UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

UNIDAD ACADEMICA DE LOS CICLOS PROFESIONAL Y DE POSGRADO
DEL COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES

ADQUISICION DE CONCEPTOS DE CALCULO CON APOYO DE LA GRAFICACION EN MICROCOMPUTADORA

TESIS
QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRIA EN EDUCACION EN MATEMATICAS

P R E S E N T A

PATRICIA ESPERANZA BALDERAS CAÑAS

MEXICO, D. F. 1992

INDICE

ADQUISICION DE CONCEPTOS DE CALCULO CON APOYO DE LA GRAFICACION EN MICROCOMPUTADORA

INTRODUCCION

La elaboración de este trabajo se encuentra inmerso en la concepción de aprendizaje que plantea Piaget y que interpreta Orton (1987).

"La adquisición del conocimiento requiere acción de parte del que aprende e interacción con el medio ambiente".

Lo anterior significa que un ambiente enriquecido ayudaría y aceleraría el aprendizaje, en la medida en que el que aprende puede aprovecharlo mediante sus esfuerzos constructivos. De esa manera, la finalidad de utilizar representaciones gráficas -en particular, a través de un programa graficador de computadora- es incidir con mayor fuerza en el nivel de percepción, elemento importante del proceso de formalización matemática si seguimos el esquema propuesto por Chizón (Figura 1, 1990).

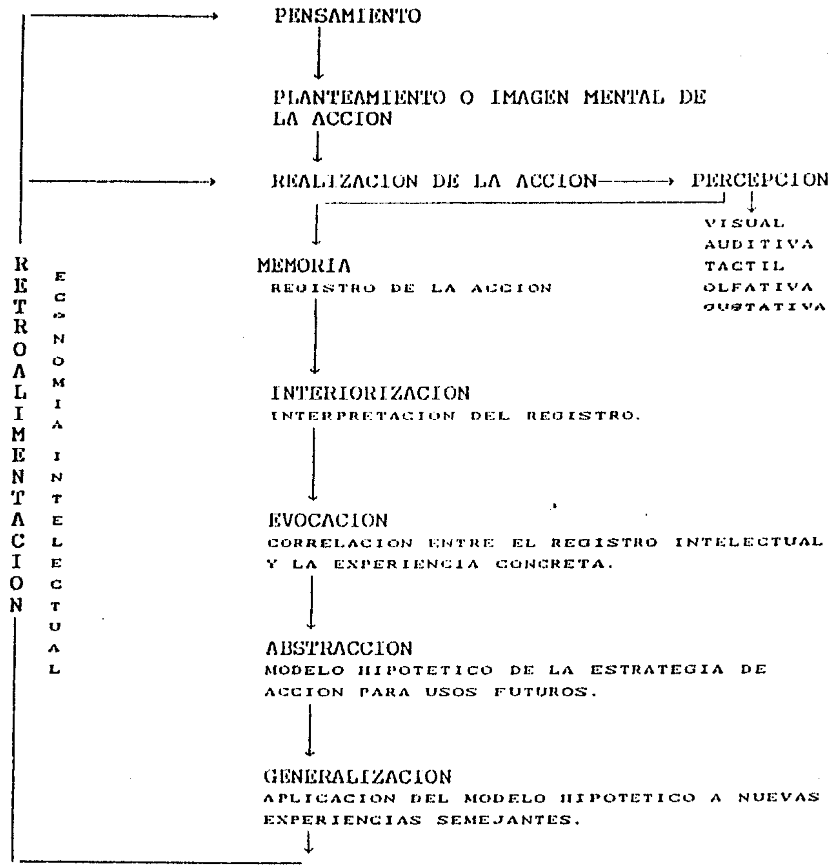


Figura 1

Por ello, es necesario proveer al alumno de un ambiente que le permita investigar y descubrir conceptos, y desde luego, desarrollar habilidades como la espacial, que es componente clave de la habilidad matemática y que está muy relacionada con la cualidad de independencia del estilo cognoscitivo del pensamiento. También se quiere que el alumno desarrolle la visualización , no sólo como una estrategia para la resolución de problemas, sino como una manera de pensar (Moses, 1982). La visualización se entiende, por lo tanto, como un mecanismo útil para que el estudiante comprenda mejor (o simplemente descubra, en ciertos casos) las relaciones entre los elementos presentes en un problema.

La visualización involucra numerosas actividades, como son la sensibilización, la imaginación y la realización de un esquema de modelos, el manejo de objetos concretos y, sin ayuda de la vista, el manejo mental de los mismos.

Hacemos referencia a la hipótesis de Krutetskii (1976) de que la habilidad matemática no es innata y que sus componentes son la habilidad para:

(1) Extraer la estructura formal de un problema matemático y operar con ella.

(2) Generalizar a partir de resultados matemáticos.

(3) Operar con símbolos incluyendo números.

(4) Razonar lógicamente.

(5) Acortar procesos del pensamiento.

(6) Ser flexible en relación al cambio de enfoque, para evitar fijaciones y la habilidad para invertir secuencias del pensamiento.

(7) Adquirir claridad, simplicidad, economía y racionalidad en argumentos y demostraciones matemáticos.

(8) Por último, la habilidad espacial y una buena memoria para el conocimiento o ideas matemáticos, son también importantes.

El presente trabajo pretende desarrollar las habilidades para generalizar, la habilidad espacial y la del razonamiento lógico, como metas mínimas en relación con el concepto de derivada, su interpretación geométrica y la aplicación del mismo para la determinación de máximos y mínimos relativos de funciones elementales.

CONCEPCION DEL APRENDIZAJE

Existen diversas teorías que explican el proceso de aprendizaje de las matemáticas, lo cual genera tomas de posición en torno a ellas.

Dentro del enfoque constructivista podemos encontrar una alternativa como el modelo que presentan Herscovics y Bergeron (1984), el cual se centra en el que aprende y en cómo guiarlo para que construya sus esquemas matemáticos a partir de sus conocimientos previos.

El modelo considera que es necesario que se distingan varios niveles de entendimiento de un concepto en el alumno: el intuitivo, el de procedimiento, la abstracción matemática y la formalización.

El entendimiento intuitivo se refiere al conocimiento matemático informal caracterizado por los preconceptos.

Por entendimiento de procedimiento se comprende la adquisición de procedimientos matemáticos que el alumno relaciona con su conocimiento intuitivo y su uso adecuado.

A la abstracción matemática se la entiende de dos formas, como la separación de la representación y del procedimiento en concreto, y como la construcción de invariantes y la generalización.

La formalización referida tanto a la axiomatización y a la demostración matemática formal -que a nivel elemental podrían verse como el descubrimiento de axiomas y la elaboración de justificaciones matemáticas lógicas-, como a la noción matemática que se da en una definición formal y al uso de la simbolización matemática para conceptos en los cuales una abstracción previa se ha dado en algún grado.

En la búsqueda del cómo guiar al estudiante en la construcción de sus conceptos, muchas veces recurrimos a representaciones visuales, las cuales presentan ventajas y desventajas como lo plantean Eisenberg y Dreyfus (1989).

Actualmente las visualizaciones tienen mayor presencia en el medio escolar debido al uso cada vez más generalizado de la computadora personal, quien ha aumentado considerablemente la capacidad de realizar representaciones gráficas.

La visualización puede hacer que los alumnos mejoren sus habilidades perceptivas (Moses, ibidem.) de manera que sean capaces de construir paso a paso sus conceptos.

COMPUTACION EN LA EDUCACION

Es natural que el desarrollo tecnológico en materia de computadoras personales (PC) y el uso de las mismas en diferentes ámbitos de la vida, provoque una reacción en el medio educativo; siendo vigentes cuestiones sobre la desescolarización del aprendizaje, el qué puede hacer una PC en la educación, cómo utilizar al computador personal como máquina para enseñar, qué posibilidad hay de hacer simulaciones, cómo desarrollar las habilidades, cómo plantear estrategias en la solución de problemas, qué papel juega la PC en la escuela, etc.

El uso de la computadora en la educación puede, a su vez, variar (Wenzelburger, 1990), ya sea como instrumento de diagnóstico, como tutor, para practicar destrezas, para la enseñanza (Willis y Miller, 1984), para el uso de paqueterías (procesadores de palabras, hojas de cálculo, etc.), para efectuar simulaciones y modelajes matemáticos, para aplicar métodos numéricos y no-numéricos, en la resolución de problemas y como auxiliar didáctico.

Gran parte del software educativo se ha hecho con la intención de que el alumno interactúe con la computadora pero no por ello se desplaza al profesor. Sin embargo, el papel de este último tiene que modificarse, en este caso.

El uso de la computadora por parte del alumno tiene algunas ventajas. Una de ellas es la creación de un ambiente más favorable que lo estimule y le permita el descubrimiento y la construcción de conceptos, de manera que se encuentre totalmente involucrado en su proceso de aprendizaje (Galindo, 1987), logrando con ello que se establezca la mayor comunicación posible entre el alumno y la computadora. Además, el alumno tiene la posibilidad de interpretar y explicar las relaciones y los fenómenos que se presentan en el mundo exterior, dentro del método hipotético deductivo "si...entonces".

En cuanto al uso administrativo que el profesor le puede dar a la computadora está el procesador de textos para la elaboración de material didáctico y de exámenes, la hoja de cálculo para analizar resultados y el banco de datos para procesarlos y tener acceso a bancos de información.

Lo anterior muestra la necesidad de desarrollar metodologías en la enseñanza que involucren de manera rutinaria a la computadora.

Una propuesta acorde con la postura didáctica que se planteó anteriormente es la de "micromundo" (Papert, 1980) que se define como un "medio computacional" basado en el aprendizaje interactivo en donde el que aprende construye su sistema de prerrequisitos y se desempeña de manera interactiva en la construcción de su aprendizaje.

El micromundo posee tres características: (1) contiene un conjunto de procedimientos instrumentales que acompañan a una tarea, (2) se tienen establecidos metas y objetivos, los cuales pueden tomar la forma de problemas por resolver o cuestiones que explorar y (3) el contexto es interesante y promueve la exploración para y en el estudiante (CLIME, 1989).

O bién, en la opinión de Derek Bunyard (1989) "...la combinación del carácter extendible de procedimientos, la autonomía del `objeto-para-pensar-con´, la consistencia de la forma del lenguaje, y el libre acceso a todos los niveles de complejidad hace un ambiente de aprendizaje excitante y algunas veces peligroso. Creo que es el mejor ejemplo -algunos dirían el único- que tenemos actualmente de un ambiente de aprendizaje basado en la computadora, consistente con una interpretación individualizada de los propósitos de la educación".

COMPUTACION EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMATICAS

La enseñanza de las matemáticas desde el punto de vista constructivista y reflexivo, en el nivel medio superior, puede valerse de la computadora para alentar el desarrollo de las habilidades espaciales, del razonamiento lógico, de la generalización, así como de la formación de conceptos que la mayoría de las veces no se logra por la carencia de conocimientos previos, los cuales pueden adquirirse a través de la simulación de situaciones significativas para el alumno.

La introducción del Cálculo en la Educación Media Superior se concreta, por lo general, a la adquisición de información o bien a la repetición de algoritmos, como en la aplicación de las reglas de derivación, sin que el alumno comprenda el significado de la derivada o su interpretación en otras ciencias.

Repetir dichos algoritmos no significa, desde luego, que el alumno aprenda a resolver problemas, puesto que no comprende el significado de los conceptos y mucho menos sabe cómo emplearlos. Los alumnos, en general no entienden la derivada como un modelo matemático adecuado para situaciones reales, en las cuales aparece una razón de cambio.

Sin embargo, es necesario que el alumno adquiera y desarrolle los conceptos esenciales (Ediger, 1989) del curso, de acuerdo con sus posibilidades, ya sea un alumno avanzado, promedio o lento; la computadora le permite hacerlo,tomando en cuenta su ritmo particular de aprendizaje.

La orientación del profesor, en este caso, debe propiciar que los alumnos hagan los esfuerzos necesarios para resolver los problemas que se simulan o plantean en la clase, los cuales pueden darse mediante un material idóneo y con apoyo en el software adecuado.

Otro aspecto positivo del uso de la computadora en la enseñanza de las matemáticas es que permite que el alumno capte la estructura y las relaciones fundamentales de la matemática, sin que se pierda en cálculos largos y tediosos que ocultan lo esencial del tema. "Las matemáticas se usan para transmitir significados, explicar, ilustrar y predecir. La sola manipulación de símbolos, sin un entendimiento, no es suficiente" (Wright, 1987).

GRAFICADORES

El uso de un graficador está contemplado en el marco conceptual (teórico) planteado anteriormente. Es decir, se trata de incidir mediante su uso en la adquisición de habilidades perceptivas y matemáticas, así como de conceptos de Cálculo, por medio de la construcción de los mismos, como resultado de las actividades del alumno, organizadas y diseñadas de acuerdo al graficador.

Un ejemplo del uso de un graficador puede verse en la graficación de polinomios (Kennedy, 1981).

Existen varios graficadores como el Math Cad, Calcula, Calculus, Eureka, Cactusplot, etc. Se seleccionó el Cactusplot "a Mathematics Utility" porque permite la graficación simultánea de más de una función y tiene la posibilidad de trazar secantes dando un incremento en la variable, situación que está íntimamente ligada al concepto de derivada. Por tanto ofrece una simulación adecuada para la interpretación geométrica de la derivada, para identificar funciones crecientes o decrecientes y comparar la gráfica de la función con la de su derivada.

LA ENSEÑANZA DEL CALCULO DIFERENCIAL

La forma tradicional de enseñar el Cálculo Diferencial en la escuela de Educación Media Superior, exponiendo los conceptos como productos terminados, impide que el alumno logre la comprensión auténtica de muchos conceptos y pierda la oportunidad de aplicarlos de manera creativa.

El tratamiento del concepto de derivada a nivel preparatoria debería ser más intuitivo, tanto matemática como psicológicamente, de modo tal que se promueva el razonamiento lógico y se vincule con las aplicaciones en otras disciplinas científicas y no con exceso de "rigor matemático", entendido como manejo de simbología.

La enseñanza de conceptos de Cálculo con apoyo en un graficador permite, por ejemplo, introducir el concepto de derivada de manera más objetiva, relacionándola con la pendiente de la recta tangente y con el concepto de razón de cambio. En este caso se puede simular una situación dinámica que enfatice el hecho de que la derivada es la razón de cambio instantáneo de la función, con lo cual el alumno capte tanto el proceso como el concepto mismo.

También hay que explorar (Wenzelburger, 1985) la manera en la cual la pendiente de una curva en un punto está relaciondada con el concepto de razón de cambio para motivar que un mejor estudio de una función se logra cuando se realiza en pequeños intervalos de variación de la variable independiente.

Un trabajo en este sentido es el realizado por Norris (1983), quien hace algunas reflexiones de cómo utilizar la microcomputadora en la enseñanza del Cálculo. En esa época, orientó su estudio hacia la elaboración de programas para calcular en forma aproximada Sumas de Riemann, para ilustrar el comportamiento de las secantes acercándose a la línea tangente en el caso de la derivada y determinar las raíces de una ecuación.

Uno de sus logros fue que promovió la discusión en la clase de Cálculo, actividad poco usual en dichos cursos. Y señaló la necesidad del alumno de experimentar con los conceptos.

Por otra parte, paralelamente a la problemática de la enseñanza se da la del aprendizaje y dentro de éste, el alumno se enfrenta ante lo siguiente:

(1) La relación entre dos magnitudes que se asocian por pares.

(2) El tener presente dicha relación para trazar una gráfica en el supuesto de una continuidad, y

(3) Concebir a la derivada como una función que provee información acerca de la función que se deriva.

Es necesario, pues, dotarlo de un ambiente que lo ayude a resolver sus problemas de aprendizaje.

Un acercamiento geométrico al Cálculo, para ese fin y que utiliza la graficación en microcomputadora, fue presentado como proyecto para investigar el aprendizaje y la madurez del entendimiento en el alumno por Tall y Sheath (1983).

Tall propone posteriormente (1985), lograr un acercamiento cognoscitivo, es decir, presentarle al estudiante los materiales de aprendizaje adecuadamente a su estado cognoscitivo, mediante el uso de un sistema organizativo genérico, compuesto por un organizador genérico y un agente organizador, para que el alumno se forme su propia imagen conceptual del concepto, además, se le oriente conforme explora libremente y resuelva sus dificultades en la comprensión.

Por organizador genérico se entiende un micromundo en el cual el estudiante manipula ejemplos de los conceptos y por agente organizador el profesor, el libro de texto o un material que señale los aspectos sobresalientes y evite que el alumno haga falsas interpretaciones.

PLANTEAMIENTO DE UNA HIPOTESIS

De acuerdo al marco teórico esbozado en los párrafos anteriores se plantea la siguiente hipótesis:

LA ADQUISICION DE CONCEPTOS DE CALCULO, EN PARTICULAR DE LA INTERPRETACION GEOMETRICA DE LA DERIVADA Y LA DETERMINACION DE MAXIMOS Y MINIMOS DE FUNCIONES ELEMENTALES, POR PARTE DEL ALUMNO DE EDUCACION MEDIA SUPERIOR, SE LOGRA MEJOR CON LA AYUDA DE UN GRAFICADOR EN MICROCOMPUTADORA QUE SIN ESTE AUXILIAR GRAFICO.

METODOLOGIA

Para investigar los efectos del uso de la computadora en el aprendizaje de temas de Cálculo, se realizaron dos experimentos con alumnos de la Escuela Nacional Preparatoria, Plantel 5.

Estudio piloto

El primero fue un estudio piloto (EP) con veintinueve alumnos del grupo 621 (área Químico-biológica) del ciclo escolar 89/90, quienes durante cinco sesiones vespertinas, una por día y fuera del horario normal de clases del curso de Matemáticas VI (Cálculo Diferencial e Integral), realizaron las actividades que más adelante se detallan.

En dicho estudio se pretendió probar los materiales didácticos y los instrumentos de evaluación. El material didáctico se compuso de una guia para realizar actividades con el graficador Cactusplot (anexo 1), cuyos objetivos fueron la comprensión del significado geométrico de la derivada y la determinación de los máximos y mínimos relativos de funciones elementales.

Se utilizo un diseño pre-experimental pretest-postest de un solo grupo (Campbell, 1970), en el que se consideró como pretest al examen diagnóstico (anexo 2) y como postest al examen final (anexo 3). El tratamiento experimental estuvo compuesto por las actividades a realizar con el graficador.

El examen diagnóstico permitió medir el nivel de información de los temas a tratar que poseían los sujetos del estudio. El examen final tuvo como objetivo medir los logros obtenidos al final de las actividades.

Algunos de los 22 reactivos del examen diagnóstico se ilustran en la figura 2.

1.- La pendiente de la recta secante que pasa por los puntos $P(-4,f(-4))$, $Q(-3,f(-3))$ de la figura 1 es:

(a) $\dfrac{f(-3)}{f(-4)}$ (b) $\dfrac{f(-3) - f(-4)}{-3 - (-4)}$

(c) $\dfrac{-3 - (-4)}{f(-3) - f(-4)}$

(d) Ninguna de las anteriores

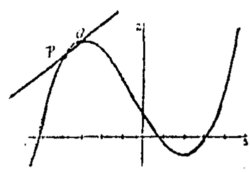
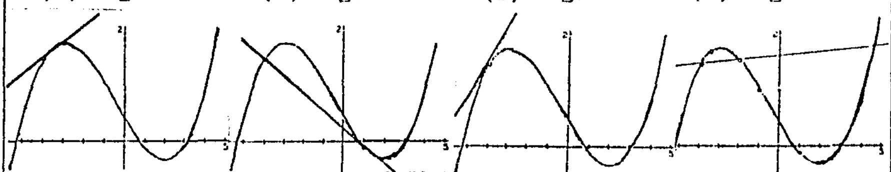


fig. 1

5.- Elige de la figura 2 la gráfica que corresponda a la secante trazada por los puntos $P(-4,f(-4))$ y $Q(-4+1,f(-4+1))$

(a) Fig. 2.1 (b) Fig. 2.2 (c) Fig. 2.3 (d) Fig. 2.4



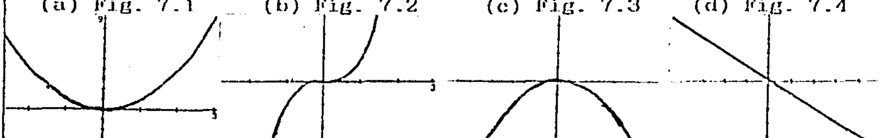
12.- La expresión que permite calcular la pendiente de la recta tangente en el punto $P(-4,f(-4))$ es:

(a) $\dfrac{f(x) - f(-4)}{x - (-4)}$ (b) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(-4+h) - f(-4)}{h}$ (c) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(-4+h)}{h}$

(d) Ninguna de las anteriores

14.- ¿Cuál o cuáles de las gráficas corresponden a funciones crecientes en el intervalo $(0,5)$?

(a) Fig. 7.1 (b) Fig. 7.2 (c) Fig. 7.3 (d) Fig. 7.4



20.- La función de la figura 12 tiene un máximo en $x = -3$, por ello, ahi su derivada es:

(a) Nula (b) Positiva

(c) Negativa (d) Ninguna de las anteriores

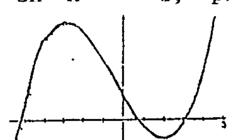


fig. 12

Figura 2

En la primera sesión del EP se les enseñó a los alumnos el manejo del graficador Cactus Plot, teniendo en cuenta que algunos ni siquiera conocían el teclado.

Las cuatro sesiones restantes se ocuparon para que los participantes realizaran las seis actividades (ver anexo 1) del material didáctico.

Algunas de ellas se muestran en las figuras 3 y 4.

3.3.1 ¿A qué valor se aproxima la pendiente de cada secante cuando h se hace cada vez mas pequeño?

Para $f(x) = x^2$ __________, $f(x) = x^3$ __________,..., $f(x) = x^2 + 5$ __________,....

3.3.2 ¿Hay alguna relación entre los valores de las pendientes de las funciones $f(x) = x^2$ y $f(x) = x^2 + 5$ __________ ¿cuál?__________, ...

3.3 ¿Cómo debe ser el valor de h para que la secante se parezca más a una tangente?__________.

5.5 Calcula el límite de cada una de las expresiones $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ cuando h tiende a cero, es decir:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

5.3 Contesta brevemente:

De lo anterior se concluye que:

si $f(x) = x^a$ entonces $f'(x) =$ __________.

6.1 Traza la gráfica de las funciones y de su derivada

(a) $f(x) = x^2 - 4x - 5$ (b) $f(x) = -x^2 + 16$

(c) $f(x) = x^4 - 1$

Nota: En la misma figura, tanto la función como la de su derivada.

Figura 3

6.2 Compara la gráfica de la función con la de su derivada, y en cada caso.

6.3 Contesta:

6.3.1 ¿Cuáles son los valores extremos de cada función?

De $f(x) = x^2 - 4x - 5$ ________________, $f(x) = -x^2 + 16$ ________________, $f(x) = x^4 - 1$ ________________,...

6.3.2 ¿Cómo es la derivada (positiva o negativa), en valores a la izquierda y a la derecha de cada valor extremo?

Función	A la izquierda	A la derecha
$f(x)=x^2-4x-5$	____________	____________
$f(x)=-x^2+16$	____________	____________
etc.		

6.3.3 Por lo tanto,

La función $f(x) = x^2-4x-5$ tiene ________________ en ________________, ..., etc.

Figura 4

La última parte del estudio piloto consistió en la aplicación del examen final (en el salón de clase, con papel y lápiz). Algunos de sus 42 reactivos están en las figuras 5 y 6.

5.- Elige de la figura 2 la gráfica que corresponda a la secante trazada por los puntos $P(-4,f(-4))$ y $Q(-4+1,f(-4+1))$.

(a) Fig. 2.1 (b) Fig. 2.2 (c) Fig. 2.3 (d) Fig. 2.4

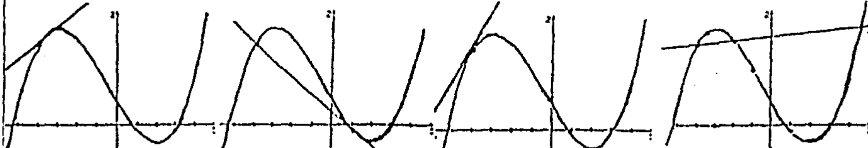


Figura 5

12.- La expresión que permite calcular la pendiente de la recta tangente en el punto $P(-4, f(-4))$ es:

(a) $\dfrac{f(x) - f(4)}{x - (-4)}$ (b) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(-4+h) - f(-4)}{h}$ (c) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(-4+h)}{h}$

(d) Ninguna de las anteriores

17.- ¿Cómo es la derivada de la función $f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 5x + 1$ en el intervalo $(-2, 1)$? Ver figura 9.

(a) Positiva (b) Nula (c) Negativa (d) Ninguna de las anteriores

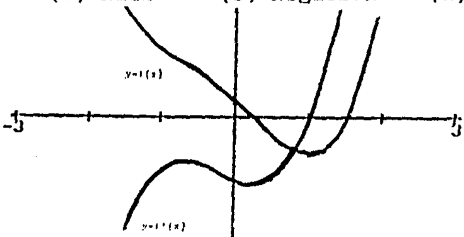


fig. 9

35.- Si una función $f(x)$ tiene derivada $f'(x)$ positiva en un intervalo, entonces ahí es;

(a) decreciente (b) constante (c) creciente (d) Ninguna de las anteriores

39.-La figura 11 es la gráfica de $f'(x)$, de ahí que $f(x)$ tenga un mínimo en:

(a) $x = 0$ (b) $x = 3$ (c) $x = 1$ (d) $x = -1$

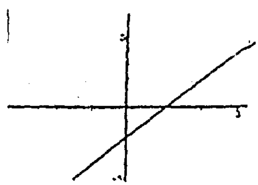


fig. 11

Figura 6

Es importante señalar que previamente al estudio piloto se les dió a los alumnos, en el curso normal, la notación y los conceptos básicos mínimos necesarios, para que pudieran leer y entender los materiales del experimento.

Estudio principal

El segundo estudio fue el estudio experimental (EE) al cual nos referiremos como estudio principal, se realizó con 54 alumnos del grupo 607 de la misma escuela (ENP, plantel 5), del ciclo escolar 90/91 del área económico-administrativa, subdivididos aleatoriamente en dos grupos, a los cuales se llamarán grupo experimental (GE) y grupo control (GC).

Se usó como modelo de investigación el diseño experimental de grupo de control protest-postest (Campbell, op. cit.). En este estudio se consideró también como pretest al examen diagnóstico, como postest al examen final y como tratamiento experimental la guía de las actividades para realizar con el graficador, en el caso del GE y con papel y calculadora para el GC.

La guia de actividades y los exámenes pretest y postest se encuentran en los anexos 4, 5 y 6 respectivamente. Estos materiales se redactaron de acuerdo con las observaciones que se obtuvieron del estudio piloto [1]. Por ejemplo, al comparar los resultados del examen final con las actividades en el estudio piloto (véase la tabla 2) se decidió cambiar, reducir y aumentar algunas actividades como las que se refieren a la determinación de los máximos y minimos de una función y al trazo y manejo de la gráfica de la función derivada.

El número de reactivos (de opcion múltiple) de los exámenes pretest y postest fue de 40, presentados en orden diferente. El objetivo del examen pretest fue medir el nivel de información de cada alumno en relación con los temas y conceptos que se consideraron en el tratamiento.

Con el postest se tuvo la finalidad de medir los efectos de la variable en relación con el desarrollo de las habilidades

---

1 Las actividades y los reactivos del postest se encuentran clasificados por habilidad en los anexos 7 y 8.

espacial, numérica, del razonamiento lógico, la operación simbólica y la generalización.

Este modelo de investigación usa la inferencia estadística, para probar la hipótesis, con dos muestras aleatorias independientes (los resultados de los dos grupos, experimental y control) y la prueba estadística t-Student (Haber y Runyon, 1973), puesto que se comparan dos medias muestrales que se supone han sido extraídas de una población con distribución normal y con varianzas iguales.

La hipótesis nula establece que no hay diferencias entre el aprendizaje de los tópicos de Cálculo (en cuestión) con la ayuda de un graficador para microcomputadora que sin él, es decir la media del examen final del grupo experimental μ_1 es igual a la del grupo control μ_2.

Por lo tanto, como hipótesis alterna se enuncia que existe diferencia en el aprendizaje, en la dirección $\mu_1 > \mu_2$, de donde se obtiene una hipótesis alterna unilateral.

Los parámetros que se consideran son la media y la desviación estándar. Además se hicieron otras observaciones en relación al sexo de los estudiantes, a sus opiniones y a los índices de facilidad de los reactivos de ambos tests.

El EE duró ocho semanas (véase anexo 9), con tres sesiones por semana, dos de ellas en el salón de clases y con ambos grupos. La tercera sesión se realizó con el GE en el laboratorio de cómputo del plantel y con el GC en la biblioteca.

En las sesiones del salón de clases se discutieron y analizaron las cuestiones que se plantearon en el laboratorio o en la biblioteca. Además, se realizaron más ejercicios similares a los del material didáctico (guía de actividades).

Las sesiones en el laboratorio de cómputo fueron la parte esencial para el grupo experimental. Con ellas se pretendió crear un ambiente lo más cercano posible a un micromundo [2], de manera que el alumno tuviera la oportunidad de investigar y verificar los conceptos previamente planteados y discutidos.

[2] Véase `micromundo´ pag. 6

Simultáneamente los alumnos del grupo control trabajaron en la biblioteca de manera libre, algunos en forma individual y otros en equipo, sólo se controló que no acudieran a la asesoría de un profesor.

Al término de las actividades se aplicó el examen final a los dos grupos, al mismo tiempo y en el mismo lugar.

Para analizar los resultados se tomaron en cuenta las diferencias (en la mayoría de los casos fueron ganancias) entre el postest y el pretest con las cuales se calculó la t-Student.

Otros análisis se realizaron agrupando los datos de las actividades y del postest por habilidades (anexos 7 y 8), así como los índices de facilidad y los errores más y menos frecuentes en el postest.

Se compararon los resultados del postest por sexo tanto en el grupo experimental como en el de control.

Por último, se aplicó un cuestionario de opinión (anexo 10), al grupo experimental para conocer su punto de vista en cuanto al trabajo con la computadora.

RESULTADOS

Estudio piloto

El estudio piloto tuvo como finalidad la de probar el material que se utilizaría en el estudio experimental, por lo que las actividades y los exámenes pretest y pos-test se compararon y se clasificaron por tema.

Los temas fueron:

1 Conceptos de funciones crecientes y decrecientes.
2 Identificación y trazo de tangentes a una gráfica.
3 Identificación y trazo de secantes a una gráfica.
4 Concepto de pendiente de una recta.
5 Determinación de máximos y mínimos relativos de una función.
6 Concepto de razón de cambio.

7 Trazo y manejo de la gráfica de la derivada.

8 Cálculo de la derivada de una función.

Los reactivos del examen final y de las actividades se clasificaron de acuerdo con esos temas (Tabla 1).

Tabla 1
NUMERO DE REACTIVOS POR TEMA (estudio piloto)

TEMAS	1	2	3	4	5	6	7	8
Examen final	4	4	2	10	3	10	9	0
ACTIVIDADES								
1								
2			2	8		2	2	
3		3	1	3				1
4		3	3	11		2	2	
5						1		4
6	1				3			1
TOTAL	1	6	6	22	3	5	4	6

Los resultados de acuerdo a dicha clasificación se presentan en la Tabla 2

Tabla 2
CALIFICACIONES PROMEDIO POR TEMA (estudio piloto)

TEMAS	1	2	3	4	5	6	7	8
EXAMEN FINAL	6.03	6.02	5.49	5.71	3.07	6.61	3.81	*
ACTIVIDADES	7.60	6.34	8.56	5.96	9.60	7.04	9.87	1.17

*El examen final no tuvo reactivos de este tema.

Los resultados generales de las actividades y de los dos instrumentos de evaluación fueron:

Tabla 3
CALIFICACIONES MEDIAS (estudio piloto)

	EXAMEN DIAGNOSTICO	ACTIVIDADES	EXAMEN FINAL
CALIF MEDIA	3.85.	6.7	5.21

El índice de facilidad promedio del examen final fue de 0.55 . El índice de facilidad de un reactivo se obtuvo dividiendo el número de aciertos entre el total de respuestas al mismo.

La confiabilidad del examen final fue de 0.23, calculada por medio del método "split half" $R = \frac{2r}{r+1}$, siendo r el coeficiente de correlación entre las dos mitades en que se divide el examen, la primera del reactivo uno al 20 y la segunda del 21 al 40.

Estudio principal

El estudio experimental pretendió medir los efectos que un graficador para computadora tenía en la adquisición de conceptos de Cálculo en relación con el desarrollo de las habilidades: espacial, numérica, del razonamiento lógico, para operar con símbolos y para generalizar.

Por tanto las actividades y los reactivos del examen final se clasificaron de acuerdo con esas categorías.

Algunas observaciones que se hicieron durante las sesiones del experimento, con base en el plan de trabajo (ver anexo 9) para el grupo experimental fueron las siguientes.

> La primera sesión (febrero 1o.) causó gran inquietud y expectativa en los alumnos, quienes mantuvieron una actitud de interés que les permitió trabajar de manera dinámica.
>
> Segunda sesión (febrero 8), los alumnos interactuaron con la computadora y con los compañeros más cercanos, se destacaron como monitores tres alumnos quienes tenían más experiencia en el uso del teclado. El avance, en cuanto a la realización de las actividades fue lento, en parte debido a dificultades en el manejo del graficador.
>
> En la tercera sesión (febrero 15) una de las interrogantes que más se presentó es el por qué se obtiene la misma pendiente de la secante PQ con la función $f(x)= x^2$ que con $f(x)= x^2+ 5$. En cuanto al tiempo de la sesión se observó que no era suficiente para realizar todas las actividades propuestas.

Cuarta sesión (febrero 22), los estudiantes se preguntaban con qué opción del menú del graficador podían trazar rectas tangentes, situación que los hizo reflexionar en torno a la capacidad de simulación del mismo.

En esta sesión se presentó, de manera generalizada, una confusión entre el valor de la pendiente de la secante y el valor de la función.

También se hicieron evidentes sus dificultades con la aritmética, ya que al elegir valores cada vez más pequeños para el incremento de la variable (h), dudaban en decidir que numero era menor que otro, ambos escritos en forma decimal.

Otra de las dificultades fue la evaluación de funciones en distintos valores de la variable.

Quinta sesión (marzo 1o.), los efectos de la simulación para trazar tangentes no fueron interiorizados por el alumno ya que pretendieron evaluar expresiones $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ de manera directa, como en la secantes, por sustitución de $h = 0$.

También se observaron en el alumno las carencias de algunos conceptos algebraicos, así como la imposibilidad de vincular y evocar otros.

En la sexta sesión (marzo 8) se observó un mejor dominio del graficador. Sin embargo, sólo una minoría de los alumnos pudo calcular la derivada de una función mediante el cálculo del límite correspondiente, es decir, alcanzó cierto grado de generalización.

Hasta la séptima sesión (marzo 15) los alumnos eligieron la escala más adecuada para obtener una mejor visión de la gráfica de una función, lo que significa que determinaron el dominio y el rango de la misma más fácilmente.

En cambio, mostraron dificultades para entender el significado de "valor extremo", para identificar qué parte de la gráfica de la función derivada era positiva, cuál negativa y en algunas ocasiones, dónde era nula. En este último caso, creían que si la función era nula entonces la variable valía cero.

Durante esta sesión y todas las anteriores se observó mucha disposición para la exploración con el graficador, por "ensayo y error", pero poca hacia la reflexión. En los casos en que se hizo un trabajo reflexivo se logró la independencia del monitor más rápido.

A pesar de lo anterior, por momentos, se dió una gran inquietud por no ser suficiente el tiempo asignado para la realización de las actividades, situación que los obligó a completar los datos solicitados en las actividades sin hacer una reflexión de las cuestiones planteadas.

En la última sesión (marzo 18), conforme el alumno llegaba al resultado esperado, lograba mayor seguridad en el manejo del graficador, motivándolo a plantearse otras interrogantes que continuamente comentaba con sus compañeros.

A los alumnos del grupo control se les observó en dos ocasiones, destacándose lo siguiente:

Durante una sesión adicional que se le concedió al grupo control, dado que su avance era mucho más lento que el del grupo experimental, se manifestó su desacuerdo con trabajar sin la guía y exposición del profesor, asícomo de una poca disposición para realizar el estudio reflexivo del material.

Esa actitud se reforzó por el uso de un material que no le proporcionaba el conocimiento como un producto terminado, sino que le exigía experimentar y buscar respuestas. Tampoco contaba con ejemplos que le permitiera repetir procedimientos, por lo que no podía calificar de correcto o incorrecto su trabajo, situación que le originó mucha inseguridad.

Los alumnos lograron un avance lento aunque por las circunstancias fue un poco más reflexivo que en el grupo experimental; pero al realizar todos los cálculos necesarios para obtener las gráficas, se cansaban y perdían interés. Lo anterior ocasionó que se interrumpiera la secuencia en el aprendizaje.

Pocos alumnos se plantearon cuestiones fuera de las propuestas en el material, la mayoría se dedicó a realizar operaciones.

El numero de actividades propuestas al alumno en el material que se le dió, no fue el mismo que se consideró para evaluar dichas actividades, por ello es necesario registrar el logro de las mismas en porcentajes comparativos con la cantidad de actividades consideradas (Tabla 4).

Tabla 4

LOGRO DE LAS ACTIVIDADES POR HABILIDAD (estudio principal)

HABILIDADES	E	N	R	O	U	T
Propuestas	110	50	82	98	12	360
Considerada	20	50	38	56	12	176
Logro % OE	*	49.26	64.25	38.60	26.85	46.32
Logro % OC	19.40	26.55	37.93	19.02	1.72	27.05
% diferencia		22.71	26.32	19.58	25.13	19.27

* No fue posible hacer el registro de las actividades correspondientes a esta habilidad porque no todas se grabaron en discos flexibles debido a la falta de tiempo en las sesiones del experimento, así que sólo se hizo una evaluación general como se manifiesta en los siguientes comentarios (algunas de las gráficas que se obtuvieron se presentan en el anexo 11).

Los alumnos lograron realizar la mayoría de las gráficas qué se les indicó de manera aceptable. En los casos menos óptimos las fallas fueron en relación con una mala selección de la escala, lo que hizo difícil la apreciación de los valores extremos y del signo de la derivada tanto a la izquierda como a la derecha del valor extremo.

Solo una minoria logró hacer las gráficas de manera óptima, en cuanto a la posibilidad de dar, a partir de la gráfica, las respuestas correctas a las actividades.

Los resultados de la evaluación de las actividades tomando en cuenta todo lo anterior, se presentan en la tabla 5.

Tabla 5

ACTIVIDADES (estudio principal)

(calificaciones promedio y desviación standar)

HABILIDADES		ESPACIAL	NUMERICA	RAZONAMIENTO LOGICO	OPERAR CON SIMBOLOS	GENERALIZAR	T
GRUPO EXP.	$\bar{X}_1$	*	1.9	6.7	3.3	2.6	4.11
	σ		1.8	2.1	0.95	2.2	0.95
GRUPO CONTROL	$\bar{X}_2$	4.94	2.65	3.79	1.90	0.17	2.70
	σ	1.89	1.97	2.05	1.20	0.76	1.16
$\bar{X}_1 - \bar{X}_2$			2.25	2.91	1.4	2.43	1.41

* No se hizo el registro de todas las actividades porque no se grabaron las gráficas realizadas en la computadora.

Los reactivos del examen final se clasificaron de acuerdo con las categorías antes mencionadas. Un reactivo puede pertenecer a una o más categorías. Los resultados fueron los siguientes:

Tabla 6

RESULTADOS DEL EXAMEN FINAL POR HABILIDAD (estudio principal)

HABILIDADES	E	N	R	O	G
Cantidad de reactivos	25	9	28	11	12
Calif. Prom. GE	4.9	5.2	5.2	5.7	5.9
Calif. Prom. GC	4.2	4.7	4.4	5.1	5.3
Diferencias	0.7	0.5	0.8	0.6	0.6

Los resultados globales del examen final para los dos grupos se presentan en la Tabla 7.

Tabla 7

CALIFICACION PROMEDIO Y DESVIACION STANDARD DEL PRETEST Y POSTEST (estudio principal)

	EXAMEN DIAGNOSTICO		EXAMEN FINAL		INDICE DE CONFIABILIDAD
	$\bar{X}$	σ	$\bar{X}$	σ	
GRUPO EXPERIMENTAL	4.02	0.83	5.5	0.96	0.71
GRUPO CONTROL	4.01	1.02	4.9	1.12	0.65

El indice de confiabilidad se calculó por medio de la expresión que se detalla en la página 19.

En este estudio se dividió al postest en dos partes, de la pregunta 1 a la 20 como primera parte y de la 21 a la 40 como segunda, para calcular el coeficiente de correlación.

Para la prueba t-Student de las ganancias entre el examen diagnóstico y el examen final de cada grupo, se consideró un nivel de significación $\alpha = 0.1$ con 52 grados de libertad con $n_1 = 27$ y $n_2 = 27$.

Por tratarse de una hipótesis alterna unilateral el valor crítico de t es $t_\alpha = 1.2988$, valor que se obtuvo por interpolación.

Para calcular el valor de t y compararlo con t_α se utilizó la expresión:

$$t = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}} \quad , \quad \mu_1 = \mu_2$$

donde $$S_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sqrt{\left(\frac{\Sigma x_1^2 + \Sigma x_2^2}{n_1 + n_2 - 2}\right)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)} \quad ,$$

$\Sigma x_i^2 = \Sigma X_i^2 - \left(\frac{\Sigma X_i}{n_2}\right)^2$ y X_i es la media de las diferencias entre el postest y el pretest , en el grupo experimental si i = 1 y en el grupo control si i = 2.

Se obtuvo $t = 1.4642$, de ahi que $t > t_\alpha$, por lo tanto la t calculada cae dentro de la región crítica de 1.2988 y se rechaza la hipótesis nula, es decir, existe una diferencia entre el aprendizaje del grupo experimental y el aprendizaje del grupo control, en la dirección $\mu_1 > \mu_2$.

La probabilidad de error por rechazar la hipótesis nula es del 10%

Por otra parte, el rango de los indices de facilidad del postest en el grupo experimental fue de 0.19 a 0.93 y en el grupo control de 0.17 a 0.87

La media en el GE, de los indices de facilidad, fue de 0.55 y en el GC de 0.50.

Los reactivos del postest clasificados por habilidad produjeron los siguientes indices de facilidad promedio en cada una.

Tabla 8

INDICES DE FACILIDAD PROMEDIO DE LOS REACTIVOS DEL POSTEST POR HABILIDAD (estudio principal)

HABILIDADES	E	N	R	O	G
GRUPO EXPERIMENTAL	0.50	0.55	0.54	0.59	0.61
GRUPO CONTROL	0.42	0.49	0.47	0.54	0.55
DIFERENCIAS	0.08	0.06	0.07	0.05	0.06

En cuanto a los errores en las respuestas del postest se tuvieron las siguientes anotaciones:

Tabla 9

ERRORES EN POSTEST POR HABILIDAD

(estudio principal)

HABILIDAD	ESPACIAL			NUMERICA			RAZONAMIENTO LOGICO			OPERAR CON SIMBOLOS			GENERALIZAR		
FRECUENCIA %	PREGUNTA#	Min.	Max.	#	Min.	Max.	#	Min.	Max.	#	Min.	Max.	#	Min.	Max.
G E	13	3.7		35	7.4		13	3.7		14	7.4		23	7.4	
	8		55.6				10		55.6				36	7.4	
	18		55.6	8		55.6	33		55.6	33		55.6	10		55.6
	33		55.6												
G C	13	3.7		2	11.1		13	3.7		2	11.1				
										14	11.1		23	7.4	
	21		59.3	8		44.4	15		55.6	19		48.2			
										33		48.2	15		66.7

Los conceptos que se involucran en los reactivos del examen final cuyas respuestas fueron erróneas y de mayor frecuencia son los siguientes:

Tabla 9a

PRINCIPALES ERRORES DE CONCEPTO EN EL EXAMEN FINAL

(estudio principal)

HABILIDAD	GRUPO EXPERIMENTAL	GRUPO CONTROL
ESPACIAL	función creciente	razón de cambio
NUMERICA	pendiente de la secante	pendiente de la secante
RAZONAMIENTO LOGICO	gráfica de la derivada y función creciente	determinación de los máximos y mínimos
OPERAR CON SIMBOLOS	función creciente	valores críticos y función creciente
GENERALIZAR	signo del valor de la derivada	valores críticos

Las habilidades en donde tienen el mismo error de mayor frecuencia los dos grupos son en la numérica y la de operar con simbolos.

En el grupo control el error en la habilidad numérica consitió básicamente en tomar al cociente $\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$ como la pendiente de la recta secante.

En esa misma habilidad, el grupo experimental consideró erróneamente a la pendiente de la secante como un cociente entre el valor de la función y el de la variable $\frac{y_2}{x_1}$.

La respuesta errónea al reactivo 33 muestra la confusión entre los conceptos de funciones crecientes y decrecientes con el valor de la función positivo y negativo, respectivamente.

Los resultados del postest también se analizaron de acuerdo con el sexo del alumno, obteniéndose los siguientes:

Tabla 10

RESULTADOS DEL EXAMEN FINAL POR SEXO (Estudio principal)

	GRUPO EXPERIMENTAL	GRUPO CONTROL	DIFERENCIAS
MUJERES	5.35	4.78	0.57
HOMBRES	5.87	5.33	0.54

Otro elemento de estudio fue el cuestionario de opinión que se le aplicó al grupo experimental. La primera pregunta para saber si considera mejor el estudio con la computadora (si o no). La segunda, en relación con su preferencia para estudiar con ayuda del (a) profesor, (b) libro o (c) del material para la computadora. La tercera, si considera aprender más con (a) el profesor, (b) el libro o (c) el graficador. Y la última, sobre su preferencia para realizar las gráficas (a) papel o (b) computadora.

Los datos que se obtuvieron de dicho cuestionario fueron:

Tabla 11

RESPUESTAS AL CUESTIONARIO DE OPINION DEL GRUPO EXPERIMENTAL (estudio principal)

PREG. No.	1		2			3			4	
RESP.	si	no	a	b	c	a	b	c	a	b
%	51.85	48.15	77.78	3.70	18.52	77.78	7.41	14.81	40.74	59.26

DISCUSION

La decisión de realizar el estudio principal con alumnos del área económico-administrativa se debió básicamente a que es un grupo menos motivado hacia el estudio de la matemática que uno del área químico-bilógica o físico-matemática. La mayoría de estos alumnos eligen carreras como administración de empresas o sociología, con la idea de que no tendrán que estudiar muchas materias relacionadas con las matemáticas. Esa razón resultó ser un reto mayor para probar los efectos del uso de un graficador en microcomputadora, además de que, en general, la mayoría tiene muchos errores y carencias en la formación de conceptos matemáticos.

Se logró que los alumnos del GE interactuaran entre si y con el micromundo (medio computacional basado en el aprendizaje interactivo, en donde el que aprende construye su sistema de prerrequisitos y se desenpeña de manera interactiva en la construcción de su aprendizaje). Es decir, los alumnos realizaron las acciones que les permitieron adquirir conocimientos como resultado de sus esfuerzos constructivos.

Los participantes también pudieron visualizar los conceptos tratados, incidiendo en el nivel de percepción de manera más significativa y obteniendo tanto el registro de sus acciones como la interiorización de los conceptos. Esta situación, les permitió evocar y relacionar conceptos en el momento necesario, y alcanzar niveles de abstracción y generalización que los alumnos del grupo control no obtuvieron (ver Tabla 5).

Con el experimento se logró desarrollar las habilidades consideradas (espacial, numérica, del razonamiento lógico, la operación con símbolos y la generalización), al obtenerse diferencias positivas en las calificaciones del examen final entre el grupo experimental y el control (ver tabla 6).

En las tablas 4, 5 y 6 se observa que la diferencia mayor -tanto en la calificación como en el logro, de las actividades y del examen final- entre los dos grupos es la que corresponde a la habilidad para el razonamiento lógico. Lo que nos hace concluir -si se acepta la hipótesis de que el aprendizaje se mejora con la ayuda de un graficador- que la habilidad donde se incide con mayor fuerza es en la del razonamiento lógico.

La diferencia de calificaciones en el examen final respecto a la habilidad espacial, entre el GE y el GC (Tabla 8), denota un desarrollo significativo de esa habilidad en el alumno del grupo experimental, que lo ayudó en la construcción de sus conceptos. La adquisición de conceptos se infiere de las diferencias positivas en los resultados del examen final tanto en la habilidad para el razonamiento lógico como en la generalización, entre el grupo experimental y el control.

De la tabla 8 se concluye que en la habilidad espacial, el alumno del GC tuvo mayor dificultad para contestar correctamente los reactivos del examen final, lo que permite especular sobre un mayor desarrollo en dicha habilidad por parte del alumno del GE, debido en parte a que el alumno del GE no desvió su atención hacia los largos y tediosos cálculos que se requieren para obtener las gráficas de las funciones, sino que empleó su tiempo en un estudio más general y profundo de las propiedades de la gráfica. Desde luego, tuvo mayor oportunidad para explorar y construir paulatinamente sus conceptos.

Las diferencias en los resultados del GE y el GC, en las actividades y en el examen final, estriban principalmente en el diseño didáctico del micromundo que se utilizó con el GE, y no sólo en el tiempo empleado para los cálculos numéricos por el GC.

Sin embargo, debo señalar que los alumnos mostraron dificultades en la adquisición del concepto de pendiente de la secante a la gráfica de una función, en relación con la comparación del cambio de valor de la función con respecto al cambio en la variable (ver tablas 9 y 9a), en la habilidad numérica.

Las diferencias en el examen final (tabla 10) entre el GE y el GC fueron ligeramente mayores para las mujeres que para los hombres, por ello podemos pensar que en la mujer se logró una mejor motivación en su aprendizaje. Hay que tomar en cuenta que por tratarse de un grupo del área económico-administrativa, en general, el alumno tiene poca disposición para estudiar matemáticas. Lo anterior está de acuerdo con resultados semejantes de Hoyles, Tall y Wenzelburger.

En suma, existe una ligera diferencia en las calificaciones promedio en el examen final entre el GE y el GC (de 0.6) de donde se puede pensar que se logró mejorar levemente en el alumno, la adquisición de los conceptos tratados, con la ayuda del graficador. De ahí que la hipótesis principal de este estudio se pruebe en cierto grado, es decir, existen diferencias en el aprendizaje de la interpretación geométrica de la derivada, en la determinación de los máximos y mínimos relativos de una función elemental, con la ayuda del graficador que sin él, con un 10% de probabilidad de error.

Otras conclusiones importantes, son las que se refieren a los resultados del cuestionario de opinión (tabla 11), puesto que se manifestó una buena disposición hacia el estudio apoyado en el manejo del graficador, pero una notoria preferencia por la guía del profesor, tendencia que denota un estilo de aprendizaje todavía muy dependiente del profesor, lo que no favorece el aprendizaje reflexivo y la construcción de los conceptos en el alumno.

Considero que no se lograron mejores resultados en el grupo experimental porque las ocho sesiones de que constó el experimento son insuficientes para que el alumno se desenvuelva de manera más natural en el micromundo. Esto es, que si las interacciones con la computadora se extendieran a todo el curso, se podrían registrar logros mayores.

Además de la limitante anterior, se tuvieron otras. Una de las más notorias fue la imposibilidad de contar con un número mayor de grupos experimentales, para estudiar los efectos de otras variables como el material didáctico (la guía de las actividades), el libro de texto, el profesor, la seriación de las sesiones experimentales, o bien, en una situación óptima, integrar el graficador y otros desarrollos de software educativo a todo el curso.

Otra restricción del experimento fue no poder hacer ajustes del tiempo dedicado a las sesiones con las computadoras, para que el alumno completara sus actividades, se involucrara más profundamente en el ambiente de investigación y por tanto, de su aprendizaje.

El experimento se puede mejorar haciendo una revisión de los materiales utilizados, tanto de los exámenes como de la guía de las actividades, puesto que se tuvieron varias imprecisiones en la redacción y omisiones de temas que, sin embargo, se discutieron en el salón de clases. También resultaría interesante observar los resultados del examen final si se lo resolviera, con ayuda del graficador, en la microcomputadora.

Quedan muchas interrogantes por investigar, como las que se refieren a los efectos que tuvo el material didáctico, diseñado específicamente para servir de guía al estudiante en la investigación y construcción de sus conceptos. O bien, si existe la posibilidad de mejorar el experimento de manera que se capten registros sistemáticos de lo que sucede simultáneamente en el grupo experimental y en el control. Y por supuesto, qué conclusiones se podrían obtener con un número mayor de grupos de control y experimentales, para analizar una mayor cantidad de parámetros.

ANEXO 1

GUIA PARA REALIZAR ACTIVIDADES CON EL GRAFICADOR CACTUS PLOT
(estudio piloto)

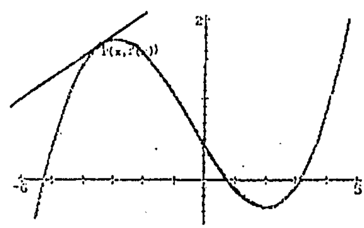
Objetivo: Que el alumno comprenda la interpretación geométrica de la derivada y su aplicación en el cálculo de los máximos y minimos relativos.

INTRODUCCION

En el estudio de la función interesa saber de qué manera cambian sus valores conforme cambian los valores de la variable independiente.

Una forma de medir ese cambio es por medio de la comparación de los incrementos de ambos, tanto el de la función como el de la variable, llamado razón de cambio, que en términos geométricos significa, calcular la pendiente de la recta secante que pasa por un punto y por el punto correspondiente al incremento.

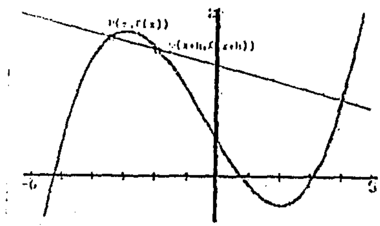
Entre más próximos estén los puntos de la gráfica por donde pasa la secante, la información acerca del comportamiento de la función es más precisa, por ello lo deseable es calcular el valor de la pendiente de la recta tangente y de esa manera poder medir la razón de cambio de la función, en cada punto de su gráfica.



Para calcular la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la curva $y = f(x)$ en el punto $P(x,f(x))$ se procede de manera indirecta ya que no se conoce otro punto de esa tangente que permita hacerlo en forma directa con la expresión

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Por lo que si consideramos otro punto de la gráfica cercano a P como $Q(x+h, f(x+h))$, en donde h es un pequeño cambio o incremento en x y $f(x+h)$ es el cambio correspondiente de $f(x)$.



La recta que pasa por P y Q es una secante cuya pendiente es:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

que se aproxima al valor de la pendiente de la recta tangente conforme h se hace cada vez más pequeño.

Representamos a la pendiente de la recta tangente a la curva por $\frac{dy}{dx}$ o por $f'(x)$.

Lo anterior se expresa formalmente por:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Para precisar más el concepto anterior analicemos algunos ejemplos:

ACTIVIDAD 1

1.1 Traza la gráfica de las siguientes funciones con el graficador "Cactus plot, a mathematics utility" en la microcomputadora.

(a) $f(x) = x^2$ (b) $f(x) = x^3$ (c) $f(x) = x^4$

1.2 Traza una secante que pase por los puntos $P(2, f(2))$ y $Q(2+h, f(2+h))$ con $h = 1$, en la gráfica de cada función.

1.3 CONTESTA brevemente las cuestiones siguientes:

1.3.1 ¿Cuál esla pendiente de la secante que pasa por dichos puntos P y Q, en cada caso?

(a) Para $f(x) = x^2$ __________ (b) $f(x) = x^3$ __________ (c) $f(x) = x^4$ __________.

1.3.2 Si observas los valores de las pendientes puedes decir que su valor es cada vez ______________ y por ello las secantes tienen un ángulo de inclinación ______________.

1.3.3 ¿Hay alguna relación entre el grado de la función $f(x) = x^n$ y el valor de la pendiente? ________________.

1.3.4 De lo anterior se puede decir que entre más ______________ sea el exponente ______________ será el valor de la pendiente de la secante correspondiente.

1.3.5 Por lo tanto se concluye que entre más ______________ sea el grado de la función la razón de cambio es ________________.

ACTIVIDAD 2

2.1 , 2.2 Realiza todos los puntos de la actividad 1 con las funciones siguientes:

(a) Para $f(x) = x^2 + 5$ ____________ (b) $f(x) = x^3 + 5$ ____________

(c) $f(x) = x^4 + 5$ ____________.

2.3 COMPLETA Y ANOTA LAS MISMAS CUESTIONES QUE EN 1.3

2.3.1 ____

2.3.2 ____

2.3.3 ____

2.3.4 ____

2.3.5 ____

ACTIVIDAD 3

3.1 En las gráficas de las actividades 1.1 y 2.1 traza, en cada una, la secante que pase por $P(2,f(2))$ y $Q(2+h,f(2+h))$, con los siguientes valores de h: 0.5, 0.2, 0.1, 0.05, 0.02, 0.01, 0.005, 0.002 y 0.001

3.2 Calcula la pendiente de cada una de las secantes anteriores y completa la siguiente tabla:

f(x)	h = 0.5	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01	0.005	0.002	0.001
x^2									
x^3									
x^4									
$x^2 + 5$									
$x^3 + 5$									
$x^4 + 5$									

3.3 CONTESTA BREVEMENTE:

3.3.1 ¿A qué valor se aproxima la pendiente de cada secante cuando h se hace cada vez más pequeño?
(a) Para $f(x) = x^2$ __________ (b) $f(x) = x^3$ __________ (c) $f(x) = x^4$ __________ (d) $f(x) = x^2 + 5$ __________ (e) $f(x) = x^3 + 5$ __________ (f) $f(x) = x^4 + 5$ __________.

3.3.2 ¿Hay alguna relación entre los valores de las pendientes de las funciones $f(x) = x^2$ y $f(x) = x^2 + 5$ __________ Cuál? __________. Y entre $f(x) = x^3$ y $f(x) = x^3 + 5$ __________. Así como entre $f(x) = x^4$ y $f(x) = x^4 + 5$ __________.

3.3.3 ¿Cómo debe ser el valor de h para que la secante se parezca más a una tangente? __________.

3.3.4 Traza una tangente en el punto $P(2,f(2))$ en la gráfica de las funciones de las actividades 1.1 y 2.1

3.3.5 CONTESTA

¿Qué valor de h consideraste en cada caso?
(a) Para $f(x) = x^2$ __________ (b) $f(x) = x^3$ __________ (c) $f(x) = x^4$ __________ (d) $f(x) = x^2 + 5$ __________ (e) $f(x) = x^3 + 5$ __________ (f) $f(x) = x^4 + 5$ __________.

ACTIVIDAD 4

4.1 Repite las actividades 1.1 a 1.3 con las mismas funciones pero con $P(-2,f(-2))$, $P(-1,f(-1))$, $P(0,f(0))$ y $P(1,f(1))$.

4.2 Ejecuta las actividades 2.1 a 2.3 cambiando los puntos por los que se dan en 4.1

4.3 Realiza las actividades 3.1 a 3.3 pero con los puntos de 4.1

ACTIVIDAD 5

5.1 Encuentra las expresiones algebraicas que se indican, con las funciones de las actividades 1.1 y 2.1

$f(x+h) - f(x) =$ ______________________________

$\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} =$ ______________________________

5.2 Calcula el límite de cada una de las expresiones $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ = cuando h tiende a cero.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$$

5.3 CONTESTA BREVEMENTE:

De lo anterior se concluye que:

Si $f(x) = x^2$ entonces $f'(x) =$ ______________________

Si $f(x) = x^3$ entonces $f'(x) =$ ______________________

Si $f(x) = x^4$ entonces $f'(x) =$ ______________________

Si $f(x) = x^2 + 5$ entonces $f'(x) =$ ______________________

Si $f(x) = x^3 + 5$ entonces $f'(x) =$ ______________________

Si $f(x) = x^4 + 5$ entonces $f'(x) =$ ______________________

5.4 ¿Cuál sería entonces la derivada de la función $f(x) = x^n$?
______________ Y la de $f(x) = x^n + c$, donde c es una constante que no depende de x? ______________ .

5.5 ¿Cómo son ambas derivadas? ______________ . Por lo tanto si dos funciones difieren por una constante, sus derivadas son ______________ . ¿ Podrías hacer una demostración formal de lo anterior? ______________ . ¡INTENTALO!

MAXIMOS Y MINIMOS

En vista de que la derivada de una función nos proporciona la razón de cambio instantáneo de la función, es posible determinar cuándo es creciente o decreciente.

La función de la figura 1 es creciente en los intervalos (-5,-3) y (2,4) ya que si x_1, x_2 pertenecen a esos intervalos y $x_1 < x_2$ entonces $f(x_1) < f(x_2)$.

En cambio, es decreciente en el intervalo (-3,2) pues para $x_1 < x_2$ se tiene que $f(x_1) > f(x_2)$.

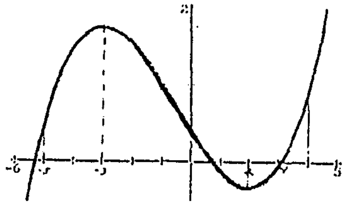


Figura 1

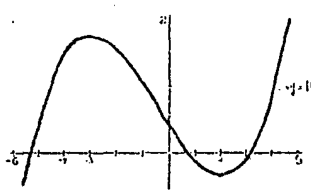
En la figura 2 se ha trazado la gráfica de una función y la de su derivada, al compararlas se puede observar que, en los intervalos (-5,-3) y (2,4), la función derivada es positiva y en (-3,2) es negativa.

Diremos que en un intervalo una función continua f(x) es creciente si en él su derivada es positiva. Y f(x) es decreciente si f´(x) es negativa en dicho intervalo.

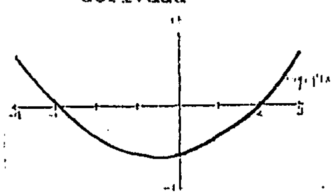
La función f(x) de la figura 2 es creciente en (-4,-3) y (2,3) pero decreciente en (-3,2).

Los valores de x para los cuales f´(x) es igual a cero les llamaremos valores extremos. De la figura 2 se ve que en x = -3 y en x = 2 la derivada es cero, es decir, f´(-3) = 0 y f´(2) = 0.

función



derivada



Además, en valores próximos y a la izquierda de -3, la función derivada es positiva y en valores próximos y a la derecha es negativa. En este caso decimos que la función $f(x)$ tiene un <u>máximo relativo</u> en $x = -3$.

Por el contrario, en valores cercanos y a la izquierda de 2 la derivada es negativa, pero a la derecha es positiva, lo que corresponde a un <u>mínimo relativo</u> .

En resumen, si x es un valor próximo a -3 y cuando $x < -3$ $f'(x) > 0$ y para $x > -3$, $f'(x) < 0$, la función tiene un máximo relativo en -3.

Y, cuando x es un valor próximo a 2, para $x < 2$, $f'(x) < 0$ y si $x > 2$, $f'(x) > 0$, la función tiene un mínimo relativo en 2.

ACTIVIDAD 6

6.1 Traza las gráficas de las funciones y de sus derivadas.

(a) $f(x) = x^2 - 4x - 5$ (b) $f(x) = -x^2 + 16$ (c) $f(x) = x^4 - 1$

Nota: En la misma figura, tanto la función como su derivada.

6.2 Compara la gráfica de la función con la de su derivada, en cada caso

6..3 CONTESTA:

6.3.1 ¿Cuáles son los valores extremos de cada función?

De $f(x) = x^2 - 4x - 5$ __________________,

$f(x) = -x^2 + 16$ __________________,

$f(x) = x^4 - 1$ __________________.

6.3.2 ¿Cómo es la derivada (positiva o negativa) en valores a la izquierda y a la derecha de cada valor extremo?

Función	A la izquierda	A la derecha
$f(x) = x^2 - 4x - 5$	__________	__________
$f(x) = -x^2 + 16$	__________	__________
$f(x) = x^4 - 1$	__________	__________

6.3.3 Por lo tanto, la función:

$f(x) = x^2 - 4x - 5$ tiene __________________ en ________________ ,
$f(x) = - x^2 + 16$ tiene __________________ en _________________ ,
$f(x) = x^4 - 1$ tiene __________________ en ________________ .

ANEXO 2

EXAMEN DIAGNOSTICO

(estudio piloto)

INSTRUCCIONES: Lee cuidadosamente cada cuestión y subraya la opción que creas sea la respuesta correcta.

1.- La pendiente de la recta secante que pasa por los puntos $P(-4, f(-4))$ y $Q(-3, f(-3))$ de la figura 1 es:

(a) $\dfrac{f(-3)}{f(-4)}$ (b) $\dfrac{f(-3) - f(-4)}{-3 - (-4)}$ (c) $\dfrac{-3 - (-4)}{f(-3) - f(-4)}$ (d) Ninguna de las anteriores

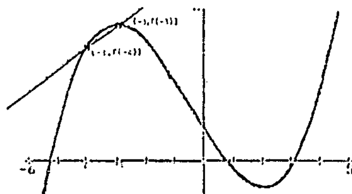


Fig. 1

2.- De la pregunta 1 concluimos que la razón de cambio de la función:

(a) $\dfrac{f(-3)}{f(-4)}$ (b) $\dfrac{f(-3) - f(-4)}{-3 - (-4)}$ (c) $\dfrac{-3 - (-4)}{f(-3) - f(-4)}$ (d) Ninguna de las anteriores

3.- La pendiente de la secante trazada por dos puntos de la gráfica de una función mide:

(a) La diferencia de valores de la función.

(b) La razón de cambio de la función.

(c) La inclinación de la curva.

(d) Ninguna de las anteriores.

4.- La razón de cambio de una función se obtiene comparando:

(a) Los cambios de los valores de la variable.

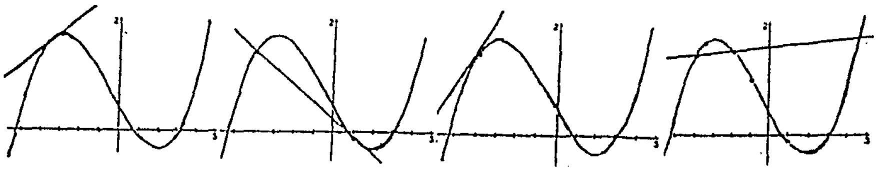
(b) Los cambios de los valores de la función.

(c) El cambio de valor de la función con el cambio de valor de la variable.

(d) Ninguna de las anteriores.

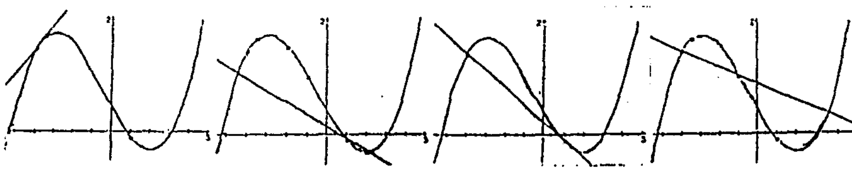
5.- Elige de la figura 2 la gráfica que corresponda a la secante trazada por los puntos $P(-4,f(-4))$ y $Q(-4+1,f(-4+1))$.

(a) Figura 2.1 (b) Figura 2.2 (c) Figura 2.3 (d) Figura 2.4



6.- ¿Qué gráfica de la figura 3 representa mejor la posición de una tangente en el punto $P(-4,f(-4))$?

(a) Figura 3.1 (b) Figura 3.2 (c) Figura 3.3 (d) Figura 3.4



7.- La pendiente de la recta secante en la figura 4 es:

(a) $\dfrac{-3.5 - (-4)}{16.8 - 14.6}$ (b) $\dfrac{16.8}{-3.5}$ (c) $\dfrac{16.8 - 14.6}{-3.5 - (-4)}$ (d) Ninguna de las anteriores

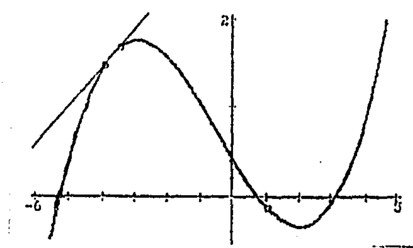


fig. 4

8.- De la cuestión anterior se concluye que la razón de cambio de la función es:

(a) 0.22 (b) -4.8 (c) 4.4 (d) Ninguno de lo anteriores

9.- La tangente a la curva $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x + 4$ en el punto $P(-4, f(-4))$ de la figura 5 es la recta:

(a) l_1 (b) l_2 (c) l_3 (d) Ninguna de las anteriores

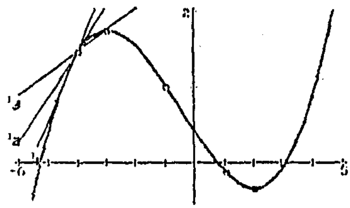
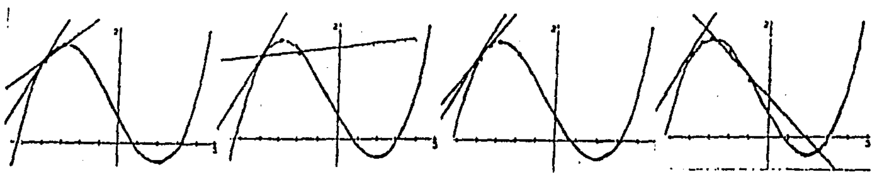


fig. 5

10.- Si queremos calcular la pendiente de la recta tangente en el punto $P(-4, f(-4))$, la figura que mejor aproxima su valor es:

(a) Figura 6.1 (b) Figura 6.2 (c) Figura 6.3 (d) Figura 6.4



11.- El valor de la pendiente de la recta tangente en el punto $P(-4, f(-4))$ es un número comprendido entre : (ver figura 5)

(a) 6.75 y 7.82 (b) 0.12 y 0.14 (c) -6.75 y -7.82

(d) Ninguno de lo anteriores

12.- La expresión que permite calcular la pendiente de la recta tangente en el punto $P(-4, f(-4))$ es:

(a) $\frac{f(x) - f(4)}{x - (-4)}$ (b) $\lim_{h \to 0} \frac{f(-4+h) - f(-4)}{h}$ (c) $\lim_{h \to 0} \frac{f(-4+h)}{h}$

(d) Ninguna de las anteriores

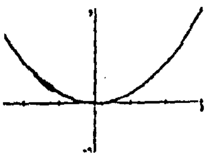
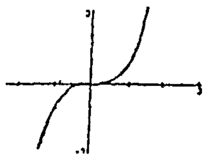
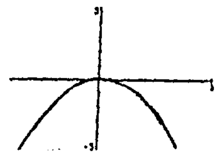
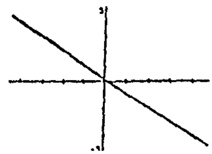
13.- La razón de cambio instantáneo de la función $f(x)$ en $x = 2$ es:

(a) $\dfrac{f(2) - f(h)}{h}$ (b) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(2+h) - f(2)}{h}$ (c) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

(d) Ninguna de las anteriores

14.- ¿Cuál o cuáles de las gráficas corresponden a funciones crecientes en el intervalo $(0,5)$?

(a) Figura 7.1 (b) Figura 7.2 (c) Figura 7.3 (d) Figura 7.4

15.- La función $f(x) = x^3 + 2$ es creciente en el intervalo $(1,8)$ por lo que ahí su derivada es:

(a) Negativa (b) Nula (c) Positiva (d) Ninguna de las anteriores

16.- Si la figura 8 es la gráfica de la derivada de una función entonces en $x = 2$ tiene un:

(a) Punto de inflexión (b) Máximo (c) Mínimo (d) Pico

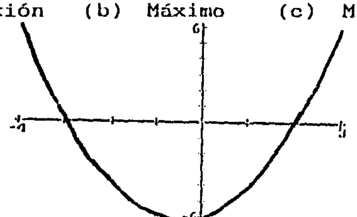
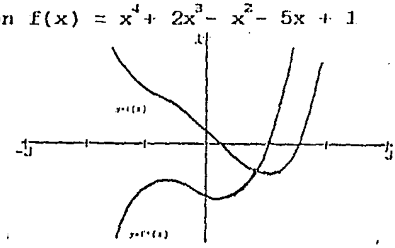


fig. 8

17.- ¿Cómo es la derivada de la función $f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 5x + 1$ en el intervalo $(-2, 1)$? Ver figura 9.

(a) Positiva (b) Nula

(c) Negativa (d) Ninguna de las anteriores



18.- En la figura 10 se tiene la gráfica de la función
$f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 3x + 1$

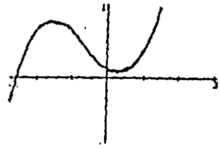
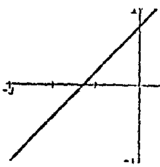
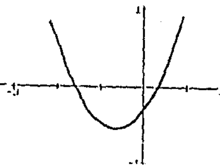
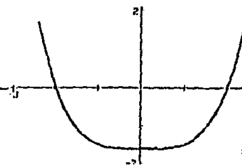
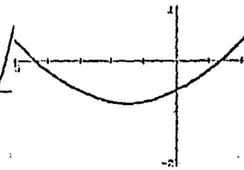


fig. 10

¿cuál de las siguientes figuras es la de su derivada?

(a) Figura 10.1 (b) Figura 10.2 (c) Figura 10.3 (d) Figura 10.4

19.- ¿De cuál función la figura 11 es la gráfica de su derivada?

(a) $f(x) = x^2 - 2x + 1$ (b) $f(x) = x^4 - 16$

(c) $f(x) = 2x$ (d) $f(x) = 8$

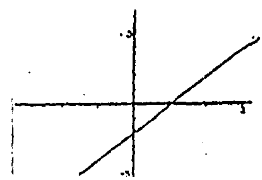


fig. 11

20.- La función de la figura 12 tiene un máximo en $x = -3$, por ello, ahí su derivada es:

(a) Nula (b) Positiva (c) Negativa (d) Ninguna de las anteriores

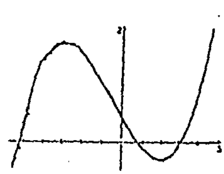


fig. 12

21.- Construye la gráfica de una función que, aproximadamente, sea la derivada de la función de la figura 13.

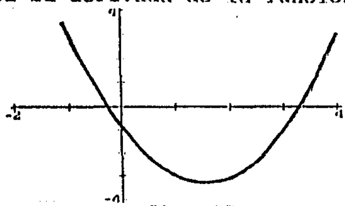


fig. 13

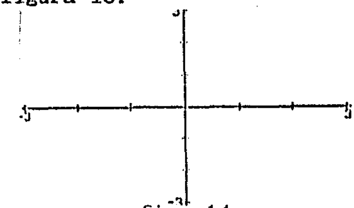


fig. 14

22.- La función correspondiente a la figura 15 es la derivada de una función cuya gráfica es:

(a) Figura 15.1 (b) Figura 15.2 (c) Figura 15.3 (d) Figura 15.4

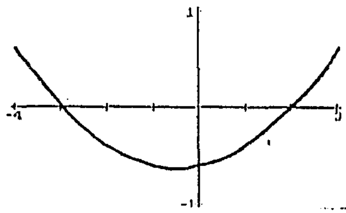


fig. 15

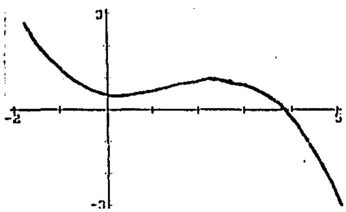


fig. 15.1

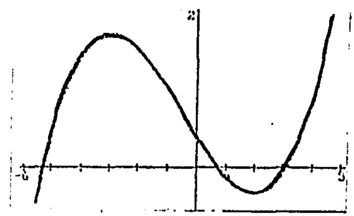


fig. 15.2

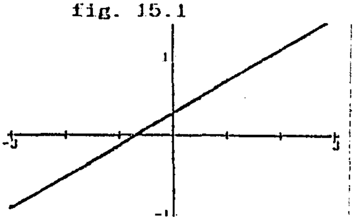


fig. 15.3

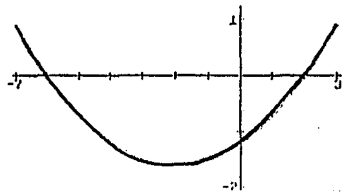


fig. 15.4

ANEXO 3

EXAMEN FINAL

(estudio piloto)

INSTRUCCIONES: Lee cuidadosamente cada cuestión y subrraya la opción que creas sea la respuesta correcta.

1.- La pendiente de la recta secante que pasa por los puntos $P(-4,f(-4))$ y $Q(-3,f(-3))$ de la figura 1 es:

(a) $\frac{f(-3)}{f(-4)}$ (b) $\frac{f(-3) - f(-4)}{-3 - (-4)}$ (c) $\frac{-3 - (-4)}{f(-3) - f(-4)}$ (d) Ninguna de las anteriores

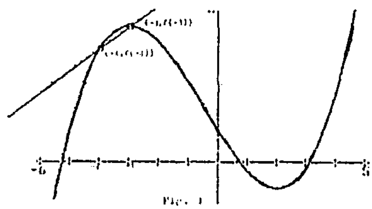


Fig. 1

2.- De la pregunta 1 concluimos que la razón de cambio de la función:

(a) $\frac{f(-3)}{f(-4)}$ (b) $\frac{f(-3) - f(-4)}{-3 - (-4)}$ (c) $\frac{-3 - (-4)}{f(-3) - f(-4)}$ (d) Ninguna de las anteriores

3.- La pendiente de la secante trazada por dos puntos de la gráfica de una función mide:

(a) La diferencia de valores do la función.

(b) La razón de cambio de la función.

(c) La inclinación de la curva.

(d) Ninguna de las anteriores.

4.- La razón de cambio de una función se obtiene comparando:

(a) Los cambios de los valores de la variable.

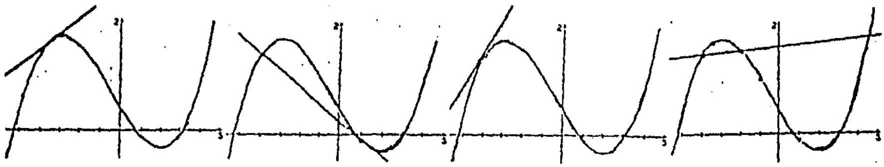
(b) Los cambios de los valores de la función.

(c) El cambio de valor de la función con el cambio de valor de la variable.

(d) Ninguna de las anteriores.

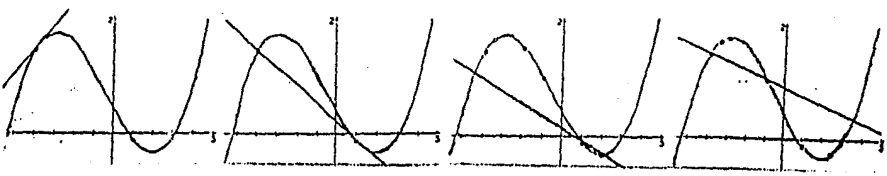
5.- Elige de la figura 2 la gráfica que corresponda a la secante trazada por los puntos P(-4,f(-4)) y Q(-4+1,f(-4+1)).

(a) Figura 2.1 (b) Figura 2.2 (c) Figura 2.3 (d) Figura 2.4



6.- ¿Qué gráfica de la figura 3 representa mejor la posición de una tangente en el punto P(-4,f(-4))?

(a) Figura 3.1 (b) Figura 3.2 (c) Figura 3.3 (d) Figura 3.4



7.- La pendiente de la recta secante en la figura 4 es:

(a) $\frac{-3.5 - (-4)}{16.8 - 14.6}$ (b) $\frac{16.8}{-3.5}$ (c) $\frac{16.8 - 14.6}{-3.5 - (-4)}$ (d) Ninguna de las anteriores

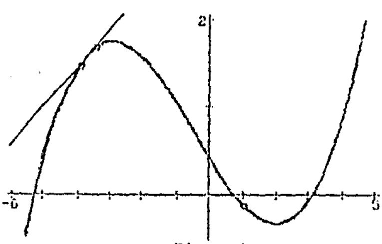


fig. 4

8.- De la cuestión anterior se concluye que la razón de cambio de la función es:

(a) 0.22 (b) -4.8 (c) 4.4 (d) Ninguno de lo anteriores

9.- La tangente a la curva $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x + 4$ en el punto P(-4,f(-4)) de la figura 5 es la recta:

(a) l_1 (b) l_2 (c) l_3 (d) Ninguna de las anteriores

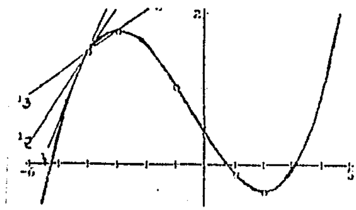
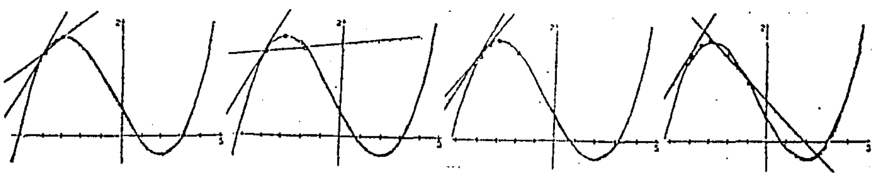


fig. 5

10.- Si queremos calcular la pendiente de la recta tangente en el punto P(-4,f(-4)), la figura que mejor aproxima su valor es:

(a) Figura 6.1 (b) Figura 6.2 (c) Figura 6.3 (d) Figura 6.4



11.- El valor de la pendiente de la recta tangente en el punto P(-4,f(-4)) es un número comprendido entre : (ver figura 5)

(a) 6.75 y 7.82 (b) 0.12 y 0.14 (c) -6.75 y -7.82

(d) Ninguno de lo anteriores

12.- La expresión que permite calcular la pendiente de la recta tangente en el punto P(-4,f(-4)) es:

(a) $\frac{f(x) - f(4)}{x - (-4)}$ (b) $\lim_{h \to 0} \frac{f(-4+h) - f(-4)}{h}$ (c) $\lim_{h \to 0} \frac{f(-4+h)}{h}$

(d) Ninguna de las anteriores

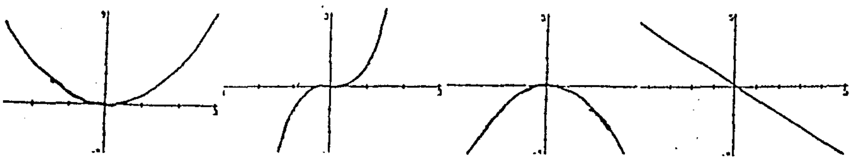
13.- La razón de cambio instantáneo de la función f(x) en $x = 2$ es:

(a) $\dfrac{f(2) - f(h)}{h}$ (b) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(2+h) - f(2)}{h}$ (c) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

(d) Ninguna de las anteriores

14.- ¿Cuál o cuáles de las gráficas corresponden a funciones crecientes en el intervalo (0,5)?

(a) Figura 7.1 (b) Figura 7.2 (c) Figura 7.3 (d) Figura 7.4



15.- La función $f(x) = x^3 + 2$ es creciente en el intervalo (1,6) por lo que ahí su derivada es:

(a) Negativa (b) Nula (c) Positiva (d) Ninguna de las anteriores

16.- Si la figura 8 es la gráfica de la derivada de una función entonces en x = 2 tiene un:

(a) Punto de inflexión (b) Máximo (c) Mínimo (d) Pico

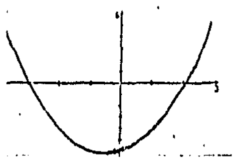


fig. 8

17.- ¿Cómo es la derivada de la función $f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 5x + 1$ en el intervalo (-2, 1)? Ver figura 9.

(a) Positiva (b) Nula

(c) Negativa (d) Ninguna de las anteriores

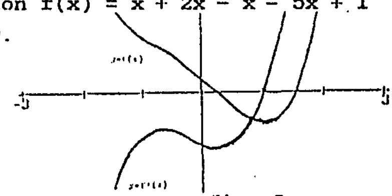


fig. 9

18.- En la figura 10 se tiene la gráfica de la función:
$f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 3x + 1$

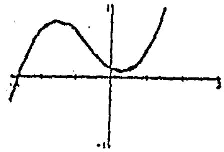
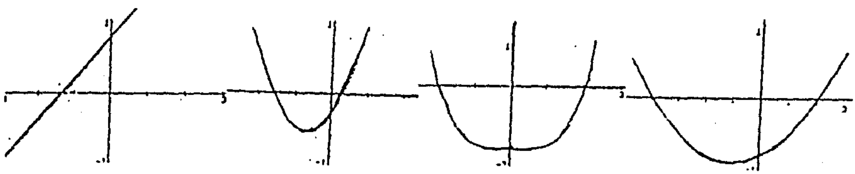


fig. 10

¿cuál de las siguientes figuras es la de su derivada?

(a) Figura 10.1 (b) Figura 10.2 (c) Figura 10.3 (d) Figura 10.4



19.- ¿De cuál función la figura 11 es la gráfica de su derivada?

(a) $f(x) = x^2 - 2x + 1$ (b) $f(x) = x^4 - 16$

(c) $f(x) = 2x$ (d) $f(x) = 8$

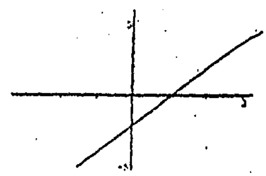


fig. 11

20.- La función de la figura 12 tiene un máximo en $x = -3$, por ello, ahí su derivada es:

(a) Nula (b) Positiva (c) Negativa (d) Ninguna de las anteriores

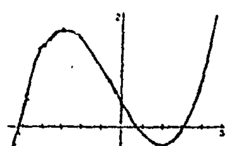


fig. 12

21.- La pendiente de la recta secante de la figura 1, que pasa por los puntos P(-4,14.6) y Q(-3,17.5) es:

(a) Positiva (b) Negativa (c) Cero (d) No existe

22.- La razón de cambio de la función de la figura 1 es positiva en los intervalos:

(a) (-6,3) y (3,2) (b) (3,2) y (2,5)

(c) (-6,-3) y (2,5) (d) (6,2) y (2,5)

23.- La razón de cambio de una función se mide con:

(a) La diferencia de valores de la función.

(b) La pendiente de la recta secante trazada en dos puntos de su gráfica.

(c) La diferencia de valores de la variable.

(d) Ninguna de las anteriores.

24.- La comparación del cambio de valor de la función con el de la variable es:

(a) La inclinación de la gráfica. (b) El cambio de la variable.

(c) La razón de cambio de la función. (d) Ninguna de las anteriores.

25.- De la figura 2 elige la gráfica que corresponda a la de la secante trazada en los puntos P(-4,f(-4)) y Q(-4+2,f(-4+2)).

(a) Figura 2.1 (b) Figura 2.2 (c) Figura 2.3 (d) Figura 2.4

26.- ¿Qué gráfica de la figura 3 representa mejor a la secante que está más próxima a la posición de la tangente en el punto P(1,f(1))?

(a) Figura 3.1 (b) Figura 3.2 (c) Figura 3.3 (d) Figura 3.4

27.- La pendiente de la recta secante en la figura 4 es:

(a) Cero (b) Negativa (c) Positiva (d) No existe

28.- La razón de cambio de la función de la figura 4 en el intervalo (-4,-3) es:

(a) Positiva (b) Cero (c) Negativa (d) No existe

29.- La recta l_2 de la figura 5 es:

(a) secante en (-5,f(-5)) y (-4,f(-4)) (b) tangente (-3,f(-3))

(c) tangente (-4,f(-4)) (d) secante en (-4,f(-4)) y (-3,f(-3))

30.- La pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función de la figura 5 es:

(a) mayor que la pendiente de l_3 (b) menor que la pendiente de l_3
(c) igual a la pendiente de l_1 (d) mayor que la pendiente de l_1

31.- La pendiente de l_3 es 2.9 y la de l_1 es 7.1, por lo que, la pendiente de l_2 es:

(a) mayor que 7.1 (b) menor que 2.9 (c) mayor que 2.9 y menor que 7.1

(d) mayor que 7.1 o menor que 2.9

32.- El $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(-3+h) - f(-3)}{h}$ nos da la pendiente de la recta

__________________ en ______________ .

(a) secante en (-3,f(-3)) y (-3+h,f(-3+h))
(b) tangente en (-3,f(-3))
(c) secante en (-3,f(-3)) y (-4,f(-4))
(d) tangente en (-4,f(-4))

33.- El $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(-3+h) - f(-3)}{h}$ es:

(a) La razón de cambio de la función de (-3,f(-3)) a (-3+h,f(-3+h))
(b) La diferencia entre f(-3+h) y f(-3)
(c) La razón de cambio instantáneo de la función en (-3,f(-3))
(d) Ninguna de las anteriores.

34.- La función cuya gráfica es la figura 7.2 es:

(a) Decreciente en el intervalo (-5,5)
(b) Constante en el intervalo (-5,5)
(c) Creciente en el intervalo (-5,5)
(d) Decreciente en (-5,0) y creciente en (0,5)

35.- Si una función f(x) tiene derivada f´(x) positiva en un intervalo, entonces ahí es:

(a) decreciente (b) constante (c) creciente
(d) ninguna de las anteriores

36.- La gráfica de la figura 8 es de la función derivada f´(x), de acuerdo a ella, los valores para los cuales vale cero son:

(a) -3 y -6 (b) -3 y 0 (c) 2 y 3 (d) -3 y 2

37.- La función f´(x) cuya gráfica estáen la figura 9, es negativa en el intervalo:

(a) (-7,-3) (b) (3,7) (c) (-3,3) (d) (0,3)

38.- Si la gráfica de la figura 10.3 es la de f´(x) entonces f(x) es:

(a) creciente en (-3,2) y (1,5)

(b) decreciente en (-3,-2) y (1,5), pero creciente en (-2,2)

(c) positiva en (-3,-2) y (1,5), pero negativa en (-2,2)

(d) Ninguna de las anteriores.

39.- La figura 11 es la gráfica de f´(x), de ahí que f(x) tenga un mínimo en:

(a) x = 0 (b) x = 3 (c) x = 1 (d) x = -1

40.- La función de la figura 12 tiene un mínimo en x = 2 por lo que la derivada es ________________ a la ______________ de 2 y ________________ a la ________________ de 2.

(a) positiva a la izquierda de 2 y negativa a la derecha de 2

(b) negativa a la izquierda de 2 y positiva a la derecha de 2

(c) positiva a la izquierda de 2 y positiva a la derecha de 2

(d) negativa a la izquierda de 2 y negativa a la derecha de 2

41.- Construye la gráfica de una función que, aproximadamente, sea la derivada de la función de la figura 13.

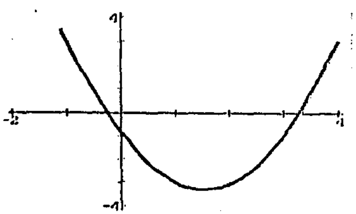


fig. 13

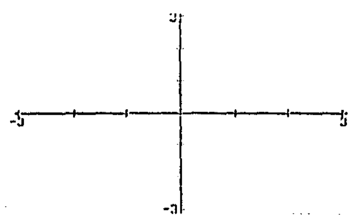


fig. 14

42.- La función correspondiente a la figura 15 es la derivada de una función cuya gráfica es:

(a) Figura 15.1 (b) Figura 15.2 (c) Figura 15.3 (d) Figura 15.4

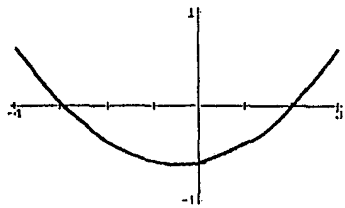


fig. 15

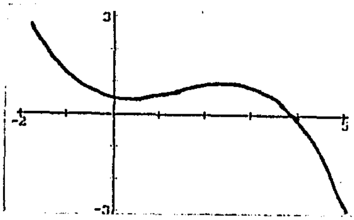


fig. 15.1

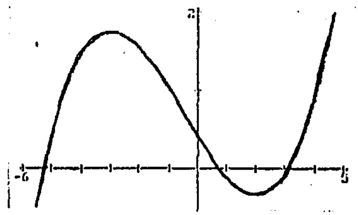


fig. 15.2

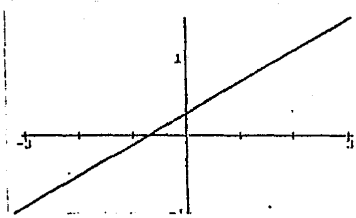


fig. 15.3

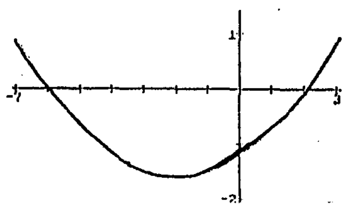


fig. 15. 4

ANEXO 4

GUIA DE ACTIVIDADES

(estudio principal)

ADQUISICION DE CONCEPTOS DE CALCULO CON APOYO DEL GRAFICADOR CACTUS.PLOT

Objetivo general.- Que el alumno comprenda la interpretación geométrica de la derivada y su aplicación en el cálculo de los máximos y mínimos de una función elemental.

INTRODUCCION

En el estudio de la función interesa saber de qué manera cambian sus valores conforme cambian los valores de la variable independiente.

Una forma de medir ese cambio es por medio de la comparación de los incrementos de ambos, tanto el de la función como el de la variable, llamado razón de cambio, que en términos geométricos significa la pendiente de la recta secante que pasa por un punto y por el punto correspondiente al incremento.

Entre más próximos estén los puntos de la gráfica por donde pasa la secante, la información acerca del comportamiento de la función es más precisa, por ello lo deseable es calcular el valor de la pendiente de la recta tangente y de esa manera medir la razón de cambio de la función en cada punto de su gráfica, es decir, la razón de cambio instantáneo.

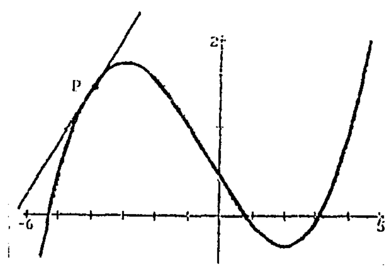


Figura 1

Para calcular la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la curva y = f(x) en el punto P(x,f(x)) se procede de manera indirecta, ya que no se conoce otro punto de esa tangente que permita hacerlo en forma directa con la expresión

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Por lo que, si consideramos otro punto de la gráfica cercano a P como $Q(x+h, f(x+h))$, en donde h es un pequeño cambio o incremento en x entonces $f(x+h) - f(x)$ es el cambio o incremento correspondiente de $f(x)$.

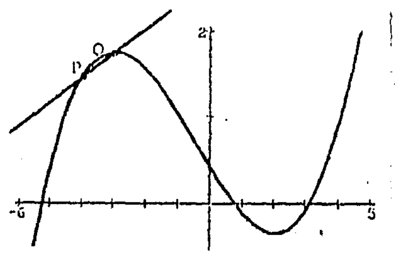


Figura 2

La recta que pasa por P y Q es una secante cuya pendiente es:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

que se aproxima al valor de la pendiente de la recta tangente conforme h se hace cada vez más pequeño.

Representamos a la razón de cambio instantáneo o bien, a la pendiente de la recta tangente en el punto $P(x, f(x))$ por $\frac{dy}{dx}$, ó por $f'(x)$.

Lo anterior se expresa formalmente así:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

en donde $\Delta x = h$.

Para precisar más el concepto anterior analicemos algunos ejemplos en las siguientes actividades.

ACTIVIDAD 1

1.1 Traza la gráfica de las siguientes funciones con el graficador "Cactus plot, a mathematics utility en la"microcomputadora y realiza lo que se te indica después para cada una de ellas.

(a) $f(x) = x^2$ (b) $f(x) = x^3$ (c) $f(x) = x^4$

(d) $f(x) = x^5$ (e) $f(x) = x^6$

1.2 Ejecuta y contesta brevemente las cuestiones:

1.2.1 Traza una secante que pase por los puntos $P(2,f(2))$ y $Q(2+h,f(2+h))$ con $h = 1$, en la gráfica de cada una de las funciones anteriores.

1.2.2 Anota la pendiente de cada secante según la función.

(a) Para $f(x) = x^2$ ____________ (b) $f(x) = x^3$ ____________

(c) $f(x) = x^4$ ____________ (d) $f(x) = x^5$ ____________

(e) $f(x) = x^6$ ____________

1.3 Ejecuta y contesta:

1.3.1 Repite la actividad 1.2.1 considerando los siguientes valores de h: $h = 0.1$; $h = 0.01$; $h = 0.001$

1.3.2 Completa el cuadro:

Función	Valor de la pendiente de la secante si:		
	$h = 0.1$	$h = 0.01$	$h = 0.001$
$f(x) = x^2$	________	________	________
$f(x) = x^3$	________	________	________
$f(x) = x^4$	________	________	________
$f(x) = x^5$	________	________	________
$f(x) = x^6$	________	________	________

1.4 Repite las actividades 1.1 , 1.2 y 1.3 con las funciones:

(a) $f(x) = x^2 + 5$ (b) $f(x) = x^3 + 5$ (c) $f(x) = x^4 + 5$

(d) $f(x) = x^5 + 5$ (e) $f(x) = x^6 + 5$

Y escribe en una hoja anexa lo que se pide en 1.2.2 y en 1.3.2 para las funciones anteriores.

1.5 Contesta brevemente:

1.5.1 ¿A qué valor se aproxima la pendiente de cada secante cuando h se hace cada vez más pequeño?

Cuando: $f(x) = x^2$ ________ , $f(x) = x^3$ ________

$f(x) = x^4$ ________ , $f(x) = x^5$ ________ , $f(x) = x^6$ ________

1.5.2 ¿Cómo debe ser el valor de h para que la secante se parezca más a una tangente.

____.

ACTIVIDAD 2

2.1 Traza una tangente en el punto $P(2,f(2))$ en la gráfica de cada una de las funciones de la actividad 1.1 y 1.4

2.2 Contesta brevemente:

¿Qué valor de h consideraste en cada caso?

Para $f(x) = x^2$ ______ , $f(x) = x^3$ ______ , $f(x) = x^4$ ______ , $f(x) = x^5$ ______ , $f(x) = x^6$ ______ . $f(x) = x^2 + 5$ ______ , $f(x) = x^3 + 5$ ______, $f(x) = x^4 + 5$ ______ , $f(x) = x^5 + 5$ ______ , $f(x) = x^6 + 5$ ______ .

Analizando los ejercicios anteriores podemos concluir que: si $f(x) = x^2$ y $x = 2$, entonces:

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h} = 4$$ es la pendiente de

la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^2$ en el punto $(2,f(2))$ y la razón de cambio instantáneo en dicho punto.

ACTIVIDAD 3

3.1 Completa cada cuestión:

Si $f(x) = x^3$ entonces $f'(2) =$ ______________ = ________

$f(x) = x^4$ entonces $f'(2) =$ ______________ = ________

$f(x) = x^5$ entonces $f'(2) =$ ______________ = ________

$f(x) = x^6$ entonces $f'(2) =$ ______________ = ________

$f(x) = x^2 + 5$ entonces $f'(2) =$ ______________ = ________

$f(x) = x^3 + 5$ entonces $f'(2) =$ ______________________ = ______________

$f(x) = x^4 + 5$ entonces $f'(2) =$ ______________________ = ______________

$f(x) = x^5 + 5$ entonces $f'(2) =$ ______________________ = ______________

$f(x) = x^6 + 5$ entonces $f'(2) =$ ______________________ = ______________

En las actividades anteriores se ha calculado la razón de cambio de una función en un cierto punto, veremos ahora si dicha razón cambia cuando se considera otro punto.

ACTIVIDAD 4

4.1 Realiza las actividades 2.1, 2.2 y 3.1 pero con los puntos: $R(-2,f(-2))$, $S(-1,f(-1))$, $T(0,f(0))$ y $U(1,f(1))$. Anota tus actividades en una hoja anexa.

4.2 Contesta brevemente:

4.2.1 ¿Observaste algún cambio en el valor de $f'(x)$ cuando x tomó distintos valores? ____________________.

4.2.2 ¿Podrías afirmar entonces que el valor de $f'(x)$ depende de x?

____________________ ¿Por qué? ____.

En conclusión diremos que la <u>razón de cambio instantáneo</u> de una función depende del "instante", es decir, del valor de la variable. Así también, la pendiente de la recta tangente en un punto $(x,f(x))$ depende de x.

ACTIVIDAD 5

5.1 Encuentra las expresiones algebraicas que se indican para cada una de las funciones de las actividades 1.1 y 1.4, anótalas en una hoja anexa.

5.1.1 $f(x+h) - f(x) =$ 5.1.2 $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} =$

5.2 Calcula el límite de cada una de las expresiones de 5.1.2 cuando h tiende a cero.

5.3 Contesta brevemente:

5.3.1 La derivada de una función $f(x)$ se denota por ________________.

5.3.2 Y $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0}$

5.3.3 Si $f(x) = x^2$ entonces $f'(x) =$ ______________,

$f(x) = x^3$, $f'(x) =$ ______________,

$f(x) = x^4$, $f'(x) =$ ______________,

$f(x) = x^5$, $f'(x) =$ ______________,

$f(x) = x^6$, $f'(x) =$ ______________,

$f(x) = x^2 + 5$, $f'(x) =$ ______________,

$f(x) = x^3 + 5$, $f'(x) =$ ______________,

$f(x) = x^4 + 5$, $f'(x) =$ ______________,

$f(x) = x^5 + 5$, $f'(x) =$ ______________,

$f(x) = x^6 + 5$, $f'(x) =$ ______________.

5.4 ¿Cuál sería entonces la derivada de la función $f(x) = x^n$?
______________________ ¿Y la de $f(x) = x^n + c$ donde c es una constante que no depende de x?______________________.

5.5 ¿Cómo son ambas derivadas?______________. Por lo tanto, si dos funciones difieren por una constante, sus derivadas son ______________. ¿Podrías hacer una demostración de lo anterior?__________. ¡INTENTALO!

MAXIMOS Y MINIMOS RELATIVOS DE UNA FUNCION

En vista de que la derivada de una función nos proporciona la razón de cambio instantáneo de la misma, es posible determinar cuándo es creciente o decreciente.

La función de la figura 3 es creciente en los intervalos (-5,-3) y (2,4) ya que si x_1 y x_2 pertenecen a esos intervalos y $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) < f(x_2)$.

En cambio, es decreciente en el intervalo (-3,2), puesto que si x_3 y x_4 pertenecen a dicho intervalo con $x_3 < x_4$ se tiene que $f(x_3) > f(x_4)$.

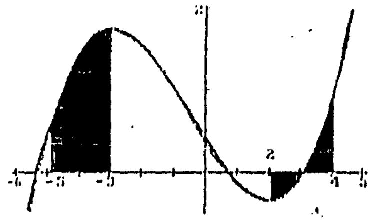


Figura 3

Observemos que en la figura 4 se ha trazado la gráfica de una función y la de su derivada, al compararlas vemos que, en (-5,-3) y (2,4) la función derivada es positiva y en (-3,2) es negativa.

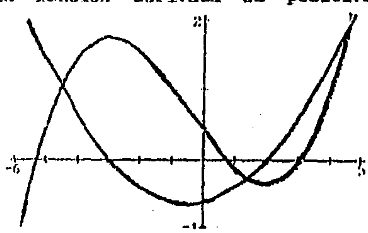


Figura 4

Diremos que en un intervalo una función contínua f(x) es creciente si en él su derivada es positiva. Y f(x) es decreciente si su derivada es negativa.

La función cuya gráfica es la figura 2 es creciente en (-5,-3) y en (2,4), pero decreciente en (-3,2).

Los valores de x para los cuales $f'(x)$ es igual a cero les llamaremos valores extremos de la función. De la figura 2 se ve que para $x = -3$ y $x = 2$, la derivada es cero, es decir, $f'(-3) = 0$ y $f'(2) = 0$.

Además, en valores próximos y a la izquierda de -3, la función derivada es positiva y en valores próximos y a la derecha es negativa, en este caso decimos que la función $f(x)$ tiene un máximo relativo en $x = -3$.

Por el contrario, en valores cercanos y a la izquierda de 2 la derivada es negativa, pero a la derecha es positiva, lo que corresponde a un mínimo relativo.

En resumen:

$f(x)$ tiene un máximo relativo en -3 cuando $f'(x) > 0$ en $x < -3$ y $f'(x) < 0$ en $x > -3$, siendo x un valor próximo a -3.

$f(x)$ tiene un mínimo relativo en 2 cuando $f'(x) < 0$ en $x < 2$ y $f'(x) > 0$ en $x > 2$.

ACTIVIDAD 6

6.1 Traza la gráfica de cada función y la de su derivada en la misma figura.

(a) $f(x) = x^2 - 4x - 5$ (b) $f(x) = -x^2 + 16$ (c) $f(x) = x^4 - 1$

(d) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 6$ (e) $f(x) = 3x^4 + 16x^3 - 6x^2 - 48x + 2$

6.2 Compara la gráfica de la función con la de su derivada, en cada caso.

6.3 Contesta brevemente:

6.3.1 ¿Cuáles son los valores extremos de cada función?

(a) ______________ (b) ______________ (c) ______________

(d) ______________ (e) ______________.

6.3.2 ¿Cómo es la derivada (positiva o negativa) en valores a la izquierda y a la derecha de cada valor extremo?

	Valor extremo	a la izquierda	a la derecha
(a)	________	________	________
(b)	________	________	________
(c)	________	________	________
(d)	________	________	________
	________	________	________

(e) ______________ ________________ ________________

______________ ________________ ________________

______________ ________________ ________________

6.3.3 Por lo tanto, la función:

$f(x) = x^2 - 4x - 5$ tiene ____________________ en ____________________,

$f(x) = x^2 + 16$ tiene ____________________ en ____________________,

$f(x) = x^4 - 1$ tiene ____________________ en ____________________,

$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 6$ tiene __________________ en ________________

y ____________________ en ____________________.

$f(x) = 3x^4 + 16x^3 - 6x^2 - 48x + 2$ tiene ____________________ en

____________________, ____________________ en ____________________ y

____________________ en ____________________.

ANEXO 5

EXAMEN DIAGNOSTICO

(estudio principal)

INSTRUCCIONES: Lee cuidadosamente cada cuestión y subraya la opción que creas que sea la respuesta correcta.

1.- La pendiente de la recta secante que pasa por los puntos $P(-4,f(-4))$ y $Q(-3,f(-3))$ de la figura 1 es:

(a) $\dfrac{f(-3)}{f(-4)}$ (b) $\dfrac{f(-3) - f(-4)}{-3 - (-4)}$

(c) $\dfrac{-3 - (-4)}{f(-3) - f(-4)}$ (d) Ninguna de las anteriores

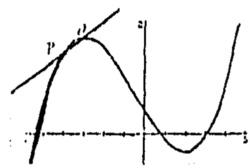


fig. 1

2.- De la figura 1 concluimos que la razón de cambio de la función es:

(a) $\dfrac{f(-3) - f(-4)}{-3 - (-4)}$ (b) $\dfrac{f(-3)}{f(-4)}$ (c) $\dfrac{-3 -(-4)}{f(-3) - f(-4)}$ (d) Ninguna de las anteriores

3.- La pendiente de la secante trazada por dos puntos de la gráfica de una función mide:

(a) La diferencia de valores de la función.

(b) La razón de cambio de la función.

(c) La inclinación de la curva.

(d) Ninguna de las anteriores.

4.- La razón de cambio de una función se obtiene comparando:

(a) Los cambios de los valores de la variable.

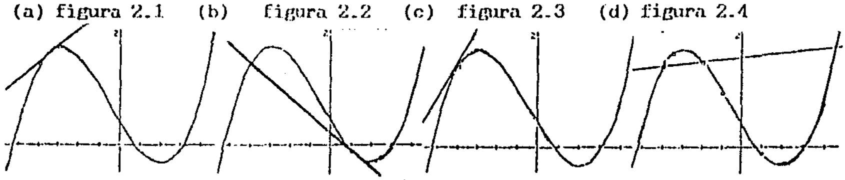
(b) Los cambios de los valores de la función.

(c) El cambio de valor de la función con el cambio de valor de la variable.

(d) Ninguna de las anteriores.

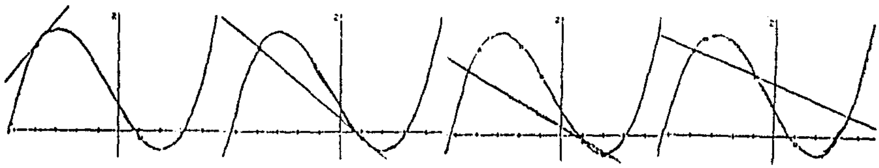
5.- Elige de las siguientes figuras la gráfica que corresponda a la secante trazada por los puntos $P(-4,f(-4))$ y $Q(-4+1,f(-4+1))$.

(a) figura 2.1 (b) figura 2.2 (c) figura 2.3 (d) figura 2.4



6.- ¿Qué gráfica representa mejor la posición de una tangente en el punto $P(-4,f(-4))$?

(a) Figura 3.1 (b) Figura 3.2 (c) Figura 3.3 (d) Figura 3.4



7.- La pendiente de la recta secante en la figura 4 es:

(a) $\dfrac{-3.5-(-4)}{16.8-14.6}$ (b) $\dfrac{16.8}{-3.5}$

(c) $\dfrac{16.8-14.6}{-3.5-(-4)}$ (d) Ninguna de las anteriores

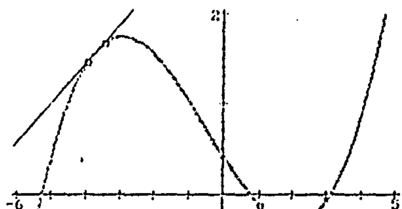


fig. 4

8.- De la cuestión anterior se concluye que la razón de cambio de la función es:
(a) 0.22 (b) 4.8 (c) 5 (d) Ninguna de las anteriores

9.- La tangente a la curva $f(x) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} - 6x + 4$

punto $P(-4,f(-4))$ de la figura 5 es la recta:

(a) l_1 (b) l_2

(c) l_3 (d) Ninguna de las anteriores

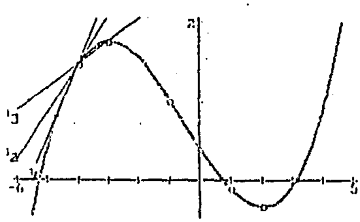
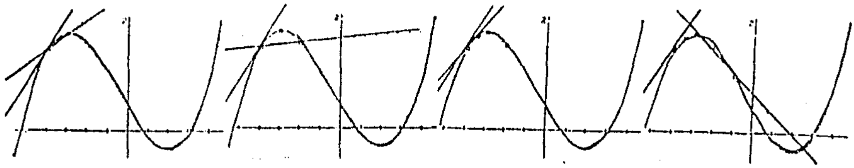


fig. 5

10.- Si queremos calcular la pendiente de la recta tangente en el punto $P(-4,f(-4))$, la secante que mejor aproxima su valor es la que aparece en la figura:

(a) Figura 6.1 (b) Figura 6.2 (c) Figura 6.3 (d) Figura 6.4



11.- De acuerdo a la figura 5, el valor de la pendiente de la recta tangente en el punto $P(-4,f(-4))$ es un número comprendido entre:

(a) -2.9 y -9.8 (b) 9.8 y 2.9 (c) 0.3 y 0.1 (d) Ninguna de las anteriores

12.- La expresión que permite calcular la pendiente de la recta tangente en el punto $P(-4,f(-4))$ es:

(a) $\dfrac{f(x) - f(-4)}{x - (-4)}$ (b) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(-4+h) - f(-4)}{h}$ (c) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(-4+h)}{h}$

(d) Ninguna de las anteriores

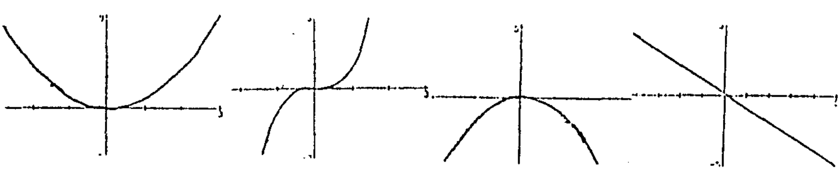
13.- La razón de cambio instantáneo de la función $f(x)$ en $x = 2$ es:

(a) $\dfrac{f(2) - f(h)}{h}$ (b) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(2+h) - f(2)}{h}$ (c) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

(d) Ninguna de las anteriores

14.- ¿Cuál o cuáles de las figuras corresponden a gráficas de funciones crecientes en el intervalo $(0,3)$?

(a) figura 7.1 (b) figura 7.2 (c) figura 7.3 (d) figura 7.4



15.- La función $f(x) = x^3 + 2$ es creciente en el intervalo (1,6) por lo que ahí su derivada es:

(a) Negativa (b) Nula (c) Positiva (d) Ninguna de las anteriores

16.- Si la figura 8 es la gráfica de la derivada de una función entonces en $x = 2$ tiene un:

(a) Punto de inflexión (b) Máximo

(c) Mínimo (d) Pico

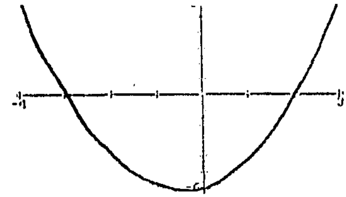


fig. 8

17.- ¿Cómo es la derivada de la función $f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 5x + 1$ en el intervalo (-1,1)? Ver figura 9

(a) Positiva (b) Nula

(c) Negativa (d) Ninguna de las anteriores

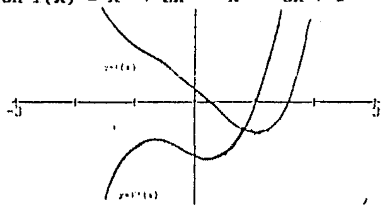


fig. 9

18.- La figura 10 es la gráfica de la función $f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 3x + 1$

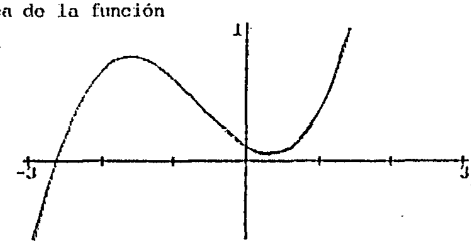
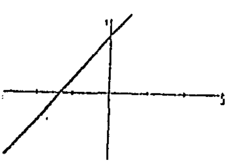
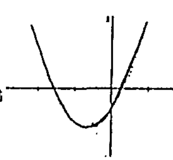


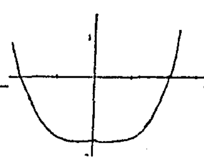
fig. 10

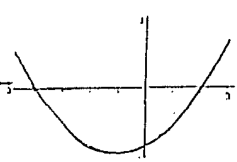
Elige la figura que corresponde a la gráfica de su derivada:

(a) figura 10.1 (b) figura 10.2 (c) figura 10.3 (d) figura 10.4









19.- ¿De cuál función la figura 11 es la gráfica de su derivada?

(a) $f(x) = x^2 - 2x + 1$ (b) $f(x) = x^4 - 16$

(c) $f(x) = 2x$ (d) $f(x) = 8$

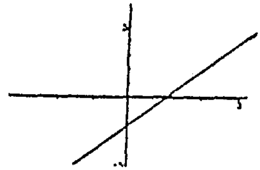


fig. 11

20.- La función de la figura 12 tiene un máximo en $x = -3$, por lo que ahí su derivada es:

(a) Negativa (b) Positiva

(c) cero (d) Ninguna de las anteriores

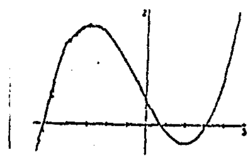


fig. 12

21.- La pendiente de la recta secante de la figura 1 que pasa por los puntos $P(-4,14.6)$ y $Q(-3,17.5)$ es:

(a) Inexistente (b) negativa (c) cero (d) positiva

22.- La razón de cambio de la función de la figura 1 es positiva en los intervalos:

(a) $(-6,-3)$ y $(-3,2)$ (b) $(-3,2)$ y $(2,5)$

(c) $(-6,-3)$ y $(2,5)$ (d) $(-6,2)$ y $(2,5)$

23.- La razón de cambio de una función se mide con:

(a) La diferencia de valores de la función.

(b) La pendiente de la recta secante trazada en dos puntos de su gráfica.

(c) La diferencia de valores de la variable.

(d) Ninguna de las anteriores.

24.- La comparación del cambio de valor de la función con el de la variable es:

(a) La inclinación de la gráfica. (b) El cambio de la variable.
(c) La razón de cambio de la función. (d) Ninguna de las anteriores.

25.- Elige de las siguientes figuras la que corresponda a la gráfica de la secante trazada en los puntos $P(-4,f(-4))$ y $Q(-4+2,f(-4+2))$.

(a) figura 2.1 (b) figura 2.2 (c) figura 2.3 (d) figura 2.4

26.- ¿Qué gráfica de las siguientes figuras representa a la secante que está más próxima a la posición de la tangente en el punto $P(1,f(1))$?

(a) figura 3.1 (b) figura 3.2 (c) figura 3.3 (d) figura 3.4

27.- La pendiente de la recta secante en la figura 4 es:

(a) cero (b) negativa (c) positiva (d) no existe

28.- La razón de cambio de la función de la figura 4 en el intervalo $(-4,-3)$ es:

(a) positiva (b) cero (c) negativa (d) no existe

29.- La recta l_2 de la figura 5 es:

(a) secante en $(-5,f(-5))$ y $(-4,f(-4))$ (b) tangente en $(-3,f(-3))$
(c) tangente en $(-4,f(-4))$ (d) secante en $(-4,f(-4))$ y $(-3,f(-3))$

30.- La pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función de la figura 5 es:

(a) mayor que la pendiente de l_3 (b) menor que la pendiente de l_3
(c) igual a la pendiente de l_1 (d) mayor que la pendiente de l_1

31.- La pendiente de l_1 es 9.8 y la de l_3 es 2.9 por lo que la pendiente de l_2 es:

(a) mayor que 9.8 (b) menor que 2.9
(c) mayor que 2.9 y menor que 9.8 (d) mayor que 9.8 ó menor que 2.9

32.- El $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(-3+h) - f(-3)}{h}$ nos da la pendiente de la recta:

(a) secante en $(-3,f(-3))$ y $(3+h,f(-3+h))$ (b) tangente en $(-3,f(-3))$

(c) secante en $(-3,f(-3))$ y $(-4,f(-4))$ (d) tangente en $(-4,f(-4))$

33.- El $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(-3+h) - f(-3)}{h}$ es:

(a) La razón de cambio de la función de $(-3,f(-3))$ a $(-3+h,f(-3+h))$

(b) La diferencia entre $f(-3+h)$ y $f(-3)$

(c) La razón de cambio instantáneo de la función en $(-3,f(-3))$

(d) Ninguno de los anteriores.

34.- La función cuya gráfica es la figura 7.2 tiene la propiedad de ser:

(a) decreciente en el intervalo $(-3,3)$

(b) constante en el intervalo $(-3,3)$

(c) creciente en el intervalo $(-3,3)$

(d) decreciente en $(-3,0)$ y creciente en $(0,5)$

35.- Si una función $f(x)$ tiene derivada $f'(x)$ positiva en un intervalo, entonces ahí es:

(a) decreciente (b) constante (c) creciente (d) nula

36.- La gráfica de la figura 8 es de $f'(x)$, de acuerdo a ella, los valores de x para los cuales es cero son:

(a) -3 y -6 (b) -3 y 0 (c) 2 y 3 (d) -3 y 2

37.- La función $f'(x)$ cuya gráfica está en la figura 9, es negativa en el intervalo:

(a) $(0,2)$ (b) $(1,2)$ (c) $(-3,1)$ (d) $(0,3)$

38.- Si la gráfica de la figura 10.3 es la de $f'(x)$ entonces $f(x)$ es:

(a) creciente en $(-3,-2)$ y en $(1,3)$

(b) decreciente en $(-3,-2)$ y $(1,3)$, pero creciente en $(-2,2)$

(c) decreciente en $(-3,3)$

(d) Ninguna de las anteriores

39.- La figura 11 es la gráfica de $f'(x)$, de ahi que $f(x)$ tenga un mínimo en:

(a) $x = 0$ (b) $x = 3$ (c) $x = 1$ (d) $x = -1$

40.- La función de la figura 12 tiene un mínimo en $x = 2$ por lo que su derivada es:

(a) Positiva en (1,2) y negativa en (2,3)

(b) Negativa en (1,2) y positiva en (2,3)

(c) Positiva en (1,3)

(d) Negativa en (1,3)

ANEXO 6

EXAMEN FINAL

(estudio principal)

INSTRUCCIONES: Lee cuidadosamente cada cuestión y subraya la opción que creas que sea la respuesta correcta.

1.- De la figura 1 concluimos que la razón de cambio de la función es:

(a) $\dfrac{f(-3) - f(-4)}{-3 - (-4)}$ (b) $\dfrac{f(-3)}{f(-4)}$ (c) $\dfrac{-3 - (-4)}{f(-3) - f(-4)}$ (d) Ninguna de las anteriores

2.- La pendiente de la recta secante que pasa por los puntos $P(-4,f(-4))$ y $Q(-3,f(-3))$ de la figura 1 es:

(a) $\dfrac{f(-3)}{f(-4)}$ (b) $\dfrac{f(-3) - f(-4)}{-3 - (-4)}$

(c) $\dfrac{-3 - (-4)}{f(-3) - f(-4)}$ (d) Ninguna de las anteriores

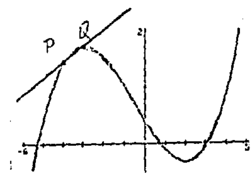


fig. 1

3.- La razón de cambio de una función se obtiene comparando:

(a) Los cambios de los valores de la variable.

(b) Los cambios de los valores de la función.

(c) El cambio de valor de la función con el cambio de valor de la variable.

(d) Ninguna de las anteriores.

4.- La pendiente de la secante trazada por dos puntos de la gráfica de una función mide:

(a) La diferencia de valores de la función.

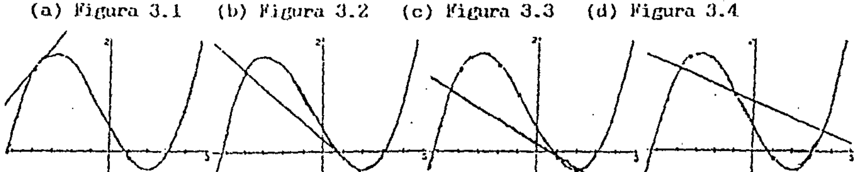
(b) La razón de cambio de la función.

(c) La inclinación de la curva.

(d) Ninguna de las anteriores.

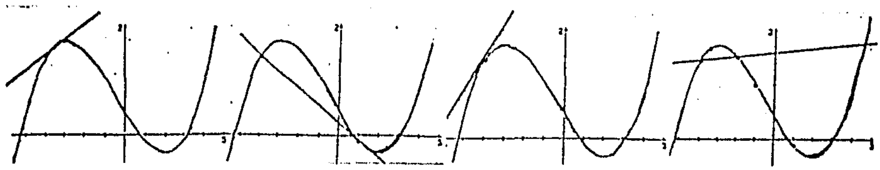
5.- ¿Qué gráfica representa mejor la posición de una tangente en el punto $P(-4,f(-4))$?

(a) Figura 3.1 (b) Figura 3.2 (c) Figura 3.3 (d) Figura 3.4



6.- Elige de las siguientes figuras la gráfica que corresponda a la secante trazada por los puntos $P(-4,f(-4))$ y $Q(-4+1,f(-4+1))$.

(a) figura 2.1 (b) figura 2.2 (c) figura 2.3 (d) figura 2.4



7.- De la cuestión anterior se concluye que la razón de cambio de la función es:

(a) 0.22 (b) 4.8 (c) 5 (d) Ninguna de las anteriores

8.- La pendiente de la recta secante en la figura 4 es:

(a) $\dfrac{-3.5-(-4)}{16.8-14.6}$ (b) $\dfrac{16.8}{-3.5}$

(c) $\dfrac{16.8-14.6}{-3.5-(-4)}$ (d) Ninguna de las anteriores

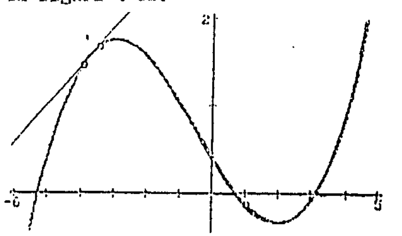
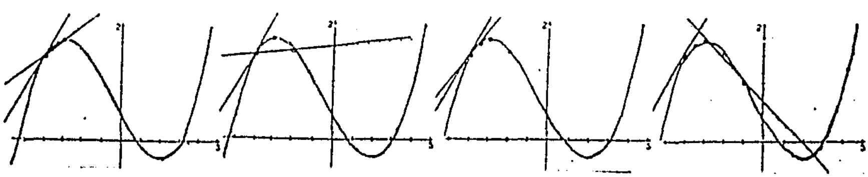


fig. 4

9.- Si queremos calcular la pendiente de la recta tangente en el punto $P(-4,f(-4))$, la secante que mejor aproxima su valor es la que aparece en la figura:

(a) Figura 6.1 (b) Figura 6.2 (c) Figura 6.3 (d) Figura 6.4



10.- La tangente a la curva $f(x) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} - 6x + 4$

punto $P(-4,f(-4))$ de la figura 5 es la recta:

(a) l_1 (b) l_2

(c) l_3 (d) Ninguna de las anteriores

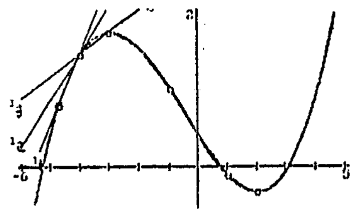


fig. 5

11.- La expresión que permite calcular la pendiente de la recta tangente en el punto $P(-4,f(-4))$ es:

(a) $\dfrac{f(x) - f(-4)}{x - (-4)}$ (b) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(-4 + h) - f(-4)}{h}$ (c) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(-4 + h)}{h}$

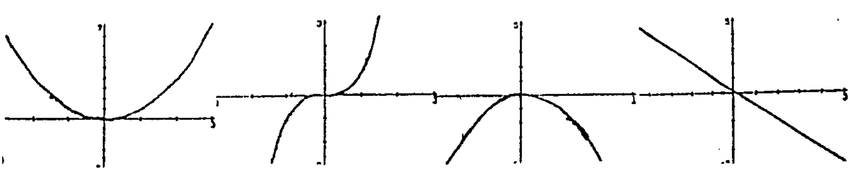
(d) Ninguna de las anteriores

12.- De acuerdo a la figura 5, el valor de la pendiente de la recta tangente en el punto $P(-4,f(-4))$ es un número comprendido entre:

(a) -2.9 y -9.8 (b) 9.8 y 2.9 (c) 0.3 y 0.1 (d) Ninguna de las anteriores

13.- ¿Cuál o cuáles de las figuras corresponden a gráficas de funciones crecientes en el intervalo (0,3)?

(a) figura 7.1 (b) figura 7.2 (c) figura 7.3 (d) figura 7.4



14.- La razón de cambio instantáneo de la función $f(x)$ en $x = 2$ es:

(a) $\dfrac{f(2) - f(h)}{h}$ (b) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(2+h) - f(2)}{h}$ (c) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

(d) Ninguna de las anteriores

15.- Si la figura 8 es la gráfica de la derivada de una función entonces en $x = 2$ tiene un:

(a) Punto de inflexión (b) Máximo

(c) Mínimo (d) Pico

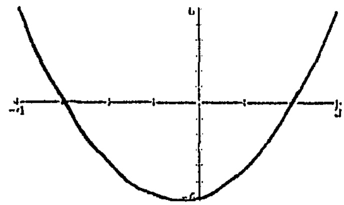


fig. 8

16.- La función $f(x) = x^3 + 2$ es creciente en el intervalo (1,6) por lo que ahí su derivada es:

(a) Negativa (b) Nula (c) Positiva (d) Ninguna de las anteriores

17.- La figura 10 es la gráfica de la función

$$f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 3x + 1$$

Elige la figura que corresponde a la gráfica de su derivada:

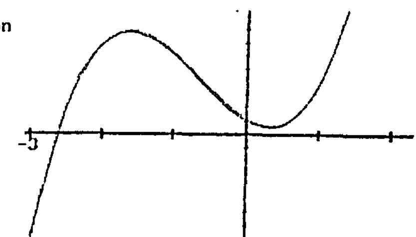
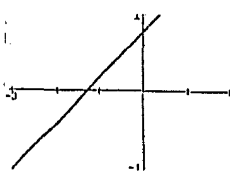
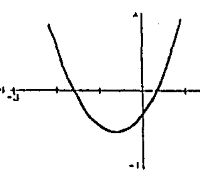
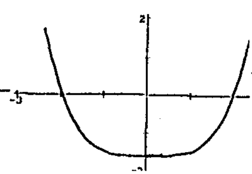
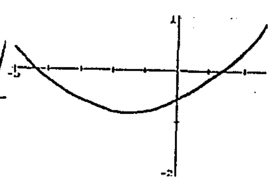


fig. 10

(a) figura 10.1 (b) figura 10.2 (c) figura 10.3 (d) figura 10.4

18.- ¿Cómo es la derivada de la función $f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 5x + 1$ en el intervalo $(-1,1)$? Ver figura 9

(a) Positiva (b) Nula

(c) Negativa (d) Ninguna de las anteriores

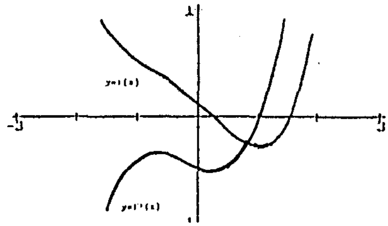


fig. 9

19.- La función de la figura 12 tiene un máximo en $x = -3$, por lo que ahí su derivada es:

(a) Negativa (b) Positiva

(c) cero (d) Ninguna de las anteriores

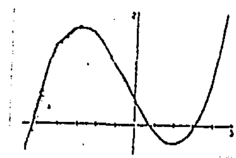


fig. 12

20.- ¿De cuál función la figura 11 es la gráfica de su derivada?

(a) $f(x) = x^2 - 2x + 1$ (b) $f(x) = x^4 - 16$

(c) $f(x) = 2x$ (d) $f(x) = 8$

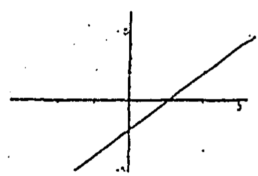


fig. 11

21.- La razón de cambio de la función de la figura 1 es positiva en los intervalos:

(a) $(-6,-3)$ y $(-3,2)$ (b) $(-3,2)$ y $(2,5)$

(c) $(-6,-3)$ y $(2,5)$ (d) $(-6,2)$ y $(2,5)$

22.- La pendiente de la recta secante de la figura 1 que pasa por los puntos P(-4,14.6) y Q(-3,17.5) es:

(a) Inexistente (b) negativa (c) cero (d) positiva

23.- La comparación del cambio de valor de la función con el de la variable es:

(a) La inclinación de la gráfica. (b) El cambio de la variable.

(c) La razón de cambio de la función. (d) Ninguna de las anteriores.

24.- La razón de cambio de una función se mide con:

(a) La diferencia de valores de la función.

(b) La pendiente de la recta secante trazada en dos puntos de su gráfica.

(c) La diferencia de valores de la variable.

(d) Ninguna de las anteriores.

25.- ¿Qué gráfica de las siguientes figuras representa a la secante que está más próxima a la posición de la tangente en el punto P(1,f(1))?

(a) figura 3.1 (b) figura 3.2 (c) figura 3.3 (d) figura 3.4

26.- Elige de las siguientes figuras la que corresponda a la gráfica de la secante trazada en los puntos P(-4,f(-4)) y Q(-4+2,f(-4+2)).

(a) figura 2.1 (b) figura 2.2 (c) figura 2.3 (d) figura 2.4

27.- La razón de cambio de la función de la figura 4 en el intervalo (-4,-3) es:

(a) positiva (b) cero (c) negativa (d) no existe

28.- La pendiente de la recta secante en la figura 4 es:

(a) cero (b) negativa (c) positiva (d) no existe

29.- La pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función de la figura 5 es:

(a) mayor que la pendiente de l_3 (b) menor que la pendiente de l_3

(c) igual a la pendiente de l_1 (d) mayor que la pendiente de l_1

30.- La recta l_2 de la figura 5 es:

(a) secante en $(-5,f(-5))$ y $(-4,f(-4))$ (b) tangente en $(-3,f(-3))$

(c) tangente en $(-4,f(-4))$ (d) secante en $(-4,f(-4))$ y $(-3,f(-3))$

31.- El $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(-3+h) - f(-3)}{h}$ nos da la pendiente de la recta:

(a) secante en $(-3,f(-3))$ y $(3+h,f(-3+h))$ (b) tangente en $(-3,f(-3))$

(c) secante en $(-3,f(-3))$ y $(-4,f(-4))$ (d) tangente en $(=4,f(-4))$

32.- La pendiente de l_1 es 9.8 y la de l_3 es 2.9 por lo que la pendiente de l_2 es:

(a) mayor que 9.8 (b) menor que 2.9

(c) mayor que 2.9 y menor que 9.8 (d) mayor que 9.8 ó menor que 2.9

33.- La función cuya gráfica es la figura 7.2 tiene la propiedad de ser:

(a) decreciente en el intervalo (-3,3)

(b) constante en el intervalo (-3,3)

(c) creciente en el intervalo (-3,3)

(d) decreciente en (-3,0) y creciente en (0,5)

34.- El $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(-3+h) - f(-3)}{h}$ es:

(a) La razón de cambio de la función de $(-3,f(-3))$ a $(-3+h,f(-3+h))$

(b) La diferencia entre $f(-3+h)$ y $f(-3)$

(c) La razón de cambio instantáneo de la función en $(-3,f(-3))$

(d) Ninguno de los anteriores.

35.- La gráfica de la figura 8 es de $f'(x)$, de acuerdo a ella, los valores de x para los cuales es cero son:

(a) -3 y 6 (b) 3 y 0 (c) 2 y 3 (d) -3 y 2

36.- Si una función $f(x)$ tiene derivada $f'(x)$ positiva en un intervalo, entonces ahí es:

(a) decreciente (b) constante (c) creciente (d) nula

37.- Si la gráfica de la figura 10.3 es la de $f'(x)$ entonces $f(x)$ es:

(a) creciente en $(-3,-2)$ y en $(1,3)$

(b) decreciente en $(-3,-2)$ y $(1,3)$, pero creciente en $(-2,2)$

(c) decreciente en $(-3,3)$

(d) Ninguna de las anteriores

38.- La función $f'(x)$ cuya gráfica está en la figura 9, es negativa en el intervalo:

(a) $(0,2)$ (b) $(1,2)$ (c) $(-3,1)$ (d) $(0,3)$

39.- La función de la figura 12 tiene un mínimo en $x = 2$ por lo que su derivada es:

(a) Positiva en $(1,2)$ y negativa en $(2,3)$

(b) Negativa en $(1,2)$ y positiva en $(2,3)$

(c) Positiva en $(1,3)$

(d) Negativa en $(1,3)$

40.- La figura 11 es la gráfica de $f'(x)$, de ahí que $f(x)$ tenga un mínimo en:

(a) $x = 0$ (b) $x = 3$ (c) $x = 1$ (d) $x = -1$

ANEXO 7

CLASIFICACION DE LAS ACTIVIDADES DEL ESTUDIO PRINCIPAL POR HABILIDAD Y NIVEL DE CONOCIMIENTO

NIVEL\HABILIDAD	ESPACIAL	NUMERICA	RAZONAMIENTO LOGICO	OPERAR SIMBOLOS	GENERALIZAR
OPERATIVO	1.1, 1.2.1 1.3.1 1.4 1.4.2.1 1.4.3.1 2.1, 4.1.1 6.1	1.2.2 1.3.2 1.4.2.2 1.4.3.2			
ANALISIS			1.5.1 1.5.2, 2.2 4.1, 4.2.1 4.2.2 5.5, 6.2		
APLICACION				3.1 4.1.3 5.1.1 5.1.2 5.3.1 5.3.2 6.3.1 6.3.3	
GENERALIZACION					5.3.3 5.4

ANEXO 8

CLASIFICACION DE LOS REACTIVOS DEL POSTEST POR HABILIDAD
(estudio principal)

HABILIDAD	NUMERO DE LOS REACTIVOS
ESPACIAL	1,5,6,8,9,10,12,13,15,17,18,19,20,21,25,26, 27,29,30,33,35,37,38,39,40
NUMERICA	2,7,8,12.22,28,30.32,35
RAZONAMIENTO LOGICO	5,6,9,11.12.13,15.16,17.18.19.20.21.22,23, 24,25,26.27,29.30.33,35,36,37,38.39,40
OPERAR CON SIMBOLOS	1,2,11,14,19,20,22,31,32,33,34
GENERALIZAR	3,4,15,17,18,20,23,24,28,31,34,36

ANEXO 9

PLAN DE TRABAJO DEL ESTUDIO EXPERIMENTAL

(estudio principal)

1.- Aplicación del examen diagnóstico con una duración de 60 minutos (enero 30) a los dos grupos, experimental y control.

Tiempo asignado a cada sesión de trabajo 50 minutos.

2.- Primera sesión para el conocimiento y la práctica del graficador con el GE (febrero 1o.).

3.- Discusión del concepto de derivada con ambos grupos en el salón de clases, en base a la parte introductoria de las actividades, durante dos sesiones (febrero 4 y 6).

4.- Realización de las actividades 1 y 2 , el GE con ayuda del graficador y el GC con ayuda de una calculadora, dos sesiones (febrero 8 y 15).

5.- Las sesiones del 11 y 13 de febrero se reservan para el análisis y la discusión de las cuestiones que surjan durante el desarrollo de las actividades del 8 de febrero.

6.- Realización de ejercicios de acuerdo al avance. Lectura y análisis de las activides 3 y 4, dos sesiones (febrero 18 y 20).

7.- Resolución de las actividades 3 y 4, dos sesiones (febrero 22 y marzo 1o.).

8.- Discusión y análisis de las dudas de las actividades 3 y 4, solución de ejercicios similares a los del material, dos sesiones (febrero 25 y 27).

9.- Realización de las actividades 5 y 6, dos sesiones (marzo 8 y 15).

10.- Discusión y análisis de las cuestiones que se planteen, cuatro sesiones (marzo 4,6,11 y 13).

11.- Aplicación del examen final el día 18 o 20 de marzo, de acuerdo al día que se termine con las actividades, a los dos grupos.

ANEXO 10

CUESTIONARIO DE OPINION PARA EL GRUPO EXPERIMENTAL

(estudio principal)

INSTRUCCIONES GENERALES: Subraya la respuesta que consideres más cercana a tu opinión sobre cada cuestión. Elige sólo una opción.

1.- Consideras que es mejor estudiar con la ayuda del graficador

si no

2.- Prefieres estudiar con la ayuda del:

(a) profesor

(b) libro

(c) material para la computadora

3.- Aprendes más con el auxilio del:

(a) profesor

(b) libro

(c) del graficador

4.- En qué prefieres elaborar tus gráficas?

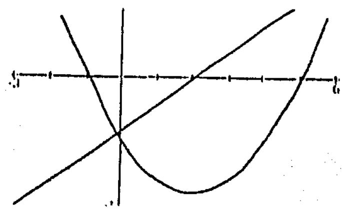
(a) en papel (b) en computadora

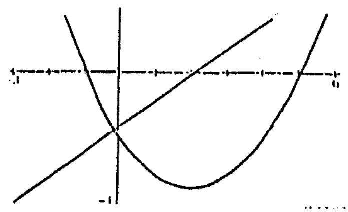
ANEXO 11

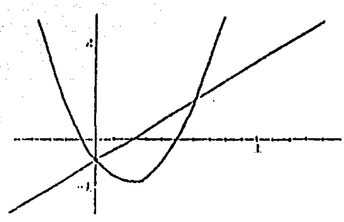
GRAFICAS DE LA ACTIVIDAD 6.1

(estudio principal)

6.1 (a)



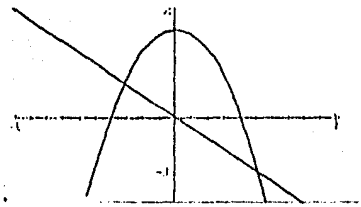


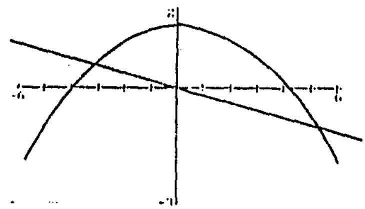


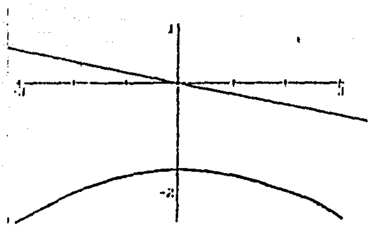
Función $f(x) = x^2 - 4x - 5$

Derivada $f'(x) = 2x - 4$

6.1 (b)



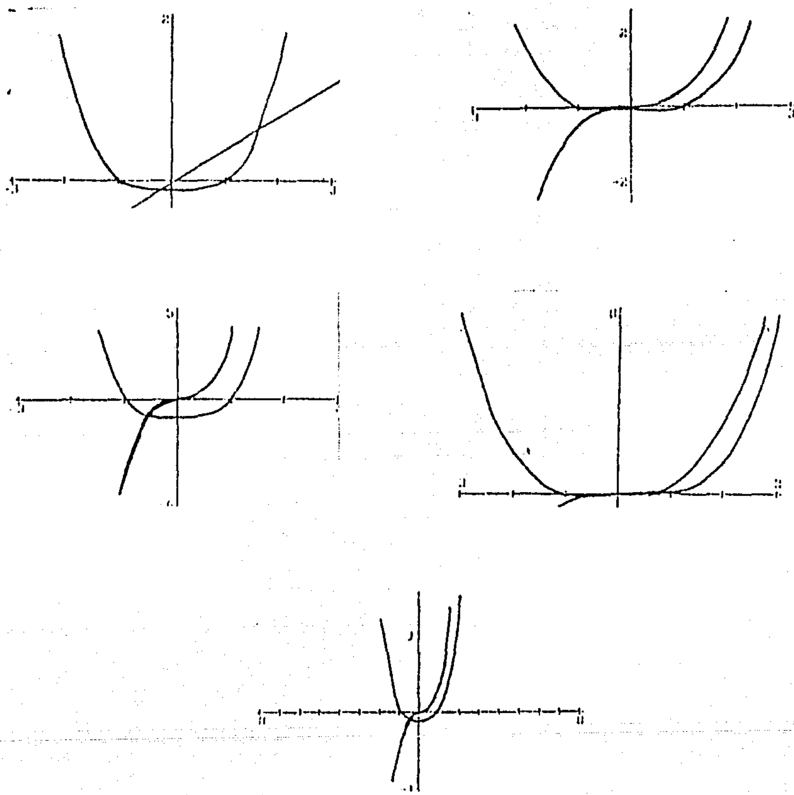




Función $f(x) = - x^2 + 16$

Derivada $f'(x) = - 2x$

6.1 (c)

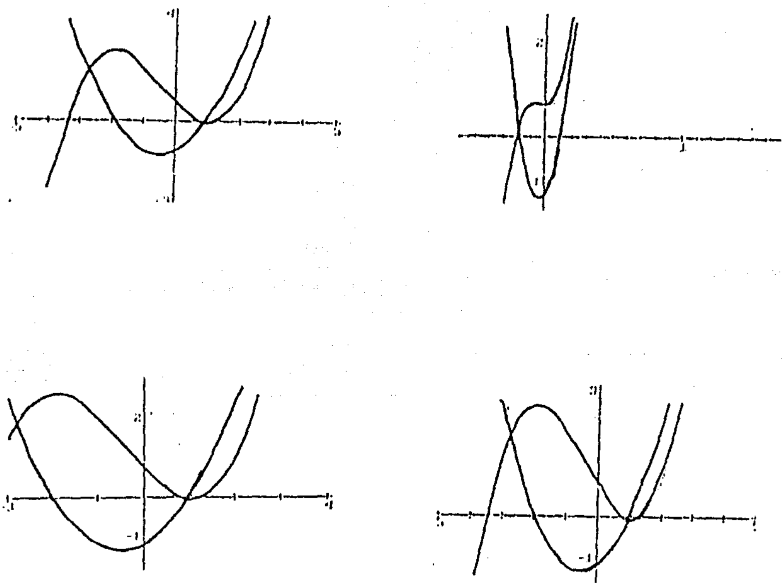


Función $f(x) = x^4 - 1$

Derivada $f'(x) = 4x^3$

La gráfica superior izquierda muestra error en la obtención de la derivada.

G.1 (d)

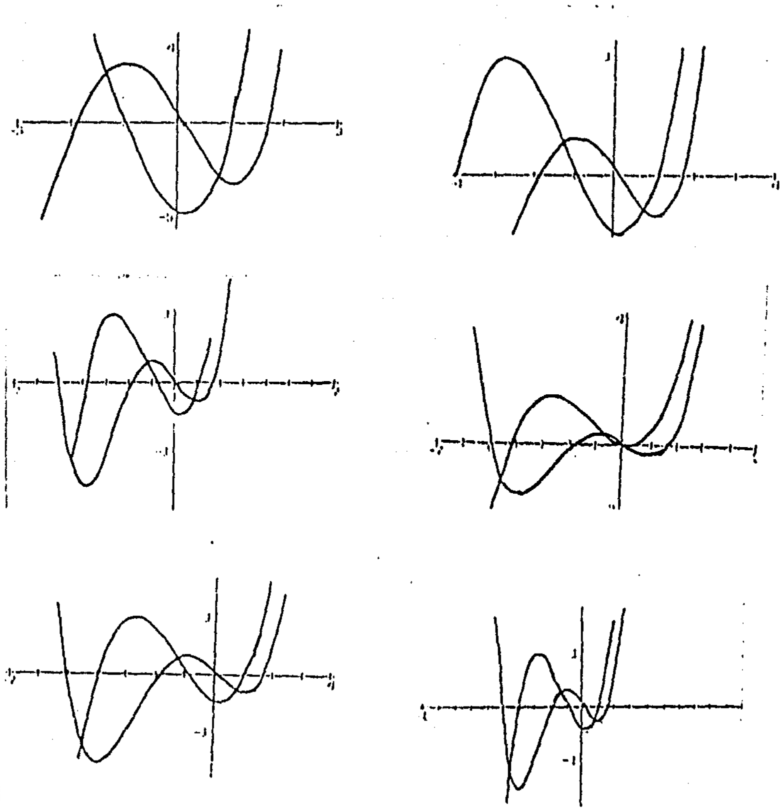


Función $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 6$

Derivada $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$

La gráfica superior derecha corresponde a la función $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 6$ (el alumno copió mal la regla de correspondencia).

6.1 (e)



Función $f(x) = 3x^4 + 16x^3 - 6x^2 - 48x + 2$

Derivada $f'(x) = 12x^3 + 48x^2 - 12x - 48$

Las dos gráficas superiores no permiten hacer conclusiones correctas acerca de los valores extremos, pueden dar lugar a interpretaciones falsas.

BIBLIOGRAFIA

Bunyard, D. 1989. Why Microworlds?. [s.l.]: Micromath, Vol. 5 # 2 Summer. p. 33 - 35

Cactusplot "a mathematics utility". 1987. The Cactusplot Company Teempe, Az.

Campbell, D. y Stanley, J. 1970. Diseños experimentales y cuasiexperimentales en la investigación social. Trad. Mauricio Kitaigorodzki. Buenos Aires: Amorrortu Editores p. 158

Chizón, C. 1990. Matemáticas y aprendizaje para el desarrollo del pensamiento. (tesina) México: UNAM. p. 92

CLIME NEWS. 1989 Special Microworlds Section. [s.l.] Vol. 2 # 2, April. p.8 - 9.

Ediger, M. 1989. Microcomputer Philosophy in Math Teaching. Phoenix, Az.The Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching. Vol. VIII # 3 Spring.

Eisenberg, T. y Dreyfus, T. 1989. Spatial Visualization in Mathematics Curriculum. Massachusetts: FOCUS Vol. II Number 1 and 2. Winter and Spring. p. 1 - 5.

Galindo, E. [s.f.] El uso de las computadoras personales en la enseñanza de las matemáticas, área de investigación indispensable en los programas actuales de formación de profesores. México: CINVESTAV, IPN. p. 365 - 70.

Haber, A. y Runyon, R. 1973. Estadística General. Ver. Ricardo Lassala. México: Fondo Educativo Interamericano. p. 371.

Herscovics, N. y Bergeron, J. 1984 A constructivist vs a formalist approach en the teaching of mathematics. [s.l.] P.M.E. 8th conference p. 190 - 96.

Kennedy, J. 1981. Graphing polynomials with computer assistance. [s.l.] Mathematics Teacher. October. p. 516 - 19.

Krutetskii, V. 1976. The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren. Chicago: University of Chicago Press.

Moses, B. 1982. Visualization: A problem-solving approach. Canadá: Math Monograph # 7. April . p. 61 - 66.

Norris, D. 1983. Some thoughts on using microcomputers to teach calculus. Phoenix, Az.: The Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching. Spring. p. 28 - 30.

Orton, A. 1987. Learning Mathematics. Issues, theory and classroom practice. London: Cassell. p. 139 - 55.

Papert, S. 1981. Desafío a la mente. Trad. Lidia Espinosa. Buenos Aires: Ed. Galápago.

Piaget, J. 1973. The Child's Conceptions of the World. London: Paladin.

Tall, D. 1985. Using computer graphics programs as generic organisers for the concept image of differentiation. Utrecht: P.M.E. 9 th. conference. p. 105 - 10.

Tall, D. y Sheath, G. 1983. Visualizing calculus concepts with computer graphics. Israel: P.M.E.7th.conference p.357 - 62.

Wenzelburger, E. 1985. Cálculo Diferencial Módulo Introductorio. México: Universidad Iberoamericana. Julio. p. 21

—————. 1990. La influencia de las computadoras en la enseñanza de las matemáticas. Guatemala: Ciencia y Educación. Agosto.

Willis, J. y Miller, M. 1984. Computadoras para todos. Trad. EDISERVICE. México: Interamericana. p. 302.

Wright, S. 1987. Micros and the aims of mathematics teaching. [s.l.] Micromath. Vol. 3 # 2 Summer. p. 8 - 11.

BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTARIA

Ausubel, D. 1976. _Psicología educativa: un punto de vista cognoscitivo_. México: Trillas.

Bishop, A. 1989. _Review of Research on Visualization in Mathematics Education_. Massachusetts: Focus on Learning Problems in Mathematics. Vol. 11 # 1 Winter.

Beth, E. and Piaget, J. 1966. _Mathematical epistemology and psychology_. New York: Gordan + Breach.

Fey, J. 1989. Educational Studies in Mathematics. A.J: Bishop (ed.) _Technology and Mathematics Education: A survey of recent developments and importand problems_. [s.l.]: [s.e.]

Hoffmann, L. 1985. _CALCULO APLICADO: para Administración, Economía, Contaduría y Ciencias Sociales_. Trad. Mariano J. Soler. México: Mc Graw Hill.

Sheryl, E. [s.f.] _Use of microcomputers at the Junior College Level in the teaching of Mathematics_. [s.l.]: [s.e.]

Shoenfeld, A. 1987. A. Shoenfeld (ed.) _Cognitive Science and Mathematics Education: an overview_. U.S.A.: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Wenzelburger, E. y Bussmann, H. 1977. _Anschauliche Differential rechnung_. Munchen: Urban + Schwarzenberg (traducción).