

03043,
2
2ej.



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE

**UNIDAD ACADEMICA DE LOS CICLOS PROFESIONAL
Y DE POSGRADO DEL C.C.H.**

**INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN MATEMATICAS
APLICADAS Y EN SISTEMAS**

**MODELACION CON
DISTRIBUCIONES ESTABLES**

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

T E S I N A

**QUE PARA OBTENER EL DIPLOMA DE:
ESPECIALIZACION EN ESTADISTICA
APLICADA**

P R E S E N T A L A:

ACT. CLOTILDE DEL CARMEN BLANCO MAINERO

MEXICO. D. F.

1992



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

MODELACION CON DISTRIBUCIONES ESTABLES

R E S U M E N

Las DISTRIBUCIONES ESTABLES proporcionan una generalización del Teorema Central del Límite para variables aleatorias independientes igualmente distribuidas, mostrando grandes similitudes con la teoría clásica de inferencia estadística y la distribución Normal, sin embargo con diferencias tan importantes como que tienen, salvo la Normal, varianza infinita y "colas pesadas".

El objetivo de este trabajo consiste en presentar, mediante la investigación y análisis bibliográfico estas distribuciones. En su primer apartado, sus antecedentes, propiedades, la caracterización de sus dominios de atracción, sus similitudes y contrastes con la distribución Normal y algunos métodos de inferencia estadística; en el segundo, propiciar el mayor conocimiento y uso de las mismas, mediante el señalamiento de las aplicaciones más usadas en diversas áreas de las ciencias exactas, biológicas y económico-administrativas. Incluye un apartado de conclusiones y bibliografía.

La aportación de este trabajo, consiste en presentar el tema de las Distribuciones Estables, que no es cubierto en el programa regular de la Especialización en Estadística Aplicada.

Act. Clotilde del Carmen Blanco Mainero.

Vo. Bo.

El Asesor



M. en C. Jorge Gómez Arias.

RESUMEN

LAS DISTRIBUCIONES ESTABLES PROPORCIONAN UNA GENERALIZACION DEL TEOREMA CENTRAL DEL LIMITE PARA VARIABLES ALEATORIAS INDEPENDIENTES IDENTICAMENTE DISTRIBUIDAS, MOSTRANDO GRANDES SIMILITUDES CON LA TEORIA CLASICA DE INFERENCIA ESTADISTICA Y LA DISTRIBUCION NORMAL, SIN EMBARGO CON DIFERENCIAS TAN IMPORTANTES COMO QUE TIENEN, SALVO LA NORMAL, VARIANZA INFINITA Y "COLAS PESADAS", ES DECIR DAN PROBABILIDAD GRANDE A VALORES GRANDES. LA ESTADISTICA INFERENCIAL CLASICA TIENE COMO PRINCIPIO EN LA TOMA DE DECISIONES, DESPRECIAR LAS COLAS DE LAS DISTRIBUCIONES MUESTRALES, LO QUE PUEDE CONducIR A ERRORES CUANDO LA POBLACION DE INTERES CORRESPONDE A DISTRIBUCIONES CON COLAS PESADAS YA SEAN ESTABLES O ATRAIDAS POR UNA DISTRIBUCION ESTABLE NO NORMAL.

ESTE TRABAJO PRESENTA LOS ANTECEDENTES, CARACTERISTICAS Y PROPIEDADES DE ESTAS DISTRIBUCIONES, SUS SIMILITUDES Y CONTRASTES CON LA TEORIA CLASICA DE INFERENCIA ESTADISTICA Y LA IDENTIFICACION DE LAS APLICACIONES MAS USUALES QUE SE MODELAN CON DISTRIBUCIONES ESTABLES.

INDICE

INTRODUCCION	1
CAPITULO I	3
LAS DISTRIBUCIONES ESTABLES	
1.1 Antecedentes.	3
1.2 Definiciones de distribuciones estables.	9
1.3 Ejemplos.	14
1.4 Caracterización de los dominios de atracción.	15
1.5 Propiedades de las distribuciones estables.	23
1.6 Distribuciones estables simétricas.	25
1.7 Métodos estadísticos para distribuciones estables.	30
CAPITULO II	41
MODELACION CON DISTRIBUCIONES ESTABLES	
2.1 Introducción.	41
2.2 Distribuciones estables en matemáticas y probabilidad.	43
2.3 Modelo punto fuente de influencia.	49
2.4 Distribuciones estables en física.	57
2.5 Distribuciones estables en ingeniería y electrónica.	58
2.6 Distribuciones estables en biología.	62
2.7 Distribuciones estables en economía.	64
CONCLUSIONES	67
ANEXOS	71
BIBLIOGRAFIA	78

INTRODUCCION

Más de 60 años han pasado desde la aparición del concepto de Leyes Estables con Paul Lévy en 1925 y el conocimiento acerca de las propiedades de estas sorprendentes leyes de probabilidad es cada día más rico; sin embargo, debido al escaso manejo que se tiene de esta teoría, el tratamiento de las distribuciones se limita en la mayoría de los casos, a la aplicación de la teoría clásica de inferencia estadística, basada en la enorme potencialidad del Teorema Central del Límite y de la distribución Normal, sin considerar que existe una gama muy extensa de distribuciones parecidas en "estabilidad" a la Normal pero con características, (como varianza infinita y colas pesadas) muy diferentes. (El concepto de "colas pesadas" es central en esta teoría y se desarrolla en el capítulo I).

Los objetivos de este trabajo consisten en presentar estas distribuciones, sus similitudes y contrastes con la Normal, sus propiedades y algunos métodos de inferencia estadística. Así como justificar el conocimiento, la investigación, el uso y el interés por estas distribuciones, con el señalamiento de las aplicaciones más comunes usadas en diversas áreas de las ciencias exactas, biológicas y económico-administrativas.

El Capítulo I contiene los aspectos teóricos de las distribuciones estables, sus antecedentes históricos, sus definiciones, la caracterización de sus dominios de atracción (como distribuciones límite de sumas de variables aleatorias

independientes igualmente distribuidas), sus propiedades y características, así como los métodos especiales de estimación que se han trabajado en torno a las distribuciones estables simétricas estandarizadas. Estos resultados se presentan omitiendo las demostraciones de los teoremas, sólomente exhibiendo sus referencias.

En el Capítulo II se presenta una compilación bibliográfica donde se exponen diversas aplicaciones que evidencian las condiciones de modelaje con leyes estables, resultados que son cada día más útiles, para entender el verdadero comportamiento de las variables de los problemas que surgen en diversas áreas del conocimiento humano, invitándose también con esto a investigaciones más exhaustivas.

Un apartado último de conclusiones resume el contenido del trabajo y presenta los puntos más importantes a considerar, esperando que motiven a la reflexión y al cuidado en el uso de los métodos clásicos de inferencia estadística.

CAPITULO I

LAS DISTRIBUCIONES ESTABLES

1.1 ANTECEDENTES.

La convergencia en distribución para sumas de sucesiones de variables aleatorias es un tema que desde hace más de dos siglos ha atraído la atención de numerosos investigadores y desempeña actualmente un papel central en la teoría de probabilidad y estadística.

El afán de conocer leyes generales en el cálculo de probabilidades en los juegos de azar llevó a Abraham DeMoivre en 1733 a realizar las primeras investigaciones. En 1812 Pierre Simon de Laplace formuló los resultados de DeMoivre con mayor grado de abstracción y es el teorema de DeMoivre-Laplace el que establece la convergencia en distribución a la distribución Normal estándar de las sumas estandarizadas

$$S_n^* = \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

con $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, número de éxitos en n ensayos de Bernoulli con parámetro p .

Zolotarev [1986] señala, que también Poisson y posteriormente Cauchy [1853], volvieron su atención a la distribución con densidad

$$P_{\lambda}(x) = \lambda^{-1} P_{\lambda}(x\lambda^{-1}) = \frac{\lambda}{\pi(x^2 + \lambda^2)} \quad \lambda > 0 \quad x \in \mathbb{R}^1$$

que tiene la propiedad

$$P_{\lambda_1} + P_{\lambda_2} = P_{\lambda}$$

donde λ esta determinada únicamente por λ_1 y λ_2

Cauchy, quien en el contexto de sus investigaciones estaba interesado en encontrar cuándo el error de una observación individual puede ser comparable con el error promedio de una serie de observaciones independientes, descubrió que tal es la situación de los errores en las observaciones que tienen la distribución de probabilidad con densidad p_{λ} .

La densidad p_{λ} en la expresión anterior, pertenece a una familia de distribuciones $\{f_{\alpha}^{(c)}\}$ generadas por un parámetro α , que en este caso corresponde al valor de $\alpha=1$; familia de distribuciones que transformó Fourier en la forma simple de la función característica

$$\exp(-\lambda|t|^{\alpha}) \quad \lambda > 0 \quad \alpha > 0$$

Cauchy sabía que cada una de las funciones $f_{\alpha}^{(c)}$ tenían la propiedad anterior, pero a excepción de $f_{\alpha}^{(c)}=p_{\lambda}$, no podía distinguir de entre ellas las funciones no negativas. Sólo a principios de nuestro siglo el famoso matemático húngaro G. Pólya [1923] logró probar que $f_{\alpha}^{(c)}$ son positivas para $0 < \alpha < 1$. Probó también que dentro de ellas sólo hay una que tiene varianza finita, que es la densidad de una distribución que le corresponde el valor de $\alpha=2$, la distribución Normal. El hecho de que las $f_{\alpha}^{(c)}$ eran las densidades de las distribuciones con

valores de $0 < \alpha \leq 2$ fue establecido de lleno por P. Lévy en 1925.

Por mucho tiempo las distribuciones con funciones características de la forma expresada anteriormente se llamaron "leyes de Cauchy", posteriormente (a excepción de p) fueron conocidas únicamente como distribuciones simétricas.

Como consecuencia de los resultados y las investigaciones de Laplace, se generaliza el teorema de éste, al caso de variables aleatorias independientes igualmente distribuidas con varianza finita, obteniéndose así, la versión más usual y conocida del Teorema Central del Límite, que se debe a Lindeberg y que al parecer recibió este nombre de Pólya.

El Teorema Central del Límite es uno de los principales teoremas en la teoría de probabilidad y estadística. La esencia de este teorema consiste en establecer las condiciones bajo las cuales sumas estandarizadas de variables aleatorias independientes igualmente distribuidas (v.a.i.i.d) convergen en distribución a la distribución Normal estándar.

Lo extraordinario de este teorema es que nada se dice acerca de la forma de la función de densidad dada. Cualquiera que sea esta distribución, con tal que tenga varianza finita, la *media muestral tendrá aproximadamente para muestras grandes, la distribución Normal*. Debe entenderse que este teorema es sólo un caso especial de teoremas más generales.

Lindeberg alrededor del año 1922 realiza investigaciones para eliminar la restricción de idénticamente distribuidas y obtiene un conjunto de condiciones suficientes para la convergencia en distribución de sumas parciales de v.a.i. con varianza finita, obteniendo con esto una versión más general del

Teorema Central del Límite clásico conocido como el Teorema de Lindeberg-Feller.

El método de Lindeberg parecía intrincado y en la práctica se sustituyó por el método de funciones características que desarrolló Paul Lévy [1924] y [1925] (leyes de Cauchy con densidades de distribuciones de probabilidad sólo para $0 < \alpha \leq 2$) quien investigó y publicó posibles generalizaciones del Teorema Central del Límite eliminando la condición de varianza finita, obteniendo con esto las DISTRIBUCIONES ESTABLES que son límites de sumas estandarizadas de variables aleatorias independientes con la misma distribución. Por lo tanto las Distribuciones Estables se constituyen en una generalización del Teorema Central del Límite y de la distribución Normal para variables aleatorias independientes igualmente distriuidas.

Las leyes estables vieron la primera luz gracias al talento del matemático francés Paul Lévy y recibieron de él su nombre; atrayendo sólomente una atención moderada de los expertos de la época, entre quienes se debe mencionar en primer término al sorprendente matemático ruso Aleksander Khintchine.

Lévy percibió el poder y la elegancia de las técnicas de las funciones características de una Ley Estable, las cuales han tenido profundos efectos en el desarrollo de la teoría de probabilidad. Proclamó presuntuosamente en 1925 "le problème de la recherche des lois stables est ... complètement résolu" (el problema de la investigación de las leyes estables está completamente resuelta), sin embargo los conceptos tomaron completamente forma en 1937 con Lévy y Khintchine con el descubrimiento de las distribuciones infinitamente divisibles.

Se registran investigaciones y aplicaciones relacionadas

con las distribuciones estables, anteriores y posteriores a los trabajos de Lévy, como el principio de reflexión de D. André en 1887 y el teorema de la votación (caminata aleatoria) de W. A. Whitworth en 1878 y J. Bertrand en 1887, la ley de los grandes números de Khintchine en 1929 y el magistral análisis hecho por W. Doblin de los dominios de atracción en 1939. Aplicaciones de estas leyes se descubrieron con el astrónomo Holtsmark [1919] en el campo gravitacional de las estrellas, el biólogo Willis [1922] en procesos evolutivos de especies biológicas y el matemático Yule [1925] en procesos de ramificación.

Posteriormente surge la teoría probabilística elaborada alrededor de las llamadas Distribuciones Estables en Gnedenko y Kolmogorov [1954], en las que se refuerza la idea de "estabilidad de las distribuciones" bajo los conceptos de cerradura bajo convolución o invariabilidad bajo transformaciones lineales. Trabajos subsecuentes se encuentran en Feller [1966], Ibragimov y Linnik [1971]. Petrov [1972], Kagan, Linnik y Rao [1972] y Zolotarev [1986].

Dentro de las investigaciones teóricas modernas de estas distribuciones se encuentra el resultado conocido como Representación de LePage de una Distribución Estable, en 1981, el cual asegura la representación de las leyes estables como sumas convergentes de sucesiones de variables aleatorias que contienen tiempos de arribo de un Proceso de Poisson.

En nuestro tiempo el interés por las leyes estables se debió a la necesidad del tratamiento de ciertos modelos socio-económicos. En los años 60', las leyes estables empezaron a atraer la atención de estudiosos que trabajaban en áreas de economía, biología, sociología y lingüística matemática, esto debido a las publicaciones del matemático americano Benoit

Mandelbrot [1963] y sus sucesores, entre ellos, Fama y Roll [1968] que elaboraron tablas de distribución para distribuciones estables simétricas estandarizadas.

El hecho es que los principios estadísticos descritos por las así llamadas distribuciones Zipf-Pareto, que fueron descubiertas empíricamente desde hace mucho en estas áreas del conocimiento, fueron sustituidas por Mandelbrot por distribuciones estables extremas.

La teoría de probabilidad contemporánea ha adquirido independencia y autoridad como disciplina matemática, por las múltiples aplicaciones en diversos campos y una gran parte de su arsenal de métodos es por supuesto la solución de aproximaciones de distribuciones de sumas de variables aleatorias independientes. Es importante además, por su creciente versatilidad y eficacia en la solución de numerosos problemas sobre comportamientos complejos de grandes poblaciones o de poblaciones con magnitud indefinida. Los resultados que aquí se agrupan alrededor del Teorema Central del Límite, han venido a formar en nuestro tiempo, una gran teoría, con muchas ramas; teoría que se completó en los años 30' y que ha requerido en total más de dos siglos y medio de esfuerzo de varias generaciones de matemáticos con nombres ilustres como Laplace, Gauss, Poisson, Tchebycheff, Lyapunov, Markov, Lindeberg, Lévy, Khintchine, Feller, Gnedenko, Kolmogorov y recientes como Mandelbrot, Fama, Roll, LePage y Zolotarev.

La teoría de leyes límite, continúa en muchas áreas de la probabilidad, incluyendo las teorías de cadenas de Markov, procesos estacionarios, martingalas, distribuciones de grupos, entre otros.

1.2 DEFINICIONES DE DISTRIBUCIONES ESTABLES.

Se definirán a las distribuciones estables de 5 formas equivalentes. Las primeras dos definiciones enfocan la propiedad de "estabilidad" como la familia de las distribuciones estables que es cerrada bajo convolución o invariantes bajo transformación lineal. La tercera se centra en el contexto de la generalización del Teorema Central del Límite en que distribuciones estables aproximan la distribución de sumas estandarizadas de v.a.i.i.d. y las dos últimas definen a las distribuciones estables a través de su función característica.

DEFINICION 1.2.1. Una variable aleatoria X tiene una función de distribución estable F si para $A > 0$ y $B > 0$ arbitrarios existe $C > 0$ y una constante D tal que

$$AX_1 + BX_2 \stackrel{d}{=} CX + D$$

donde X_1 y X_2 son v.a.i.i.d. como X .

Así por ejemplo: sea $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ y X_1, X_2 dos copias de X independientes; sabemos que para cualesquier dos números reales A y B , $AX_1 + BX_2 \sim N((A+B)\mu, (A^2+B^2)\sigma^2)$ y con los valores de C y D de la expresión siguiente se satisface que $AX_1 + BX_2 = CX + D = Y$

$$Y = \underbrace{(\sqrt{A^2+B^2})}_C X + \underbrace{(A+B-\sqrt{A^2+B^2})}_D \mu$$

Con esto mostramos lo que se entiende por ESTABILIDAD; al hecho de que cualquier combinación lineal que se de entre variables aleatorias independientes igualmente distribuidas siempre pertenecerán a la misma familia de distribución común.

F es estrictamente estable si cumple la definición 1.2.1

con $D=0$. El ejemplo anterior nos muestra que la familia Gaussiana es una familia de distribuciones estables y que todas las distribuciones Normales centradas en el origen son estrictamente estables.

Como una variable aleatoria X concentrada en un punto siempre es estable, asumiremos que a menos que se especifique otra cosa, que F es no degenerada.

DEFINICION 1.2.2. Una variable aleatoria X tiene una función de distribución estable F , si para cualquier $n \geq 2$ existe $C_n \geq 0$ y un número real D_n tal que

$$X_1 + X_2 + \dots + X_n \stackrel{d}{=} C_n X + D_n$$

donde X_1, X_2, \dots, X_n son v.a.i.i.d. como X .

Si X satisface la definición 1.2.1 entonces por inducción satisface la definición 1.2.2. La implicación inversa se encuentra probada en Feller [1966].

"UNA FUNCION DE DISTRIBUCION F SE DICE QUE ES UNA DISTRIBUCION ESTABLE SI ES INVARIANTE BAJO TRANSFORMACION LINEAL".

DEFINICION 1.2.3. Una distribución F es estable si existe una sucesión $\{X_n\}$ de v.a.i.i.d. con distribución común G y sucesiones $\{b_n\}$ y $\{a_n\}$ de números reales (conocidas como constantes de estandarización) con $b_n > 0$ tal que

$$(b_n^{-1} \sum_1^n x_j - a_n) \xrightarrow{d} F \quad (1.1)$$

La demostración de la equivalencia entre la definición 1.2.1 y la 1.2.3 está dada en Gnedenko y Kolmogorov [1954].

Si G es una distribución que cumple con la definición 1.2.3 se dice que G es atraída a F . Al conjunto de todas las funciones de distribución G que son atraídas a una función de distribución F se llama DOMINIO DE ATRACCION DE F .

El Teorema Central del Límite nos muestra que esta definición es no vacía. Cualquier sucesión $\{X_n\}$ de v.a.i.i.d. con varianza finita $\sigma^2 > 0$ y media μ hacen de la distribución Normal una distribución estable con $b_n^{-1} = 1/\sigma\sqrt{n}$ y $a_n = \mu\sqrt{n}/\sigma$.

De las distribuciones estables no sólo la distribución Normal es un ejemplo, sino algunas otras, como la distribución Cauchy, a la cual como posteriormente se verá, converge una sucesión de sumas de v.a.i.i.d. cuya función de distribución es la t de Student con 2 grados de libertad, es decir la t de Student con 2 g.l. pertenece al dominio de atracción de la distribución Cauchy.

"UNA FUNCION DE DISTRIBUCION F SE DICE QUE ES ESTABLE SI TIENE UN DOMINIO DE ATRACCION NO VACIO".

DEFINICION 1.2.4. (CARACTERIZACION CANONICA). Para que una función de distribución F sea estable es necesario y suficiente que el logaritmo de su función característica ϕ pueda ser expresado de la siguiente manera :

$$\ln \phi(t) = i\mu t - c|t|^\alpha [1 - i\beta (t/|t|) w(t,\alpha)] \quad (1.2)$$

donde α, β, μ, c son constantes tales que μ es un número real, $-1 \leq \beta \leq 1$, $0 < \alpha \leq 2$, $c \geq 0$ y

$$w(t, \alpha) = \begin{cases} \tan(\pi\alpha/2) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ -2/\pi \ln|t| & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

El parámetro α se conoce como exponente característico o índice de estabilidad de la distribución F por lo que se acostumbra llamarla función de distribución F - α -estable. Si α no es elemento del intervalo $(0, 2]$ se demuestra en Feller [1966], que $\phi(t)$ no es una función característica.

El parámetro β es el sesgo, si $\beta=0$ la distribución es simétrica alrededor de μ , es sesgada a la derecha para $0 < \beta \leq 1$ y sesgada a la izquierda para $-1 \leq \beta < 0$.

El parámetro μ es un parámetro de localización. $\mu \in \mathbb{R}$.

El parámetro c es un parámetro de escala. $c \geq 0$.

El signo en $w(t, \alpha)$ para el caso $\alpha=1$ es un punto que ha generado confusión en la literatura relacionada a las distribuciones estables, (el signo menos no se pone en algunos textos), aunque esto sin embargo no produce diferencia a la generalidad de la fórmula. Peter Hall [1981] desarrolla una discusión a este respecto, concluyendo que si el signo menos es omitido, β tiene distintos valores en los casos $\alpha=1$ y $\alpha \neq 1$. Algunos autores como Gnedenko y Kolmogorov [1954], Feller [1966] omiten este signo, Zolotarev [1986] usa la fórmula correcta haciendo la aclaración al respecto.

La demostración de la equivalencia entre la definición 1.2.1. y 1.2.4 se encuentra en Gnedenko y Kolmogorov [1954].

DEFINICION 1.2.5. Para que una función de distribución F con función característica ϕ sea estable, es necesario y suficiente que F sea infinitamente divisible y que $\ln \phi$ pueda expresarse como:

$$\ln \phi(t) = \begin{cases} i\mu t - ct^2 & \text{para } \alpha=2 \text{ y } c=\sigma^2/2 \\ i\mu t + c_1 \int_{-\infty}^0 \left(\exp(itx) - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right) \frac{dx}{|x|^{1+\alpha}} + \\ + c_2 \int_0^{\infty} \left(\exp(itx) - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right) \frac{dx}{|x|^{1+\alpha}} & \\ \text{para } 0 < \alpha < 2, c_1, c_2 \text{ constantes} & \\ \text{no negativas y } c_1 + c_2 > 0 & \end{cases} \quad (1.3)$$

La demostración de la equivalencia entre la definición 1.2.5 y la definición 1.2.1 se encuentra en Gnedenko y Kolmogorov [1954].

Se dará a continuación la definición de una distribución infinitamente divisible.

Una función de distribución F es infinitamente divisible si para cualquier entero positivo n existe una función de distribución F_n tal que F es la n -ésima convolución de F_n , es decir

$$F = F_n * F_n * \dots * F_n \quad n \text{ veces}$$

Equivalentemente, una función característica ϕ se dice que es infinitamente divisible si para cualquier entero positivo n existe una función característica ϕ_n tal que

$$\phi(t) = [\phi_n(t)]^n \quad \text{con } t \in \mathbb{R} \quad (1.4)$$

Toda distribución estable es infinitamente divisible, pero la implicación recíproca no se cumple. Por ejemplo la distribución Poisson y Gamma son infinitamente divisibles pero

como su función característica no se puede expresar como en (1.2) de la definición 1.2.4 no son estables.

SI F ES UNA DISTRIBUCION ESTABLE DECIMOS QUE ES INFINITAMENTE DIVISIBLE Y QUE (α, β, μ, c) ES EL VECTOR DE PARAMETROS DE SU DISTRIBUCION.

1.3. EJEMPLOS.

Denotaremos $X \sim S_{\alpha}(\beta, \mu, c)$ para indicar que X tiene una distribución estable con vector de parámetros (α, β, μ, c) .

Se presentan tres ejemplos de distribuciones estables, las cuales tienen la particularidad de ser las únicas leyes estables para las cuales se conoce su función de densidad en forma cerrada.

Ejemplo 1.3.1. La función característica de la variable $X \sim S_{\alpha}(\beta, \mu, c)$ con $\alpha=2$, $\beta=0$, y $c=\sigma^2/2$

$$\phi(t) = \exp \{ i\mu t - \sigma^2 / 2 (t^2) \}$$

corresponde a la función característica de la distribución Normal, la cual tiene asociada la función de densidad

$$f(x) = (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp \left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right)$$

Ejemplo 1.3.2. La función característica de la variable $X \sim S_{\alpha}(\beta, \mu, c)$ con $\alpha=1$, $\beta=0$ y parámetro de escala c

$$\phi(t) = \exp \{ i\mu t - c|t| \}$$

corresponde a la función característica de la distribución de Cauchy, cuya función de densidad es

$$f(x; \mu, c) = \frac{1}{c\pi [1+(x-\mu/c)^2]}$$

Ejemplo 1.3.3. La función característica de la variable $X \sim S_\alpha(B, \mu, c)$ con $\alpha=1/2$, $B=1$, $\mu=0$ y $c=1$

$$\phi(t) = \exp \{ - |t|^{1/2} [1 - (it/|t|) \tan(\pi/4)] \}$$

corresponde a la función característica de la distribución de Lévy, cuya función de densidad es

$$f(x) = (2\pi x^3)^{-1/2} \exp \{-1/2x\} \quad \text{para } x > 0$$

Recordemos que la función característica de una variable aleatoria X se define como:

$$\phi_X(t) = E e^{itx} \quad -\infty < t < \infty \quad i = \sqrt{-1}$$

i) La función característica es finita para toda variable aleatoria X y para todo $t \in \mathbb{R}$.

ii) La función de distribución de X y la función de densidad, pueden ser obtenidas mediante la función característica a través de la fórmula de inversión.

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ixt) \phi_X(t) dt$$

1.4 CARACTERIZACION DE LOS DOMINIOS DE ATRACCION.

Si una función de distribución F es límite de sumas de distribuciones de v.a.i.i.d. entonces F es estable. La totalidad de funciones de distribución atraídas a F se llama el dominio de atracción de la ley estable F . Todas las leyes estables y sólo éstas tienen dominio de atracción no vacío.

El dominio de atracción de dos leyes que pertenecen al mismo tipo, coinciden, es por eso posible hablar de El DOMINIO DE ATRACCION.

Uno de los problemas fundamentales en la teoría de leyes estables es pues la identificación de los dominios de atracción y es precisamente lo que se presenta en este apartado.

El siguiente teorema caracteriza a los dominios de atracción de distribuciones estables con índice α ($0 < \alpha < 2$), única y exclusivamente a través del comportamiento de las colas de las distribuciones.

TEOREMA 1.4.1. (CARACTERIZACION DE LOS DOMINIOS DE ATRACCION). Una función de distribución G pertenece al dominio de atracción de una distribución estable F con índice $\alpha \in (0, 2)$ si y sólo si

$$\frac{1-G(x)}{1-G(x)+G(-x)} \sim p, \quad \frac{G(-x)}{1-G(x)+G(-x)} \sim q \quad \text{cuando } x \rightarrow \infty \quad (1.5)$$

o equivalentemente

$$\frac{G(-x)}{1-G(x)} \sim \frac{c_1}{c_2} \quad \text{cuando } x \rightarrow \infty \quad (1.6)$$

y para cualquier constante $k > 0$

$$\frac{1-G(x)+G(-x)}{1-G(kx)+G(-kx)} \sim k^\alpha \quad \text{cuando } x \rightarrow \infty \quad (1.7)$$

donde las constantes p y q están sujetas a las condiciones $p \geq 0$, $q \geq 0$, $p+q=1$ o bien $c_1 \geq 0$, $c_2 \geq 0$ y $c_1+c_2 > 0$ y están relacionadas con la distribución estable por medio de la definición 1.2.5. La demostración se encuentra en Gnedenko-Kolmogorov [1954].

Para x positivo $G(-x)$ y $1-G(x)$ son el área en la cola izquierda y derecha de la distribución respectivamente. La convergencia en 1.5 y 1.6 nos indica que G pertenece a algún dominio de atracción si y sólo si sus colas están balanceadas. La convergencia en 1.7 nos indica que las colas de las distribuciones varían regularmente en infinito, o sea el peso de las colas izquierda y derecha a partir de kx y $-kx$ con $x > 0$ y $k > 0$ se equilibran proporcionalmente con el peso de las colas a partir de x y $-x$, con una constante de proporcionalidad k^a .

Resumiremos que las distribuciones contenidas en el dominio de atracción de una distribución estable con índice a ($0 < a < 2$) tienen "colas pesadas" y varían regularmente en infinito.

Los resultados del teorema no se cumplen para la distribución Normal ($a=2$) ya que como se sabe tiene colas despreciables o sea colas no pesadas.

El teorema 1.4.1 nos dice que las distribuciones estables no normales pueden modelar fenómenos en los cuales la probabilidad de observaciones con valores "grandes" es alta. Son además modelos alternativos a la distribución Normal dentro de la estadística robusta ya que tienen la ventaja de poseer una estructura probabilística rica y bien desarrollada.

Como ejemplo del teorema anterior tenemos a la distribución t de Student con 2 grados de libertad que pertenece al dominio de atracción de la distribución Cauchy.

Así si denotamos con G_t a la función de distribución t de Student con 2 grados de libertad entonces:

$$G_2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{sen} \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} \right) \quad \text{con } -\infty < x < \infty$$

$$\therefore G_2(-x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{sen} \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\text{y } 1 - G_2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{sen} \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\text{luego } \frac{G_2(-x)}{1 - G_2(x)} = \frac{c_1}{c_2} = 1 \quad \text{o sea } c_1 = c_2$$

además aplicando la regla de L'Hospital se tiene

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - G(x) - G(-x)}{1 - G(-kx) + G(kx)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 g(-x)}{2 g(-kx)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} \right) (1 + k^2 x^2 / 2)}{k \cos \left(\operatorname{arctg} \frac{kx}{\sqrt{2}} \right) (1 + x^2 / 2)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x^2 + k^2/2}{k(1/x^2 + 1/2)} =$$

$$= \frac{k^2/2}{k/2} = k \quad \therefore \alpha = 1$$

TEOREMA 1.4.2. (CONDICION DE LINDEBERG-FELLER). Una función de distribución G pertenece al dominio de atracción de una distribución Normal no degenerada si y sólo si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^2 \int_{\omega > t} dG(x)}{\int_{\omega < t} x^2 dG(x)} = 0 \quad (1.8)$$

Este teorema está probado en Gnedenko-Kolmogorov [1954].

Como una función de distribución G con varianza finita satisface la condición de Lindeberg-Feller, entonces la distribución Normal atrae a un amplio número de funciones de

distribución y además existen funciones de distribución con varianza infinita que pertenecen al dominio de atracción de ésta, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.4.2. Sea X una v.a. con función de distribución de Fisher con 2 y n g.l. , la cual denotaremos for $F_{2,n}$. La función de densidad es

$$f_{2,n}(x) = \frac{1}{\left(1 + \frac{2}{n}x\right)^{n/2+1}} \quad x \geq 0$$

y se tiene que

$$\begin{aligned} E(x) &= \infty && \text{si } n \leq 2 \\ \text{Var}(x) &= \infty && \text{si } n \leq 4 \end{aligned}$$

y para $n > 4$ la varianza de X es finita. Calculemos su función de distribución

$$F_{2,n}(x) = \int_0^x \frac{dx}{\left(1 + \frac{2}{n}x\right)^{n/2+1}} = 1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{2}{n}x\right)^{n/2}} \quad x \geq 0$$

Veremos que $F_{2,n}$ con $n=1, 2$ y 3 satisfacen las condiciones (1.5) y (1.7) del teorema 1.4.1; como

$$F_{2,n}(-x) = 0 \quad , \quad 1 - F_{2,n}(x) = \frac{1}{\left(1 + \frac{2}{n}x\right)^{n/2}}$$

$1 - F_{2,n}(x) + F_{2,n}(x) = 1 - F_{2,n}(x)$ entonces satisface (1.5) con $p=1$ y $q=0$. Además

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - F_{2,n}(x) + F_{2,n}(-x)}{1 - F_{2,n}(kx) + F_{2,n}(-kx)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{2}{n} x\right)^{-n/2}}{\left(1 + \frac{2}{n} kx\right)^{-n/2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{\frac{1}{x} + \frac{2}{n} k}{\frac{1}{x} + \frac{2}{n}} \right]^{n/2} = k^{n/2} \end{aligned}$$

Se satisface el teorema 1.4.1 para $n=1, 2$ y 3 y esto nos asegura que pertenecen al dominio de atracción de una distribución estable con índice $\alpha=1/2, 1$ y $3/2$ respectivamente.

Para $n=4$ mostraremos que la distribución $F_{2,4}$ satisface la condición de Lindeberg-Feller y por lo tanto pertenece al dominio de atracción de la distribución Normal. Entonces

$$\begin{aligned} \int_{bd \leq t} dF_{2,4}(x) &= 1 - F_{2,4}(t) = \frac{1}{\left(1 + \frac{t}{2}\right)^2} \\ \int_{bd \leq t} x^2 dF_{2,4}(x) &= \int_0^t \frac{x^2 dx}{\left(1 + \frac{x}{2}\right)^3} = 8 \int_0^{\tan^{-1}\sqrt{t/2}} \frac{\tan^5 u du}{\sec^4 u} \\ &= \frac{8}{\cos^2(\tan^{-1}\sqrt{t/2})} [1 + \cos^4(\tan^{-1}\sqrt{t/2}) - \cos^6(\tan^{-1}\sqrt{t/2})] \end{aligned}$$

entonces:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^2 \int_{bd \leq t} dF_{2,4}(x)}{\int_{bd \leq t} x^2 dF_{2,4}(x)} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^2 \left(1 + \frac{t}{2}\right)^{-2} \cos^2(\tan^{-1}\sqrt{t/2})}{8 (1 + \cos^4(\tan^{-1}\sqrt{t/2}) - \cos^6(\tan^{-1}\sqrt{t/2}))} = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{0}{8} = 0 \end{aligned}$$

Para $n > 4$ al existir la varianza, la distribución F pertenece al dominio de atracción de la distribución Normal.

Así entonces tenemos como ejemplo que:

$t_2(x)$	\xrightarrow{d}	Cauchy	$\alpha = 1$
$F_{2,1}(x)$	\xrightarrow{d}	Lévy	$\alpha = 1/2$
$F_{2,2}(x)$	\xrightarrow{d}	Cauchy	$\alpha = 1$
$F_{2,3}(x)$	\xrightarrow{d}	estable con	$\alpha = 3/2$
$F_{2,4}(x)$	\xrightarrow{d}	Normal	$\alpha = 2$

TEOREMA 1.4.3. Si una función de distribución G pertenece al dominio de atracción de una distribución estable con índice α , entonces para todo r tal que $0 < r < \alpha < 2$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|^r dG(x) < \infty$$

es decir G tiene todos los momentos de orden estrictamente menor que α . Gnedenko-Kolmogorov [1954].

TEOREMA 1.4.4. Toda distribución estable pertenece a su propio dominio de atracción. La demostración se presenta en Gómez Arias [1988].

TEOREMA 1.4.5. CLASICO TEOREMA CENTRAL DEL LIMITE. Una función de distribución G pertenece al dominio de atracción de la distribución Normal, si y sólo si G tiene varianza finita y en tal caso $b_n^{-1} = 1 / \sigma \sqrt{n}$.

Así tenemos:

$$Z_n = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{\frac{1}{n} \sum x_i - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{\sqrt{n}}{\sigma} \frac{1}{n} \sum x_i - \frac{\sqrt{n}}{\sigma} \mu = \frac{1}{\sigma \sqrt{n}} \sum x_i - a_n$$

La siguiente es una definición del dominio de atracción normal de las distribuciones estables.

DEFINICION 1.4.1. Una función de distribución G se dice que pertenece al dominio de atracción normal de una distribución estable F con índice α , si está en el dominio de atracción de F y si las constantes de estandarización b_n son de la forma $an^{1/\alpha}$ con a una constante positiva.

El teorema 1.4.5 nos proporciona una caracterización del dominio de atracción normal de la distribución Normal debido a que en este caso $\alpha=2$ y $b_n^{-1} = 1 / \sigma n^{1/2}$ y los siguientes dos teoremas caracterizan a los dominios de atracción normal de las distribuciones estables no Normales.

TEOREMA 1.4.6. Para que una función de distribución G pertenezca al dominio de atracción normal de una distribución estable F con índice $\alpha \in (0,2)$ es necesario y suficiente que

$$G(x) = \begin{cases} (c_1 c^\alpha + a_1(x)) |x|^{-\alpha} & \text{si } x < 0 \\ 1 - (c_2 c^\alpha + a_2(x)) x^{-\alpha} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

donde c es una constante positiva, c_1, c_2 están relacionadas con F por medio de la definición 1.2.5. y $a_1(x)$ y $a_2(x)$ satisfacen la condición

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} a_1(x) = \lim_{|x| \rightarrow \infty} a_2(x) = 0$$

La demostración está dada en Gnedenko-Kolmogorov [1954].

TEOREMA 1.4.7. Una función de distribución G pertenece al dominio de atracción normal de una distribución estable F con índice α ($0 < \alpha < 2$) y constante de estandarización $b_n^{-1} = 1 / a n^{1/\alpha}$ si y sólo si

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^a G(-x) = c_1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^a (1 - G(x)) = c_2,$$

donde c_1 y c_2 son constantes no negativas sujetas a la condición de que $c_1 + c_2 > 0$. $a > 0$. El teorema se demuestra en Prohorov y Rozanov [1969].

TEOREMA 1.4.8. Sea X una v.a. con función de densidad f , tal que $f(0) \neq 0$ y f es continua en $x=0$, entonces para cualquier $r > 0$ la variable $1/|x|^r$ pertenece al dominio de atracción de una distribución estable. Si $0 < r \leq 1/2$ entonces la variable $1/|x|^r$ pertenece al dominio de atracción de la distribución Normal, si $r > 1/2$ entonces $1/|x|^r$ pertenece al dominio de atracción de una distribución estable con índice $\alpha=1/r$. Además para $r > 1$, si X es una variable aleatoria contenida en el dominio de atracción de una distribución estable con índice α ($0 < \alpha < 2$) entonces $|x|^r$ pertenece al dominio de atracción de una distribución estable con índice α/r . Shapiro [1975].

1.5 PROPIEDADES DE LAS DISTRIBUCIONES ESTABLES.

En esta sección se presentan las principales propiedades de las Distribuciones Estables.

PROPIEDAD 1.5.1. Todas las distribuciones estables son absolutamente continuas y su función de densidad tiene derivadas continuamente diferenciables. Propiedad probada en Gnedenko-Kolmogorov [1954].

Este resultado asegura la existencia de la función de densidad para toda distribución estable, aunque únicamente se han logrado expresar estas funciones de densidad en forma cerrada en los casos de los tres ejemplos de la sección 1.3.

La siguiente propiedad es una condición análoga a la condición de Lindeberg-Feller para el caso $0 < \alpha < 2$ y refuerza la interpretación que se hace del teorema 1.4.1.

PROPIEDAD 1.5.2. Para toda distribución estable con índice α ($0 < \alpha < 2$) se tiene que

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} x^\alpha [1 - F(x) + F(-x)] = c_\alpha \quad \text{donde } c_\alpha > 0$$

La demostración está en Gnedenko-Kolmogorov [1954].

Sabemos que el área de las colas de la distribución para v.a. continuas tiende a cero cuando $x \rightarrow \infty$, pero además esta propiedad nos muestra que el área de las colas converge a cero tan rápidamente como x^α diverge a $+\infty$ cuando $x \rightarrow \infty$. También de los teoremas 1.4.1. (Caracterización de los dominios de atracción) y 1.4.4. (Toda distribución estable pertenece a su propio dominio de atracción) concluimos que las distribuciones estables con índice α ($0 < \alpha < 2$) tienen colas pesadas, variando regularmente en infinito, además del teorema 1.4.2. (Condición de Lindeberg-Feller) y de esta propiedad 1.5.2., se deduce que la rapidez de la convergencia no es de orden 2, sino más lenta, de hecho de orden menor que α ; mientras más pequeña sea α , más pesadas serán las colas de la distribución, en contraste con la Normal que como ya dijimos tiene colas no pesadas.

Tenemos que del teorema 1.4.3 se deduce que toda distribución estable con índice α ($0 < \alpha < 2$) posee todos los momentos de orden estrictamente menor que α y de la propiedad 1.5.2., se concluye que los momentos mayores que α no existen, excepto para la distribución Normal que tiene momentos de todos los órdenes.

En efecto para α ($0 < \alpha < 2$):

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{\alpha} f(x) dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-t}^t |x|^{\alpha} f(x) dx \leq \lim_{t \rightarrow \infty} t^{\alpha} \int_{-t}^t f(x) dx = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} t^{\alpha} [1 - (1 - F(t) + F(-t))] = \lim_{t \rightarrow \infty} t^{\alpha} - \lim_{t \rightarrow \infty} t^{\alpha} (1 - F(t) + F(-t)) = \\ &= \infty - C_{\alpha} = \infty \quad \forall x \in (-t, t) \end{aligned}$$

En particular para $1 \leq \alpha < 2$ las distribuciones estables tienen momentos de primer orden siendo μ la media de la distribución y no tienen varianzas finitas. En el caso en que $0 < \alpha < 1$, tampoco poseen media, debido a que no existen momentos mayores o iguales a uno.

PROPIEDAD 1.5.3. Todas las distribuciones estables son unimodales. Probada en Ibragimov-Chernin [1959].

1.6 DISTRIBUCIONES ESTABLES SIMÉTRICAS.

La definición 1.2.4 dice que una distribución estable es simétrica si y sólo si su función característica es de la forma:

$$\phi(t) = \exp(i\mu t - c|t|^{\alpha})$$

con $-\infty < t < \infty$, $0 < \alpha < 2$, $-\infty < \mu < \infty$ y $c \geq 0$. Donde el parámetro de localización μ , que en este caso coincide con el centro de simetría, es la mediana, la moda y para $1 < \alpha < 2$ es la media de la distribución.

Si estandarizamos en la forma usual $(x - \mu)/c$, al índice $\alpha = 2$ le corresponde la distribución Normal con media $\mu = 0$ y varianza $\sigma^2 = 2$. Si reparametrizamos para hacer el valor de $c = 1$, se sustituye el valor de c por $c = \sigma^2/2$ y análogamente para todas las estables simétricas $c = \sigma^{\alpha}/\alpha$.

Entonces tenemos que una distribución F es estable simétrica si y sólo si su función característica es de la forma:

$$\phi(t) = \exp(i\mu t - \sigma^\alpha |t|^\alpha)$$

con $-\infty < t < \infty$, $0 < \alpha < 2$, $-\infty < \mu < \infty$ y $\sigma > 0$.

En general se dice que una distribución de probabilidad está estandarizada si los parámetros de localización y escala son cero y uno respectivamente.

A continuación se presentan algunos resultados y relaciones que existen entre funciones de distribución normales estándar y distribuciones estables simétricas.

TEOREMA 1.6.1. Sean X_1, X_2 variables aleatorias independientes igualmente distribuidas como la Normal estándar, entonces la variable aleatoria $Y = X_1/X_2$ está distribuida como la Cauchy estándar.

El siguiente, es un resultado en el que se expresa la distribución de Cauchy a través de una relación entre distribuciones normales estándar.

TEOREMA 1.6.2. Sean X_1, X_2, \dots, X_n variables aleatorias independientes con función de distribución Normal estándar. Para $n \geq 2$, sea V_n

$$V_n = \begin{cases} X_2 & \text{si } n=2 \\ \exp_2[2^{n-2}-1] X_2 X_3^2 (X_4^2)^2 \dots (X_n^2)^{2^{n-3}} & \text{si } n \geq 3 \end{cases}$$

entonces la variable aleatoria $U = X_1/V_n$ tiene una distribución estable simétrica con índice $\alpha = 2^{2-n}$. Probado en Shashanka [1981].

La familia de distribuciones estables, al igual que la distribución Normal, tienen la propiedad de ser invariantes bajo transformación lineal, resultado que se expresa en el siguiente teorema.

TEOREMA 1.6.3. Sean X_1, X_2, \dots, X_n variables aleatorias independientes tal que para toda $i=1, 2, \dots, n$; X_i tiene una distribución estable simétrica (el teorema no exige la simetría, aquí se usa para estos fines) con vector de parámetros $(\alpha, \mu, \sigma^n/\alpha)$ y sean a_1, a_2, \dots, a_n n números reales, entonces la variable aleatoria $S_n = \sum a_i X_i$ tiene una distribución con vector de parámetros $(\alpha, \sum a_i \mu_i, \sum a_i^n \sigma^n / \alpha)$. Demostrado en Gómez Arias [1988].

Se desprende del teorema anterior que si una variable aleatoria X tiene una distribución estable con vector de parámetros $(\alpha, \mu, \sigma^n/\alpha)$ entonces la transformación $Y = a + bX$ tiene distribución estable con vector de parámetros $(\alpha, a + b\mu, b^n \sigma^n / \alpha)$.

En particular la transformación $Z = (X - \mu) / \sigma$ tiene una distribución estable simétrica estándar, esto es $Z \sim S_n(0, 0, 1)$.

En la práctica, al igual que para la distribución Normal, basta estudiar las distribuciones estables simétricas estándar para fines de estimación y pruebas de hipótesis.

Ya se ha observado que las únicas distribuciones estables simétricas para las cuales se conoce su función de densidad en forma cerrada son la Normal y la Cauchy, de ésta última también se conoce su función de distribución.

Para funciones estables simétricas ($\beta=0$) con parámetro de escala $\sigma=1$ se han dado desarrollos en serie, [Feller 1966], los cuales se muestran a continuación:

LEMA 1.6.1.

A) Para $x > 0$ y $0 < \alpha < 1$ tenemos:

$$f(x; \alpha, \mu) = \frac{1}{\pi x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k\alpha + 1)}{k!} (-x^{-\alpha})^k \operatorname{sen} \frac{k\pi}{2\alpha} (\mu - \alpha)$$

B) Para $x > 0$ y $1 < \alpha < 2$ tenemos:

$$f(x; \alpha, \mu) = \frac{1}{\pi x} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(1+k/\alpha)}{k!} (-x^{-\alpha})^k \operatorname{sen} \frac{k\pi}{2\alpha} (\mu - \alpha)$$

C) Para $x < 0$ y $1 < \alpha < 2$

$$f(x; \alpha, \mu) = f(-x; \alpha, \mu)$$

Fama y Roll [1968] construyeron tablas para la función de distribución de distribuciones estables simétricas estandarizadas para valores de α en el intervalo $1 \leq \alpha \leq 2$ truncando las series dadas por Feller y utilizando los resultados de Bergström [1952].

Las funciones de densidad y de distribución de las distribuciones estables simétricas, pueden ser evaluadas en forma distinta a las empleadas en Fama y Roll, al utilizar métodos numéricos para calcular la integral que corresponde a la función de densidad de una distribución estable simétrica estandarizada aplicando la fórmula de inversión.

$$f_x(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(xt) \exp\left(-\frac{\sigma^\alpha}{\alpha} t^\alpha\right) dt$$

y la función de distribución, con $F(0) = 0.5$ y $x \geq 0$

$$F_x(x; \alpha) = 0.5 + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(xt)}{t} \exp\left(-\frac{\sigma^\alpha}{\alpha} t^\alpha\right) dt$$

Con este método se construyeron las tablas para distribuciones estables simétricas estandarizadas de Gómez Arias - Pérez Abreu [1986].

Para efectos ilustrativos se presentan en los anexos, tablas de densidades de probabilidad y percentiles de distribución de distribuciones estables simétricas para algunos valores de α entre 1 y 2, así como diversas gráficas.

Como ejemplo podemos observar de la tabla que para un valor de x entre 3.60 y 3.80 se tiene una probabilidad de .0004 en la Normal ($\alpha=2$), lo que sucede para una distribución de Cauchy ($\alpha=1$) en el valor de $x=30$; lo que muestra la probabilidad de ocurrencia de valores grandes ("colas pesadas").

En cuanto al parámetro de escala σ , σ^2 es la varianza de la distribución únicamente en el caso de la distribución Normal, debido a que no existen momentos menores o iguales que α para $\alpha < 2$. En su lugar se muestra, en el lema siguiente una relación para el parámetro de escala σ en términos de los percentiles de la distribución, que coincide con la distribución de Cauchy.

LEMA 1.6.2. El parámetro de escala σ en la distribución Cauchy es el rango intercuartil

$$\sigma = 1/2 (Q_3 - Q_1)$$

donde Q_1 y Q_3 son el primer y tercer cuartil respectivamente. La demostración se encuentra en Gómez Arias [1988].

En general si evaluamos la función de distribución

$$F_x(x; \alpha) = 0.5 + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin(xt)}{t} \exp\left(-\frac{\sigma^\alpha}{\alpha} t^\alpha\right) dt$$

que con $x = \sigma/\alpha^{1/\alpha}$ obtenemos

$$F_x(x) = F_x(\sigma/\alpha^{1/\alpha}) = 0.5 + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\text{sen}(\sigma t/\alpha^{1/\alpha})}{t} \exp\left(-\left(\frac{\sigma t}{\alpha^{1/\alpha}}\right)^\alpha\right) dt$$

y aplicando el cambio de variable $u = (\sigma/\alpha^{1/\alpha})t$ se obtiene

$$F_x(\sigma/\alpha^{1/\alpha}) = 0.5 + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\text{sen}(u)}{u} \exp(-u^\alpha) du$$

Nótese que el lado derecho de esta igualdad depende únicamente del índice α y no del parámetro de escala σ . Sea r_α el valor de esta función evaluada en $x = \sigma/\alpha^{1/\alpha}$, es decir $F_x(\sigma/\alpha^{1/\alpha}) = r_\alpha$ y designemos con Qr_α el r_α -percentil de la distribución o sea $F_x(Qr_\alpha) = r_\alpha$.

Con esta notación se tiene que $Qr_\alpha = \sigma/\alpha^{1/\alpha}$. Por ser $F_x(x)$ simétrica alrededor de $\mu=0$ se tiene que $Q_{1-r_\alpha} = -Qr_\alpha$ y puesto que σ es un parámetro de escala el cual debe ser invariante bajo localización, promediando obtenemos que $(Qr_\alpha - Q_{1-r_\alpha})/2 = \sigma/\alpha^{1/\alpha}$.

LEMA 1.6.3. El parámetro de escala σ de una distribución estable con índice α , satisface la siguiente igualdad:

$$\sigma = 1/2 \alpha^{1/\alpha} (Qr_\alpha - Q_{1-r_\alpha}) \quad (1.9)$$

Los valores de r_α para distribuciones estables simétricas con $1 \leq \alpha \leq 2$ se obtuvieron evaluando $F(\sigma/\alpha^{1/\alpha})$ como $Qr_\alpha = \sigma/\alpha^{1/\alpha}$; como se aprecia en la tabla correspondiente del anexo A.

1.7 METODOS ESTADISTICOS PARA DISTRIBUCIONES ESTABLES.

Como se ha señalado anteriormente no se conocen expresiones cerradas para las funciones de densidad de las distribuciones

estables, salvo los casos de las distribuciones Normal, Cauchy y Lévy, así como a excepción de la Normal, tienen momentos de orden estrictamente menores que α ; todo esto dificulta la aplicación de los métodos clásicos de inferencia estadística.

Esto ha dado lugar al desarrollo de métodos estadísticos especiales, obtenidos por estudiosos de la materia. Presentaremos en esta sección los resultados más significativos.

1.7.1. ESTIMADORES DEL PARAMETRO DE ESCALA (c).

Fama y Roll [1971] han propuesto un estimador simple del parámetro de escala de una distribución estable simétrica, lo obtuvieron en forma empírica usando tablas de la función de distribución para distribuciones estables simétricas estandarizadas, que ellos mismos construyeron.

El estimador del parámetro de escala c que los autores proponen está dado por la expresión :

$$\hat{c} = (1/.827) (2) (\hat{u}(\alpha, .72) - \hat{u}(\alpha, .28))$$

donde $\hat{u}(\alpha, p)$ es el p -porcentaje muestral de la distribución estable con índice α .

En el caso de la distribución Normal, la desviación estándar muestral " s " como estimador de c es más eficiente que \hat{c} , sin embargo \hat{c} es más robusto que s cuando α es desconocida, debido a que la dispersión muestral de $s/\sqrt{2}$ aumenta rápidamente al disminuir α .

1.7.2. ESTIMADOR DEL EXPONENTE CARACTERISTICO (α).

Analizando el comportamiento de los percentiles de las colas de una distribución estable simétrica cuando el exponente

característico α decrece, Fama y Roll [1971] proponen varios estimadores de α obtenidos a partir de estadísticas de orden.

Sean X_1, X_2, \dots, X_n una muestra aleatoria de una distribución estable simétrica y sean \hat{X}_p y \hat{X}_{1-p} los respectivos p y $1-p$ percentiles para algún valor grande de p (por ejemplo $p=0.95$). Utilizando el estimador de escala \hat{C} , puede obtenerse en base a la simetría de la distribución un estimador \hat{Z}_p del p -percentil de una distribución estable estándar de la siguiente forma:

$$\hat{Z}_p = \frac{\hat{X}_p - \hat{X}_{1-p}}{2\hat{C}} = (0.827) \frac{\hat{X}_p - \hat{X}_{1-p}}{\hat{X}_{.72} - \hat{X}_{.28}}$$

Un estimador de α , denotado por $\hat{\alpha}_p$, se obtiene entonces buscando en las tablas de las distribuciones estables estándar el valor de α que corresponde al p -percentil más próximo a \hat{Z}_p . No se puede determinar un valor de p óptimo, sin embargo Fama y Roll sugieren tomar valores grandes de p , ya que las diferencias entre los p -percentiles para diferentes valores de α crecen con p .

Otro estimador del exponente característico α es propuesto por De Haan y Resnick [1980], también construido por estadísticas de orden. Sean $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$ las estadísticas de orden de las variables $|X_1|, |X_2|, \dots, |X_n|$ y $Y_{(1)}, Y_{(2)}, \dots, Y_{(n)}$ las estadísticas de orden de $|X_1|^{-1}, |X_2|^{-1}, \dots, |X_n|^{-1}$. Así tenemos $Y_{(n)} = X_{(n+1)}^{-1}$ con $1, 2, \dots, n$.

Utilizando la caracterización de los dominios de atracción, De Haan [1979] con $k=k(n) \rightarrow \infty$ y $k/n=k(n)/n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$ proponen el estimador de α :

$$\hat{\alpha} = \frac{\ln k}{\ln X_{(n)} - \ln X_{(n-k+1)}}$$

el cual es débilmente consistente.

1.7.3. METODOS DE ESTIMACION DE LOS PARAMETROS DE UNA DISTRIBUCION ESTABLE SIMETRICA.

Se han considerado tres métodos de estimación para los parámetros de una distribución estable simétrica, que son por el método de momentos, de máxima verosimilitud y de mínima distancia, los cuales se describen a continuación.

a) Estimadores por el método de momentos. Una versión del método de momentos es desarrollado en Press [1972], basado en la parametrización de las distribuciones estables mediante la función característica. Los estimadores de α y σ se obtienen de resolver el sistema de ecuaciones que se forma de evaluar el módulo de la función característica con $t_1 \neq t_2$ y $\alpha \neq 1$

$$\hat{\alpha} = \frac{\ln \left| \frac{\hat{\phi}(t_1)}{\hat{\phi}(t_2)} \right|}{\ln |t_1/t_2|}$$

$$\text{y } \ln \hat{\sigma} = \frac{\ln |t_1| \ln(-\ln |\hat{\phi}(t_2)|) - \ln |t_2| \ln(-\ln |\hat{\phi}(t_1)|)}{\ln |t_1/t_2|}$$

Para estimar el parámetro de localización μ y el sesgo β se define a $u(t)$ como la parte imaginaria del logaritmo de la función característica y para valores de $t_1 \neq t_2$, distintos de cero y $\alpha \neq 1$, se tiene

$$\frac{u(t)}{t_x} = \mu - \sigma \beta |t_x|^{k-1} t_g \frac{\pi \alpha}{2} \quad k=3, 4$$

$$\hat{u}(t) = \arctg \left(\frac{\sum_1^n \text{sen } tX_j}{\sum_1^n \text{cos } tX_j} \right)$$

$\hat{u}(t)$ es un estimador de $u(t)$ que resulta de descomponer en sumas de senos y cosenos $\hat{\phi}(t)$ expresándola en coordenadas polares y al sustituirse y resolver el sistema de ecuaciones generadas por t_3 y t_4 se obtiene

$$\hat{\mu} = \frac{|t_4|^{k-1} \frac{\hat{u}(t_3)}{t_3} - |t_3|^{k-1} \frac{\hat{u}(t_4)}{t_4}}{|t_4|^{k-1} - |t_3|^{k-1}}$$

$$\hat{\beta} = \frac{\frac{|\hat{u}(t_3)|}{t_3} - \frac{|\hat{u}(t_4)|}{t_4}}{||t_4|^{k-1} - |t_3|^{k-1}| \hat{\sigma} t_g \frac{\pi \alpha}{2}}$$

Para el caso de $\alpha=1$ se tiene

$$\hat{\sigma} = - \frac{\ln \hat{\phi}(t_1)}{|t_1|}$$

$$\hat{\mu} = \frac{\frac{\ln |t_4|}{t_3} \frac{\hat{u}(t_3)}{t_3} - \frac{\ln |t_3|}{t_4} \frac{\hat{u}(t_4)}{t_4}}{\ln \frac{t_4}{t_3}}$$

$$\hat{\beta} = \frac{\frac{\hat{u}(t_3)}{t_3} - \frac{\hat{u}(t_4)}{t_4}}{\frac{2\hat{\sigma}}{\pi} \ln \frac{t_4}{t_3}}$$

Estos estimadores son consistentes ya que $\hat{\phi}(t)$ es consistente para $\phi(t)$ pero tienen la desventaja de producir resultados no satisfactorios, como proporcionar una estimación

de α menor que cero o mayor que dos, es decir el estimador de α no preserva rango.

b) Método de máxima verosimilitud. Para obtener el estimador máximo verosímil del vector de parámetros se debe encontrar un vector $\Omega = (\alpha, \beta, \mu, \sigma)$ que responda a un máximo de la función de verosimilitud $L(\Omega)$.

$$L(\Omega) = \left[\frac{1}{2\pi} \right]^n \prod_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(-i (\mu - x_i) t + \frac{\sigma^n}{\alpha} |t|^k \right) dt$$

Du Mouchel [1973] demuestra que si se desconoce α y μ entonces la función de verosimilitud $L(\Omega)$ no tiene máximo, esto nos dice que no existe estimador máximo verosímil en el espacio de parámetros $\Omega = \{(\alpha, \mu) | 0 < \alpha \leq 2, -\infty < \mu < \infty\}$ de la familia de distribuciones estables. Sin embargo, Du Mouchel demuestra que el estimador máximo verosímil Ω_ϵ restringido al espacio de parámetros $\Omega_\epsilon = \{(\alpha, \mu) | \epsilon < \alpha \leq 2, -\infty < \mu < \infty\}$ para $\epsilon > 0$ arbitrariamente pequeño, existe, es consistente y asintóticamente normal. Además el caso $\alpha=1$ y $\beta \neq 0$ debe ser excluido.

c) Método de mínima distancia. Este método es presentado por Paulson, Holcomb y Leitch [1975] que utilizan también la función característica empírica $\hat{\Phi}(t)$. El estimador de mínima de distancia $\hat{\Omega} = (\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\mu}, \hat{\sigma})$ que proponen es aquel que cumple con

$$I = \text{Min}_{(\alpha, \beta, \mu, \sigma)} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\Phi}(t) - \hat{\Phi}(t)|^2 \exp(-t^2) dt$$

1.7.4. PRUEBAS DE BONDAD DE AJUSTE.

Las pruebas de bondad de ajuste clásicas como la Ji-

cuadrada de Pearson, la de Kolmogorov y Smirnov o la de Anderson-Darling [1954], requieren evaluar la función de distribución hipotética $F(x)$ en varios valores de x y por lo tanto puede suceder que estas pruebas no sean útiles cuando no se tengan medios disponibles como tablas de probabilidad o algoritmos para evaluar la función de distribución $F(x)$, tal como sucede en el caso de las distribuciones estables con exponente característico $\alpha \neq 1$ y $\alpha \neq 2$.

La alternativa la proporcionan Heathcote [1972] y Koutrouvelis [1980], quienes desarrollan pruebas de bondad de ajuste basados en estadísticos de prueba obtenidos con la función característica empírica. Esto es posible debido a la correspondencia uno a uno entre la función de distribución y la función característica, por lo cual las hipótesis pueden ser expresadas equivalentemente en términos de la función característica $\phi(t)$ en lugar de la función de distribución $F(x)$.

En las pruebas de bondad de ajuste que presenta Heathcote considera la hipótesis nula

$$H_0: \phi(t) - \phi_0(t)$$

donde $\phi_0(t)$ es la función característica de una variable aleatoria X simétrica alrededor del origen, contra una hipótesis alterna general.

La estadística de prueba que propone es:

$$W_n(t) = \sqrt{\frac{2}{n}} \sum_1^n \text{sen} \left[\frac{tX_j}{2} \right]$$

donde X_1, X_2, \dots, X_n es una muestra aleatoria de la distribución referida.

Si la hipótesis nula es cierta se tiene que

$$E[W_n(t)] = 0 \quad ; \quad \text{Var}[W_n(t)] = 1 - \phi_0(t)$$

$$y \quad \text{cov}[W_n(t_1), W_n(t_2)] = \phi_0 [(t_2 - t_1)/2] - \phi_0 [(t_2 + t_1)/2]$$

La independencia de las variables X_1, X_2, \dots, X_n implica la validez del Teorema Central del Límite; aplicado a las variables $\text{sen}(tX_j/2)$ con $j=1, 2, \dots, n$, en donde para cada t se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P [W_n(t) \leq x] = (2\pi(1 - \phi_0(t)))^{-1/2} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{y^2}{2(1 - \phi_0(t))}\right) dy$$

En virtud de esta igualdad la hipótesis nula queda determinada por las colas de la distribución Ji-cuadrada con un grado de libertad, es decir se rechaza H_0 si

$$W_n(t) \leq [1 - \phi_0(t)] \chi_{(1, \epsilon/2)}^2 \quad \text{o si} \quad W_n(t) \geq [1 - \phi_0(t)] \chi_{(1, 1 - \epsilon/2)}^2$$

donde $\chi_{(1, \epsilon/2)}^2$ es el $\epsilon/2$ -percentil de la distribución ji-cuadrada con un grado de libertad.

1.7.5. INFERENCIA PARA PARAMETROS DE LOCALIZACION. (μ).

En esta sección se desarrollan los aspectos más importantes en inferencia estadística para el parámetro de localización de una distribución estable simétrica.

Como las distribuciones estables simétricas son invariantes bajo transformación y como son límites de sumas de variables aleatorias independientes igualmente distribuidas estandarizadas convenientemente, los aspectos se tratan en forma análoga a como se hace en la teoría clásica de la distribución Normal; esto permite establecer similitudes y contrastes entre la distribución Normal y otras distribuciones estables simétricas.

a) Distribución muestral de la estadística \bar{X} . Sea X_1, X_2, \dots, X_n

una muestra aleatoria de una distribución estable simétrica ($\alpha, \mu, \sigma^\alpha$) la estadística \bar{X} tiene una distribución estable con vector de parámetros $(\alpha, \mu, n^{1-\alpha}\sigma^\alpha)$

$$Z^{(\alpha)} = n^{(\alpha-1)/\alpha} \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma}$$

tiene una distribución estable simétrica estándar.

Si el parámetro de escala es conocido permite hacer inferencia con sólo contar con las tablas de probabilidad de distribuciones estables simétricas construídas por Gómez Arias-Pérez Abreu [1986].

b) Robusticidad de la distribución t de Student dentro de las funciones de distribución estables simétricas. Los resultados de Gómez Arias [1988] se obtuvieron simulando muestras aleatorias de distribuciones estables simétricas para diferentes valores de α entre 1 y 2 y para diferentes tamaños de muestra. Se utilizó la estadística Anderson-Darling para las pruebas de bondad de ajuste de la estadística

$$t = \sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu}{s^2} \quad (1.10)$$

$$\text{donde } \bar{X} = (1/n) \sum x_i \text{ y } s^2 = (1/(n-1)) \sum (x_i - \bar{X})^2$$

Con un nivel de significancia $\epsilon=0.01$ se obtuvo que para muestras de tamaño $n=10$ la distribución t de Student es robusta para valores de α entre 1.3 y 2; además se observó un comportamiento bimodal alrededor de $\alpha=1$ y desapareciendo cuando α se hace más grande. Por lo tanto conviene utilizar la t de Student sólo en el rango de valores en que es robusta.

c) Estadística t de Student generalizada. Cuando el parámetro de escala es desconocido se sustituye σ por un estimador $\hat{\sigma}$

consistente; este resulta de reemplazar Q_{r_n} y Q_{l_n} de (1.9) por los correspondientes percentiles muestrales denotados por q_{r_n} y q_{l_n} respectivamente.

$$\hat{\sigma} = 1/2 \alpha^{1/\alpha} (q_{r_n} - q_{l_n})$$

con lo que se obtiene la estadística

$$t^\alpha = n^{(1-\epsilon)/\alpha} \frac{\bar{X} - \mu}{\hat{\sigma}} \quad (1.11)$$

En inferencia estadística para leyes estables no normales, no es importante conocer la distribución exacta del estadístico, esto se debe a que siempre se necesita considerar muestras de tamaño n suficientemente grandes para observar el comportamiento de las "colas pesadas" .

Mediante estudios de simulación se investigó la rapidez de convergencia de la estadística para diferentes valores de α , utilizando las estadísticas de Anderson-Darling como estadístico de prueba. Para un nivel de significancia de $\epsilon=0.01$ se concluye que la convergencia es rápida para valores de α entre 1 y 1.7 y para tamaños de muestra mayores o iguales a 15.

d) Estimación de intervalos de confianza para el parámetro de localización μ de una distribución estable simétrica. La construcción de estos intervalos con α conocido se lleva a cabo en forma análoga a la distribución Normal, esto debido a la simetría de la distribución y a la analogía de los estadísticos z y t . Así pues un intervalo de confianza para μ con exponente característico α y el parámetro de escala conocido, con una confianza al $(1-\epsilon)100\%$ es:

$$\bar{X} \pm Z_{1-\epsilon/2}^{\alpha} \frac{\hat{\sigma}}{n^{(\alpha-1)/\alpha}}$$

donde $Z_{1-\epsilon/2}^{\alpha}$ es el percentil $1-\epsilon/2$ de una distribución estable simétrica.

Para σ desconocido, utilizando donde el rango de valores de α y tamaño de muestra hagan a t una distribución robusta, el intervalo de confianza para μ es

$$\bar{X} \pm t_{1-\epsilon/2} \frac{S}{\sqrt{n}}$$

Con la estadística t de Student generalizada se tiene que para una tamaño de muestra $n \geq 15$ y α entre 1 y 1.7 un intervalo de confianza para μ al $(1-\epsilon)100\%$ esta dado por

$$\bar{X} \pm Z_{1-\epsilon/2}^{\alpha} \frac{\hat{\sigma}}{n^{(\alpha-1)/\alpha}} \quad \text{o bien}$$

$$\bar{X} \pm Z_{1-\epsilon/2}^{\alpha} \frac{\alpha^{1/\alpha} (q_{r_{\alpha}} - q_{1-r_{\alpha}})}{2n^{(\alpha-1)/\alpha}}$$

Cuando el parámetro de escala σ es desconocido se observa que para valores de α entre 1.3 y 1.7 y tamaño de muestra mayor que 15 se pueden utilizar ambos estadísticos (1.10) y (1.11), sin embargo el estadístico t (1.11) proporciona en promedio intervalos más pequeños.

CAPITULO II

MODELACION CON DISTRIBUCIONES ESTABLES

2.1 INTRODUCCION.

A pesar de su parecido con la Normal, la familia de las distribuciones estables no ha gozado con el gran interés de los matemáticos dedicados a la teoría de la probabilidad.

La reserva con la que se han topado las leyes estables se debió en gran parte a que no se encontraron aplicaciones por largo tiempo. Hoy en día hay bases para creer que el papel de las leyes estables se hace cada vez mayor, por lo tanto la presentación de estas aplicaciones se hace ahora necesaria.

La primera aplicación se encuentra desde 1919, donde el astrónomo danés Holtsmark publica un documento que establece un principio probabilístico que obedece a las fluctuaciones aleatorias del campo gravitacional de las estrellas en el espacio, bajo ciertos supuestos naturales con respecto a su distribución y masas. La distribución encontrada por Holtsmark pertenece a la familia de leyes estables simétrica-esferoidal con $\alpha=3/2$, que se verá más adelante con detalle.

En 1922 el biólogo inglés Willis, publicó un libro tratando los estudios de principios estadísticos en procesos evolutivos. Uno de los principales resultados en sus investigaciones fue el descubrimiento de los principios observados en la naturaleza y

el tratamiento de las especies biológicas.

En 1924 el matemático inglés Yule, estuvo en posibilidad de encontrar bases teóricas en relación de los modelos estocásticos que se podían incluir dentro de la teoría de los procesos de ramificación.

El uso más importante de leyes estables ha sido en la teoría de probabilidad; distribuciones estables se pueden encontrar en muy diversas áreas de la literatura matemática contemporánea. Primero y más importante, los que involucran teoremas límites de variables aleatorias independientes o débilmente dependientes y una variedad de refinamientos de estos teoremas. Adicionalmente podemos nombrar la teoría de procesos aleatorios, en particular la de procesos de ramificación, la teoría de determinantes aleatorios y un buen número de otros problemas que se conectan con leyes estables.

Las distribuciones estables en la actualidad llaman la atención cada día más, no únicamente por el gran desarrollo que han alcanzado en la teoría de la probabilidad, sino también por el alto grado de aplicación que tienen al modelar fenómenos en áreas diversas como economía: Mandelbrot [1963], Fielitz y Smith [1972], Paulson, Holcomb y Leitch [1975] que presentan modelos relativos a ingresos y variación de precios en mercados especulativos a través de las distribuciones estables.

Elliot W. Montroll y John T. Bendler [1984] utilizan estas distribuciones para desarrollar la teoría de la relajación dieléctrica y Bendler, lo hace también para la teoría de la relajación mecánica. Asimismo en Zolotarev [1971] y [1986] encontramos un modelo general para el "campo de acción" creado en un determinado punto $y \in U$ contenido en R^n por un subconjunto

de partículas puntuales en V contenido en R^n , desarrollado con las distribuciones estables, encontrándose también aplicaciones en particular al campo gravitacional de las estrellas, a las distribuciones de temperaturas de un reactor nuclear, de esfuerzos de una malla o red cristalina y del campo magnético generado por una red de magnetos elementales. También en esta referencia se encuentran desarrollados algunos modelos con aplicaciones en ingeniería y electrónica.

Presentar estas aplicaciones será el contenido del capítulo y el objetivo general de este trabajo.

2.2 MODELACION CON DISTRIBUCIONES ESTABLES EN MATEMATICAS Y PROBABILIDAD.

APLICACION 1. Caminata aleatoria.

El siguiente problema es clásico en la teoría de probabilidad y está dado en muchas aplicaciones y referencias bibliográficas.

Consideremos una secuencia de lanzamientos de una moneda legal y calculemos la diferencia entre el número de caras y cruces de los n lanzamientos.

Este procedimiento puede representarse esquemáticamente como una caminata aleatoria a través de los valores enteros del eje de los reales, bajo los supuestos de que se inicializa en el punto $x=0$ y si hay algún movimiento a la izquierda o a la derecha lo toma con probabilidad de $1/2$, esto independientemente de la posición e independientemente de como se alcanzó esa posición.

La probabilidad de que el punto $r > 0$ se alcance después de n pasos, se denota por $P_{r,n}$. $P_{r,n} = 0$ si r y n tienen diferente paridad. Si r y n tienen la misma paridad entonces

$$P_{r,n} = \frac{r}{n} \binom{n}{(n+r)/2} 2^{-n}$$

La probabilidad $q_r(N)$ de que el punto r se alcance por primera vez en no más de N pasos se obtiene sumando las probabilidades $P_{r,n}$:

$$q_r(N) = \sum (P_{r,n} : 1 \leq n \leq N).$$

Sea $N = 2[r^2 t]$ donde $[.]$ denota la parte entera, y el número $t > 0$ es fijo. Entonces se tiene que como $r \rightarrow \infty$

$$q_r(N) \sim \frac{\sqrt{2/\pi}}{\sqrt{t}} \int_{r/\sqrt{2t}}^{\infty} \exp(-x^2/2) dx = S(t, 1/2, 1, 0, 1)$$

esto es, el límite de la distribución del primer arribo en el punto r dentro de $2[tr^2]$ pasos coincide con la distribución de Lévy ($\alpha=1/2$).

El lenguaje pintoresco de los juegos con apuesta no debe distraernos de la importancia general del modelo de lanzamiento de una moneda. De hecho, el modelo puede servir como aproximación a muchos procesos que dependen del azar, y que son más complicados, en la física, en la economía y en la teoría del aprendizaje. Se supone que cantidades como son la energía de una partícula física, la riqueza de un individuo, o el aprendizaje acumulado de una rata, varían como consecuencia de colisiones sucesivas o impulsos aleatorios de alguna clase. Con el objeto de dar una orientación al problema, se supone que los cambios individuales son de la misma magnitud y que se regula su signo por medio de un juego de lanzamiento de una moneda. Tienen importancia práctica porque hacen ver que, en contra de los

puntos de vista generalmente aceptados, las leyes que rigen una serie prolongada de observaciones individuales mostrarán patrones y promedios muy alejados de los que se deducen para la población entera. En otras palabras, las pruebas psicológicas habituales conducirían a decir que en una población de monedas "normales", la mayoría de las monedas individuales están "mal ajustadas".

APLICACION 2. Proceso de ramificación.

Describiremos un proceso al azar que sirve de modelo simplificado de muchos procesos empíricos, y que además, es un ejemplo de la utilidad de las funciones generatrices. En otras palabras el proceso puede describirse de la siguiente manera; consideremos una partícula que puede producir nuevas partículas de la misma clase. Una sola partícula forma la generación original, o generación cero. Cada partícula tiene la probabilidad de generar k partículas nuevas, los descendientes directos de la n -ésima generación forman la $(n+1)$ -ésima generación. Las partículas de cada generación actúan de manera independiente una de otra. Nos interesa el tamaño de las generaciones sucesivas.

Yule [1924] estudió por primera vez este tipo de proceso en relación con la teoría matemática de la evolución. La población consta de las especies dentro de algún género, y la creación de algún nuevo elemento se debe a las mutaciones. La suposición de que cada especie tiene la misma probabilidad de dar lugar a una nueva especie, está influenciada por la tasa de mutaciones y no por el tamaño de la especie. Se desechaba también la posibilidad de que una especie pudiera extinguirse.

Furry [1937] usó el mismo modelo para describir un proceso

relacionado con los rayos cósmicos, pero la aproximación era burda.

Consideremos un proceso aleatorio de ramificación con un tiempo discreto y con un tipo simple de partícula. Cada partícula se puede transformar de tres maneras diferentes al final de la unidad de tiempo. Desaparece con $p > 0$, se transforma en la misma partícula (queda igual) con probabilidad $1-2p$ o se transforma en dos partículas con probabilidad p . La función generadora $F(s)$ de las probabilidades de transformación de una partícula simple está dada por $F(s) = p + (1-2p)s + ps^2$.

Denotaremos por $V_0(t)$ al número de partículas en la $(t-1)$ generación, que no tenga descendencia (esto es que desaparezca en la aparición de la t -ésima generación) y por $V = \sum_{k=1}^{\infty} V_0(k)$ o sea el número total de partículas que aparecen en el proceso durante el tiempo $0 < t < \infty$ de su evolución. $V_0(0) = 0$, porque es el inicio del proceso. La función generadora $\phi(u) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n u^n$ de la distribución $q_n = P\{v=n\}$ está conectada con la función $F(s)$ por la ecuación $\phi(u) = F(\phi(u)) + p(u-1)$ que nos lleva a la expresión explícita

$$\phi(u) = 1 - \sqrt{1-u} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(n-1/2) u^n}{n!}$$

esto implica que

$$q_n = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(n-1/2)}{\Gamma(n+1)} \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}} n^{-3/2} \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty$$

lo que indica que pertenece al dominio de atracción de una ley estable con parámetros $\alpha=1/2$, $\beta=1$, $\mu=0$ y $c=1$.

Si no se trata de una partícula sino de n , entonces el número total de partículas sin descendencia se expresa por la

suma $V_1+V_2+\dots+V_n$ de variables aleatorias independientes igualmente distribuidas como V . Después de la normalización la suma $(V_1+\dots+V_n)^{n^2}$ tiene una distribución que se aproxima a la distribución estable $S(x, 1/2, 1, 0, 1)$, cuando n crece.

Comentaremos dos ejemplos : a) Reacciones nucleares en cadena. Esta aplicación se hizo conocida en relación con la bomba atómica. Las partículas son neutrones, sujetos a choques fortuitos con otras partículas. Cuando menos sucederá que la primera partícula permanecerá inactiva y el proceso nunca comience y cuando más, habrá m partículas de la primera generación, m^2 de la segunda y así sucesivamente. Desde el punto de vista matemático, este número puede incrementarse indefinidamente. En términos físicos, para números grandes de partículas, las probabilidades de fisión no pueden permanecer constantes y, además la independencia estocástica es imposible. Sin embargo, en las reacciones en cadena ordinarias, la descripción matemática "el número de partículas se incrementa indefinidamente" puede traducirse como "explosión".

b) Supervivencia de los apellidos de familia. Aquí sólo cuentan los descendientes masculinos, los cuales desempeñan el papel de las partículas y p_k es la probabilidad de que un varón recién nacido se convierta en progenitor de exactamente k niños varones. Este esquema supone dos simplificaciones artificiales. La fertilidad está sujeta a tendencias seculares y, por lo tanto, la distribución de $\{p_k\}$ cambia en realidad de generación en generación. Por otra parte, es seguro que la herencia y el medio ambiente comunes produzcan semejanzas entre hermanos, con lo que se contradice la suposición de independencia estocástica. Este modelo se puede refinar de modo que se tomen en cuenta estas objeciones, pero las características esenciales permanecen inalterables. Deduiremos la probabilidad de encontrar k

portadores del apellido de la familia en la n -ésima generación, y en particular, la probabilidad de extinción del apellido. La supervivencia de apellidos de familia parece que ha sido la primera reacción en cadena estudiada por métodos probabilísticos. El problema fué tratado por primera vez por F. Galton en 1889, de la que hay una reseña detallada en A. Lotka [1939].

APLICACION 3. Determinantes aleatorios.

Este modelo está tomado de la teoría de matrices aleatorias. Consideremos sistemas de ecuaciones lineales algebraicas de la forma $[-]X_n = W_n$, $n=1, 2, \dots$ donde $[-] = (X_{ij}^{(n)})$ es una matriz $n \times n$ de elementos aleatorios $X_{ij}^{(n)}$ y $W_n = (W_i^{(n)})$ es un vector aleatorio. La solución si el determinante $[-] \neq 0$ es $X_n = (x_j^{(n)}) = [-]^{-1} W_n$.

En el caso en que el determinante es igual a cero la solución no existe y se asigna a X_n el valor de cero.

Para valores grandes de n la solución se convierte en un problema computacional laborioso, una aproximación del límite proporciona información acertada y suficiente.

Asumamos que para cada valor de n las variables aleatorias $X_{ij}^{(n)}$ y $W_j^{(n)}$ $i, j=1, 2, \dots, n$ son mutuamente independientes, entonces la relación del límite para $1 \leq i$ y $j \leq n$ para $i \neq j$

$$\lim F(x_j^{(n)} < \xi) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan \xi = S(\xi, 1, 0, 0, 1)$$

que corresponde a la distribución de Cauchy ($\alpha=1$).

Si se trabaja un límite de distribuciones análogo para

distribuciones conjuntas con un número de componentes finito y para una dimensión k , se tiene que la distribución límite es una distribución de Cauchy k -dimensional.

2.3. MODELOS DE PUNTO FUENTE DE INFLUENCIA.

El modelo siguiente es de carácter general y ciertos problemas en áreas de astronomía, física, etc., resultan estar conectados con él.

Consideremos una región U de volúmen finito o infinito en el espacio n -dimensional euclidiano R^n ; que en problemas concretos puede tratarse de espacios físicos, espacios en tiempo, fases en el espacio, etc. Disperso en U existe un sistema r de puntos objeto que llamaremos condicionalmente "partículas". Estas partículas están caracterizadas por el valor del parámetro ϕ tomando valores en algún conjunto Θ .

Cada partícula en r es capaz de crear un "campo de acción" que llamaremos "campo" por comodidad, descrita por medio de una "función de influencia" $v(x, y, z)$. El vector $v(x, y, z)$ toma valores en algún subconjunto V de un espacio euclidiano m -dimensional R^m , que señala el valor del campo creado en el punto $y \in U$, por la partícula localizada en el punto $x \in U$ y caracterizada por el valor $\phi = z$.

Como definición, una colección finita $A = \{X_i\}$ de partículas en r , con la partícula indexada por i , localizada en el punto X_i , y teniendo el valor Z_i del parámetro característico ϕ , crea un campo con función de influencia

$$\Sigma \{v(X_i, Y, Z_i) : X_i \in A\}$$

esto es, un campo igual al vector suma de los campos creados por

las partículas separadas en el conjunto A.

Las posiciones X_i de las partículas en r y los valores Z_i correspondientes, asumen ser variables aleatorias sujetas a ciertas condiciones:

Sean U_1 y U_2 regiones disjuntas en U de volúmen finito u_1 y u_2 . Al sistema contable de puntos situados aleatoriamente en U se llama un Conjunto de Poisson y tiene las siguientes propiedades.

1ª. El número N_1 y N_2 de puntos que caen en U_1 y U_2 respectivamente son variables aleatorias independientes.

2ª. Para cualquier $k \geq 0$ la probabilidad $P(N_1=k)$ depende de k y del volúmen U_1 , pero no de la forma de U_1 .

3ª. Para valores pequeños del volúmen u_1

$$P(N_1=1) = pu_1 + o(u_1)$$

$$P(N_1 \geq 2) = o(u_1)$$

donde $p > 0$ es una constante que significa la densidad promedio de la concentración de puntos en el sistema U . Usando esta propiedad se demuestra que N_1 tiene una distribución de Poisson con parámetro $\delta = pu_1$, esto es

$$P(N_1=k) = \delta^k \exp(-\delta), \quad k=0,1,\dots$$

4ª. Sean X_1, X_2, \dots, X_n las posiciones del conjunto de puntos que caen en U_1 , estas variables son mutuamente independientes.

5ª. La distribución condicional de la posición de un punto en U_1 bajo la condición de que caiga en esta región, es uniforme, esto es tiene la densidad una distribución $1/u_1$.

Se hacen además los siguientes 3 supuestos del sistema de partículas τ .

a) τ es un conjunto de Poisson (y por consiguiente tiene las propiedades 1 a 5).

b) Para cualquier región U_1 de volúmen finito, el número N_1 de partículas que caen en U_1 , las posiciones X_1, X_2, \dots , de estas partículas y los valores Z_1, Z_2, \dots , del parámetro ϕ que los caracteriza, son variables aleatorias independientes.

c) Las variables aleatorias Z_1, Z_2, \dots , tienen la misma ley de distribución P_ϕ .

Los límites de las distribuciones correspondientes a este modelo general son infinitamente divisibles; es natural esperar que en ciertos casos se trate de leyes estables m -dimensionales. Aparecen leyes con valores de α tales como $\alpha = (n_1 + q_1 n_2) / p = 1$ o como $\alpha = (n_1 + q_2 n_2 + \dots + q_m n_m) / p$.

Daremos algunos ejemplos de casos concretos que responden al modelo general.

APLICACION 4. Campo gravitacional de las estrellas.

Holtmark [1919] considera el problema de la distribución de los efectos gravitacionales de las estrellas de varias masas uniformemente esparcidas en el espacio, con densidad p , sobre una unidad de masa de un punto seleccionado. El sistema de supuestos usado por Holtmark corresponde completamente a las condiciones del modelo general. Escoge $U = V = R^3$ $\Theta = R' = (0, \infty)$ y

$$v(x, y, z) = G_2(x-y) / |x-y|^3.$$

La función v expresa la ley de atracción de Newton y da la fuerza con la que el cuerpo de masa z localizado en un punto x atrae a la unidad de masa localizada en el punto y ; G es la constante gravitacional.

La condición $D_t < \infty$ asume que $h = E\theta^{3/2} < \infty$. Mediante los cálculos correspondientes se obtienen que el campo gravitacional es homogéneo y

$$\log f(t) = -\lambda |t|^{3/2} = -\frac{8\sqrt{2}}{15} p h G^{3/2} |t|^{3/2}$$

esto es, el efecto total v en un punto fijo de todas las estrellas tiene distribución simétrica esférica con $\alpha=3/2$.

Así también si se considera la razón de cambio de la fuerza en cualquier punto del espacio tiene una distribución estable con función característica tridimensional de Cauchy.

APLICACION 5. Distribución de la temperatura de un reactor nuclear.

En un cuerpo D con vecindad Γ de acción de radiación, en tiempos aleatorios t_1, t_2, \dots , en lugares aleatorios Y_1, Y_2, \dots , las transformaciones nucleares causan pasajeras pero muy intensas radiaciones de temperatura.

A causa de la propagación del calor en el cuerpo, cada radiación llega al tiempo t_i y en el punto Y_i lleva a un incremento en la temperatura con tiempo $r > t_i$, en el punto elegido $a \in D$ por un monto $L(r, -t_i, Y_i, a)$ y donde la función $L(x_1, x_2, a)$ es la solución a la ecuación de la conducción de calor.

La temperatura $T(r, a)$ en el punto a del tiempo r , está compuesta por las contribuciones de las radiaciones que han

ocurrido hasta ese tiempo, esto es;

$$T(r, a) = \sum \{L(r, -t_i, Y_i, a) : r_i < r\}$$

Este problema está en completa correspondencia a las condiciones tomadas como base del modelo de puntos fuente de influencia, con los supuesto $X_i = (t_i, Y_i)$, con $U_1 = R^+$, $U_2 = D$, $U = U_1 \times U_2$, y $V = R^+$. Si asumimos que las radiaciones ocurren debido al decaimiento de átomos de un solo tipo, entonces el conjunto θ se considera vacío, esto es la función L se puede tomar como independiente del parámetro ϕ que caracteriza a los átomos. De otro modo L se asume depende de este parámetro.

Después de realizar cálculos y cambios de variable en la función explícita de influencia se llega a la función característica de una distribución estable unidimensional

$$\log \bar{f}(t) = \frac{3}{2} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \rho k (-it)^{5/3}$$

que corresponde a los valores de

$$\alpha = \frac{5}{3} \quad \beta = 1 \quad \mu = 0 \quad c = \frac{3}{20\pi} \left(\frac{3}{5}\right)^{3/2} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \rho$$

APLICACION 6. Distribuciones de las tensiones de una red o malla cristalina.

Las estructuras cristalinas se distinguen por un arreglo geométrico muy rígido de sus átomos. La representación ideal de los cristales se torna válida en sólo una muy pequeña parte de ellos. Los cristales siempre tienen varias alteraciones en su estructura, esto debido a que hay átomos extraños o ajenos en una localización particular o por que no existen átomos en absoluto en ese lugar.

Tales anomalías en la red o malla cristalina se le llaman "dislocaciones". Estas dislocaciones están dispersas en el cuerpo del cristal, pero también pueden estar concentradas, formando líneas y hasta superficies con configuraciones complicadas.

Consideremos el caso de dislocaciones en puntos uniformemente dispersos en el cuerpo del cristal con densidad promedio ρ . Cada uno de los puntos de dislocaciones crea una tensión adicional a los nodos de la malla cristalina. Esta tensión es descrita por $V=(v_{kl}; k,l= 1,2,3 k \neq l)$ dependiendo en general del punto y de la dislocación, que es dado por el valor de algún parámetro ϕ . En muchos casos el tensor $v(x,y,\phi)$ puede considerarse como un vector 6-dimensional que tiene la siguiente forma:

$$v(x,y,z) = |x-y|^{-3} D(s,z), \quad s=(x-y)/|x-y|$$

Este modelo tiene las bases para usar el modelo de puntos fuente de influencia. Así tenemos que V es el cuerpo del cristal en R^3 y los puntos de dislocación X_j en U forman un sistema de partículas que puede asumirse satisfacen las condiciones del modelo general.

La acción de las dislocaciones individuales se describen por la función de influencia $v(x,y,z)$ con valores en algún conjunto V de R^6 .

En resumen V tiene una distribución centralmente simétrica en R^6 con valor de $\alpha=1$.

$$\log f(t) = - \int_{\mathbb{R}^3} |t, v| \chi(dv) \quad \text{donde}$$

$$\chi(B) = \rho \frac{\pi}{6} \int_{D \cap U \in B} |D(s, z)| ds P_{\rho}(dz) \quad B \in \mathcal{S}$$

Esta distribución no esférica es análoga a la función 6-dimensional de Cauchy. Las proyecciones en los ejes de coordenadas son funciones ordinarias de Cauchy con diferentes parámetros de escala.

APLICACION 7. Distribución de un campo magnético.

Se consideran aquí dos ejemplos, ambos involucran cálculos de una distribución de un campo magnético en el espacio U en \mathbb{R}^3 . Están generados por la combinación y acción independientes de un sistema de magnetos elementales (puntos) dispersos aleatoriamente en U con densidad promedio ρ . Se asume como un sistema Poisson que satisface las condiciones del modelo general.

En este caso $U = \mathbb{R}^3$ con función de influencia $v(x, y, z)$ será invariante con respecto a la traslación de la variable x , sin embargo depende de la diferencia $x-y$, y sin perder generalidad asumimos que $y=0$.

$$v_1(x, 0, z) = c |z| / |x|^2 \quad (s \times e),$$

$$v_2(x, 0, z) = c |z| / |x|^3 \quad (3 \langle s, e \rangle s - e)$$

donde $s = x/|x|$, $e = z/|z|$, $(s \times e)$ es el vector producto y c es la constante magnética.

Físicamente, la característica $\phi = z$ significa el momento magnético arribando a $y=0$ bajo la acción de un magneto elemental localizado en el punto x . El momento magnético en x puede tomar varios valores, dependiendo de las propiedades individuales del

magneto. Con estas características consideradas como aleatorias se asume que la distribución $P_*(dz)$ es centralmente simétrica.

La primera función de influencia describe un campo magnético creado por cargas que se mueven en la vecindad inmediata de sus posiciones promedio. Este caso corresponde a la relación llamada Biot-Savart. Aquí se enfrenta uno con un modelo para un campo magnético en el microcosmos, en el nivel de partículas elementales. La segunda función de influencia corresponde a magnetos elementales de tipo bipolares, en este caso el modelo se trata de una relación con el macrocosmos -el mundo de los planetas y estrellas esparcidos en el espacio-. Si una estrella o planeta tiene un campo magnético, entonces en la escala del universo se puede observar como un punto elemental de un magneto bipolar.

La función de influencia v_1 , así como v_2 tienen simetría central con respecto a x , y con respecto a z .

Las funciones de influencia muestran que v_1 tiene una función de distribución estable tri-dimensional con parámetro $\alpha=3/2$, mientras que v_2 tiene una función de distribución estable tri-dimensional con $\alpha=1$ como se muestra con los correspondientes modelos que se presentan a continuación.

$$\log \bar{F}_1(t) = -\frac{1}{3} \sqrt{2\pi} \rho C^{3/2} |t|^{3/2} A_1(t), \quad \text{donde}$$

$$A_1(t) = \int_0^\infty \int_s^\infty |t/d| (s \times e)^{3/2} |z|^{3/2} ds P_*(dz) \quad \text{y}$$

$$\log \bar{F}_2(t) = -\frac{\pi}{6} \rho C |t| A_2(t) \quad \text{donde}$$

$$A_2(t) = \int_0^t \int_S |(t/d, 3(s, e) s - e)| \cdot |z| ds P_*(dz)$$

2.4 MODELACION CON DISTRIBUCIONES ESTABLES EN FISICA.

Presentaremos en esta sección un modelo adicional en el campo de la física.

APLICACION 8. Punto fuente de radiación sobre un plano.

Consideremos un punto finito de radiación en el plano de una laminilla localizada paralelamente a la pantalla a una distancia igual a I . La emisión radioactiva genera puntos de rayos de luz en la pantalla. El problema es calcular la distribución de los rayos en la pantalla.

Primero que todo se escoge un sistema cartesiano de coordenadas (x, y, z) en el espacio, tal que el plano (x, y) coincide con el plano de la pantalla, y la fuente de radiación tiene coordenadas $(0, 0, 1)$.

Los puntos donde se ven los relámpagos están localizados aleatoriamente en el plano. Denotaremos las coordenadas de uno de los rayos por $(U, V, 0)$. Por la simetría geométrica se implica que el vector aleatorio (U, V) tiene una distribución circular, por lo cual es suficiente encontrar la distribución de una de sus coordenadas, digamos U .

Proyectando el proceso completo en el plano (x, z) ; debido al modelo planar, la fuente de radiación tiene coordenadas $(0, 1)$ y las posiciones aleatorias de los rayos en el eje de las x tiene la coordenada U .

Denotaremos por $F(x)$ a la función de distribución de la variable aleatoria U . $F(x)$ es la probabilidad de que un rayo toque el eje hacia la izquierda del punto con coordenada $(x,0)$. Todos los rayos que satisfacen esta condición están incluidos en un ángulo igual a $(\pi/2 + \arctan x)$ medido de la línea $z=1$ en el sentido de las manecillas del reloj. Todos los rayos que puedan tocar la pantalla están incluidos en el ángulo π ; es más, el ángulo ϕ correspondiente al punto aleatorio $(U,0)$ tiene una distribución uniforme entre los límites 0 y π . Consecuentemente

$$F(x) = 1/2 + 1/\pi \arctan x = S(x,1,0,0,1)$$

esto es, el componente U (así como el V) tienen una distribución de Cauchy. El vector (U,V) tiene una distribución circular, ésta coincide con la distribución de Cauchy bidimensional.

Las familia de las distribuciones de Cauchy tienen densidades de la forma

$$g(x,1,0,c^{-1}\mu,c) = c/\pi \{c^2+(x-\mu)\}^{-1}$$

que juegan un papel importante en la física contemporánea.

Distribuciones de este tipo se conocen bajo sus propios nombres en física molecular, física atómica, física nuclear y física de partículas elementales.

Así también la ley de Cauchy se presenta como una buena aproximación de la distribución de la energía real de los sistemas inestables en mecánica cuántica.

2.5 MODELACION CON DISTRIBUCIONES ESTABLES EN INGENIERIA Y ELECTRONICA.

En esta sección se darán a conocer 2 ejemplos de la ocurrencia de leyes estables de modelos usados en la práctica en

áreas de ingeniería y electrónica.

APLICACION 9. Ingeniería de la radio.

Este problema está conectado con el cálculo del comportamiento de los sistemas de relevadores de estaciones de radio en las líneas de comunicación.

La transmisión de la comunicación por onda con alta calidad a grandes distancias, causa a los ingenieros, no sólo el problema de la recepción adecuada de las señales de radio de alta frecuencia que puedan ser recibidas, sino también el problema de combatir las distorsiones por ruido.

El siguiente planteamiento parece ser uno de los modelos más simples en donde es posible seguir los efectos por sí mismos y los modos de analizarlos cuantitativamente.

Consideremos un vector a en R^2 que rota con una velocidad grande w . La proyección del vector a en el eje de las x en el tiempo t , bajo la condición de que su movimiento empieza desde la posición definida por el ángulo ϕ que corresponde a la función periódica $y(t) = |a| \cos(wt + \phi)$. La excitación oscilatoria de la salida del transmisor de radio se describe por la función $y(t)$ en donde la cantidad $|a|$ es la amplitud de las señales de radio, w es la frecuencia y $wt + \phi$ es la fase en el tiempo t .

Si la señal de radio es recibida por el receptor sin cambio, entonces el contenido de la información -la fase ϕ de cambio- puede ser recuperada sin dificultad. Sin embargo en circunstancias comunes la señal de radio llega al receptor en forma más débil y distorsionada. Esto se debe al hecho que hay

dispersión múltiple del haz de sonido de la señal después de la salida del transmisor. Como resultado de esto, parte de la transmisión no toca la antena del receptor debido a su tamaño, lo que lleva a disminuir el poder de la señal conforme el receptor está más alejado del transmisor.

Las diferentes trayectorias en turno, causan que los componentes de los puntos alcancen al receptor con fase modificada. Como los cambios son pequeños en sí mismos, en combinación con la frecuencia grande w y de que hay numerosos cambios, tenemos una distribución que es cercana a la uniforme con respecto a las fases de los vectores asociados a ellos.

Como resultado, el vector x bi-dimensional tiene la naturaleza de un vector aleatorio con distribución normal circular. Esto implica que la longitud $|X|$ de X tiene la distribución de Rayleigh con densidad

$$p(x) = D^2 x \exp(-x^2/2D^2), \quad x \geq 0$$

donde D^2 es la varianza de los componentes de X .

La debilidad de la señal y la transformación de la señal de radio no produce grandes dificultades en la distinción de la señal, la complicación empieza cuando se incorporan efectos de ruido creados por el mismo aparato receptor.

La influencia del ruido se representa añadiendo a X un vector bi-dimensional aleatorio y que tiene distribución normal circular con varianza de sus componentes igual a σ^2 . El vector $X+Y$ tiene la fase con ángulo Ω determinado por

$$\tan \Omega = |Y_t| / |X+Y_r| \quad \delta(Y_t) \quad -\pi < \Omega < \pi$$

donde la Y_r y la Y_t son la componente radial y tangencial de Y con respecto a X y $\delta(Y_t)$ es una variable aleatoria determinada por la dirección de Y_t .

Los vectores X y Y y el ángulo Ω determinado por ellos depende de t por eso son procesos aleatorios.

La función de distribución para n^2 se puede aproximar a una ley infinitamente divisible cuya función espectral corresponde a una distribución estable con parámetros $\alpha=1$ y $\beta=1$.

$$H(x) = \sum_j (F_j(x) - 1) = -\frac{1}{2} \sum_1 e_j^2 x^{-1}$$

APLICACION 10. Líneas eléctricas homogéneas.

Este problema radica en calcular un modelo para una línea eléctrica homogénea, la cual puede ser por ejemplo un cable eléctrico o un circuito en cascada de redes de 4 polos. El número de propiedades de tal línea puede describirse con la ayuda de la función de tiempo $F(t, \tau)$ $t \geq 0$ que significa la reacción de la línea con longitud $\tau > 0$ en una perturbación o "unidad de choque" en el tiempo inicial. La función $F_1'(t, \tau)$ es llamada la reacción pulso de la línea, y su transformación de Fourier $f(w, \tau)$ es llamada la frecuencia característica de una línea homogénea de longitud τ .

El caso implica que $F(t, \tau)$ es una distribución infinitamente divisible con función característica $f(w, \tau)$ de la forma

$$\log f(w, \tau) = \tau (i w \mu + \int_0^\infty (e^{i w u} - 1) dH(u)), \quad \mu \geq 0 \quad y$$

cuya función de $f(t, \tau)$ esta conectada a una distribución estable con $\alpha=1/2$.

$$F(t, \tau) = S(t, 1/2, 1, \mu, c\tau) = 2 [1 - \Phi(c\tau(t - c\mu\tau)^{-1/2})]$$

donde Φ es la función de distribución de la distribución normal.

2.6 MODELACION CON DISTRIBUCIONES ESTABLES EN BIOLOGIA.

APLICACION 11. Reproducción de especies y géneros biológicos.

Las especies biológicas se toman comunmente como los elementos primarios en la clasificación de organismos vivientes. Las especies son agrupadas dentro de los bastos grupos llamados géneros.

Consideremos una secuencia de géneros en el medio animal o vegetal, ordenándolos de acuerdo al número de especies que ocurren en cada uno. Entonces observamos como muchos géneros del total tienen una sola especie, dos especies, etc; sean estos números M_1, M_2, \dots , etc. y $M = \sum M_i$ el total de especies involucradas. Posteriormente se forman las series de frecuencias $p_k = M_k/M$ ($k=1, 2, \dots$) que nos permite representar la probabilidad de encontrar k especies en un género escogido aleatoriamente.

En el lenguaje de la teoría de probabilidad, el descubrimiento de Willis consistió en ver que existieran suficientes especies en cada género, esto $n \geq n_0$ y A una constante

$$\sum_{k \geq n} p_k = A n^{-1/2}$$

en otras palabras, la probabilidad de encontrar en un género al menos n especies decrece con el incremento de n a la razón de $1/\sqrt{n}$.

Lo interesante es la ocurrencia del modelo como una ley estable y su conexión tradicionalmente asociada con la distribución de Zipf-Pareto.

Para el tratamiento tomaremos como base un modelo de proceso de ramificación aleatorio con dos tipos de partículas.

Consideremos el proceso de reproducción conforme pasa el tiempo para partículas de 2 tipos. Al principio del proceso tenemos una partícula simple del tipo T_1 . Durante una unidad de tiempo esta partícula se convierte en una colección de μ_{10} partículas del tipo T_0 y μ_{11} partículas del tipo T_1 . Las partículas del tipo T_0 permanecen sin cambio, pero las partículas del tipo T_1 pueden sufrir posteriores transformaciones. Los números μ_{10} y μ_{11} son variables aleatorias. Se imponen algunas condiciones al proceso aleatorio de reproducción de estas partículas.

1) La transformación de cada una de las partículas del tipo T_1 , se dan independientemente de sus antecesoras e independiente de lo que pase con otras partículas.

2) La distribución conjunta de probabilidad para los valores de las variables aleatorias μ_{10} y μ_{11} en el tiempo de la transformación de la partícula del tipo T_1 es igual para todas las partículas de este tipo y no depende del momento o tiempo en el que la transformación tuvo lugar. Además, el total $\mu_{10} + \mu_{11}$ de "descendientes" que se produce en el curso de una sola transformación no puede exceder el valor de alguna constante h .

El número promedio $\delta = E\mu_{10}$ de partículas del tipo T_0 en una sola transformación es positivo, mientras que el número promedio de partículas del tipo T_1 es igual a 1. Además $c = \text{var } \mu_{11} > 0$. La última condición en particular no permite a una partícula del tipo t_1 producir con probabilidad 1 sólo una partícula del mismo tipo en el tiempo de la transformación. Conjuntamente la condición $E\mu_{11} = 1$, significa que con probabilidad no negativa una

partícula del tipo T_1 , no produce ninguna partícula del mismo tipo. Como las partículas del tipo T_0 , no son transformadas, mayores transformaciones de la misma rama ya no son posibles.

Las transformaciones de una partícula del tipo T_1 , sujeta a las condiciones arriba mencionadas (con probabilidad 1) cesan. Su proceso de transformación origina un cierto número U aleatorio de partículas del tipo T_0 , llamadas partículas finales.

Asumamos que hay n partículas inicialmente del tipo T_1 . En el proceso de su transformación y de las transformaciones de sus descendientes (este proceso termina como se dijo con probabilidad 1) aparecen U_1, U_2, \dots, U_n partículas finales producidas por la primera, segunda, etc partícula inicial de tipo T_1 .

De acuerdo a las condiciones 1 y 2, las variables aleatorias U_i son independientes e idénticamente distribuidas. Tomemos una suma normalizada de estas variables aleatorias

$$V_n = (U_1 + \dots + U_n) (2\delta n^2 / c)^{-1}$$

Se puede probar que las distribuciones de las variables aleatorias V_n converge cuando $n \rightarrow \infty$ a la distribución estable con parámetros $\alpha=1/2$, $\beta=1$, $\mu=0$, y $c=1$. (Lévy).

2.7 MODELACION CON DISTRIBUCIONES ESTABLES EN ECONOMIA.

APLICACION 12. Movimientos en mercados especulativos.

Las distribuciones de $\alpha < 2$ que describen los movimientos del mercado de valores se han basado principalmente en

evidencias empíricas de leptokurtosis y "colas pesadas", esto es, mucho más eventos o casos pertenecen a mas/menos 3, 4 ó 5 σ , que lo que se espera ocurriera con la distribución Normal. Proponentes del modelo estable argumentan que leyes no-normales "responden mejor" a la distribución empírica que lo que lo hace una aproximación de la hipótesis Gaussiana.

Los datos usados para este ejemplo fueron dados por Fielitz & Smith [1972] y consiste en precios o valores de 200 operaciones de la Bolsa de Nueva York del período de Dic. 23, 1963 a Nov. 29, 1968. Los precios dados fueron aportados por caídas en los precios, dividendos en depósito o dividendos en efectivo, donde se calcularon sus logaritmos naturales. En total se trata de 1289 observaciones para cada caso.

Fama [1963], usó el logaritmo del precio del mercado y definió la tasa de retorno R_j para un período j como

$$R_j = \log (s_j + d_j) - \log s_{j-1}$$

donde s_j es el precio o valor de seguro al final del período j y d_j el dividendo.

Se elaboraron tablas que comparaban, para varias clases de intervalos el valor promedio de observaciones con el valor promedio que se esperaría ocurriera bajo la hipótesis Gaussiana. Señalan también el número de casos que exceden los límites gaussianos superior e inferior. Los resultados, son que hay un marcado grado de diferencia especialmente de mas/menos 2 σ .

El problema es que existen también factores de mercado que afectan las recuperaciones de todos los valores. Debido a esto, los datos de 200 casos no constituyen una muestra completamente independiente, por supuesto esto afecta la interpretación del número promedio de observaciones.

Los resultados muestran que la distribución de los cambios de los valores en mercados especulativos pertenecen a una distribución estable no-normal y no simétrica. Esto como resultado de que existen casos extremos presentes, especialmente en la cola izquierda de la distribución, la kurtosis está presente y el sesgo está también presente.

Con esto hemos presentado en este capítulo las aplicaciones más comunes en las diversas áreas del conocimiento humano, advirtiéndose que existen un número mayor de ellas, más complejas y que responden en muchos casos a leyes estables x dimensionales.

CONCLUSIONES

Las leyes estables que se deben al talento de Lévy, son importantes porque son las únicas leyes que son límite de sumas de variables aleatorias independientes igualmente distribuidas, generalización del Teorema Central del Límite. Esta concepción de leyes estables es complementada con el concepto de estabilidad como "invariabilidad" bajo transformación lineal.

La familia de leyes estables está definida por el logaritmo de su función característica que tiene la forma:

$$\ln \phi(t) = i\mu t - c|t|^\alpha [1 - i\beta(t/|t|) w(t, \alpha)]$$

con $t \in \mathbb{R}$ $i = \sqrt{-1}$ y $w(t, \alpha) = \tan(\pi \alpha / 2)$ si $\alpha \neq 1$ ó $-2/\pi [\ln |t|]$ si $\alpha = 1$. Constituye una importante clase de distribuciones infinitamente divisibles con 4 parámetros (α, β, μ, c) . Al parámetro α ($0 < \alpha \leq 2$) se le llama el exponente característico de la distribución y determina el tipo de distribución estable. El parámetro μ es el parámetro de localización y c un número real que define la escala de la distribución. La varianza y momentos de orden mayor existen sólo en el caso de $\alpha = 2$ que responde a la distribución Normal. Finalmente el parámetro β ($-1 \leq \beta \leq 1$) es el índice de sesgo, cuando $\beta = 0$ la distribución es simétrica, sesgada a la derecha si $\beta > 0$ y sesgada a la izquierda si $\beta < 0$.

La característica primordial de las distribuciones estables está dada por su dominio de atracción, esto significa que distribuciones de sumas de variables aleatorias independientes igualmente distribuidas convergen hacia una distribución estable; todas aquellas distribuciones que son atraídas por la

distribución estable componen su dominio de atracción. Se tiene que:

i) Una distribución pertenece al dominio de atracción de una ley estable si tiene colas pesadas y balanceadas y varían regularmente en infinito para $(0 < \alpha < 2)$.

ii) Una distribución pertenece al dominio de atracción de una Normal si cumple con la condición de Lindeberg-Feller $(\alpha=2)$.

iii) Una ley estable pertenece a su propio dominio de atracción.

iv) En las distribuciones que pertenecen al dominio de atracción de una ley estable existen los momentos de orden estrictamente menores que α .

Dentro de las propiedades de las distribuciones estables tenemos que son unimodales y son absolutamente continuas y su función de densidad tiene derivadas continuamente diferenciables, esto asegura la existencia de la función de densidad para toda distribución estable, aunque sólo se han logrado expresar tres en forma cerrada, la Gaussiana (Normal) $(\alpha=2)$, la de Cauchy $(\alpha=1)$ y la de Lévy $(\alpha=1/2)$.

Una distribución estable es simétrica si $\beta=0$ y está estandarizada si los parámetros de localización y escala son cero y uno respectivamente y basta estudiar como la Normal, las distribuciones estables simétricas estándar para fines de estimación y pruebas de hipótesis. Las funciones de densidad y de distribución pueden ser evaluadas para $1 \leq \alpha < 2$ por las tablas generadas por Fama y Roll y Gómez Arias-Pérez Abreu.

Se han desarrollado trabajos importantes para el estudio de estimadores de los parámetros α, μ, c , por medio de estadísticas de orden, cuartiles y/o porcentiles y por métodos como el de momentos, máxima verosimilitud y mínima distancia.

Las pruebas de bondad de ajuste están trabajadas con la función característica debido a la correspondencia uno a uno con la función de distribución. Las inferencias para el parámetro de localización y los intervalos de confianza se hacen de manera análoga a la Normal, con $Z^{(n)}$ o bien con la t de Student bajo los rangos en que existe robusticidad.

Resumiendo las similitudes con la Normal tenemos que tienen dominio de atracción no vacío, son invariantes bajo transformación lineal, son absolutamente continuas y unimodales, se expresa su función característica mediante un vector de cuatro parámetros e importante es que, utilizando la distribución estable simétrica estándar se hace uso de una sola tabla para la estimación de los parámetros y métodos de inferencia. Las diferencias o contrastes son: que a excepción de la Cauchy y la Lévy no se conocen sus funciones de densidad y distribución, tienen momentos de orden menor que 2, esto significa que tienen varianza infinita por lo que tienen "colas pesadas", haciendo necesario con esto, tener cuidado en la elección de los intervalos de confianza y el tamaño de muestra para asegurar la confiabilidad de las decisiones.

La eliminación de variables aleatorias sin esperanza ha hecho daño a la estadística y a las aplicaciones, pues están sujetas a fluctuaciones al azar que parecen paradójicas o contrarias a nuestra intuición, pero sin embargo estas variables (con observaciones de magnitudes extremas pueden esperarse y de hecho suceden con mucha frecuencia) desempeñan un papel

esencial, aún en los procesos estocásticos más simples. La caminata al azar (o juego de lanzamiento de una moneda) y los procesos de ramificación sirven de modelo para muchos problemas en la física, economía o en la biología . Un modelo reciente es el de puntos fuente de influencia al que están conectadas aplicaciones en astronomía y física principalmente.

Finalmente como recomendaciones daría:

a) Dar una mayor difusión y conocimiento de las leyes estables y de las aplicaciones que responden a estos comportamientos de las variables, así como propiciar la investigación y el desarrollo de las mismas.

b) Conceptualizar en forma general los parámetros μ como de localización y c (δ σ) como de escala y no como media y varianza, como comunmente se denotan, ya que como se observó, existen numerosas distribuciones para las cuales la media y la varianza no están definidas.

c) Tener más cuidado en la aplicación de los métodos clásicos de inferencia estadística, pues puede tratarse en numerosos casos, de distribuciones con "colas pesadas", esto es, de distribuciones estables.

ANEXO A

VALORES DE r_n , Qr_n , Y $\alpha^{1/n}$

α	r_n	Qr_n	$\alpha^{1/n}$
2.00	0.7602	0.7071	1.4142
1.99	0.7602	0.7076	1.4131
1.98	0.7601	0.7082	1.4119
1.97	0.7600	0.7088	1.4108
1.96	0.7599	0.7093	1.4096
1.95	0.7599	0.7100	1.4084
1.90	0.7595	0.7133	1.4018
1.80	0.7587	0.7214	1.3861
1.70	0.7579	0.7318	1.3663
1.60	0.7571	0.7454	1.3414
1.50	0.7563	0.7631	1.3103
1.40	0.7555	0.7863	1.2716
1.30	0.7545	0.8172	1.2236
1.20	0.7534	0.8590	1.1640
1.10	0.7519	0.9170	1.0905
1.00	0.7500	1.0000	1.0000

**DENSIDADES DE PROBABILIDAD PARA LAS DISTRIBUCIONES
ESTABLES SIMÉTRICAS ESTANDAR**

x	$\alpha=1.0$	$\alpha=1.2$	$\alpha=1.5$	$\alpha=1.8$	$\alpha=2.0$
0.00	.3182	.3485	.3765	.3923	.3989
0.20	.3061	.3377	.3671	.3840	.3910
0.40	.2744	.3082	.3407	.3599	.3683
0.60	.2341	.2674	.3017	.3233	.3332
0.80	.1941	.2233	.2561	.2787	.2897
1.00	.1592	.1820	.2098	.2310	.2420
1.20	.1305	.1466	.1671	.1844	.1942
1.40	.1075	.1177	.1304	.1423	.1497
1.60	.0894	.0948	.1006	.1065	.1109
1.80	.0751	.0769	.0772	.0777	.0790
2.00	.0637	.0630	.0595	.0557	.0590
2.20	.0545	.0522	.0461	.0394	.0355
2.40	.0471	.0437	.0361	.0277	.0224
2.60	.0410	.0369	.0287	.0196	.0136
2.80	.0360	.0315	.0231	.0140	.0079
3.00	.0318	.0271	.0189	.0102	.0044
3.20	.0283	.0235	.0156	.0076	.0024
3.40	.0253	.0206	.0130	.0058	.0012
3.60	.0228	.0181	.0110	.0046	.0006
3.80	.0206	.0161	.0094	.0037	.0003
4.00	.0187	.0143	.0081	.0030	.0001
6.00	.0086	.0058	.0026	.0007	.0000
8.00	.0049	.0030	.0012	.0003	.0000
10.00	.0032	.0018	.0007	.0002	.0000
20.00	.0008	.0004	.0001	.0000	.0000
30.00	.0004	.0002	.0000	.0000	.0000

**PORCENTILES DE LAS DISTRIBUCIONES ESTABLES
SIMÉTRICAS ESTÁNDAR**

X	$\alpha=1.0$	$\alpha=1.2$	$\alpha=1.5$	$\alpha=1.8$	$\alpha=2.0$
0.2	.5628	.5690	.5747	.5779	.5793
0.4	.6211	.6338	.6457	.6525	.6554
0.6	.6720	.6915	.7101	.7210	.7257
0.8	.7148	.7405	.7659	.7813	.7881
1.0	.7500	.7810	.8125	.8323	.8413
1.2	.7789	.8138	.8501	.8738	.8849
1.4	.8026	.8401	.8798	.9064	.9192
1.6	.8222	.8612	.9027	.9311	.9452
1.8	.8386	.8783	.9204	.9495	.9641
2.0	.8524	.8923	.9340	.9627	.9773
2.2	.8642	.9038	.9445	.9721	.9861
2.4	.8743	.9133	.9527	.9788	.9918
2.6	.8831	.9214	.9591	.9834	.9953
2.8	.8908	.9282	.9643	.9868	.9974
3.0	.8976	.9340	.9685	.9892	.9987
3.2	.9036	.9391	.9719	.9910	.9993
3.4	.9089	.9435	.9747	.9923	.9997
3.6	.9138	.9474	.9771	.9933	.9998
3.8	.9181	.9508	.9792	.9941	.9999
4.0	.9220	.9538	.9809	.9948	.9999
6.0	.9474	.9721	.9903	.9978	.9999
8.0	.9604	.9804	.9938	.9987	.9999
10.0	.9683	.9851	.9956	.9992	.9999
20.0	.9841	.9936	.9989	.9998	.9999
30.0	.9894	.9961	.9992	.9999	.9999

ANEXO B

GRAFICAS DE LAS FUNCIONES DE DENSIDAD
DE LAS DISTRIBUCIONES α -ESTABLES ¹

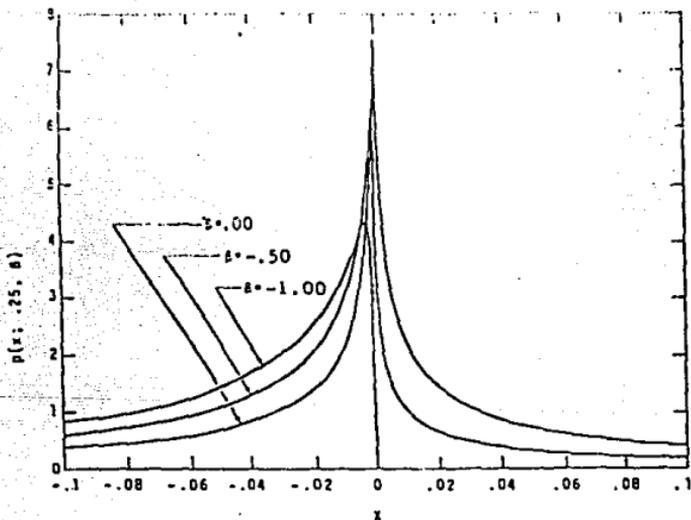


Figura 1. Funciones de densidad de distribuciones estables para $\alpha=0.25$.

¹ Gráficas tomadas de Holt y Crow [1973] de las funciones de densidad de las distribuciones α -estables para distintos valores de α y de B .

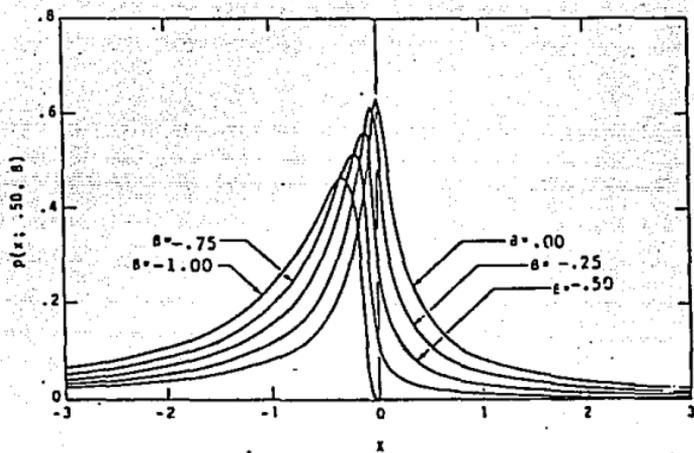


Figura 2. Funciones de densidad de distribuciones estables para $\alpha=0.50$

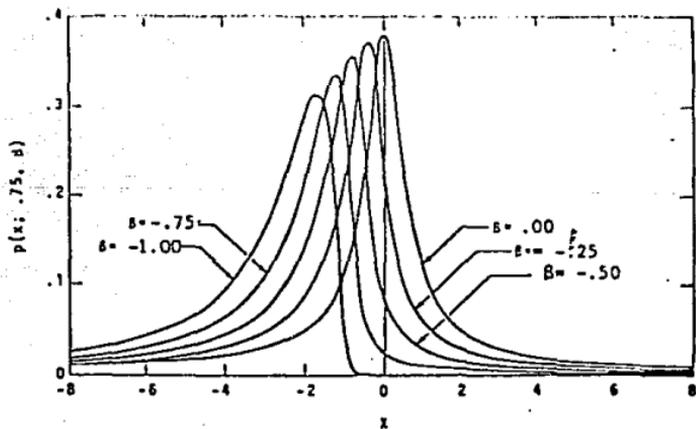


Figura 3. Funciones de densidad de distribuciones estables para $\alpha=0.75$

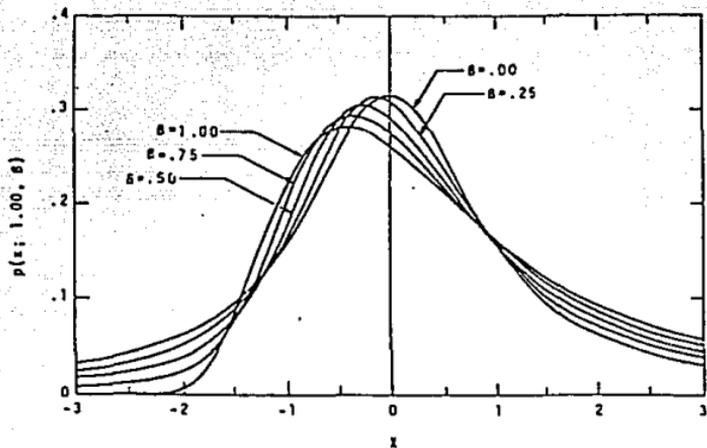


Figura 4. Funciones de densidad de distribuciones estables para $\alpha=1.00$

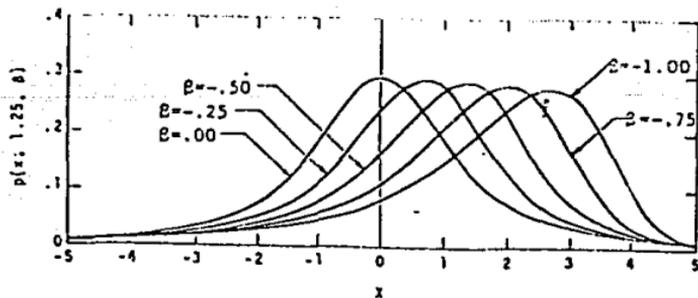


Figura 5. Funciones de densidad de distribuciones estables para $\alpha=1.25$

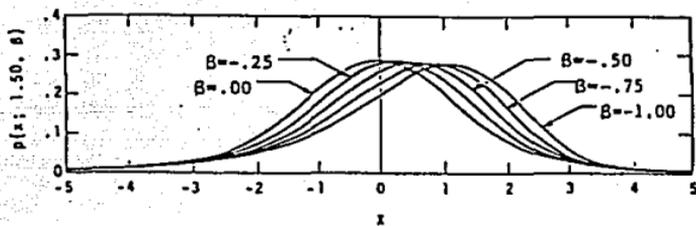


Figura 6. Funciones de densidad de distribuciones estables para $\alpha = 1.50$

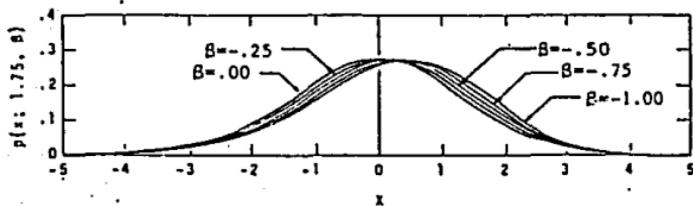


Figura 7. Funciones de densidad de distribuciones estables para $\alpha = 1.75$

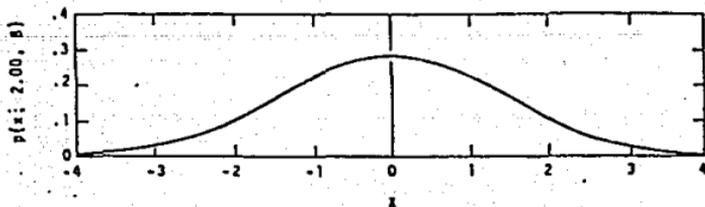


Figura 8. Función de densidad de la distribución estable Normal $\alpha = 2.00$

BIBLIOGRAFIA

- 1.- Akgiray V., Lamoreux Ch. G.; "Estimation of stable-law parameters: A comparative study." J. Bus. & Econ. Statist. 7 (1989) 85-93.
- 2.- Anderson T. W., Darling D. A.; "A test of goodness of fit." J. Amer. Statist. Assoc. 49 (1954) 765-769.
- 3.- Fama E., Roll R.; "Some properties of symmetric stable distributions." J. Amer. Statist. Assoc. 63 (1968) 817-816.
- 4.- -----; "Parameters estimates for symmetric stable distributions." J. Amer. Statist. Assoc. 66 (1971) 331-338.
- 5.- Feller W.; "Introducción a la teoría de probabilidades y sus aplicaciones." Vol I. 2a. edición. 1957 Ed. Limusa. México D.F. 2a. reimpresión. 1989.
- 6.- -----; "Introducción a la teoría de probabilidades y sus aplicaciones." Vol II. 2a. edición. 1966 Ed. Limusa. México, D.F. 2a. reimpresión. 1989.
- 7.- Fielitz B.D., Smith E.W.; "Asymmetric stable distributions of stock price changes." J. Amer. Statist. Assoc. 67 (1972) 813-814.

- 8.- -----, Rozelle J.P.; "*Stable distributions and the mixtures of distributions hypothesis for common stock returns.*" J. Amer. Statist. Assoc. 78 (1983) 28-36.
- 9.- Gnedenko B.V., Kolmogorov A.N.; "*Limit distributions for sums of independent random variables.*" Addison-Wesley. 1954.
- 10.- Gómez Arias J.; "*Tópicos de inferencia estadística para leyes estables.*" UNAM , tesis de maestría, México D.F. 1988.
11. -----, Pérez Abreu V.; "*Tablas de distribuciones estables simétricas.*" Comunicaciones técnicas, Serie Desarrollo 60 IIMAS-UNAM México,D.F. 1986.
- 12.- Hall P.; "*A comedy of errors; the canonical form for a stable characteristic function.*" Bull London Math. Soc. 13 (1981) 23-27.
- 13.- Hoel P.G., Port S.C., Stone Ch. J.; "*Introduction to probability theory.*" Houghton Mifflin Co., Boston, 1971.
- 14.- Lévy P.; "*Théorie de l'addition des variables aléatoires.*" Gauthier-Villars, Paris. 1937. 2a. ed. 1954.
- 15.- -----; "*Quelque aspects de la pensée d'un mathématicien.*" Librairie Scientifique et Technique, Albert Blanchard, Paris, 1970.
- 16.- Mandelbrot B.; "*The variation of certain speculative prices.*" J. Business. 36 (1963) 394-419.

- 17.- Mood A.M., Graybill F.A.; "Introducción a la teoría de la estadística." Ed. Aguilar. 1972.
- 18.- Paulson A.S., Holcomb E.W., Leitch R.A.; "The estimation of the parameters of the stable laws." *Biometrika* 62 (1975) 163-170.
- 19.- Zolotarev V.M.; "One-dimensional stable distributions." Vol 65 of translations of mathematical monographs, Amer. Math. Soc. 1986.

BIBLIOGRAFIA REFERIDA.

- 1.- Cauchy A.; "Sur les résultats moyens d'observations de même nature et sur les résultats les plus probables and Sur la probabilité des erreurs que affectant des résultats moyens d'observations de même nature." *C.R. Acad. Sci. Paris.* 37 (1853) 198-206 y 264-272.
- 2.- Bergström H.; "On some expansion of stable distribution function." *Ark. Mat.* 2 (1952/53) 375-378.
- 3.- Bendler J.T.; "Lévy (stable) probability densities and mechanical relaxation in solid polymers." *J. Statis. Physics.* 36 (1984).
- 4.- De Haan L.; "Estimation of the minimum of a function using order statistics." Technical report 7902/s . *Econometric Institute, Erasmus University, Rotterdam.* 1979.
- 5.- -----, Resnick S.; "A simple asymptotic estimate for the index of a stable distribution." *J. Roy. Statist. Soc.* 42

(1980) 83-88.

- 6.- Du Mouchel W.H.; "On the asymptotic normality of the maximum likelihood estimate when sampling from a stable distribution." *Ann. Statist.* 1 (1973) 948-957.
- 7.- Fama E.F.; "Mandelbrot and the stable paretian hypothesis." *J. Business* 36 (1963) 420-429.
- 8.- Furry; "On fluctuation phenomena in the passage of high-energy electrons through lead." *Physical. Rev.* 52 (1937) 569.
- 9.- Heathcote C.R.; "A test of goodness of fit for symmetric random variables." *Austral J. Statist.* 14 (1972) 172-181.
- 10.- Holt D.R., Crow E.L.; "Tables and graphs of the stable probability density functions." *J. Research of the National Bureau of Standards* 77:B (1973) 143-198.
- 11.- Holtsmark J.; "Über die verbreiterung von spektrallinien." *Ann. Physik.* (4) 58 (363) (1919) 577-630.
- 12.- Ibragimov I.A., Chernin K.E.; "On the unimodality of stable laws." *Teor. Veroyatnost C Primenen* 4 (1959) 453-456; english transl. in *theor. Probab. Appl.* 4 (1959).
- 13.- -----, Linnik Y.V.; "Independent and stationary sequences of random variables." "Nauka", Moscow, 1965; english transl. Noordhoff, 1971.
- 14.- Kagan A.M., Linnik Y.V., Rao S.R.; "Characterization problems in mathematical statistics." "Nauka", Moscow,

- 1972, english transl. Wiley 1973.
- 15.- Khintchine A., Lévy P.; "Sur les lois stables." C.R. Acad. Sci. Paris, 202 (1937) 374-376.
 - 16.- Koutrouvelis I.A.; "A goodness of fit test of simple hypothesis based on the characteristic function." Biometrika (1980) 238-240.
 - 17.- Lévy P.; "Théorie des erreurs. La loi de Gauss et les lois exceptionnelles." Bull Soc. Math. France, 52 (1924) 49-85.
 - 18.- -----; "Calcul des probabilités." Gauthier-Villar, Paris, 1925.
 - 19.- Lotka; "Theorie analytique des associations biologique." Vol 2 Actualités scientifique et industrielles no. 788. Herman et Cie, Paris, (1939) 122-136.
 - 20.- Mandelbrot B.; "New methods in statistical economics." J. Polit. Economy. 71 (1973) 421-440.
 - 21.- Montroll E.W., Bendler J.T.; "On Lévy distribution and the Williams-Watts model of dielectric relaxation." J. Statist. Physics. 34 (1984) 129-162.
 - 22.- Petrov V.V.; "Sums of independent random variables." "Nauka", Moscow, (1972); english transl. Springer-Verlag, 1975.
 - 23.- Pólya G.; "Herleitung des Gausssschen fehlergesetzes aus einer funktionalgleichung." Math. Z. 18 (1923) 96-108.

- 24.- Press S.J.; "Estimation in univariate and multivariate stable distributions." J. Amer. Statist. Assoc. 67 (1972) 842-846.
- 25.- Prohorov Y.V., Rozanov Y.V.; "Probability theory." Springer-Verlag, Berlin. 1969.
- 26.- Shapiro J.M.; "Domains of attractions for reciprocal of powers of random variables." SIAM J. Appl. Math. 29 (1975) 734-739.
- 27.- Shashanka S,M; "Distribution of symmetric stable laws of index 2". The Annals of Probability. Vol 9. NO. 4 (1981) 710-711.
- 28.- Willis J.C.; "Age and area." Cambridge Univ. Press. 1922.
- 29.- Yule G.U.; "A mathematical theory of evolution based on the conclusions of Dr. J.C. Willis." FRS Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. B213 (1925) 21-87.
- 30.- Zolotarev V.M., Strunin B.M.; "On the distribution of internal stresses under a random arrangement of point defects." Fiz. Tverd. Tela 13 (1971) 594-596; english transl. in Soviet. Phys. Solid. State 13 (1971/72).