

Nº 21  
2EJ.



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

LA IMPORTANCIA DE LA ECONOMIA  
MATEMATICA EN LA CARRERA DE  
ACTUARIA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

A C T U A R I O

P R E S E N T A :

JOSE GERMAN ESPINOSA SANTIBAÑEZ

**FALLA EN ORIGEN**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## INDICE GENERAL

INTRODUCCION .....	2
CAPITULO 1 Algunos conceptos de economía matemática....	4
1.1 Algunos conceptos económicos .....	5
1.1.1 Los grandes economistas:	
Smith, Ricardo, Marx, Keynes.....	8
1.1.2 Teoría microeconómica ortodoxa.....	21
1.1.3 Síntesis neoclásica y teoría macroeconómica.	24
1.2 Dos pilares matemáticos de la economía.....	28
1.2.1 Álgebra lineal. ....	28
I. Espacios vectoriales.....	28
II. Transformaciones lineales.....	40
III. Polinomios. ....	53
IV. Determinantes. ....	60
V. Sistemas de ecuaciones lineales.....	68
VI. El espacio de las funciones continuas..	74
VII. El espacio de las funciones derivables.	79
1.2.3 Estadística. ....	82
CAPITULO 2 Dos modelos económicos lineales.....	122
2.1 Wassilj Leontief .....	122
2.1.1 EL modelo básico de insumo-producto.....	122
2.1.2 Formulación de Leontief de dos sistemas de	
ecuaciones lineales. ....	128
2.2 El modelo teórico de Sraffa .....	133
CAPITULO 3 Algunos modelos econométricos.....	152
3.1 ¿Qué es un modelo econométrico?.....	152
3.1.1 Ejemplo de modelo microeconométrico.....	155
3.1.2 Ejemplo de modelo macroeconométrico.....	160

## INDICE GENERAL

INTRODUCCION .....	2
CAPITULO 1 Algunos conceptos de economía matemática....	4
1.1 Algunos conceptos económicos .....	5
1.1.1 Los grandes economistas:	
Smith, Ricardo, Marx, Keynes.....	8
1.1.2 Teoría microeconómica ortodoxa.....	21
1.1.3 Síntesis neoclásica y teoría macroeconómica.	24
1.2 Dos pilares matemáticos de la economía.....	28
1.2.1 Álgebra lineal. ....	28
I. Espacios vectoriales.....	28
II. Transformaciones lineales.....	40
III. Polinomios. ....	53
IV. Determinantes. ....	60
V. Sistemas de ecuaciones lineales.....	68
VI. El espacio de las funciones continuas..	74
VII. El espacio de las funciones derivables.	79
1.2.3 Estadística. ....	82
CAPITULO 2 Dos modelos económicos lineales.....	122
2.1 Wassil: Leontief .....	122
2.1.1 EL modelo básico de insumo-producto.....	122
2.1.2 Formulación de Leontief de dos sistemas de	
ecuaciones lineales. ....	129
2.2 El modelo teórico de Sraffa .....	133
CAPITULO 3 Algunos modelos econométricos.....	152
3.1 ¿Qué es un modelo econométrico?.....	152
3.1.1 Ejemplo de modelo microeconométrico.....	155
3.1.2 Ejemplo de modelo macroeconométrico.....	160

3.2 Modelos unicuacionales. ....	165
3.3 Modelos en sistemas de ecuaciones simultaneas.....	167
3.4 Obtención y manejo de los datos estadísticos.....	173
3.5 Interpretación de los resultados matematicos.....	184
CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES .....	187
BIBLIOGRAFIA .....	191

## *INTRODUCCION*

En el último congreso de escuelas de Actuaría se planteó una reestructuración de los planes de estudio de la carrera, pero solo se habló con algunas excepciones siempre alrededor del trabajo del Actuario con la única perspectiva de aplicación en las compañías aseguradoras, lo cual me hace diferir de esta conceptualización de la carrera, siendo que la aplicación de los conocimientos adquiridos en el período académico de la carrera son de diversa índole y por ende de una gama amplia y con diferentes posibilidades de aplicación. Sin menospreciar el trabajo del Actuario en la parte técnica y administrativa del seguro, se puede pensar no solo en la formación encausada a este sector, sino hacia otros sectores, como la participación en el sector público, o en el sector industrial entre otros. Es por esta razón, que presento una tesis donde se apoye la formación en otras actividades con perspectivas de trabajo de la vida profesional del Actuario.

Esta tesis hace una modesta propuesta para fortalecer algunas áreas en la reestructuración del plan de estudios de la carrera, en particular dar una formación bien cimentada en el área económica. con esto no quiero decir que se desvíe la potencialidad sólo a esta área, sino simplemente que se trate con un poco de más cuidado y detenimiento, ya que el conocimiento de la economía es una exigencia de las políticas de crecimiento económico del país. El estudio de técnicas económicas en el período de preparación del Actuario no es difícil, a causa del instrumental básico del que se dispone en nuestra formación, y es por esto que tenemos la posibilidad de una rápida comprensión de la parte técnica de estas

áreas.

Con lo anterior estaremos en la posibilidad de diversificar nuestras actividades profesionales, lo que consecuentemente traerá una mejor valoración de nuestros conocimientos aunado a un crecimiento en la fuentes de trabajo. Pensando en esto estaremos en mejor posición para ser de mayor utilidad y con más participación en el crecimiento económico y político del país, lo cual le dará a la sociedad un conocimiento más exacto de la carrera, ya que en muchos lugares ni siquiera se llega a conocer la existencia de la ella y mucho menos las actividades que podemos realizar, lo cual repercute en la falta de fuentes de trabajo.

## **CAPITULO 1**

### **ALGUNOS CONCEPTOS DE ECONOMIA MATEMATICA.**

## 1.1 Algunos conceptos económicos

Aún cuando algunos estudiantes de economía quisieran encontrarse con una definición concreta de economía, esta disciplina tiene diversas definiciones. A continuación se citan algunas de ellas.

\* La economía es el estudio de la actividades relacionadas con la producción y el intercambio entre las mercancías.

\* La economía analiza los movimientos globales: las tendencias de los precios, la producción y el desempleo y ayuda a elaborar medidas con las que los gobiernos pueden influir en la evolución económica global.

\* La economía es la ciencia de la elección. Estudia la forma en que los individuos pueden utilizar los recursos productivos escasos o limitados (la tierra, el trabajo, el equipo y los conocimientos técnicos) para producir diversos bienes (comb trigo, carne, abrigos, conciertos, carreteras, armas) distribuirlas y consumirlas.

\* La economía analiza el modo en que los seres humanos organizan las actividades relacionadas con el consumo y la producción.

\* La economía es el estudio del dinero, las tasas de interés, el capital y la riqueza.

Como se puede observar la lista es larga y puede serlo aún más, ya que la economía es una disciplina que estudia muchos temas y evoluciona rápidamente. Por ello, siempre es muy difícil escribir en pocas líneas una definición que la diferencie de otras ciencias. Sin embargo, una de las definiciones más aceptada por un buen número de autores es la siguiente:

\* La economía es el estudio de la manera en que los individuos y la sociedad deciden emplear los recursos escasos que podrían tener usos alternativos para producir diversos bienes y distribuirlos para su consumo, presente o futuro, entre las diferentes personas y grupos de la sociedad.<sup>1</sup>

La definición anterior hace referencia al estudio de la distribución de los bienes y servicios producidos en una sociedad. A partir de ella se intuye directamente que su estudio debe principiar en dos niveles, el primero es la repercusión de esta distribución en toda la sociedad y, el segundo, sus repercusiones en la base (la familia o la empresa); esto es, el nivel macroeconómico y el nivel microeconómico, respectivamente. De estos dos niveles se tratarán los apartados 1.1.2 y 1.1.3.

De esta definición también se desprenden dos importantes conceptos de la economía, la oferta y la demanda, los cuales nos llevan directamente a otro relevante concepto económico el: *sistema de mercado*. Su primer atributo es el precio. Con el que se regula la capacidad de adquirir bienes o servicios en determinado tiempo (demanda) y el costo de estos bienes y servicios (oferta).

El trabajo es otro punto de interés de la economía ya que es considerado como una de la principales variables en el proceso de asignación de precios. En otra perspectiva Karl Marx le dedica especial interés a este factor y le denomina *fuerza de trabajo* debido a que, para él, el trabajo es la fuente esencial de la riqueza económica.

<sup>1</sup> Samuelson y Nordhaus, 1994:4.

En el enfoque neoclásico los conceptos de oferta y demanda permiten analizar como se logra un equilibrio, como es que la interacción de la oferta y la demanda provoca el establecimiento de un precio al cual tanto los oferentes como los demandantes están dispuestos y en posibilidades de vender y comprar la misma cantidad de bienes.

A continuación se analizarán con mayor detalle estos conceptos.

### 1.1.1 Los grandes economistas: Smith, Ricardo, Marx, Keynes.

La economía política tuvo su cuna en los cambios sociales, económicos e ideológicos, que marcaron la transición de la Europa Occidental hacia la era burguesa. En Francia y Alemania los restos del feudalismo estaban a punto de desaparecer. Hacia fines del siglo XVIII apareció una nueva sección de la clase burguesa: una clase de capitalistas industriales cuyos intereses estaban en contra del sistema vigente, establecido por los intereses agrarios y comerciales de la aristocracia conservadora del siglo XVIII. Fue en Francia, más que en Inglaterra, en donde el concepto unificado de una sociedad económica apareció por primera vez como el objeto de la economía política. Los fisiócratas franceses del siglo XVIII bosquejaron los perfiles que Adam Smith (1723-1790) fue llenando en su obra "La riqueza de la naciones", publicada en 1776, el año de la declaración de la independencia de los Estados Unidos. Tomando en cuenta todos los factores, no es fácil decir cuál de los dos documentos tiene mayor importancia histórica: la obra cumbre de Smith o la declaración de independencia en esta última se hizo un nuevo llamado para crear una sociedad dedicada a "la vida, la libertad, y la búsqueda de la felicidad". "La riqueza de las naciones" explicó cómo trabajaba este tipo de sociedad.<sup>2</sup>

Smith, se preocupó mucho más en escribir sobre cuestiones económicas específicas y proponer una tesis práctica, que en establecer una unidad de concepto. En esto seguía plenamente la tradición del empirismo inglés. Al mismo tiempo, su exposición era más comprensiva en el campo de las soluciones prácticas que

<sup>2</sup> Smith, 1776

considero, más completa en sus detalles, y su defensa de la nueva filosofía burguesa de libertad económica mucho más precisa. Su investigación sobre la causa de la riqueza de las naciones presentó variadas y sólidas generalizaciones empíricas respecto a la división del trabajo y a la acumulación del capital, una vigorosa crítica del mercantilismo y un profundo análisis de los efectos de las diversas formas de tributación. Estaba siempre dispuesto a ser conciliador entre las diferentes doctrinas, cuando la oportunidad parecía exigirlo. El único punto doctrinal de consideración en que difería de los fisiócratas, era en la afirmación de estos de que solo la agricultura era "productiva".

Smith se propuso resolver dos problemas: uno en lo que actualmente se conoce como el nivel micro y el otro en lo que los economistas de hoy llaman el nivel macro. El primer problema era determinar cómo se conformaba un sistema económico regido por el mercado.

Dado que los factores del mercado están impulsados por el deseo egoísta de mejorar cada uno su condición, como dice Smith, a continuación se pregunta: ¿Cómo evita una sociedad de mercado que las personas egoístas, ávidas de utilidades, conviertan en cautivos a sus conciudadanos?<sup>3</sup>

La respuesta nos introduce a considerar un mecanismo central del sistema de mercado, el mecanismo de la competencia. Cada individuo buscando solo su mejoramiento propio, sin preocuparse por los demás, se enfrenta a una multitud de personas con motivaciones similares. A causa de esto, cada participante en el mercado se ve obligado a adaptarse a los precios que ofrecen sus

<sup>3</sup>Smith, 1774:50-7.

competidores.<sup>4</sup> Esta es la primera función del mecanismo de mercado. En otras palabras, en el tipo de competencia que supone Smith, el fabricante que trata de cobrar más que otros, no logra encontrar compradores. De esta manera, el mecanismo de mercado impone una disciplina a sus participantes. Los compradores tienen que demandar sus mercancías contra las de otros vendedores y, por consiguiente, no pueden agruparse. Los vendedores tienen que luchar contra otros vendedores y, en consecuencia, no pueden imponer su voluntad a los compradores.

El sistema de mercado tiene una segunda función y ésta se conforma por las presiones del mercado que logran dirigir las actividades egoístas de las personas, como si estuvieran controladas por una *mano invisible*, hacia caminos socialmente responsables. La mano invisible transforma los motivos privados, egoístas, en un comportamiento público, orientado hacia la sociedad. El mercado se convierte en un mecanismo de distribución de recursos a los canales deseados por la sociedad. Smith también demostró que este mecanismo se autorregulaba; es decir, que el mercado se vigila él mismo. Si los salarios y utilidades de alguien se alejan de los niveles que han sido fijados para todos, la fuerza de la competencia los hará regresar. Por esto, existe una paradoja: "El mercado que es la cumbre de la libertad económica, resulta ser el más estricto de los controladores económicos". Es decir, la mano invisible es precisamente el mecanismo de formación de precios ya que el mercado, al ser autorregulador, fijará los precios de los productos.

Debido a que en la teoría de Smith el mercado es

<sup>4</sup>Smith, 1776:59.

autoregulator, se opone a la intervención del gobierno por que interferiría con la obtención del interés propio y la competencia. Es por ello que el laissez faire - laissez passer (dejar hacer, dejar pasar) se convierte en su filosofía fundamental: no porque Smith se oponga a la idea de responsabilidad social sino porque piensa que el bienestar se logra más eficazmente con la autorregulación y no por los esfuerzos del gobierno. Smith creía que el sistema de mercado, si se le dejaba por completo en libertad, crecería y que la riqueza de una nación bajo el sistema de "libertad natural" aumentaría en forma continua.<sup>5</sup>

En un segundo punto importante, Smith también se refirió a la división del trabajo como un factor para aumentar la productividad de la fuerza de trabajo y es por esto que, en el primer capítulo de *La riqueza de la naciones*, Smith nos ilustra este concepto con un ejemplo de fabricación de alfileres.

*Un trabajador no preparado para este oficio... podría escasamente fabricar un alfiler por día y ciertamente no veinte. Pero en la forma en que se practica esta actividad, no solamente este trabajo total constituye un oficio particular, sino que está dividido en varias operaciones... Una persona prepara el hilo metálico, otra lo endereza, una tercera lo corta, una cuarta lo afila, una quinta lo pule para fijar la cabeza... Por lo tanto, diez personas podrían fabricar más de 48,000 alfileres por día. Puede considerarse que cada uno produce 4800 alfileres al día.*<sup>6</sup>

Aunque Smith realizó comentarios encaminados a defender al trabajador (lo cual no era muy común en su época), no era

<sup>5</sup> Smith, 1774:56-57

<sup>6</sup> Smith, 1774:5

partidario de apoyar ninguno de los intereses mezquinos de cualquier clase individual. La división del trabajo de Smith también provoca en el mercado de trabajo la autorregulación, ya que la mano de obra especializada será un ingrediente esencial en el aumento de la producción y del beneficio, que lleva consigo el aumento de la productividad, entonces la mano de obra podrá ser mejor cotizada. Es decir, al haber un aumento de los beneficios, la mano de obra no podrá estar por debajo de cierto nivel de valor que el mismo mercado le dará. A este respecto, Smith nos dice: "Los mayores adelantos en las facultades o principios productivos del trabajo y la destreza, pericia y acierto con que éste se aplica y se dirige en la sociedad, no parecen efectos de otra causa que de la división del trabajo mismo".<sup>7</sup>

El segundo teórico de la economía política clásica inglesa es David Ricardo (1772-1823), nacido en Londres. Ricardo tiene influencia sobre todas las escuelas económicas que le sucedieron. Por ello, sus principios de economía política y tributación constituyen el fundamento de la economía política. Sin embargo, contrariamente a sus ideas monetarias que tuvieron una influencia decisiva en Inglaterra y que fueron el resultado de una lucha contra la inflación, a fin de evitar una exagerada expansión del crédito bancario, sus concepciones teóricas, alejadas muchas veces de la realidad, crearon un mundo hipotético.

Los puntos más importantes de la teoría de Ricardo son la renta de la tierra, el trabajo y la moneda. Respecto a la renta de la tierra, Ricardo señala que depende del aumento de la población, el cual obliga a recurrir al cultivo de terrenos cada vez menos

<sup>7</sup> Smith, 1776:1

fértiles. Cuando un país está despoblado y hay una abundancia de buenas tierras la renta no existe y el precio del producto está determinado por el costo de la producción; pero al aumentar la población, crece la demanda de productos alimenticios y los precios aumentan, con lo que resulta beneficioso trabajar las tierras menos fértiles. A medida que se recurre a terrenos menos fértiles surge la renta diferencial a favor de los primeros propietarios de tierras más fértiles y de costo de producción más bajo.<sup>8</sup>

Para Ricardo, el trabajo es el fundamento del valor. El valor de cambio está determinado por la mayor cantidad de trabajo aplicado necesariamente a la producción de mercancías por aquellos que continúan produciéndolas en condiciones y circunstancias más desfavorables. El valor de cambio de la mercancías producidas no está en proporción inmediata del trabajo empleado en su producción sino en todos aquellos instrumentos y máquinas que son necesarios para dar efecto al particular trabajo al cual son aplicados.<sup>9</sup> Las diferentes proporciones en que se utilizan en las distintas industrias, el capital fijo y el circulante como dice Ricardo, "Según la rapidez con que parece el capital y requiere frecuentes producciones, o es de consumo lento, se le clasifica como capital circulante o fijo. Un cervecero, cuyos edificios y maquinaria son valiosos y durables, emplea una considerable cantidad de lo que llamaremos capital fijo: por el contrario, un fabricante de calzado, cuyo capital se utiliza principalmente para pagar salarios que se gastan alimentos e indumentaria, bienes, éstos,

<sup>8</sup> Ricardo, 1821:51-03

<sup>9</sup> Ricardo, 1821:16

más perecederos que los edificios y la maquinaria, utiliza una gran porción de su capital que denominamos capital circulante. También debe observarse que el capital circulante puede circular o ser devuelto a su usuario... Dos industrias pueden entonces emplear la misma cantidad de capital; pero éste puede estar muy diversamente repartido con respecto a la porción fija y a la circulante<sup>11</sup>, introducen una notable modificación en la regla, que sería universalmente aplicable si se tratara de una producción debida exclusivamente al trabajo. Y ello por que en aquellas grandes industrias donde se han invertido grandes capitales, por un tiempo considerable y que tienen un largo periodo de producción, los productos se venden a un precio superior al valor-trabajo contenido en ello, por que hay una justa compensación por el tiempo en que se dejó de gozar de los beneficios acumulados como capital.<sup>11</sup>

Ricardo considera que no es necesario que una moneda de papel sea reembolsable en moneda metálica para asegurar su valor; es suficiente que su cantidad esté regulada conforme al valor de un metal que sirve de patrón. Aunque el papel moneda no tenga valor intrínseco, la limitación de su cantidad puede darle el mismo valor de cambio que una moneda metálica de la misma denominación.<sup>12</sup> Con respecto a la teoría de la moneda, expresa que su poder adquisitivo depende de la cantidad de moneda en circulación, por lo que su valor varía en proporción inversa a la cantidad circulante. Si la cantidad crece, los precios aumentan; es decir,

<sup>11</sup> Ricardo, 1821:24

<sup>11</sup> Ricardo, 1821:27-31

<sup>12</sup> Ricardo, 1821:263-4

están en proporción directa con el crecimiento de moneda.<sup>19</sup>

Todo economista está en cierta forma familiarizado con las ideas de Smith y Ricardo. No muchos reconocen en qué medida la economía también está en deuda con Karl Marx (1818-1883), no como fundador del movimiento político más importante del siglo XX, sino como el crítico más agudo de la economía política clásica.

Marx fue el primero en señalar que el motor de la historia de las sociedades es la lucha entre clases sociales antagonicas; también veía la tensión y el antagonismo como resultados de la lucha de clases y no consideraba permanente el establecimiento de la sociedad capitalista. Desde luego la propia lucha de clases, expresada como la oposición entre salarios y utilidades, sería la fuerza principal para cambiar el capitalismo y, con el tiempo, aniquilarlo.

Gran parte del interés por el trabajo de Marx se centra en el mercado como una fuerza poderosa en la acumulación de capital y riqueza. Sin embargo, desde otro punto de vista, enfocaba el proceso de un modo bastante diferente al de Smith, que como ya vimos insistía sobre el proceso de autorregulación, su ruta continua y libre de ataduras. El concepto de Marx es justo lo opuesto. Para él, el crecimiento es un proceso lleno de escollos, un proceso en el cual a cada momento se encuentran crisis y fallas.

Marx comienza con una visión del proceso de acumulación que se parece mucho al de un hombre de negocios. Según Marx, ¿cómo es que  $M$  (una cantidad de dinero) se convierte en  $M'$ , una cantidad mayor?

<sup>19</sup> Ricardo, 1821:263-4

La respuesta de Marx comienza diciendo que los capitalistas usan su dinero para comprar mercancías y fuerza laboral y así preparan el proceso de producción, obteniendo las materias primas o semiterminadas que necesitan y contratando la capacidad de trabajo de una fuerza laboral. Aquí, la posibilidad de crisis se encuentra en la dificultad que pueden tener los capitalistas para obtener sus materiales o su fuerza de trabajo al precio adecuado. Si esto llegara a ocurrir, M permanecería inmóvil y el proceso de acumulación nunca se iniciaría.<sup>14</sup>

Según su punto de vista, la utilidad se encuentra en la capacidad que tengan los capitalistas de pagar menos por la fuerza laboral (por las capacidades de trabajo de su fuerza laboral) que el valor real que los trabajadores añadirán a las mercancías que producen. Esta teoría de la plusvalía, como la fuente de utilidades, es muy importante en el análisis del capitalismo que hace Marx.<sup>15</sup> El proceso laboral es otro punto donde se puede interrumpir la acumulación: si existe una huelga o si la producción afronta problemas, el M que ha sido invertido en bienes y en mano de obra no se moverá hacia el objetivo, M'.<sup>16</sup>

Si todo va bien se venderán las mercancías y se venderán en M', que es mayor que M. En este caso, está completo el circuito de acumulación y los capitalistas tendrán una nueva cantidad M'. que estarán dispuestos a poner en movimiento otra vez con la esperanza de ganar M". Pero a diferencia del modelo de crecimiento ininterrumpido de Smith, podemos ver que el concepto de acumula-

<sup>14</sup> Marx, 1867:103-111

<sup>15</sup> Marx, 1867:130-1

<sup>16</sup> Marx, 1867:130-7

ción de Marx está lleno de escollos y peligros. En cualquier etapa es posible que se produzcan crisis. Desde luego, en la teoría compleja que presenta Marx en *El capital*, la tendencia inherente del sistema es generar crisis, no evitarlas.

En *El capital*, Marx ve que la inestabilidad va en aumento hasta que por fin el sistema se desploma. En su razonamiento se incluyen dos pronósticos más, muy importantes para el sistema. El primero es que el tamaño de las empresas crece en forma continua a consecuencia de las crisis respectivas que arruinan la economía. Con cada crisis quiebran las pequeñas empresas y las compañías sobrevivientes adquieren sus activos. Por lo tanto, la tendencia a los grandes negocios es una parte integral en el capitalismo.<sup>17</sup> La concentración y la centralización del capital respecto al segundo, Marx espera una intensificación de las luchas de clases como resultado de la "proletarización" de la fuerza laboral. Cada vez serían más los dueños de pequeños negocios que son eliminados en el proceso. Por consiguiente, la estructura social quedará reducida a dos clases, un pequeño grupo de magnates capitalistas y un gran grupo de proletarios.<sup>18</sup>

Si Marx fue el profeta intelectual del capitalismo como sistema autodestructivo, John Maynard Keynes (1883-1946) se puede considerar como el ingeniero del capitalismo restaurado, ya que para algunas personas las doctrinas de Keynes se pueden considerar tan peligrosas y subversivas como las de Marx. Una curiosa ironía, ya que Keynes se oponía totalmente al pensamiento marxista y estaba totalmente en favor de apoyar y mejorar el sistema

<sup>17</sup> Marx, 1867:329-32

<sup>18</sup> Marx, 1867:332-42

capitalista.

Keynes fue el padre de la "economía mixta", en la cual el gobierno juega un papel crucial. Seis años después de la Gran Depresión en los Estados Unidos, apareció su libro *Teoría general del empleo, del interés y del dinero*. El propósito primordial de la teoría de Lord Keynes es explicar las variaciones del nivel de empleo. A su juicio, los economistas clásicos no se preocuparon mucho de este problema pues sus razonamientos partían, más bien, del supuesto de un nivel fijo de ocupación de los factores productivos y se limitaban a averiguar cómo se distribuían éstos entre sus distintas aplicaciones y la forma en que se determinaban sus respectivas remuneraciones y el valor de los productos obtenidos. Hay, sin embargo, cierta coincidencia teórica entre Keynes y los clásicos. Ambas escuelas aceptan que los salarios corresponden a la productividad marginal del trabajo y que ésta es decreciente conforme aumenta la cantidad de producción. Recordemos brevemente estos dos principios.

El primero nos dice que el salario es igual al producto marginal del trabajo; esto es, al incremento del producto correspondiente al incremento del empleo, previa deducción de los otros costos. Por cierto que esta igualdad no se cumple como tal si la competencia o los mercados son imperfectos.

El segundo principio sostiene que el producto marginal del trabajo disminuye a medida que aumenta la ocupación, debido a que "la industria está sujeta normalmente a rendimientos decrecientes en periodos cortos", en los que se suponen constantes el equipo de capital y la técnica y organización productivas. Y como el salario depende del producto marginal, al disminuir éste, tiene también

que disminuir aquél; de manera que "un aumento de ocupación sólo puede ocurrir si declina simultáneamente el nivel de los salarios reales."<sup>19</sup> Decía Keynes que el nivel global de actividad económica en un sistema capitalista dependía del deseo de sus empresarios de realizar inversiones de capital. De vez en cuando este deseo era obstruido por consideraciones que hacían difícil o imposible la acumulación del capital: "*no solamente es más débil la propensión marginal a consumir en una comunidad rica, sino que, debido a que su acumulación es ya grande, las oportunidades para nuevas inversiones son menos atractivas*"<sup>2</sup> Keynes consideraba que esta etapa era transitoria y que se eliminaría por sí sola.

Las definiciones de *ingreso* y *ahorro*, en la obra de Keynes, son las siguientes: "En un periodo cualesquiera, todo empresario habrá vendido cierta cantidad de productos terminados a los consumidores o a otros por una suma que llamaremos  $A$ , y también habrá gastado otra, que designaremos  $A_1$ , para comprar artículos acabados a otros empresarios; teniendo al final un equipo productor, que incluye tanto sus existencias en artículos no terminados o capital circulante como las de los acabados, teniendo ambos un valor  $G$ ".<sup>21</sup>

Sin embargo, una parte de  $A + G - A_1$  no será atribuible a las actividades del periodo en cuestión sino al equipo productor que poseía al principiar el periodo. Por tanto, con el fin de llegar al concepto de *ingreso* del periodo considerado, debemos restar de  $A + G - A_1$  cierta suma que represente la parte de su valor que ha

<sup>19</sup> Keynes, 1933:30

<sup>2</sup> Keynes, 1933:38

<sup>21</sup> Keynes, 1933:60-3

sido producida (en cierto sentido) por el equipo heredado del periodo anterior.<sup>22</sup>

Con respecto al ahorro Keynes comenta: "Que yo sepa, todo el mundo está de acuerdo en que ahorro significa el excedente sobre los gastos de consumo. Así, pues, cualquier duda respecto del significado de ahorro tiene que surgir de dudas respecto a los conceptos de ingreso o de consumo"<sup>23</sup>

Keynes mostró que un sistema de mercado podría llegar a una posición de "equilibrio con desempleo" por la presencia de desempleados y equipo industrial ocioso. La importancia de la teoría de Keynes era que, según él, no existía la propiedad de autoconservación en el sistema de mercado que mantuviera en crecimiento al capitalismo. Si no había nada que pudiera brindar en forma automática la acumulación de capitales, una economía bajo una fuerte depresión podría permanecer estancada, a menos de que encontrara algún sustituto para las inversiones de capital de las empresas. Sólo existía una posible fuente de estímulo y ésta era el gobierno. El punto crucial del mensaje de Keynes era, pues, que el gasto del gobierno podría ser la política económica esencial para un capitalismo deprimido que tratara de recuperar su vitalidad.

<sup>22</sup> Keynes, 1933:55

<sup>23</sup> Keynes, 1933:5-9

### 1.1.2 Teoría microeconómica ortodoxa.

La microeconomía tiene como función el estudio de el comportamiento económico de las unidades decisorias individuales, como son los consumidores, los propietarios de los recursos y las sociedades comerciales en una economía de libre empresa. La microeconomía estudia bajo las teorías de la demanda y de la oferta, un sistema de libre mercado. Desde el punto de vista de la demanda, esta teoría nos determina que el número de empleados en un proceso productivo nos reducirá el producto marginal debido a los rendimientos marginales decrecientes. Si las fuerzas de la oferta y la demanda se establecen en cierta tasa salarial, los trabajadores serán contratados hasta que el valor de su producto físico marginal sea igual al valor de la tasa salarial vigente. Después se detendrá la contratación. Este análisis sugiere que todos los trabajadores esperan ser pagados en el mercado de trabajo, cada uno de ellos puede esperar recibir el valor de su producto marginal, suponiendo, por supuesto que hay flujos de información de bajo costo y que los mercados de trabajo y de productos son competitivos. Por otro lado, desde el punto de vista oferta los tipos de productores y consumidores que pueden subsistir en una sociedad de consumo algunos tipos de ellos son: los monopolios, que se definirían como la estructura de mercado en la que existe un número relativamente grande de productores que ofrecen semejantes pero diferentes bienes o servicios. Por consiguiente, la competición monopolística tiene las siguientes características: cantidades significativas de vendedores en un mercado altamente competitivo; productos diferenciados; la existencia de publicidad. Tal vez la característica más importante

del mercado monopolístico competitivo es la diferenciación del producto. En cierto sentido, se puede decir que cada fabricante de un producto tiene un monopolio absoluto sobre su propio producto, el cual es levemente diferente al de otros productos semejantes. Otra estructura existente en la sociedad de mercado es la de los oligopolios que como su nombre nos lo indica es la contraparte de los monopolios, ya que es aquí donde se encuentra que la producción de productos semejantes esta distribuida entre una serie de fabricantes. Esto es por el lado de los productores, ahora entre los consumidores encontramos el monopsonio, donde un consumidor tiene cautiva toda la producción de uno o varios productores de un artículo específico. También se ocupa de la conducta de cada precio y cada cantidad, de cómo suben los precios del maíz mientras que bajan los del algodón, y como se dijo anteriormente estudia el mecanismo de mercado<sup>24</sup>. Actualmente, la microeconomía abarca muchas de las cuestiones más controvertidas e importantes a las que se enfrenta una nación. Utilizando sus instrumentos podemos ver por qué la industria del acero y automóviles de EEUU han sido acosadas por la competencia extranjera y por que algunas personas desean restringir la importación de estos bienes<sup>25</sup>. La comprensión de la distribución de la renta sería imposible sin el conocimiento de la microeconomía. No podemos entender por qué los médicos ganan diez veces más que sus secretarias o por qué las mujeres reciben solamente el 60% del salario de los varones si no estudiamos la oferta y la demanda de los servicios de estos grupos. Tampoco podemos esperar elaborar

<sup>24</sup> Samuelson, 1980:294-5

<sup>25</sup> Samuelson, 1980:45d

unos planes eficaces y eficientes para aliviar la pobreza si no estudiamos detenidamente la base económica de las desigualdades de la renta.

En la década de 1870. un nuevo punto de vista desplazó en forma brusca el paradigma clásico que se relacionaba con los grandes temas de crecimiento nacional y trataba la suerte de las clases sociales. Tenía numerosos defensores europeos, entre los cuales destacan Walras y Jevons. Al grupo se le conocía como los *marginalistas*. pues el centro de investigación económica ya no fue el crecimiento y el conflicto de clases sino el estudio de las interacciones de los individuos.

El nuevo paradigma explicó muchas cosas que no había logrado el anterior, en especial los puntos tan delicados del sistema de precios; pero, al igual que los paradigmas clásicos y marxistas habían perdido todo interés en los precios justos de los medievales también los marginalistas presentaron poca atención a los temas del crecimiento y de la lucha de clases que tanto había preocupado a los clásicos y marxistas.

La comprensión de éstas y otras cuestiones es la recompensa del estudio de la microeconomía.

### 1.1.3 Síntesis neoclásica y teoría macroeconómica.

En la actualidad existen corrientes divergentes respecto a la macroeconomía moderna. Al igual que los últimos cincuenta años, uno de ellos se denomina clásico y hace hincapié en el papel del ajuste de los precios en los mercados competitivos. Pone de relieve la forma en que los precios y los salarios pueden variar para eliminar el exceso de demanda y oferta elevando o reduciendo el precio de un factor o de un producto. El enfoque clásico ha predominado durante una gran parte del pensamiento económico y ha resurgido en las décadas de 1970 y 1980.

Como veremos, este enfoque tuvo que enfrentarse a dos "contratiempos" durante la década de 1930. En este periodo el desempleo fue muy elevado y persistió en unos altos niveles durante más de una década. Todo el mundo vio que el mercado de trabajo no estaba vaciándose, sino que estaba produciéndose alguna falla económica.

El segundo "contratiempo" fue el desarrollo del enfoque keynesiano. La *Teoría general de Keynes*, publicada por primera vez en 1936, presentaba una forma alternativa de comprender la macroeconomía. Reconocía que los periodos de prolongado desempleo son propiedades intrínsecas de una economía capitalista. La diferencia crucial entre el modelo keynesiano y el clásico era el argumento de Keynes de que los salarios y los precios son inflexibles. Dicho de otra forma, los mercados no se vacían porque los salarios y los precios se desplazan lentamente hacia el punto en el que se igualan la oferta y la demanda.<sup>2d</sup>

<sup>2d</sup> Samuelson y Nordhaus, 1990:172

Los economistas de la década de 1930 difícilmente no pudieron darse cuenta del enorme ejército de trabajadores desempleados que solitaban trabajar y vendían lápices en las esquinas de las calles. Las teorías macroeconómicas clásicas no ofrecían ninguna vía para comprender este enorme y persistente desempleo.

El momento que llega Keynes, difícilmente podría haber sido mejor. Pero más importante es el hecho de que ofrecía por primera vez una concepción totalmente nueva de la forma en que evolucionaría la economía a lo largo del tiempo y anunciaba la era de la macroeconomía moderna. Como se dijo líneas atrás, la pieza central de las ideas de Keynes era el rechazo del postulado de los salarios y los precios flexibles.

La definición de macroeconomía moderna es la visión global del proceso de distribución de los bienes y servicios producidos por una nación. *El sistema de precios* es un concepto importante ya que resuelve tres cuestiones básicas acerca de la asignación de recursos para la producción de los bienes a distribuir en la nación: ¿Qué bienes se producirán?, ¿cómo se producirán? y ¿para quién se producirán? Las fuerzas de la oferta y la demanda que actúan a través del sistema de precios influyen en la mayoría de las decisiones que responden a estas interrogantes. Sin embargo, no sólo existe el mundo mercantil. Además de las fuerzas de mercado, existen muchas otras que afectan la asignación de recursos. Una de las más importantes, ajenas al mercado, es el gobierno, el cual realiza muchas funciones esencialmente económicas, como:

1) *establecimiento de un sistema legal*; es decir, los tribunales, servicios reguladores y vigilantes de todo tipo de

transacción entre individuos de la misma sociedad;

2) *Promoción de la competencia*, una de las funciones del gobierno es servir como protector del sistema competitivo. El gobierno intenta

3) *estabilizar la economía* al suavizar las altas y las bajas de la actividad empresarial, otra función es la de

4) *redistribuir el ingreso*. Dicha redistribución utiliza dos sistemas: el impuesto progresivo sobre bienes y los pagos de transferencia; es decir, que pague más impuestos quien más tiene o más gana. Estos pagos son efectuados a individuos que no realizaron ningún bien o servicio. Los tres pagos de transferencia monetaria más importante en un sistema capitalista suele ser la asistencia pública, el seguro social y en algunos otros países el seguro contra desempleo. Una de las principales consecuencias de que oscile la actividad empresarial es el *desempleo* resultante, particularmente de los obreros, pero también de los demás factores de producción. Dos conceptos importantes en el estudio de la macroeconomía son el *ahorro* y la *inversión*. El ahorro puede definirse como el acto de no consumir, ya que todo lo que no se consume, por definición, se ahorra. La inversión puede considerarse como una actividad que emplea recursos en tal forma que permitan mayor producción, y por ende, mayor consumo en el futuro. Como podemos ver el gobierno es responsable del buen funcionamiento de la estabilidad económica de su nación, ya que por medio de su política y sus departamentos, ellos regulan la actividad económica. Parte esencial de la evaluación del funcionamiento de la macroeconomía, es descrita por índices matemáticos, como puede ser el *PIB* (Producto Interno Bruto), el

*PNN* (Producto Nacional Neto), el *IPP* (Indice de Precios al Productor), el *IPC* (Indice de Precios al Consumidor), el *Desempleo*, el *IN* (Ingreso Nacional), el *IP* (Ingreso Personal), el *Ahorro*, la *Inversión*. Todo estos estudios se realizan con la perspectiva de ser un país más competitivo (comercialmente hablando) a nivel internacional.

El calculo infinitesimal, tal como se aplica en el analisis económico, como uso corriente hace referencia a u tipo de analisis cuyo objeto es, o bien puede ser, trazar y estudiar las trayectorias temporales especificas de las variables, o bien, determinar para un tiempo dado, si esas variables tenderán a converger hacia ciertos valores (de equilibrio). Este tipo de información es importante porque viene a cubrir una laguna muy significativa no abordada en los estudios de economía clásica.

## 1.2 Dos pilares matemáticos de la economía.

A pesar de que la teoría económica ortodoxa se apoya, desde la revolución marginal (Walras, Jevons Menger) hasta nuestros días, en cálculo infinitesimal, una importante corriente del pensamiento económico moderno esta orientada a cuestionar tanto los aspectos microeconómicos, como los aspectos macroeconómicos de la teoría ortodoxa.

Instrumentos esenciales de esta critica devastadora son el álgebra lineal y métodos estadísticos, pilares para el cuestionamiento de algunas teorías económicas no convencionales, como los que se analizan en el capítulo 2.

Este inciso aporta los elementos del álgebra lineal y de los métodos estadísticos básicos para desarrollar las teorías económicas alternativas.

### 1.2.1 Álgebra Lineal.

El álgebra lineal es fundamental en el estudio de modelos econométricos ya que estos se describen como matrices (espacios vectoriales). Y en esta disciplina de las matemáticas nosotros nos familiarizaremos con estos aspectos.

#### 1. Espacios vectoriales

Iniciaremos revisando las propiedades del campo de los números reales  $\mathbb{R}$ .

a) La cerradura en la adición.

Para todo  $x, y \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x+y \in \mathbb{R}$

b) La adición es conmutativa.

Para todo  $x, y \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x+y=y+x$

- c) La adición es asociativa.  
Para todo  $x, y, z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (x+y)+z=x+(y+z)$
- d) Elemento neutro aditivo.  
Para todo  $x \in \mathbb{R}$ , existe un elemento único "0"  $\in \mathbb{R}$  tal que  $x+0 = x$
- e) Elemento inverso aditivo.  
Para todo  $x \in \mathbb{R}$ , existe un único elemento  $x'$  ( $-x$ )  $\in \mathbb{R}$  tal que  $x+x'=0$ .
- f) La cerradura en el producto.  
Para todo  $x, y \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x*y \in \mathbb{R}$
- g) El producto es conmutativo.  
Para todo  $x, y \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x*y = y*x$
- h) EL producto es asociativo.  
Para todo  $x, y, z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x*(y*z) = (x*y)*z$
- i) Elemento neutro en el producto.  
Para todo  $x \in \mathbb{R}$ , existe un elemento unico "1"  $\in \mathbb{R}$ , tal que  $x*1 = x$
- j) Elemento inverso en el producto.  
Para todo  $x \in \mathbb{R}$ , existe un único elemento  $x'$  ( $1/x$ )  $\in \mathbb{R}$  tal que  $x*x' = 1$
- k) El producto es distributivo respecto a la adición.  
Para todo  $x, y, z \in \mathbb{R} - x*(y+z) = x*y + x*z$

*Definición:* Todo conjunto  $F$  para el cual se definan dos operaciones que satisfagan las condiciones anteriores se llama *campo*.

*Definición:* Un *espacio vectorial*  $V$  es la estructura algebraica que contiene a un conjunto de elementos de la forma  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  con  $n \in \mathbb{N}$ . Estos elementos se denominarán *vectores*. los  $x_i$  pertenecen a un campo  $F$ . El conjunto es cerrado bajo dos operaciones definidas llamadas *adición vectorial* y *producto escalar*:

- a) *Adición:* Se asocia a cada par de vectores  $\alpha, \beta$  de  $V$  un vector  $\alpha+\beta$  de  $V$ , llamado *suma* de  $\alpha$  y  $\beta$ , de tal modo que:
- i) La adición es conmutativa,  $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ :

- (i) La adición es asociativa,  $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$ ;
- (ii) Existe un único vector  $0$  de  $V$ , llamado vector nulo, tal que  $\alpha + 0 = \alpha$ , para cada  $\alpha \in V$ ;
- (iv) Para cada vector  $\alpha$  de  $V$ , existe un único vector  $-\alpha$  de  $V$ , tal que  $\alpha + (-\alpha) = \bar{0}$ ;

b) Producto escalar: Se asocia a cada escalar  $c$  de  $F$  y a cada vector  $\alpha$  de  $V$  a un vector  $c\alpha$  en  $V$ , llamado producto de  $c$  y  $\alpha$ , de tal modo que:

- (i)  $1\alpha = \alpha$ , para todo  $\alpha$  de  $V$ ;
- (ii)  $(cd)\alpha = c(d\alpha)$ , para todo  $c, d$  de  $F$  y  $\alpha$  de  $V$ ;
- (iii)  $c(\alpha + \beta) = c\alpha + c\beta$ , para todo  $c$  de  $F$  y  $\alpha, \beta$  de  $V$ ;
- (iv)  $(c+d)\alpha = c\alpha + d\alpha$ , para todo  $c, d$  de  $F$  y  $\alpha$  de  $V$ .

Ejemplo. Sea  $F$  cualquier campo y sea  $V$  el conjunto de todas las  $n$ -adas  $\alpha = (X_1, \dots, X_n)$  y  $\beta = (Y_1, \dots, Y_n)$  con  $X_i, Y_i$  de  $F$ .

La suma de  $\alpha + \beta$  se define por:

$$\alpha + \beta = (X_1 + Y_1, X_2 + Y_2, \dots, X_n + Y_n).$$

El producto de un escalar  $c$  y el vector  $\alpha$  se define por:

$$c\alpha = (cX_1, \dots, cX_n).$$

Que esta adición y producto cumplen con las propiedades a y b es un hecho fácil de demostrar utilizando las propiedades de el campo  $F$ .

A continuación demostraremos solamente algunas

ta. i La adición es conmutativa.  $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ .

Sea  $\alpha = (X_1, \dots, X_n)$ ;  $\beta = (Y_1, \dots, Y_n)$ .

$$\alpha + \beta = (X_1 + Y_1, \dots, X_n + Y_n)$$

Por definición de adición.

$$(X_1 + Y_1, \dots, X_n + Y_n) = (Y_1 + X_1, \dots, Y_n + X_n)$$

Propiedades del campo  $F$ .

$$(Y_1+X_1, \dots, Y_n+X_n) = \beta + \alpha$$

Queda demostrado.

\* b.iii  $c(\alpha + \beta) = c\alpha + c\beta$ , para todo  $c \in F$  y  $\alpha, \beta \in V$ .

Sea  $\alpha = (X_1, \dots, X_n)$ ;  $\beta = (Y_1, \dots, Y_n)$ , y  $c \in F$ .

$$c(\alpha + \beta) = c(X_1 + Y_1, \dots, X_n + Y_n)$$

Por definición de adición.

$$c(X_1+Y_1, \dots, X_n+Y_n) = (c[X_1+Y_1], \dots, c[X_n+Y_n])$$

Por def. del producto.

$$(c[X_1+Y_1], \dots, c[X_n+Y_n]) = (cX_1+cY_1, \dots, cX_n+cY_n)$$

Propiedades de campo  $F$ .

$$(cX_1+cY_1, \dots, cX_n+cY_n) = (cX_1, \dots, cX_n) + (cY_1, \dots, cY_n)$$

$$c(X_1, \dots, X_n) + c(Y_1, \dots, Y_n) = c\alpha + c\beta.$$

Queda demostrado

**Definición:** Una matriz  $m \times n$  sobre el campo  $F$  es una función  $A$  de los elementos del campo  $F$  al conjunto de los pares ordenados  $(i, j)$ ,  $1 \leq i \leq m$ ,  $1 \leq j \leq n$ . Se escribe de la forma

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}, & \dots, & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}, & \dots, & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]$$

cada elemento  $a_{ij}$  se denomina *entrada de la matriz*, y se localiza en el correspondiente renglón  $i$  y en la columna  $j$  de la matriz.

Se definen tres *Operaciones elementales de renglones*, que pueden efectuarse sobre una matriz:

i) Producto de un renglón de  $A$  por un escalar  $c$  no nulo de  $F$ .

ii) Reemplazo del  $r$ -ésimo renglón de  $A$  por el renglón dado por  $(br + cs)$ , donde  $b$  y  $c$  son elementos de  $F$  diferentes de cero y

$r \neq s$ .

(ii) Intercambio de dos renglones de A.

Ahora definiremos *Operaciones elementales entre matrices*.

La adición de matrices está dada por la regla

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{bmatrix} \alpha_{11} & . & . & . & \alpha_{1n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ \alpha_{m1} & . & . & . & \alpha_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_{11} & . & . & . & \beta_{1n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ \beta_{m1} & . & . & . & \beta_{mn} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \alpha_{11} + \beta_{11} & . & . & . & \alpha_{1n} + \beta_{1n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ \alpha_{m1} + \beta_{m1} & . & . & . & \alpha_{mn} + \beta_{mn} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

El producto de matrices esta dado por

$$A \times B = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & . & . & . & \alpha_{1n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ \alpha_{m1} & . & . & . & \alpha_{mn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \beta_{11} & . & . & . & \beta_{1n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ \beta_{m1} & . & . & . & \beta_{mn} \end{bmatrix} = C = [c_{ij}]$$

$$\text{Donde } c_{ij} = \sum_{r=1}^n \alpha_{ir} \beta_{rj}.$$

**Observaciones:**

(i) En la adición debemos tener cuidado de que las matrices a sumar sean del mismo tamaño, es decir que tengan el mismo número de renglones y columnas.

(ii) En el producto debemos cuidar que el número de columnas de la primera matriz sea igual al número de renglones de la segunda matriz. De otra manera, no podrá efectuarse el producto.

**Definición:** Una matriz A se denomina *cuadrada* si  $n = m$ .

En particular, si se satisface  $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$  para cada entrada entonces se denomina *matriz simétrica*.

La matriz cuyos elementos satisfacen  $\alpha_{ij} = 1$  con  $i=j$ ,  $\alpha_{ij} = 0$ ,

con  $i=j$ , se denomina *matriz identidad*. Esta matriz es muy útil y se denota por  $I_{n \times n}$ .

**Definición:** Sea  $A$  una matriz sobre un campo  $F$  se dice que esta matriz es *invertible* si por medio de operaciones elementales se puede hacer una matriz idéntica.

**Propiedad:** Es fácil verificar que el conjunto de las matrices de  $m \times n$  es un espacio vectorial.

**Definición:** Un vector  $\beta$  de  $V$  se dice *combinación lineal* de los vectores  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  en  $V$ , si existen escalares  $c_1, \dots, c_n$  de tal forma que

$$\beta = c_1\alpha_1 + \dots + c_n\alpha_n = \sum_{i=1}^n c_i\alpha_i.$$

**Ejemplo.** Sea el vector  $\beta = (12, 3, -4)$  y los vectores  $\alpha_1 = (1, 0, 0)$ ,  $\alpha_2 = (0, 1, 0)$ ,  $\alpha_3 = (0, 0, 1)$ , mostraremos que  $\beta$  es combinación lineal de los vectores  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ .

Sabemos por hipótesis que

$$(12, 3, -4) = c_1(1, 0, 0) + c_2(0, 1, 0) + c_3(0, 0, 1)$$

Igualando elemento a elemento tenemos que:

$$\begin{aligned} 12 &= c_1(1) + c_2(0) + c_3(0) \\ 3 &= c_1(0) + c_2(1) + c_3(0) \\ -4 &= c_1(0) + c_2(0) + c_3(1) \end{aligned}$$

De donde:

$$c_1 = 12; c_2 = 3; c_3 = -4$$

Por lo que  $\beta$  es combinación lineal de  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ .

**Definición:** Sea  $V$  un espacio vectorial sobre el campo  $F$ .

Un subespacio vectorial de  $V$  es un subconjunto  $W$  de  $V$  que, con las operaciones de adición vectorial y producto escalar sobre  $V$ , es también un espacio vectorial sobre  $F$ .

**Teorema:** Un subconjunto no vacío  $W$  de  $V$  es un subespacio de  $V$  si, y solo si, para todo par de vectores  $\alpha, \beta$  de  $W$  y todo escalar  $c$  de  $F$ , el vector  $c\alpha + \beta$  está en  $W$ .

**Demostración:** Supóngase que  $W$  sea un subconjunto no vacío de  $V$  tal que  $c\alpha + \beta$  pertenezca a  $W$  para todos los vectores  $\alpha, \beta$  de  $W$  y todos los escalares  $c$  de  $F$ . Como no es vacío, existe un vector  $\rho$  en  $W$  y, por tanto

$$-1(\rho) + \rho = 0 \text{ está en } W.$$

Ahora bien, si  $\alpha$  es cualquier vector

$$c\alpha = c\alpha + 0 \text{ está en } W.$$

En particular,

$$(-1)\alpha = -\alpha \text{ está en } W.$$

Finalmente, si  $\alpha$  y  $\beta$  están en  $W$ , entonces

$$\alpha + \beta = 1\alpha + \beta \text{ está en } W.$$

Así,  $W$  es un subespacio de  $V$ .

**Ejemplo.** En  $F^n$ , el conjunto de las  $n$ -adas  $(x_1, \dots, x_n)$  con  $x_1 = 0$  es un subespacio, pero el conjunto de las  $n$ -adas con  $x_1 = 1$  +  $x_2$  no es un subespacio ( $n \geq 2$ ).

**Prueba:**

Sea  $\alpha = (0, x_2, \dots, x_n)$ ;  $\beta = (0, y_2, \dots, y_n)$ .

$$\begin{aligned} c(0, x_2, \dots, x_n) + (0, y_2, \dots, y_n) &= (c0, cx_2, \dots, cx_n) + (0, y_2, \dots, y_n) = \\ &= (c0+0, cx_2+y_2, \dots, cx_n+y_n) = (0, z_2, \dots, z_n) \end{aligned}$$

Como  $(0, z_2, \dots, z_n)$  pertenece a el subespacio entonces el conjunto de las  $n$ -adas  $(0, x_2, \dots, x_n)$  es un subespacio sobre  $F^n$ .

Sea  $\alpha = (1+x_2, x_2, \dots, x_n)$ ;  $\beta = (1+y_2, y_2, \dots, y_n)$ .

$$\begin{aligned} c(1+x_2, x_2, \dots, x_n) + (1+y_2, y_2, \dots, y_n) &= \\ (c(1+x_2), cx_2, \dots, cx_n) + (1+y_2, y_2, \dots, y_n) &= \end{aligned}$$

$$= (c+1+X_n+1+Y_n, X_n+Y_n, \dots, X_n+Y_n) = (c+1+Z_n, Z_n, \dots, Z_n)$$

Como el elemento  $(c+1+Z_n, Z_n, \dots, Z_n)$  no es de la forma  $(1+X_n, X_n, \dots, X_n)$  entonces este conjunto de elementos de  $F^n$  no es un subespacio de  $F^n$ .

Ejemplo. El conjunto  $W$  de las matrices cuadradas simétricas de  $2 \times 2$  forman un subespacio del espacio de las matrices de  $n \times n$   $V$  sobre el campo  $F$ .

Prueba.

Sean  $A, B \in W$ , dos matrices simétricas de  $2 \times 2$  por demostrar que  $D = cA + B \in W$  (es simétrica). Como  $A, B$  son matrices simétricas cumplen con

$$\begin{aligned} \text{hipótesis } \alpha_{11} &= \alpha_{11}; & \beta_{11} &= \beta_{11} \in F \\ \alpha_{12} &= \alpha_{21}; & \beta_{12} &= \beta_{21} \in F \\ \alpha_{21} &= \alpha_{12}; & \beta_{21} &= \beta_{12} \in F \\ \alpha_{22} &= \alpha_{22}; & \beta_{22} &= \beta_{22} \in F \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} cA + B &= \begin{bmatrix} c\alpha_{11}, c\alpha_{12} \\ c\alpha_{21}, c\alpha_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_{11}, \beta_{12} \\ \beta_{21}, \beta_{22} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} c\alpha_{11} + \beta_{11}, c\alpha_{12} + \beta_{12} \\ c\alpha_{21} + \beta_{21}, c\alpha_{22} + \beta_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{11}, \delta_{12} \\ \delta_{21}, \delta_{22} \end{bmatrix} = D \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Como } c\alpha_{11} + \beta_{11} &= c\alpha_{11} + \beta_{11} = \delta_{11} && \text{por hipótesis.} \\ c\alpha_{21} + \beta_{21} &= c\alpha_{12} + \beta_{12} = \delta_{21} = \delta_{12} \\ c\alpha_{22} + \beta_{22} &= c\alpha_{22} + \beta_{22} = \delta_{22} \end{aligned}$$

Entonces la matriz  $D$  es simétrica de  $2 \times 2$ , por lo tanto el conjunto de todas las matrices simétricas de  $2 \times 2$  forman un subespacio vectorial del espacio vectorial de todas las matrices de  $n \times n$  sobre el campo  $F$ .

**Definición:** Cuando todos los vectores de un espacio  $V$  pueden obtenerse mediante un conjunto finito de vectores, se dice que tal conjunto es un conjunto generador del espacio  $V$ .

Ejemplo. Los vectores de  $\mathbb{R}^3$  pueden ser expresados como combinaciones lineales de los cuatro vectores del conjunto

$$W = \{(-2,0,0), (0,1,0), (0,0,-1)\}$$

como se muestra a continuación.

Sea  $(X,Y,Z)$  un vector cualquiera de  $\mathbb{R}^3$ . Dicho vector será una combinación lineal de los vectores de  $W$  si existen escalares  $c_1, c_2, c_3$ , tales que

$$(X,Y,Z) = c_1(-2,0,0) + c_2(0,1,0) + c_3(0,0,-1) \quad (1)$$

Para la adición y el producto por un escalar y la igualdad usuales en  $\mathbb{R}^3$ , la expresión (1) es equivalente al sistema

$$\begin{aligned} -2c_1 &= X \\ c_2 &= Y \\ 2c_2 - c_3 &= Z \end{aligned}$$

De donde:

$$c_1 = -\frac{X}{2}; \quad c_2 = Y; \quad c_3 = -Z + 2Y.$$

En consecuencia, existen escalares  $c_1, c_2, c_3$  que satisfacen la expresión (1) para cualquier valor de  $X, Y, Z$ , por lo tanto  $W$  es un conjunto generador de  $\mathbb{R}^3$ .

**Definición:** Sea  $W = \{a_1, \dots, a_n\}$  un conjunto de vectores:

(i)  $W$  es linealmente dependiente si existen escalares  $c_1, \dots, c_n$  no todos iguales a cero, tales que

$$c_1 a_1 + \dots + c_n a_n = \vec{0}$$

(ii)  $W$  es linealmente independiente si la igualdad

$$c_1 a_1 + \dots + c_n a_n = \vec{0}$$

sólo se satisface con  $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ .

Ejemplo. Sea el conjunto  $W = \{(-2,0,0), (0,1,0), (0,0,-1)\}$  y el conjunto  $W_1 = \{(-2,0,0), (0,1,0), (0,0,-1), (0,1,-1)\}$ . mostrar que  $W$  es linealmente independiente y  $W_1$  es linealmente dependiente.

(i)

$$(0,0,0) = c_1(-2,0,0) + c_2(0,1,0) + c_3(0,0,-1)$$

igualando término a término

$$\begin{aligned} -2c_1 &= 0 \\ c_2 &= 0 \\ -c_3 &= 0 \end{aligned}$$

De donde:

$$c_1 = -\frac{0}{2}; c_2 = 0; c_3 = -0.$$

Como  $c_1 = c_2 = c_3 = 0$  entonces  $W$  es linealmente independiente.

(ii)

$$(0,0,0) = c_1(-2,0,0) + c_2(0,1,0) + c_3(0,0,-1) + c_4(0,1,-1)$$

igualando término a término

$$\begin{aligned} -2c_1 &= 0 \\ c_2 + c_4 &= 0 \\ 2c_2 - c_3 - c_4 &= 0 \end{aligned}$$

De donde:

$$c_1 = 0; c_2 = -c_4; c_3 = c_4; c_4 = k.$$

Como  $k$  es cualquier elemento diferente de cero de  $\mathbb{R}$  entonces existe al menos  $c_4 \neq 0$ , por lo que  $W_1$  es linealmente dependiente.

**Definición:** Se llama *base de un espacio vectorial*  $V$  a un conjunto generador de  $V$  que además es linealmente independiente.

En los ejemplos anteriores vimos que el conjunto  $\mathcal{B} = \{(-2,0,0), (0,1,0), (0,0,-1)\}$ , genera el espacio vectorial  $\mathbb{R}^3$  y además que es un conjunto linealmente independiente, por lo anterior sabemos entonces que  $\mathcal{B}$  es una base del espacio vectorial  $\mathbb{R}^3$ .

**Definición:** Sea  $V$  un espacio vectorial sobre  $F$ . Si  $\mathcal{B} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  es una base de  $V$  se dice que  $V$  es de dimensión  $n$ , lo cual se denota con

$$\dim(V) = n$$

en particular, si  $V = \{\vec{0}\}$ ,  $\dim(V) = 0$ .

**Ejemplo.** La dimensión de  $\mathbb{R}^3$  es  $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ ;

La dimensión de  $L = \{ (x, 2x, 3x) \mid x \in \mathbb{R} \}$  es

$\dim(L) = 1$ . Puesto que el conjunto  $\{(1, 2, 3)\}$  es una base de  $L$ .

**Definición:** Si  $V$  es un espacio vectorial de dimensión finita, una base ordenada de  $V$  es una sucesión finita de vectores linealmente independientes y que genera  $V$ .

Esto es que para vector  $\beta$  en  $V$  existiera una base  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  y solo una  $n$ -ada  $(x_1, \dots, x_n)$  cuyo producto vectorial con la base cumpla con

$$\beta = \sum_{i=1}^n x_i \alpha_i$$

y además a cada  $x_i$  se le llamará la  $i$ -ésima coordenada de  $\beta$  respecto a la base ordenada.

**Definición:** A el conjunto de vectores  $(e_1, \dots, e_n)$  de el espacio  $V = F^n$ , se le llama base canónica si para cada  $e_i$  la entrada  $i$ -ésima de el vector es igual a 1 y cero en todas las demás entradas.

Ejemplo. Sea  $(e_1, e_2, e_3)$  la base canónica de  $\mathbb{R}^3$  entonces

$$e_1 = (1, 0, 0)$$

$$e_2 = (0, 1, 0)$$

$$e_3 = (0, 0, 1)$$

## II. Transformaciones Lineales.

**Definición:** Sean  $V$  y  $W$  dos espacios vectoriales sobre el campo  $F$ . Una *Transformación Lineal* de  $V$  en  $W$  es una función  $T$  de  $V$  en  $W$  tal que

$$T(c\alpha + \beta) = cT(\alpha) + T(\beta)$$

para todos los vectores  $\alpha, \beta$  de  $V$  y todos los escalares  $c$  del campo  $F$ .

**Definición:** La transformación lineal  $T$  sobre el campo  $F$ , tal que  $T\alpha = \alpha$ , se denomina la transformación lineal *identica* ( $I$ ).

**Ejemplo.** Si  $V$  es cualquier espacio vectorial, la transformación *identidad*  $I$ , definida por  $I\alpha = \alpha$ , es una transformación lineal de  $V$  en  $V$ . La transformación *cero*  $O$ , definida por  $O\alpha = 0$ , es una transformación lineal de  $V$  en  $V$ .

**Ejemplo.** Sea  $F$  un campo y sea  $V$  el espacio vectorial de las funciones polinomios  $f$  de  $\hat{F}$  en  $F$ , dado por

$$f(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_kx^k.$$

Sea

$$(Df)(x) = c_1 + 2c_2x + \dots + k c_k x^{k-1}.$$

Donde  $D$  es la derivada de la función polinomio.

**Demostración.** Mostraremos que  $D$  es una transformación lineal de  $V$  en  $V$ .

Sean los polinomios

$$f(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_kx^k.$$

$$g(x) = d_0 + d_1x + \dots + d_kx^k.$$

Con  $b_i, d_i$  en el campo  $F$ .

por demostrar

$$T(cf + g) = c(Tf) + Tg$$

La demostración se hará observando el resultado de cada una de las partes de la igualdad.

$$\begin{aligned} (i). - T(cf + g) &= \\ T [c(b_0 + b_1X + \dots + b_kX^k) + (d_0 + d_1X + \dots + d_kX^k)] &= \\ T (cb_0 + cb_1X + \dots + cb_kX^k + d_0 + d_1X + \dots + d_kX^k) &= \\ T [(cb_0 + d_0) + (cb_1X + d_1X) + \dots + (cb_kX^k + d_kX^k)] &= \end{aligned}$$

Como  $c$ ,  $b_i$ ,  $d_i$  pertenecen a un campo, ocurre que las adiciones entre ellos pertenece el campo, por lo que la expresión anterior se reduce a

$$\begin{aligned} T [(a_0) + (a_1X) + \dots + (a_kX^k)] &= \\ \text{Donde } a_i &= cb_i + d_i \\ T [(a_0) + (a_1X) + \dots + (a_kX^k)] &= a_1 + 2a_2X + \dots + ka_{k-1}X^{k-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (ii). - c(Tf) + Tg &= \\ c T(b_0 + b_1X + \dots + b_kX^k) + T(d_0 + d_1X + \dots + d_kX^k) &= \\ (cb_1 + 2cb_2X + \dots + cb_kX^{k-1}) + d_1 + 2d_2X + \dots + kd_{k-1}X^{k-1} &= \\ (cb_1 + d_1) + 2(cb_2 + d_2)X + \dots + k(cb_{k-1} + d_{k-1})X^{k-1} &= \end{aligned}$$

Como  $c$ ,  $b_i$ ,  $d_i$  pertenecen a un campo, ocurre que las adiciones entre ellos pertenece el campo, por esto la expresión anterior se reduce a

$$a_1 + 2a_2X + \dots + ka_{k-1}X^{k-1}$$

Donde  $a_i = cb_i + d_i$

Ahora como

$$\begin{aligned} (i). - T(cf + g) &= a_1 + 2a_2X + \dots + ka_{k-1}X^{k-1} \\ \text{y también} & \\ (ii). - c(Tf) + Tg &= a_1 + 2a_2X + \dots + ka_{k-1}X^{k-1} \end{aligned}$$

la igualdad se cumple, por lo que la función derivada de polinomios es una transformación lineal.

**Teorema:** Sea  $V$  un espacio vectorial de dimensión finita sobre el campo  $F$ , sea  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  una base ordenada de  $V$ . Sean  $W$  un espacio vectorial sobre el mismo campo  $F$  y  $\beta_1, \dots, \beta_n$  vectores cualesquiera de  $W$ . Entonces existe una única transformación lineal de  $T$  de  $V$  en  $W$  tal que

$$T\alpha_i = \beta_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

**Demostración:** Para demostrar que existe una transformación lineal  $T$  tal que  $T\alpha_i = \beta_i$ , se sigue

Dado  $\alpha$  de  $V$ , existe una única  $n$ -ada  $(a_1, \dots, a_n)$  tal que

$$\alpha = a_1\alpha_1 + \dots + a_n\alpha_n.$$

Para este vector  $\alpha$  se define

$$T\alpha = a_1\beta_1 + \dots + a_n\beta_n.$$

Entonces,  $T$  es una correspondencia bien definida que asocia a cada vector  $\alpha$  de  $V$  un vector  $T\alpha$  de  $W$ . De la definición queda claro que  $T\alpha_i = \beta_i$  para cada  $i$ .

Para ver que  $T$  es lineal, sea

$$\beta = d_1\alpha_1 + \dots + d_n\alpha_n$$

De  $V$  y sea  $c$  cualquier escalar de  $F$ . Ahora

$$c\alpha + \beta = (ca_1 + d_1)\alpha_1 + \dots + (ca_n + d_n)\alpha_n$$

De donde, por definición

$$T(c\alpha + \beta) = (ca_1 + d_1)\beta_1 + \dots + (ca_n + d_n)\beta_n$$

Por otra parte,

$$T(c\alpha) + T\beta = c \sum_{i=1}^n a_i \beta_i + \sum_{i=1}^n d_i \beta_i = \sum_{i=1}^n (ca_i + d_i) \beta_i.$$

y así

$$T(c\alpha + \beta) = c(T\alpha) + T\beta.$$

Si  $U$  es una transformación lineal de  $V$  en  $W$  con  $U\alpha_i = \beta_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , entonces para el vector

$$\alpha = \sum_{i=1}^n b_i \alpha_i$$

Se tiene

$$U\alpha = U \sum_{i=1}^n b_i \alpha_i = \sum_{i=1}^n b_i (U\alpha_i) = \sum_{i=1}^n b_i \beta_i.$$

Con lo que  $U$  es exactamente la misma correspondencia  $T$  que se definió antes, lo que demuestra que la transformación lineal  $T$  con  $T\alpha_i = \beta_i$ , es única.

Ejemplo. Los vectores  $\alpha_1 = (1, 2)$ ,  $\alpha_2 = (3, 4)$  son linealmente independientes y, por tanto, forman una base de  $\mathbb{R}^2$ . De acuerdo con el teorema anterior, existe una única transformación lineal de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^3$  tal que

$$\begin{aligned} T(\alpha_1) &= (3, 2, 1) \\ T(\alpha_2) &= (6, 5, 4). \end{aligned}$$

De ser así, se debe poder encontrar  $T(e_1)$ . Encontrados los escalares  $c_1, c_2$  tales que  $e_1 = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2$ , se sabe entonces que  $T e_1 = c_1 T\alpha_1 + c_2 T\alpha_2$ . Si  $(1, 0) = c_1(1, 2) + c_2(3, 4)$ , entonces  $c_1 = -2$  y  $c_2 = 1$ . Con lo que

$$T(1, 0) = -2(3, 2, 1) + (6, 5, 4) = (0, 1, 2).$$

**Definición:** Sean  $V$  y  $W$  dos espacios vectoriales sobre el campo  $F$  y sea  $T$  una transformación lineal de  $V$  en  $W$ . El espacio nulo de  $T$  es el conjunto de todos los vectores  $\alpha$  de  $V$  tales que  $T\alpha = 0$ .

Si  $V$  es de dimensión finita, el rango de  $T$  es la dimensión de la imagen de  $T$  y la nulidad de  $T$  es la dimensión del espacio nulo de  $T$ .

**Teorema:** Sean  $V$  y  $W$  dos espacios vectoriales sobre el campo  $F$  y sea  $T$  una transformación lineal de  $V$  en  $W$ . supongase que  $V$  es de dimensión finita. Entonces

$$\text{rango}(T) + \text{nulidad}(T) = \dim(V).$$

**Demostración:** Sea  $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$  una base de  $N$ , el espacio nulo de  $T$ . Existen vectores  $\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n$  en  $V$  tales que  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  es una base de  $V$ . Podemos demostrar ahora que  $(T\alpha_{k+1}, \dots, T\alpha_n)$  es una base para la imagen de  $T$ . y como  $T\alpha_i = 0$  para  $i < k$ , se ve que  $T\alpha_{k+1}, \dots, T\alpha_n$  genera la imagen. Para ver que estos vectores son linealmente independientes, supóngase que se tienen escalares  $c_i$  tales que

$$\sum_{i=k+1}^n c_i (T\alpha_i) = 0$$

Esto dice que

$$T \sum_{i=k+1}^n c_i \alpha_i = 0$$

Y en consecuencia, el vector

$$\sum_{i=k+1}^n c_i \alpha_i = \alpha$$

pertenece al espacio nulo de  $T$ . Como  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  forman una base de  $N$ , deben existir escalares  $b_1, \dots, b_k$  tales que

$$\sum_{i=1}^k b_i \alpha_i = \alpha$$

Con lo que

$$\sum_{i=1}^k b_i a_i + \sum_{j=k+1}^n c_j a_j = 0$$

y como  $a_1, \dots, a_n$  son linealmente independientes, se debe tener  $b_1 = \dots = b_k = c_{k+1} = \dots = c_n = 0$ . Si el rango de  $T$  es  $r$ , el hecho de que  $T a_{k+1}, \dots, T a_n$  formen una base de la imagen de  $T$  nos dice que  $r = n - k$ . Como  $k$  es la nulidad de  $T$  y  $n$  es la dimensión de  $V$ , esta demostrado.

**Teorema:** Sean  $V$  y  $W$  dos espacios vectoriales sobre el campo  $F$  y sean  $T$  y  $U$  transformaciones lineales de  $V$  en  $W$ . La función  $(T + U)$  definida por

$$(T + U)(\alpha) = T\alpha + U\alpha$$

es una transformación lineal de  $V$  en  $W$ . Si  $c$  es cualquier elemento de  $F$ , la función  $(cT)$  definida por

$$(cT)\alpha = c(T\alpha)$$

es una transformación lineal de  $V$  en  $W$ . El conjunto de todas las transformaciones lineales de  $V$  en  $W$ , junto con la adición y el producto escalar aquí definidas, es un espacio vectorial sobre el campo  $F$ .

**Demostración:** Supóngase que  $T$  y  $U$  son transformaciones lineales de  $V$  en  $W$ , que se define  $(T + U)$  como se indicó. Entonces

$$\begin{aligned} (T + U)(c\alpha + \beta) &= T(c\alpha + \beta) + U(c\alpha + \beta) \\ &= c(T\alpha) + T\beta + c(U\alpha) + U\beta \\ &= c(T\alpha + U\alpha) + (T\beta + U\beta) \\ &= c(T + U)\alpha + (T + U)\beta \end{aligned}$$

Que dice que  $(T + U)$  es una transformación lineal. En forma análoga,

$$\begin{aligned}
 (cT)(\alpha + \beta) &= c[T(\alpha + \beta)] \\
 &= c[d(T\alpha) + T\beta] \\
 &= cd(T\alpha) + c(T\beta) \\
 &= d[c(T\alpha)] + c(T\beta) \\
 &= d[(cT)\alpha] + (cT)\beta
 \end{aligned}$$

Que dice que  $(cT)$  es una transformación lineal.

Para demostrar que es un espacio vectorial se tiene que comprobar que cumple las propiedades antes mencionadas de espacio vectorial para la adición vectorial y el producto escalar.

**Teorema:** Sean  $V$ ,  $W$  y  $Z$  espacios vectoriales sobre el campo  $F$ . Sea  $T$  una transformación lineal de  $V$  en  $W$  y  $U$  una transformación lineal de  $W$  en  $Z$ . Entonces la función compuesta  $UT$  definida por  $UT(\alpha) = U(T(\alpha))$  es una transformación lineal de  $V$  en  $Z$ .

**Demostración:**

$$\begin{aligned}
 (UT)(\alpha + \beta) &= U[T(\alpha + \beta)] \\
 &= U[c(T\alpha) + T(\beta)] \\
 &= c[U(T\alpha)] + U(T\beta) \\
 &= c[U(T\alpha)] + U(T\beta) \\
 &= c[(UT)\alpha] + (UT)\beta.
 \end{aligned}$$

**Definición:** Si  $V$  es un espacio vectorial sobre el campo  $F$ , un *operador lineal* sobre  $V$  es una transformación lineal de  $V$  en  $V$ ,  $L(V, V)$ .

En el caso del teorema anterior, cuando  $V = W = Z$ , en que  $U$  y  $T$  son operadores lineales en el espacio  $V$ , se ve que la composición  $UT$  es también un operador lineal sobre  $V$ . Así, el espacio  $L(V, V)$  tiene un «producto» definido por la composición. En este caso el operador  $TU$  también está definido, y debe observarse que en general  $UT \neq TU$ , es decir,  $UT - TU \neq 0$ . Para la composición  $T$  con  $T$ , se usará la notación  $T^2$ , y en general  $T^n = T \dots T$ .

veces). Se define  $T^0 = I$  si  $T \neq 0$ .

**Definición:** Una función  $T$  de  $V$  en  $W$  se dice *invertible* si existe una función  $U$  de  $W$  en  $V$  tal que  $UT$  es la función identidad de  $V$  y  $TU$  es la función identidad de  $W$ . Si  $T$  es invertible, la función  $U$  es única y se representa por  $T^{-1}$ . Mas aún,  $T$  es invertible si y solo si,

- i)  $T$  es inyectiva., esto es, si  $T\alpha = T\beta$  implica  $\alpha = \beta$
- ii)  $T$  es sobreyectiva, esto es, la imagen de  $T$  coincide con  $W$ .

**Teorema:** Sean  $V$  y  $W$  dos espacios vectoriales sobre el campo  $F$  y sea  $T$  una transformación lineal de  $V$  en  $W$ . Si  $T$  es invertible, entonces la función recíproca  $T^{-1}$  es una transformación lineal de  $W$  sobre  $V$ .

**Demostración:**

Sean  $\beta_1$  y  $\beta_2$  dos vectores de  $W$  y sea  $c$  un escalar. Queremos demostrar que

$$T^{-1}(c\beta_1 + \beta_2) = cT^{-1}\beta_1 + T^{-1}\beta_2.$$

Sea  $\alpha_i = T^{-1}\beta_i$ ,  $i = 1, 2$ ; esto es, sea  $\alpha_i$  el único vector de  $V$ , tal que  $T\alpha_i = \beta_i$ .

Como  $T$  es lineal,

$$T(c\alpha_1 + \alpha_2) = cT\alpha_1 + T\alpha_2 = c\beta_1 + \beta_2.$$

Así,  $c\alpha_1 + \alpha_2$  es el único vector de  $V$  que es aplicado por  $T$  en  $c\beta_1 + \beta_2$ . y así

$$T^{-1}(c\beta_1 + \beta_2) = c\alpha_1 + \alpha_2 = c(T^{-1}\beta_1) + (T^{-1}\beta_2)$$

y  $T^{-1}$  es lineal.

**Definición:** Se dice que la transformación lineal  $T$  es no singular si  $T\alpha = 0$  implica  $\alpha = 0$ ; es decir, si el espacio nulo de  $T$  es  $\{0\}$ . Evidentemente,  $T$  es inyectiva si y, solo si,  $T$  es no singular.

**Teorema:** Sea  $T$  una transformación lineal de  $V$  en  $W$ . Entonces  $T$  es no singular si y, solo si,  $T$  aplica cada subconjunto linealmente independiente de  $V$  sobre un subconjunto linealmente independiente de  $W$ .

**Demostración:** Supóngase primero que  $T$  es no singular. Sea  $\mathcal{B}$  un subconjunto linealmente independiente de  $V$ . Si  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  son vectores pertenecientes a  $\mathcal{B}$ , entonces los vectores  $T\alpha_1, \dots, T\alpha_k$  son linealmente independientes; si

$$c_1(T\alpha_1) + \dots + c_k(T\alpha_k) = 0$$

Entonces

$$T(c_1\alpha_1 + \dots + c_k\alpha_k) = 0$$

y como  $T$  es no singular

$$c_1\alpha_1 + \dots + c_k\alpha_k = 0$$

de lo que se sigue con cada  $c_i = 0$ , pues  $\mathcal{B}$  es un conjunto independiente. Este razonamiento muestra que la imagen de  $\mathcal{B}$  por  $T$  es independiente.

Supóngase que  $T$  aplica subconjuntos independientes sobre subconjuntos independientes. Sea  $\alpha$  un vector no nulo de  $V$ . Entonces el conjunto  $\mathcal{B}$  que consta del solo vector  $\alpha$  es independiente. La imagen de  $\mathcal{B}$  es el conjunto que consta del solo vector  $T\alpha$ . Por tanto,  $T\alpha \neq 0$ , pues el conjunto que consta del solo vector nulo es dependiente; lo que muestra que el espacio nulo de

$T$  es el espacio cero, es decir,  $T$  es no singular.

Ejemplo. Sea  $F$  un campo y sea  $T$  el operador lineal sobre  $F^2$  definido por  $T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1)$ . Entonces  $T$  es no singular, pues si  $T(x_1, x_2) = 0$  se tiene

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &= 0 \\ x_1 &= 0\end{aligned}$$

Con lo que  $x_1 = x_2 = 0$ . También se ve que  $T$  es sobreyectiva, pues si  $(z_1, z_2)$  es cualquier vector de  $F^2$ , para ver que  $(z_1, z_2)$  pertenece a la imagen de  $T$  se han de encontrar escalares  $x_1$  y  $x_2$  tales que

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &= z_1 \\ x_1 &= z_2\end{aligned}$$

y la solución obvia es  $x_1 = z_2$ ,  $x_2 = z_1 - z_2$ . Este último cálculo de una fórmula explícita para  $T^{-1}$ , a saber,

$$T^{-1}(z_1, z_2) = (z_2, z_1 - z_2).$$

**Definición:** Sea  $V$  un espacio vectorial de dimensión  $n$  sobre el campo  $F$ , y sea  $W$  un espacio vectorial de dimensión  $m$  sobre el campo  $F$ . Sea  $\mathcal{B} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  una base ordenada de  $V$ , y sea  $\mathcal{B}' = (\beta_1, \dots, \beta_m)$  una base ordenada de  $W$ . Si  $T$  es cualquier transformación lineal de  $V$  en  $W$ , entonces  $T$  está determinada por su efecto sobre los vectores  $\alpha_i$ . Cada uno de los  $n$  vectores  $T\alpha_i$  se expresa de manera única como combinación lineal

$$T(\alpha_i) = \sum_{j=1}^m A_{ij} \beta_j$$

de los  $\beta_j$ . Los escalares  $A_{1j}, \dots, A_{mj}$  son las coordenadas de  $T\alpha_i$  en la base ordenada  $\mathcal{B}'$ . Por consiguiente, transformación  $T$  esta

determinada por los  $mn$  escalares  $A_{ij}$  mediante la expresión anterior. La matriz  $m \times n$ ,  $A$ , definida por  $A(i,j) = A_{ij}$  se llama *matriz de  $T$  respecto al par de bases ordenadas  $\mathcal{B}$  y  $\mathcal{B}'$* .

Ahora, tratemos de entender claramente cómo la matriz  $A$  determina la transformación lineal  $T$ .

Si  $\alpha = x_1\alpha_1 + \dots + x_n\alpha_n$  es un vector de  $V$ , entonces

$$T\alpha = T\left(\sum_{j=1}^n x_j\alpha_j\right) = \sum_{j=1}^n x_j(T\alpha_j) = \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^m A_{ij}\beta_i = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n A_{ij}x_j\right)\beta_i.$$

Si  $X$  es la matriz de las coordenadas de  $\alpha$  en la base ordenada  $\mathcal{B}$ , entonces el cálculo anterior muestra que  $AX$  es la matriz de las coordenadas del vector  $T\alpha$  en la base  $\mathcal{B}'$ , ya que el escalar

$$\sum_{j=1}^n A_{ij}x_j$$

Es el elemento de la  $i$ -ésima renglón de la matriz  $AX$ . Obsérvese también que si  $A$  es cualquier matriz  $m \times n$  sobre el campo  $F$ , entonces

$$T\left(\sum_{j=1}^n x_j\alpha_j\right) = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n A_{ij}x_j\right)\beta_i.$$

define una transformación lineal  $T$  de  $V$  en  $W$ , la matriz de la cual es  $A$  respecto a  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{B}'$ . escribiéndolo formalmente se tiene:

**teorema:** Sean  $V$  un espacio vectorial de dimensión  $n$  sobre el campo  $F$ , y  $W$  un espacio vectorial de dimensión  $m$  sobre el campo  $F$ . Sean  $\mathcal{B}$  una base ordenada de  $V$  y  $\mathcal{B}'$  una base ordenada de  $W$ . Para cada transformación lineal  $T$  de  $V$  en  $W$ , existe una matriz  $m \times n$ ,  $A$ , cuyos elementos pertenecen a  $F$ , tal que

$$[T\alpha]_{\mathcal{B}'} = A[\alpha]_{\mathcal{B}}$$

Para todo vector  $\alpha$  en  $V$ . Además,  $T \rightarrow A$  es una correspondencia biyectiva entre el conjunto de todas las transformaciones lineales de  $V$  en  $W$  y el conjunto de todas las matrices  $m \times n$  sobre el campo  $F$ .

Ejemplo. Sea  $V$  el espacio de todas las funciones polinomios de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$  de la forma

$$f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3$$

esto es, el espacio de las funciones polinomios de grado tres o menor. El operador derivación (antes ya definido), aplica  $V$  en  $V$ , ya que  $D$  «decrece el grado». Sea  $\mathcal{B}$  la base ordenada de  $V$  que consta de cuatro funciones  $f_1, f_2, f_3, f_4$  definidas por  $f_i = x^{i-1}$ . Entonces

$$\begin{array}{ll} D(f_1) = 0, & Df_1 = 0f_1 + 0f_2 + 0f_3 + 0f_4 \\ D(f_2) = 1, & Df_2 = 1f_1 + 0f_2 + 0f_3 + 0f_4 \\ D(f_3) = 2x, & Df_3 = 0f_1 + 2f_2 + 0f_3 + 0f_4 \\ D(f_4) = 3x^2, & Df_4 = 0f_1 + 0f_2 + 3f_3 + 0f_4 \end{array}$$

con lo que la matriz de  $D$  en la base ordenada  $\mathcal{B}$  es

$$[D]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

**Definición:** Sean  $A$  y  $B$  dos matrices (cuadradas)  $n \times n$  sobre el campo  $F$ . Se dice que  $B$  es semejante a  $A$  sobre  $F$  si existe una matriz inversible  $n \times n$ ,  $P$  sobre  $F$  tal que  $B = P^{-1}AP$ .

**Definición:** Si  $V$  es un espacio vectorial sobre el campo  $F$ , una transformación lineal  $f$  de  $V$  en el campo de escalares  $F$  se llama también un funcional lineal sobre  $V$ . Si se comienza desde el

principio, esto quiere decir que  $f$  es una función de  $V$  en  $F$ , tal que

$$f(c\alpha + \beta) = cf(\alpha) + f(\beta)$$

para todos los vectores  $\alpha$  y  $\beta$  de  $V$  y todos los escalares  $c$  de  $F$ . El concepto de funcional lineal es importante para el estudio de los espacios vectoriales de dimensión finita, pues ayuda a organizar y clarificar el estudio de los subespacios, las ecuaciones lineales y las coordenadas.

Ejemplo. Sea  $F$  un campo y sean  $b_1, \dots, b_n$  escalares pertenecientes a  $F$ . Definase una función  $f$  en  $F^n$  por

$$f(x_1, \dots, x_n) = b_1x_1 + \dots + x_nb_n.$$

Entonces  $f$  es funcional lineal sobre  $F^n$ . Es el funcional lineal representado por la matriz  $[b_1, \dots, b_n]$  respecto a la base ordenada canónica de  $F^n$  y la base  $\{1\}$  de  $F$ :

$$b_i = f(e_i), \quad i = 1, \dots, n.$$

Todo funcional lineal sobre  $F^n$  es de esta forma para ciertos escalares  $b_1, \dots, b_n$ . Ello se sigue de la definición de funcional lineal, ya que definimos  $b_i = f(e_i)$  y empleando la linealidad

$$f(x_1, \dots, x_n) = f\left(\sum_i x_i e_i\right) = \sum_i x_i f(e_i) = \sum_i b_i x_i.$$

**Definición:** Si  $A$  es una matriz de  $m \times n$  sobre el campo  $F$ , la *transpuesta* de  $A$  es la matriz de  $m \times n$ ,  $A^t$ , definida por  $A^t_{ij} = A_{ji}$ .

### III. Polinomios.

**Definición:** Sea  $F$  un campo. Un álgebra lineal sobre el campo  $F$  es un espacio vectorial  $\mathcal{A}$  sobre  $F$  con otra operación, llamada *producto de vectores*, que asocia a cada par de vectores  $\alpha, \beta$  de  $\mathcal{A}$  un vector  $\alpha\beta$  en  $\mathcal{A}$  llamada el producto de  $\alpha$  y  $\beta$ , de tal modo que

(i) El producto es asociativo,

$$\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$$

(ii) El producto es distributivo con respecto a la adición,

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$$

(iii) Para todo escalar  $c$  de  $F$ ,

$$c(\alpha\beta) = (c\alpha)\beta = \alpha(c\beta).$$

Si existe un elemento  $1$  en  $\mathcal{A}$  tal que  $1\alpha = \alpha 1 = \alpha$  para todo  $\alpha$  de  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{A}$  se llama un álgebra lineal con unidad sobre  $F$ , y a  $1$  se le llama la unidad de  $\mathcal{A}$ . El álgebra  $\mathcal{A}$  se dice conmutativa si  $\alpha\beta = \beta\alpha$  de  $\mathcal{A}$ .

**Ejemplo.** El conjunto de las matrices  $n \times n$  sobre un campo, con las operaciones comunes, es un álgebra lineal con unidad, en particular el campo mismo es un álgebra lineal con unidad. Este álgebra no es conmutativa si  $n \geq 2$ .

**Definición:** El vector  $(0, 1, 0, \dots, 0, \dots)$  juega un papel destacado en lo que sigue y se representará siempre por  $x$ . El producto de  $x$  por sí mismo  $n$  veces se representará por  $x^n$  y se hará que  $x^0 = 1$ . Entonces

$$x^2 = (0, 0, 1, 0, \dots), \quad x^3 = (0, 0, 0, 1, 0, \dots)$$

y, en general, para todo entero  $k \geq 0$ ,  $(x^k)^k = 1$  y  $(x^k)^n = 0$  para todo entero  $n \neq k$ . Para concluir observamos que el conjunto formado por  $1, x, x^2, \dots$ , es independiente e infinito. Así que el álgebra  $F^\infty$  no es de dimensión finita.

El álgebra  $F^\infty$  se llama también *álgebra de las series formales de potencias sobre F*. El elemento  $f = (f, f_1, f_2, \dots)$  se suele escribir

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$$

Ahora estamos en condiciones de definir un polinomio sobre el campo  $F$ .

**Definición:** Sea  $F[x]$  es subespacio de  $F^\infty$  generado por los vectores  $1, x, x^2, \dots$ . Un elemento de  $F[x]$  se llama *polinomio sobre F*.

Como  $F[x]$  consta de todas las combinaciones lineales (finitas) de  $x$  y sus potencias, un vector no nulo  $f$  de  $F^\infty$  es un polinomio si, y solo si, existe un entero  $n \geq 0$  tal que  $f_n \neq 0$  y tal que  $f_k = 0$  para todos los enteros  $k > n$ ; este entero (cuando existe) es obviamente único y se llama *grado de f*. Se representará el grado de un polinomio  $f$  por  $\text{grd } f$ , y no se asignará grado al polinomio 0. Si  $f$  es un polinomio no nulo de grado  $n$  se tiene que

$$f = f_0 x^0 + f_1 x + f_2 x^2 + \dots + f_n x^n, \quad f_n \neq 0$$

Los escalares  $f_0, f_1, f_2, \dots, f_n$  son llamados los *coeficientes* de  $f$ , y se dirá que  $f$  es un polinomio con coeficientes en  $F$ .

**Teorema:** Sean  $f, g$  polinomios no nulos sobre  $F$ . Entonces

- (i)  $fg$  es un polinomio no nulo;
- (ii)  $\text{grd}(fg) = \text{grd}(f) + \text{grd}(g)$ ;
- (iii) Si  $f + g \neq 0$ ,  $\Rightarrow \text{grd}(f + g) \leq \max(\text{grd } f, \text{grd } g)$ .

**Corolario:** Supóngase que  $f, g$  y  $h$  son polinomios sobre el campo  $F$  tales que  $f \neq 0$  y  $fg = fh \Rightarrow g = h$ .

**Demostración:**

$$\begin{aligned} \text{Como } fg &= fh \text{ entonces} \\ f(g - h) &= 0 \\ g - h &= 0, \text{ ya que } f \neq 0. \end{aligned}$$

Otros mas se desprenden facilmente de la demostración del teorema anterior, y algunos de ellos haremos mención. Supóngase

$$f = \sum_{i=0}^m f_i x^i \quad \text{y} \quad g = \sum_{j=0}^n g_j x^j.$$

Entonces se tiene que

$$fg = \sum_{s=0}^{m+n} \left( \sum_{r=0}^s f_r g_{s-r} \right) x^s.$$

El caso particular se  $f = cx^m, g = dx^n$  con  $c, d$  en  $F$  se reduce a

$$(cx^m)(dx^n) = cdx^{m+n}.$$

Ahora el producto esta dado por

$$f = \sum_{i,j} f_i g_j x^{i+j}$$

Donde la suma se extiende sobre todos los pares de ordenados  $i, j$  tales que  $0 \leq i \leq m$  y  $0 \leq j \leq n$ .

**Definición:** Sea  $\mathcal{A}$  un álgebra lineal con unidad sobre el campo  $F$ . Se indicará la unidad  $1$  por  $1$  y se conviene que  $\alpha^0 = 1$

para todo  $\alpha$  de  $\mathcal{A}$ . Entonces a cada polinomio  $f = \sum_{l=1}^n f_l \alpha^l$  sobre  $F$  y  $\alpha$  de  $\mathcal{A}$  se asocia un elemento  $f(\alpha)$  de  $\mathcal{A}$  por lo

$$f(\alpha) = \sum_{l=1}^n f_l \alpha^l$$

Ejemplo. Sea  $\mathbb{C}$  el campo de los números complejos y sea  $f = x^2 + 2$ .

(i) Si  $\mathcal{A} = \mathbb{C}$  y  $\rho$  pertenece  $\mathbb{C}$ ,  $f(\rho) = \rho^2 + 2$ , en particular  $f(2) = 6$  y

$$f\left(\frac{1+i}{1-i}\right) = 1.$$

(ii) Si  $\mathcal{A}$  es el álgebra de todas las matrices  $2 \times 2$  sobre  $\mathbb{C}$  y si

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

entonces

$$f(B) = 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$$

(iii) Si  $\mathcal{A}$  es un álgebra de todos los operadores lineales en  $\mathbb{C}^3$  y  $T$  es el elemento de  $\mathcal{A}$  dado por

$$T(c_1, c_2, c_3) = (i\sqrt{2}c_1, c_2, i\sqrt{2}c_3)$$

entonces  $f(T)$  es el operador lineal sobre  $\mathbb{C}^3$  definido por

$$f(T)(c_1, c_2, c_3) = (0, 3c_2, 0).$$

**Teorema:** Sea  $F$  un campo y  $\mathcal{A}$  un álgebra lineal con unidad

sobre  $F$ . Supóngase que  $f$  y  $g$  son polinomios sobre  $F$ , que  $\alpha$  es un elemento de  $\mathcal{K}$  y que  $c$  pertenece a  $F$ . Entonces

$$\begin{aligned} (i) \quad & c(f + g)(\alpha) = cf(\alpha) + cg(\alpha); \\ (ii) \quad & (fg)(\alpha) = f(\alpha)g(\alpha). \end{aligned}$$

**Demostración:** Aquí demostraremos solo la parte (i).

Supóngase que

$$f = \sum_{i=1}^m f_i x^i \quad \text{y} \quad g = \sum_{j=1}^n g_j x^j.$$

$$fg = \sum_{i,j} f_i g_j x^{i+j}$$

y luego por (i)

$$(fg)(\alpha) = \sum_{i,j} f_i g_j \alpha^{i+j} = \left[ \sum_{i=1}^m f_i \alpha^i \right] \left[ \sum_{j=1}^n g_j \alpha^j \right] = f(\alpha) g(\alpha).$$

Ahora hablaremos de aquellos temas que dependen ante todo de la estructura multiplicativa del álgebra de los polinomios sobre un campo.

**Lema:** Supóngase que  $f$  y  $h$  son polinomios no nulos sobre un campo  $F$  tal que  $\text{grad}(h) \leq \text{grad}(f)$ . Entonces existe un polinomio  $g$  de  $F[x]$  tal que

$$f - hg = 0 \quad \text{o} \quad \text{grad}(f - hg) < \text{grad} f$$

**Demostración:** Supóngase que

$$f = amx^m + \sum_{i=0}^{m-1} a_i x^i, \quad am \neq 0$$

Y que

$$h = bnx^n + \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i, \quad bn \neq 0.$$

Entonces  $m \geq n$ , y

$$f - \left[ \frac{am}{bn} \right] x^{m-n} h = 0 \quad \text{o} \quad \text{grad} \left[ f - \left[ \frac{am}{bn} \right] x^{m-n} h \right] < \text{grad}(f)$$

Así que se puede tomar  $g = \begin{pmatrix} am \\ bn \end{pmatrix} x^{m-n}$ .

**Teorema:** Si  $f, h$  son polinomios sobre un campo  $F$  y  $h$  es diferente de 0, entonces existen polinomios  $g, d$  en  $F[x]$  tales que

- i)  $f = hg + d$ .
- ii)  $0, d = 0$  o  $\text{grd } d < \text{grd } h$

Los polinomios que satisfacen i) y ii) son únicos.

**Definición:** Sea  $h$  un polinomio no nulo sobre el campo  $F$ . Si  $f$  pertenece a  $F[x]$ , el teorema anterior dice que existe, a lo más, un polinomio  $g$  en  $F[x]$  tal que  $f = hg$ . Si tal  $g$  existe se dice que  $h$  divide a  $f$ , que  $f$  es divisible por  $h$ , que  $f$  es un múltiplo de  $h$  y que  $g$  es el cociente de  $f$  por  $h$ . Se escribirá, pues,  $g = f/h$ .

**Corolario:** Sea  $f$  un polinomio sobre el campo  $F$  y sea  $c$  un elemento de  $F$ . Entonces  $f$  es divisible por  $x - c$  si, y solo si,  $f(c) = 0$ .

**Definición:** Sea  $F$  un campo. Un elemento  $c$  de  $F$  se dice raíz, o un cero, de un polinomio dado  $f$  sobre  $F$  si  $f(c) = 0$ .

**Corolario:** Un polinomio  $f$  de grado  $n$  sobre el campo  $F$  tiene a lo más  $n$  raíces en  $F$ .

**Demostración:** La tesis es obviamente para los polinomios de grado 0 y 1 de grado 1. Supóngase que es cierta para los polinomios de grado  $n-1$ . Si  $\alpha$  es una raíz de  $f$ ,  $f = (x - \alpha)q$ , donde  $q$  tiene grado  $n-1$ . Como  $f(\beta) = 0$  si, y solo si,  $\alpha = \beta$  o  $q(\beta) = 0$ , se sigue por la hipótesis de inducción que  $f$  tiene a lo más  $n$

raíces. Mas adelante se verá como la operador derivada nos ayudará para encontrar las  $n$  raíces del polinomio.

*Definición:* Sea  $F$  un campo. Un polinomio  $f$  de  $F[x]$  se dice *reducible sobre  $F$*  si existen polinomios  $g, h$  en  $F[x]$  de grado  $\geq 1$  tales que  $f = gh$ , y si no, se dice que es *irreducible sobre  $F$* . Un polinomio no escalar irreducible sobre  $F$  se llama *polinomio primo sobre  $F$*  y a veces se dice solamente que es *primo en  $F[x]$* .

*Ejemplo.* El polinomio  $x^2 + 1$  es reducible sobre el campo  $\mathbb{C}$  de los números complejos. En efecto

$$x^2 + 1 = (x + i)(x - i)$$

Y los polinomios  $x + i, x - i$  pertenecen a los  $\mathbb{C}[x]$ . Por otra parte,  $x^2 + 1$  es irreducible sobre el campo  $\mathbb{R}$  de los números reales. Pues si

$$x^2 + 1 = (ax + b)(a'x + b')$$

con  $a, a', b, b'$  en  $\mathbb{R}$ , entonces

$$aa' = 1, \quad ab' + ba' = 0, \quad bb' = 1.$$

Estas relaciones implican que  $a^2 + b^2 = 0$ , lo que es imposible con números reales  $a$  y  $b$ , a menos que  $a = b = 0$ .

#### IV. Determinantes

**Definición:** Un anillo es un conjunto  $K$ , junto con dos operaciones  $(x, y) \rightarrow x + y$  y  $(x, y) \rightarrow xy$  que satisfacen:

- (i)  $K$  es un campo conmutativo para la operación adición  $(x, y) \rightarrow x + y$ ;
- (ii)  $(xy)z = x(yz)$ , el producto es asociativo;
- (iii)  $x(y + z) = xy + xz$ ;  $(x + y)z = xz + yz$ , se cumplen las dos leyes distributivas.

Si  $xy = yx$  para todo  $x$  e  $y$  de  $F$ , se dice que el anillo es conmutativo. Si existe un elemento  $1$  en  $K$  tal que  $x1 = 1x = x$  para todo  $x$ , se dice que  $K$  es un anillo con unidad, y  $1$  es la unidad de  $K$ .

**Definición:** Sea  $K$  un anillo conmutativo con unidad,  $n$  un entero positivo y sea  $\mathcal{D}$  es una función que asigna a cada matriz  $n \times n$  sobre  $K$  un escalar  $\mathcal{D}(A)$  en  $K$ . Se dice que  $\mathcal{D}$  es  $n$ -lineal si para cada  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $\mathcal{D}$  es una función lineal del  $i$ -ésimo renglón cuando las otras  $(n - 1)$  filas se dejan fijas.

Esta definición requiere una explicación más detallada. Si  $\mathcal{D}$  es una función de  $K^{n \times n}$  en  $K$ , y si  $a_1, \dots, a_n$  son los renglones de la matriz  $A$ , se puede escribir también

$$\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(a_1, \dots, a_n)$$

Esto es, se puede considerar  $\mathcal{D}$  como la función de los renglones de  $A$ . La afirmación de que  $\mathcal{D}$  es  $n$ -lineal quiere decir entonces

$$\mathcal{D}(a_1, \dots, ca + a', \dots, a_n) = c\mathcal{D}(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n) + \mathcal{D}(a_1, \dots, a', \dots, a_n).$$

Si se fijan los renglones, excepto el renglón  $i$ , y se considera  $\mathcal{D}$  como la función de el renglón  $i$ , es a veces conveniente escribir  $\mathcal{D}(\alpha_i)$  por  $\mathcal{D}(A)$ . Así la expresión anterior se abrevia como sigue

$$\mathcal{D}(c\alpha_i + \alpha_i') = c\mathcal{D}(\alpha_i) + \mathcal{D}(\alpha_i')$$

Siempre que quede claro su significado.

Ejemplo. Sean  $k_1, \dots, k_n$  enteros positivos,  $1 \leq k \leq n$ , y sea  $\alpha$  un elemento de  $K$ . Para toda matriz  $n \times n$  sobre  $K$ , se define

$$\mathcal{D}(A) = \alpha A(1, k_1) + \dots + \alpha A(n, k_n).$$

Entonces la función  $\mathcal{D}$  definida es  $n$ -lineal. Esto es cierto si se toma en cuenta que  $\mathcal{D}$  es una función de el renglón  $i$ , dejando fijas las otras, se tiene

$$\mathcal{D}(\alpha_i) = A(i, k_i) \delta$$

donde  $\delta$  es un elemento fijo de  $K$ . Sea  $\alpha = (\alpha_{1n'}, \dots, \alpha_{nn'})$  entonces se tiene

$$\mathcal{D}(c\alpha_i + \alpha_i') = [cA(i, k_i) + A'(i, k_i)]\delta = c\mathcal{D}(\alpha_i) + \mathcal{D}(\alpha_i').$$

Con lo que  $\mathcal{D}$  es una función lineal de cada una de los renglones de  $A$ .

Una función  $n$ -lineal particular de este tipo es

$$\mathcal{D}(A) = A_{11}A_{22} + \dots + A_{nn}.$$

Es decir, el producto de los elementos de la diagonal es una función  $n$ -lineal sobre  $K^{n \times n}$ .

**Definición:** Sea  $\mathcal{D}$  una función  $n$ -lineal. Se dice que  $\mathcal{D}$  es *alternada* si se cumplen las siguientes condiciones:

- i)  $D(A) = 0$  cuando dos renglones;  
 ii) Si  $A'$  es una matriz que se obtiene intercambiando dos renglones de  $A$ , entonces  $D(A') = -D(A)$ .

*Definición:* Sea  $K$  un anillo conmutativo con unidad y sea  $n$  un entero positivo. Supóngase que  $D$  es una función de matrices  $n \times n$  sobre  $K$  en  $K$ . Decimos que  $D$  es una función determinante si  $D$  es  $n$ -lineal, alternada, y si  $D(I) = 1$ .

Ahora mostraremos que existe exactamente una función determinante sobre las matrices de  $n \times n$  sobre  $K$ . Ello se ve fácilmente para las matrices  $1 \times 1$ ,  $A = [a]$ , sobre  $K$ . La función dada por  $D(A) = a$  es una función determinante y, evidentemente, es la única función determinante de las matrices  $1 \times 1$ . Estamos, pues, en condiciones de considerar el caso  $n = 2$ . La función

$$D(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

es una función determinante.

*Definición:* Sea  $A$  la matriz de  $n \times n$  sobre  $K$ , se dice que  $A$  es no singular si  $D(A) \neq 0$ , de suceder que  $D(A) = 0$  entonces se dice que  $A$  es singular.

#### Cálculo de determinantes

El método más sencillo para resolver determinantes se conoce como "regla de Sarrus". Este método se emplea para calcular determinantes de segundo y tercer orden.

Para calcular el valor de un determinante de segundo orden empleando la regla de Sarrus, se efectúa el producto de los elementos de la diagonal principal y a éste se resta el producto de los elementos de la diagonal secundaria. En forma esquemática:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Como se ve, el resultado que arroja la regla de Sarrus coincide con la definición de determinante.

Para calcular el valor de un determinante de tercer orden empleando la regla de Sarrus, se efectúa el producto de la diagonal principal y de las dos diagonales paralelas a ella: el término diagonales paralelas se debe a que, cuando se emplea el artificio que consiste en volver a escribir los dos primeros renglones a continuación del tercero, los elementos en cuestión aparecen formando diagonales paralelas a la principal. A la suma de dichos productos se le restan los productos de la diagonal secundaria y de las dos paralelas a ella. En forma esquemática:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = [a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23}] - [a_{13}a_{22}a_{31} + a_{23}a_{32}a_{11} + a_{33}a_{12}a_{21}]$$

*Definición:* Se llama cofactor de una matriz A a el elemento  $C_{ij} = D(A_{rs})$  donde  $r, s \neq i, j$ , esto lo podemos ilustrar en un ejemplo

Sea la matriz de  $3 \times 3$ , A sobre F.

$$C_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

*Definición:* Se llama matriz adjunta de A, a la matriz de transpuesta de los cofactores de A. Formalmente, sea  $A = [a_{ij}]$  una matriz de  $n \times n$  sobre F, y sea  $C_{ij}$  el cofactor del elemento  $a_{ij}$ , se llama adjunta de A a la matriz

$$\text{Adj}(A) = [b_{ij}], \text{ donde } b_{ij} = C_{ji}$$

Cálculo de la matriz inversa por medio de la adjunta y el determinante.

**Teorema:** Si  $A$  es una matriz de  $n \times n$  con elementos de  $F$ , entonces

$$A(\text{Adj } A) = (\text{Adj } A)A = \mathcal{D}(A)I_n$$

**Demostración:**

Sea  $A = [a_{ij}]$ ;  $\text{Adj } A = [b_{ij}]$ , donde  $b_{ij} = C_{ji}$

Por lo que

$$A(\text{Adj } A) = [P_{ij}]$$

$$\text{Donde } P_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{ik} C_{jk}$$

En consecuencia para  $i = j$  se tiene que

$$P_{ii} = P_{ii} = \sum_{k=1}^n a_{ik} C_{ik}$$

Que es el desarrollo por cofactores, según el  $i$ -ésimo renglón del determinante de  $A$ ; por lo que,

$$P_{ii} = \mathcal{D}(A)$$

Aquí omitiremos la prueba de  $P_{ij} = 0$ , para  $i \neq j$ , pero más adelante lo tomaremos por hecho.

**Teorema:** Sea  $A$  una matriz de  $n \times n$  sobre  $F$ :  $A^{-1}$  existe si, y solo si,  $\mathcal{D}(A) \neq 0$

**Demostración:**

Por el teorema anterior tenemos que

$$A(\text{Adj } A) = \mathcal{D}(A)I_n$$

Por lo que, si  $\mathcal{D}(A) \neq 0$  de la expresión anterior, se sigue que

$$\frac{1}{\mathcal{D}(A)}[A(\text{Adj } A)] = I_n$$

esto es

$$A\left[\frac{1}{\mathcal{D}(A)}(\text{Adj } A)\right] = I_n$$

En consecuencia

$$A^{-1} = \frac{1}{D(A)} (\text{Adj } A)$$

y  $A^{-1}$  existe, ya que la adjunta de  $A$  existe para toda matriz  $A$ . Entonces si

$D(A) \neq 0$  la matriz  $A^{-1}$  existe y se calcula de la forma

$$A^{-1} = \frac{1}{D(A)} (\text{Adj } A)$$

Ejemplo. Sea la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

calcular la matriz inversa por el método de la Adj y el  $D$ .

$$C_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -4 \quad C_{12} = (-1) \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -8 \quad C_{13} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

$$C_{21} = (-1) \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \quad C_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \quad C_{23} = (-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$C_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -2 \quad C_{32} = (-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2 \quad C_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

Por lo tanto

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 8 & -4 & 2 \\ 5 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

y el  $D(A) = \frac{1}{6}$ ; Por lo que

$$A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 8 & -4 & 2 \\ 5 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/3 & 1/3 & 1/3 \\ 4/3 & -2/3 & 1/3 \\ 5/6 & -1/6 & -1/6 \end{bmatrix}$$

**Definición:** Sea  $V$  un espacio vectorial sobre el campo  $F$  y sea  $T$  un operador lineal sobre  $V$ . Un valor propio de  $T$  es un escalar  $c$  de  $F$  tal que existe un vector no nulo  $\alpha$  con  $T\alpha = c\alpha$ . Si  $c$  es un valor propio de  $T$ , entonces

(i) cualquier  $\alpha$  tal que  $T\alpha = c\alpha$  se llama vector propio de  $T$  asociado al valor propio  $c$ ;

(i) la colección de todos los  $\alpha$  tales que  $T\alpha = c\alpha$  se llama *espacio propio asociado a c*.

**Teorema.** Sea  $T$  un operador lineal sobre un espacio  $V$  de dimensión finita y sea  $c$  un escalar. Es fácil comprobar que las siguientes afirmaciones son equivalentes.

- (i)  $c$  es un valor propio de  $T$ .
- (ii) El operador  $(T - cI)$  es singular (no invertible).
- (iii)  $\mathcal{D}(T - cI) = 0$ .

**Definición:** Si  $A$  es una matriz  $n \times n$  sobre el campo  $F$ , un *valor propio* de  $A$  en  $F$  es un escalar  $c$  de  $F$  tal que la matriz  $(A - cI)$  es singular (no invertible).

Esta definición es clara ya que se sigue del teorema anterior que si el  $\mathcal{D}$  de una matriz es cero entonces la matriz es singular como se vio anteriormente. Como  $c$  es un valor propio de  $A$  si, y solo si,  $\mathcal{D}(A - cI) = 0$ , o en forma equivalente si, y solo si,  $\mathcal{D}(cI - A) = 0$ , se puede construir la matriz  $(xI - A)$  con elementos polinómicos y considerar el polinomio  $f = \mathcal{D}(xI - A)$ . En tal caso los valores propios de  $A$  en  $F$  son los escalares  $c$  de  $F$  tales que  $f(c) = 0$ . Por esta razón se sigue la siguiente definición

**Definición:** a  $f = \mathcal{D}(xI - A)$  se le llama el *polinomio característico* de  $A$ .

Es importante observar que  $f$  es un polinomio con  $f_n = 1$  de grado  $n$ . Lo cual es fácilmente comprobable por la fórmula para el determinante de una matriz en términos de sus elementos.

**Lema:** Las matrices semejantes tienen el mismo polinomio característico.

Demostración. Si  $B = P^{-1}AP$ , entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\lambda I - B) &= \mathcal{D}(\lambda I - P^{-1}AP) = \mathcal{D}(P^{-1}(\lambda I - A)P) \\ &= \mathcal{D}(P^{-1})\mathcal{D}(\lambda I - A)\mathcal{D}(P) = \mathcal{D}(\lambda I - A) \end{aligned}$$

Ejemplo. Sea  $T$  el operador lineal sobre  $\mathbb{R}^2$  representado por la matriz  $A$  en la base canónica

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

El polinomio característico de  $T$  (o de  $A$ ) es

$$\mathcal{D}(\lambda I - A) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 1.$$

Como este polinomio tiene raíces no reales,  $T$  no tiene valores propios. Si  $U$  es el operador lineal definido sobre  $\mathbb{C}^2$  y representado por  $A$  en la base ordenada canónica, entonces  $U$  sí tiene dos valores propios,  $i$  y  $-i$  en  $\mathbb{C}$ .

## V. Sistemas de ecuaciones lineales.

Supóngase que  $F$  es un campo, Se considera el problema de encontrar  $n$  escalares (elementos de  $F$ )  $x_1, x_2, \dots, x_n$  que satisfagan las condiciones.

$$\begin{array}{r}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = y_1 \\
 a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = y_2 \\
 \vdots \\
 a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = y_m
 \end{array} \quad (1-1)$$

donde  $y_1, y_2, \dots, y_m$  y  $a_{ij}$ , con  $1 \leq i \leq m$ ,  $1 \leq j \leq n$ , son elementos de  $F$ . Donde (1-1) se la llama un sistema de  $m$  ecuaciones lineales con  $n$  incógnitas, Todo vector de  $n$  elementos de  $F$  que satisfaga cada una de las ecuaciones de (1-1) se llama solución del sistema. Si  $y_1 = y_2 = \dots = y_m = 0$ , se dice que el sistema es homogéneo, o que cada una de las ecuaciones es homogénea.

La técnica que utilizaremos para resolver este tipo de problemas es la técnica matricial, ya que como se ve un sistema de ecuaciones lineales es un espacio vectorial, por lo que ahora abreviaremos el sistema de ecuaciones de la siguiente manera:

$$A\vec{x} = \vec{y}$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}; \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}; \quad \vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}.$$

A se llama matriz de los coeficientes del sistema;  $\vec{x}$  es el vector de incógnitas y  $\vec{y}$  es vector de términos independientes conocidos.

**Teorema:** Si  $A$  es una matriz de  $n \times n$ , los siguientes enunciados son equivalentes:

- i)  $\text{Rango}(A) = n$
- ii)  $A \cong I_n$
- iii) Existe  $A^{-1}$
- iv) El  $\mathcal{D}(A) \neq 0$
- v) Los renglones de A son linealmente independientes.
- vi) Las columnas de A son linealmente independientes.

En lo anterior se establece una condición necesaria y suficiente para la existencia de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales, utilizando el concepto de rango. Dicho concepto también se utiliza para observar la unicidad o multiplicidad de soluciones.

Para ello consideremos el sistema anterior. Definamos ahora una nueva matriz, a la que llamaremos matriz aumentada del sistema y representaremos con  $A'$ , de la siguiente manera:

$$A' = \left[ \begin{array}{ccc|c} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} & y_1 \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{mn} & y_m \end{array} \right]$$

Para el análisis que se desarrolla a continuación nos apoyaremos en la siguiente expresión vectorial sobre  $F^n$ . La cual es también equivalente a la expresión anterior.

$$x_1 \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_{m2} \end{bmatrix} + \dots + x_n \begin{bmatrix} \alpha_{1n} \\ \alpha_{2n} \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_m \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

De esta expresión se sigue que el sistema tiene solución si, y solo si, existen escalares  $x_1, x_2, \dots, x_n$  que expresen a  $y$  como combinación lineal de las columnas de A. Esto es si, y solo si,  $y$

pertenece al espacio generado por las columnas de A.

Para enunciar esta condición en términos de el rango de A y A' bastará observar que si  $y$  es una combinación lineal de las columnas de A el rango de A' no varía, pero si  $y$  es linealmente independiente de las columnas de A el rango se incrementa en 1, es decir,  $\text{rango } A' = n + 1$ . En consecuencia, podemos concluir que

**Teorema:** El sistema de ecuaciones lineales  $A\bar{x} = y$  es compatible, es decir, tiene solución si, y solo si,  $\text{rango}(A) = \text{rango}(A')$ .

Supongamos ahora que el sistema es compatible y veamos bajo que condiciones es determinado, comparando el rango de A con el número de incógnitas del sistema:

Si el  $\text{rango}(A) = n$  el conjunto formado por las  $n$  columnas de A es linealmente independiente y, por lo tanto, constituye una base del espacio generado por las columnas de A; entonces los escalares  $x_1, x_2, \dots, x_n$  son las coordenadas del vector  $y$  en dicha base, y sabemos además que cualquier vector coordinada en una base es único, por lo que la solución del sistema es única.

Supongamos ahora que  $\text{rango}(A) = r < n$ ; entonces cualquier base del espacio generador de columnas de A contiene  $r$  columnas de A. Consideremos, sin pérdida de generalidad, que las  $r$  primeras columnas de A forman una base de dicho espacio; de esta manera la expresión 1.11 se puede escribir

$$x_1\bar{C}_1 + x_2\bar{C}_2 + \dots + x_r\bar{C}_r + x_{r+1}\bar{C}_{r+1} + \dots + x_n\bar{C}_n = y$$

donde  $(\bar{c}_1, \bar{c}_2, \dots, \bar{c}_r)$  forman una base del espacio generado por las columnas de  $A$ . Debido a la cerradura de un espacio vectorial para la adición y el producto por un escalar se tiene que para cualquier valor de los escalares  $\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n$  el vector

$$\alpha_{r+1}\bar{c}_{r+1} + \dots + \alpha_n\bar{c}_n$$

es un elemento del espacio generado por las columnas de  $A$  como también lo es el vector

$$y - \alpha_{r+1}\bar{c}_{r+1} - \dots - \alpha_n\bar{c}_n$$

Debido a la cerradura en la adición. En consecuencia, para cualquier valor de  $\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n$  la ecuación

$$y - \alpha_{r+1}\bar{c}_{r+1} - \dots - \alpha_n\bar{c}_n = \alpha_1\bar{c}_1 + \alpha_2\bar{c}_2 + \dots + \alpha_r\bar{c}_r$$

tiene solución única para las variables  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ . Esto implica que el sistema I,II es indeterminado, puesto que podemos asignar valores arbitrarios a las incógnitas  $\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n$  y obtener los correspondientes valores de  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  que satisfacen la expresión I.I. En resumen puede concluirse lo siguiente:

**Teorema:** Sea  $A\bar{x} = y$  un sistema compatible de  $m$  ecuaciones lineales con  $n$  incógnitas: Si  $\text{rang}(A) = n$  el sistema es determinado y si  $\text{rang}(A) < n$  el sistema es indeterminado.

Para resolver un sistema de ecuaciones lineales, observaremos si el  $D(A) \neq 0$  ya que si esto no sucede el sistema de ecuaciones no tiene solución y se dice que la matriz  $A$  es singular. Si  $D(A) \neq 0$ , tomaremos la matriz aumentada  $A'$  y le aplicaremos operaciones elementales de renglones hasta que sea de la forma escalonada como se muestra a continuación:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \beta_{11} & \dots & \beta_{1n} \\ 0 & \beta_{22} & \dots \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0, \beta_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Donde  $\beta_{ij}$  puede ser igual a cero para  $i < j$  y mayor que cero para  $i = j$ . Si esto no sucede el sistema no tiene una solución única, si sucede la solución es

$$\begin{bmatrix} \beta_{11} & \dots & \beta_{1n} \\ 0 & \beta_{22} & \dots \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0, \beta_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \beta_{11}x_1 + \dots + \beta_{1n}x_n &= b_1 \\ \beta_{22}x_2 + \dots + \beta_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots & \vdots \\ \beta_{m-1n}x_{n-1} + \beta_{m-1n}x_n &= b_{m-1} \\ \beta_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Esto se simplifica

$$x_j = \frac{b_j - \sum_{i \neq j} \beta_{ji} x_i}{\beta_{jj}} \quad \text{Donde } \beta_{jj} \text{ es el coeficiente de } x_j$$

$$y \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n$$

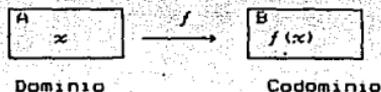
Por lo que el conjunto de  $(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n)$  es el vector solución de el sistema de ecuaciones lineales.

Geomótricamente el vector resultante es el punto de intersección, de los planos que forman cada una de las funciones definidas por el sistema, estas funciones no solo pueden ser planos, también podrian formar cuerpos en el espacio. Ahora cuando nosotros encontramos que el vector solución de nuestro sistema no es único podemos tener como solución una recta, un plano o tal vez

un cuerpo, es decir, que la intersección de nuestras ecuaciones podrían ser los elementos antes mencionados (rectas, planos o cuerpos).

## VI. El espacio de funciones continuas.

**Definición:** Una función  $f$ , es una regla de asociación de cada elemento  $x$  de un conjunto  $A$  (dominio) con uno y solo un elemento  $f(x)$  de un conjunto  $B$  (codominio).



**Ejemplo.** Sea la regla de asociación, que para cada elemento en el conjunto  $A$  se le asocia el duplo de este mismo. Si  $x \in A$  entonces

$$f(x) = 2x$$

**Definición de límite:** Sea  $f(x)$  una función que está definida en todos los valores de  $x$  cerca de  $x_0$ , con la excepción posible de  $x_0$  mismo. Se dice que  $b$  es el límite de  $f(x)$  cuando  $x$  tiende a  $x_0$ , si la diferencia entre  $f(x)$  y  $b$  pueden hacerse tan pequeña como se desee con solo restringir a  $x$  a estar lo suficientemente cerca de  $x_0$ . Simbólicamente es

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b \quad \text{o} \quad f(x) \rightarrow b \text{ cuando } x \rightarrow x_0$$

Además el límite es un operador lineal, por lo que conserva todas las propiedades de ellos.

**Ejemplo.** Sea  $f(x) = (x^2 + 9)/(x - 3)$ . evaluaremos el límite cuando  $x$  tiende a 3

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3} [(x^2 + 9)/(x - 3)] = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} [(x + 3)(x - 3)/(x - 3)] = \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} (x + 3) = 3 + 3 = 6$$

Para nuestro estudio tienen especial interés las funciones continuas, estas son las funciones que no presentan en ningún punto interrupciones ni saltos abruptos de la curva que describen. De manera formal se escribiría:

**Definición:** Una función  $f$  es continua en  $x = x_0$  si tanto  $f(x_0)$  como  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  existen y son iguales.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

**Ejemplo.** Una función continua en el punto  $x = 0$  es la recta  $f(x) = 2x + 3$ , ya que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 2x + 3 = 2(0) + 3 = 3$$

y además

$$f(0) = 2(0) + 3 = 3.$$

Como  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  y  $f(0)$  existen y son iguales la función  $2x + 3$  es continua en el punto  $x = 0$ .

Una función no continua (o discontinua) sería

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

ya que en el punto  $x = 0$  la función da un salto abrupto y rompe la curva descrita.

**Teorema:** Sean  $f$  y  $g$  dos funciones cuyo dominio está definido en  $B \subseteq \mathbb{R}$  y cuyo codominio es  $\mathbb{R}^m$ , entonces

- (i) Si  $f$  es continua en  $x_0 \in B$  y  $c$  un escalar, también lo

es  $cf$ , donde  $(cf)(x) = c(f(x))$

- (ii) Si  $f$  y  $g$  son continuas en  $x_0$ , también lo es  $f + g$ , donde  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
- (iii) Si  $f$  y  $g$  son continuas en  $x_0$  y  $m = 1$ , entonces la función producto  $fg$  definida por  $(fg)(x) = f(x)g(x)$  es continua en  $x_0$
- (iv) Si  $f$  es continua en  $x_0$  y  $f \neq 0$  para todo elemento de  $B$ , entonces el cociente  $1/f$  es continuo en  $x_0$ , donde  $(1/f)(x) = 1/f(x)$
- v) Si  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$ , donde  $f_i$  son las funciones componentes de  $f$ , entonces

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b = (b_1, \dots, b_m)$$

si, y solo si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_i(x) = b_i \text{ para cada } i = 1, \dots, m$$

Para ver que el conjunto de las funciones continuas es un espacio vectorial, basta demostrar que es cerrado bajo las operaciones adición y producto, es decir, basta demostrar las propiedades i y iii del teorema anterior.

Demostración:

Sea  $f$  y  $g$  dos funciones continuas en  $x_0$ , y además

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b \text{ y } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$$

- i) Por demostrar que la función  $h(x) = (f + g)(x)$  es continua.

$\lim_{x \rightarrow x_0} (f + g)(x)$  existe, Por las propiedades del  $\lim$  sabemos

que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) =$$

Por ser el límite un operador lineal

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b + l$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f + g)(x) = b + l$$

Por el otro lado sabemos que

$$(f + g)(x_0) = f(x_0) + g(x_0) = b + l$$

Ahora, como el límite existe y es igual a  $b + l$ , la adición de dos funciones continuas es continua.

iii) Por demostrar que la función  $h(x) = (fg)(x)$  es continua.

$\lim_{x \rightarrow x_0} (fg)(x)$  existe, Por las propiedades del  $\lim$  sabemos

que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (fg)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) =$$

Por ser el límite un operador lineal

$$= [\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)][\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)] = bl$$

entonces

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (fg)(x) = bl$$

Por el otro lado sabemos que

$$(fg)(x_0) = [f(x_0)][g(x_0)] = bl$$

Ahora, como el límite existe y es igual a  $bl$ , el producto de dos funciones continuas es continuo. En particular, el producto de una función no constante por una función constante  $g(x) = c$  es continuo.

Como vimos anteriormente el conjunto de las funciones continuas de  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{R}^m$  forma un espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$ . En general, las funciones de  $\mathbb{R}^n$  a  $\mathbb{R}^m$  forman un espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$ .

Ejemplo. Sea una función continua  $f(x,y) = (x^2, x + y, y)$ , aquí cada una de las componentes de  $f$  son continuas.

**Definición:** Se llama a la función que asocia a un elemento el mismo, función *Idéntica*, es decir  $f(x) = x$  y se denota  $f = I$ .

**Corolario:** Todas las funciones resultado de operaciones adición o producto de la función idéntica son continuas.

## VII. El espacio de la funciones derivables.

**Definición:** La tasa de cambio promedio de una función  $f$  sobre un intervalo de  $x$  a  $x + \Delta x$  se define por la razón  $\Delta y / \Delta x$ .

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Ahora, si nosotros hacemos que  $\Delta x$  sea lo más pequeña posible, es decir  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y / \Delta x$ , nos dará como resultado la derivada de la función  $f$  y se denota por  $\frac{df}{dx}$ .

**Ejemplo.** Sea  $f(x) = x^2 + 2$ , probaremos que la función  $2x$  es su derivada.

**Prueba.**

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 + 2 - (x^2 + 2)}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 + 2 - (x^2 + 2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(2x + \Delta x)\Delta x}{\Delta x} = (2x + 0) = 2x$$

por lo que, la derivada de  $x^2 + 2$  es igual a  $2x$ .

**Definición:** Sea la función  $f$ , si existe su derivada en cada punto de su dominio se dice que  $f$  es una función derivable.

**Propiedad** Todas las funciones derivables son continuas, pero no todas las funciones continuas son derivables.

Con lo anterior, se deduce que:

**Teorema:** El conjunto de las funciones derivables es un espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$ .

**Demostración:**

ESTA TESIS NO DEBE  
SALIR DE LA BIBLIOTECA

Se considera que el conjunto de las funciones derivables es un subconjunto de las funciones continuas, como se conservan todas las propiedades del espacio de las funciones continuas, el conjunto de las funciones derivables es un subespacio del conjunto de las funciones continuas. Por lo tanto, es un espacio vectorial de  $\mathbb{R}$ .

La derivada para funciones vectoriales  $f = (f_1, \dots, f_n)$  es

$$\frac{df(x)}{dx} = \left( \frac{df_1(x)}{dx}, \dots, \frac{df_n(x)}{dx} \right)$$

La derivada formal de un polinomio es de gran utilidad en el estudio de las raíces múltiples de los polinomios que se vieron anteriormente. La derivada de un polinomio

$$f = c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n$$

es el polinomio

$$f' = c_1 + 2c_2x + \dots + nc_nx^{n-1}$$

También se usa la notación  $Df = f'$ . La función derivada es lineal, esto es,  $D$  es un operador lineal sobre  $F[x]$ . Se tienen las derivadas formales de orden superior  $f'' = D^2f$ ,  $f''' = D^3f$ , y así sucesivamente.

**Teorema (Formula de Taylor):** Sea  $F$  un campo,  $c$  un elemento de  $F$  y  $n$  un entero positivo. Si  $f$  es un polinomio sobre  $F$  con  $\text{grd } f \leq n$  entonces

$$f = \sum_{k=0}^n \frac{D^k f}{k!}(c)(x-c)^k.$$

**Demostración:** La fórmula de Taylor es una consecuencia del teorema del binomio y la linealidad de los operadores  $D, D^2, \dots, D^n$ . El teorema del binomio es fácilmente demostrable por inducción y dice que

$$(a + b)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} a^{m-k} b^k$$

Donde

$$\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!} = \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k}$$

Son los conocidos coeficientes binomiales que dan el número de combinaciones de  $m$  objetos tomados de  $k$  en  $k$ . Por el teorema del binomio

$$x^m = [c + (x - c)]^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} c^{m-k} (x - c)^k$$

Que es la fórmula de Taylor para  $f = x^m$ . Si

$$f = \sum_{m=0}^n a_m x^m$$

entonces

$$D^k f(c) = \sum_m a_m (D^k x^m)(c)$$

y

$$\sum_{k=0}^n \frac{D^k f}{k!}(c) (x - c)^k = \sum_k \sum_m a_m \frac{(D^k x^m)}{k!}(c) (x - c)^k$$

$$\sum_m a_m \sum_k \frac{(D^k x^m)}{k!}(c) (x - c)^k = \sum_m a_m x^m = f$$

la modelación de situaciones económicas dan lugar en general a funciones y sistemas de ecuaciones, el análisis de los aspectos teóricos de estos entes matemáticos nos permite indicar aplicaciones en el mundo económico.

El segundo elemento esencial para el desarrollo de teorías económicas no convencionales está representado como se señaló al inicio de este inciso, por los métodos estadísticos.

El estudio de la estadística tiene un lugar esencial en la formación de estas nuevas teorías económicas porque ya que las variables que incluyen tienen una clara relación con los fenómenos reales. En consecuencia el estudio de esta disciplina de las matemáticas, lo haremos partiendo de la estadística descriptiva hasta llegar a la inferencia estadística, definiendo así su parte probabilística.

Iniciaremos definiendo algunos conceptos básicos.

*Definición:* La *probabilidad* de que ocurra un evento  $Y$  se define por el número de casos favorables entre el número de casos totales, también se llama *función de probabilidad de  $Y$*  y se denota por  $P(Y = y)$ .

*Definición:* Sea  $S$  un espacio muestral sobre el que se encuentra definida una función de probabilidad. Sea  $X$  una función de valor real definida sobre  $S$ , de manera que transforme los resultados de  $S$  en puntos sobre la recta de los números reales. Se dice entonces que  $X$  es una *variable aleatoria*.

*Definición:* Cuando una variable aleatoria toma un número finito u infinito numerable de valores se dice que es una variable aleatoria *discreta* y si toma un número infinito no numerable de valores entonces se dice que es una variable aleatoria *continua*.

Ejemplo. Una variable aleatoria discreta es el resultado de lanzar al aire una moneda 10 veces, ya que solo puede tomar dos valores: águila o sol.

Una variable aleatoria continua es el peso de las personas que trabajan y estudian en la UNAM, esto es por que el peso exacto de las personas forman un conjunto infinito de resultados.

La distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta y se puede representar por una fórmula, una tabla o una gráfica que indique las probabilidades  $P(y)$  correspondiente a cada uno de los valores de  $y$ . Además para toda distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta, debe cumplirse lo siguiente:

- i).-  $0 \leq P(y) \leq 1$       Para toda  $y$
- ii).-  $\sum P(y) = 1$       Donde la sumatoria toma todos  $y$  los valores de  $y$  con probabilidad diferente de cero.

Para el caso de una variable aleatoria continua donde  $-\infty < y < \infty$ , y además

- i).-  $\lim_{y \rightarrow -\infty} F(y) = F(-\infty) = 0$
- ii).-  $\lim_{y \rightarrow \infty} F(y) = F(\infty) = 1$

Sea  $F(y)$  la función de distribución de una variable aleatoria continua  $Y$ , entonces  $f(y)$ , dado por

$$f(y) = \frac{dF(y)}{dy} = F'(y)$$

Siempre y cuando exista la derivada, se denomina la *función de densidad de probabilidad* para la variable aleatoria  $Y$ . Donde

$$f(y) \geq 0 \quad \text{para cualquier valor de } y$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y) dy = 1.$$

**Definición:** Al realizar varias veces un experimento para conseguir información acerca de un problema se obtiene un grupo de resultados: a cada resultado se le denomina *dato* u *observación*, y a el conjunto de datos se le llama *población*, o *espacio muestral*.

**Ejemplo.** Al lanzar una moneda tres veces, suponemos que

	observación:	
1er. lanzamiento	Aguila	} población.
2o. lanzamiento	Sol	
3er. lanzamiento	Sol	

Para los estudios estadísticos es primordial hacer un análisis del fenómeno cuestión, ya que dependiendo del tamaño y estructura del fenómeno será necesario solo tomar un subconjunto de él, lo cual nos hace necesaria la siguiente definición.

**Definición:** Al subconjunto de elementos de nuestra población o *espacio muestral*, se le llama *muestra*.

**Ejemplo.** Si se desea conocer la duración de los focos de una cierta fabrica, seria antieconómico probar todos los focos. En tal caso conviene seleccionar una parte de los focos, probarlos y

anotar las observaciones. El grupo de datos obtenidos constituirá una muestra de la población, cuyos elementos son la duración de los focos.

*Definición:* Si la obtención de un dato para la muestra no afecta la oportunidad que los demás elementos de la población tienen de ser seleccionados, los elementos son independientes, y además el resultado de un experimento no influye en el resultado de los demás (son independientes entre sí), la muestra es aleatoria (representativa). Cuando los elementos no cumplen con alguna de estas propiedades se dice que la muestra es sesgada.

Nosotros hemos visto con lo anterior que podemos tomar a la población en su totalidad o una porción de ella, que debe ser una muestra aleatoria representativa para así poder hacer inferencias estadísticas, para esto usaremos los estadísticos necesarios. Antes es conveniente hacer la observación, de que, al recoger una muestra encontraremos que generalmente los datos en bruto no son utilizables, así que deberemos manipularlos sin desviar información, ya que esto nos reflejaría resultados erróneos con respecto al fenómeno de estudio. Para el análisis de los datos de una muestra es necesario agruparlos, ordenarlos, determinar la frecuencia en que aparecen y presentarlos gráficamente por medio de histogramas, como a continuación se muestra

*Definición:* Se dice que el número de veces que ocurre un evento  $x$  es la frecuencia del evento, y se denota  $f_x$ .

Nosotros podemos organizar los datos como se presenta adelante, para encontrar con mayor facilidad la frecuencia de un

evento.

Evento	Elementos	$f_x$
A: 21 - 25	21, 23, 24,	3
B: 26 - 30	26, 26, 28, 30	4
C: 31 - 35	31	1
D: 36 - 40	37, 40	2
E: 41 - 46	41, 43, 43, 45	4

$$n = 14$$

De la tabla anterior podemos ver que:

$$f_x(A) = 3$$

$$f_x(B) = 4, \text{ etc.}$$

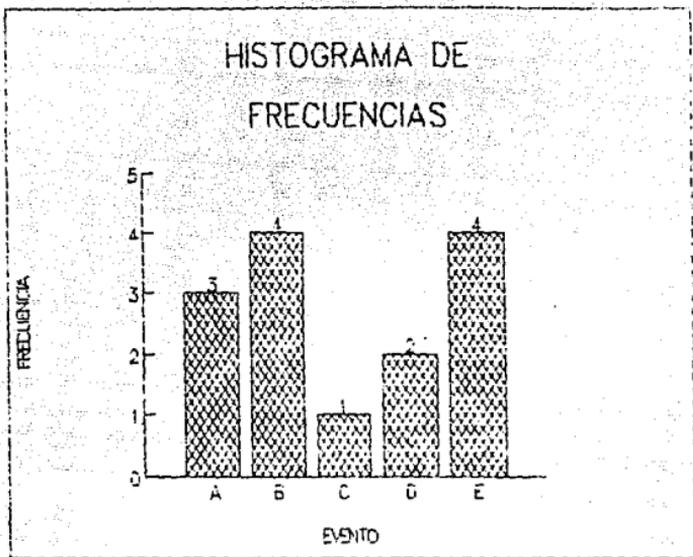
**Definición:** La frecuencia relativa es el cociente entre la frecuencia de el evento a observar y el número de veces  $n$  que se realizó el experimento. Esto es

$$f_r = \frac{f_x}{n}$$

En el ejemplo anterior se obtiene que la frecuencia relativa del evento A es

$$f_r(A) = \frac{f_x(A)}{n} = \frac{3}{14}$$

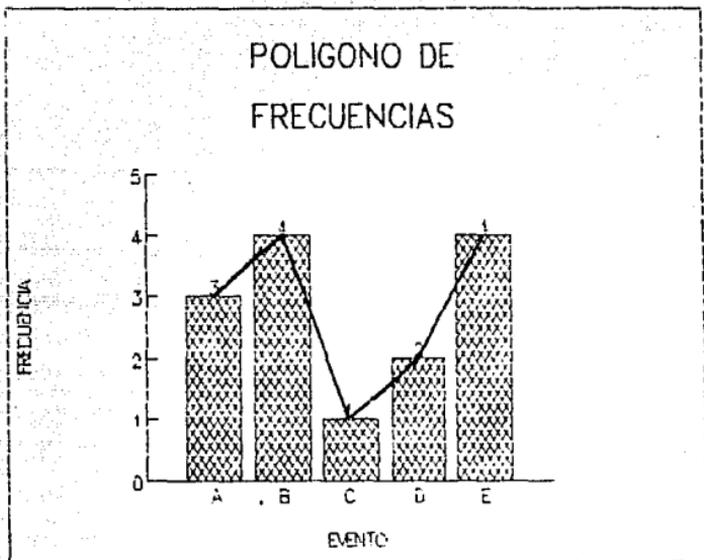
**Definición:** intervalos de clasificación son aquellos subconjuntos de la muestra que se obtienen de ordenar y clasificar los datos en subconjuntos.



**Definición:** A las frecuencias de clase divididas entre el ancho del intervalo de clase correspondiente, las llamaremos *frecuencias de clase normalizadas*, o simplemente, *frecuencias normalizadas*.

**Ejemplo.** Si una frecuencia de clase es igual a  $b$  y el ancho de su intervalo es 10, la frecuencia de clase normalizada es  $b/10$ .

**Definición:** El punto medio de cada intervalo se denomina *marca de clase*, y a la gráfica que pasa por todos los puntos medios de las barras del histograma se le llama *polígono de frecuencias*, como se puede observar a continuación



La razón principal para agrupar los datos, calcular las distribuciones de frecuencias y presentar gráficamente los resultados, es determinar el comportamiento del fenómeno que interesa analizar. Aunque un histograma, por ejemplo, proporciona bastante información, en ocasiones es suficiente contar con algunas descripciones numéricas de la distribución; tales números proporcionan una idea de los valores de la variable alrededor de los cuales tienden a aglomerarse las observaciones (*medidas de posición o tendencia central*), o dan una idea de la dispersión o variabilidad de las observaciones (*medidas de dispersión o variabilidad*), para poder así aplicar directamente los estadísticos con mucha certeza en nuestras afirmaciones acerca del fenómeno. Las *medidas de tendencia central y dispersión básicas* para un análisis son los que a continuación se citan

**Definición:** Se le llamará a todos los resultados posibles recogidos directamente del experimento *medidas* y son las siguientes

*frecuencia del evento;*

*mediana;*

*moda;*

*media;*

*varianza;*

*desviación estándar.*

**Definición:** A todos los resultados que se obtienen de trabajar con las medidas se les denomina *estadísticos*.

**Definición:** Un *estimador* es una regla, que establece cómo calcular una estimación basada en las mediciones contenidas en una muestra.

**Definición:** La *mediana* es el valor de la variable que divide una distribución de frecuencias acumuladas, en dos partes iguales, cuando esta cae dentro de un intervalo se calcula como sigue

$$\text{mediana} = f_c \frac{n/2 - f_a}{\Delta c} l_i$$

Donde

$f_c$  = frecuencia del intervalo que contiene a la mediana

$f_a$  = frecuencia acumulada hasta el límite inferior

$\Delta c$  = Ancho del intervalo que contiene a la mediana

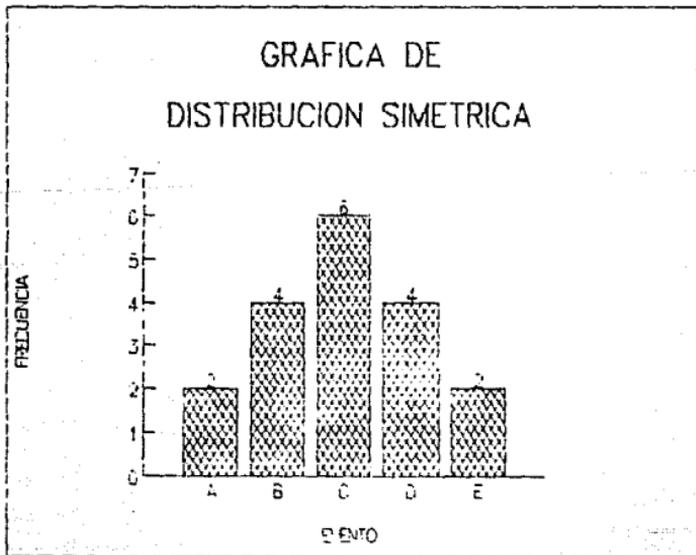
$n$  = número de datos que contiene la muestra

$l_i$  = límite real inferior del intervalo que la contiene

Ejemplo. Sean los datos 12,13,14,15,23,24,25,27,30 la mediana sería el valor central de el conjunto de datos en este caso 23.

**Definición:** En una distribución de frecuencias, la clase con la mayor frecuencia se llama *moda*. Cuando ocurre que dos clases coinciden con ser de máxima frecuencia se dice que la distribución es *bimodal*, si el número de clases con frecuencia máxima es  $n$  se dice que la distribución es *n-modal*.

**Definición:** Se dice que una distribución es *simétrica*, si la distribución es simétrica con respecto a la moda. Cuando lo anterior no sucede se dice entonces que la distribución es *sesgada*.



**Definición:** La media es otra medida de tendencia central y se define por

$$\text{media} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

Donde cada  $x_i$  es una observación de la muestra. Para distribuciones de datos agrupados la media se denota  $\bar{x}$  y se calcula

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i f_i}{n}$$

**Definición:** Sea  $Y$  una variable aleatoria discreta con función de probabilidad  $P(y)$ . Entonces, el valor esperado de  $Y$ ,  $E(Y)$ , está definido por

$$E(Y) = \sum_y y P(y)$$

Para el caso de una variable aleatoria continua

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y f(y) dy$$

Si  $P(y)$  es una caracterización exacta de la distribución de frecuencias de la población, entonces  $E(y) = \mu$ , que es la media de la población.

**Definición:** Sea  $g(Y)$  una función de una variable aleatoria discreta  $Y$ , que tiene una función de probabilidad  $P(y)$ . Entonces el valor esperado de  $g(Y)$  está definido por

$$E[g(Y)] = \sum_y g(y) P(y)$$

Hasta este momento hemos definido medidas de tendencia de las distribuciones, pero también es muy importante observar la dispersión de los datos de las distribuciones, a continuación estudiaremos las medidas de dispersión comunes.

**Definición:** Se la llama *desviación* a la diferencia de las observaciones y su media, es decir si  $\bar{x}$  es la media de una muestra y  $x$  son las observaciones de la misma entonces

$$\text{desviación} = x - \bar{x} \quad \text{para todo } x \text{ en la muestra}$$

**Definición:** La *varianza* describe la dispersión promedio de una muestra es denotada por  $\sigma^2$  y se calcula como sigue

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 f_{x_i}}{n}$$

Donde  $f_{x_i}$  es la frecuencia de la observación  $x_i$ , si la muestra no es ordenada se reduce a

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

Ya que  $f_{x_i}$  es igual a 1.

**Definición:** La *varianza* de una variable aleatoria, está definida también como el valor esperado de  $(Y - \mu)^2$ . Es decir,

$$\text{var}(Y) = E[(Y - \mu)^2]$$

**Definición:** Otra medida de dispersión muy útil es la

llamada *desviación estándar*  $\sigma$ , la cual es igual a la raíz cuadrada de la varianza, es decir

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

Ejemplo. De la tabla a continuación, encontraremos la media, la varianza, y la desviación estándar

$y$	$P(y)$
0	1/8
1	1/4
2	3/8
3	1/4

$$\mu = E(y) = \sum_{y=0}^3 yP(y) = 0(1/8) + 1(1/4) + 2(3/8) + 3(1/4) = 1.75$$

$$\sigma^2 = E[(Y - \mu)^2] = \sum_{y=0}^3 (y - \mu)^2 P(y) =$$

$$(0-1.75)^2(1/8) + (1-1.75)^2(1/4) + (2-1.75)^2(3/8) + (3-1.75)^2(1/4) = 0.9375$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{0.9375} = 0.97$$

**Teorema:** Sea  $c$  una constante. Entonces  $E(c) = c$ .

**Demostración:** Por la definición de valor esperado

$$E(c) = \sum_y cP(y) = c \sum_y P(y)$$

pero

$$\sum_y P(y) = 1$$

por lo tanto

$$E(c) = c(1) = c$$

**Corolario.** Sea  $g(y)$  una función de una variable aleatoria

$Y$  y sea  $c$  una constante. Entonces

$$E [c g(Y)] = c E [g(Y)]$$

La demostración de este corolario es directa del teorema anterior.

**Teorema.** Sean  $g_1(Y)$ ,  $g_2(Y)$ , ...,  $g_k(Y)$  funciones de la variable aleatoria  $Y$ . Entonces

$$E \sum_i g_i(Y) = \sum_i E [g_i(Y)]$$

Demostración:

$$\begin{aligned} E \sum_i g_i(Y) &= E [g_1(Y) + g_2(Y) + \dots + g_k(Y)] = \\ &= \sum_y [g_1(y) + g_2(y) + \dots + g_k(y)] P(y) = \\ &= \sum_y g_1(y) P(y) + \sum_y g_2(y) P(y) + \dots + \sum_y g_k(y) P(y) = \\ &= E [g_1(Y)] + E [g_2(Y)] + \dots + E [g_k(Y)] = \sum_i E [g_i(Y)] \end{aligned}$$

**Teorema:**  $\text{var}(Y) = \sigma^2 = E [(Y - \mu)^2] = E(Y^2) - \mu^2$

Demostración:

$$\sigma^2 = E [(Y - \mu)^2] = E [Y^2 - 2Y\mu + \mu^2] =$$

Como  $\mu$  es una constante, y  $E(Y) = \mu$

$$= E(Y^2) - 2\mu E(Y) + \mu^2 = E(Y^2) - 2\mu^2 + \mu^2 = E(Y^2) - \mu^2$$

**Ejemplo.** Utilizando el teorema anterior encontraremos la varianza de la tabla utilizada anteriormente.

$$E(Y^2) = 0^2(1/8) + 1^2(1/4) + 2^2(3/8) + 3^2(1/4) = 4$$

por lo que

$$\sigma^2 = E(Y^2) - \mu^2 = 4 - (1.75)^2 = 0.9375$$

**Definición:** El  $i$ -ésimo momento de una variable aleatoria  $Y$  respecto al origen está definido por  $E(Y^i)$  y se denota por  $\mu_i'$ .

En particular, el primer momento con respecto al origen es  $E(Y) = \mu'_1 = \mu$  y que  $\mu'_2 = E(Y^2)$  es utilizado para encontrar  $\sigma^2$ .

**Definición:** El  $i$ -ésimo momento de una variable aleatoria  $Y$  con respecto a su media, o el  $i$ -ésimo momento central de  $Y$  se define como  $E[(Y - \mu)^i]$  y se denota como  $\mu_i$ .

**Definición:** La función generadora de momentos  $m(t)$  para una variable aleatoria  $Y$  se define como  $E(e^{tY})$ . Se dice que una función generadora de momentos para  $Y$  existe cuando hay una constante positiva  $b$ , tal que  $m(t)$  es finita para  $|t| \leq b$ .

**Ejemplo.** Encuentre la función generadora de momentos para una variable aleatoria con función de distribución de Poisson que se verá con detalle más adelante.

$$P(y) = \frac{\lambda^y}{y!} e^{-\lambda}$$

Solución.

$$\begin{aligned} m(t) &= E(e^{tY}) = \sum_{y=0}^{\infty} e^{ty} P(y) = \sum_{y=0}^{\infty} e^{ty} \frac{\lambda^y}{y!} e^{-\lambda} \\ &= \sum_{y=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^y}{y!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{y=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^y}{y!} \end{aligned}$$

Por la expansión de Taylor sabemos que

$$\sum_{y=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^y}{y!} = e^{\lambda e^t}$$

Entonces multiplicando y dividiendo por  $e^{\lambda e^t}$

$$m(t) = e^{-\lambda} e^{\lambda e^t} \sum_{y=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^y}{y!} e^{-\lambda e^t}$$

La cantidad dentro de la sumatoria es la función de probabilidad de una variable aleatoria de Poisson con media  $\lambda e^t$ .

Entonces

$$\sum_y P(y) = 1 \quad \text{y} \quad m(t) = e^{-\lambda} e^{\lambda e^t} (1) = e^{\lambda(e^t - 1)}$$

Supóngase que se desea estimar la cantidad promedio  $\mu$  de una población. Podríamos presentar la estimación de dos maneras distintas. Se podría dar un solo número. La intención es que este número este cerca de  $\mu$ , la media desconocida de la población, a este tipo de estimación se le denomina estimación puntual, ya que se da un solo valor, o punto, como la estimación para  $\mu$ . Por otra parte, se podría decir que  $\mu$  quedaría entre dos números. En el segundo tipo de procedimiento de estimación damos dos valores que se pueden utilizar para construir un intervalo, que se supone incluirá el parámetro de estudio. Este segundo tipo de estimación, en donde especificamos un intervalo de valores posibles de  $\mu$ , se denomina estimación por intervalo. Es posible obtener muchos estimadores diferentes para un mismo parámetro poblacional, lo cual no debe sorprendernos. Cada cual representa una sola regla humana subjetiva para obtener una sola estimación. Esto nos lleva a un aspecto sumamente importante: algunos estimadores se consideran buenos, otros malos. No podemos evaluar la bondad de un procedimiento de estimación puntual solamente basándonos en una sola estimación, más bien debemos observar los resultados y utilizar el procedimiento de estimación, algunas veces. Puesto que las estimaciones son cifras, evaluaríamos la bondad de un estimador puntual construyendo una distribución de frecuencias de las estimaciones obtenidas en un muestreo repetitivo y observaríamos qué tan cerca se agrupa la distribución alrededor del parámetro de estudio.

Supóngase que se desea especificar una estimación puntual

para un parámetro de la población que llamaremos  $\theta$ . Se indicará el estimador de  $\theta$  por el símbolo  $\hat{\theta}$ , vemos que las características deseables de un buen estimador son bastante claras. Desearíamos que la distribución de las estimaciones, o más propiamente, la distribución muestral del estimador, se centrara alrededor de la media, es decir,  $E(\hat{\theta}) = \theta$ . Los estimadores puntuales que satisfacen esta propiedad se denominan *insesgados*. Lo anterior se escribe formalmente como sigue

*Definición:* Sea  $\hat{\theta}$  un estimador puntual de un parámetro  $\theta$ . Entonces  $\hat{\theta}$  es un estimador *insesgado* si  $E(\hat{\theta}) = \theta$ . De lo contrario, se dice que es *sesgado*, y el sesgo  $B$  de un estimador puntual  $\hat{\theta}$  está dado por

$$B = E(\hat{\theta}) - \theta.$$

Además de que los estimadores sean insesgados, se pretende de que la dispersión de una distribución de estimaciones sea lo más pequeña posible, es decir, se desea que la  $\text{var}(\hat{\theta})$  sea mínima. Dados dos estimadores insesgados de un parámetro  $\theta$ , seleccionamos el estimador con la menor varianza, permaneciendo constante todo lo demás. Lo cual nos induce a la siguiente definición:

*Definición:* La *media del cuadrado del error* de un estimador puntual  $\hat{\theta}$  se define como el valor esperado de  $(\hat{\theta} - \theta)^2$ .

La media del cuadrado del error de un estimador  $\hat{\theta}$ , denotada por el símbolo  $MCE(\hat{\theta})$ , es una función de de su varianza y de su sesgo. Se puede demostrar fácilmente que

$$MCE(\hat{\theta}) = \text{var}(\hat{\theta}) + B^2$$

Como se hizo referencia anteriormente, el objetivo de la estadística es hacer inferencias con respecto a una población

basándose en la información contenida en una muestra y obteniendo una medida correspondiente a la bondad de la inferencia. Cada tema tratado anteriormente desempeña un papel en el estudio de la inferencia estadística, pero ninguno de ellos se relaciona tan estrechamente con el objetivo de la estadística como el estudio de las funciones de variable aleatoria. Esto se debe al hecho de que todos los estadísticos utilizados para estimar parámetros poblacionales o para tomar decisiones con respecto a una población, son funciones de las  $n$  observaciones aleatorias que se presentan en una muestra. Para explicar esto, considerese el problema de estimar una media poblacional. Procediendo en forma intuitiva sacamos una muestra aleatoria de  $n$  observaciones  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , de la población y aplicamos la media muestral

$$\bar{y} = \frac{y_1 + \dots + y_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n}$$

como una estimación de  $\mu$ . que esta estimación sea buena depende del comportamiento de las variables aleatorias  $y_1, y_2, \dots, y_n$  sobre  $\bar{y}$ . La medida de la bondad de una estimación es el error en la estimación, la diferencia entre la estimación y el parámetro estimado (en este ejemplo  $\bar{y} - \mu$ ). Debido a que  $y_1, y_2, \dots, y_n$  son variables aleatorias en un muestreo repetido,  $\bar{y}$  también será una variable aleatoria (que en realidad es una función de  $n$  variables  $y_1, y_2, \dots, y_n$ ). Por tanto, no podemos estar seguros que el error de la estimación sea menor que un valor específico, digamos  $B$ . Sin embargo es factible determinar la distribución de probabilidad del estimador  $\bar{y}$ . Se podrá utilizar

esta distribución de probabilidad para determinar la probabilidad de que el error en la estimación sea menor o igual a  $b$ .

Para determinar la distribución de probabilidad de  $n$  variables aleatorias  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , debe encontrarse primero la distribución de probabilidad conjunta de tales variables aleatorias. En general, se supone que las observaciones se obtienen mediante un muestreo aleatorio.

Ahora se presentarán tres métodos para encontrar la distribución de probabilidad para una función de variables aleatorias.

Se explicará el método de las funciones de distribución. Si  $Y$  tiene una función de densidad  $f(y)$ , y si  $U$  es una función de  $Y$ , entonces es posible determinar  $F_U(u) = P(U \leq u)$  directamente al integrar  $f(y)$  en la región para la cual  $U \leq u$ . Se puede obtener la función de densidad para  $U$  al derivar  $F_U(u)$ . El siguiente ejemplo ilustra el método.

Un proceso para refinar azúcar produce diariamente hasta una tonelada de azúcar pura, pero la producción real,  $Y$ , es una variable aleatoria debido a descomposturas de la maquinaria y otros retrasos. Supóngase que  $Y$  tiene una función de densidad dada por:

$$f(y) = \begin{cases} 2y, & \text{si } 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{en cualquier otro lado.} \end{cases}$$

La compañía recibe 3 millones de pesos por cada tonelada de azúcar refinada, pero también tiene un gasto fijo diario de 1 millón de pesos, la utilidad diaria en millones de pesos, es  $U =$

3Y - 1. Encuentre la función de densidad de probabilidad para U.

Solución. Para aplicar el procedimiento de la función de distribución, debe encontrarse

$$F_U(u) = P(U \leq u) = P(3Y - 1 \leq u) = P\left(Y \leq \frac{u+1}{3}\right)$$

Si  $u < -1$ , entonces  $(u+1)/3 < 0$ , y por tanto

$$F_U(u) = P\left\{Y \leq \frac{(u+1)}{3}\right\} = 0.$$

También, si  $u > 2$ , entonces  $(u+1)/3 > 1$ , y

$$F_U(u) = P\left\{Y \leq \frac{(u+1)}{3}\right\} = 1.$$

Sin embargo, si  $-1 \leq u \leq 2$ , la probabilidad se puede expresar como una integral de  $f(y)$ , y

$$P\left\{Y \leq \frac{u+1}{3}\right\} = \int_0^{(u+1)/3} f(y) dy = \int_0^{(u+1)/3} 2y dy = \left[\frac{u+1}{3}\right]^2$$

(Obrévese que tanto Y varía de 0 a 1, U varía de -1 a 2.)

$$F_U(u) = \begin{cases} 0, & \text{si, } u \leq -1 \\ \left[\frac{u+1}{3}\right]^2, & \text{si, } -1 \leq u \leq 2 \\ 1, & \text{si, } u > 2 \end{cases}$$

Por tanto,

$$f_U(u) = \frac{dF_U(u)}{du} = \begin{cases} (2/9)(u+1), & \text{si, } -1 \leq u \leq 2 \\ 0, & \text{en cualquier otro lado.} \end{cases}$$

Ahora se explicará el método de las transformaciones para

encontrar la distribución de probabilidad de una función de variables aleatorias, que es un caso especial del método anterior. Mediante el procedimiento de la función de distribución puede llegarse a un método más sencillo para determinar la función de densidad de  $U = h(y)$ , siempre y cuando  $h(y)$  sea decreciente o creciente (monótona). ( $h(y)$  creciente significa que si  $y_1 < y_2$ , entonces  $h(y_1) < h(y_2)$  para cualesquiera números reales  $y_1, y_2$ .)

Supóngase que  $h(y)$  es una función creciente de  $y$ , y además  $U = h(y)$ , en donde  $Y$  tiene la función de densidad  $f_y(y)$ . Donde el conjunto de los puntos  $y$  son tales que  $h(y) \leq u$  es exactamente igual al conjunto de los puntos  $y$  tales que  $y \leq h^{-1}(u)$ . Por lo tanto

$$P(U \leq u) = P(Y \leq y) \quad \text{en donde } y = h^{-1}(u)$$

$$F_U(u) = F_y(y) \quad \text{en donde } y = h^{-1}(u)$$

Al derivar con respecto a  $u$ , se obtiene

$$f_U(u) = \frac{dF_U(u)}{du} = \frac{dF_y(y)}{dy} = f_y(y) \frac{dy}{du}$$

en donde  $y = h^{-1}(u)$ . (Obsérvese que  $\frac{dy}{du} = \left(\frac{du}{dy}\right)^{-1}$ .)

Así, hemos desarrollado una nueva manera para encontrar  $f_U(u)$  que proviene del método general de las funciones de distribución. Para encontrar  $f_U(u)$ , exprese  $y$  en términos de  $u$ ; es decir, encuentre  $y = h^{-1}(u)$ , sustituya esta expresión en  $f_y(y)$  y multiplique después esta cantidad por  $\frac{dy}{du}$ . Ilustraremos este procedimiento con un ejemplo.

Ejemplo. En el ejemplo anterior se definió una variable aleatoria  $Y$  (la cantidad de azúcar producida) con la función de densidad.

$$f(y) = \begin{cases} 2y, & \text{si } 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{en cualquier otro lado.} \end{cases}$$

Nos interesaba una nueva variable aleatoria (la ganancia), dada por  $U = 3Y - 1$ . Encuentre la función de densidad de probabilidad para  $U$  mediante el método de transformación.

Solución: La función estudiada aquí es  $h(y) = 3Y - 1$ , que es creciente en  $y$ . Si  $u = 3y - 1$ , entonces

$$y = h^{-1}(u) = \frac{u + 1}{3} \quad \vee \quad \frac{dy}{du} = \frac{1}{3}$$

Entonces

$$\begin{aligned} f_U(u) &= f_Y(y) \frac{dy}{du} = 2y \frac{dy}{du} = 2 \left( \frac{u + 1}{3} \right) \left( \frac{1}{3} \right) = \\ &= \frac{2(u + 1)}{9}, \quad -1 \leq u \leq 2 \end{aligned}$$

$$f_U(u) = 0 \quad \text{en cualquier otro punto}$$

Como puede apreciarse  $f_U(u)$  es positiva en el intervalo  $0 < u < 1$  transformado en el eje  $\mu$  mediante la función  $u = 3y - 1$ . Obsérvese que esta respuesta está de acuerdo con la respuesta del ejemplo anterior.

Si  $h(y)$  es una función decreciente, entonces el conjunto de puntos  $y$  tales que  $h(y) \leq u$  es el mismo conjunto de los puntos tales que  $y \geq h^{-1}(u)$ .

Se deduce que para  $U = h(Y)$

$$P(U \leq u) = P(Y \geq y) \quad \text{en donde } y = h^{-1}(u)$$

$$F_U(u) = 1 - F_Y(y) \quad \text{en donde } y = h^{-1}(u)$$

Al derivar con respecto a  $u$ , se obtiene

$$f_U(u) = -f_Y(y) \frac{dy}{du}$$

Como  $\frac{dy}{du}$  es negativa para una función decreciente, entonces

$$f_U(u) = f_Y(y) \left| \frac{dy}{du} \right|$$

Los resultados se combinan en el enunciado siguiente.

**Definición:** Sea  $Y$  una variable aleatoria con la función de densidad de probabilidad  $f_Y(y)$ . Si  $h(y)$  es ya sea creciente o bien decreciente en  $y$ , entonces  $U = h(y)$  tiene la función de densidad

$$f_U(u) = f_Y(y) \left| \frac{dy}{du} \right| \quad y = h^{-1}(u)$$

El método de la función generadora de momentos para encontrar la distribución de probabilidad de una función de las variables aleatorias  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  se basa en el siguiente teorema de unicidad.

**Teorema:** Supóngase que existen para cada una de dos variables aleatorias  $X, Y$  las funciones generadoras de momentos dadas por  $m_X(t)$  y  $m_Y(t)$ , respectivamente. Si  $m_X(t) = m_Y(t)$  para todos los valores de  $t$ , entonces  $X, Y$  tienen la misma distribución de probabilidad.

Donde en probabilidad existen las siguientes distribuciones de probabilidad para variables discretas y continuas.

**Distribuciones Discretas.**

Distribución binomial

**Definición:** Un experimento binomial es aquel que tiene las siguientes características:

- (i).- El experimento consta de  $n$  pruebas idénticas.
- (ii).- Cada prueba tiene dos resultados posibles. Se llamará a uno el éxito  $E$  y al otro el fracaso  $F$ .
- (iii).- La probabilidad de tener éxito en una sola prueba es igual a  $p$ , y permanece constante en cada prueba. La probabilidad de fracaso es igual a  $(1 - p) = q$ .
- (iv).- Las pruebas son independientes.
- (v).- La variable aleatoria bajo estudio es  $Y$ , el número de éxitos observados en las  $n$  pruebas.

La función de distribución de probabilidad de un experimento binomial esta dada por

$$P(y) = \binom{n}{y} p^y q^{n-y}, \quad y = 0, 1, \dots, n$$

Media

$$np$$

Varianza

$$np(1-p)$$

Función generadora de momentos

$$[pe^t + (1-p)]^n$$

Ejemplo. La experiencia a demostrado que el 30% de todas las personas afectadas por cierta enfermedad, se recuperan. Si tenemos a 10 personas a las cuales se le aplica la vacuna ¿cuál es la probabilidad de que se recuperen 9 personas?

$$P(9) = \binom{10}{9} (0.3)^9 (0.7)^{10-9} = 0.000138$$

Distribución binomial negativa

Función de densidad de probabilidad

$$P(y) = \binom{y-1}{r-1} p^r q^{y-r}$$

$$y = r, r+1, \dots$$

Media

$$r/p$$

varianza

$$\frac{r(1-p)}{p^2}$$

Función generadora de momentos

$$\left[ \frac{pe^t}{1-(1-p)e^t} \right]^r$$

### Distribución geométrica

**Definición:** La variable aleatoria que tiene distribución geométrica se define para un experimento que es muy similar al experimento binomial. También se refiere a pruebas independientes, y cada una puede tener dos resultados, éxito y fracaso. La probabilidad de tener éxito es  $p$  y es constante en cada prueba. Sin embargo, la variable aleatoria geométrica  $Y$  es el número de la prueba en la cual ocurre el primer éxito, en lugar del número de éxitos que ocurren en  $n$  pruebas. Entonces el experimento consiste en una serie de pruebas que termina hasta encontrar el primer éxito. De este modo

$$P(y) = P(\underbrace{FF\dots F}_{y-1}E)$$

Y se calcula como sigue

$$P(y) = q^{y-1}p$$

$$y = 1, 2, 3, \dots$$

Media

$$1/p$$

varianza

$$(1-p)/p^2$$

Función generadora de momentos

$$\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}$$

**Ejemplo.** Supóngase que la probabilidad de que falle un motor durante cualquier periodo de una hora es  $p = 0.02$ . Encuentre la probabilidad de que dicho motor funcione bien durante dos horas.

$$P(Y \geq 3) = \sum_{y=3}^{\infty} P(y)$$

Como  $\sum_{y=1}^{\infty} P(y) = 1$

$$\begin{aligned} P(Y \geq 3) &= 1 - \sum_{y=1}^2 P(y) = 1 - p - pq = \\ &= 1 - 0.02 - (.98)(.02) = 0.9604 \end{aligned}$$

### Distribución hipergeométrica

**Definición:** Supóngase que una población contiene un número finito  $N$  de elementos, cada uno de los cuales tiene una de dos características. De esta manera  $r$  elementos podrían ser de un tipo y  $b = N - r$  del otro tipo. Se selecciona una muestra aleatoria de  $n$  elementos de la población y la variable aleatoria de interés es  $Y$ . El número de elementos del tipo uno en la muestra. Esta variable tiene una distribución de probabilidades *hipergeométrica*. La probabilidad para un punto muestral es

$$P(y) = \frac{\binom{r}{y} \binom{N-r}{n-y}}{\binom{N}{n}}$$

Donde  $y$  es un entero  $1, 2, \dots, n$ , sujeto a  $y \leq r$ ;  $n - y \leq N - r$

Media

$$nr/N$$

varianza

$$n \left( \frac{r}{N} \right) \left( \frac{N-r}{N} \right) \left( \frac{N-n}{N-1} \right)$$

Función generadora de momentos

No existe

**Ejemplo.** Se quiere seleccionar 10 obreros de un grupo de 20

obreros, donde se suponen 5 con mayor casidad en el trabajo. ¿Cuál es la probabilidad de que de el grupo de 10 obreros seleccionados 5 sean de los mejores

donde  $N = 20$ ;  $n = 10$ ;  $r = 5$ ;  $Y = 5$ .

$$P(5) = \frac{\binom{5}{5} \binom{20-5}{10-5}}{\binom{20}{10}} = \frac{\binom{5}{5} \binom{15}{5}}{\binom{20}{10}} = \left[ \frac{15!}{5!10!} \right] \left[ \frac{10!10!}{20!} \right] = \frac{21}{1292} = 0.0162$$

### Distribución de Poisson

*Definición:* Sea un intervalo, con  $n$  divisiones de el llamadas cada una subintervalos, cada uno de los cuales es tan pequeño que podría ocurrir en él a lo más un evento, con una probabilidad diferente de cero, a esta distribución se le conoce como *distribución de probabilidad de Poisson*. Denote la probabilidad de un evento en cualquier subintervalo como  $p$ , y entonces

$$P(\text{ningun evento en un subintervalo}) = 1 - p$$

$$P(\text{un evento en un subintervalo}) = p$$

$$P(\text{más de un evento en un subintervalo}) = 0$$

De este modo el numero total de eventos en una intervalo es exactamente el número total de subintervalos que tienen un evento. Si se puede considerar la ocurrencia de eventos como independientes de un subintervalo a otro, el numero total de eventos tiene una distribución binomial.

Aunque no hay manera única de elegir los subintervalos, y por eso no conocemos  $n$ ;  $p$ , parece razonable que la probabilidad  $p$  de

un evento en uno de los subintervalos decrecerá al dividir el intervalo en un número  $n$  cada vez mayor de subintervalos. Haciendo  $\lambda = np$  y tomando el límite de la probabilidad binomial se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{y} p^y q^{n-y} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-y+1)}{y!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^y \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-y}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\lambda^y}{y!}\right) \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-y+1)}{n^y} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-y}$$

$$\frac{\lambda^y}{y!} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^y \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{y-1}{n}\right)$$

Sabiendo que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda}$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^y \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{y-1}{n}\right) = 1$$

entonces se obtiene de la ecuación anterior

$$P(y) = \frac{\lambda^y}{y!} e^{-\lambda}$$

La cual es la función de distribución de probabilidades de Poisson.

Media	$\lambda$
varianza	$\lambda$
Función generadora de momentos	$\exp[\lambda(e^t - 1)]$

Ejemplo. Supóngase que un sistema de detección de errores de producción de una fábrica, y el sistema esta arreglado para que se detecte una pieza defectuosa cada media hora. Supóngase que  $Y$

tiene una distribución de Poisson, Calcule la probabilidad de que en un periodo de media hora no se detecte una pieza defectuosa.

En este caso el periodo es cada media hora y la media de los errores detectados es  $\lambda = 1$ , por lo que la probabilidad de que no se encuentre un error  $y = 0$  es

$$P(0) = \frac{1^0}{0!} e^{-1} = 0.368$$

A manera de resumen.

Distribución	E(Y)	var(Y)	m(t)
binomial	$np$	$npq$	$(pe^t + (1-p))^n$
geométrica	$1/p$	$q/p^2$	$\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}$
hipergeométrica	$\frac{nr}{N}$	$\frac{nr(N-r)(N-n)}{N^2(N-1)}$	no existe
de Poisson	$\lambda$	$\lambda$	$\left[ \frac{pe^t}{1-(1-p)e^t} \right]^r$

## Distribuciones Continuas

### Distribución uniforme

Supóngase que un evento siempre ocurra en el intervalo  $(a, b)$  y que la probabilidad de que ocurra en un subintervalo dado es sólo proporcional a la longitud del subintervalo. es decir, si es igualmente factible que el evento ocurra en el intervalo  $A_1(a, x_1)$  y el intervalo  $A_2(x_1, b)$ , implica que los intervalos son iguales. Sea  $Y$  el resultado del evento en cada prueba. La variable aleatoria  $Y$ , que acaba de presentarse, es una variable aleatoria que tiene distribución uniforme. La forma general para la función de densidad de la variable anterior es como sigue

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} & \theta_1 \leq y \leq \theta_2 \\ 0 & \text{en cualquier otro punto} \end{cases}$$

Donde  $\theta_1 = a$  y  $\theta_2 = b$ .

Media

$$\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$$

varianza

$$\left[ \frac{\theta_1 + \theta_2}{12} \right]^2$$

Función generadora de momentos

$$\frac{e^{t\theta_2} - e^{t\theta_1}}{t(\theta_2 - \theta_1)}$$

Distribución normal

En la práctica nos encontraremos a menudo con distribuciones de datos que presentan gráficamente (su histograma) la forma de una campana. Independientemente de las razones por las cuales ocurren, es un hecho que las mediciones realizadas con respecto a muchas variables aleatorias parecen haber sido generadas a partir de distribuciones de frecuencias poblacionales que pueden aproximarse muy bien mediante una distribución de probabilidad normal. La función de densidad normal está dada por

$$f(y) = \frac{e^{-(y-\mu)^2/2\sigma^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \quad \sigma > 0, \quad -\infty < \mu < \infty, \quad -\infty < y < \infty$$

Media

$$\mu$$

varianza

$$\sigma^2$$

Función generadora de momentos

$$\exp\left[\mu t + \frac{t^2 \sigma^2}{2}\right]$$

Distribución gamma

Algunas variables aleatorias son siempre no negativas y por varias razones tienen distribuciones de datos que son sesgadas (asimétricas) a la derecha, es decir, la mayor parte del área bajo la función de densidad se encuentra cerca del origen y la función de densidad disminuye gradualmente cuando  $y$  aumenta. Su función de

densidad se presenta a continuación

$$f(y) = \begin{cases} \frac{y^{\alpha-1} e^{-y/\beta}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)}, & \alpha, \beta > 0; 0 \leq y < \infty \\ 0, & \text{en cualquier otro punto} \end{cases}$$

$$\text{En donde } \Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} y^{\alpha-1} e^{-y} dy$$

Media

$$\alpha\beta$$

varianza

$$\alpha\beta^2$$

Función generadora de momentos

$$(1 - \beta t)^{-\alpha}$$

Distribución exponencial

Esta distribución es un caso especial de la distribución gamma, cuando  $\alpha = 1$ , por lo tanto

$$f(y) = \begin{cases} \frac{e^{-y/\beta}}{\beta \Gamma(1)}, & \beta > 0; 0 < y < \infty \\ 0, & \text{en cualquier otro punto} \end{cases}$$

$$\text{En donde } \Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-y} dy$$

Media

$$\beta$$

varianza

$$\beta^2$$

Función generadora de momentos

$$(1 - \beta t)^{-1}$$

Distribución ji-cuadrada

Una variable aleatoria tipo gamma que tiene una función de densidad con parámetros  $\alpha = \nu/2$  y  $\beta = 2$  se denomina variable

aleatoria ji-cuadrada ( $\chi^2$ ). La variable aleatoria se presenta con frecuencia en la teoría de la estadística. El parámetro  $\nu$  se denomina número de grados de libertad asociado a la variable aleatoria ji-cuadrada. Donde su función de densidad es

$$f(y) = \begin{cases} \frac{(\chi^2)^{\nu/2-1} e^{-\chi^2/2}}{2^{\nu/2} \Gamma(\nu/2)} & \alpha, \beta > 0; \chi^2 > 0 \\ 0, & \text{en cualquier otro punto} \end{cases}$$

$$\text{En donde } \Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} y^{\alpha-1} e^{-y} dy$$

Media	$\nu$
varianza	$2\nu$
Función generadora de momentos	$(1 - 2t)^{-\nu/2}$

#### Distribución beta

La función de densidad beta es una función de densidad con dos parámetros definida en el intervalo  $[0, 1]$ . Como tal, se utiliza frecuentemente como un modelo para fracciones, tal como la proporción de impurezas en un producto químico o la fracción de tiempo que una máquina está en reparación. Su función de densidad de probabilidad es como sigue

$$f(y) = \begin{cases} \left[ \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \right] y^{\alpha-1} (1-y)^{\beta-1} & \alpha, \beta > 0; 0 < y < 1 \\ 0, & \text{en otro lado} \end{cases}$$

$$\text{En donde } \Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} y^{\alpha-1} e^{-y} dy$$

Media	$\frac{\alpha}{\alpha + \beta}$
varianza	$\frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2 (\alpha + \beta + 1)}$
Función generadora de momentos	no existe

Recuerde que las funciones de densidad son modelos teóricos para las poblaciones de datos que se presentan en la realidad. ¿Cómo podemos saber cuál modelo debe utilizarse, y hasta qué punto afecta el escoger un modelo equivocado?

Para contestar esta pregunta primero, es poco probable que alguna vez seleccionemos una función de densidad que nos dé una representación perfecta de la realidad, pero la honrad de ajuste, no es el criterio para valorar lo adecuado de un modelo. El objetivo de un modelo probabilístico es proporcionar el procedimiento para hacer inferencias con respecto a una población basada en la información contenida en una muestra. Como señaio anteriormente, la probabilidad de la muestra observada (o una cantidad proporcional a ella) será el instrumento para hacer una inferencia con respecto a la población. Como consecuencia, una función de densidad que nos da un ajuste pobre para la distribución de frecuencias poblacional podría (pero no necesariamente) resultar en relaciones probabilísticas incorrectas y llevar a inferencias erróneas con respecto a la población. Un buen modelo nos da buenas inferencias con respecto a la población estudiada.

Otra vía para seleccionar un modelo es construir un histograma de frecuencias para los datos extraídos de una población y escoger una función de densidad que a simple vista daría la curva de frecuencias similar. Por ejemplo, si un conjunto  $n = 100$  datos muestrales tuviera una distribución de frecuencias acampanada, podríamos concluir que la función de densidad normal sería un modelo adecuado para la distribución de frecuencias de la población.

En todas las explicaciones anteriores acerca de la inferencia estadística, se supuso que las variables aleatorias  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  eran independientes e igualmente distribuidas, y que el valor esperado de  $Y_i$ ,  $E(Y_i)$ , es constante (si existe). Es decir,  $E(Y_i) = \mu$  no depende de cualquier otra variable. Obviamente este supuesto no es válido en muchos problemas de inferencia. Por ejemplo, el promedio de la distancia de frenado para un tipo particular de automóvil dependerá de la velocidad del automóvil; la efectividad media de un antibiótico depende del tiempo durante el cual haya sido almacenado; la media de elongación observada en una aleación metálica depende de la fuerza que se le aplica y de la temperatura de la aleación. Ahora estudiaremos los procedimientos inferenciales que pueden utilizarse cuando una variable aleatoria  $Y$ , denominada *variable dependiente*, tiene una media que es una función de una o más variables aleatorias  $x_1, x_2, \dots, x_n$  designadas *variables independientes*. (En este contexto se utiliza la dependencia y la independencia en sentido matemático. No existe ninguna relación con variables aleatorias independientes.)

Se pueden utilizar muchos tipos diferentes de funciones matemáticas para representar el modelo de una respuesta que sea función de una o más variables independientes. Es posible clasificar estos modelos en dos categorías, los modelos determinísticos y los modelos probabilísticos. Por ejemplo, suponga que desea relacionar una respuesta  $y$  con una variable  $x$  y que su relación esta dada por la ecuación

$$y = \beta_0 + \beta_1 x$$

(en donde  $\beta_0, \beta_1$  son parámetros desconocidos). Este modelo se denomina modelo matemático *determinístico* porque algún error en la

predicción de  $y$  como función de  $x$ .

Supóngase que se obtiene una muestra de  $n$  valores de  $y$  que corresponde a  $n$  valores diferentes de la variable independiente  $x$ , y que la representancia grafica de los datos es como en la figura siguiente. Es evidente que en la figura que el valor esperado de  $y$  puede aumentar como una función lineal de  $x$ , pero que un modelo determinístico queda lejos de ser una descripción adecuada de la realidad. Esto nos indica que el modelo determinístico no es una representación exacta de la relación entre las dos variables. Además si se utilizara el modelo para predecir, la predicción tendrá un error desconocido. La predicción de  $y$  para un valor dado de  $x$  es un proceso inferencial y se requiere conocer las propiedades del error de la predicción se ésta va a ser de utilidad en la realidad.



En contraste con los modelos determinísticos, los estadísticos utilizan modelos probabilísticos. Por ejemplo, podríamos representar las respuestas de la figura mediante el modelo

$$E(Y) = \beta_0 + \beta_1 x$$

lo que equivale a,

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x + \epsilon$$

En donde  $\epsilon$  es una variable aleatoria con una distribución de probabilidad específica con media cero. Considere a  $Y$  como una variable que tiene un componente determinístico,  $E(Y)$ , más un componente aleatorio  $\epsilon$ . Este modelo toma en cuenta el comportamiento aleatorio de  $Y$  representado en la figura anterior y representa una descripción más adecuada de la realidad que el modelo determinístico. Además, se pueden obtener las propiedades del error de predicción para  $Y$  en muchos de los modelos probabilísticos.

Si se pueden aplicar los modelos determinísticos para hacer predicciones con un error insignificante para fines prácticos los utilizamos. Si no, buscamos un modelo probabilístico, que no será una descripción exacta de la realidad, pero que nos permitirá estimar la validez de nuestras inferencias.

Aunque haya un sinnúmero de funciones diferentes se pueden utilizar como modelo de valor medio de las variables respuesta  $Y$  como una función de una o más variables independientes. Nos concentraremos en el conjunto de modelos denominados modelos estadísticos lineales. Si  $Y$  es una variable de respuesta y  $x$  una variable independiente, parece razonable utilizar el modelo  $E(Y) = \beta_0 + \beta_1 x$ . Para valores desconocidos de los parámetros  $\beta_0$  y  $\beta_1$ .

Obsérvese que en este modelo  $E(Y)$  es una función lineal de  $x$ , (para  $\beta_0$  y  $\beta_1$  dados) y también es una función lineal de  $\beta_0$  y  $\beta_1$  (ya que  $E(Y) = c\beta_0 + d\beta_1$  con  $c = 1$  y  $d = x$ ). Cuando se afirma tener un modelo estadístico lineal para  $Y$ , se denota que  $E(Y)$  es una función lineal de los parámetros desconocidos  $\beta_0$  y  $\beta_1$  y no son necesariamente una función lineal de  $x$ . Por lo tanto

$$E(Y) = \beta_0 + \ln(x)\beta_1 + \varepsilon$$

es un modelo lineal suponiendo que  $\ln(x)$  es una constante conocida.

Si el modelo expresa a  $E(Y)$  como una función lineal de  $\beta_0$  y  $\beta_1$  solamente, el modelo se denomina *modelo de regresión simple*. Si hay más de una variable independiente de interés, digamos  $x_1, x_2, \dots, x_k$  y si el modelo de  $E(Y)$  es

$$E(Y) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_k x_k$$

el modelo se conoce como *modelo de regresión múltiple*. Ya que se consideran  $x_1, x_2, \dots, x_k$  como constantes conocidas, supuestamente son medidas sin error en un experimento. Por ejemplo, si se considera que la producción  $y$  es una función de la variable  $T$ , la temperatura de un proceso químico, podría suponerse  $x_1 = T$  y  $x_2 = e^T$  y como modelo de  $E(Y)$  a  $E(Y) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2$ , lo que equivale a  $E(Y) = \beta_0 + \beta_1 T + \beta_2 e^T$ .

**Definición:** El modelo estadístico lineal que relaciona una respuesta aleatoria  $Y$  con un conjunto de variables independientes  $x_1, \dots, x_k$  tiene la forma

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_k x_k + \varepsilon$$

en donde  $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$  son parámetros desconocidos,  $\varepsilon$  es

una variable aleatoria y  $x_1, x_2, \dots, x_k$  son constantes conocidas. Supondremos que  $E(\epsilon) = 0$  y por lo tanto

$$E(Y) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_k x_k$$

Un procedimiento para estimar los parámetros de cualquier modelo lineal es el método de los mínimos cuadrados, que se ilustra sencillamente aplicándolo para ajustar una línea recta a través de un conjunto de puntos que representan los datos. Supóngase que se desea ajustar el modelo

$$E(Y) = \beta_0 + \beta_1 x$$

a un conjunto de puntos conocido. Es decir, se postula que  $Y = \beta_0 + \beta_1 x + \epsilon$ , en donde  $\epsilon$  tiene una distribución de probabilidad con  $E(\epsilon) = 0$ . Si  $\hat{\beta}_0$  y  $\hat{\beta}_1$  son estimadores de los parámetros  $\beta_0$  y  $\beta_1$ , entonces  $\hat{Y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$  es obviamente un estimador de  $E(Y)$ .

El procedimiento de los mínimos cuadrados para ajustar una recta a través de un conjunto de  $n$  puntos es similar al método que podríamos utilizar para ajustar una recta a simple vista; es decir, se pretende que las desviaciones sean "pequeñas" en cierto sentido. Una manera conveniente para lograr esto, y que nos aporta estimadores con propiedades adecuadas, es minimizar la suma de los cuadrados de las desviaciones verticales de la recta ajustada. Por lo tanto si

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i$$

es el valor que se predice del  $i$ -ésimo valor de  $y$  entonces la desviación del valor observado de  $y$  a partir de la recta  $\hat{y}$  es

$$v_i - \hat{y}_i$$

y la suma de los cuadrados de los cuadrados de las desviaciones que denben minimizarse es

$$SCE = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^n [y_i - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i)]^2$$

la cantidad SCE se llama también suma de los cuadrados de los errores por motivos que serán obvios en seguida.

Si SCE tiene un mínimo éste ocurrirá para los valores  $\hat{\beta}_0$  y  $\hat{\beta}_1$  que satisfacen las ecuaciones,  $\partial SCE / \partial \hat{\beta}_0 = 0$  y  $\partial SCE / \partial \hat{\beta}_1 = 0$ . Al obtener las derivadas parciales de SCE con respecto a  $\hat{\beta}_0$  y  $\hat{\beta}_1$ , respectivamente, y al igualar a cero, obtenemos

$$\frac{\partial SCE}{\partial \hat{\beta}_0} = \frac{\partial \left\{ \sum_{i=1}^n [y_i - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i)]^2 \right\}}{\partial \hat{\beta}_0} = -\sum_{i=1}^n 2(y_i - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i))(1) =$$

$$= -2 \left( \sum_{i=1}^n y_i - n\hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n x_i \right) = 0$$

$$\frac{\partial SCE}{\partial \hat{\beta}_1} = \frac{\partial \left\{ \sum_{i=1}^n [y_i - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i)]^2 \right\}}{\partial \hat{\beta}_1} = -\sum_{i=1}^n 2(y_i - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i))(x_i) =$$

$$= -2 \left( \sum_{i=1}^n x_i y_i - \hat{\beta}_0 \sum_{i=1}^n x_i - \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) = 0$$

Las ecuaciones  $\partial SCE / \partial \hat{\beta}_0 = 0$  y  $\partial SCE / \partial \hat{\beta}_1 = 0$  se denominan ecuaciones simultáneas de los mínimos cuadrados para estimar los parámetros de una recta.

Nótese que las ecuaciones de los mínimos cuadrados son lineales en  $\hat{\beta}_0$  y  $\hat{\beta}_1$  y por lo tanto se pueden resolver simultáneamente. Puede verificarse que las soluciones son

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2}$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$$

Además se puede determinar que la resolución simultánea de las dos ecuaciones de los mínimos cuadrados produce  $\hat{\beta}_0$  y  $\hat{\beta}_1$  que

minimizan SCE.

Ejemplo. Aplique el método de mínimos cuadrados para ajustar una línea recta a través de los  $n = 5$  datos dados de la tabla siguiente

$x$	$y$
-2	0
-1	0
0	1
1	1
2	3

Solución: Empezaremos por construir la tabla para calcular los coeficientes de las ecuaciones de los mínimo cuadrados.

$x_i$	$y_i$	$x_i y_i$	$x_i^2$
-2	0	0	4
-1	0	0	1
0	1	0	0
1	1	1	1
2	3	6	4
$\Sigma$	5	7	10

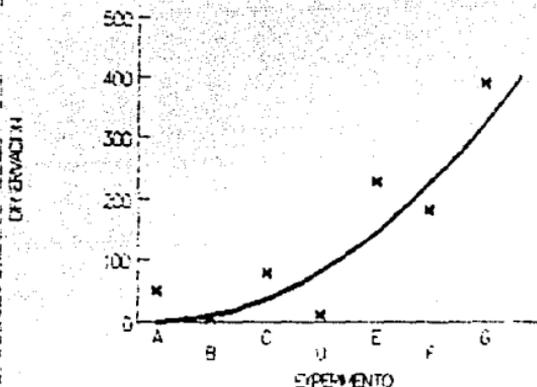
$$\hat{\beta}_1 = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2} = \frac{(5)(7) - (0)(5)}{(5)(10) - (0)^2} = 0.7$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} = 5/5 - (0.7)(0) = 1$$

Donde la recta  $\hat{y} = 0.7\hat{x} + 1$  es la recta de ajuste. Ahora el método de ajuste no sólo es lineal como se vio anteriormente, sino que existen también los tipos de ajuste en donde la curva no es el caso particular de la recta sino de parábolas, logaritmos, exponenciales entre algunos de ellos.

La gráfica siguiente nos puede ilustrar un poco más en este respecto, ya que nos muestra una regresión cuadrática en la que nosotros podemos tener una mejor aproximación del comportamiento del fenómeno que nos interesa estudiar.

## GRAFICA DE REGRESION PARABOLICA



La estadística como elemento técnico nel estudio de los comportamientos económicos es indispensable para la evaluación experimental de experimental de los fenómenos, ya que la generalidad de la información económica es de índole descriptiva. Y dado que no podemos manejar la totalidad de la información, tenemos que requerir a los métodos probabilísticos anteriormente citados.

## CAPITULO 2

### DOS MODELOS ECONOMICOS LINEALES

## Dos modelos económicos lineales.

Si bien existen antecedentes en el *tableau économique* de Francois amerray y en los esquemas marxistas de reproducción ampliada, el primer esquema teórico no convencional que recurre al Álgebra lineal para explicar las relaciones económicas intersectoriales es el modelo de insumo-producto elaborado por Wassily Leontief.

### 2.1 Wassily Leontief

#### 2.1.1 Modelo económico elemental de INPUT-OUTPUT.

Trabajaremos con un sistema económico simple en el que hay solamente tres procesos productivos (o industrias) independientes entre sí y que producen,  $a$ ,  $b$  y  $c$  productos diferentes. Después de analizar el sistema durante un tiempo determinado, podemos escribir ordenadamente en renglones y columnas los flujos de mercancías (en unidades físicas) como sigue:

TABLA 2.1.41 Flujos de mercancías

	$a$	$b$	$c$	
$a$	240	90	120	= 450
$b$	12	6	3	= 21
$c$	18	12	30	= 60
	↓	↓	↓	
	450( $a$ )	21( $b$ )	60( $c$ )	

Donde la primera columna señala las cantidades físicas del producto  $a$  (240 u),  $b$  (12 u'),  $c$  (18 u''), que son consumidas por la industrias productora de  $a$ , y bajo la flecha la cantidad del producto  $a$  que se obtiene. Cada columna se puede considerar como

el conjunto de INPUTS de cada proceso de producción. Como se observa cada mercancía viene expresada en unidad diferentes, por esto no podemos sumar los números que aparecen en las columnas. Cada renglón puede ser considerado como la cantidad de OUTPUTS de cada sector destinados a los demás.

La tabla 2.1.41 representa la circulación de mercancías que se puede detectar en un periodo determinado. Pero no se especifica la utilización que se harán de estas mercancías, es decir, no sabemos que cantidad será destinada como medios de producción y que cantidad como bienes de consumo.

Para realizar la distinción entre consumo e inversión es necesario un análisis más a fondo de la situación. Comencemos por suponer que el sistema económico está estático. Tanto la fuerza de trabajo como el conocimiento técnico es constante. Supongamos que el sistema de producción están empleados 60 obreros distribuidos respectivamente entre las industrias como sigue: 18, 12, 30. Cada trabajador consume, por término medio, por periodo tres unidades del producto a y media unidad del producto b. En tal supuesto la tabla anterior puede ser sustituida por otra donde se distinga la actividad económica de la de consumo.

TABLA 2.1.42 Flujos de mercancías y trabajo

	a	b	c	sector final	
a	180	54	30	180	= 450
b	12	6	3	-	= 21
c	9	6	15	30	= 60
sector final	18	12	30	-	= 60
	↓	↓	↓		
	450(a)	21(b)	60(c)		

En esta tabla se añadió un renglón correspondiente al flujo anual de servicios de trabajo en cada industria y una columna que corresponde a los consumos totales de cada mercancía, expresados en términos físicos y se denominan sector final.

Las cantidades que aparecen en la última columna son destinadas al consumo, dado que el esquema se encuentra estable. Dichas cantidades constituyen el producto neto del sistema o renta nacional neta.

Para que los flujos de bienes y servicios se repitan en cada periodo es necesario que las mercancías se intercambien entre sí de acuerdo con unas determinadas relaciones o precios. Ahora calcularemos estos precios. De momento suponemos que 10 unidades de *a* se intercambian por 1 unidad de *b*, por 2 unidades de *c* o por 1.81818 unidades de hombres-periodo-trabajo. De acuerdo con esto, si tomamos como unidad de medida una unidad física de una de las mercancías, por ejemplo 1 unidad de *b*, obtendremos los siguientes precios por unidad: precio de *a*, 0.1; precio de *c*, 0.5, y salario anual por trabajador, 0.555.

Podemos ya presentar la tabla anterior en términos de valores corrientes tras multiplicar cada una de las cantidades físicas por su precio. Obtenemos:

TABLA 2.1.43 Flujos de bienes y servicios en términos de la unidad de medida.

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	sector final	totales generales
<i>a</i>	18.6	5.4	3	18	45
<i>b</i>	12	6	3	-	21
<i>c</i>	4.5	3	7.5	15	30
totales parciales	35.1	14.4	13.5	-	-
sector final	9.9	6.6	16.5	-	(55)
total general	45(10)	21(6)	30(12)	-	76

Como puede comprobarse, en esta ocasión también se efectuaron las sumas de las columnas, esto es por que ahora todas las mercancías están expresadas en unidades homogéneas (valores corrientes). Esta tabla corresponde a lo que se ha venido a llamar matriz de transacciones o incluso simplemente tabla INPUT-OUTPUT.

Para nuestros fines analíticos nos resulta más sencillo llevar la tabla a una expresión algebraica. Supóngase que la tabla presenta  $n$  rengiones y  $n$  columnas donde aparecen los INPUT's y OUTPUT's relativas a  $n$  industrias. Sean  $q_{ij}$ , ...,  $q_{in}$ , las cantidades físicas de la mercancía  $i$  que va a parar a las industrias  $1, \dots, n$ ; y sea  $p_i$  el precio correspondiente. Por lo que nuestra tabla sería de la siguiente forma:

TABLA 1.1.43 Tabla de transacciones

Inputs	Outputs				
	Ind. 1	Ind. 2	....	Ind. j	... sector final (n)
mercancía 1	$q_{11}p_1$	$q_{12}p_1$	...	$q_{1j}p_1$	... $q_{1n}p_1$
mercancía 2	$q_{21}p_2$	$q_{22}p_2$	...	$q_{2j}p_2$	... $q_{2n}p_2$
...	...	...	...	...	...
mercancía i	$q_{i1}p_i$	$q_{i2}p_i$	...	$q_{ij}p_i$	... $q_{in}p_i$
...	...	...	...	...	...
sector final (n)	$q_{n1}p_n$	$q_{n2}p_n$	...	$q_{nj}p_n$	... $q_{nn}p_n$

El símbolo  $q_{ij}$  indica la cantidad de mercancía  $i$  que es utilizada en la industria o sector  $j$ . Dado que los valores de las columnas y los rengiones están expresados en términos de valor, podemos decir que:

$$\sum_{j=1}^n q_{ij} = U_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

De acuerdo a lo anterior, la tabla podría expresarse mediante dos sistemas de identidades que corresponderían respectivamente a la



Como se ve ahora, los dos sistemas 2.1.47 y 2.1.48 son perfectamente simétricos. El primero está expresado en términos de las cantidades físicas  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ , mientras que el segundo en términos de los precios  $p_1, p_2, \dots, p_n$ . Ambos contienen los elementos  $\alpha_{ij}$  con la diferencia que están intercambiados los renglones y las columnas. El interés de las ecuaciones 2.1.45 y 2.1.46, en relación con las ecuaciones 2.1.47 y 2.1.48, reside en que en que en las últimas aparecen unos elementos nuevos, las relaciones  $\alpha_{ij}$  que tiene un significado económico importante ya que representan la cantidad promedio de cada uno de los productos necesarios para producir una unidad de cada mercancía, y se denominan *coeficientes de producción*, o *coeficientes técnicos*.

## 2.1.2 Formulación de Leontief de dos sistemas de ecuaciones lineales

Los dos modelos lineales 2.1.47 y 2.1.48 podemos escribirlos de la siguiente manera recurriendo al álgebra lineal:

$$\begin{bmatrix} (a_{11} - 1) & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22} - 1) & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & (a_{nn} - 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad 2.1.21$$

$$\begin{bmatrix} (a_{11} - 1) & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & (a_{22} - 1) & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & (a_{nn} - 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad 2.1.22$$

donde los  $a_{ij}$  indica los coeficientes, las  $Q_i$  las cantidades físicas y las  $p_i$  los precios. Además tenemos que las  $a_{ij} \geq 0$ , por que su significado no nos permitiría tener una producción negativa sino a lo más cero. Se denomina a estos dos sistemas de ecuaciones "Esquema de Leontief cerrado"<sup>27</sup>, ya que el último sector de la demanda final recibe el mismo tratamiento que el de las otras industrias. Este planteamiento adquiere un sentido especial en el caso de un sistema estacionario en el que la fuerza de trabajo permanece constante cada periodo y no hay inversión neta. El supuesto que acabamos de presentar es al que Leontief llamó sistema cerrado, ya que la columna  $n$  y el renglón  $n$  representan la cantidad de consumos que la industria  $n$  (trabajo) necesita para producir una cantidad de servicios (renglón  $n$ ), son estos una

<sup>27</sup> Leontief V. 1929:15

serie de servicios compuestos (de trabajo y recursos productivos) a los que corresponde una remuneración global (el valor añadido) que corresponde a salarios, sueldos, beneficios y rentas.

Ahora consideraremos los aspectos matemáticos formales de los dos sistemas de ecuaciones.

Se trata de dos sistemas lineales y homogéneos. Como nosotros ya sabemos implica que existan al menos una solución:

$$U_i = 0 \text{ y } p_j = 0 \text{ para toda } i, j = 1, 2, \dots, n$$

Cuando la solución es trivial la producción y los precios son todos cero, el sistema económico no existe. Observemos también que el determinante de la matriz de los coeficientes sea igual a cero, es decir

$$\begin{vmatrix} (a_{11} - 1) & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22} - 1) & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & (a_{nn} - 1) \end{vmatrix} = 0 \quad 2.1.23$$

con lo que las primeras  $n - 1$  columnas son linealmente independientes, ya que representan los coeficientes técnicos de las  $n - 1$  primeras industrias. La columna  $n$  si es linealmente dependiente de las primeras  $n - 1$ , ya que contiene una serie de consumos que no son datos técnicos y que por consiguiente pueden ser adaptados. La condición 2.1.23 se reduce, por lo tanto, a establecer que la columna del sector final debe ser linealmente dependiente de las otras para que el sistema tenga soluciones distintas de cero. Esto es bastante obvio ya que no puede existir un sistema económico en el que los consumos sean independientes de la matriz de coeficientes técnicos, por que las posibilidades de consumo del sistema están limitadas por las posibilidades técnicas

de la producción (en un sistema estacionario). La expresión 2.1.223 incluye también el supuesto de que la demanda final no puede ser superior ni inferior a las posibilidades técnicas de producción. En efecto, ya que, si la demanda final fuera inferior, al menos una ecuación no sería satisfecha, es decir, la suma de los productos de cada industria sería menor que la suma de los insumos de dicha industria (capacidad productiva ociosa) v/o la suma total de las necesidades de trabajo inferior a la fuerza de trabajo (desempleo).

Supongamos que se satisfacen las condiciones de 2.1.224 es decir, que existe una demanda final que requiere la plena ocupación de los factores productivos. En el caso del sistema de precios 2.1.22 el significado de estas conclusiones es inmediato. El sistema determina solo los *precios relativos*, pero no su nivel absoluto. Podemos, por lo tanto, fijar arbitrariamente el precio de una mercancía y utilizarlo como base unitaria para generar los demás precios. Cada precio, como se desprende del conjunto de relaciones consideradas, es un concepto *relativo*: "expresa la relación de cambio entre unidades físicas de dos bienes"<sup>28</sup>. Las interpretaciones del sistema de cantidades físicas 2.1.21, es menos evidente, determina la estructura del sistema económico, pero no su escala de activación. Ahora bien, la noción de cantidad relativa no es tan inmediata como la de precio relativo, ya que, la cuestión de que en la práctica no todas las  $Q_i$  pueden ser fijadas libremente, en particular, la fuerza de trabajo disponible, es una variable exógena al sistema económico. Para que las  $Q_i$  y los  $p_j$  resulten siempre positivos se debe considerar el

<sup>28</sup> Panfiliotti L. 1975:79

determinante de  $(\lambda I - A)$  que debe dar como resultado 1.

Sabemos, por las consideraciones anteriores, que la técnica de un sistema económico está representada por la matriz cuadrada de coeficientes técnicos relativos a los inputs-outputs de mercancías.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n-1} \end{bmatrix} \quad 2.1.24$$

y por el vector de coeficientes de trabajo

$$[a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{n,n-1}] \quad 2.1.25$$

que denominamos vector de los coeficientes del trabajo directo.

Por lo tanto, si a partir de ahora consideramos la demanda final constituida por términos conocidos o determinados con otros criterios (términos que escribiremos como  $\bar{Y}_1, \dots, \bar{Y}_{n-1}$  podemos escribir el siguiente sistema:

$$\begin{bmatrix} (1 - a_{11}) & -a_{12} & \dots & -a_{1,n-1} \\ -a_{21} & (1 - a_{22}) & \dots & -a_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & (1 - a_{n-1,n-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Y}_1 \\ \bar{Y}_2 \\ \vdots \\ \bar{Y}_{n-1} \end{bmatrix} \quad 2.1.26$$

y la siguiente ecuación:

$$a_{n1}Q_1 + a_{n2}Q_2 + \dots + a_{n,n-1}Q_{n-1} = L \quad 2.1.27$$

donde L es el número de trabajadores/periodo empleados. Este análisis tiene la ventaja de poder no conciderar el caso estacionario. Como sucede en el caso del sistema de Leontief cerrado. La demanda final puede estar en función de la inversión y el consumo.

Escribiremos el sistema 2.1.26 de forma más compacta:

$$(I - A)Q = \bar{Y},$$

2.1.28

donde  $I$  es la matriz identidad  $(n-1 \times n-1)$ ,  $A$  es la matriz  $(n-1 \times n-1)$  de coeficientes técnicos,  $Q$  es el vector de las cantidades físicas y  $\bar{Y}$  es el vector de las cantidades físicas que constituye la demanda final. si se procede, De manera similar con el sistema 2.1.228, los precios como incógnitas y  $\bar{V}_1, \dots, \bar{V}_{n-1}$  valores añadidos que se consideran dados, tendremos:

$$P(I - A) = \bar{V}, \quad 2.1.29$$

Estos sistemas de ecuaciones es a lo que se denomina, esquema de Leontief abierto.

Por otra parte, sabemos que la matriz  $(I - A)$  es una matriz cuadrada de rango  $n - 1$ , por lo que su matriz inversa existe y la llamaremos  $(I - A)^{-1}$ , si multiplicamos ambos miembros de la igualdad 2.1.228 por  $(I - A)^{-1}$ , obtenemos:

$$Q = (I - A)^{-1}\bar{Y}, \quad 2.1.210$$

que constituye precisamente la solución para el sistema 2.1.28.

Si anotamos como  $a_{ij}$ , los elementos de la matriz inversa, podemos formular la solución del modo siguiente:

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1,n-1} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \dots & a_{n-1,n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{Y}_1 \\ \bar{Y}_2 \\ \vdots \\ \bar{Y}_{n-1} \end{bmatrix} \quad 2.1.211$$

Esta expresión indica las cantidades físicas  $Q_1, Q_2, \dots, Q_{n-1}$ , de las mercancías 1, 2, ...,  $n-1$ , que deben producirse para que podamos poner a disposición de la demanda final las cantidades  $\bar{Y}_1, \dots, \bar{Y}_{n-1}$ .

## 2.2 El modelo teórico de Sraffa

Las relaciones consideradas anteriormente, las podemos reelaborar siguiendo el esquema teórico de Piero Sraffa, y que se denomina *producción de mercancías por medio de mercancías*.

Podemos considerar tres hipótesis del estudio de Sraffa y que son las siguientes:

- (i) El sistema económico es del tipo estacionario.
- (ii) Los métodos de producción son tales que las industrias producen una sola mercancía mediante el uso de cantidades establecidas de trabajo y mercancías. Las mercancías son consumidas durante el periodo, por lo que al fin del periodo es necesario reponerlas. Por lo que la producción del sistema al final del periodo tendrá que ser dividida en dos partes, una para reponer las mercancías que han sido consumidas durante el proceso productivo y la segunda se destinará para satisfacer el consumo. Los métodos de producción vendrán representados por: la matriz  $A$  de rango  $n-1$  de coeficientes técnicos, el vector  $a_n = [a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{n,n-1}]$ , donde  $a_{ij} \geq 0$ . Llamaremos a  $\begin{bmatrix} A \\ a_n \end{bmatrix}$  técnica del sistema.
- (iii) El valor añadido del sistema económico, igual al valor de las mercancías producidas en el periodo, se distribuye al final del periodo en forma de salarios y beneficios. Esta distribución se hace de acuerdo a la cantidad de trabajo empleada y al valor de los medios de producción respectivamente. Se supone que la calidad del trabajo es única y el salario unitario, el tipo de beneficio es uniforme en todos los sectores.

Para iniciar, analizaremos el sistema de precios. La primera consideración que tenemos que tomar en cuenta es que el valor añadido está compuesto por dos categorías retributivas: salarios y

beneficios. Sea  $w$  el salario unitario y  $\pi$  el tipo de beneficio.

Dada la técnica  $\begin{bmatrix} A \\ an \end{bmatrix}$ , y considerando la hipótesis (ii) sobre la distribución del valor añadido, tenemos el siguiente sistema:

2.2.1

$$\begin{aligned} (a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \dots + a_{n-1,1}p_{n-1})(1 + \pi) + a_n w &= p_1 \\ (a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + \dots + a_{n-1,2}p_{n-1})(1 + \pi) + a_n w &= p_2 \\ &\vdots \\ (a_{1n-1}p_1 + a_{2n-1}p_2 + \dots + a_{n-1,n-1}p_{n-1})(1 + \pi) + a_n w &= p_{n-1} \end{aligned}$$

donde,  $p_i$  indican los precios de las mercancías  $i$ ,  $\pi$  el tipo de beneficio y  $w$ , el salario unitario. Ahora escribiremos de forma compacta el sistema:

$$PA(1 + \pi) + a_n w = P \quad 2.2.2$$

donde  $P$  representa el vector renglón de los precios. Es notorio que el sistema consta de  $n + 1$  incógnitas con  $n - 1$  ecuaciones, por lo que nuestro sistema consta de 2 grados de libertad. Podemos fijar uno de los precios, y así, reducimos a  $n - 2$  los número de precios y a  $n$  el número de incógnitas. Nos queda, por consiguiente un grado de libertad, pero como carecería de sentido fijar otro precio relativo, solo nos restan el salario unitario y el tipo de beneficio. Para examinar las posibles soluciones del sistema 2.2.1 con respecto al tipo de beneficio, es necesario analizar este en sus dos aspectos extremos, el máximo, el mínimo y por último el nivel intermedio.

Considerar el caso en que  $\pi = 0$ , implica hacer los beneficios nulos, la renta nacional neta o excedente del sistema va a parar en su totalidad a los salarios. Lo que ahora convierte el sistema de  $n - 1$  ecuaciones con  $n$  incógnitas en un sistema de  $n - 1$

ecuaciones y  $n - 1$  incógnitas, con esto nuestro sistema queda determinado, y así nos establecerá los  $n - 2$  precios restantes y el salario unitario, todo en términos de la mercancía numérica. De igual manera, si se determina el salario unitario el sistema queda determinado y nos establece los  $n - 1$  precios en función al salario unitario.

Para cualquiera de los criterios de determinación del sistema vistos anteriormente queda:

$$P(I - A) = \alpha_n w. \quad 2.2.3$$

De donde, multiplicando por la inversa de  $(I - A)$  resulta:

$$P = \alpha_n (I - A)^{-1} w. \quad 2.2.4$$

y que en caso particular de  $w = 1$  (salario unitario) nos da:

$$P = \alpha_n (I - A)^{-1}. \quad 2.2.5$$

Las expresiones anteriores tienen un significado especial en economía. El producto  $\alpha_n (I - A)^{-1}$  representa un vector cuyos componentes han sido obtenidos del producto del vector trabajo y la correspondiente columna de la matriz de las cantidades físicas de las mercancías que han sido necesarias directamente e indirectamente en el proceso económico para producir una unidad de cada mercancía. Lo que nos representa la cantidad de trabajo necesario para producir una unidad de cada mercancía durante el periodo. Por lo que podemos concluir que vector  $v$ , está definido:

$$v = \alpha_n (I - A)^{-1} \quad 2.2.6$$

representa lo que podemos llamar *coeficientes de trabajo verticalmente integrados*.

La ecuación 2.2.4 nos señala que cuando  $\pi = 0$  los precios son proporcionales a la cantidad de trabajo. En el caso particular de  $w = 1$ , los precios son iguales a las cantidades físicas de

trabajo. Siendo los beneficios nulos y por lo tanto, todo el producto neto destinado a salarios. Los precios resultan proporcionales a las cantidades de trabajo.

Pasemos ahora a analizar el segundo caso: aquel en el que tipo de beneficio alcanza un nivel tan alto que se anula el salario unitario de forma que todo el producto nacional neto va a parar a los beneficios. De tal manera que quedara:

$$\Pi = \pi_{(\omega=0)}, \quad 2.2.7$$

es decir, el tipo de beneficio que corresponde al caso del salario unitario igual a cero. Del sistema 2.2.2 con  $\omega = 0$  obtendremos:

$$PA(1 + \Pi) = P, \quad 2.2.8$$

por lo que:

$$P[\lambda I - (1 + \Pi)A] = 0, \quad 2.2.9$$

si hacemos  $\lambda = \frac{1}{1+\Pi}$  obtenemos:

$$P(\lambda I - A) = 0, \quad 2.2.10$$

Este es un sistema de ecuaciones lineales homogéneo, y como ya sabemos la condición necesaria para que las soluciones sean diferentes de cero, es que el determinante de la matriz de los coeficientes  $(\lambda I - A)$  sea nulo. El conjunto de raíces del sistema serán los valores propios de la matriz  $(\lambda I - A)$  y en particular utilizaremos el valor propio máximo para asegurarnos que el vector solución sea no-negativo. Otra condición que nos asegura que los precios sean no negativos es que la expresión

$$\Pi = \frac{1}{\lambda_m} - 1 \quad 2.2.11$$

debe ser no negativa, por lo tanto

$$\lambda_m \leq 1. \quad 2.2.12$$

Si la condición anterior no se satisface nos encontraríamos con un sistema económico inoperante técnicamente, que no puede

generar beneficios a pesar que el salario unitario es cero.

Ahora corresponde analizar el punto medio del beneficio, es decir, cuando  $0 \leq \bar{\pi} \leq \pi$ , considerando esto podemos reescribir nuestro sistema como sigue:

$$P = \frac{1}{1 + \bar{\pi}} a_n \left[ \frac{1}{1 + \bar{\pi}} I - A \right]^{-1} w, \quad 2.2.13$$

o bien

$$P = a_n [I - (1 + \bar{\pi})A]^{-1} w, \quad 2.2.14$$

Aquí también se puede utilizar un precio numérico y así determinar el sistema o hacerse el salario unitario como numerario haciendo  $w = 1$  y dando como resultado los siguientes sistemas:

$$P = \frac{1}{1 + \bar{\pi}} a_n \left[ \frac{1}{1 + \bar{\pi}} I - A \right]^{-1}, \quad 2.2.15$$

y

$$P = a_n [I - (1 + \bar{\pi})A]^{-1}, \quad 2.2.16$$

Dado que  $\bar{\pi} > 0$ ,  $a_n \geq 0$ , y  $\frac{1}{1 + \bar{\pi}} > \lambda_m$ , se desprende que todos los precios son no-negativos.

Por lo anterior, la estructura de precios, depende tanto de los coeficientes técnicos de las cantidades de trabajo incorporado como del tipo de beneficio. Dada la técnica del sistema, existe una estructura de precios para cada tipo de beneficio. Es importante observar que el tipo de beneficio se fija exógenamente y el numerario del sistema de precios esta fijado arbitrariamente. Podemos ahora preguntarnos cómo varían los precios cuando cambia el tipo de beneficio. Se entiende del sistema 2.2.16, donde  $w = 1$  (salario unitario) que si  $\bar{\pi}$  crece los precios aumentan o por lo menos permanecen constantes. Si permanecen constantes significa que sólo necesitan trabajo directo sin ayuda de ninguna mercancía intermedia. Ahora es lógico que si  $\bar{\pi}$  crece, algunos de ellos

crecerán en mayor medida que los otros. Volviendo al sistema 2.2.1, después de hacer  $w = 1$ , se obtiene la siguiente relación:

$$\frac{\rho_j}{\rho_r} = \frac{\alpha_{nj} + (1 + \pi) \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{ij} \rho_i}{\alpha_{nr} + (1 + \pi) \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{ir} \rho_i}, \quad j = 2, 3, \dots, n-1$$

lo que es equivalente a cambiar el numerario, y más exactamente a expresar la mercancía  $j$  en términos de la mercancía  $r$ . Si derivamos la expresión anterior con respecto a  $\pi$ , es decir,

$$\frac{d}{d\pi} \left( \frac{\rho_j}{\rho_r} \right) < 0,$$

obtenemos la expresión:

2.2.17

$$\left[ \rho_r \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{ij} \rho_i - \rho_j \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{ir} \rho_i \right] + \\ + (1 + \pi) \left[ \rho_i \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{ij} \frac{d\rho_i}{d\pi} - \rho_j \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{ir} \frac{d\rho_i}{d\pi} \right] > 0,$$

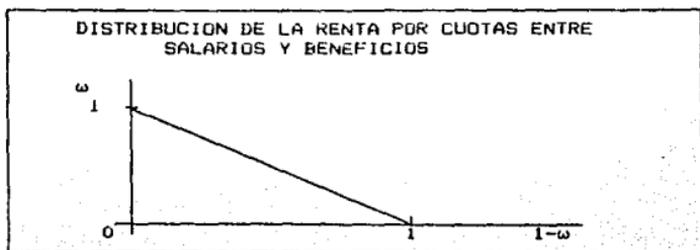
con  $j = 2, 3, \dots, n-1$ .

En otras palabras, los precios de la mercancía  $j$  aumentarán o disminuirán según la expresión 2.2.17 sea positiva o negativa. Al efecto resultante de la primera parte de la expresión 2.2.17 lo llamaremos *efecto de intensidad de capital*.<sup>20</sup> Este efecto será positivo, cuando en el proceso de producción de una mercancía haya sido necesaria la ayuda de procesos técnicos con mayor intensidad de trabajo que el de la mercancía numerario. Y negativo en el caso contrario. La segunda parte de la expresión 2.2.17 no se puede relacionar con ningún fenómeno definible de forma simple, por que en realidad depende del cambio de todos los precios del sistema.

<sup>20</sup> Pasinetti L., 1973:110

Por ello la definiremos como *efecto precio*.<sup>3</sup> Este efecto sera negativo o positivo en relación a una serie compleja de relaciones entre los sectores industriales. Una relación importante entre el salario unitario y el tipo de beneficio sobre el sistema de precios es cuando la estructura de precios varia al cambiar el tipo de beneficio, la relación entre el salario unitario y el tipo de beneficio se ve influida por dos fenómenos distintos: La variación de la distribución de la renta entre salario y beneficios y la variación de la estructura de precios al variar esta distribución.

El fenómeno de la distribución de la renta aparece claramente si partimos de un determinado producto neto en términos físicos  $(I - A)Q$  y procedemos a la asignación de cuotas del mismo a los salarios y los beneficios. Sea  $\omega$  la proporción o cuota del sistema  $(I - A)Q$  que corresponde a los salarios y  $(1 - \omega)$  la que corresponde a los beneficios; de acuerdo con ello, todas las posibilidades de la distribución de la renta pueden representarse en la recta  $y = 1 - x$ . Ahora para considerar las cuotas en términos del salario unitario y el tipo de beneficio, es necesario tomar en cuenta el vector precios.



<sup>3</sup> Idem

En este último caso, también es fácil mantener la coincidencia entre el salario unitario y la cuota de producto neto que va hacia los salarios ( $\omega$  y  $\omega$ ). Por el lado del tipo de beneficio y no de la cuota, es necesario observar el valor total del capital ( $PAQ$ ). Ya que el tipo de beneficio es la relación de la parte del producto neto que es destinado a beneficios y el valor del capital total. Representado a continuación:

$$\pi = (1 - \omega) \frac{P(I - A)Q}{PAQ} \quad 2.2.18$$

Si consideramos ahora que  $\omega$  puede ser cero entonces se reduce a:

$$\pi = \frac{P^*(I - A)Q}{P^*AQ} \quad 2.2.19$$

y cuando  $\omega > 0$  entonces  $P \neq P^*$ . Dado que la composición  $AQ$  sea distinta de  $(I - A)Q$ , la relación  $\frac{P(I - A)Q}{PAQ}$  variará continuamente mientras cambie la distribución de la renta. El significado de esta afirmación es que  $\pi$  esta en función de  $\omega$  y de  $P$ .

Un caso particular que debemos señalar es en el que desaparecen las complicaciones anteriores. Se trata del supuesto en el el vector precios permanece constante cuando cambia la distribución de la renta. En este supuesto llamaremos a  $P = \bar{p}$ , y se obtendrá

$$\frac{\bar{p}(I - A)Q}{\bar{p}AQ} = \pi \quad 2.2.20$$

para  $0 \leq \omega \leq 1$ , por lo que si sustituimos en 2.2.18 se reduce a la expresión lineal siguiente:

$$\pi = \bar{\pi}(1 - \omega) \quad 2.2.21$$

Si además seguimos haciendo numerario el producto neto por trabajador, entonces  $\omega$  viene a coincidir con  $\omega$  y la relación se

convierte en:

$$\pi = \Pi(1 - \omega) \quad 2.2.22$$

esta expresión, es una relación lineal entre el tipo de beneficio y el salario unitario. Como se puede ver en la figura siguiente



En el caso general, la relación anterior es más complicada, para abordar su estudio expresaremos los precios en términos de una de las mercancías tomada como numerario. Tomemos la mercancía  $i$ . Tomando en cuenta la expresión 2.2.14 obtenemos.

$$1 = a_n [(1 + \bar{\pi})A]^{-1} e_i w^{(i)}, \quad 2.2.23$$

donde  $e_i$  es el  $i$ -ésimo vector columna unitario y  $w^{(i)}$  el salario unitario expresado en términos de la mercancía  $i$ . La expresión anterior es una función implícita entre  $\pi$  y  $w^{(i)}$  de tipo polinomial. Más en general será un polinomio de grado  $n - 1$  en  $\pi$ . El comportamiento gráfico de esta relación será una curva y no una simple recta. Desgraciadamente, sobre la forma de la curva se puede decir muy poco, corta el eje de las abscisas en el punto  $\Pi$ . Es una curva decreciente, en el primer cuadrante. Cruza el eje de la ordenadas en el punto  $w^{(i)}$ . Podemos concluir que en un sistema económico en el que cada industria produce una sola mercancía, el salario unitario expresado en términos de una de cualquiera de las mercancías es siempre una función monótona decreciente del tipo de beneficio.

A pesar de lo que antes se dijo y que parece no facilitar el hecho de presentar los precios en términos en cantidades de trabajo, la expresión 2.2.16 nos abre nuevamente, la posibilidad de la cuestión relativa a las cantidades de trabajo incorporado. La matriz  $[I - (1 + \bar{\pi})A]^{-1}$  puede expresarse en una serie de potencias de  $A$ , con la condición de que  $(1 + \bar{\pi}) < \frac{1}{\lambda_m}$ , donde  $\lambda_m$  es el valor propio de módulo máximo de  $A$ . En nuestra exposición el valor propio de módulo máximo coincide con el valor propio máximo, y por lo tanto se satisface la siguiente condición

$$\pi < \bar{\pi} \equiv \frac{1}{\lambda_m} - 1.$$

De donde la expresión 2.2.16 se puede expresar de la siguiente forma:

$$P = a_n [I + (1 + \bar{\pi})A + (1 + \bar{\pi})^2 A^2 + (1 + \bar{\pi})^3 A^3 + \dots], \quad 2.2.24$$

de otra forma:

$$P = a_n + (1 + \bar{\pi})a_n A + (1 + \bar{\pi})^2 a_n A^2 + (1 + \bar{\pi})^3 a_n A^3 + \dots, \quad 2.2.25$$

Si consideramos que  $\pi = 0$ . Al ser  $w = 1$ ,  $p = v$  la expresión anterior se reduce a

$$P = v = a_n + a_n A + a_n A^2 + a_n A^3 + \dots, \quad 2.2.26$$

La interpretación económica de la serie de la matriz  $A$ , es que, dado que cada matriz representa las necesidades de mercancías en cada etapa del periodo productivo para obtener una unidad de la correspondiente mercancía final. La premultiplicación de esas matrices por el vector de trabajo directo, nos da una serie de vectores que representan las sucesivas necesidades de trabajo en las fases del proceso productivo. Ya que los elementos de la matriz  $A^k$  se hacen más pequeños cuando crece  $k$ , las necesidades de trabajo se hacen menores mientras retrocedemos en el proceso productivo. Es decir, el primer sumando es la cantidad de trabajo

directo, y la suma de los demás términos es la cantidad de trabajo indirecto. Por lo que la suma total representa, las necesidades totales de trabajo directo e indirecto: es decir, el vector de coeficientes de trabajo verticalmente integrados. Pero todas estas cantidades aparecen también en 2.2.25. Esta presenta, sin duda las mismas cantidades de trabajo que en 2.2.26 pero multiplicadas por  $(1 + \pi)^s$ , donde  $s$  es la etapa de producción en la que el trabajo es empleado. Por lo tanto, las mismas cantidades de trabajo se suman sin importar cuando han sido utilizadas, mientras que en la 2.2.25 aparecen *fechadas*: a cada una de ellas se le da un paso específico, según la fecha en que fueron utilizadas. Es conveniente observar que cada sumando crece y, por lo tanto, la suma total es una función creciente de  $\pi$ . En el límite deja de ser convergente y los precios, en términos de salario tienden a infinito. Esto es cierto en caso extremo de  $\pi = \Pi$ . Para todos los demás tipos de beneficio, la serie es convergente y nos proporciona la reducción de todos los precios a cantidades trabajo fechadas mediante el factor  $(1 + \pi)^s$  de capitalización compuesta.

Ahora estudiaremos el sistema de ecuaciones correspondiente a las cantidades físicas de las mercancías a producir, se hará planteándolo de la misma forma que el sistema de precios. Eliminando el último renglón de la tabla de transacciones podemos escribirlo:

$$\begin{array}{r}
 \alpha_{11} Q_1 + \alpha_{12} Q_2 + \dots + \alpha_{1,n-1} Q_{n-1} + Y_1 = Q_1 \\
 \alpha_{21} Q_1 + \alpha_{22} Q_2 + \dots + \alpha_{2,n-1} Q_{n-1} + Y_2 = Q_2 \\
 \vdots \\
 \alpha_{n-1,1} Q_1 + \alpha_{n-1,2} Q_2 + \dots + \alpha_{n-1,n-1} Q_{n-1} + Y_{n-1} = Q_{n-1}
 \end{array}
 \tag{2.2.27}$$

Si formularámos explícitamente la hipótesis de rendimientos

constantes, este sistema se ajusta al sistema de Leontief abierto, con la diferencia de que Leontief no escribe las  $Y_i$ 's del lado izquierdo de la igualdad y por lo cual no se hace evidente que constituyen un excedente respecto a las cantidades de dichas mercancías que deben reintroducirse en el proceso productivo. Denotaremos en términos relativos  $R_i$  las cantidades anteriores y donde  $R_i = \frac{Y_i}{Q_i - Y_i}$ , para  $i = 1, \dots, n-1$ .

Podemos reescribir el sistema 2.2.27 como sigue:

$$\begin{aligned}
 (a_{11}Q_1 + a_{12}Q_2 + \dots + a_{1,n-1}Q_{n-1} + Y_1)(1 + R_1) &= Q_1 \\
 (a_{21}Q_1 + a_{22}Q_2 + \dots + a_{2,n-1}Q_{n-1} + Y_2)(1 + R_2) &= Q_2 \\
 \vdots & \\
 (a_{n-1,1}Q_1 + a_{n-1,2}Q_2 + \dots + a_{n-1,n-1}Q_{n-1} + Y_{n-1})(1 + R_{n-1}) &= Q_{n-1}
 \end{aligned}
 \tag{2.2.28}$$

Utilizar el término  $(1 + R_i)$  es claro ya que se requiere el crecimiento relativo y que además sea sumado al valor inicial de las cantidades de mercancías. Y así como en el sistema 2.2.26 se daban por dadas las cantidades  $Y_i$  en este se dan por dadas las cantidades relativas  $R_i$  para en los dos casos encontrar las  $Q_i$ , naturalmente los tipos de exedentes físicos  $R_i$  serán distintos para cada mercancía y no deberán ser negativos. Para ver las consecuencias de lo anterior pasemos a observar la solución:

2.2.29

$$\begin{bmatrix}
 a_{11} - \frac{1}{1+R_1} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1,n-1} \\
 a_{21} & a_{22} - \frac{1}{1+R_2} & a_{23} & \dots & a_{2,n-1} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \dots & a_{n-1,n-1} - \frac{1}{1+R_{n-1}}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 Q_1 \\
 Q_2 \\
 \vdots \\
 Q_{n-1}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 \vdots \\
 0
 \end{bmatrix}$$

Vemos que este sistema ya es un sistema lineal homogéneo, por lo que para que existan soluciones diferentes de cero el determinante de la matriz  $A$  debe ser cero.

Para que este sistema sea determinado necesitamos que uno de los tipos de excedente físico no sea dado, lo cual nos dará soluciones para las cantidades físicas  $Q_i$ , en función de una constante que las multiplica, por lo que la escala de producción queda indeterminada.

Ocupémonos ahora del problema de considerar dadas todas las  $R_i$  excepto una, establezcamos la hipótesis de que todas sean iguales entre sí, a este sistema le llamaremos sistema tipo y sucede por lo tanto que:

$$R_i = R_j = R \quad \text{para } i, j = 1, 2, \dots, n-1,$$

donde  $R$  es el tipo de excedente uniforme en el sistema. Si sustituimos  $R$  por las diferentes  $R_i$  se podría escribir:

$$\eta = \frac{1}{1 + R}.$$

y además

$$AQ = \eta Q, \quad 2.2.30$$

por lo tanto

$$(\eta I - A)Q = 0. \quad 2.2.31$$

La condición necesaria en sistema para obtener soluciones distintas de cero es que el determinante de  $(\eta I - A)$  sea diferente de cero. Y las soluciones serán los valores propios de la matriz  $A$ , pero como lo dijimos anteriormente no todos tiene sentido matemático y por lo que debemos tomar el valor propio máximo y su vector asociado será la solución del sistema. Además resulta que  $\eta_m = \lambda_m$ . A este valor propio le corresponde la única  $R$  que tiene significado económico, es decir, la  $R$  que sustituida en el sistema de soluciones no-negativas. Además, dado que  $\eta_m = \lambda_m$  se desprende que

$$R = \frac{1}{\eta_m} - 1 = \frac{1}{\lambda_m} - 1 = \Pi \quad 2.2.32$$

lo que quiere decir, que el tipo de excedente uniforme del sistema es idénticamente igual a la tasa de beneficio máximo. Otra condición que debe cumplirse es  $R \geq 0$ , lo que implica que  $\eta_m \leq 1$ .

Al encontrar el excedente uniforme  $R$ , su introducción al sistema 2.2.30 permite obtener las soluciones de cada  $Q_i$  y además sabemos que cada una de ellas depende de una constante por ser un sistema lineal homogéneo y con determinante igual a cero. Estas soluciones determinan la estructura de la producción, pero no la escala que necesita de una relación más. Supongamos que esta relación es la cantidad de trabajo existente  $Q_n$  que aparece como un dato. Por lo que obtenemos

$$(1 + R)AQ = Q \quad 2.2.33$$

$$a_n Q = Q_n \quad 2.2.34$$

Ahora sabemos que si la matriz es irreducible tenemos exactamente  $n - 1$  soluciones positivas del sistema, y si la matriz es reducible tendremos entonces  $k$  soluciones positivas del sistema. Supongamos que tenemos  $k$  soluciones positivas del sistema (si es irreducible  $k = n - 1$  y en el otro caso  $k < n - 1$ ), por lo que las soluciones tienen una propiedad interesante en relación a sus proporciones. En efecto, si denotamos  $Y'_1, \dots, Y'_k$  las cantidades de mercancía final correspondientes a la solución  $Q'_1, \dots, Q'_k$ , por definición,

$$R = \frac{Y'_i}{Q'_i - Y'_i}.$$

de donde

$$[Y'_1, \dots, Y'_k]' = R [(Q'_1 - Y'_1), \dots, (Q'_k - Y'_k)]' = \frac{R}{1 + R} [Q'_1, \dots, Q'_k]' \quad 2.2.35$$

Por lo tanto, las cantidades físicas positivas correspondientes a las soluciones del sistema 2.2.30 son tales

que su proporción de producción con respecto al consumo es la misma y también iguales a las proporciones en que son enviadas al sector final. Y a este sistema que satisface las relaciones de proporcionalidad lo llama Sraffa "Sistema Tipo"<sup>32</sup>. El producto neto de este sistema tipo lo denomina en el que el nivel de actividad requiere una cantidad de trabajo igual a la empleada por el sistema económico efectivo se denomina "producto neto tipo".<sup>32</sup> Observamos que el vector  $\{Y'_i\}$  constituye una mercancía compuesta particular en la que las demás entran en una proporción bien determinada. A esta mercancía se le denomina "Mercancía Tipo".<sup>33</sup>

Sea  $Q'$  el vector solución de 2.2.33 se obtiene:

$$AQ' = \frac{1}{1+R} Q' \quad 2.2.36$$

y en general,

$$A^n Q' = (1+R)^{-n} Q' \quad 2.2.37$$

pero de lo anterior resulta

$$Y' = (I - A)Q' = RAQ' = \frac{R}{1+R} Q' \quad 2.2.38$$

y por lo que la 2.2.36 se transforma en

$$AY' = \frac{1}{1+R} Y' \quad \text{y} \quad A^n Y' = (1+R)^{-n} Y' \quad 2.2.39$$

Esto significa que también  $Y'$  es un valor propio de la matriz  $A$ .

Para el cálculo del trabajo acumulado procederemos de igual forma con la serie de la matriz  $A$ , y tendremos:

Nuestro siguiente problema es calcular la cantidad de trabajo directo e indirecto necesario para la obtención de mercancía tipo. Para resolver este problema usaremos la serie de la matriz  $A$ , como

<sup>32</sup> Pasinetti L., 1904:120

<sup>32</sup> Pasinetti L., 1904:120

<sup>32</sup> Pasinetti L., 1904:120

se hizo anteriormente, de acuerdo a esto tenemos:

$$vY' = \alpha_n Y' + \alpha_n A Y' + \alpha_n A^2 Y' + \alpha_n A^3 Y' + \dots \quad 2.2.40$$

donde el primer término de la suma es la cantidad de trabajo directo y los demás términos son la cantidad de trabajo indirecto.

Sustituyendo la 2.2.39 se obtiene:

$$vY' = \alpha_n Y' \left[ 1 + \frac{1}{1+R} + \frac{1}{(1+R)^2} + \dots \right] \quad 2.2.41$$

y, por lo tanto

$$vY' = \alpha_n Y' \frac{R}{1+R} \quad 2.2.42$$

Esta expresión quiere decir la cantidad total de trabajo incorporado en el producto neto tipo,  $vY'$ , y es la cantidad de trabajo directo ( $\alpha_n Y'$ ) por  $\frac{R}{1+R}$  que expresa la relación existente entre las cantidades totales del sistema tipo y las cantidades que constituyen el producto neto tipo. La conclusión es que para la mercancía tipo, la cantidad de trabajo directo guarda con respecto a la cantidad de trabajo total incorporado la misma proporción que el producto neto tipo con respecto a las cantidades totales ( $Q'$ ).

*Definición:* Las mercancías que no contribuyen en el tipo máximo de beneficio del sistema se denominan *no-base*. Y las mercancías que sí contribuyen se denominan mercancías *base*.

La diferencia de las mercancías *base* y *no-base* depende, de ciertas características de la matriz de coeficientes técnicos de producción. Se puede afirmar que si la matriz de coeficientes técnicos es irreducible entonces todas las mercancías son *base*, de lo contrario habrá algunas que son mercancías *no-base*.

Una aplicación del sistema tipo es el sistema de precios y la distribución del beneficio. Supongamos un cierto sistema económico cuyas cantidades físicas y cuyos precios se presentan como sigue:

$$AQ + \bar{P}AQ = Q \quad 2.2.43$$

$$PA(1 + \pi) + \alpha_n w = p \quad 2.2.44$$

donde  $\bar{R}$  es una matriz diagonal con  $R_i$  en la diagonal principal.

Las ecuaciones anteriores nos hablan de cantidades relativas y precios relativos respectivamente, por lo que nos presentan un problema de normalización. En ambos casos hay lugar para incluir una ecuación más. En el primer caso añadiremos la ecuación

$$\alpha_n Q = 1 \quad 2.2.45$$

con lo que el trabajo total es igualado con la unidad.

Como se hizo anteriormente haremos una mercancía numerario haciendo su precio igual a la unidad. Este será la mercancía tipo. Con mayor exactitud eligiremos como numerario la particular combinación de mercancías que integran el producto neto tipo. Para hacer esta normalización, primero se determina el sistema tipo del sistema efectivo. con lo que obtenemos:

$$[I - (1 + R)A]Q' = 0 \quad 2.2.46$$

$$\alpha_n Q' = 1 \quad 2.2.47$$

donde el determinante de  $[I - (1 + R)A]$  es cero. Ahora el producto neto está representado por  $Y' = (I - A)Q'$  y el valor de este término lo haremos igual a la unidad, es decir,

$$P(I - A)Q' = 1 \quad 2.2.48$$

La ecuación anterior, es precisamente la ecuación que hacía falta en 2.2.44 y por lo que el sistema queda cerrado. Ya que los precios y el salario queda expresado en términos de mercancía compuesta que integra el producto neto tipo. Si después multiplicamos por el vector columna  $Q'$  el sistema 2.2.44, resultará:

$$PAQ'\pi = PQ' - PAQ' - \alpha_n Q'\omega,$$

$$PAQ'\pi = P(I - A)Q' - \alpha_n Q'\omega,$$

pero  $P(I - A)Q' = 1$  y  $\alpha_n Q' = 1$ , por lo que el sistema se

reduce a:

$$PAQ'\pi = 1 - w;$$

o bien

$$PAQ'\pi R = R(1 - w), \quad 2.2.49$$

Que sucede con la expresión  $PAQ'R$ . Si tomamos la ecuación 2.2.46 y la multiplicamos por el vector  $P$ , nos queda

$$PAQ'R = PQ' - PAQ',$$

$$PAQ'R = P(I' - A)Q'.$$

Pero  $P(I' - A)Q' = 1$  por lo que sistema se reduce a

$$\pi = R(1 + w) \quad 2.2.50$$

Y dado que  $R = \Pi$  resulta que la relación entre el salario unitario y el tipo de beneficio es válida entre con la condición de que el salario unitario venga expresado en términos de la mercancía tipo. Podemos también decir que aunque la relación sea la misma en ambos sistemas, las proporciones del sistema tipo nos describen la relación en términos físicos lo que en el sistema efectivo esta expresado en términos de valor.

la razón por la cual la relación entre  $\pi$  y  $w$  sea tan compleja es que no se pueden excluir todos los precios para determinarlos ya que por lo menos uno de ellos va implícito en como numerario. La causa es el proceso de producción de la mercancía numerario. Las causas son las distintas proporciones de trabajo y medios de producción en cada estrato de salarios y beneficio de las mercancías. Ahora las variaciones entre  $w$  y  $\pi$  son diferentes dependiendo de las variaciones que puede sufrir la mercancía tomada como unidad de medida de los salarios. Pero esto se soluciona con la mercancía tipo, ya que es independiente de los precios o, una mercancía en cuyo precio los estratos de salario y

beneficio de forma regular a cualquier nivel del tipo de beneficio, según una serie geométrica que repite hasta infinito la misma proporción entre trabajo y medios de producción. Podemos concluir como Pasinetti dice:

*La importancia teórica de esta construcción reside en haber demostrado la posibilidad de tratar la distribución de la renta independientemente de los precios, y además haber demostrado que tal posibilidad no está ligada a la teoría pura del valor-trabajo. Estamos finalmente en disposición de afirmar, de forma rigurosa, que las deficiencias de la teoría clásica pura del valor-trabajo, y hasta su completo abandono, no merman en absoluto la posibilidad de llevar a la práctica un tratamiento de la distribución de la renta independientemente de los precios.*

### CAPITULO 3

### ALGUNOS MODELOS ECONOMETRICOS

### 3.1 ¿Qué es un modelo Econométrico?

Para un análisis más detallado de estos índices desearíamos trabajar con las técnicas estadísticas que en el capítulo uno de la presente tesis se mencionaron y la teoría económica, por lo que nos vemos en la necesidad de estudiar la econometría. A continuación citamos la definición de econometría con mayor aceptación por los economistas.

*La Econometría es la rama de la Economía que se ocupa de la estimación práctica de las relaciones económicas. El sufijo "metría" significa medición; y la econometría se encarga básicamente de medir relaciones económicas, además utiliza teoría económica, incorporada en un modelo econométrico; hechos, sintetizados por la información relevante; y teoría estadística refinada en técnicas económicas, dándole con ello contenido al razonamiento económico. Aunque esta definición está aplicada al pensamiento económico, también es aplicable a otras disciplinas de las ciencias sociales como: la psicología, historia, sociología.*<sup>34</sup>

En la década de los treinta nace la econometría, entonces cubría tanto el desarrollo de la teoría pura desde la perspectiva matemática, como la estimación práctica de las relaciones económicas, a esta parte ahora se le considera como economía matemática.

<sup>34</sup> Intriligator M., 1969:7

*Definición:* Un modelo es cualquier representación de un fenómeno real tal como un proceso o sistema real. El fenómeno real está representado por el modelo para explicarlo, predecirlo y controlarlo, propósitos correspondientes a los tres objetivos de la econométria: análisis estructural, predicción, y evaluación de políticas, respectivamente.<sup>35</sup>

*Definición:* La modelística -El arte de construir modelos- es una parte integral en la mayoría de la ciencias, ya sean físicas o sociales, debido a que los sistemas bajo consideración, por lo común son enormemente complejos.<sup>36</sup>

Durante la historia se a visto la necesidad de construir modelos para la comprensión de problemas, estos modelos se pueden clasificar por su naturaleza, como es la siguiente:

i) Verpales-lógicos;

Estos modelos son los más sencillos de la clasificación y son aquellos que emplean analogías verbales, tales como la metáfora, el símil; el modelo resultante a menudo se considera paradigma.

ii) Físicos;

En algunos casos los fenómenos a estudiar son reales (tangibles), y puede obtenerse un modelo mediante un ajuste de escala apropiado, a manera de ejemplo, en la construcción de una casa-habitación la solución de este modelo puede ser in construcción de una maqueta a escala.

iii) Geométricos;

Estos modelos en particular han sido de mucha ayuda en el

<sup>35</sup> Intreligator M., 1980:2;

<sup>36</sup> Intreligator M., 1980:2;

estudio de los fenómenos económicos, ya que representa geométricamente las relaciones que existen entre las variables que participan de la problemática en estudio, se puede observar que mientras una variable decrece otra de ellas crece, o permanece estable, etc.

iv) Algebraico;

Este modelo es el más importante en el estudio de la econometría, ya que ayuda a representar los fenómenos por medio de sistemas de ecuaciones. Como los vistos en capítulo anterior.

*Definición:* Un modelo econométrico es un tipo de modelo algebraico, estocástico (estadístico). Representa un sistema a través de un conjunto de relaciones estocásticas entre las variables del sistema. Se pueden considerar dos tipos de modelos econométricos: los lineales y los no-lineales. Estos términos fueron tratados en el capítulo uno de esta tesis, por lo que para que un modelo sea de una forma u otra nos remitiremos a el capítulo uno.

*Definición:* Una variable endógena es aquella cuyos valores están determinados de manera simultánea por el modelo.

*Definición:* Una variable exógena es aquella cuyos valores se determinan fuera del modelo pero cuya influencia se deja sentir en él.

Consideremos los modelos algebraico-estadísticos, para poder hablar de uno de estos hablaremos de un modelo microeconómico para un bien agrícola. Este modelo es una generalización de la determinación del precio en un solo mercado. El modelo consta de la siguientes ecuaciones:

$$q^D = \gamma_1 p + \beta_1 I + \delta_1 + \epsilon^D \quad 3.1.11$$

$$q^S = \gamma_2 p + \beta_2 r + \delta_2 + \epsilon^S \quad 3.1.12$$

$$q^D = q^S \quad 3.1.13$$

Donde  $q^D$  es la cantidad demandada de un bien particular,  $q^S$  es la cantidad ofrecida,  $I$  es el ingreso,  $r$  es la frecuencia con que llueve,  $\epsilon^D$  es el término de perturbación estocástica para la demanda y  $\epsilon^S$  es el término de perturbación estocástica para la oferta. En todos los modelos existen variables que son endógenas ( $q^D$ ,  $q^S$ ,  $p$ ) y exógenas ( $I$ ,  $r$ ), términos de perturbación estocástica y parámetros en un sistema de ecuaciones estructurales. En las definiciones anteriores no se hace mención a que las variables exógenas son estadísticamente independientes de los elementos de perturbación estocástica del modelo, en tanto que las endógenas no lo son. En general, las variables exógenas están dadas históricamente o están consideradas por algún mecanismo fuera del modelo. Los términos de perturbación estocástica ( $\epsilon^D$ ,  $\epsilon^S$ ), son variables que se deben sumar siempre a todas las ecuaciones del modelo distintas de la identidad o de las condiciones de equilibrio. Recordando que todas estas ecuaciones son de carácter estadístico es necesario incluir un término de ajuste en la que no se presentan condiciones de equilibrio y los cuales son precisamente los términos de perturbación estocástica.

Los parámetros explícitos del modelo son los coeficientes constantes que multiplican a las variables del modelo. En este caso, el modelo contiene seis parámetros explícitos:  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ , que multiplican a  $p$ ;  $\beta_1$  que multiplica a  $I$ ;  $\beta_2$  que multiplica a  $r$ ; y  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ , que están en este caso multiplicando a 1. El modelo también contiene algunos parámetros implícitos, es decir, los que definen las distribuciones de probabilidad para  $\varepsilon^D$  y  $\varepsilon^S$ . Estos parámetros, explícitos e implícitos son los parámetros estructurales. Las ecuaciones 3.1.11 a 3.1.13 son las ecuaciones estructurales, que es la etapa inicial en la construcción de modelos. En este caso está primero la demanda, luego la oferta y por último una condición de equilibrio. La ecuación 3.1.11 nos señala que la demanda es una función lineal del precio, del ingreso, y del elemento de perturbación estocástica.  $\gamma_1$ ,  $\beta_1$ ,  $\delta_1$  son los parámetros, donde  $\gamma_1$  es un elemento negativo y  $\beta_1$  es generalmente positivo. El término derecho de la igualdad contiene dos variables aleatorias. El término de perturbación estocástica, y los precios  $p$  es endógena y por lo tanto esta influida por ambos términos de perturbación estocástica. Además como el lado izquierdo, o sea la demanda es también estocástica, suponemos que la esperanza de los términos de perturbación es cero, es decir,

$$E(\varepsilon^D) = 0 \quad 3.1.14$$

y por lo anterior se deduce que la cantidad demandada esperada es:

$$E(q^D) = \gamma_1 E(p) + \beta_1 E(I) + \delta_1 \quad 3.1.15$$

La ecuación 3.1.12 nos describe la cantidad ofrecida y nos señala que es una función lineal de los precios, la frecuencia con que llueve y el término de perturbación estocástica.  $\gamma_2$ ,  $\beta_2$ ,  $\delta_2$  son los parámetros donde  $\gamma_2$  en general será positiva,  $\beta_2$  puede ser

positiva (en caso de sequía) o bien negativa (en caso de inundación). Dados estos parámetros los niveles para  $r$  y el valor esperado de  $c^s$ . La oferta esperada sería:

$$E(q^s) = \gamma_2 E(p) + \beta_2 r + \delta_2 \quad 3.1.16$$

La ecuación 3.1.13 muestra la relación de equilibrio y establece que la demanda se iguala con la oferta. Esta ecuación en general provoca que podamos eliminarla del sistema y escribirla de la siguiente manera:

$$q = \gamma_1 p + \beta_1 I + \delta_1 + \epsilon^D \quad 3.1.17$$

$$q = \gamma_2 p + \beta_2 r + \delta_2 + \epsilon^s \quad 3.1.18$$

de esta forma el modelo microeconómico consta de dos ecuaciones estructurales que determinan el valor de dos variables endógenas  $p$ ,  $q$  en términos de dos variables exógenas  $r$  e  $I$ . Escribiéndolo ahora desde el punto de vista matricial obtenemos:

$$(p \ q) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{bmatrix} + (I \ r \ 1) \begin{bmatrix} \beta_1 & 0 \\ 0 & \beta_2 \\ \delta_1 & \delta_2 \end{bmatrix} = (c^D \ c^s) \quad 3.1.19$$

donde el vector  $(p \ q)$  es el vector de variables endógenas, mientras que  $(I \ r \ 1)$  es el vector de variables exógenas y el vector  $(c^D \ c^s)$  es el de los coeficientes de perturbación estocástica. Las dos matrices son las matrices de coeficientes estructurales y contienen todos los parámetros de las ecuaciones estructurales. Resolviendo por medio de ecuaciones simultáneas obtenemos:

$$p = \frac{\beta_1}{\gamma_2 - \gamma_1} I - \frac{\beta_2}{\gamma_2 - \gamma_1} r + \frac{\delta_1 - \delta_2}{\gamma_2 - \gamma_1} + \frac{\epsilon^D + \epsilon^s}{\gamma_2 - \gamma_1} \quad 3.1.110$$

$$q = \frac{\gamma_2 \beta_1}{\gamma_2 - \gamma_1} I - \frac{\gamma_2 \beta_2}{\gamma_2 - \gamma_1} r + \frac{\gamma_2 \delta_2 - \gamma_1 \delta_1}{\gamma_2 - \gamma_1} + \frac{\gamma_2 \epsilon^D - \gamma_1 \epsilon^s}{\gamma_2 - \gamma_1} \quad 3.1.111$$

Esto se puede escribir en forma matricial como sigue:

$$(p, q) = (I, r, 1) \begin{bmatrix} \frac{\gamma_2 \beta_1}{\gamma_2 - \gamma_1} & \frac{\beta_1}{\gamma_2 - \gamma_1} \\ \frac{\gamma_1 \beta_2}{\gamma_2 - \gamma_1} & \frac{\beta_2}{\gamma_2 - \gamma_1} \\ \frac{\gamma_2 \beta_1 - \gamma_1 \beta_2}{\gamma_2 - \gamma_1} & \frac{\delta_1 - \delta_2}{\gamma_2 - \gamma_1} \end{bmatrix} + \left[ \frac{\gamma_2 c^D - \gamma_1 c^B}{\gamma_2 - \gamma_1} \quad \frac{c^D + c}{\gamma_2 - \gamma_1} \right] \quad 3.1.112$$

A las ecuaciones 3.1.110 a 3.1.112 se le denomina forma reducida del sistema. Los coeficientes de las ecuaciones de la forma reducida sintetizan la estática comparativa del modelo. Entiéndase por estática comparativa, la comparación de dos valores en equilibrio de cada una de las variables endógenas donde el único cambio ocurre en una variable exógena, entonces de 3.1.112 tenemos

$$\frac{\partial p}{\partial I} = \frac{\beta_1}{\gamma_2 - \gamma_1} \quad 3.1.113$$

como el denominador es siempre positivo ya que  $\gamma_2 > \gamma_1$ , por ser  $\gamma_2 > 0$  y  $\gamma_1 < 0$ , esto sucede ya que  $\gamma_2$  representa la pendiente de la curva de oferta y  $\gamma_1$  representa la pendiente de la curva de demanda. Esto es que en la medida de que  $\beta_1$  sea positivo la deriva será positiva.

Del mismo modo se obtiene

$$\frac{\partial q}{\partial I} = \frac{\gamma_2 \beta_1}{\gamma_2 - \gamma_1} > 0 \quad 3.1.114$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\beta_2}{\gamma_2 - \gamma_1} < 0 \quad 3.1.115$$

$$\frac{\partial q}{\partial r} = \frac{\gamma_1 \beta_2}{\gamma_2 - \gamma_1} > 0 \quad 3.1.116$$

El significado del signo mayor y menor que en las ecuaciones 3.1.115 y 3.1.116 significa el incremento o disminución del factor lluvia.

Es ahora, donde la teoría económica termina y la econométrica

empieza, ya que se han establecido el modelo y los signos de algunas derivadas parciales. Lo que sigue a partir de este punto, es la estimación estadística de los valores numéricos, o la estimación del sistema 3.1.112. La estimación de los coeficientes de la forma reducida es el primer paso para la estimación de la forma estructural.

Este modelo lo consideraremos el segundo ejemplo de un modelo econométrico. Será la generalización del ingreso nacional. Este modelo al igual que el modelo microeconómico ilustra la generalización de un modelo algebraico-estadístico. Además una diferencia esencial entre el modelo micro y el macro es que el primero permanece estático y el segundo es dinámico con respecto al tiempo.

El modelo macroeconómico estará constituido por las siguientes ecuaciones:

$$C_t = \gamma_1 Y_t + \beta_1 + \varepsilon_t^C \quad 3.1.21$$

$$I_t = \gamma_2 Y_t + \beta_2 Y_{t-1} + \beta_3 + \varepsilon_t^I \quad 3.1.22$$

$$Y_t = C_t + I_t + G_t \quad 3.1.23$$

donde  $Y_t$ ,  $C_t$ ,  $I_t$  representan el ingreso, el consumo y la inversión respectivamente en el periodo año  $t$  y además son las variables endógenas del modelo.  $G_t$  es el gasto del gobierno en el periodo  $t$ , este elemento se considera exógeno. Las  $Y_{t-1}$  es el ingreso del periodo anterior, y también es una variable exógena. Con respecto a las variables  $\varepsilon_t^C$  y  $\varepsilon_t^I$  como en el ejemplo anterior continúan siendo variables de perturbación estocástica del consumo y la inversión respectivamente. Los parámetros estructurales  $\gamma_1$  y  $\beta_1$  serán los elementos de estimación. La primera ecuación nos describe el consumo del sistema, la segunda ecuación la inversión tanto del periodo como la del anterior, el caso especial cuando la inversión es autónoma los parámetros  $\gamma_2$ ,  $\beta_2$ ,  $\varepsilon_t^I$  son igual a cero, entonces  $I = \beta_3$ . Otro caso especial es cuando  $\beta_2 = -\gamma_2$ , donde la

inversión sigue el mecanismo del acelerador. En este caso la inversión está basada en cambios del ingreso nacional, es decir,

$$I_t = \gamma_2 (Y_t - Y_{t-1}) + \beta_3 + c_t^I \quad 3.1.24$$

la ecuación anterior muestra la condición de equilibrio, donde la inversión es la suma del consumo, la inversión y el gasto gubernamental.

De igual forma que en modelo microeconómico, la condición de equilibrio puede ser empleada para simplificar nuestro sistema, en este caso eliminaremos  $I$  y obtendremos entonces un sistema de dos ecuaciones estructurales, como a continuación:

$$Y_t = \left[ \frac{1}{1-\gamma_2} \right] C_t + \left[ \frac{\beta_2}{1-\gamma_2} \right] Y_{t-1} + \left[ \frac{1}{1-\gamma_2} \right] G_t + \frac{\beta_3}{1-\gamma_2} + \frac{c_t^I}{1-\gamma_2} \quad 3.1.25$$

lo anterior se vería en forma matricial como a continuación:

$$\begin{aligned} (C_t \quad Y_t) \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{1-\gamma_2} \\ \gamma_1 & -1 \end{pmatrix} + (Y_{t-1} \quad G_t \quad 1) \begin{pmatrix} 0 & \frac{\beta_2}{1-\gamma_2} \\ 0 & \frac{1}{1-\gamma_2} \\ 0 & \frac{\beta_3}{1-\gamma_2} \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} -e_t^C & -\frac{c_t^I}{1-\gamma_2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad 3.1.26$$

Resolviendo para  $(C_t \quad Y_t)$  obtenemos

$$Y_t = \left[ \frac{\beta_2}{1-\gamma_1-\gamma_2} \right] Y_{t-1} + \left[ \frac{1}{1-\gamma_1-\gamma_2} \right] G_t + \frac{\beta_1 + \beta_3}{1-\gamma_1-\gamma_2} + \frac{e_t^C + c_t^I}{1-\gamma_1-\gamma_2} \quad 3.1.27$$

$$\begin{aligned} C_t = \left[ \frac{\gamma_1 \beta_2}{1-\gamma_1-\gamma_2} \right] Y_{t-1} + \left[ \frac{\gamma_1}{1-\gamma_1-\gamma_2} \right] G_t + \frac{\gamma_1 \beta_3 + (1-\gamma_2) \beta_1}{1-\gamma_1-\gamma_2} + \\ + \frac{\gamma_1 c_t^I + (1-\gamma_2) e_t^C}{1-\gamma_1-\gamma_2} \end{aligned} \quad 3.1.28$$

Estas ecuaciones nos determinan el ingreso y el consumo

corrientes como funciones del ingreso desfasado ( $Y_{t-1}$ ) y el gasto corriente del gobierno ( $G_t$ ). En general, las ecuaciones de la forma reducida siempre expresan las variables endógenas como función de las variables endógenas desfasadas, las variables exógenas y los términos de perturbación estocástica. La ecuación 3.1.27 muestra el efecto de un cambio en el gasto público corriente sobre el ingreso como

$$\frac{\partial Y_t}{\partial G_t} = \frac{1}{1 - \gamma_1 - \gamma_2} \quad 3.1.29$$

Este indicador es conocido como *multiplicador de impacto* porque indica el impacto del gasto público sobre el ingreso. En el caso especial de que la inversión este determinada a priori, es decir  $\gamma_2 = 0$ , el multiplicador es el recíproco de la unidad menos la "propensión marginal al consumo", es decir

$$\frac{\partial Y_t}{\partial G_t} = \frac{1}{1 - \gamma_1} = \frac{1}{1 - PMC} \quad 3.1.210$$

La ecuación reducida de  $Y$  puede ser escrita también de la siguiente manera:

$$Y_t = \pi_1 Y_{t-1} + \pi_2 G_t + \pi_3 + \mu_t \quad 3.1.211$$

donde

$$\pi_1 = \beta_2 \pi_2 \quad 3.1.212$$

$$\pi_2 = \frac{1}{1 - \gamma_1 - \gamma_2}$$

$$\pi_3 = (\beta_1 + \beta_3) \pi_2$$

$$\mu_t = (\varepsilon_t^C + \varepsilon_t^I) \pi_2.$$

Si esta ecuación se resuelve, el resultado, como ecuación de la forma final, permitirá el cálculo de todos los multiplicadores, de largo y de corto plazo para el ingreso. Obsérvese que la ecuación 3.1.211 implica

$$Y_{t-1} = \pi_1 Y_{t-2} + \pi_2 G_{t-1} + \pi_3 + \mu_{t-1} \quad 3.1.213$$

Substituyendo la ecuación anterior en 3.1.211 se obtiene

$$Y_t = \pi_1^2 Y_{t-2} + \pi_2 (G_t + \pi_1 G_{t-1}) + \pi_3 (1 + \pi_1) + (\mu_t + \pi_1 \mu_{t-1}) \quad 3.1.214$$

Haciendo este proceso iterativo hasta que el tiempo base sea  $t = 0$  se obtiene

$$Y_t = \pi_1^t Y_0 + \pi_2 (G_t + \pi_1 G_{t-1} + \pi_1^2 G_{t-2} + \dots + \pi_1^{t-1} G_1) + \pi_3 (1 + \pi_1 + \pi_1^2 + \dots + \pi_1^{t-1}) + (\mu_t + \pi_1 \mu_{t-1} + \pi_1^2 \mu_{t-2} + \dots + \pi_1^{t-1} \mu_1) \quad 3.1.215$$

Esta ecuación se conoce como la ecuación de la forma fina, para el ingreso. A partir de esta ecuación podemos calcular todos los multiplicadores para el ingreso. Así el multiplicador de impacto que da el efecto sobre el ingreso corriente obtenido de un cambio en el gasto público, es

$$\frac{\partial Y_t}{\partial G_t} = \pi_2 = \frac{1}{1 - \gamma_1 - \gamma_2} \quad 3.1.216$$

considerese ahora el efecto sobre el ingreso corriente de un cambio en el gasto público del periodo anterior:

$$\frac{\partial Y_t}{\partial G_{t-1}} = \pi_2 \pi_1 \quad 3.1.217$$

Sumando las dos ecuaciones anteriores obtenemos el efecto de un cambio en el gasto público acumulado del, periodo corriente como del previo, a este resultado se le llama multiplicador acumulado de dos periodos

$$\left. \frac{\partial Y_t}{\partial G_t} \right|_{\Delta G_{t-1} = \Delta G_t} = \pi_2 (1 + \pi_1) = \frac{1 - \gamma_1 - \gamma_2 + \beta_2}{(1 - \gamma_1 - \gamma_2)^2} \quad 3.1.218$$

de esta misma forma, el multiplicador acumulado de  $n$  periodos es

$$\left. \frac{\partial Y_t}{\partial G_t} \right|_{\Delta G_{t-n-1} = \dots = \Delta G_t} = \pi_2 (1 + \pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_1^{n-1}) \quad 3.1.219$$

por lo tanto, con  $n$  en el límite a infinito es una serie geométrica se reduce a

$$\frac{\partial y_t}{\partial G_t} \Big|_{\Delta G_{t-n-1} = \dots = \Delta G_t} = \frac{\pi_2}{1 - \pi_1} = \frac{1}{1 - \gamma_1 - \gamma_2 - \beta_2} \quad 3.1.220$$

Este indicador tiene la interpretación del cambio en cada uno de los periodos previos, alargándose hacia atrás, así es la respuesta de un nuevo nivel sostenido en el gasto del gobierno. Si  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  y  $\gamma_1$  fuesen todos positivos, el multiplicador de impacto (3.1.29) y el multiplicador de largo plazo (3.1.220) producirán respectivamente la cuota inferior y la cuota superior para todos los multiplicadores del gasto público; mismo que darían, al efecto de un cambio unitario en el gasto del gobierno sobre el ingreso, un valor entre

$$\frac{1}{1 - \gamma_1 - \gamma_2} \quad \text{y} \quad \frac{1}{1 - \gamma_1 - \gamma_2 - \beta_2} \quad 3.1.221$$

dependiendo del número de años para el que se aplicará el cambio. Con los parámetros estimados del modelo es posible obtener valores numéricos para los diferentes multiplicadores (parte del análisis estructural). Con estas estimaciones también es posible pronosticar, realizar evaluación de políticas y proyectar políticas o inversiones, entre otras cosas.

El problema de estimación de una sola ecuación consiste en determinar estimación de sus parámetros. Dado el modelo econométrico siguiente

$$y = x\Pi + \epsilon \quad 3.2.1$$

donde  $y$  es el vector de  $s$  variables endógenas;  $x$  es el vector de  $k$  variables exógenas (no estocástico);  $\Pi$  la matriz de  $k \times s$  coeficientes. Cada columna de la matriz  $\Pi$  contiene todos los parámetros que van a ser estimados en la ecuación correspondiente. Donde la  $i$ -ésima ecuación se puede escribir como:

$$y_i = \sum_{j=1}^k x_j \Pi_{j,i} + \epsilon_i \quad 3.2.2$$

El problema de estimar los  $k$  parámetros en la ecuación anterior es de la estimación de una sola ecuación y el problema de estimar la forma reducida es el de estimar todas las ecuaciones de esta forma. Si escribimos  $\beta$  en lugar de  $\Pi$  obtenemos:

$$y = \sum_{j=1}^k x_j \beta_j + \epsilon \quad 3.2.3$$

Como podemos observar esta es un ecuación de regresión lineal simple, y se puede escribir también como sigue:

$$y = x\beta + \epsilon = (x_1, \dots, x_k) \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix} + \epsilon \quad 3.2.4$$

como ya se vio en el capítulo primero.

En el caso más general de una o más variables explícitas, donde  $k \geq 2$ , el problema es el de la regresión lineal múltiple. El propósito de esta regresión es estimar como dos o más variables están relacionadas. Los coeficientes de regresión estimados, sintetizan en forma cuantitativa los efectos de un cambio en cualquier variable explícita sobre el valor de  $y$ .

variable dependiente. En particular, si  $\beta_j$  es el valor estimado del coeficiente de regresión  $j$ -ésimo entonces:

$$\beta_j = \frac{dy}{dx_j}, \quad j = 1, 2, \dots, k$$

es un estimador de la influencia de la  $j$ -ésima variable sobre  $y$ .

La solución para este tipo de modelos la encontramos en el capítulo primero, ya que se reduce a un ajuste por mínimos cuadrados, ya sea lineal, cuadrático, logarítmico, etc.

EL modelo requiere de datos sobre sus variables. Estos datos se utilizan para estimar los parámetros del modelo. En el caso que estudiamos se requiere una muestra de datos en forma de vector de dimensión  $n$  y forman la variable dependiente  $y$  y una matriz de  $n$  valores observados del vector de variables exógenas  $x$ , que se escriben

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & & x_{nk} \end{pmatrix} \quad 3.2.5$$

Los elementos de  $y$  son los números  $y_i$ , donde  $y_i$  es el valor de la variable  $y$  en la observación  $i$ , siendo  $i$  un índice de observaciones.

### 3.3 Modelos en sistemas en ecuaciones simultaneas

Cuando se hace necesario un modelo en ecuaciones simultaneas es por que al evaluar una sola ecuaciones no estamos considerando muchas variables endógenas que nos pueden dar una descripción más exacta de nuestra economía. Un modelo en ecuaciones simultaneas determina los valores de un conjunto de variables, las variables endógenas en términos de otro conjunto de variables, las exógenas. El modelo de ecuaciones simultaneas lineal puede ser escrito en la forma estructural como las  $g$  ecuaciones simultaneas

$$y_t \Gamma + x_t B = \varepsilon_t \quad t = 1, \dots, n \quad 3.3.1$$

donde  $y_t$  es el vector de  $g$  variables endógenas en la  $t$ -ésima observación,  $x_t$  es un vector de  $k$  variables exógenas y  $\varepsilon_t$  es un vector de  $g$  términos de perturbación estocástica en la observación  $t$ -ésima.  $t$  recorre todo el conjunto de observaciones. Las matrices de coeficientes para ser estimadas son  $\Gamma$  y  $B$  que representan, respectivamente, coeficientes de las variables endógenas y exógenas. La matriz  $\Gamma$  es un matriz cuadrada de  $g \times g$  y la matriz  $B$  es un matriz rectangular de  $k \times g$ . La forma estructural contiene las  $g$  ecuaciones que determinan, para cada observacion, los valores de las  $g$  variables endógenas, dadas las  $g$  variables exógenas, los  $g$  términos de perturbación estocástica y los  $g$  coeficientes del sistema.

Se puede observar que existe una indeterminación trivial de cada una de las ecuaciones estructurales que consiste en que al multiplicar todos los términos, por una constante distinta de cero, no se altera el significado de la ecuación. Esta indeterminación se nulifica por medio de la normalización, misma

que por lo común implica la elección de un valor específico distinto de cero para cualquiera de los parámetros distintos de cero en cada ecuación. La normalización más utilizada establece que los elementos de la diagonal de  $\Gamma$  sean iguales a  $-1$ , es decir,

$$\Gamma_{hh} = -1 \quad h = 1, \dots, n \quad 3.3.2$$

Por lo tanto, suponiendo que  $\gamma_{hh} \neq 0$ , tenemos que la constante a multiplicar es  $-1/\gamma_{hh}$ . Así la normalización de la ecuación  $h$  se escribirá como

$$y_{th} = \sum_{\substack{h'=1 \\ h' \neq h}}^g y_{th'} \gamma_{h'h} + \sum_{j=1}^k x_{tj} \beta_{jh} - \epsilon_{th} \quad 3.3.3$$

De esta forma las  $y_{th}$  juega un papel comparable con el de la variable dependiente de la estimación del caso unicuacional; mientras las  $y_{h'h}$  con  $h' \neq h$ , donde  $\epsilon_{h'h} \neq 0$  y las  $x_{tj}$  donde  $\beta_{jh} \neq 0$  juegan un papel de variables independientes de la estimación unicuacional. La distinción entre la estimación de ecuaciones simultáneas y estimación unicuacional es precisamente el carácter de las  $y_{th}$  (variables endógenas explicativas).

Los términos de perturbación estocástica cumplen con algunas propiedades como, primero

$$E(\epsilon_t) = 0, \quad t = 1, \dots, n \quad 3.3.4$$

segundo, la matriz de covarianza de los  $\epsilon_t$  se supone igual en cada observación, es decir,

$$\text{Cov}(\epsilon_t) = E(\epsilon_t' \epsilon_t) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1g} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{g1} & \sigma_{g2} & \dots & \sigma_{gg} \end{bmatrix} \quad \text{para toda } t \quad 3.3.5$$

donde  $\Sigma$  será la matriz de varianzas y covarianzas simétrica y positiva-definida. Este supuesto es un generalización vectorial del sistema unicuacional que se define como homosceoasticidad donde  $g = 1$ . Tercero, los  $\epsilon_t$  se suponen no correlacionados en la

muestra, es decir

$$E(\epsilon_i' \epsilon_j) = 0^{37} \quad \text{para toda } i \neq j \quad 3.3.6$$

Estos supuestos se satisfacen si los términos de perturbación estocástica están independiente e idénticamente distribuidos sobre la muestra, con un vector de medias cero y una matriz de covarianzas  $\Sigma$  constante. Bajo estos supuestos, en tanto los términos de perturbación estocástica no están correlacionados sobre la muestra, pueden estar correlacionados por ecuaciones. Por este último fenómeno de correlación entre términos de perturbación estocástica es necesaria la utilización de sistemas de ecuaciones simultáneas y no es válido el tratamiento de ecuaciones aisladas.

En el caso uniecuacional a veces se hacen supuestos de la distribución de los términos. Aquí en el caso multiecuacional también, generalmente se asume que están independiente, idéntica y normalmente distribuidos, es decir,

$$\epsilon_i \sim N(0, \Sigma). \quad 3.3.7$$

Como  $\Gamma$  es una matriz no singular, es posible resolver para  $y_i$  multiplicando por la derecha 3.3.1 por  $\Gamma^{-1}$  de lo que se obtiene la siguiente igualdad

$$y_i = -\alpha_i \beta \Gamma^{-1} + \epsilon_i \Gamma^{-1} \quad 3.3.8$$

o bien

$$y_i = \alpha_i \Pi + \mu_i \quad 3.3.9$$

donde

$$\Pi = -\beta \Gamma^{-1} \quad 3.3.10$$

$$\mu = \epsilon_i \Gamma^{-1} \quad 3.3.11$$

La ecuación 3.3.9 es la forma reducida, que expresa cada una de

<sup>37</sup>Notemos que el vector  $\epsilon_i$  es el vector transpuesto.

las variables endógenas  $y_i$  como una función lineal de todas las variables predeterminadas  $x_i$  y de los términos de perturbación estocástica  $\mu_i$ . La matriz  $\Pi$  definida en la ecuación 3.3.9 se conoce como la matriz de coeficientes de la forma reducida, y  $\mu_i$  es conocido como el vector de términos de perturbación estocástica de la forma reducida. Dado que los términos de perturbación estocástica de la forma reducida son una relación lineal de los términos de perturbación estocástica con la forma de la ecuación estructural, todos los supuestos estocásticos de los  $\varepsilon_i$  los heredan los  $\mu_i$ . Por lo tanto se deduce que

$$E(\mu_i) = 0 \quad 3.3.12$$

de donde podemos ver que el promedio o valor esperado de las variables endógenas se reducen a

$$E(y_i) = x_i \Pi. \quad 3.3.13$$

La relación que existe entre la matriz de covarianzas de la forma reducida y la forma estructural, esto es

$$\text{Cov}(\mu_i) = E(\mu_i' \mu_i) = \Gamma^{-1'} E(\varepsilon_i' \varepsilon_i) \Gamma^{-1} = \Gamma^{-1'} \Sigma \Gamma^{-1} = \Omega, \quad \text{para toda } i$$

esto es que la matriz  $\Sigma$  tiene una relación directa con la matriz  $\Omega$ , podemos despegar de la igualdad anterior y obtenemos

$$\Sigma = \Gamma' \Omega \Gamma \quad 3.3.14$$

Otra propiedad que se hereda por 3.3.6 y 3.3.11 es

$$E(\mu_i' \mu_i) = 0 \quad 3.3.15$$

Así como los  $\varepsilon_i$  están no correlacionados sobre la muestra los  $\mu_i$  también. Se supone, además, que los términos de perturbación estocástica de la forma estructural están distribuidos normalmente, de donde se sigue,

$$\mu_i \sim N(0, \Omega) \quad 3.3.16$$

lo cual es equivalente a

$$y_i \sim N(x_i \Pi, \Omega) \quad 3.3.17$$

Las observaciones en las variables endógenas y predeterminadas, tanto para las ecuaciones de la forma estructural, como para las de la forma reducida pueden expresarse por las matrices de datos.

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad 3.3.18$$

donde cada uno de las variables  $y_i$  y  $x_i$  son vectores de  $g$  coordenadas. Cada una de las ecuaciones de la forma reducida puede ser estimada como una sola ecuación. Los coeficientes de la ecuación  $h$ , sintetizados por la columna  $h$ -ésima de la matriz  $\Pi$

$$\Pi_h = \begin{pmatrix} \pi_{1h} \\ \vdots \\ \pi_{kh} \end{pmatrix} \quad \text{con } h = 1, \dots, g \quad 3.3.19$$

puoden estimarse utilizando el estimador de mínimos cuadrados y los datos de 3.3.18 como sigue

$$\Pi_h = (X'X)^{-1}X' \begin{pmatrix} y_{1h} \\ \vdots \\ y_{nh} \end{pmatrix} \quad 3.3.20$$

donde se supone que  $P(X) = k$ , de modo que  $X'X$  es no singular. Aumentado estas columnas se obtiene la matriz completa de coeficientes de la forma reducida

$$\Pi = (\Pi_1, \dots, \Pi_g) = (X'X)^{-1}X' \begin{pmatrix} y_{11} & \dots & y_{1g} \\ \vdots & & \vdots \\ y_{n1} & \dots & y_{ng} \end{pmatrix} \quad 3.3.21$$

Así, el conjunto de todos los estimadores mínimo cuadráticos del sistema completo de la forma reducida pueden expresarse como sigue:

$$\Pi = (X'X)^{-1}X'Y \quad 3.3.22$$

Los estimadores en la ecuación 3.3.22 son los únicos mejores

estimadores iniciales insesgados y consistentes de la forma reducida, puesto que representan estimadores mínimo cuadráticos de la ecuación de la forma reducida. La matriz de covarianzas de los términos de perturbación estocástica para las ecuaciones de la forma reducida  $\Omega$ , puede ser estimada utilizando la generalización matricial del estimador de una sola ecuación, como

$$\begin{aligned}\hat{\Omega} &= \frac{1}{n-k} \hat{\mu}' \hat{\mu} = \frac{1}{n-k} (Y - X\hat{\Pi})' (Y - X\hat{\Pi}) = \\ &= \frac{1}{n-k} Y' [I - X(X'X)^{-1}X'] Y.\end{aligned}\quad 3.3.23$$

donde  $\hat{\mu}' \hat{\mu}$  es la matriz de residuos de mínimos cuadrados e  $I - X(X'X)^{-1}X'$  es la matriz de mínimos cuadrados. Este estimador es un estimador de  $\Omega$  insesgado y consistente.

Bajo ciertas condiciones, los estimadores mínimo cuadráticos de los parámetros de la forma reducida,  $\Pi$ ,  $\Omega$ , dados por 3.3.22 y 3.3.23, y que sintetizan toda la información relevante que puede obtenerse a partir de la muestra, pueden ser utilizados para estimar los parámetros de la forma estructural  $\Gamma$ ,  $\beta$ ,  $\Sigma$ . Las estimaciones no se realizan directamente de la forma estructural, ya que tales estimaciones directas no sólo están sesgadas sino que también son inconsistentes debido a que es común que las ecuaciones de la forma estructural incluyan variables endógenas explícitas, y por el contrario los estimadores de los parámetros de la forma estructural, que se obtienen a partir de los de la forma reducida, comúnmente son estimadores consistentes.

### 3.4 Obtención y manejo de los datos estadísticos.

Como se ha observado en los capítulos anteriores, una parte fundamental de los trabajos en teoría económica los datos estadísticos. Los datos estadísticos relevantes para un estudio particular sintetizan los hechos concernientes al fenómeno objeto de investigación. Estos datos pueden ser de diferentes tipos y originarse de distintas fuentes. La teoría subyacente al fenómeno es usada para determinar la elección entre variables alternativas. Estas son fundamentalmente cuantitativas, cualitativas o una combinación de ambas. Cualquiera que sea el tipo, fuente o naturaleza de los datos, estos se expresan de forma cuantitativa para poder así llevar a cabo el estudio econométrico.

Para estimar los parámetros de un modelo econométrico, es condición indispensable contar con datos acerca de las variables incluidas en él. Son necesarios los valores adoptados por las variables endógenas, exógenas y cuando el modelo es dinámico las variables endógenas o exógenas desfasadas, para estimar sus parámetros. En realidad el problema más grave en el estudio de un modelo econométrico es la falta de información, ya que resulta relativamente sencilla la construcción de modelos pero encontrar los datos "apropiados" para un modelo particular no es tan sencillo y su disponibilidad determina, en última instancia, la inclusión o la exclusión de cada variable particular. Esto nos lleva a la necesidad de utilizar los datos mejores y manipulados de tal forma que nos puedan ser más útiles. Otro problema de los datos es la forma en que se expresarán si será en cantidades

nominales o reales, en cantidades totales o per cápita, pues los resultados econométricos también dependen de la forma en que se encuentren los datos.

A pesar que en algunas situaciones se reúnen datos experimentales, la mayoría de los estudios econométricos deben basarse en datos no experimentales. Los problemas que presentan este tipo de datos pueden ser denominados bajo el término de "mala interpretación". El primero de los problemas es el de los grados de libertad; esto es, que los datos disponibles simplemente no incluyen suficiente número de observaciones como para permitir una estimación adecuada del modelo. Bajo el empleo de datos no experimentales es imposible repetir las condiciones que dieron lugar a esos datos de modo que también es imposible generar puntos de datos adicionales. En algunos casos, los datos disponibles pueden ser inadecuados para estimar incluso un modelo simple.

Un segundo problema es el de *multicolinealidad*, que es la tendencia de los datos a agruparse o a moverse juntos en vez de estar esparcidos. Por ejemplo, en los datos en series de tiempo, las variables están propensas a exhibir las mismas tendencias, ya sean éstas cíclicas o seculares., a través del tiempo. Con datos experimentales podría ser posible alterar las condiciones del experimento y obtener una dispersión adecuada. Con datos no-experimentales estas forma de control no existen y el sistema del fenómeno puede albergar variaciones independientes muy ligeras en los datos y en particular, un grado muy alto de interdependencia en algunas variables.

Un tercer problema importante de considerar es el problema de *correlación serial*, esto sucede cuando se utilizan datos en series

de tiempo, los cambios subyacentes ocurren muy lentamente a través del tiempo. Así, las condiciones en periodos de tiempo muy cercanos tienden a ser similares. En la medida en que el término de perturbación estocástica representa las condiciones relevantes del modelo que no fueron incluidas explícitamente, tales como, variables omitidas, la correlación serial se manifiesta en una dependencia del término de perturbación estocástica de un periodo sobre el de otro periodo.

Otro importante problema es el de los errores de medición. Este se refiere a que los datos que están medidos son sujetos a diversas imprecisiones y desviaciones. Las imprecisiones fundamentales son aquellas que se tienen por una mala conceptualización. Es decir, el aumento o la disminución de partes integrantes de cada concepto (datos). Estos cambios de conceptualización requieren la reconfiguración de los datos para poder hacerlos comparables y consistentes en el tiempo.

Por todo lo anterior los datos deben ser depurarse. No obstante, una depuración que ayuda a resolver uno de los problemas puede agravar o crear otro. Así, por ejemplo, depurar datos en series de tiempo anuales a trimestrales, aumenta el número de información (grados de libertad) pero tiende a agravar el de la multicolinealidad y el de la correlación serial. Esto hace necesario tener mucho cuidado con la forma de obtención y manejo de los datos.

El utilizar datos con cualquiera de los errores citados anteriormente nos llevará a una mala estimación de los parámetros del modelo. Ahora, tanto las variables dependientes como las independientes están sujetas a errores de

medición. En particular, los datos disponibles bien pueden no referirse a la variable tal como está especificada, o pueden existir sesgos sistemáticos en la recabación o publicación de los datos. Si el modelo de regresión lineal verdadero tiene la forma

$$y = X\beta + \mu \quad 3.4.1$$

donde  $y$  representa los valores verdaderos de la variable dependiente,  $X$  representa los valores verdaderos de la variable explicativa y  $\mu$  representa el vector de términos de perturbación estocástica, generalmente ninguna de estas variables está medida sin error. En vez de ello, lo que se observa es  $y_1$  y  $X_1$ , donde

$$y_1 = y + v_e \quad 3.4.2$$

$$X_1 = X + X_e \quad 3.4.3$$

donde  $v_e$  es un vector y  $X_e$  es una matriz de variables aleatorias. Los errores de medir  $y$  no presentan nuevas complicaciones, ya que los errores  $v_e$  pueden ser fusionados con el término de perturbación estocástica, y así el modelo se reduce a

$$y_1 = X_1\beta + (v + X_e\beta) \quad \text{donde } v = \mu + v_e \quad 3.4.4$$

Este modelo no puede ser manejado de la misma manera que el modelo de regresión lineal básico, ya que las variables explicativas medidas  $X'$  no están distribuidas independientemente del término de perturbación estocástica  $v + X_e\beta$ . Su estimador será

$$\hat{\beta} = (X_1'X_1)^{-1}X_1'y_1 = \beta + (X_1'X_1)^{-1}X_1'(v + X_e\beta) \quad 3.4.5$$

es estimador, en general, es sesgado y su sesgo está dado por

$$B(\hat{\beta}) = E(\hat{\beta}) - \beta = -E[(X_1'X_1)^{-1}X_1'X_e\beta] \quad 3.4.6$$

Después de observar lo anterior, nos vemos en la necesidad de reconfigurar los datos de distintas formas para que así puedan ser utilizados en un estudio econométrico. Esta reconfiguración se debe realizar para obtener un conjunto de datos consistente, que

represente series comparables. En el caso de los datos en series de tiempo, la configuración puede tomar una variedad de formas, incluyendo la interpolación, la extrapolación la entreveración y la uniformación. La interpolación se refiere a la determinación de los valores que se encuentran entre los que son conocidos. Por ejemplo, en el caso de series de tiempo, podríamos tener una serie de información faltandonos algunos periodos incluidos en el rango de estudio, el método utilizado para obtener estos datos es la interpolación. Existen varios tipos de interpolación, entre los que podemos mencionar, interpolación lineal donde los puntos faltantes son solo combinaciones de los conocidos. Así si  $x_t$  es una observación o estimación de una variable en el tiempo  $t$  y  $x_{t+2}$  es una observación o estimación de la misma variable en el tiempo  $t + 2$ , la estimación linealmente interpolada en el tiempo  $t + 1$ , suponiendo que es equidistante del tiempo  $t$  y  $t + 2$  está dada por

$$\hat{x}_{t+1} = \frac{x_t + x_{t+2}}{2} \quad 3.4.7$$

Otro método de interpolación es la interpolación exponencial, está emplea la media geométrica

$$\hat{x}_{t+1} = \sqrt{x_t x_{t+2}} \quad 3.4.8$$

que es lineal en los logaritmos de las variables. Este método es equivalente a aquel que consiste en ajustar una función exponencial entre  $x_t$  y  $x_{t+2}$  de tal forma que

$$\hat{x}_{t+1} = x_t e^{\alpha t} \quad \text{donde } x_{t+2} = x_{t+1} e^{\alpha t} = x_t e^{2\alpha t} \quad 3.4.9$$

donde  $\alpha$  puede ser calculada mediante

$$\alpha = \frac{1}{2t} \ln \frac{x_{t+2}}{x_t} \quad 3.4.10$$

Otro método de interpolación es el método del polinomio de interpolación de lagrange, este metodo es utilizado para cuando el comportamiento de los datos no es lineal ni exponencial, sino es

polinomial, es decir presentando una serie de cambios en su comportamiento. Para describir este método supondremos que tenemos  $n$  datos  $(x_i$  con  $i = 1, \dots, n)$ . Primero construiremos los cocientes  $L_i(x_i)$  de la siguiente manera

$$L_i(x) = \frac{(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)} \quad 3.4.11$$

para toda  $i$ . A continuación se toma el resultado de cada uno de los  $L_i$  y a continuación se multiplican por su respectivo valor  $f(x_i)$  y de la suma de todos estos elementos resultantes queda el polinomio de interpolación, como se ve a continuación

$$P(x) = f(x_0)L_0(x) + \dots + f(x_n)L_n(x) = \sum_{i=1}^n f(x_i)L_i(x) \quad 3.4.12$$

Este método se utiliza evaluando el punto desconocido en el polinomio  $P(x)$ , así obteniendo el valor esperado en el comportamiento de todo el conjunto de datos.

La extrapolación se utiliza cuando la falta de información esta fuera del rango de datos, es decir si los datos disponibles para unas variables tiene información para más periodos que otras variables habra que calcular los datos para igualar la disposición datos para todas las variables del sistema. Las técnicas de extrapolación son similares a las de interpolación, por ejemplo la extrapolación lineal funciona de la siguiente manera

$$\hat{x}_{i+2} - x_{i-1} = x_{i+1} - x_i$$

por lo que

$$\hat{x}_{i+2} = 2x_{i+1} - x_i \quad 3.4.13$$

Bajo la forma exponencial de extrapolación podemos escribir

$$\hat{x}_{i+2} = x_{i+1} e^{\alpha t} \quad \text{donde } \hat{x}_{i+1} = x_i e^{\alpha t} \quad 3.4.14$$

de modo que  $\alpha$  se puede calcular

$$\alpha = \frac{1}{t} \ln \frac{x_{i+1}}{x_i} \quad 3.4.15$$

La entreveración de se refiere al problema de reconfigurar una serie, para poder hacerla consistente si la base cambia. Este problema aparece con frecuencia al emplear datos en series de tiempo en forma de índices. Tales como el índice de precios al consumidor. Este índice se calcula en relación con ciertos niveles base de las compras de bienes y servicios, y estos niveles base se revisan periódicamente. La serie entonces debe entreverarse en este punto. Por lo común, hay algunos puntos de sobreposición entre la serie nueva y la anterior, de modo que la nueva serie puede ser simplemente multiplicada por el nivel de la serie anterior en el punto de sobreposición (o por un promedio de ellos si son más de un punto). De modo equivalente, la primera serie puede ser dividida por su nivel (promedio) en el punto de sobreposición. Si estos puntos no son reportados, es posible extrapolar la primera serie para obtener uno o dos puntos de sobreposición para poder entreverar la serie.

Existe otro tipo más de reconfiguración que es la de uniformación, el cual consiste en la eliminación de componentes tendenciales o cíclicos. Un modelo de ingreso nacional que utiliza datos de series de tiempo, por ejemplo, requiere comunmente la eliminación de tendencias y ciclos, si los agregados sobre el ingreso nacional están siendo relacionados con ciertos fenómenos económicos, tales como los salarios reales. La eliminación de la tendencia (por ejemplo la tendencia exponencial en el tiempo  $e^{at}$ , donde  $a$  es la tasa de crecimiento promedio de la(s) variable(s) en cuestión) podría relajarse mediante el remplazo de los datos originales  $x_t$  por los datos reconfigurados  $x'_t$  definidos por

$$x'_t = x_t e^{-at} = \frac{x_t}{e^{at}} \quad 3.4.1b$$

en la cual se ha eliminado la tendencia del tiempo. Aquí el factor tendencial ha sido empleado para deflactar los datos originales. De manera similar, los ciclos pueden ser extraídos con

$$\hat{x}_t = \frac{x_t}{\cos(\theta t + \varphi)} \quad 3.4.17$$

donde  $\cos(\theta t + \varphi)$  ha sido empleado para deflactar los datos originales,  $\theta$  es una medida de la frecuencia del ciclo y  $\varphi$  es una medida del cambio de fase. Tal técnica puede por ejemplo, ser aplicada a variables estacionales para realizar un ajuste estacional de los datos sobre tales variables.

Una serie de tiempo, en general, puede ser descompuesta en cuatro componentes básicos: tendencia  $T$ , representa movimientos a largo plazo; ciclo  $C$ , representa movimientos sinusoidales; estacionales  $E$ , representa movimientos cíclicos dentro un periodo de un año; e irregulares  $I$ , representa movimientos residuales. A menudo se supone una estructura multiplicativa

$$x = T \cdot C \cdot E \cdot I \quad 3.4.18$$

Entonces, hay distintos métodos disponibles para aislar estos componentes. La serie puede ser ajustada después de que han sido aislados. Si por ejemplo  $T$  y  $C$  están representados por

$$T = e^{\alpha t} \quad 3.4.19$$

$$C = \cos(\theta t + \varphi) \quad 3.4.20$$

como en 3.4.16 y 3.4.17, entonces la serie

$$\hat{x}_t = \frac{x_t e^{-\alpha t}}{\cos(\theta t + \varphi)} \quad 3.4.21$$

es la serie de tiempo ajustada tanto para la tendencia como para el ciclo. Otro ejemplo está basado en tomar logaritmos de 3.4.18, donde

$$y_t = f(t) + \mu_t \quad 3.4.22$$

Aquí  $y_t$ , es el logaritmo de  $x_t f(t)$  representa los componentes tenencial, cíclico y estacional; y  $\mu_t$  es el logaritmo de  $f$ . La ecuación 3.4.22 descompone una serie de tiempo observada  $y_t$  en la señal,  $f(t)$  y el ruido,  $\mu_t$ . Si la señal tiene a ser menos errática que el ruido, entonces la serie de tiempo puede ser suavizada tomando medias móviles de la  $y_t$ , tal como la media móvil para dos periodos definida por

$$y_t^* = \frac{1}{2} (y_t + y_{t-1}). \quad 3.4.23$$

Este proceso de uniformación elimina todas las asperezas aleatorias indeseables en los datos.

Como hemos visto los diferentes métodos presentados anteriormente para reconfigurar los datos implican también ciertas dificultades. Lo que provoca resultados cuestionables. Es por esto que los datos no se deben reconfigurar si no es necesario.

Debe observarse también la precisión de los datos económicos y de otros en ciencias sociales. Primero, los datos que nosotros podemos encontrar en las ciencias sociales no son exactos, ya que los economistas y otros científicos sociales tienen medidas y métodos de medida imperfectos para las variables que estudian. De hecho, los datos de las ciencias sociales son menos precisos que los datos en las ciencias físicas, porque están expuestos a imprecisiones adicionales de medición y conducta humana. Los informes pueden referirse a un incremento del 0.2% en el índice de precios al consumidor, pero este índice es muy impreciso, por lo que los cambios tan pequeños tienen poco significado. De modo similar, las cifras del ingreso nacional tales como PNB o el consumo total a menudo son reportados en miles de millones de pesos lo cual implica una precisión de más del 1,

Sin embargo, debido que existe una diversidad de posibles fuentes de error, incluyendo los errores de observación, los de redondeo y aproximación, y los de cálculo, las mediciones del ingreso nacional posiblemente involucran imprecisiones hasta del 15% o más. Tanto la discrepancia estadística, que es parte de las cuentas nacionales, como las revisiones de las series preliminares es parte de ingreso nacional, hasta convertirlas en cifras finales, son coherentes con esta amplitud de la imprecisión y, sin embargo, las cifras preliminares se consideran tan certeras como para llegar a la décima de un mil millón de pesos. En las ciencias físicas, pocas observaciones son precisas en más de cinco dígitos significativos y, probablemente, no hay observaciones en ciencias sociales que tengan esta exactitud. Aun el problema de contar la población está sujeto a imprecisiones. La población reportada en México para 1990, es tal vez exacta en sus primeras tres cifras, por lo general, dos, tres o cuatro cifras de precisión son todo lo que puede esperarse de los datos de ciencias sociales. Todo lo demás es precisión engañosa y es incorrecto tratar estos datos como de mayor precisión.

Si el conteo de una población está sujeto a fuertes imprecisiones, la medición de precios y cantidades económicas está sujeta a imprecisiones mayores. Todos los artículos de una hoja de balance o en cualquier estado de pérdidas y ganancias, de un individuo una empresa, están sujetos a imprecisiones. Muchos están basados en convenciones contables, otros son medidos en forma afectada por distintos sesgos, y todos están influidos por errores de información y de otros tipos.

El segundo punto que hay que observar en relación con los

datos en ciencias sociales es que su precisión varía intensamente. Algunos son relativamente precisos, otros relativamente imprecisos. En las ciencias físicas, particularmente en donde la experimentación es factible, las diferencias de precisión en la medición son indicadas numéricamente con corchetes de error. Algunas cifras pueden tener una precisión del 3%, otras una precisión del 10%, sin embargo, en las ciencias sociales estos corchetes no se ofrecen por lo común, de forma que uno tiene evidencia indirecta u opinión subjetiva en relación a la precisión de los datos.

En tercer lugar, tenemos que generalmente no son simétricos los errores de precisión en los datos económicos. A menudo hay sesgos en una dirección. Un ejemplo es la forma en que se deducen las ganancias totales corporativas a partir de los egresos por impuestos sobre el ingreso corporativo. En la medida que las corporaciones sepan sus ganancias hacia abajo para evadir impuestos, la cifra total puede tener un error del 20% en el lado positivo, pero solo de 1% en el lado negativo.

Un econométrista siempre tiene que tener en cuenta la existencia de errores en los datos. Si un estudio econométrico no resulta ser satisfactorio en algún sentido, se acostumbra revisar el modelo o tratarlo con otra técnica. Solo algunas veces se revisarán los datos y se utilizarán datos más refinados o incluso alternativos. En caso de estar insatisfechos por el resultado del modelo se debe considerar la importancia de los errores en los datos.

### 3.5 Interpretación de los resultados matemáticos.

Como se vio en la parte anterior de este capítulo, los datos nos acarrearán importantes problemas en un modelo econométrico, pero hay que considerar también la posibilidad de que los errores dependan de la interpretación que se le da a los resultados. Esto es, podemos tener resultados bastante satisfactorios pero no darnos cuenta de ello por no poder establecer su correcta interpretación. Por ejemplo, si derivamos la función consumo con respecto al ingreso, obtendremos una tasa, que será el incremento del consumo en función al ingreso, nosotros al desconocer que la derivada es una tasa de incremento a lo mejor estábamos esperando un resultado entero que nos representara otra cosa. Esto hace necesario que el econométrico esté consciente de los resultados que obtendrá en cada uno de sus modelos. Lo anterior nos remite entonces a la construcción del modelo ya que desde la construcción matemática podemos incurrir en errores de especificación. Estos errores son muy difíciles de detectar, ya que al haber utilizado una lógica económico-matemática para el planteamiento del modelo, para localizarlo será desmenuzar nuestra propia estructura lógica.

Regresando al problema de la interpretación, habiendo considerado el problema de planteamiento del modelo, una solución para la mala interpretación de los resultados, sería el clasificar y ordenar todos los resultados que el modelo va a arrojar.

El primer error a considerar es la exclusión de variables del modelo. Supongase que el verdadero modelo tiene la siguiente forma:

$$y = \lambda\beta + u$$

3.5.1

donde  $X$  tiene  $k$  columnas. El modelo que ha sido especificado, no obstante, es de la forma

$$y = X_1 \beta_1 + \mu_1 \quad 3.5.2$$

donde  $X_1$  tiene  $k_1$  columnas. El estimador mínimo cuadrado de  $\beta_1$  esta dado por

$$\hat{\beta}_1 = (X_1' X_1)^{-1} X_1' y \quad 3.5.3$$

donde los gorros son para recordar que es un estimador del modelo especificado incorrectamente. Sin embargo, empleando el modelo verdadero y tomando esperanzas bajo el supuesto de que  $X$  y  $X_1$  son matrices de números fijos.

$$E(\hat{\beta}_1) = (X_1' X_1)^{-1} X_1' X \beta \quad 3.5.4$$

Cada columna de la matriz  $(X_1' X_1)^{-1} X_1' X$  que aqui multiplica al vector de parámetros  $\beta$  simplemente es la regresión mínima cuadrática de una de las variables cuyos datos están contenidos en  $X_1$ , las variables explicativas del modelo incorrectamente especificado.

Esta formulación puede ser utilizada para ejemplificar dos casos especiales importantes, el de las variables relevantes omitidas y el de las variables irrelevantes incluidas. En el primer caso, en el que las variables relevantes han sido omitidas, el modelo verdadero puede ser escrito

$$y = (X_1 \quad X_2) \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = X_1 \beta_1 + X_2 \beta_2 + \mu \quad 3.5.5$$

Así, la especificación errónea, mostrada en 3.5.2, es la omisión de variables de  $X_2$ . En el modelo especificado equivocadamente, sólo están incluidas las variables contenidas en  $X_1$ . El estimador mínimo-cuadrático de sus coeficientes  $\hat{\beta}_1$  será sesgado e inconsistente. Puede comprenderse en forma intuitiva que el sesgo e inconsistencia en estos estimadores tiene su origen en

influencias de las variables omitidas  $X_2$  sobre  $y$ , las cuales están representadas en parte por  $\mu$  pero también, por otra parte, por  $X_1\beta_1$ . Las variables incluidas  $X_1$  consideran tanto sus propias influencias como las influencias de las variables omitidas que se ejercen sobre  $y$ .

## CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

La Revolución industrial creó una economía de mercado, en la cual la tierra, el trabajo y el capital eran distribuidos entre sus diversos usos por las fuerzas económicas, en vez de serlo por la tradición o el mandato imperativo. El surgimiento de la economía política, como campo de investigación intelectual, coincidió con este surgimiento de la sociedad económica. Un pensamiento común que corre a lo largo del pensamiento de los filósofos de la vida material era: Aquel que fuese capaz de adivinar la naturaleza de las fuerzas económicas del mundo, estaría en condiciones de predecir el futuro.

Parece pues, que la teoría económica está alboreando una nueva era. Su carácter único estriba en el hecho de que nuestra economía se está haciendo tan productiva, que ahora nos vemos obligados a adoptar ciertas decisiones morales (políticas) con enorme influencia para el futuro de las sociedades. Hubo un tiempo en que todo acto de producción estaba justificado sin más por el hecho de añadir un pedazo necesario de él, a la riqueza social. Pero ahora, que disponemos de medios técnicos para poder estudiar estos problemas, hemos llegado al punto vertebral de esta tesis. La economía matemática es un poderoso auxiliar para resolver todas estas dudas teóricas. Como se mencionó antes, los economistas estaban ante la necesidad de explicar y predecir la naturaleza de los problemas económicos, la economía matemática nos apoya de manera significativa.

En el estudio de la economía matemática podemos diferenciar entre los modelos económicos los modelos econométricos, ya que en los primeros nos ocupamos más que nada en los procesos productivos

ya sea desde el punto de vista macroeconómicos y microeconómicos, y en los modelos econométricos de la evolución económica desde los dos niveles también a partir de la historia del fenómeno que se quiere conocer. Notamos que es indispensable una buena base matemática para poder conseguir este fin, en las áreas del álgebra lineal y de la estadística y es por esto que debemos poner especial interés en estas ramas de las matemáticas, ya que sin una buena calificación en estas, serían inútiles todos los esfuerzos en la conceptualización de la teoría económica y un mal desempeño en la construcción e interpretación de los modelos económicos. La aplicación matemática en esta disciplina es muy amplia, se podría afirmar que no aportaría ninguna ayuda la economía a las sociedades sin el auxilio de las matemáticas. Entonces la matemática aunada a la teoría económica se mezclan en una bonita combinación de elementos que dan por resultado un modelo económico.

Los modelos económicos son una abstracción de la realidad social y económica de una sociedad. Esto es por lo que son de gran utilidad para el estudio de todos los fenómenos sociales, es por esta razón que se debe poner especial interés en su estudio y desarrollo, sin descuidar ni la parte teórica-económica ni la parte matemática, por que de estas depende la elaboración de un trabajo vinculado con la realidad del fenómeno en estudio, con esto me refiero a que, dependiendo de la forma en se desarrolle la investigación del fenómeno de interés y el planteamiento conceptual que de este resulte, si se cumple con lo anterior entonces los resultados obtenidos serán sino un fiel reflejo de la realidad, por lo menos, una aproximación muy aceptable del

fenómeno, de donde nuestras conclusiones podrán tener validez para evaluar políticas, modificar las mismas o cambiarlas dependiendo de la eficacia de cada una de ellas reportada en sus modelos específicos. Los modelos econométricos tienen un fin particular y este es el análisis estructural, la predicción y la evaluación de políticas. Cualquier estudio econométrico puede tener uno, dos o todos estos propósitos, ellos representan los "productos finales" de la econometría, del mismo modo que la teoría y los hechos constituyen sus materias primas. Una consideración importante en los modelos que estudiamos pueden tener muchas fuentes de error y es por esta razón que se debe contemplar también este concepto en la modelística.

En este trabajo se observó que hay muchas causas de error en la elaboración y en la interpretación de modelos económicos, lo cual nos previene de tener mucho cuidado. Por que un error en este tipo de trabajos, nos llevará a una mala evaluación de nuestros fenómenos, lo cual nos conduce a errores aun mayores.

Para terminar podemos decir que la historia de las sociedades ha influido el pensamiento económico, hasta alcanzar la madurez de poderse plantear estructuras matemáticas para la fácil comprensión de los fenómenos sociales y económicos. y de esta manera poder buscar y encontrar soluciones acordes a los problemas reales de las sociedades. Teniendo en cuenta que los modelos están dispuestos a presentar errores de muchas formas, antes de aceptar un resultado se deberá estudiar y analizar la construcción, las fuentes de información y la propia información, para así no incurrir en un error que puede provocar una mala toma de decisiones en contra de nuestro fenómeno. La finalidad más

importante de los modelos econométricos sería una renovación parcial o completa en las políticas ya sea a nivel microeconómico o a nivel macroeconómico.

Con todo lo que anteriormente se analizó el estudio de la economía, esto último nos hace ver las posibilidades de una aplicación en la vida profesional del actuario, lo cual nos obliga a ser más precisos en su estudio ya que, como se sabe, durante el periodo de estudio en la carrera nos vemos obligados a ligarnos a esta ciencia pero sin profundizar su estudio, siendo un parte complementaria de todo el herramental matemático y financiero del que podemos disponer.

La evolución económica del país requiere de especialistas que puedan apoyar las políticas de modernización, y la formación del actuario, aunada a la ciencia económica, podría tener gran aplicación en el estudio de la vida social y económica del país como se menciona en la parte introductoria de esta tesis. Por estas razones sería conveniente que en la carrera se incluyeran más materias de economía, las cuales podrían ser econometría y el análisis del pensamiento económico ligado a las problemáticas sociales actuales que de ellas se pueden derivar.

## BIBLIOGRAFIA

- Cañavos George C., 1984, Pobrabilidad y estadística, Estados Unidos, McGraw-Hill, Inc., 1986, 651 pp.
- Chiang Alpha C., 1984, Métodos fundamentales de economía matemática, Estados Unidos, McGraw-Hill, Inc., 1987, 805 pp.
- Elorza Haroldo, 1987, Estadística para ciencias del comportamiento, México, HARLA SA de CV, 1987, 571 pp.
- Feller William, 1973. Introducción a la teoría de las probabilidades y sus aplicaciones. Estados Unidos. LIMUSA SA de CV, 1986, 504 pp.
- Gujarati Damodar, 1978. Econometría básica, Estados Unidos. McGraw-Hill, Inc., 1988, 463 pp.
- Hasser - LaSalle - Sullivan, 1959, Análisis matemático I, curso de introducción, Estados Unidos, Trillas SA, 1970, 810 pp.
- Hasser - LaSalle - Sullivan, 1959, Análisis matemático II, curso intermedio, Estados Unidos, Trillas SA, 1983, 786 pp.
- Heilbroner R.- Thurow L.. 1984, Economía. Estados Unidos, Prentice-Hall, 1987, 742 pp.
- Heilbroner Robert L., 1968, Vida y doctrinas de los grandes economistas (tomo I). Estados Unidos, Orbis. SA, 1985, 250 pp.
- Heilbroner Robert L., 1968, Vida y doctrinas de los grandes economistas (tomo II). Estados Unidos, Orbis. SA, 1985, 253 pp.
- Hoffmann Laurence D., 1983. Cálculo aplicado, Estados Unidos, McGraw-Hill, Inc., 1986, 692 pp.

-Intriligator Michael D., 1986, Modelos econométricos, técnicas y aplicaciones (trad. Mtro. Rafael Nuñez), Estados Unidos, Fondo de Cultura Económica, 1989, 685 pp.

-Johnston J., 1984, Econometric Methods, Estados Unidos, McGraw-Hill, Inc., 1986, 568 pp.

-K. Hoffman-Ray Kunze, 1973, Algebra lineal, Estados Unidos, Prentice Hall, Inc., 1982, 400 pp.

-Kennedy J.-Neville A., 1974, Estadística para ciencias e ingeniería, Estados Unidos, HARLA SA de CV, 1983, 468 pp.

-Keynes John Maynard, 1936, Teoría general de la ocupación, el interés y el dinero, Estados Unidos, Fondo de Cultura Económica, 1981, 356 pp.

-Kuratowski Kazimierz, 1970, Introducción al cálculo, Polonia, LIMUSA, 1984, 310 pp.

-LeRoy Miller Roger, 1982, Microeconomía moderna, Estados Unidos, HARLA SA de CV, 1986, 667 pp.

-LeRoy Miller Roger, 1982, Macroeconomía moderna, Estados Unidos, HARLA SA de CV, 1986, 685 pp.

-Leontief Wassily, 1966, Análisis económico input-output, Estados Unidos, Ariel, SA, 1983, 359 pp.

-Ludlow-Wiechers, 1987, Economía matemática II, México, LIMUSA, 1987, 117 pp.

-Maddala G. S., 1977, Econometría, Estados Unidos, McGraw-Hill, Inc., 1985, 546 pp.

- Marsden J.- Tromba A., 1976. Cálculo vectorial. Estados Unidos. Fondo Educativo Interamericano. 1981. 454 pp.
- Marx Carlos. 1867. El capital (tomo I). Alemania. Fondo de Cultura Económica, 1975. 769 pp.
- Marx Carlos. 1867. El capital (tomo II), Alemania. Fondo de Cultura Económica. 1975. 527 pp.
- Mendenhall-Scheaffer-Wackerly. 1986. Estadística matemática con aplicaciones, Estados Unidos. Gpo. Edt. Iberoamérica, 1986. 751 pp.
- Muelier M. G., 1966. Lecturas de macroeconomía, Estados Unidos. CECSA, 1979. 497 pp.
- Newman Donald G., 1983. Análisis económico en ingeniería, Estados Unidos, McGraw-Hill, Inc., 1986. 531 pp.
- Pasinetti Luigi, 1975. Lecciones de Teoría de la producción. Italia, Fondo de Cultura Económica. 1984. 373 pp.
- Prebisch Raul. 1947. Introducción a Keynes. México. Fondo de Cultura Económica. 1980. 133 pp.
- Ricardo David, 1821. Principios de economía política y tributación. Londres. Inglaterra, Fondo de Cultura Económica. 1973. 332 pp.
- Salvatore Dominick. 1983. Microeconomía. Estados Unidos. McGraw-Hill, Inc., 1986. 344 pp.
- Samuelson - Nordhaus. 1983. Economía. Estados Unidos. McGraw-Hill, Inc., 1987. 1155 pp.

-Smith Adam. 1776, La riqueza de las naciones (tomo I), Estados Unidos, Orbis, SA, 1985, 343 pp.

-Smith Adam. 1776, La riqueza de las naciones (tomo II), Estados Unidos, Orbis, SA, 1985, 455 pp.

-Solar G. Eduardo-Speziale L., 1985, Apuntes de Algebra lineal, México, UNAM, 1985, 860 pp.

-Wonnacott/Wonnacott. 1982, economía, Estados Unidos, McGraw-Hill, Inc., 1984, 959 pp.