V-11 y V-15 pueden ser integradas y, el valor de $Q(0, t)$ obtenido puede ser comparado con el valor requerido de $Q_l(t)/2$.

Si los dos valores no concuerdan, entonces se supone un nuevo valor de Δt . La selección de nuevos valores de Δt que den mejores aproximaciones se facilita debido a que el valor calculado para $Q(0, t)$ decrece monótonamente conforme se incrementa Δt .

V.2.1. MODELOS 3D.¹

Se deben considerar los siguientes componentes para simular la extensión general de la fractura:

- Distribución de Esfuerzos 3D.
- Flujo del Fluido en la Fractura (localmente 2D).
- Transporte del Sustentante (localmente 2D).
- Transferencia de Calor.
- Pérdida de Fluido en la Formación.

El Problema en forma global conduce a un conjunto de fórmulas matemáticas con los siguientes tipos de ecuaciones diferenciales:

- Elípticas para el Sistema Elástico.
- Convectivas-Difusivas para la Transferencia de Calor.
- Hiperbólicas para el Transporte del Sustentante.
- Parabólicas para la Pérdida de Fluido.

El conjunto de fórmulas conduce a un sistema matemático complejo. Diferentes técnicas numéricas pueden usarse para resolver el problema de la mecánica de la fractura linealmente elástica. Las técnicas más efectivas son el *Método del Elemento Finito* y las *Ecuaciones Integrales de Frontera*.

El Método del Elemento Finito corresponde a una discretización de toda la formación en elementos; las incógnitas del problema (esfuerzos y desplazamientos) son calculadas a través de un conjunto de nodos. En el caso de los Modelos 3D, miles de elementos tienen que ser usados para resolver el problema, conduciendo esto a un complejo sistema algebraico.

Las técnicas de Integrales de Frontera corresponden a la formulación natural de un problema con valores de frontera. Las Integrales de Frontera en un sistema elástico conducen a un conjunto de relaciones implícitas entre las incógnitas (desplazamientos) en la frontera y las cargas aplicadas o las condiciones de desplazamiento. La frontera es discretizada en segmentos (para problemas 2D), conduciendo a un sistema de ecuaciones algebraicas para las cuales los esfuerzos y desplazamientos dentro del dominio pueden ser calculados explícitamente.

Usando estas técnicas la dimensión del problema disminuye, conduciendo a un número mucho menor de incógnitas. La principal desventaja del Método de Integrales de Frontera es inherente a la técnica. Esta dificultad toma en cuenta las heterogeneidades dentro del medio (tales como las variaciones de los Módulos Elásticos).

Ciertas formulaciones de las Integrales de Frontera representan la fractura como una superficie discontinua. La amplitud de la fractura puede entonces ser asimilada como una discontinuidad en los desplazamientos de una línea (en 2D) o una superficie (en 3D).

Las técnicas generales para la propagación de la fractura en los Modelos 3D (incluyendo el crecimiento fuera del plano) han sido presentadas por Lam y colaboradores, Touboul y colaboradores, y Vandamme y Jeffrey. Estas técnicas están basadas en la representación de Integrales de Frontera de las ecuaciones linealmente elásticas. Kamel Ben-Naceur propone que el sistema de ecuaciones consiste generalmente de los siguientes puntos:⁴

- Una relación Esfuerzo/Desplazamiento:

$$[u](H) = \int_S \Gamma [u (H, H')] \Delta P (H, H') dH' \dots (V-20)$$

donde Γ es una función de influencia y S es la superficie de la fractura, la cual está discretizada en elementos.

● **Criterio de Propagación.**

Los factores de intensidad de esfuerzos proveen el criterio de propagación de la fractura. Otro criterio tal como el máximo esfuerzo de tensión dicta la dirección de la extensión.

● **Relación Fluido/Flujo.**

Las veinte ecuaciones fluido/flujo son aproximadas mediante una serie de elementos paralelos (lo cual corresponde a la discretización de la frontera). El gasto de flujo en cada elemento es una función de la caída de presión a través de la fractura.

● **Relación de Conservación.**

Varios fluidos pueden presentarse en la fractura, se necesita escribir para cada uno de los tipos una relación de Conservación de Masa. En cada elemento, el gasto de flujo entrante tiene que ser igual a la suma del término del almacenamiento (variaciones en la amplitud), más el gasto de salida (para los otros elementos), más el gasto de pérdida y más el intercambio con otros tipos de fluidos.

V.2.2. Elasticidad.¹²

Como en los Modelos 2D discutidos en el Capítulo IV la formación se supone que se comporta como un sólido linealmente elástico en respuesta a los cambios de las presiones introducidos por el Fracturamiento Hidráulico en la cara de la fractura.

Debido a que el Fracturamiento Hidráulico es realizado en yacimientos de baja permeabilidad, los cambios en elasticidad que responden como resultado de la migración de los fluidos dentro de la formación están restringidos a un estrato suficientemente delgado adyacente a las caras de la fractura por lo que estos cambios se suponen tienen una influencia despreciable en la rigidez efectiva de la formación.

Por la tanto, los efectos poroelásticos son despreciables y los Módulos Elásticos están destinados a ser los Módulos de la roca "no drenada". Se supone elasticidad isotrópica.

Para el Fracturamiento Hidráulico de yacimientos de gas y de aceite, las profundidades de las formaciones a ser fracturadas son por lo general más grandes, en comparación con las dimensiones de la fractura. Por eso, la formación se supone es infinita en extensión.

La fractura se supone se desarrolla como un plano, la fractura vertical y se orienta perpendicularmente a la dirección del mínimo esfuerzo compresivo in-situ.

El problema de elasticidad es resuelto considerando el cambio de los esfuerzos y las velocidades de desplazamiento causadas por el incremento del esfuerzo compresional normal $\sigma_{zz}(x,y,0)$ en el área A de la fractura (ver fig. V-4) a partir de sus valores iniciales $\sigma_{zz}^0(x,y,0)$ y hasta la presión en curso $P(x,y,t)$ en el fluido fracturante. Los esfuerzos de corte en la superficie de la fractura se suponen cero.

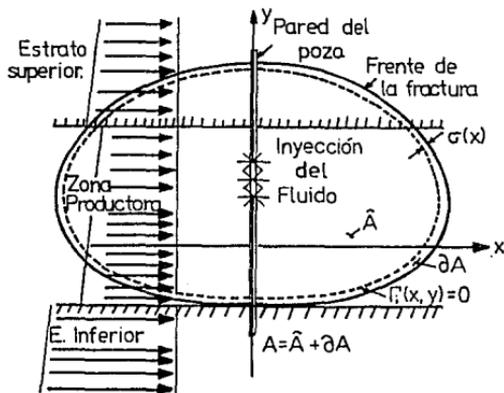


Fig. V-4. Configuración Esquemática del Fracturamiento Hidráulico.

La consideración anterior fue realizada por Clifton y Brown, y con ello lograron que se simplificara el problema 3D elástico para un medio infinito a un problema 2D para una región finita mediante el uso de integrales de superficie. Con esta formulación, el cambio en el esfuerzo normal sobre el plano de la fractura esta relacionado con la amplitud de la fractura, $W(x,y)$, por una integral de la forma:¹²

$$\Delta P(x,y) \equiv P(x,y) - \sigma_{zz}^0(x,y,0) = E_e \int_A \int \vec{\nabla}' W \cdot \vec{\nabla}' (1/R) dA' \dots (V-21)$$

donde el Módulo Elástico Efectivo, E_e , es:

$$E_e = G / 4 \pi (1-\nu) \dots (V-22)$$

el Operador Gradiente, $\vec{\nabla}'$, es:

$$\vec{\nabla}' = \frac{\partial}{\partial x'} i + \frac{\partial}{\partial y'} j \dots (V-23)$$

y la distancia, R , entre el punto (x',y') al cual el integrando es evaluado y el punto (x,y) al cual la presión es evaluada.

$$R = [(x-x')^2 + (y-y')^2]^{1/2} \dots (V-24)$$

La Ec. V-21 es la forma general que usaron Clifton y Brown en el método numérico que desarrollaron para evaluar las amplitudes de la fractura para una distribución de presiones dadas siempre y cuando sean uniformes los Módulos Elásticos. Tal uniformidad de los módulos será supuesta al considerar las características principales del método numérico.¹²

En el método numérico desarrollado por Clifton y Brown para encontrar una solución aproximada para $W(x,y)$ utilizaron una malla cuadrilateral para cubrir la superficie de la fractura, como se muestra en la fig. V-5. La amplitud de la fractura $W(x,y)$ está representada en términos de las funciones ensaye local, $\phi_i(x,y)$, por la siguiente ecuación:¹²

$$W(x,y) = \sum_i W_i \phi_i(x,y) \quad \dots (V-25)$$

donde W_i es el desplazamiento del nodo i -ésimo.

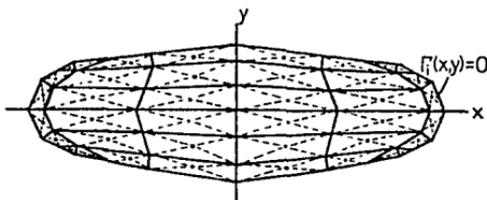


Fig. V-5. Malla Cuadrilateral con Elementos Triangulares.

La función $\phi_i(x,y)$ toma el valor de la unidad en el nodo i -ésimo, la cual varía linealmente sobre los triángulos adyacentes, disminuyendo a lo largo del lado opuesto de éstos y hacia fuera de los triángulos adyacentes al nodo.

Para un nodo i a lo largo de la frontera interior de la zona cercana al extremo de la fractura de amplitud a en la fig. V-4, la función $\phi_i(x,y)$ varía con respecto a la raíz cuadrada de la distancia a partir del extremo de la fractura para los puntos (x,y) en la región cercana al extremo de la fractura, de acuerdo con la variación de la amplitud de la fractura cerca del extremo de la misma en los sólidos elásticos.

La presión diferencial es representada como:

$$\Delta P(x,y) = \sum_i \Delta P_i \bar{\phi}_i(x,y) \quad \dots (V-26)$$

donde la función ensaye local $\bar{\phi}_i(x,y)$, es la misma que $\phi_i(x,y)$ excepto para los puntos (x,y) en la región del extremo de la fractura. En esta región, la función $\bar{\phi}_i(x,y)$ se toma como uniforme a un valor unitario, considerando que las condiciones de frontera

de la presión no se conocen pero éstas serán determinadas como parte de la solución.

Multiplicando la Ec. V-21 por $\phi_k(x,y)$ e integrando sobre la superficie A de la fractura, se obtiene el siguiente sistema lineal de ecuaciones algebraicas:

$$K \vec{W} = T \Delta P \quad \dots (V-27)$$

donde \vec{W} = columna vector de los desplazamientos nodales.
 K = matriz de la rigidez.
 $T \Delta P$ = columna vector de las fuerzas nodales, con
 ΔP = columna vector de las presiones nodales
 T = matriz simétrica de las áreas elementales.

Clifton y Brown definen a la matriz K como simétrica y positiva. Cuando los puntos (x,y) y (x',y') están en diferentes triángulos, la contribución ΔK_{jk} hasta K_{jk} obtenida a partir de (x,y) barriendo sobre el j -ésimo triángulo y (x',y') barriendo sobre el k -ésimo triángulo es:¹²

$$\Delta K_{jk} = \frac{E_0}{2} \iint_{A_j} \phi_j(x,y) \left[(\nabla^T \phi_k) \cdot \oint_{S_k} \frac{\vec{n}_k dS}{R} \right] dx dy \quad (V-28)$$

donde A_j es el área del triángulo j -ésimo y $(\nabla^T \phi_k)$ es el gradiente de la función ensaye para el triángulo k -ésimo, el cual tiene un vector unitario normal \vec{n}_k y el perímetro S_k . La integral de la Ec. V-28 es evaluada por integración exacta, la cual depende de las coordenadas (x',y') seguida por la cuadratura de un tercer punto para evaluar el área integral.

Quando los puntos (x,y) y (x',y') están en el mismo triángulo es ventajoso evaluar las integrales en la Ec. V-27 usando valores exactos de éstas para triángulos isósceles y haciendo en primer orden las correcciones para cuantificar las desviaciones a partir de los triángulos anteriores.

Los coeficientes requeridos para estas integrales pueden ser tabulados como funciones de la relación altura/base del triángulo para eliminar la reevaluación de las integrales. Cuando (x,y) , (x',y') o ambos están cerca de la región del extremo de la fractura ∂A , entonces la integral es evaluada sobre esta región sustituyendo las expresiones para $\phi_j(x,y)$ o $\nabla' \phi_k(x',y')$ sobre las bases de las funciones ensaye para la región del extremo de la fractura de la siguiente forma:

$$\phi_j(x,y) = \phi_j(S) [\zeta/\alpha(S)]^{1/2} \quad \dots (V-29)$$

donde ζ es la distancia a partir del extremo de la fractura en la dirección interna normal, $\zeta = \alpha(S)$ es la distancia en el interior de la frontera en la región del extremo de la fractura y $\phi_j(S) = 1$ es la distancia en el j -ésimo nodo y decrece linealmente hasta cero en los nodos adyacentes a lo largo del frente de la fractura.

La matriz T en el lado derecho de la Ec. V-27 se obtiene por integración de las respectivas funciones ensaye para $W(x,y)$ y $AP(x,y)$.

La contribución ΔT_{jk} del j -ésimo triángulo esta dada por:

$$\Delta T_{jk} = - (A_j / 6) \alpha_k \quad \dots (V-30)$$

donde $\alpha_k = 1$ para $k = j$.
 $\alpha_k = 1/2$ para k correspondiente a los otros dos vértices del triángulo j -ésimo
 $\alpha_k = 0$ para cualquier otro caso.

Cuando (x,y) está en la zona cercana al extremo de la fractura, la contribución de T_{jk} es obtenida tomando $W(x,y)$ la forma de la Ec. V-29 y suponer $P(x,y)$ uniforme sobre la amplitud $\alpha(S)$.

Las diferencias de los Módulos Elásticos de estrato a estrato son contabilizadas a través de la solución fundamental para una curva cerrada. Esta solución fundamental fue obtenida en forma aproximada por Lee y Kern. Para usar este método numérico, es conveniente expresar esta solución como un factor f veces la solución fundamental para un medio infinito homogéneo.

Entonces la contribución a la matriz de rigidez de los puntos (x, y) en el triángulo j y los puntos (x', y') en el triángulo k puede ser aproximada multiplicando la contribución ΔK_{jk} para un medio homogéneo por el factor f aplicable al esfuerzo normal en el plano de la fractura en (x_j, y_j) resultante de un disco infinitesimal de amplitud de la fractura en (x'_k, y'_k) . El factor f tiene la forma (ver Ec. V-34):

$$f = f(x-x', y-y', y'-y'' ; G_2/G_1, \nu_1, \nu_2) \dots (V-31)$$

Donde y'' es la coordenada "y" de la interfase y G_2/G_1 es la relación de los Módulos de Corte Elástico de los estratos. G_1 es el Módulo del Estrato que contiene el punto de origen (x', y') ; G_2 es el Módulo del otro estrato.

El factor f es finito y es una función suave de sus argumentos, excepto para un salto a través de la interfase. Cuando la distancia R entre (x, y) y (x', y') llega a ser pequeña comparada con la distancia a partir de la interfase, f se aproxima a la unidad. Expresiones explícitas para f en la Ec. V-31 pueden ser dadas en términos de la distancia R (ver Ec. V-24), donde la distancia \hat{R} es:

$$\hat{R} = [(x - x')^2 + (\bar{y} - \bar{y}')^2]^{1/2} \dots (V-32)$$

donde $\bar{y} = y - y''$, $\bar{y}' = y' - y''$, y los siguientes parámetros materiales:

$$\begin{aligned} \Gamma &= G_2 / G_1, & \kappa_1 &= 3 - 4\nu_1, & S &= (1-\Gamma) / (1+\Gamma), \\ \alpha &= (1-\Gamma) / (1+\Gamma\kappa_1), & \beta &= (\kappa_2 - \Gamma\kappa_1) / (\Gamma + \kappa_2) \dots (V-33) \end{aligned}$$

Las expresiones para f considerando dos casos son las siguientes:

Caso 1 (punto de origen y punto del campo en el mismo medio espacio):

$$f = 1 + \frac{R^2}{\hat{R}^2} \left[S(1 + k_1) - \frac{3}{2} \alpha (k_1^2 - 2k_1 + 3) \right] +$$

$$\frac{3}{2} \frac{R^2}{\hat{R}^2} [12 \alpha \bar{y} \bar{y}' - \alpha (3 - k_1) (k_1 - 1) (\bar{y} + \bar{y}')^2] +$$

$$\frac{3 R^2}{2\hat{R} (\hat{R} + |\bar{y} + \bar{y}'|)^2} (\beta - 2S + \alpha k_1 + \alpha k_1^2 - 2S k_1) \dots (V-34a)$$

Caso 2 (punto de origen y punto del campo en diferente medio espacio):

$$f = 1 + \frac{1}{2} [\alpha (k_1 - 3) + \beta (k_2 - 3) + (k_1 - k_2) - 2S(1 + k_1)] +$$

$$\frac{3 R^2}{2 (R + |\bar{y} + \bar{y}'|)^2} [-k_1(1 + \alpha) + k_2(1 - \beta) + 2S(1 + k_1)] +$$

$$\frac{3 (2R + |\bar{y} + \bar{y}'|)}{(R + |\bar{y} + \bar{y}'|)^2} |\alpha \bar{y}' - \beta \bar{y}| \dots (V-34b)$$

Debido a la suavidad de f , la aproximación mencionada en la introducción del factor f es muy buena, siempre y cuando los puntos (x, y) y (x', y') no estén cerca de la interfase de los triángulos a los que pertenecen a lo largo de la misma interfase. Aún cuando los triángulos cruzan la interfase, ésta aproximación (Ec. V-31) se espera sea adecuada para obtener los coeficientes de la rigidez que dan una aproximación satisfactoria para la amplitud de la fractura.

Las soluciones fundamentales no han sido obtenidas para casos de interfases múltiples separando los estratos de diferentes Módulos Elásticos. Consecuentemente, en estos casos los coeficientes de rigidez no pueden ser modificados en la forma directa descrita para el caso de una sola interfase.

No obstante, los procedimientos de modificación pueden ser introducidos debido a que involucran promedios dominantes de soluciones fundamentales de cada interfase referida como la interfase única.

V.2.3. Flujo de Fluido 2D.¹²

El Flujo de Fluido es generalmente idealizado como un Flujo Laminar de un fluido incompresible que sigue la Ley de Potencias. Se supone que el fluido fluye esencialmente entre paredes porosas paralelas.

La pérdida a través de las paredes ocurre a un gasto determinado por la diferencia entre la presión del Fluido Fracturante y la presión del fluido en el poro, así como por el tiempo transcurrido a que fue expuesta la superficie de la fractura al Fluido Fracturante

Clifton y Brown integraron las ecuaciones que gobiernan la amplitud de la fractura y obtuvieron las ecuaciones de flujo en 2D a través de la siguiente Ecuación de Continuidad:¹²

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = -Q_l - \frac{\partial W}{\partial t} + Q_x \quad \dots (V-35)$$

Y las ecuaciones del gradiente de presión:¹²

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \eta \cdot (|Q| / W^2)^{n-1} (Q_x / W^3) = 0 \quad \dots (V-36a)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} + \eta \cdot (|Q| / W^2)^{n-1} (Q_y / W^3) = \rho F_y \quad \dots (V-36b)$$

Donde:

- Q_x ; Gasto de fluido en la dirección "x" por unidad de longitud en la dirección "y".
- Q_y ; Gasto de fluido en la dirección "y" por unidad de longitud en la dirección "x".
- $|Q|$; $(Q_x^2 + Q_y^2)^{1/2}$; Gasto de flujo resultante.
- Q_L ; Gasto de pérdida por unidad de área de la fractura.
- Q_I ; Gasto de inyección por unidad de área de la fractura (cero excepto para regiones cercanas a la pared del pozo y la zona adyacente al intervalo disparado).

La fuerza del cuerpo causada por el peso del fluido, por unidad de volumen, es representada por ρF_y . El parámetro de viscosidad, η' , Clifton y Brown lo relacionan con los coeficientes usuales de la Ley de Potencias, k' y n' , por medio de la siguiente ecuación:¹²

$$\eta' = 2^{(n'+1)} k' (2 + 1/n')^{n'} \quad \dots (V-37)$$

Las suposiciones principales hechas en el desarrollo de las Ecs. V-35 y V-36 son que los efectos de inercia son despreciables y los gradientes de velocidad en el plano xy son despreciables comparados con los gradientes a través de la amplitud de la fractura.

A valores suficientemente pequeños del gasto de corte ($|Q|/w^2$), el fluido se comporta según la Ley de Potencias, por lo que es sustituido por un fluido Newtoniano ($n' = 1$) para evitar coeficientes singulares en las Ecs. V-36. El término de la pérdida de fluido, Q_L , es obtenido a partir de un tiempo dependiente de la pérdida relacionada de la siguiente forma:

$$Q_L(x, y, t) = \frac{2 C_L (P - P_f)}{\sqrt{t - \tau(x, y)}} \quad \dots (V-38)$$

Donde $\tau(x, y)$ es el tiempo en el cual la posición (x, y) fue primeramente expuesta al fluido fracturante. El coeficiente C_L es el coeficiente de la pérdida, K_L (VER APENDICE E), es normalizado con respecto al estado de esfuerzos a la profundidad dividido por

la diferencia entre el mínimo esfuerzo compresivo in-situ y la presión de poro del fluido in-situ. La dependencia del gasto de pérdida del fluido sobre la presión diferencial ($P - P_f$) es consistente con la solución de flujo en una dimensión, dentro de un medio poroso semi-infinito con una presión de poro P_f , y una presión constante P , mantenida en el plano de inyección.

Debido a que el cambio en la presión, $P - \sigma_{zz}^o$, es generalmente mucho menor que la diferencia de presión, $P - P_f$, la pérdida obtenida a partir de la Ec. V-38 es aproximadamente la misma que la obtenida en el Apéndice E. Sin embargo, usar la Ec. V-38 permite distribuir a la pérdida sobre el área de la fractura para contabilizarla.

La normalización particular usada (esto es, dividir por $[\sigma_{zz}^o(0,0) - P_f]$) no implica ninguna dependencia particular del coeficiente de pérdida sobre el estado de esfuerzos y/o la presión del fluido en el poro.

Lo anterior simplemente enuncia que la pérdida calculada por la Ec. V-38 será muy parecida a las medidas realizadas en experimentos para determinar K_f (ver APENDICE E), cuando estos experimentos están hechos bajo condiciones de esfuerzo in-situ, presión de poro y la presión en la cara de inyección de la muestra es $\sigma_{zz}^o(0,0)$.

Para fines de cómputo, es conveniente reescribir las Ecs. V-35 y V-36 en términos de una sola ecuación para la distribución de la presión. De la misma forma una ecuación puede ser obtenida sustituyendo Q_x y Q_y de la Ec. V-36 dentro de la Ec. V-35. Es más conveniente, sin embargo, introducir un procedimiento variacional en el cual las ecuaciones para las presiones desconocidas en el nodo sean obtenidas como las condiciones para una función de estas presiones para mantenerlas en su valor mínimo.

Una función J(P) para tal procedimiento variacional puede ser escrita en la siguiente forma:

$$J(P) = \iint_A F \left[P, \frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y} \right] dx dy + \int_{\Gamma_l} \left[\alpha C_l (P - P_f)^2 + P \left[2vC_a + vW_a + \frac{2\alpha}{3} \frac{dW_a}{dt} \right] \right] dS \quad \dots (V-39)$$

Donde:

$$F \left[P, \frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y} \right] = C_l (P - P_f)^2 + F \left[\frac{\partial W}{\partial t} - Q_l \right] + \left[\frac{n'}{n'+1} \right] W^2 \\ \times \left[\frac{W}{\eta'} \right]^{1/n'} \left[\left[\frac{\partial P}{\partial x} \right]^2 + \left[\frac{\partial P}{\partial y} - \rho F_y \right]^2 \right]^{(n'+1)/2n'} \quad \dots (V-40)$$

Los dos primeros términos en la integral lineal de la Ec. V-39 calculan el flujo de potencia de la presión actuando sobre el fluido que está siendo perdido en la zona cercana al extremo de la fractura de amplitud α .

El segundo de estos términos corresponde a la pérdida instantánea de fluido, la cual se supone ocurre instantáneamente cuando la roca es expuesta al fluido fracturante. El coeficiente de la pérdida instantánea, C_a , es un valor específico de la pérdida instantánea por unidad de área; v es la velocidad del frente de la fractura en la dirección normal hacia afuera y W_a es la amplitud en la distancia α desde el frente.

La función J(P) tiene unidades de potencia. Los integrandos representan flujos de potencia. Los tres primeros términos en F representan los flujos de potencia causados por la inyección del fluido hacia el yacimiento a través de las paredes de la fractura, cuando se abre la fractura y se inyecta fluido hacia la misma en la vecindad del intervalo disparado. El término final en F es la disipación de la potencia causada por el flujo del fluido viscoso en la fractura.

La Ec. V-39 puede ser verificada confirmando que alguna distribución de presión $P(x, y)$, que minimice $J(P)$ tiene que satisfacer las Ecs. V-35 y V-36. Clifton y Brown dicen: si $P(x, y)$ no está preescrita en el interior de la frontera $\Gamma_i(x, y)$ de la región del extremo de la fractura, entonces $J(P)$ es un mínimo sólo si:¹²

$$Q_n - vW_n - 2C_1\alpha(P-P_1) - 2vC_2 - \frac{2\alpha}{3} \frac{dw_a}{dt} = 0 \quad \dots(V-41)$$

En $\Gamma_i(x, y) = 0$

Donde Q_n es el gasto de flujo en la dirección normal a la frontera. Esta "condición natural de frontera" es simplemente la condición de que el gasto neto de flujo dentro de la región cercana al extremo de la fractura está balanceada por el gasto de pérdida y la expansión del volumen de esa región.

Para incluir más detalles del flujo en la región cercana al extremo de la fractura, Clifton y Brown recomiendan considerar la componente perpendicular de la velocidad en el plano de fractura.

Los resultados iniciales para las velocidades de flujo que satisfacen rigurosamente las condiciones de frontera para un avance de la fractura sin pérdida, indican que presiones y gradientes de presión se comportan aceptablemente en la vecindad del extremo de la misma.

Clifton y Brown proponen un método numérico para obtener la presión $P(x, y)$ en los nodos de la malla (ver fig. V-5), consideran que la función $J(P)$ se minimiza para $P(x, y)$, la cual varía linealmente sobre cada elemento triangular. Resolviendo las integrales en la Ec. V-39 sobre el área A y la curva límite $\Gamma_i(x, y) = 0$, respectivamente.¹²

A continuación se diferencia con respecto a las presiones nodales, obteniéndose un sistema de ecuaciones de la siguiente forma:

$$(D + C_1 T) (\beta - \beta_1) = -\frac{T}{2} \frac{\partial \hat{w}}{\partial t} + \hat{\delta} \quad \dots(V-42)$$

Donde:

\vec{P} = Vector de presiones nodales.

$D = D \left[\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y} - \rho F_y, W \right]$ = matriz que mide la resistencia viscosa del flujo del fluido.

T = Matriz de áreas obtenida previamente en el problema de elasticidad.

\vec{B} = Vector de los efectos compresionales de la inyección del fluido en la pared del pozo, pérdida instantánea en el extremo de la fractura y vW_a asociado con el movimiento dentro de la frontera en la zona del extremo de la fractura.

Para un fluido Newtoniano, el coeficiente D es independiente de los gradientes de presión $\partial P/\partial x$ y $\partial P/\partial y - \rho F_y$. En este caso, la Ec. V-42 es lineal en P para valores dados de \vec{W} y $\partial \vec{W}/\partial t$.

Para un fluido No-Newtoniano, la matriz D depende de las presiones nodales, así que el sistema de ecuaciones es No-lineal en las presiones nodales, aún cuando \vec{W} y $\partial \vec{W}/\partial t$ estén dados. En cualquier caso, P y W están unidos fuertemente y No-linealmente a través de las condiciones elásticas (Ec. V-27) y las condiciones de Flujo de Fluido (Ec. V-42).

V.2.4. Avance de la Fractura.¹²

El Avance de la Fractura está controlado por los criterios de la Mecánica de la Fractura Linealmente Elástica. Es decir, el Avance de la Fractura ocurre siguiendo un camino tal que el factor de intensidad de esfuerzo K_I , se mantiene cercanamente igual al factor de intensidad crítico K_{Ic} , durante la extensión de la fractura en cada nodo. Debido a que la amplitud de la fractura $W_a(S)$, en el interior de la frontera de la región cercana al extremo de la fractura es proporcional al factor de intensidad de esfuerzo en la frontera, la condición para el Avance de la Fractura puede ser expresada en términos de $W_a(S)$ como sigue:

$$W_a(S) < W_c \quad , \quad \text{para que no avance la fractura} \quad \dots (V-43a)$$

y

$$W_a(S) > W_c \quad , \quad \text{para que avance la fractura} \quad \dots (V-43b)$$

donde

$$W_c = \frac{2(1-\nu)K_{Ic}}{G} \left[\frac{2a(S)}{\pi} \right]^{1/2} \quad \dots (V-44)$$

K_{Ic} es una medida de la intensidad del campo de esfuerzo elástico cerca del extremo de la fractura que es requerida para extender la misma. Para un sólido elástico frágil, este valor puede obtenerse a partir de pruebas de laboratorio de muestras prefacturadas siempre y cuando éstas sean lo suficientemente grandes para la inelasticidad, la región microfracturada cercana al extremo de la fractura es pequeña con relación a todas las longitudes características de la muestra.

La rigidez de la fractura de experimentos en rocas indica que K_{Ic} es del orden de 10^3 psi/pg^{1/2} para muchas rocas de interés. Tales valores son comúnmente usados en la simulación del Fracturamiento Hidráulico por medio de los Modelos 2D vistos en el capítulo IV, así como los Modelos 3D y P-3D analizados en este capítulo.

Se ha demostrado que la presión hidrostática incrementa el valor de K_{Ic} . La propagación de fracturas a través de largas distancias puede incrementar el tamaño de la zona de trabajo, por lo que se incrementan los valores para K_{Ic} . Tales incrementos en K_{Ic} pueden explicar la observación de que las presiones medidas en la pared del pozo son algunas veces mayores que las calculadas por los análisis de fracturamiento. Por otro lado, la presencia de fracturas naturales y la probabilidad del incremento de la fractura permite seguir un camino para reducir la resistencia causada por la presencia de las regiones fracturadas y débiles que tienden a reducir el valor efectivo de K_{Ic} .

Afortunadamente para muchas aplicaciones, la geometría de la fractura predicha es relativamente insensible al valor de K_{Ic} . Sin embargo, para casos con gradientes de presión relativamente pequeños en el Fluido Fracturante (por ejemplo, para grandes amplitudes de las fracturas resultantes de pequeños Módulos Elásticos o por el uso de fluidos de baja viscosidad), la geometría de la fractura depende grandemente del valor de K_{Ic} .

Idealmente, los valores para la velocidad en cada nodo a lo largo del frente de la fractura son aquellos para los cuales la amplitud de la misma a una distancia a desde el frente alcanza el valor crítico, W_c . Sin embargo, tales valores de v pueden obtenerse iterativamente debido a la necesidad de conocer la amplitud de la fractura abriendo al tiempo t_{n+1} . Estas iteraciones podrían ser extremadamente consumidoras de tiempo porque cada cambio en la geometría de la fractura requerirá una reevaluación de la matriz de rigidez elástica, K .

Clifton y Brown utilizan valores estimados para v en cada etapa y resuelven las Ecs. V-27 y V-42 para la presión y la amplitud de la fractura en t_{n+1} para el cambio estimado en el lugar del frente de la misma durante el intervalo de tiempo. Valores estimados para v pueden obtenerse usando la amplitud del extremo de la fractura al tiempo t_n para indicar si la velocidad de la fractura debe ser incrementada o disminuida durante el siguiente intervalo para alcanzar la amplitud del extremo de la fractura en el tiempo t_{n+1} más cercano al valor crítico, W_c .¹²

Durante el intervalo de tiempo, la fractura está avanzando una distancia para la cual el volumen proyectado en un elemento anular cerca del frente de la fractura llegará a ser igual al volumen correspondiente al perfil de la amplitud de la fractura con $W_a(S) = W_c$. La velocidad normal de un segmento de frontera es calculada a partir de la Ecuación de Conservación de Volumen, esta ecuación, cuando se resuelve para la velocidad normal, v es la siguiente:¹²

$$v = \frac{[\bar{d}_n - 2C_{l1} d (\bar{\beta} - \bar{\beta}_f)] \Delta S - dV/dt}{(\bar{W}_d + 2C_{o1}) \Delta S} \quad \dots (V-45)$$

Donde \bar{W}_d es la amplitud promedio de la fractura en el interior del elemento anular y dV/dt es la velocidad requerida del cambio de volumen del elemento anular si el volumen después del avance de la fractura es igual al volumen deseado correspondiente a la Amplitud de la Fractura $W_o(S) = W_c$.

Los términos testados indican las cantidades promedio sobre la longitud ΔS del elemento anular. La Ec. V-45 se puede interpretar como una ecuación para calcular un parámetro de control v , tal que el volumen de corrección dV , es mantenido cercano a cero. Una vez que la velocidad de la fractura es calculada, el avance de cada nodo es calculado multiplicando v por el incremento de tiempo.

V.2.5. Solución al Conjunto de Ecuaciones.¹²

La solución al conjunto del sistema de ecuaciones (Ecs. V-27 y Ec V-42) es obtenida al tiempo $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ a partir de la solución en el tiempo t_n , el gasto de inyección es conocido y el Avance de la Fractura correspondiente a la velocidad de la misma se obtiene con la Ec. V-45.

Integrando la Ec. V-42 sobre el intervalo de tiempo Δt puede ser aproximada la solución sustituyendo la derivada $\partial \bar{W} / \partial t$ por la siguiente aproximación diferencial:

$$\frac{\partial \bar{W}(x, y, t)}{\partial t} \cong \frac{\bar{W}(x, y, t_{n+1}) - \bar{W}(x, y, t_n)}{\Delta t} \quad \dots (V-46)$$

Y evaluando los términos restantes en un tiempo intermedio, $t_n + \theta \Delta t$, donde θ es un parámetro que satisface $0 < \theta < 1$. Las amplitudes de la fractura en la Ec. V-46 son evaluadas en los nodos con las mismas coordenadas (x, y) , a los dos tiempos.

Por definición, estos nodos son vistos como las posiciones nodales al tiempo $t_n + \theta \Delta t$. Las amplitudes de la fractura a esas posiciones al tiempo t_n son obtenidas por interpolación a partir de las amplitudes nodales de la fractura al tiempo t_n .

Integrando la Ec. V-42 sobre el intervalo de tiempo Δt se obtiene una relación de la siguiente forma:

$$(D + C_l T) \hat{\beta}_{n+\theta} + \frac{1}{2\theta \Delta t} T \hat{\psi}_{n+\theta} = \delta \quad \dots (V-47)$$

Donde:

$$\delta = \hat{\delta} + C_l T \hat{\beta}_f + \frac{1}{2\theta \Delta t} T \hat{\psi}_n$$

Y

$$\hat{\beta}_{n+\theta} = \beta_{n+\theta} - \sigma_{zz}^o(0), \quad \hat{\beta}_f = \beta_f - \sigma_{zz}^o(0)$$

Donde σ_{zz}^o es un vector constante con valores nodales iguales a los esfuerzos in-situ en el origen $x=0$, $y=0$, y el subíndice $n + \theta$ denota la evaluación al tiempo $t_n + \theta \Delta t$.

La Ec. V-27, aplicada al tiempo $t_{n+\theta}$, puede usarse para eliminar la amplitud de la fractura desconocida $\hat{\psi}_{n+\theta}$, en la Ec. V-47. Para la presión $\hat{\beta}_{n+\theta}$ se presenta la siguiente ecuación:

$$\left[\frac{1}{2\theta \Delta t} T K^{-1} T + D + C_l T \right] \hat{\beta}_{n+\theta} = \delta + \frac{1}{2\theta \Delta t} T K^{-1} T \hat{\sigma}_z \quad \dots (V-48)$$

Donde K^{-1} es la matriz inversa de K y $\hat{\sigma}_z$ es el vector de esfuerzos in-situ σ_{zz}^o reducido por el esfuerzo $\sigma_{zz}^o(0,0,0)$. La matriz $[\]$ es simétrica y puede ser compatible acondicionando el pozo, controlando el intervalo de tiempo Δt y siempre y cuando la malla sea satisfactoria.

La Ec. V-48 puede solucionarse iterativamente comenzando con:

$$\hat{\beta}_{n+\theta} \cong \beta_n$$

V.3. Ejemplos de Simulaciones.¹²

El análisis de los Modelos 3D hace posible examinar la validez de los Modelos 2D presentados en el Capítulo IV; para simular el crecimiento de la fractura para casos fuera de sus límites. En esta sección se indican algunas de las características obtenidas con Modelos 3D, los ejemplos de las simulaciones realizadas son ilustrados con la referencia geométrica de la *fig. V-6*.

Para cada uno de los casos, la suposiciones del frente de la fractura se muestran en etapas sucesivas del crecimiento de la misma.

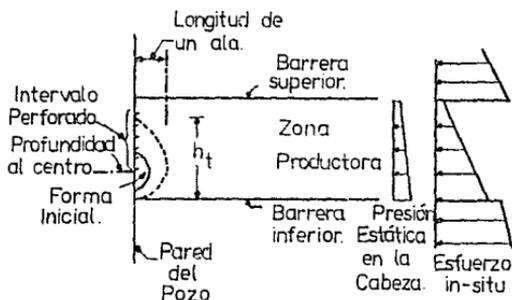


Fig. V-6. Referencia Geométrica.

La evolución de las cuatro cantidades principales también se muestra a continuación:

- 1 La longitud de la fractura, L (dos veces un ala de la longitud en la *fig. V-6*).
- 2 La altura total de la fractura h .
- 3 La amplitud de la fractura en la pared del pozo en el centro del intervalo disparado.
- 4 La presión diferencial $\Delta P = P - \sigma_{zz}^0$ en la misma posición.

En todos los ejemplos, el centro del intervalo disparado está en el centro de la fractura inicial.¹²

Propiedades de la Formación.	CASOS DE LAS SIMULACIONES. ¹²					
	A	B	C	D	E	F
<u>Propiedades de la Formación.</u>						
Módulo de Young, 10^{-3} psi	1000					
Relación de Poisson.	1/5					
Grad. de Esfuerzos, psi/pie.	0			4/5		
Contraste de Esfuerzos, psi.	200	20				20
Rigidez de Frac., psi/pg ^{1/2} .	1000					
<u>Propiedades del Fluido.</u>						
k' , lbf/seg ⁿ /pie ² .	$2 \cdot 10^{-5}$					1/40
n'	1					1/2
Grad. Hidrostático, psi/pie.	0			0.43		
Pérdida de Fluido, pie/min ^{1/2}	0				4/500	
Pérdida Instantánea de Fluido, gal/pie ² .	0					
<u>Perforaciones.</u>						
Intervalo Perforado, pie.	200	1				
# de Perforaciones.	200	1				
<u>Datos de Inyección.</u>						
Gasto de Bombeo, bl/min.	40					
Volumen Total, bl.	1727	1183	1428	98	1648	943
<u>Datos de Zona Productora.</u>						
Espesor Zona Productora, pie.	200	NA		NA		
<u>Geometría Inicial de Fractura.</u>						
Altura Total, pie.	180	90				
Longitud de un ala, pie.	30	45				

Tabla 5.2.- Datos de los ejemplos de las Simulaciones.

CASO A de la Tabla 5.2. Este caso es analizado con el objeto de proveer una comparación directa con las predicciones de los Modelos 2D. Por esta razón, la barrera de esfuerzos es incluida para mantener una altura de fractura constante, el fluido se supone Newtoniano. Además, para simplificar la comparación inicial se supone que la pérdida de fluido es despreciable. Son eliminadas las diferencias entre el Gradiente de la Presión Hidrostática del Fluido Fracturante y del esfuerzo in-situ. El intervalo disparado se considera es la altura completa de la zona productora para simular flujo horizontal en la pared del pozo.

Los frentes de la fractura a varios tiempos son mostrados en la fig. V-7A. Excepto cerca del extremo de la fractura a lo largo del eje "x", la altura de la fractura es cercanamente igual a la altura de la zona productora.

Las evoluciones de varios parámetros característicos de la fractura son mostradas en la fig. V-7B, en la cual las predicciones de los Modelos 3D (curvas sin símbolos), son comparadas con aquellas de los Modelos 2D. Se usan escalas logarítmicas con el mismo número de ciclos por pulgada para ambos ejes, horizontal y vertical, de tal forma que una línea con pendiente m corresponde a una cantidad que está variando según t^m .

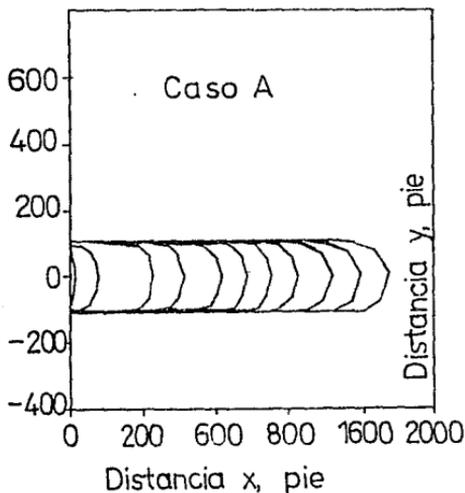


Fig. V-7A. Propagación del frente de fractura. CASO A.

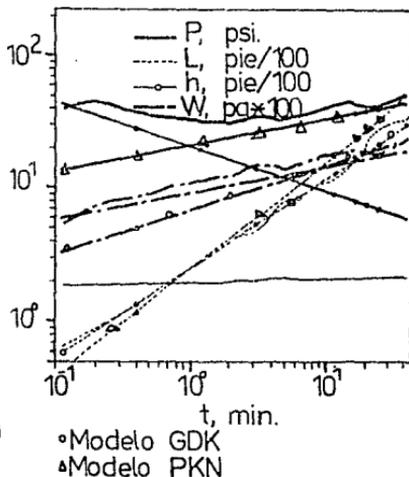


Fig. V-7B. Tiempo dependiente de la presión en la pared del pozo y de la geometría de la fractura.

En todas las figuras, la historia del tiempo para tiempos iniciales (esto es, $t < 25$ minutos en la *fig. V-7B*) está asociada con el inicio de la inyección de un fluido presurizado hacia el interior de una fractura.

Las oscilaciones de las soluciones obtenidas por las simulaciones son consecuencia de la naturaleza aproximada de las predicciones del avance de la fractura durante un intervalo de tiempo dado. Estas oscilaciones tienden a ser mayores para casos como el Caso A, donde hay un fuerte salto en el mínimo esfuerzo compresivo in-situ a través de la interfase entre la zona productora y los estratos limitantes.

Para estos casos los errores son menores al predecir el avance de la fractura dentro de los estratos limitantes obteniendo como resultado cambios significantes en las presiones y en la amplitud de la fractura. En estos casos la fractura es altamente elongada como se muestra en la *fig. V-7A*, y pocos nodos están disponibles para describir el frente de la misma en la zona productora.

Consecuentemente, el frente llega a ser puntiagudo y los errores en la predicción del avance en un solo nodo en el centro de la zona productora pueden tener un efecto significativo en la longitud, en la presión y en la amplitud graficadas en la *fig. V-7B*.

La oscilación puede reducirse disminuyendo el intervalo de tiempo y el tamaño de la malla; sin embargo, cuando las tendencias de la solución son claras (como en la *fig. V-7B*), el esfuerzo adicional de cálculo requerido es innecesario. Oscilaciones relativamente pequeñas ocurren en las simulaciones 3D en casos que involucran un pequeño contraste de esfuerzos y una migración vertical apreciable, lo que da como resultado fracturas de una relación de aspecto modesto de L/h .

Como se muestra en la *fig. V-7B*, una vez que la longitud de la fractura llega a ser mayor que la altura, las predicciones del Modelo PKN para la presión y la amplitud de la fractura en la pared

del pozo concuerdan muy bien con las predicciones del Modelo 3D. En particular en la Rigidez Elástica Efectiva en la pared del pozo, esto es, presión dividida por la amplitud de la fractura, es casi la misma para los dos modelos.

Estos resultados confirman la aplicabilidad en la pared del pozo del modelo para la Rigidez Elástica introducida por Perkins-Kern/Nordgren.

Para $L/h \gg 1$, sin embargo, la longitud de la fractura calculada por el Modelo PKN resulta significativamente mayor que la calculada por el Modelo 3D. Una forma cualitativa de entender esta diferencia es la siguiente:

El Modelo PKN sobreestima el valor de la amplitud de la fractura en la región cercana al frente de la misma. Porque las amplitudes a una posición, digamos x_1 , son calculadas a partir de la diferencia de presión actuando sobre el plano de la fractura en x_1 , puesto que las diferencias de presión en las posiciones cercanas a $x > x_1$ son considerablemente menores (a menudo negativa dentro de la fractura y ciertamente negativa para $x > L/2$). Puesto que las amplitudes son sobreestimadas, el Gradiente de Presión es fuertemente subestimado.

La integración de tal subestimación de los Gradientes de Presión da presiones en la pared del pozo que son menores que aquellas obtenidas a partir del Modelo 3D, como se muestra en la fig. V-7B. De esta manera con el Modelo PKN se obtienen amplitudes en la pared del pozo y sobre algún intervalo $x \ll L/2$ menores a aquellas predichas por el Modelo 3D. Estas pequeñísimas amplitudes en las regiones cercanas a la pared del pozo originan un menor almacenamiento de fluido según el Modelo PKN comparado con los Modelos 3D.

La subestimación del volumen de la fractura cerca de la pared del pozo provoca que se requiera de un volumen adicional mucho mayor que el requerido por la sobreestimación de las amplitudes cerca del frente de la fractura. Por lo tanto, se requiere una

longitud de la fractura adicional en el Modelo PKN para justificar el fluido inyectado.

A tiempos iniciales, cuando $L/h \ll 1$, la Rigidez Elástica Principal es asociada con la dirección "x", como se supone en el Modelo GDK. Sin embargo, la fractura no se propaga en línea recta, en el frente vertical como se supone en el Modelo GDK.

En lugar de esto, la fractura se expande desde su forma inicialmente elíptica hasta una forma aproximadamente circular con radio $h/2$ antes de que la fractura comience a propagarse en la dirección "x", sin cambiar esencialmente la forma del frente de la misma. La expansión inicial de la fractura desde una elipse hasta un círculo se puede entender notando que para una fractura elíptica sujeta a una presión uniforme, el Factor de Intensidad de Esfuerzo es mucho mayor en el eje menor de la misma. Debido a esto, la fractura tiende a avanzar a lo largo del eje menor hasta que la misma llega a ser aproximadamente circular.

Durante las etapas iniciales, cuando $L/h \ll 1$, el Modelo GDK exhibe una Rigidez Elástica Efectiva en la pared del pozo que es comparable con la obtenida del Modelo 3D. En el Modelo GDK, sin embargo, la presión decrece monótonamente con el incremento del tiempo y la Rigidez Elástica Efectiva en la pared del pozo resulta mucho menor que en el caso del Modelo 3D.

Este compartamiento es debido a que L/h es mucho mayor a 1, la Rigidez Elástica es asociada primeramente con la altura de la fractura, no con su longitud, como se supone en el Modelo GDK. No obstante de su pobre predicción de la Rigidez Elástica para tiempos prolongados, la longitud de la fractura calculada por el Modelo GDK corresponde notablemente bien con la calculada por el Modelo 3D. Esta correspondencia se mantuvo por más de dos décadas en el estudio del Fracturamiento Hidráulico.

Además, otras simulaciones han mostrado correspondencia razonablemente buena entre la longitud calculada por los Modelos

GDK y 3D. De esta manera, parece que el Modelo GDK da una muy buena indicación de la longitud de la fractura en pozos de fracturas contenidas (Caso A).

Un segundo ejemplo, es el Caso B de la Tabla 5.2 el cual fue diseñado para representar el caso del crecimiento de la fractura de eje simétrico analizado por Perkins-Kern, Geertsma y De Klerk y Abe y colaboradores.

Los datos para este caso son los mismos que para el Caso A, excepto la barrera de esfuerzos, la cual es ignorada y el intervalo perforado es reducido a una pequeña región en el origen para simular el punto origen. Como se esperaba, los frentes avanzan siguiendo una configuración de eje simétrico (ver fig. V-8A).

Una buena similitud (fig. V-8B) es obtenida entre los valores de la longitud de la fractura, la presión en la pared del pozo y la amplitud de la fractura obtenida de la simulación 3D. Una mejor correspondencia tanto en radios y la amplitud de la fractura es obtenida con el Modelo GDK.

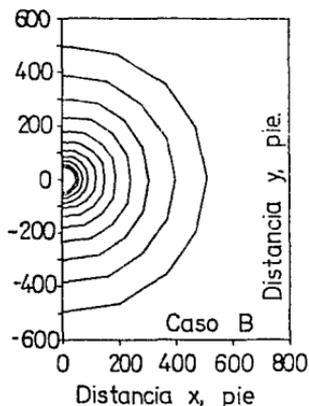


Fig.V-8A. Propagación del frente de fractura. CASO B.

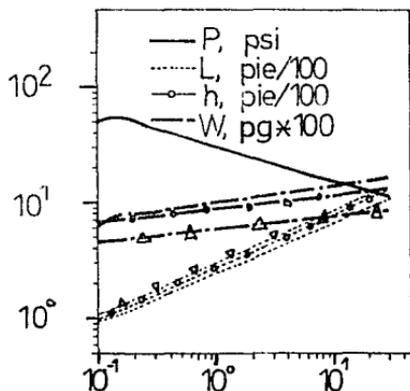


Fig.V-8B. Tiempo dependiente de la presión en la pared del pozo y de la geometría de la fractura.

El Caso C de la Tabla 5.2 es un ejemplo en el cual la fractura es confinada longitudinalmente en la zona productora, pero el crecimiento vertical de la fractura tiene un efecto significativo sobre la geometría de la misma. Este caso es el mismo que el Caso A, excepto que la barrera de esfuerzos se reduce de 200 a 20 *psi*. Las posiciones de las fracturas a varios tiempos son mostradas en la *fig. V-9A*.

Las historias del tiempo correspondiente de la presión en la pared del pozo y las dimensiones características de la fractura son mostradas en la *fig. V-9B*. La comparación de las *figuras V-7A y V-9A* muestra que la migración vertical de la fractura reduce fuertemente el ritmo de crecimiento de la longitud de la misma.

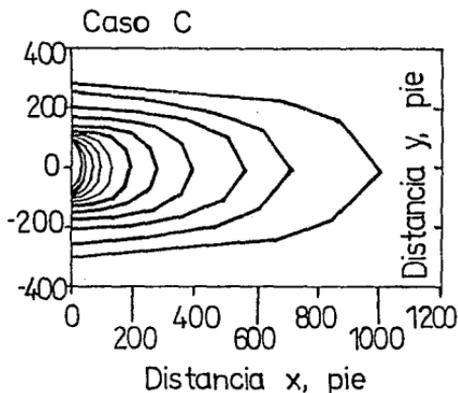


Fig.V-9A. Propagación del frente de fractura.

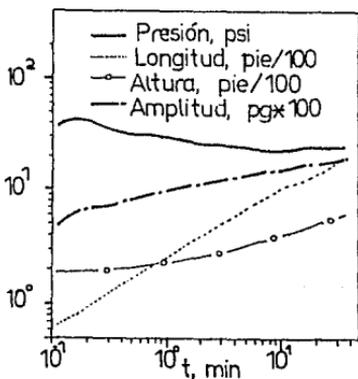


Fig.V-9B. Tiempo dependiente de la presión en la pared del pozo y de la geometría de la fractura.

La migración vertical de la fractura tiene un efecto mucho más débil sobre la amplitud de la misma. También cuando ocurre una migración vertical considerable la presión en las etapas posteriores no se incrementa tan grandemente como para el caso del pozo contenido en el Caso A.

En el Caso C, ocurre una migración vertical importante, pero la relación h/L es muy pequeña, por lo que los Modelos P-3D ofrecen una atractiva alternativa a los Modelos 3D.

En los Modelos P-3D, las variaciones de la altura de la fractura son contabilizados por aproximación. Una ventaja importante de los Modelos P-3D es la inminente reducción del tiempo de cómputo requerido.

Un ejemplo de la migración vertical de la fractura con un fuerte Gradiente de Esfuerzos es contemplado en el Caso D de la Tabla 5.2. El Gradiente de Esfuerzos (0.8 psi/pie) para el mínimo esfuerzo in-situ en la formación es mucho más grande que el Gradiente de la Presión Hidrostática (0.43 psi/pie) del Fluido Fracturante. Sin otra barrera presente, la fractura migra con mayor intensidad hacia arriba como se muestra en la *fig. V-10A*.

Las historias del tiempo de la presión y la altura, y la de la longitud y amplitud de la fractura para éste caso de migración vertical fugitiva son mostradas en la *fig. V-10B*. Para tiempos iniciales la presión decrece conforme la fractura migra verticalmente dentro de las regiones de bajo esfuerzo in-situ.

Sin embargo, debido a lo anterior la fractura adopta una forma elongada debido a que los Gradientes de Presión por fricción en la dirección vertical llegan a ser muy grandes, por lo que la presión en la pared del pozo tiene que incrementarse para mantener el gasto de inyección.

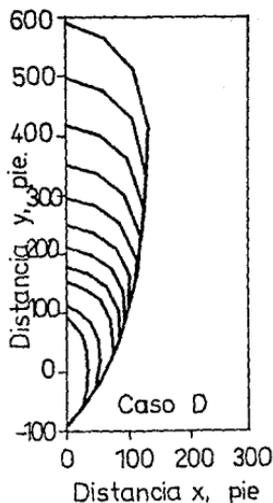


Fig. V-10A. Propagación del frente de fractura.

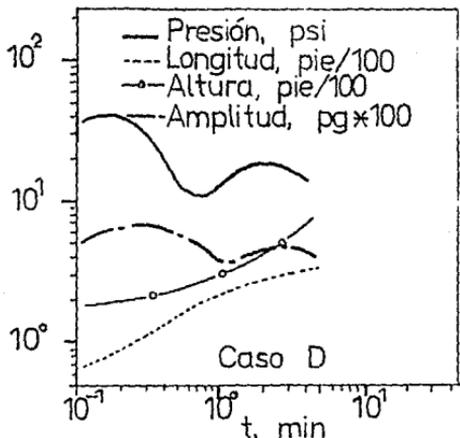


Fig. V-10B. Tiempo dependiente de la presión en la pared del pozo y de la geometría de la fractura.

Cualitativamente, las historias presión/tiempo para el Caso A y el Caso C son similares cuando decrece la presión durante el Avance de la Fractura a lo largo de una considerable fracción de su frente, pero aumenta conforme la fractura toma una forma altamente elongada.

De la misma forma, a tiempos mayores el Avance Vertical de la Fractura para el Caso C resulta análogo al Avance Horizontal de la Fractura del Caso A.

Los Casos A, B y C dan una indicación de la relación de los Modelos 3D para simplificar más los Modelos idealizados. El análisis de las limitaciones de los Modelos idealizados es ciertamente una aplicación de los Modelos 3D, pero la aplicación primaria de estos modelos es para casos en los cuales los modelos elementales no son aplicables.

Los Modelos 3D incluyen en su estudio, fluidos múltiples, transporte del sustentante y los efectos de la variación de la temperatura sobre los Fluidos Fracturantes. Tres ejemplos adicionales son incluidos en la Tabla 5.2 para ilustrar algunos de los efectos, como es el caso de Fluidos No-Newtonianos con Pérdida de Fluido.

El Caso E, es el mismo que el Caso A, excepto que se supone que ocurre una importante pérdida de fluido. Cuando ocurre la pérdida, el efecto principal es una reducción en la Velocidad del Avance de la Fractura en la dirección horizontal (ver *fig. V-11*). A tiempos mayores la presión y la amplitud de la fractura en la pared del pozo también se incrementan, pero más lentamente que para el Caso A.

El Caso F es el mismo que el Caso C, excepto que se emplea un fluido más viscoso y No-Newtoniano. Debido a la alta viscosidad efectiva, las presiones y las amplitudes de la fractura son mucho mayores (ver *fig. V-12*).

La presión aumenta originando un incremento en la migración vertical de la fractura, dando como resultado grandes amplitudes y mayores alturas. La longitud se ve fuertemente reducida para el mismo volumen de fluido inyectado.

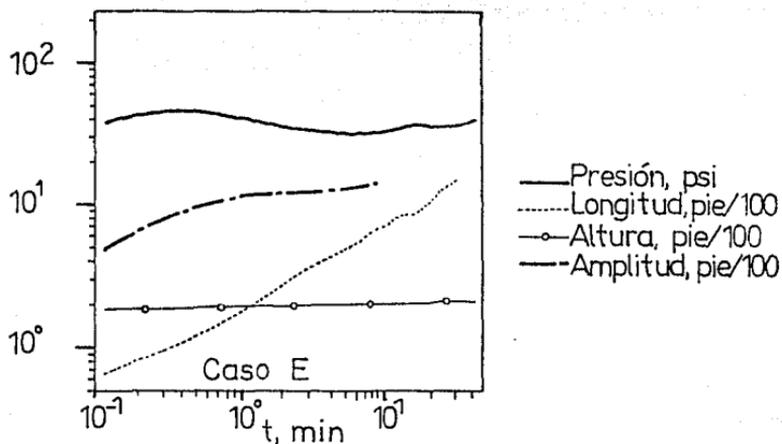


Fig. V-11. Tiempo dependiente de la presión en la pared del pozo y de la geometría de la fractura.

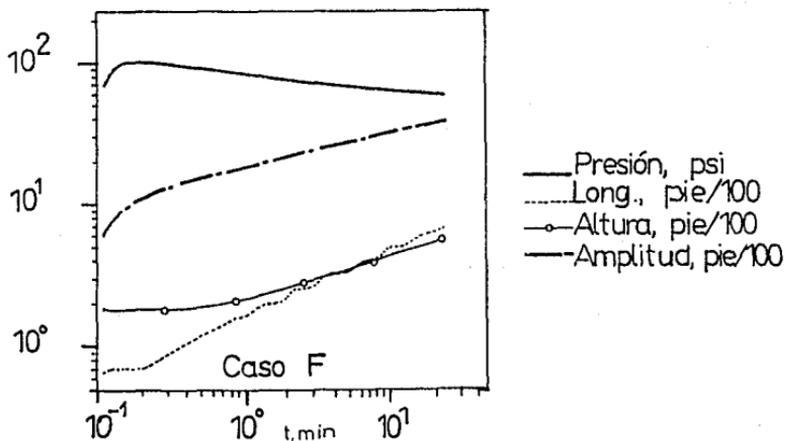


Fig. V-12. Tiempo dependiente de la presión en la pared del pozo y de la geometría de la fractura.

Una comparación de las dimensiones finales de la fractura con los valores obtenidos por los Modelos 2D esta dada en la Tabla 5.3. El Modelo PKN tiende a predecir una mayor fractura que la obtenida en los Modelos 3D. De los Modelos 2D listados, el que mejor concuerda con los Modelos 3D es el obtenido por el Modelo GDK.

M O D E L O	Long. de la Fractura. (pie)	Máxima Amplitud en la Pared del Pozo. (pg)
3D	1800	0.224
PKN	2305	0.212
GDK	1662	0.239

Tabla 5.3. Comparaciones de las Dimensiones Finales de la Fractura.

Las comparaciones de las predicciones de un Modelo P-3D con las de un Modelo 3D son mostradas en las *figs.* V-13 y V-14 para los Casos A y C de la Tabla 5.2, respectivamente. Para el caso del pozo contenido, Caso A, el Modelo P-3D da predicciones similares a las del Modelo PKN. Una buena similitud está dada en la tendencia y la amplitud de la fractura. Sin embargo, para un Modelo PKN, la longitud de la fractura es mayor que la obtenida por un Modelo 3D.

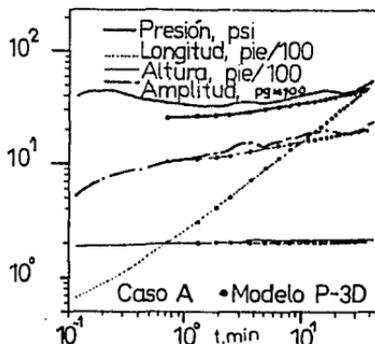


Fig. V-13. Tiempo dependiente de la presión en la pared del pozo y de la geometría de la fractura.

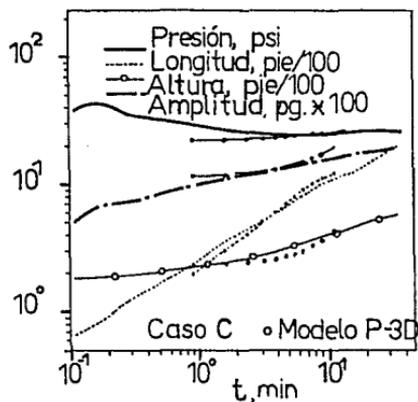


Fig. V-14. Tiempo dependiente de la presión en la pared del pozo y de la geometría de la fractura.

Para el Caso C, el Modelo P-3D proporciona una aproximación razonable al Modelo de migración vertical de la fractura durante las primeras etapas del tratamiento. A un tiempo mayor, sin embargo, cuando la diferencia de presión en la pared del pozo excede las 20 *psi* de la barrera de esfuerzos, la altura calculada por el Modelo P-3D se vuelve infinita. Por esta razón los cálculos de los Modelos P-3D terminan en el tiempo mostrado en la *fig.* V-14.

Cuando la barrera de esfuerzos es mayor a la calculada por el Modelo P-3D se establece el crecimiento de la altura de la fractura. Se han hecho esfuerzos para extender el rango de aplicación de los Modelos P-3D para casos con pequeñas barreras de esfuerzos (para usar las aproximaciones de un Gradiente Vertical de Presión en la Fractura). Sin embargo, hasta ahora no existen correlaciones adecuadas que sirvan como punto de comparación con los Modelos 3D.

Finalmente, la *fig.* V-15 muestra la geometría de cada uno de los modelos y sus respectivas alturas de Migración en los Estratos Adyacentes.

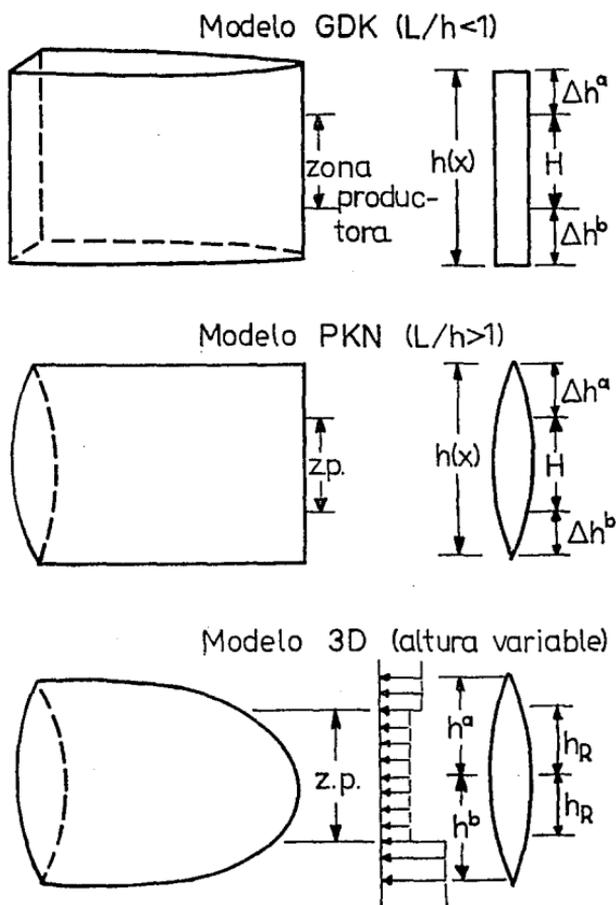


Fig. V-15. Representación Esquemática de los Modelos

**CONCLUSIONES
Y
RECOMENDACIONES.**

Las predicciones de la Geometría de una Fractura están basadas en modelos simples y homogéneos adecuados para la mayoría de los casos. En este Trabajo de Tesis se presentaron algunos de los principales Modelos Teóricos para predecir las dimensiones de una Fractura Hidráulicamente Inducida desarrollados hasta la actualidad.

En el Fracturamiento Hidráulico de un pozo de aceite o gas, la presión del Fluido Fracturante en la vecindad del pozo se incrementa hasta exceder la resistencia de la roca en la formación alrededor del pozo. Una vez que se ha iniciado la Fractura, ésta se propagará en la dirección del mínimo esfuerzo horizontal efectivo in-situ debido a la acción continua del Fluido Fracturante. Cabe recordar que la Fractura Vertical se crea en un plano perpendicular a dicho esfuerzo.

Los principales Modelos Teóricos de predicción de las dimensiones de la Fractura abordados en este trabajo fueron los conocidos como de la primera y segunda generación; esto es, los Modelos 2D desarrollados por Perkins-Kern y Geertsma-de Klerk, y los Modelos P-3D y 3D, respectivamente.

Respecto a los Modelos de la primera generación, 2D, se tiene:

- La Geometría del tipo Perkins-Kern/Nordgron (PKN) es un Modelo que considera una altura constante, pero tiene una amplitud vertical de forma elíptica (geometría vertical limitada).
- La Geometría del tipo Geertsma-de Klerk (GDK) es también un Modelo que considera una altura y una amplitud constantes (geometría verticalmente limitada).
- La Geometría de tipo Radial, está basada en el Modelo GDK, pero se puede ajustar a la Geometría del Modelo PKN; por lo que las características principales de dichos Modelos aún siguen siendo válidas.

Una aportación importante de este trabajo es la presentación de los anteriores Modelos considerando la Pérdida de Fluido hacia la formación. Con el trabajo realizado por Carter para determinar el Coeficiente de Pérdida se obtiene un valor de las dimensiones de la Fractura más cercano a la realidad.

Con respecto a los Modelos de la segunda generación, P-3D y 3D, se concluye que son modelos que simulan la propagación vertical y lateral de una Fractura Vertical, en ambos modelos se desecha la suposición de una altura constante y uniforme. En estos modelos se supone que los planos verticales se deforman independientemente, la altura de la Fractura depende de la posición a lo largo de la misma y del tiempo, se toma en cuenta un componente vertical del Flujo de Fluido y además la longitud de la Fractura es mayor que su altura.

En la realidad una Fractura Vertical puede desarrollarse en un medio estratificado, como un función de las propiedades de los estratos, así como de las características del Fluido Fracturante; por lo anterior, los Modelos P-3D y 3D consideran la Distribución de Esfuerzos en el espacio, el Flujo de Fluido en la Fractura, la Pérdida de Fluido, el Transporte del Sustentante y la Transferencia de Calor. Los dos últimos conceptos por su importancia, complejidad y extenso desarrollo no son tema de este trabajo.

En la Distribución de los Esfuerzos en el espacio se hace notar que la diferencia de éstos en el estrato productor y adyacentes es de gran influencia en la Geometría resultante de la Fractura. A la diferencia entre los Esfuerzos se le denomina Contraste de Esfuerzos. A mayor Contraste de Esfuerzos existe una mayor restricción en el crecimiento vertical de la Fractura.

El Flujo de Fluido se trabajó diferente en estos modelos porque en los P-3D se considera Flujo Laminar en la dirección "x", mientras que en los 3D igualmente se considera Flujo Laminar pero en las direcciones "x" y "y". En ambos modelos el flujo sigue la Ley de Potencias y además se considera la Pérdida de Fluido.

Los métodos de solución en los Modelos 2D son relativamente más sencillos en comparación con los métodos de los Modelos P-3D y 3D, debido principalmente a que en los últimos, los tiempos de cómputo son muy altos dado que el área de fractura se tiene que discretizar en una malla, lo cual equivale a realizar más veces los cálculos en base a matemáticas muy avanzadas y métodos numéricos muy complejos.

Cabe señalar que en las simulaciones presentadas se tomaron los datos proporcionados por los autores; sin embargo, se debe estar conciente que en la realidad la obtención de los datos constituye una tarea difícil por lo que en algunas ocasiones se tienen que suponer.

En la práctica la experiencia constituye el punto de partida para predecir los resultados de una manera más precisa, por lo que en base a esta se han podido deducir ciertas recomendaciones fundamentales, tales como:

- Una fractura se trabajará como vertical cuando la profundidad del estrato productor exceda los 3000 pies y, se manejarán presiones de fracturamiento por lo general mayores de 2500 psi.^p
- Se tendrá una geometría radial cuando el intervalo inyector sea pequeño comparado con la extensión de la Fractura.
- Si la heterogeneidad del yacimiento no se analiza correctamente, el diseño de las dimensiones de la Fractura no será representativo de la realidad. Por lo que se deberá hacer uso de toda la información física disponible.

Finalmente, la aportación de esta Tesis es la presentación a nivel licenciatura de los Modelos P-3D y 3D por lo que las formulaciones correspondientes a matemáticas avanzadas fueron tratadas superficialmente, siendo básicamente una introducción para el estudio a niveles superiores del tema.

APENDICES.

APENDICE A.

ECUACION FUNDAMENTAL DE FLUJO.

Se basa en:

- Principio de Conservación de Masa.
- Ecuación de Movimiento (LEY DE DARCY).
- Ecuación de Estado (ABARCA EL TIPO DE FLUIDO A MANEJAR).

A) Principio de Conservación de Masa.

ESTABLECE QUE:

$$\left[\begin{array}{l} \text{Cantidad de} \\ \text{Masa que en-} \\ \text{tra en } \Delta t. \end{array} \right] - \left[\begin{array}{l} \text{Cantidad de} \\ \text{Masa que} \\ \text{Sale en } \Delta t. \end{array} \right] + \left[\begin{array}{l} \text{Masa neta intro-} \\ \text{ducida fuente o} \\ \text{sumidero en } \Delta t. \end{array} \right] = \left[\begin{array}{l} \text{Cantidad de} \\ \text{Masa Acumu-} \\ \text{lada en } \Delta t. \end{array} \right]$$

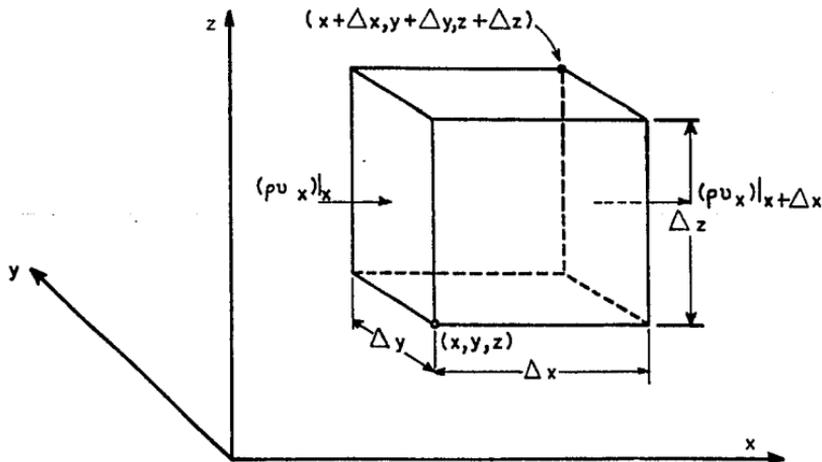


Fig. A-1. Volumen Elemental que muestra los flujos.

APENDICE A.

Todo Aquello que Aporta una Masa = FUENTE (Pozo inyector.)

Todo Aquello que Extrae una Masa = SUMIDERO (Pozo productor.)

$$\begin{aligned} & \left[\text{Gasto M\u00e1sico} \right]_{\text{que entra}} - \left[\text{Gasto M\u00e1sico} \right]_{\text{que sale}} = \left[\rho v_x \Delta y \Delta z - \left[\rho v_x + \Delta(\rho v_x) \right] \Delta y \Delta z \right] + \\ & \left[\rho v_y \Delta x \Delta z - \left[\rho v_y + \Delta(\rho v_y) \right] \Delta x \Delta z \right] + \left[\rho v_z \Delta x \Delta y - \left[\rho v_z + \Delta(\rho v_z) \right] \Delta x \Delta y \right] = \\ & - \Delta(\rho v_x) \Delta y \Delta z - \Delta(\rho v_y) \Delta x \Delta z - \Delta(\rho v_z) \Delta x \Delta y = \left[\frac{\rho \phi|_t - \rho \phi|_{t+\Delta t}}{\Delta t} \right] \Delta x \Delta y \Delta z \end{aligned}$$

Dividiendo todos los miembros entre; $\Delta x \Delta y \Delta z$ as\u00ed como multiplic\u00e1ndolos por (-1) y obteniendo sus respectivos l\u00edmites se obtiene el equivalente al concepto de derivada.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta(\rho v_x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta(\rho v_y)}{\Delta y} + \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta(\rho v_z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\rho \phi|_{t+\Delta t} - \rho \phi|_t}{\Delta t} \right]$$

Esto es, la Ecuaci\u00f3n de Continuidad en coordenadas cartesianas.

$$\frac{\partial (\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho v_z)}{\partial z} = \frac{\partial (\rho \phi)}{\partial t}$$

*Nota cambiando el sentido de flujo, esto es, en el sentido en el que se incrementa se tendr\u00e1:

$$\frac{\partial (\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho v_z)}{\partial z} = - \frac{\partial (\rho \phi)}{\partial t}$$

APENDICE A.

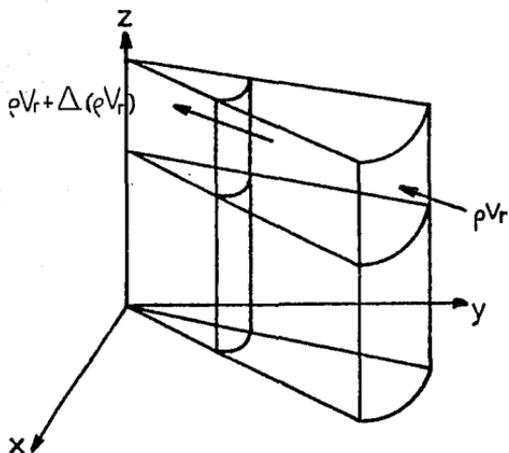


Fig. A2. Volumen Elemental utilizado en la derivación de la Ecuación de Continuidad para Flujo Radial.

Para el caso de Coordenadas Cilíndricas (Flujo Radial), se utilizará la *fig. A2*, con el siguiente desarrollo.

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{l} \text{Gasto} \\ \text{Másico} \\ \text{que sale} \end{array} \right] - \left[\begin{array}{l} \text{Gasto} \\ \text{Másico} \\ \text{que entra} \end{array} \right] &= \left[\left[\rho v_r - \Delta(\rho v_r) \right] r \Delta\theta \Delta z \right] - \rho v_r (r + \Delta r) \Delta\theta \Delta z \\ &= \left[\rho v_r (r \Delta\theta \Delta z) - \rho v_r (\Delta r \Delta\theta \Delta z) \right] + \left[-\rho v_r r \Delta\theta \Delta z - \Delta(\rho v_r) r \Delta\theta \Delta z \right] = \\ &= \left[\frac{\rho\phi_{t+\Delta t} - \rho\phi_t}{\Delta t} \right] r \Delta\theta \Delta z \Delta r \quad \text{para áreas infinitamente} \\ &\quad \text{pequeñas.} \end{aligned}$$

Dividiendo todos los miembros entre $r\Delta\theta\Delta z\Delta r$, así como obteniendo sus respectivos límites, obtenemos:

APENDICE A.

$$-\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \left[\frac{\rho v_r}{r} \right] - \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta (\rho v_r)}{\Delta r} \right] = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\rho \phi|_{t+\Delta t} - \rho \phi|_t}{\Delta t} \right]$$

Resultando entonces:

$$-\frac{(\rho v_r)}{r} - \frac{\partial (\rho v_r)}{\partial r} = \frac{\partial (\rho \phi)}{\partial t}$$

Multiplicando por (-1), se tiene:

$$\frac{(\rho v_r)}{r} + \frac{\partial (\rho v_r)}{\partial r} = -\frac{\partial (\rho \phi)}{\partial t}$$

$$\frac{(\rho v_r)}{r} + \frac{\partial (\rho v_r)}{\partial r} = \frac{1}{r} \left[\rho v_r + r \frac{\partial (\rho v_r)}{\partial r} \right] = \left[-\frac{\partial (\rho \phi)}{\partial t} \right]$$

Donde la anterior ecuación es conocida como la Ecuación de Continuidad para Flujo Radial. Esta se puede escribir como:

$$\frac{1}{r} \left[\frac{\partial (r \rho v_r)}{\partial r} \right] = \left[-\frac{\partial (\rho \phi)}{\partial t} \right] \quad \dots (2A)$$

ECUACION DE MOVIMIENTO (LEY DE DARCY).

$$\vec{v} = -\frac{K\rho}{\mu} \nabla \phi_T$$

Donde:

$$\phi_T = \Delta \phi_T = \phi_2 - \phi_1$$

Haciendo un análisis de Energía por Unidad de Masa y despreciando las variaciones de velocidad por ser pequeñas y estar elevadas al cuadrado.

$$\phi_T = g (h_2 - h_1) + \frac{1}{2} (v_2^2 - v_1^2) + \frac{v}{m} (P_2 - P_1)$$

APENDICE A.

$$\Phi_T = \Delta\Phi_T = g (\Delta h) + \frac{V}{n} (\Delta P)$$

Si $\rho = \frac{m}{V}$ entonces;

$$\Delta\Phi_T = g (\Delta h) + \frac{(\Delta P)}{\rho}$$

Utilizando diferenciales parciales e integrando.

$$\Phi_T = \int g \partial h + \int \frac{(\partial P)}{\rho}$$

La anterior expresión se conoce como POTENCIAL DE HUBBERT.

Sustituyendo en:

$$\vec{v} = - \frac{k \rho}{\mu} \nabla \Phi_T$$

Si además: $h = \text{Sen } \theta (\Delta x)$

Donde: Δx es la longitud del desplazamiento (+), o sea, $(x_1 - x_2)$, y $\text{Sen } \theta$ está medido en la dirección de las manecillas del reloj, representando la dirección del flujo y $h = 0$ es el Nivel de Referencia, entonces se obtiene:

$$\vec{v} = - \frac{k \rho}{\mu} \nabla \left[\int g \partial h + \int \frac{\partial P}{\rho} \right] \quad \dots (3A)$$

Obteniendo para cada Dirección:

$$\vec{v}_x = - \frac{k \rho}{\mu} \left[g \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial P}{\rho \partial x} \right]$$

APENDICE A.

$$\vec{v}_x = -\frac{k_x \rho}{\mu} \left[\beta \frac{\partial x (-\text{Sen } \theta)}{\partial x} + \frac{\partial P}{\rho \partial x} \right]$$

$$\vec{v}_x = -\frac{k_x \rho}{\mu} \left[\frac{\partial P}{\partial x} - \rho \beta (\text{Sen } \theta) \right] \quad \dots (4A)$$

De manera análoga para las otras direcciones se tiene:

$$\vec{v}_y = -\frac{k_y \rho}{\mu} \left[\frac{\partial P}{\partial y} - \rho \beta (\text{Sen } \theta) \right] \quad \dots (5A)$$

$$\vec{v}_z = -\frac{k_z \rho}{\mu} \left[\frac{\partial P}{\partial z} - \rho \beta (\text{Sen } \theta) \right] \quad \dots (6A)$$

Se observa que para 3A y 4A, los términos correspondientes a los efectos gravitacionales valen cero. Si además en la dirección "z" se desprecia dicho término, tenemos:

$$\vec{v}_x = -\frac{k_x}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \quad \dots (4A')$$

$$\vec{v}_y = -\frac{k_y}{\mu} \frac{\partial P}{\partial y} \quad \dots (5A')$$

$$\vec{v}_z = -\frac{k_z}{\mu} \frac{\partial P}{\partial z} \quad \dots (6A')$$

De la misma forma para Flujo Radial, se tendrá:

$$v_r = -\frac{k_r}{\mu} \frac{\partial P}{\partial r} \quad \dots (7A)$$

La Ecuación de Darcy para Flujo Turbulento es:

$$\beta v_x^2 + v_x = -\frac{k_x}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \quad \text{donde } \beta = \text{Factor de Turbulencia.}$$

APENDICE A.

ECUACION DE ESTADO.

Representa la variación de la densidad de un fluido con respecto a los cambios de presión y temperatura.

A partir de;

$$C = - \frac{1}{V} \left[\frac{\partial V}{\partial P} \right]_T$$

Si $V = (m / \rho)$, entonces;

$$C = - \frac{1}{(m/\rho)} \left[\frac{\partial (m/\rho)}{\partial P} \right]_T$$

Como:

$$C = - \frac{1}{(m/\rho)} \left[\frac{m \cdot \partial(1/\rho)}{\partial P} \right]_T = - \frac{m}{(m/\rho)} \left[- \frac{\partial(\rho)}{\partial P \rho^2} \right]_T = \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial \rho}{\partial P} \right]_T$$

Esta ecuación es válida para temperatura constante.

$$C \int_{P_0}^P dP = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{\partial \rho}{\rho}$$

$$C (P - P_0) = \ln (\rho / \rho_0)$$

$$\rho = \rho_0 e^{C(P - P_0)}$$

Si se aproxima el término $e^{C(P-P_0)}$ con la Serie de Taylor, usando sólo los dos primeros términos se simula un comportamiento lineal (fluidos prácticamente incompresibles), con lo que se tiene:

$$e^{C(P - P_0)} = 1 + C (P - P_0); \text{ o sea,}$$

$$\rho = \rho_0 [1 + C (P - P_0)] \quad \dots (8A)$$

**AMPLITUDES DE FRACTURA RESULTANTES A PARTIR DE FLUIDOS NEWTONIANOS
EN FLUJO LAMINAR Y TURBULENTO.**

FLUJO LAMINAR:

La amplitud puede ser estimada haciendo las siguientes consideraciones, en el caso de amplitudes restringidas:

1. Considerar que la fractura es vertical y de una altura h constante (la altura es independiente de la distancia a partir de la pared del pozo).

2. Considerar que la forma de la sección transversal de la fractura en cualquier punto es esencialmente elíptica y que la máxima amplitud en ese punto es proporcional a la diferencia entre la presión y el esfuerzo en ese punto. La Ecuación de la Elipse es tomada como la Ecuación de Sneddon para un sistema Bi-dimensional.

3. Considerar que la caída de presión puede ser estimada por medio de la Ecuación de Fanning en la cual el Radio Hidráulico para una elipse es sustituido.

4. Considerar que la presión del fluido en los límites de la fractura es igual al esfuerzo tectónico total perpendicular al plano de la fractura.

5. Considerar que no se tiene fuga del fluido inyectado.

La Ecuación de Fanning puede ser escrita como:

$$\frac{dP}{dx} = \frac{2 f v^2 \rho}{D_e g_c} \quad \dots (1B)$$

donde
$$g_c = 32.2 \frac{\text{lbm pie}}{\text{lb seg}^2}$$

donde para flujo laminar:

$$f = \frac{16 \mu}{D_e v \rho} \quad \dots (2B)$$

μ = viscosidad, lbm / (pie - seg).

D_e = diámetro equivalente, pie.

v = velocidad, (pie/seg).

ρ = densidad, (lbm/pie³).

Para una elipse de excentricidad prácticamente cero Perry tiene desarrollado:

$$D_e = \gamma R_H = \gamma \left[\frac{W}{2.546} \right] \quad \dots (3B)$$

donde:

γ = constante de proporcionalidad.

R_H = radio hidráulico, pie.

$$R_H = \frac{\text{Area}}{\text{Perímetro Mojado.}} = \frac{\left[\frac{\pi W h}{4} \right]}{2h}$$

W = diámetro menor de la elipse (igual a la amplitud máxima de la fractura), pie.

Lamb tiene desarrollado para una elipse de excentricidad cercana a cero y para Flujo Laminar:

$$\frac{dP}{dx} = \frac{32 Q \mu}{\pi h W^3 g_c} \quad \dots (4B)$$

Pero se sabe que:

$$v = \frac{2 Q}{\pi W h} \quad \dots (5B)$$

$Q = \text{gasto, (pie}^3/\text{seg.)}$.

$h = \text{altura, pie}$.

Sustituyendo las Ecs. 2B, 3B y 5B en la Ec. 1B.

$$\frac{dP}{dx} = \frac{2 \left[\frac{16 \mu}{D_o v \rho} \right] v^2 \rho}{\sigma_c D_o} = \frac{32 \mu v}{\sigma_c D_o^2} = \frac{32 \mu \left[\frac{2 Q}{\pi W h} \right]}{\sigma_c \left[\frac{\gamma W}{2.546} \right]^2} = \frac{64 \mu Q (2.546)^2}{\gamma^2 W^3 \pi h \sigma_c}$$

Igualando la expresión anterior con la Ec. 4B :

$$\frac{64 \mu Q (2.546)^2}{\gamma^2 W^3 \pi h \sigma_c} = \frac{32 Q \mu}{\pi h W^3 \sigma_c}$$

por lo tanto:

$$\gamma^2 = 12.96; \quad \text{o sea} \quad \gamma = 3.6 \quad \dots (6B)$$

Considerando que $\gamma = 3.6$ es el valor que debe ser usado para todos los casos en adelante, para ambos Flujos Turbulentos y Laminar. El Número de Reynolds del fluido fluyendo en la fractura puede escribirse como:

$$N_{Re} = \frac{D_o v \rho}{\mu}$$

pero $Q = v A$, por lo tanto $v = Q/A$ y el área de una elipse es $A = \pi a b$, donde a y b son los radios mayor y menor, respectivamente, que a su vez equivalen a un medio de la altura y un medio de la amplitud de la fractura, entonces:

$$N_{Re} = \frac{(\gamma R_H) \left[\frac{Q}{At} \right] \rho}{\mu} = \frac{\gamma \left[\frac{\text{Area}}{\text{perim. humed.}} \right] \left[\frac{Q}{At} \right] \rho}{\mu}$$

Haciéndose notar que At difiere del área de la elipse, siendo:

$$At = \frac{\pi W h}{2} \quad (\text{área de flujo})$$

Como es una elipse de excentricidad cercana a cero, el perímetro humedecido es dos veces la altura, por lo tanto:

$$N_{Re} = \frac{3.6 Q \rho}{4 h \mu}$$

Hasta la ecuación anterior se manejaron las respectivas unidades de cada una de las variables mencionadas con anterioridad. Para utilizar unidades prácticas de campo se obtiene:

$$N_{Re} = 7.81 * 10^3 \frac{Q(\text{bl/min}) \text{ Sp Gr}}{h(\text{pie}) \mu(\text{cp})} \quad \dots (7B)$$

Afortunadamente, es bastante sencillo de predecir si un Fluido Newtoniano estará en Flujo Turbulento o Laminar. En un trabajo clásico, Reynolds descubrió que la turbulencia comenzará cuando el Número de Reynolds (la relación de fuerzas inerciales y viscosas) excede un cierto valor.

El fluido estará en Flujo Laminar en la fractura si el Número de Reynolds es menor de 2500. Sustituyendo $N_{Re} < 2500$ en la Ec. 7B se observa que el Flujo Laminar se tendrá si:

$$2500 < 7.81 * 10^3 \frac{Q (\text{Sp Gr})}{h \mu}$$

$$\frac{2500}{7.81 * 10^3} < \frac{Q (\text{Sp Gr})}{h \mu}$$

$$0.32 < \frac{Q (\text{Sp Gr})}{h \mu}$$

APENDICE B.

T.K. PERKINS y L.R. KERN.

En la región laminar, el Factor de Fricción está dado por la Ec. 2B. Se puede comparar la relación de este Factor de Fricción para placas paralelas con datos experimentales los cuales han sido reportados en la literatura.

Sustituyendo las Ecs 2B, 3B y 6B en la 1B, se obtiene:

$$\frac{dP}{dx} = \frac{32 (2.546)^2 Q \nu \mu}{(3.6)^2 W^2 \sigma_c} \quad \dots (8E)$$

Sustituyendo la ecuación correspondiente a la velocidad en la anterior obtenemos:

$$\frac{dP}{dx} = \frac{2 \left(\frac{16 \mu}{D_o \nu \rho} \right) v^2 \rho}{D_o \sigma_c} = \frac{32 \mu v}{D_o^2 \sigma_c}$$

$$\frac{dP}{dx} = \frac{32 \mu \left[\frac{2 Q}{\pi W h} \right]}{\left[\frac{3.6}{2.546} \right]^2 W^2 \sigma_c} = 0.3164 \frac{\mu Q}{W^3 h}$$

Donde:

- P = presión, (lb/pie²)
- x = distancia, pie.
- μ = viscosidad, (lbm/pie-seg).
- h = altura, pie.
- W = amplitud, pie.
- Q = gasto, (pie³/seg).

Convirtiendo la presión a (lb/peg²) para trabajar en lo sucesivo en unidades consistentes con los esfuerzos σ y el Módulo de Young que se trabajarán también en (lb/peg²), quedando la anterior expresión:

$$\frac{dP}{dx} = 0.0022 \frac{\mu Q}{W^3 h} \quad \dots \dots \dots (9B)$$

APENDICE B.

T.K. PERKINS y L.R. KERN.

Para una fractura restringida en la cima y en la base Sneddon desarrolló:

$$W_x = \frac{2(1-\nu^2)(P_x - \sigma)h}{E} \dots (10B)$$

Sustituyendo la Ec. 10B en la Ec. 9B, se obtiene:

$$\frac{dP}{dx} = 0.0022 \frac{\mu Q E^3}{8 h^4 (1-\nu^2)^3 (P-\sigma)^3}$$

Integrando la expresión anterior a partir del extremo de la fractura donde $(P - \sigma) = 0$, o sea, $P = \sigma$.

$$\int_{\sigma}^P (P - \sigma)^3 dP = \int_{\sigma}^x (0.000274) \frac{\mu Q E^3}{h^4 (1-\nu^2)^3} dx$$

Resolviendo el miembro izquierdo de la igualdad, se obtiene:

$$\int_{\sigma}^P (P - \sigma)^3 dP = \frac{(P - \sigma)^4}{4}$$

Resolviendo también el lado derecho, finalmente se obtiene:

$$\frac{(P - \sigma)^4}{4} = (0.000274) \frac{\mu Q E^3}{h^4 (1-\nu^2)^3} X$$

Despejando la presión de la expresión anterior:

$$P = \left[(0.000274) \frac{4 \mu Q E^3}{h^4 (1-\nu^2)^3} X \right]^{1/4} + \sigma$$

Sustituyendo la presión obtenida en la Ec. 10B ;

$$W = \frac{2(1-\nu^2) \left[\left[(0.000274) \frac{4 \mu Q E^3}{h^4 (1-\nu^2)^3} X \right]^{1/4} + \sigma - \sigma \right] h}{E}$$

Considerando $\nu = 0.15$, la expresión anterior se reduce a:

$$W = 0.361B \left[\frac{\mu Q x}{E} \right]^{1/4}$$

Convirtiendo la expresión anterior a unidades prácticas se llega finalmente a la siguiente ecuación:

$$W(\text{pg}) = 0.3B \left[\frac{Q(\text{bl/min}) \mu(\text{cp}) L(\text{pie})}{E(\text{psi})} \right]^{1/4} \dots (11B)$$

FLUJO TURBULENTO:

Las suposiciones básicas para este caso son los mismos que las manejadas en el caso anterior. Si el Número de Reynolds es mayor a 2500, se puede considerar:

$$f = 0.0125$$

El Factor de Fricción depende de la rugosidad de las paredes de la fractura; al valor de $f = 0.0125$ le corresponde un valor de rugosidad de alrededor de 0.02.

Sustituyendo las Ecs. 3B, 5B, 6B y 10B; junto con el valor dado de f en la Ec. 1B, se obtiene:

$$\frac{dP}{dx} = \frac{2 (0.0125) (2 Q / \pi W h)^2 \rho}{3.6 (W / 2.546) g_c}$$

$$\frac{dP}{dx} = 1.545 \times 10^{-6} \frac{Q^2 \rho}{W^3 h^2} \dots (12B)$$

Donde:

- P = presión, (lbr/pg²)
- x = distancia, pie.
- Q = gasto, (pie³/seg)
- ρ = densidad, (lbm/pie³).
- W = amplitud, pie.
- h = altura, pie.

Si siguiendo la misma secuencia utilizada para flujo laminar, se procederá a sustituir la Ec. 10B en la Ec. 12B:

$$\frac{dP}{dx} = 1.545 \times 10^{-6} \frac{\rho Q^2 E^3}{8 \lambda^5 (1 - \nu^2)^3 (P - \sigma)^3}$$

Integrando la expresión anterior a partir del extremo de la fractura donde $(P - \sigma) = 0$, o sea, $P = \sigma$.

$$\int_{\sigma}^P (P - \sigma)^3 dP = \int_0^x (193 \times 10^{-6}) \frac{\rho Q^2 E^3}{\lambda^5 (1 - \nu^2)^3} dx$$

Resolviendo el miembro izquierdo de la igualdad, se obtiene:

$$\int_{\sigma}^P (P - \sigma)^3 dP = \frac{(P - \sigma)^4}{4}$$

Resolviendo también el lado derecho, finalmente se obtiene:

$$\frac{(P - \sigma)^4}{4} = (193 \times 10^{-6}) \frac{\rho Q^2 E^3}{\lambda^5 (1 - \nu^2)^3} X$$

Despejando la presión de la expresión anterior:

$$P = \left[(0.030158) \frac{\rho Q^2 E^3}{\lambda^5 (1 - \nu^2)^3} X \right]^{1/4} + \sigma$$

Sustituyendo la presión obtenida en la Ec. 10B ;

$$W = \frac{2(1 - \nu^2) \left[\left[(0.030158) \frac{\rho Q^2 E^3}{\lambda^5} X \right]^{1/4} + \sigma - \sigma \right]}{E} h$$

Considerando $\nu = 0.15$, la expresión anterior se reduce a:

$$w = 0.05896 \left[\frac{\rho Q^2 x}{E h} \right]^{1/4}$$

Convirtiendo la expresión anterior a unidades prácticas se llega finalmente a la siguiente ecuación:

$$w(\text{pg}) = 0.60 \left[\frac{Q^2 (\text{bl/min}) Sp Gr L(\text{pie})}{E(\text{psi}) h(\text{pie})} \right]^{1/4} \dots (13B)$$

Donde; *Sp Gr* = gravedad específica del Fluido Fracturante.
h = altura de una fractura restringida, pie.

AMPLITUD DE FRACTURAS UTILIZANDO FLUIDOS NO NEWTONIANOS EN FLUJO LAMINAR.

Si son usados Fluidos No-Newtonianos tales como Geles o Emulsiones, entonces es necesario determinar las propiedades de flujo de dichos fluidos antes de determinar la amplitud de la fractura.

La relación entre el esfuerzo cortante y la velocidad de corte para muchos Fluidos No-Newtonianos se puede expresar de la siguiente forma:

$$\tau = k' \left(\frac{du}{dy} \right)^{n'} \quad \dots (1C)$$

- Donde τ = *esfuerzo cortante.*
- u = *velocidad = f(y).*
- k', n' = *constantes.*
- $\left(\frac{du}{dy} \right)$ = *velocidad de corte.*

El comportamiento de corte de la mayoría de los Fluidos Fracturantes, de hecho puede ser representado por la expresión anterior. Las constantes k' y n' se pueden obtener con el Viscosímetro de Fann. O bien, trabajando la Ec. 1C analíticamente empleando logaritmos en ambos miembros de la igualdad, observándose que el término n' corresponde a la pendiente y k' a la ordenada de una recta. Dicha recta se encuentra en un plano, en el cual la abscisa representa la velocidad de corte y la ordenada al esfuerzo cortante (τ).

La amplitud de la fractura se derivara en términos de las constantes k' y n' , con ayuda de la *fig. C-1.*

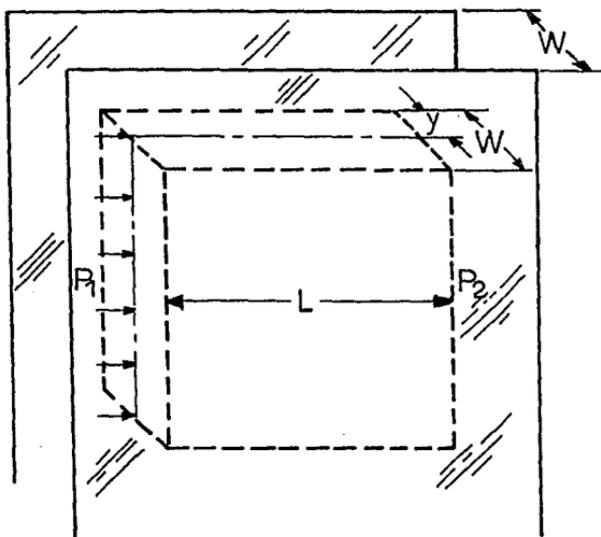


Fig. C-1. Flujo laminar del fluido entre placas paralelas.

Por conveniencia no hay aceleración, la fuerza por unidad de altura actuando a la derecha del elemento del fluido de espesor "y" y longitud L se igualará a la fuerza por unidad de altura actuando hacia la izquierda como se muestra en la siguiente ecuación:

$$y \Delta P = L \tau \quad \dots (2C)$$

Sustituyendo la Ec. 1C en 2C se tiene:

$$y \Delta P = L \left[k' \left(\frac{du}{dy} \right)^n \right] \quad \dots (3C)$$

Trabajando la expresión anterior para obtener una ecuación para la amplitud en términos de n' y k' , además considerando flujo estacionario. Despejando "du" de la Ec. 3C e integrando:

$$\int_0^u du = \int_y^{v/2} \left[\frac{y \Delta P}{L k'} \right]^{1/n'} dy = \left[\frac{\Delta P}{L k'} \right]^{1/n'} \int_y^{v/2} y^{1/n'} dy$$

Resolviendo:

$$u = \left[\frac{\Delta P}{L k'} \right]^{1/n'} \left[\frac{y^{(n'+1)/n'}}{(n'+1)/n'} \right]_{y}^{v/2}$$

$$u = \left[\frac{n'}{n'+1} \right] \left[\frac{\Delta P}{k' L} \right]^{1/n'} \left[\left[\left(\frac{w}{2} \right)^{\frac{n'+1}{n'}} - y^{\frac{n'+1}{n'}} \right] \right] \dots (4C)$$

El gasto total dentro de las dos alas de la fractura está dado por la siguiente ecuación:

$$Q = 4 \int_0^{v/2} h u dy$$

Sustituyendo la velocidad y resolviendo, se obtiene:

$$Q = 4 h \left[\frac{n'}{n'+1} \right] \left[\frac{\Delta P}{k' L} \right]^{1/n'} \left[\left[\left(\frac{w}{2} \right)^{\frac{n'+1}{n'}} y - \frac{2n'+1}{2n'+1} y^{\frac{2n'+1}{n'}} \right] \right]_{y=0}^{v/2}$$

$$Q = 4h \left[\frac{n'}{n'+1} \right] \left[\frac{\Delta P}{k' L} \right]^{1/n'} \left[\left[\left(\frac{w}{2} \right)^{\frac{n'+1}{n'}} \left(\frac{w}{2} \right) - \frac{\left(\frac{w}{2} \right)^{\frac{2n'+1}{n'}}}{\frac{2n'+1}{n'}} \right] \right]_{y=0}^{v/2}$$

$$Q = 4h \left[\frac{n'}{n'+1} \right] \left[\frac{\Delta P}{k' L} \right]^{1/n'} \left[\left(\frac{W}{2} \right)^{\frac{2n'+1}{n'}} - \frac{\left(\frac{W}{2} \right)^{\frac{2n'+1}{n'}}}{\frac{2n'+1}{n'}} \right]^{n'/2}$$

Si;

$$1 - \frac{n'}{1+2n'} = \frac{1+2n'-n'}{1+2n'} = \frac{1+n'}{1+2n'}$$

$$Q = 4 \left[\frac{1+n'}{2n'+1} \right] \left[\frac{\Delta P}{k' L} \right]^{1/n'} H \left(\frac{W}{2} \right)^{\frac{2n'+1}{n'}} \left[\frac{n'}{n'+1} \right]$$

$$Q = 4 \left[\frac{n'}{2n'+1} \right] \left[\frac{\Delta P}{k' L} \right]^{1/n'} h \left(\frac{W}{2} \right)^{\frac{2n'+1}{n'}} \dots (5C)$$

Reagrupando la anterior ecuación se obtiene el Gradiente de Presión en forma explícita:

$$\left[- \frac{dP}{dx} \right] = 2k' Q^{n'} \left[\frac{2n'+1}{n'} \right] \frac{1}{h^{n'}} \frac{1}{W^{2n'+1}} \dots (6C)$$

El Gradiente de Presión cuando fluyen Fluidos Newtonianos en un conducto elíptico de excentricidad cero es $16/3\pi$ veces más grande que el Gradiente de Presión cuando fluye el mismo fluido entre placas paralelas bajo las mismas condiciones de altura, máxima amplitud y gasto. Se supone que esta misma relación se ajusta aproximadamente para Fluidos No-Newtonianos, entonces la siguiente ecuación se aplica a fracturas elípticas:

$$\left[- \frac{dP}{dx} \right] \approx 2k' \frac{16}{3\pi} \left[\frac{2n'+1}{n'} \right] \frac{1}{h^{n'}} \frac{Q^{n'}}{W^{2n'+1}} \dots (7C)$$

Sustituyendo en la Ecuación de Sneddon para la amplitud de una fractura elíptica en Dos-dimensiones (10B) y suponiendo que el

gasto es independiente de "x" e integrando la ecuación anterior y sustituyendo el resultado de (P - o) dentro de la Ec. 10B se obtiene la siguiente ecuación:

$$w = \left[\frac{2(1 - \nu^2)h}{E} \right] \left[\frac{(2n'+2)\phi E^{2n'+1} Q^{n'} L}{[2(1 - \nu^2)h]^{2n'+1}} \right]^{\frac{1}{2n'+2}} \dots (8C)$$

Donde:

$$\phi = 32/3\pi k' \left(\frac{2n'+1}{n'} \right)^{n'} \frac{1}{h^{n'}}$$

La Ec. 8C puede ser escrita de una manera más conveniente usando unidades prácticas como se muestra finalmente en la siguiente ecuación:

$$w = 12 \left[\left(\frac{2^7}{3\pi} \right) (n'+1) \left(\frac{2n'+1}{n'} \right)^{n'} \right] \times \left[\frac{0.9775}{144} \right] \left[\frac{5.61}{60} \right]^{n'} \left[\frac{Q^{n'} k' L h^{1-n'}}{E} \right]^{\frac{1}{2n'+2}} \dots (9C)$$

Donde:

W = máxima amplitud de la fractura en la pared del pozo, pg.

k' = medida de las propiedades de flujo de un fluido No-Newtoniano, lb seg^{n'}/pie².

n' = medida de las propiedades de flujo de un fluido No-Newtoniano, adm.

Q = gasto total de inyección, bl/min.

L = longitud de la fractura medida desde la pared del pozo, pie.

h = altura de la fractura, pie.

E = Módulo de Young de la formación, psi.

EFFECTO DE LA PERMEABILIDAD DE LA FORMACION SOBRE LAS DIMENSIONES DE LA FRACTURA.¹

LONGITUD DE LA FRACTURA.

De la comunicación entre el volumen de la fractura y el espacio poroso de una formación permeable resulta la pérdida de fluido y entre otras cosas, un incremento de la presión de poro en la zona inmediata a la fractura. De esta forma la formación se expande localmente, reduciendo la amplitud de la fractura. Sin embargo, en la mayoría de los casos prácticos este efecto de expansión sobre la amplitud de la fractura es insignificamente pequeño.

Aunque, para una longitud dada (L), el efecto de pérdida de fluido sobre la amplitud de la fractura es por lo tanto pequeño, la pérdida de fluido definitivamente reduce la extensión de la fractura para un tiempo de bombeo dado. Con lo anterior se puede decir que el conocimiento del gasto de inyección y el tiempo de bombeo, no son suficientes para determinar con exactitud la predicción de la extensión de una fractura.

El volumen de fractura para cualquier tiempo t , se determina mediante:

$$V = \frac{\pi}{4} h L w_v$$

para un ala de la fractura; teniéndose entonces:

$$V = \frac{\pi}{2} h L w_v \quad \dots (10)$$

cuando la fractura se extiende para ambos lados.

El Balance de Materia enuncia:

$$\frac{dV}{dt} = Q - Q_l - S_p \frac{dA}{dt} \quad \dots (20)$$

donde Q_l = Gasto de pérdida por filtración hacia la formación.

S_p = Pérdida Instantánea.

A = Superficie total expuesta (incrementándose con el tiempo) de la fractura.

$A \cong 4 L h$ (Fractura de dos Alas).

El gasto de pérdida por filtración por unidad de superficie expuesta, está indicado por u , teniendo:

$$Q_t = \int_0^A u \, dA = \int_0^t u \frac{dA}{dt} \, dt \quad \dots (3D)$$

Para situaciones más prácticas:

$$u = \frac{C}{\sqrt{\Delta t}} \quad \dots (4D)$$

donde: C = Coeficiente de Fluido Fracturante.

$\Delta t = t - \tau$ = Tiempo de exposición del fluido en la superficie permeable de A .

Sustituyendo la Ec. 4D en la 3D, se obtiene:

$$Q_t = C \int_0^t \frac{dA}{dt} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \quad \dots (5D)$$

De la sustitución de las ecuaciones del volumen de la fractura y la pérdida por filtración, 1D y 5D respectivamente, en la Ecuación de Balance de Materia 2D, se obtiene:

$$\frac{\pi}{2} h w_{vo} \frac{dL}{dt} = Q - C \int_0^t \frac{dA}{dt} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} - S_p \frac{dA}{dt}$$

Si; $A = 4 L h$ entonces,

$$\frac{\pi}{2} h w_{vo} \frac{dL}{dt} = Q - 4Ch \int_0^t \frac{dL}{dt} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} - 4hS_p \frac{dL}{dt}$$

$$\frac{Q}{h} = \left[\frac{\pi}{2} w_{vo} + 4S_p \right] \frac{dL}{dt} + 4C \int_0^t \frac{dL}{dt} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \quad \dots (6D)$$

Observándose que la amplitud de la fractura fue independiente

de la longitud de la misma, la solución pudo ser relativamente sencilla.

El valor w_{v_0} "constante" está elegido de tal forma que la solución verdadera está aproximada. Por lo tanto, w_v en la ecuación anterior es sustituido por βw_{v_0} donde w_{v_0} es la amplitud cerca de la pared del pozo al momento de parar el bombeo y β es un factor que ajusta la solución aproximada de la Ec. 6D, haciéndola numéricamente igual a la exacta para el caso donde $S_p = 0$ y $C = 0$. La solución exacta se obtiene la Ecuación de Balance de Materia $dV/dt = Q$. La integración directa nos lleva a $V = Q t$, utilizando la Ec. 1D se obtiene la longitud de la fractura, dada como:

$$Q t_0 = \frac{\pi}{2} h L_0 w_{v_0} \quad \text{o sea,}$$

$$L_0 = \frac{2 Q t_0}{\pi h w_{v_0}}$$

Considerando $C = 0$, $S_p = 0$ y w_v como constante e integrando la Ec. 6D se tiene la siguiente expresión:

$$L_0 = \frac{4 Q t_0}{3\pi h w_v}$$

Notando que donde aparece el valor de $(\pi/2) w_{v_0}$ a partir de la Ec. 6D el valor correcto es $(3\pi/4) w_v$ y manejando el factor $\beta = 2/3$ como la solución aproximada. Aplicando la Transformada de Laplace y el Teorema de Convolución a la Ec. 6D se tiene la siguiente ecuación:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{Q}{h} \left[\frac{2}{\pi w_{v_0} + \beta S_p} \right] e^{\alpha_L^2} \text{erfc } \alpha_L \quad \dots (7D)$$

en la cual

$$\alpha_L = \frac{\beta C \sqrt{\pi t}}{\pi w_{v_0} + \beta S_p}$$

La Transformada de Laplace $L \{F(t)\}$ de cualquier función $F(t)$

está definida como:³

$$L\{F(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt \quad \dots (8D)$$

Esta integral es fácilmente evaluada y su solución para varias funciones $F(t)$ se encuentran en tablas estandarizadas de transformadas de Laplace.³

Una propiedad importante de la Transformada de Laplace es que se puede expresar como un producto de dos funciones como lo enuncia el Teorema de Convolución. El Teorema de Convolución de dos funciones $F(t)$ y $G(t)$ está definido como:³

$$F(t) * G(t) = \int_0^t F(\delta) G(t - \delta) d\delta \quad \dots (9D)$$

Se puede demostrar que la Transformada de Laplace del producto anterior esta dada como:

$$L\{F(t) * G(t)\} = L\{F(t)\} L\{G(t)\} \quad \dots (10D)$$

Integrando la Ec. 7D se obtiene:

$$L = \frac{Q}{32 \pi h c^2} (\pi W_{\infty} + 8 S_p) \left[\frac{2 \alpha_L}{\sqrt{\pi}} - 1 + e^{\alpha_L^2} \operatorname{erfc} \alpha_L \right] \quad \dots (11D)$$

Para el producto $e^{\alpha_L^2} \operatorname{erfc} \alpha_L$ se conocen varias expresiones para el rango de valores de α . Por ejemplo para $\alpha > 2$, la expansión asintótica es de la siguiente forma:

$$e^{\alpha_L^2} \operatorname{erfc} \alpha_L \approx \frac{1}{\alpha \sqrt{\pi}} \left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2m-1)}{(2 \alpha_L^2)^m} \right]$$

la expansión asintótica anterior es una de las más aceptables.

También se demuestra que para $\alpha \gg 1$, $e^{\alpha^2} \operatorname{erfc} \alpha_L + \frac{1}{\alpha \sqrt{\pi}} \ll 1$,
 donde $\frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} \gg 1$. Así que para $\alpha \gg 1$, la Ec. 11D se reduce finalmente a la siguiente ecuación:

$$L + \frac{1}{2\pi} \frac{Q \sqrt{L}}{h C} \quad \dots (12D)$$

Este resultado es independiente de S_p y esta fórmula práctica permite estimar la extensión del tamaño de la longitud de la fractura.

AMPLITUD DE LA FRACTURA.

La distribución de presión en una fractura que se propaga de un Modo Linealmente Elástico está dada por las siguientes relaciones:

$$P = \bar{P} \quad \text{para} \quad 0 \leq f_L \leq f_{Lo}$$

$$P = 0 \quad \text{para} \quad f_{Lo} \leq f_L \leq 1$$

Considerando la Condición de Barenblatt y que $f_{Lo} \rightarrow 1$, se obtiene:^a

$$f_{Lo} = \operatorname{Sen} \frac{\pi S}{2 F} \quad \dots (13D)$$

La forma de la fractura resultante de la distribución de presión anterior está dada por la siguiente ecuación:

$$W = \frac{2(1-\nu)}{\pi G} \bar{P} L \left[f_L \ln \frac{\left| 1 - \frac{f_{Lo}}{f_L} \left[\frac{1 - f_L^2}{1 - f_{Lo}^2} \right]^{1/2} \right|}{1 + \frac{f_{Lo}}{f_L} \left[\frac{1 - f_L^2}{1 - f_{Lo}^2} \right]^{1/2}} \right]$$

$$- f_{Lo} \ln \left[\frac{1 - \left(\frac{1 - f_L^2}{1 - f_{Lo}^2} \right)^{1/2}}{1 + \left(\frac{1 - f_L^2}{1 - f_{Lo}^2} \right)^{1/2}} \right] \dots (14D)$$

Se puede demostrar que la Máxima Amplitud de la Fractura en la pared del pozo está dada por la siguiente ecuación:

$$W_v = \frac{2(1-\nu)}{\pi G} \bar{P} L f_{Lo} \ln \frac{(1 - f_{Lo}^2)^{-1/2} + 1}{(1 - f_{Lo}^2)^{-1/2} - 1} \dots (15D)$$

Cuando $f_{Lo} \rightarrow 1$ la ecuación anterior se reduce a:

$$W_v \approx \frac{4(1-\nu)}{\pi G} \bar{P} L f_{Lo} \sqrt{1 - f_{Lo}^2} \dots (16D)$$

Donde se tiene una buena Condición de Equilibrio, la cuál está dada por:

$$(\bar{P} - S) \approx \frac{2}{\pi} \bar{P} f_{Lo} \sqrt{1 - f_{Lo}^2} \dots (17D)$$

Combinando las dos últimas ecuaciones (Ecs. 16D y 17D), se obtiene:

$$W_v \approx \frac{2(1-\nu)}{G} L (\bar{P} - S) \dots (18D)$$

donde:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} L (\bar{P} - S) \dots (19D)$$

Por lo tanto, la Ec. 17D se puede expresar como:

$$W_v \approx \frac{4(1-\nu^2)}{G} L (\bar{P} - S) \dots (20D)$$

Para un exceso de presión en la fractura dado por el Esfuerzo Tectónico, la Amplitud de la Fractura en el origen es de está

manera una primera aproximación independiente de f_{Lo} ; esto es, no depende de la extensión de la región donde la presión es igual a cero. A continuación se verá si la distribución de presión en una fractura de la forma dada en la Ec. 14D (fig. IV-2) corresponde a la distribución supuesta y que valor deberá ser dado para \bar{F} .

Se tiene que:

$$\frac{P_{fL}}{P_v} = 1 - \frac{\int_0^{f_L} \frac{d f_L}{w^3}}{\int_0^{f_{Lo}} \frac{d f_{Lo}}{w^3}} \quad \dots (21D)$$

Donde:

$$w = w / w_v.$$

La presión en la pared del pozo está dada por la siguiente ecuación:

$$P_v = \frac{12 \mu Q L}{h w_v^3} \int_0^{f_{Lo}} \frac{d f_{Lo}}{w^3} \quad \dots (22D)$$

Al igual que como en la Ec. 16D, cuando $f_{Lo} \rightarrow 1$ una buena aproximación para evaluar la integral de la Ec. 22D está dada por la siguiente expresión:

$$\int_0^{f_{Lo}} \frac{d f_{Lo}}{w^3} \approx \frac{7}{4 \sqrt{1 - f_{Lo}^2}}$$

Sustituyendo la expresión anterior en la Ec. 22D se obtiene la siguiente ecuación para la evaluación de P_v :

$$P_v \approx \frac{21 \mu Q L}{w_v^3 h \sqrt{1 - f_{Lo}^2}} \quad \dots (23D)$$

Despejando w_v^3 de la Ec. 23D se obtiene la siguiente ecuación:

$$w_v^3 \approx \frac{21 \mu Q L}{P_v h \sqrt{1 - f_{Lo}^2}} \quad \dots (24D)$$

Despejando el radical de la Ec. 17D se obtiene:

$$\sqrt{1 - f_{Lo}^2} \approx \frac{(\bar{F} - S) \pi}{2 \bar{F} f_{Lo}} \quad \dots (25D)$$

Sustituyendo en la Ec. 24D las Ecs. 15D y 18D se llega a:

$$\left[\frac{2(1-\nu)}{G} L (\bar{F} - S) \right]^3 \approx \frac{21 \mu Q L}{h \frac{(\bar{F} - S) \pi}{2 \bar{F} f_{Lo}} P_v}$$

$$(\bar{F} - S)^4 \approx \frac{42 \mu Q L \bar{F} f_{Lo} G^3}{h \pi P_v B (1-\nu)^3 L^3}$$

$$(\bar{F} - S) = \sqrt[4]{\frac{21 \mu Q}{4 \pi h L^2} \left[\frac{G}{1-\nu} \right]^3 \frac{\bar{F}}{P_v}} \quad \dots (26D)$$

Despejando de la Ec. 18D el término de $(\bar{F} - S)$ y sustituyendo en la Ec. 26D, se obtiene:

$$\frac{w_v G}{2(1-\nu)L} = \sqrt[4]{\frac{21 \mu Q}{4 \pi h L^2} \left[\frac{G}{1-\nu} \right]^3 \frac{\bar{F}}{P_v}}$$

Despejando w_v de la expresión anterior e introduciendo el denominador en el radical, finalmente se obtiene:

$$w_v = \sqrt[4]{\frac{84(1-\nu) \mu Q L^2}{\pi G h} \frac{\bar{F}}{P_v}} \quad \dots (27D)$$

La anterior ecuación esta expresada en el Capítulo IV como la Ec. IV-28.

ECUACION DE CARTER QUE CONSIDERA LOS EFECTOS DE LA PERDIDA SOBRE LAS DIMENSIONES DE LA FRACTURA.

Carter estudió los elementos básicos para describir los efectos de la Pérdida de Fluido sobre la propagación de la Fractura. Las suposiciones que él hace son que la amplitud y la altura de la fractura son constantes, así como también lo es el gasto: entonces, sólo la longitud $L(t)$ es variable. La función de la velocidad de la pérdida de fluido, normal a las caras de la fractura, tiene la siguiente forma:

$$v_l = \frac{C_l}{\sqrt{t - \tau}} \quad \dots (1E)$$

Donde C_l es el Coeficiente de Pérdida de Fluido y generalmente es medido a través de pruebas de filtración y τ representa el tiempo al cual se inicia la filtración. Haciendo un Balance de Materia se tiene:

$$\frac{dV}{dt} = W h_f \frac{dL}{dt} = Q - Q_l \quad \dots (2E)$$

donde

$$Q_l = \int_0^{A_{fl}} v_l dA_{fl} = \int_0^{A_{fl}} v_l \frac{dA_{fl}}{d\tau} d\tau = C_l \int_0^L \frac{dA_{fl}}{d\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{t - \tau}} \quad \dots (3E)$$

APENDICE E.

CARTER.

y $A_{fl} = 2 h_f L$, con lo cual se tiene:

$$\frac{Q}{h_f} = 2 C_l \int_0^L \frac{dL}{d\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{t - \tau}} + W \frac{dL}{dt} \quad \dots (4E)$$

con lo cual se llega a la siguiente expresión:

$$v = \frac{Q t}{\alpha^2} \left[e^{\alpha^2} \operatorname{erfc} \alpha + \frac{2 \alpha}{\sqrt{\pi}} - 1 \right] = W h_{fl} \quad \dots (5E)$$

donde:

$$\alpha = \frac{2 C_l}{W} \sqrt{\pi t}$$

Una aproximación matemática similar ha sido usada por Marx y Langenheim para predecir las pérdidas de calor por conducción para la cima y la base de la formación durante la inyección del fluido caliente dentro del yacimiento. Ellos presentaron valores tabulados para la expresión entre paréntesis en la Ec. 5E para su rango de valores de 0 a 10. Por ejemplo para $\alpha > 4$ se tiene:⁷

$$e^{\alpha^2} \operatorname{erfc} \alpha \approx \frac{\Gamma}{\alpha \sqrt{\pi}}$$

Para valores grandes de α se tiene:

$$W h_{fl} + \frac{2 Q_o t}{\alpha \sqrt{\pi}} \quad \dots (6E)$$

Entonces:

$$L \rightarrow \frac{Q_0 \sqrt{t}}{\pi h_f C_l} \quad \dots (7E)$$

Para grandes valores de α la Eficiencia del Fluido Fracturante es baja. Si se define la Eficiencia del Fluido como la relación entre el volumen de la fractura, $W h_f l$ y el volumen inyectado, $Q_0 t$ para valores altos de α se obtiene:

$$\eta_f = \frac{W h_f l}{Q_0 t} \rightarrow \frac{2}{\alpha \sqrt{\pi}} \quad \dots (8E)$$

Para $\alpha = 10$, la eficiencia es sólo del 11%. La mayor parte del fluido inyectado es aprisionada dentro de la formación, causando solo problemas de energía potencial.

Además, la distribución de velocidad en la fractura depende fuertemente de la Eficiencia del Fluido, la distribución de presión es mostrada en la fig. E-1 donde se puede ver la distribución de la velocidad del fluido en la fractura entre placas paralelas como una función de los parámetros adimensionales $A_l = h_f l C_l^2 / Q_0 W$.

Para $A_l > 1$, la teoría muestra que el gasto de flujo decrece rápidamente de acuerdo con la siguiente expresión:

$$\frac{Q(x)}{Q_0} = \frac{v(x)}{v(0)} = 1 - \frac{2}{\pi} \text{arc sen } \lambda \quad \dots (9E)$$

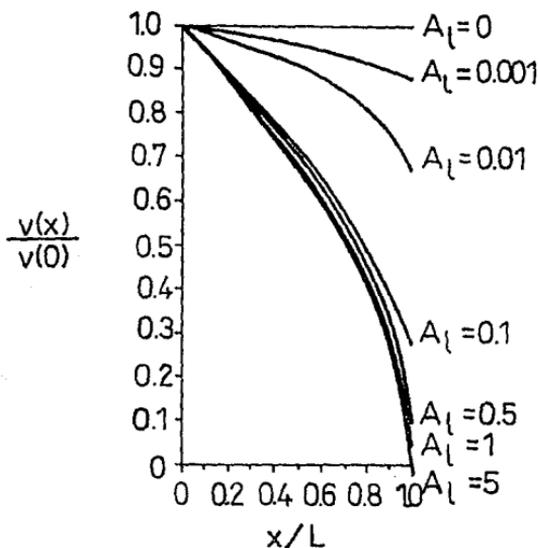


Fig. E-1. Distribución de velocidad del fluido Fracturante entre paredes paralelas como una función de $A_l = h_f L C_l^2 / Q_o W$.

Para estas condiciones, el factor A_l relaciona la Eficiencia del fluido a través de la siguiente ecuación:

$$A_l = \frac{w h_f L}{Q_o t} \frac{C_l^2 t}{w^2} = \eta_f \frac{\alpha^2}{4\pi} = \frac{1}{\pi^2 \eta_f} \quad \dots (10E)$$

Incluyendo la Pérdida Instantánea de Fluido. V_{sp} se obtiene la siguiente ecuación:

$$\frac{dV}{dt} = Q - Q_l - V_{sp} \frac{dA_{fl}}{dt}$$

Por lo tanto, se llega a la siguiente ecuación:

$$\frac{Q}{h_f} = (W + 2 V_{sp}) \frac{dL}{dt} + 2 C_l \int_0^t \frac{dL}{d\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{t - \tau}} \quad \dots (11E)$$

Comparando las Ecs. 3E y 10E se muestra que las Pérdidas Instantáneas de Fluido pueden ser contabilizadas para reemplazar el término de W por una amplitud efectiva de la fractura dada como $(W + 2 V_{sp})$, con lo que finalmente se llega a la siguiente expresión:

$$\alpha = \frac{2 C_l}{(W + 2 V_{sp})} \sqrt{\pi t}$$

NOMENCLATURA
Y
REFERENCIAS.

A	Area Total de la fractura, (pie ²).
A	Area (en la Ley de Hooke), (pie ²).
A _c	Area Vertical de la Sección Transversal de la Fractura, (pie ²).
\hat{A}	Area de la Región Discretizada de la Fractura, (pie ²).
α	Amplitud de la zona cercana al Extremo de la Fractura, (pie ²).
α_k	Factores de Peso en la Ec. V-30.
\vec{b}, \vec{b}	Vectores en las Ecs. V-42 y V-47.
C	Coefficiente de Pérdida de Fluido, (pie/seg)
C _l	Coefficiente Normalizado de la Pérdida, (pie/seg ^{1/2} -psi).
C _o	Coefficiente de Pérdida Instantánea, (pie/seg).
D	Matriz de Disipación, (pie ³ /seg-psi).
d	Amplitud de la Región Anular en la fig. V-5, (pie).
E	Módulo de Young, (psi).
E'	Módulo Elástico del Esfuerzo Plano, (psi).
E _o	Módulo Elástico Efectivo en la Ec. V-22, (psi).
F	Integrando para la Función J en la Ec. V-39.

F	Fuerza (en la Ley de Hooke), (lb).
f_1, f_2, f_L	Fraciones de la Extensión de la Fractura en la Ec. IV-5.
G	Módulo Elástico de Corte de la Formación, (psi).
G_1, G_2	Módulos Elásticos de Corte del Estrato 1 y 2, respectivamente.
g	Fuerza Gravitacional por Unidad de Masa en la Ec. II-18.
H	Espesor de la Zona Productora, (pie).
h	Altura de la Fractura (Propagación Lineal), (pie).
h_f	Altura de la Fractura en la Ec. IV-9, (pie)
$\Delta h^a, \Delta h^b$	Migración Vertical de la Fractura arriba y abajo de la zona Productora, (pie).
J	Función de la Variación de la Fórmula de Flujo de Fluido.
K	Módulo de Cohesión de Barenblatt.
K	Matriz de Rigidez Elástica en la Ec. V-27, (psi-pie).
K^{-1}	Matriz Inversa de K en la Ec. V-48, (psi-pie) ⁻¹
K_I, K_I^a, K_I^b	Factores de Intensidad de Esfuerzo, (psi-pie ^{1/2}).
K_{Ic}	Factor de Intensidad de Esfuerzo Crítico requerido para el Avance de la Fractura, (psi-pie ^{1/2}).
K_l	Coefficiente de Pérdida en la Ec. V-13, (pie/seg ^{1/2}).

k'	Coefficiente de la Viscosidad de la Ley de Potencias, (psi-seg ^{n'})
k_1, k_2	Parámetros Adimensionales Definidos en la Ec. V-33.
L	Longitud Total de la Fractura, (pie).
m	Pendiente en la Gráfica log-log de la fig. V-3.
N_{Re}	Número de Reynolds, (adim).
n	Índice del Intervalo de Tiempo.
n'	Exponente de la Viscosidad de la Ley de Potencias.
\vec{n}_k	Vector Unitario Normal Exterior al k -ésimo Triángulo.
P	Presión del Fluido en la Fractura, (psi).
\vec{P}	Vector de Presión del Fluido en los Nodos, (psi).
P_f	Presión de Poro del Fluido en la Formación, (psi).
P_i	Presión del Fluido en el i -ésimo Nodo, (psi).
P_L	Presión Diferencial requerida para abrir la Fractura en el Frente de la misma en los Modelos P-3D, (psi).
Q	Gasto Constante dentro de la Fractura, (pie ³ /seg).
Q	Gasto Total de Inyección, (pie ³ /seg).
Q_l	Gasto de Pérdida en el Modelo P-3D, (pie ³ /seg).
Q_n	Gasto de Flujo en la Dirección Normal al Frente de la Fractura por unidad de Longitud del Frente, (pie ³ /seg).
Q_o	Gasto de Flujo a la entrada de la Fractura, (pie ³ /min).

R	Radio de la Fractura en los Modelos Radiales en la Ec. IV-36, (pie).
R	Distancia desde el Punto de Origen (x',y') al Punto de Campo (x,y), en la Ec. V-24, (pie).
\hat{R}	Distancia en el Cálculo de los Efectos de las Diferencias en los Módulos Elásticos de Estrato a Estrato, (pie).
R_o	Radio Humedecido de la Fractura en los Modelos Radiales, (pie).
R_y	Cociente de la Altura usada para Calcular las Amplitudes de la Fractura en el Modelo P-3D en la Ec. V-3.
r	Coordenada Radial en la Ec. IV-36.
r_v	Radio del Pozo en la Ec. IV-37, (pie).
S	Esfuerzo Tectónico Normal al Plano de Fractura antes del Fracturamiento, (psi).
S_k	Perímetro del k-ésimo Triángulo, (pie).
S_r	Velocidad Mínima de la Energía del Esfuerzo en la Ec. III-9, (pie/seg).
Δs	Distancia a lo Largo del Frente de Fractura, (pie).
T	Matriz de Peso de las Areas de los Elementos Triangulares.
t	Tiempo, (seg).
t_p	Tiempo al cual se suspende el Bombeo, (min).
Δt	Intervalo de Tiempo, (seg).

V	Volumen de la Región Anular de la Fractura por unidad de Longitud del Frente de la Fractura, (pie).
V	Volumen de la Fractura, (pie ³).
V_{sp}	Pérdida Instantánea de Fluido, (pie ³).
v	Velocidad Normal del Frente de la Fractura, (pie/seg).
$v_x, v_y, v_z,$	Velocidades en los respectivos ejes, (pie/seg).
W	Amplitud de la Fractura, (pie).
\vec{W}	Vector de Amplitudes de la Fractura en los Nodos, (pie).
\bar{W}	Amplitud Promedio de una Fractura Radial, (pie).
W_a	Amplitud de la Fractura a una Distancia "a" del Frente de la misma, (pie).
W_c	Amplitud Crítica de la Fractura para el Avance de la misma, (pie).
W_i	Amplitud de la Fractura en el Nodo i-ésimo, (pie).
W_I, W_{II}, W_{III}	Amplitudes de la Fractura resultantes de una Presión Uniforme sobre las alturas $h, \Delta h, \Delta H$, respectivamente, (pie).
x, y, z	Coordenadas Cartesianas Rectangulares.
x_f	Mitad de la Longitud de la Fractura en la Ec. III-7, (pie).
y_o	Altura Media de la Fractura relativa a la Altura Media de la Zona Productora, (pie).
α, β, Γ, S	Parámetros Adimensionales en la Ec. V-33.
α_L	Parámetro Adimensional de la Pérdida de Fluido que incluye la Pérdida Instantánea para Fracturas Lineales.

α_r	Parámetro Adimensional de la Pérdida de Fluido que incluye la Pérdida Instantánea para Fracturas Radiales.
Γ_i	Región Discretizada de la Frontera de la Superficie de la Fractura
γ	Energía Superficial Específica en la Ec. III-6.
$\dot{\gamma}$	Tensor de la Velocidad de Corte en la Ec. II-41.
δ	Deformación (en la Ley de Hooke).
δ	Velocidad de Corte en la Ley de Viscosidad de Newton.
δ	Profundidad de Penetración del Fluido Fracturante en la Formación, (pie).
ϵ	Tensor de Esfuerzos en la Ec. IV-1.
ζ	Distancia desde el Extremo de la Fractura en Dirección Normal hacia dentro, (pie).
η'	Parámetro de Viscosidad, (psi-seg ^{n'}).
θ	Parámetro Adimensional que caracteriza las Fracciones del Incremento de Tiempo al cual las Ecuaciones Gobernantes son Resueltas.
μ	Viscosidad del Fluido Fracturante, (cp).
ν	Relación de Poisson.
ν_1, ν_2	Relaciones de Poisson para los Estratos 1 y 2, respectivamente.
π	3.1416.
ρ	Densidad del Fluido Fracturante, (lbm/pie ³).
ρ_F	Densidad de Peso del Fluido, (psi/pie).

σ	Esfuerzo (en la Ley de Hooke).
$\sigma^a, \sigma^b, \sigma^p$	Esfuerzos Compresivos in-situ en los Estratos Superior, Inferior y Zona Productora, respectivamente en la Ec. V-6, (psi).
σ_{zz}^0, σ	Esfuerzos Compresivos Perpendiculares al Plano de Fractura antes del Fracturamiento en la Ec. V-21, (psi).
τ	Tiempo al cual la Posición de la Fractura en el Plano es primeramente expuesta al Fluido Fracturante, (seg).
τ	Esfuerzo de Corte (en la Ley de Viscosidad de Newton).
$\tau_{xx}, \tau_{yx}, \tau_{zx}$	Densidades de Flujo de Cantidad de Movimiento "x" a través de la Cara Perpendicular correspondiente al primer subíndice en la Ec. II-17.
$\tau(x)$	Tiempo al cual se inicia la Pérdida de Fluido hacia la Formación a una Distancia "x" del Pozo.
$\phi_i, \bar{\phi}_i$	Funciones de Ensayo Local en las Ecs. V-25 y V-26.
∇^+	Operador Gradiente.

REFERENCIAS

1. Michael J. Economides, Kenneth G. Nolte
"Modeling of Hydraulic Fractures"
Reservoir Stimulation (Cap. 3)
Schlumberger Educational Services, Houston Texas (1987)
2. Robert Byron Bird, Warren E. Stewart, Edwin N. Lightfoot
"Fenómenos de Transporte"
Reverté S.A. (1978)
3. Louis Leithold
"El Cálculo con Geometría Analítica" (Cuarta Edición)
Harla S.A. (1981)
4. M. I. Carlos Islas Silva
"Apuntes de Estimulación y Reparación de pozos"
Facultad de Ingeniería, U.N.A.M. (1988)
5. Roberto A. Castro F., Raúl León V., Rafael Rodríguez N
"Apuntes de Mecánica de Fluidos"
Facultad de Ingeniería, U.N.A.M. (1985)
6. Miguel A. Benítez H., Francisco Garaicochea P., Ciro Reyes A
"Apuntes de Fluidos de Perforación"
Facultad de Ingeniería, U.N.A.M. (1988)

7. J. Geertsma.
"Recent Advances in Hidraulic Fracturing"
Two-Dimensional Fracture-Propagation Models (Cap. 4)

8. J. Geertsma y F. de Klerk
"A Rapid Method of Predicting Width and Extend of Hidraulically
Induced Fractures"
JPT (Diciembre, 1969)

9. T. K. Perkins y L. R. Kern
"Widths of Hidraulic Fractures"
JPT (Septiembre, 1961)

10. Y. P. Zheltov y S. A. Khristianovitch
"On the Mechanism of Hidraulic Fracturing of an Oil Bearing
Stratum", (1955)

11. R. P. Nordgren
"Propagation of a Vertical Hidraulic Fracture"
SPEJ (Agosto, 1972)

12. R. J. Clifton, Brown U y Terra Tek Inc.
"Recent Advances in Hidraulic Fracturing"
Three-Dimensional Fracture-Propagation Models (Cap. 5)