



5
2 ej
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

USO DE DIAGRAMAS DE COLLINS PARA
LA DESCRIPCIÓN DE HACES GAUSSIANOS

TESIS PROFESIONAL

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
LICENCIADO EN FÍSICA
P R E S E N T A:
GUILLERMO BECERRA CORDOVA

Dirigida por el Dr. Salvador Godoy Salas

Ciudad Universitaria

1992

FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

I N D I C E

INTRODUCCION.....	1
CAPITULO I Análisis de Rayos Paraxiales	
1.1.- Introducción.....	8
1.2.- Matrices de Transferencia.....	9
1.3.- Derivación de las propiedades de un Sistema en términos de su Matriz de Transferencia.....	30
1.4.- Localización de los Puntos Fundamentales de un Sistema Optico.....	35
1.5.- Sucesiones Periódicas.....	40
1.6.- Diagrama de Estabilidad.....	44
CAPITULO II Análisis Ondulatorio de Haces Gaussianas.	
2.1.- Introducción.....	49
2.2.- Solución Aproximada de la Ecuación de Onda.....	51
2.3.- Descripción Física de un haz Gaussiano Fundamental.....	57
2.4.- Haces Gaussianas con Modos de Orden Superior.....	69
CAPITULO III Ley A B C D	
3.1.- Introducción.....	84
3.2.- Deducción y Aplicación de la Ley ABCD para una Onda Esférica	
3.3.- Deducción y Aplicación de la Ley ABCD para el Parámetro Complejo de Curvatura.....	87
CAPITULO IV Resonadores Opticos.	
4.1.- Introducción.....	91
4.2.- Aplicación de la Ley ABCD y del Criterio de Autoconsistencia a los Resonadores Opticos.....	92
CAPITULO V Diagramas Circulares.....	100
BIBLIOGRAFIA.....	115

I N T R O D U C I O N

En los últimos tiempos, el desarrollo de la técnica ha alcanzado logros que en el pasado parecían imposibles. Junto con este desarrollo surgió una nueva forma de emitir radiación y que difiere sustancialmente de otras fuentes convencionales. A esta forma particular de radiación se le conoce como Radiación Láser, cuyo nombre se deriva de las siglas: " Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation ", lo que significa: " amplificación de luz por medio de la emisión estimulada de radiación ". De esta forma, un láser es luz amplificada que es producida por un haz intenso de fotones que presentan idéntica fase, frecuencia y polarización. Como resultado de esta propiedad, no solo se amplifica la luz, sino también el haz presenta características muy especiales: mayor intensidad, alta monocromaticidad, gran coherencia espacial y alto grado de colimación. Así, todas las aplicaciones del láser, dependen de una o más de estas características.

Para comprender el principio por el cual se genera el láser, previamente conviene revisar algunos conceptos elementales de Mecánica Cuántica.

Todo sistema físico, sea sólido, líquido o gaseoso, está compuesto por átomos; cada uno posee cierta cantidad de energía interna y tiende a ocupar un estado en el que esta energía es mínima. A este estado se le llama estado base. Además, un átomo puede estar en cualquiera de varias configuraciones con energías

superiores a las del estado base; estos estados se les denomina estados excitados.

Einstein estableció que un átomo puede absorber, si se encuentra en su estado base, o emitir si se encuentra en uno de sus estados excitados, una radiación de frecuencia $\nu_{ij} = (E_j - E_i)/h$, donde $E_i < E_j$ y h es la constante de Planck. A causa de esta cuantización de la energía, se dice que un átomo absorbe un fotón de frecuencia ν_{ij} y energía $E_j - E_i$.

La emisión, al pasar el átomo del estado E_j al estado E_i , puede suceder de dos maneras: espontáneamente o inducida por un fotón. Es espontánea cuando el átomo sin recibir radiación decae al estado E_i después de un periodo de vida aleatorio del orden de 10^{-8} seg. Por otra parte, si sobre un átomo excitado que se halla en el estado E_j incide un fotón de frecuencia ν_{ij} , el fotón originará que el átomo vuelva al estado de energía E_i , induciendo así un nuevo fotón como consecuencia de la desexcitación. El fotón original continuará su trayectoria y es exactamente el mismo que antes de su interacción con el átomo, pero ahora estará acompañado de otro fotón que es idéntico en frecuencia, energía, dirección y fase. Estos dos fotones pueden a su vez incidir sobre otros átomos con similar excitación e inducirlos a emitir. Se tiene así una amplificación del número de fotones que viajan en una cierta dirección. A este proceso se le conoce como emisión estimulada. Para que sea posible este tipo de emisión, es necesario que la emisión inducida de fotones sea mayor que la absorción que tiende a hacerlos desaparecer. Para ello es necesario que el número de átomos en el estado E_j sea mayor que en el estado E_i . Cuando

que ser muy grande si no estuviera confinado en una cavidad cuyos extremos se ubique un par de espejos (planos o curvos), en donde se refleje la luz que se propaga a través del medio. Todos los fotones, a excepción de los que se propagan casi a lo largo del eje de la cavidad, salen de ella. En contraste, el haz axial continúa creciendo conforme viaja en una y otra dirección a través del medio activo. Esto explica el sorprendente grado de colimación del láser, ya que depende del diámetro de la sección transversal de la cavidad.

Para que el haz sea amplificado, es necesario que la perturbación tome una configuración de onda estacionaria que estará determinada por la separación de los espejos. La cavidad es resonante cuando hay un número entero de semilongitudes de onda cubriendo la región entre ellos.

El espacio contiguo entre dos frecuencias es llamado modo de la cavidad y está dado por $c/2l$, donde l es la longitud de la cavidad y c representa la velocidad de la luz. Los modos de la cavidad son considerablemente más angostos que el ancho de banda del átomo, ya que está asociado con el ancho de la transición y con los efectos de ensanchamiento, como el efecto doppler. Estos modos, ya sea que la cavidad se construya de tal manera que halla uno o más, serán los que operen en ella y por, consiguiente, el haz emergente estará restringido a una región cercana a esas frecuencias. En otras palabras, la transición radiativa hace disponible un rango relativamente ancho de frecuencias de entre las cuales la cavidad seleccionará solo ciertas bandas angostas y, si se desea, solamente una de tales bandas. Este es el origen del

este fenómeno sucede, se dice que existe una inversión de población. Así, la inversión de población hace posible la generación del láser.

Para poder llevar a cabo la inversión de población se requiere de una fuente de energía que incida sobre los átomos que constituyan el medio activo generador de la radiación láser. El tipo de energía requerida no solo puede ser energía radiante, sino también energía eléctrica o química y ésta dependerá del medio a excitar. De igual forma, la intensidad de la energía incidente estará en función de la diferencia de energías entre un estado atómico y otro.

La incidencia de energía en el medio activo no es una condición suficiente para establecer la inversión de población, también es necesario que el medio activo esté compuesto por dos tipos de partículas: unas que tengan una elevada probabilidad de excitación y otras una elevada probabilidad de desexcitación, para un determinado estado energético. Así, al incidir energía al medio, las partículas con alta probabilidad de excitación logran hacerlo fácilmente y transferir esa energía a las partículas restantes. Para ello se requiere que los estados excitados de ambos tipos de partículas, coincidan.

Con ello se logra la inversión de población de los átomos que originan la emisión estimulada. La emisión espontánea originada en uno de los átomos excitados, provocará la emisión estimulada, dando origen a un haz de fotones cuyas características son similares.

Para que el haz de fotones producido por la emisión estimulada sea lo suficientemente intensa, el medio activo tendría

caracter extremadamente cuasimonocromático del láser.

Para que la luz amplificada salga de la cavidad, uno de los espejos se contruye de tal forma que sea somireflejante. Así, solo un pequeño porcentaje de la radiación que se genere en la cavidad saldrá de ella. Esta condición provoca que la eficiencia del láser sea muy pequeña; sin embargo, las propiedades de dicha radiación determinan su importancia en la investigación y en aplicaciones prácticas.

Como ya se mencionó, básicamente son cuatro las propiedades que caracterizan a la luz del láser y las que determinan su excepcional importancia en la Optica Moderna y su enorme utilidad en la enseñanza:

a) Gran intensidad. La luz del láser puede ser muy intensa y se puede concentrar en un objeto, con lentes apropiadas, calentandolos a temperaturas altísimas. La luz de láseres como los de rubí o de CO_2 cuya potencia es del orden de kilowatts, al concentrarse, puede perforar hasta diamantes. Pero los láseres comunes en la enseñanza, como el de He-Ne, tienen una intensidad muy baja y aún cuando su luz se concentrara sobre la mano ni siquiera se sentiría; sin embargo, es potencialmente dañina para los ojos si se mira directamente al haz o a su reflejo. Aunque la intensidad del láser de He-Ne es baja, es lo suficientemente intensa para permitir hacer experiencias en lugares que tengan luz ambiental tenue y verlas claramente.

b) Gran monocromaticidad. La luz del láser es casi monocromática o sea que casi tiene un solo color o longitud de onda; esta característica también se conoce como coherencia

temporal, y se refiere a que los fotones emitidos tienen la misma frecuencia. La longitud de onda típica del láser de He-Ne es de 6328 Å.

c) Gran coherencia espacial. Se refiere al hecho de que el haz sale prácticamente de un punto y la parte más intensa está en el centro. Esta propiedad está relacionada con la coherencia temporal y se aprovecha en las experiencias en donde se muestra el carácter ondulatorio de la luz. (interferencia y difracción)

d) Gran colimación. El haz del láser tiene un divergencia muy pequeña, del orden de un miliradián o sea que el ancho del haz es casi constante a lo largo de distancias grandes, lo que permite utilizarlo en experiencias donde se necesite un rayo intenso y colimado.

Todas estas características permiten realizar, con una facilidad y claridad, experiencias y prácticas que han sido tradicionalmente muy difíciles de lograr.

De todo lo afirmado anteriormente se puede concluir que las cavidades ópticas son fundamentales en la generación de la radiación láser. Es por ello que consideramos conveniente estudiar las principales características que deben cumplir este tipo de dispositivos. Por consecuencia, los objetivos que nos planteamos en la elaboración de este trabajo son, entre otras cosas, establecer expresiones algebraicas mínimas necesarias que describen a cada cavidad que es analizada y, simultáneamente, una descripción geométrica del haz conforme se desplaza dentro y fuera de la cavidad.

Para lograr estos propósitos, hemos dividido nuestro trabajo

en cinco capitulos, siendo el último de ellos en donde se presentan algunos resultados que pueden servir en el diseño de cavidades de este tipo. Paralelamente se da una descripción geométrica de cómo el haz se desplaza dentro de cada resonador que es analizado. Este enfoque geométrico se basa en los diagramas de Collins, que consiste en dibujar sobre el plano cartesiano el parámetro complejo q que es la representación algebraica del láser. El análisis gráfico es muy importante ya que nos proporciona una visión más objetiva del comportamiento del haz conforme se propaga a través de la cavidad óptica. En la construcción de dichos diagramas, hemos supuesto algunos valores para cada resonador que es tratado.

Este trabajo está basado en el artículo de H. Kogelnik y T. Li, " Laser Beams and Resonators ". Publicado en Procc. IEEE, vol. 54, pp. 1312 - 1329, oct. 1966.

CAPITULO I

ANALISIS DE RAYOS PARAXIALES

1.1 INTRODUCCION

El estudio del recorrido que realizan los rayos paraxiales a través de algún sistema óptico, es el tema central de este capítulo. En la propagación de los rayos en estas estructuras se utilizan las llamadas " Matrices de Transferencia " que relacionan los parámetros que caracterizan al rayo antes y después de cruzar un sistema óptico determinado. Es importante el conocimiento de estas matrices ya que también pueden utilizarse para el estudio de la propagación de haces gaussianos en las cavidades ópticas o en cualquier otra estructura óptica similar.

Lentes delgadas, fibras ópticas, sucesiones periódicas de lentes delgadas, (guía de onda lenticular) etc. son algunas de las estructuras las cuales son representadas por las matrices de transferencia, que en la siguiente sección del capítulo se deducirán y se aplicarán en algunos ejemplos sencillos.

Como a un sistema óptico lo podemos caracterizar por medio de su matriz de transferencia, el valor que asuma cada uno de sus elementos dependerá del sistema que represente. En la tercera sección interpretaremos las consecuencias físicas que involucra el que uno de sus elementos fuese igual a cero.

Los puntos principales de un sistema óptico como son: planos focales, planos principales, puntos nodales, etc, son localizados en términos de los elementos de la matriz de transferencia que los

represente. Dichas relaciones serán deducidas en la cuarta sección de este capítulo.

En la quinta sección se demostrará el Teorema de Sylvester para una matriz de 2 por 2 que es elevada a la n -ésima potencia. Comprenderemos que este teorema es necesario para explicar cómo un rayo gaussiano viaja dentro de un resonador óptico, que es la cavidad donde se genera un haz láser.

La estabilidad de los resonadores se dará en términos del diagrama de estabilidad, la cual dependerá esencialmente de la traza de la matriz de transferencia del resonador correspondiente. En esta última sección se verán algunos de los casos más comunes de resonadores estables, inestables o condicionalmente estables.

1.2 MATRICES DE TRANSFERENCIA

Los fenómenos relacionados con la energía radiante se pueden estudiar por medio de la Óptica Geométrica o por medio de la Óptica Física. El criterio que se utilizará para saber cuál de las dos ramas de la Óptica emplear, depende de los parámetros que queremos conocer y además del tipo de fenómeno a estudiar.

Así, en la Óptica Geométrica se considera a la luz como líneas rectas, y como tales, son caracterizadas completamente por dos parámetros: (a) por la altura o distancia " y " que existe entre el rayo y el eje óptico (z), para una sección transversal dada y (b), por la pendiente " v " que forma el rayo con este eje.

Dentro de la Óptica Geométrica se encuentra la " Teoría Paraxial " en donde la pendiente de las líneas que representan a la luz, tiene un valor muy pequeño. Así, podemos hablar

indiferentemente de ángulo de inclinación o pendiente de estas líneas, ya que ambas son bastante parecidas cuando su valor está muy por debajo de la unidad. En la teoría que se presenta en este trabajo, se utilizarán únicamente rayos paraxiales.

La trayectoria del rayo a través de una estructura óptica determinada, depende de las propiedades de la misma estructura y del valor que tengan los parámetros en el momento de entrar al sistema, es decir, del valor de la posición " y_1 " y de la pendiente " v_1 " que tenga el rayo al cruzar por el plano de entrada. Para el caso paraxial, los correspondientes parámetros de salida " y_2 " y " v_2 " son linealmente dependientes de los parámetros de entrada. Este hecho es representado matricialmente por medio de la siguiente igualdad:

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} y_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$$

en donde:

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

El valor que tenga cada uno de los elementos de esta matriz, dependerá del sistema óptico que represente. La matriz M es la llamada matriz de transferencia y su determinante generalmente es unitario. Dentro de este capítulo se dará un criterio para poder afirmar cuándo un determinante es diferente de la unidad.

Una trayectoria típica de un rayo paraxial que viaja dentro de una estructura óptica, es mostrada en la figura 1. De ella se puede concluir que el plano de entrada se denota como RP_1 y, como su nombre lo indica, es el plano donde el rayo entra al sistema. De igual manera, el plano de salida lo identificamos como RP_2 y,

lógicamente, es el plano donde el rayo sale del sistema. Debemos decir que ambos planos se escogen arbitrariamente, puesto que es el observador quien define al sistema.

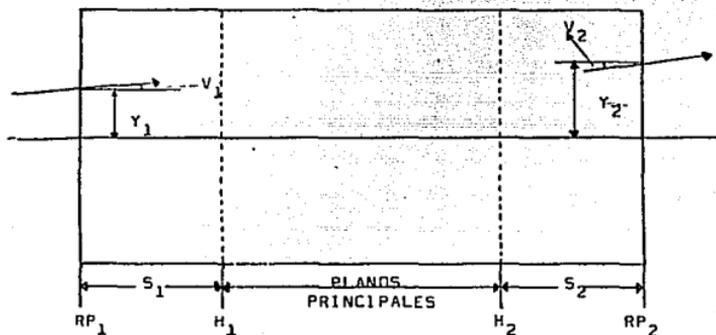


FIGURA 1

A continuación deduciremos las matrices de transferencia correspondientes a los sistemas ópticos más comunes. Comenzaremos por encontrar la matriz que involucra el paso de un rayo paraxial a través de una distancia " d " ya sea en el vacío o en un medio con índice de refracción constante. La figura 2 da un esquema de esta situación.

Como se puede apreciar en la figura, el rayo después de viajar la distancia antes mencionada, alcanzará una altura Y_2 en función de Y_1 como lo indica la siguiente ecuación:

$$Y_2 = Y_1 + d \tan \theta$$

o

$$Y_2 = Y_1 + d V_1$$

Otra característica que tiene el rayo al viajar en el medio cuyo índice es constante, es que su pendiente no cambia. De aquí se puede afirmar que la pendiente que tenga el rayo antes y después de cruzar el sistema es idéntica, es decir:

$$V_1 = V_2$$

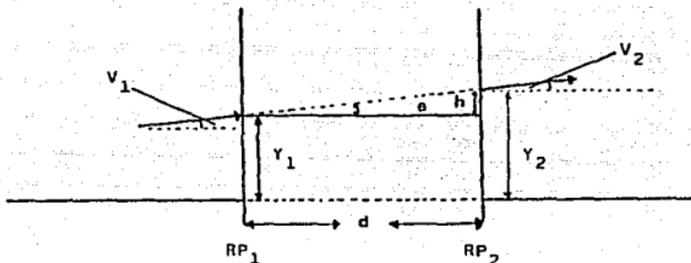


FIGURA 2

Estas dos últimas ecuaciones se pueden juntar en una sola formando una matriz cuyos elementos son:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 1.2.1$$

Así, hemos encontrado la matriz que relaciona los parámetros que tiene un rayo antes y después de recorrer una distancia d a través del vacío o en un medio cuyo índice es constante. Observe que el determinante de la matriz es unitario.

Note que la matriz que se ha obtenido corresponde a un rayo

que viaja de izquierda a derecha. Si deseáramos conocer la matriz para ese sistema pero ahora para el caso en que el rayo viaje en sentido opuesto, solo tendríamos que invertir los elementos de la diagonal; donde ahora el plano de entrada se encuentra a la derecha y el de salida a la izquierda. Para este caso, la nueva matriz no sufre cambios.

También puede suceder que al conocer los parámetros de salida, tengamos necesidad de conocer los de entrada. En esta situación es conveniente " despejar " las incógnitas que deseamos conocer y para ello solo tenemos que hallar la inversa de la matriz de transferencia. Para el caso que estamos analizando, el resultado se expresa como:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 1.2.2$$

En general, la inversa de la matriz M esta dada por la siguiente fórmula:

$$M^{-1} = 1/\det(M) \begin{pmatrix} D & -B \\ -C & A \end{pmatrix} \quad 1.2.3$$

Para que exista la inversa de M es necesario y suficiente que su determinante sea diferente de cero. No está definida la inversa de una matriz si su determinante es igual a cero ! Las matrices que se estudian aquí tienen un determinante diferente de cero, garantizando la existencia de su inversa.

La siguiente matriz describe el paso de un rayo paraxial a través de una lente delgada. Del análisis de la figura 3 obtendremos los elementos que la constituyen.

Como la lente es delgada, se puede afirmar que la altura que tenga el rayo antes y después de cruzarla es idéntica. De aquí se concluye que los valores de A y B son 1 y 0 , respectivamente.

Para hallar los elementos restantes, analizaremos dos casos particulares:

a).- Suponga que se tiene un rayo incidente cuya pendiente es nula. Por las leyes de la Óptica Geométrica, el rayo así transmitido cruzará el eje óptico a una distancia de la lente

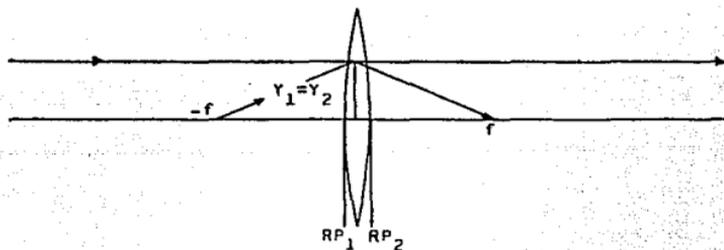


FIGURA 3

conocida comúnmente como distancia focal. Como $Y_1 = Y_2$ y $V_1 = 0$, entonces se tiene que:

$$V_2 = C Y_2$$

Observando la figura 3, la pendiente V_2 del rayo transmitido es igual a: $-Y_2/f$. Igualando este resultado con la ecuación anterior, se concluye que:

$$C = -1/f$$

b).- Supongamos ahora que el rayo incidente parte desde el punto $-f$ situado a la izquierda de la lente, de tal forma que V_1 sea igual Y_1/f y además el valor de V_2 se cancele.

Utilizando el hecho de que $V_2 = Y_1 C + V_1 D$ y que $C = -1/f$, se llega a la conclusión de que el valor de D es unitario.

Así, la matriz de transferencia para una lente delgada es:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix} \quad 1.2.4$$

Por convención hemos supuesto que el valor de f será positivo cuando la lente sea convergente y negativo cuando sea divergente. Como los rayos los hemos descrito por medio de rectas, éstas deben estar situadas en un sistema de coordenadas que, para la deducción expuesta, su origen se sitúa justamente en el centro de la lente.

También la longitud focal f para una lente delgada es fácil de obtener por medio de la aplicación sucesiva de la matriz de refracción. Esta matriz nos describe el paso de un rayo que va de un medio con índice de refracción n_1 a otro con índice de refracción n_2 , ambos constantes y además separados por una superficie curva o plana. La figura 4 nos muestra tal situación.

Del diagrama podemos observar que los ángulos se muestran exageradamente grandes, implicando con ello que los planos de entrada y de salida se encuentren muy separados. La separación es igual a $R(1 - \cos \alpha)$, pero si el ángulo α es muy pequeño entonces es despreciable y al igual que en las lentes delgadas, los planos de referencia coincidirán. También las alturas Y_1 y Y_2

serán iguales, concluyendo que los valores de A y B sean 1 y 0, respectivamente.

Para encontrar el valor de cada uno de los elementos que restan, hemos supuesto el siguiente caso: imagine que el rayo incidente viaja paralelamente al eje focal y pasa la interfase a una altura $Y_1 = Y_2$. En la figura se observa que el rayo transmitido cruzará al eje en el punto marcado con la letra S_1 .

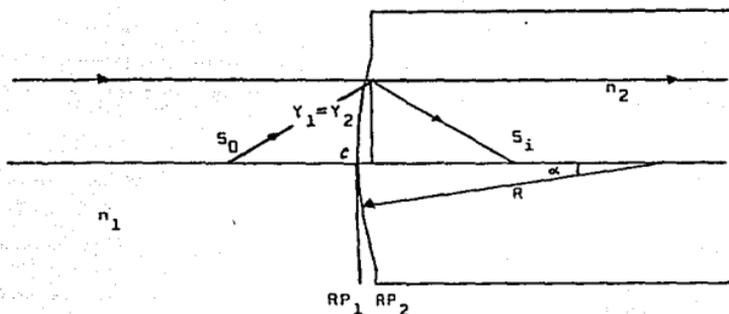


FIGURA 4

La posición de este punto se obtiene gracias a la fórmula $n_1/S_0 + n_2/S_1 = (n_2 - n_1)/R$, junto con la hipótesis de que $S_0 = \infty$. Así, la pendiente V_2 del rayo transmitido es igual a $Y_1 (n_1 - n_2)/R n_2$ y sabiendo que V_2 es igual a $C Y_1$, se concluye que:

$$C = (n_1 - n_2)/R n_2$$

Haciendo un razonamiento parecido al anterior, se verá que el valor de D es igual a n_1/n_2 . Para ello suponga que un rayo incidente parte del punto S_0 a la izquierda de la interfase y que el rayo transmitido se desplaza con una pendiente nula. Como

el valor de la posición S_0 es igual a $-n_1 R/(n_2 - n_1)$ y además el valor de la pendiente del rayo incidente es $Y_2(n_2 - n_1)/R n_1$, entonces $(n_2 - n_1)Y_1/R n_2 = D (n_2 - n_1)Y_1/R n_1$. Concluyendo que el valor de D es igual al cociente enunciado anteriormente.

De esta forma, la matriz de transferencia que describe el cruce de un rayo paraxial de un medio con índice de refracción n_1 constante a otro medio con índice n_2 también constante y separada por una superficie esférica de radio R , es dada por la siguiente igualdad:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (n_1 - n_2)/R n_2 & n_1/n_2 \end{pmatrix} \quad 1.2.5$$

Se hace la observación de que el radio de curvatura de la superficie refractora es positivo si el centro C se encuentra a la derecha del vértice, y negativo en caso contrario. Además tome en cuenta que en esta deducción hemos supuesto que n_2 es mayor que n_1 .

Si la superficie de separación fuese plana, el radio tendería a infinito y el valor C de la matriz se cancelaría, llegando al siguiente resultado:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n_1/n_2 \end{pmatrix} \quad 1.2.6$$

Observe que en ambos casos el determinante es diferente de uno. En general, si el índice de refracción que se encuentra a la derecha del sistema es diferente del que se encuentra a la izquierda, entonces el determinante de la matriz correspondiente es diferente de la unidad.

Si en el ejemplo que hemos utilizado para deducir la ecuación 1.2.5 se hubiera supuesto que el índice n_2 se encontrase a la izquierda y el índice n_1 a la derecha, además que n_1 fuese ahora mayor que n_2 , la nueva matriz para este sistema simplemente se encontraría cambiando el subíndice dos por el uno y el uno por el dos, llegando a la siguiente igualdad:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (n_2 - n_1)/R n_1 & n_2/n_1 \end{pmatrix} \quad 1.2.7$$

Ahora aplicaremos los resultados dados por las ecuaciones 1.2.5 y 1.2.7 al caso de una lente delgada. Para mayor facilidad supondremos que el espesor de la lente es despreciable, es decir, que el rayo recorre una distancia insignificante dentro de la misma. El resultado es obtenido por medio de la aplicación sucesiva de las matrices de cada sistema que cruce. En este caso, el rayo primeramente viaja en un medio con índice n_1 y pasa a otro medio con índice n_2 a través de una superficie curva; después viaja una distancia despreciable en ese nuevo medio y por último vuelve a cruzar al medio de índice n_1 donde originalmente se movía. Matemáticamente este hecho es representado por medio de la siguiente multiplicación de matrices:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -P_1 & n_2/n_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -P_2 & n_1/n_2 \end{pmatrix} \quad 1.2.8$$

en donde: $P_{1,2} = (n_{1,2} - n_{2,1}) / R_{2,1} n_{1,2}$

Llevando a cabo la multiplicación, se llega al siguiente resultado:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (n_1 - n_2)(1/R_1 - 1/R_2) / n_1 & 1 \end{pmatrix} \quad 1.2.9$$

en donde R_1 y R_2 son los radios de curvatura de las superficies de la lente; n_1 es el índice de refracción del medio donde se halla sumergida la lente y n_2 es el índice de refracción de la misma.

Comparando la ecuación 1.2.4 con la 1.2.9 hacemos la conclusión de que la longitud focal de una lente se puede calcular con solo conocer los radios de curvatura de sus superficies, al igual que los índices de refracción del medio y de la lente.

Es necesario hacer resaltar que el paréntesis que encierra a los términos de la resta de los radios de las superficies de la lente, es positivo si es convergente y negativo en caso de ser divergente. Una afirmación similar es hecha para el paréntesis que contiene a los índices de refracción de la lente y del medio donde se halla inmersa: si n_1 es mayor que n_2 , la resta es positiva y

si sucede lo contrario, la resta es negativa. La lente podrá ser convergente o divergente, dependiendo de qué índice es mayor.

La siguiente representación matricial corresponde a un rayo cuyo desplazamiento consiste en el recorrido de una cierta distancia d_1 en el vacío, después cruza una lente delgada de longitud focal f_1 , seguido de un nuevo recorrido de una distancia d_2 en el vacío y finalmente cruza por otra lente de longitud focal f_2 . La figura 6 muestra con más detalle este recorrido.

La matriz para este sistema se obtiene al aplicar sucesivamente la matriz de transferencia para cada etapa del recorrido. El resultado de ese análisis es una multiplicación de cuatro matrices, cuyos factores están dispuestos en orden inverso al que se halla cada uno de los elementos que constituyen al

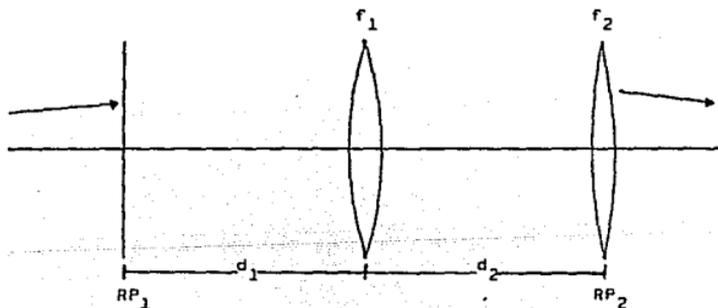


FIGURA 5

sistema. La siguiente relación nos resume todo lo que se ha afirmado:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 1.2.10$$

Es interesante hacer notar que si se invierte el orden en que se hallan dispuestos los elementos que constituyen un sistema, también el producto de las matrices se invertirá. De todo esto diremos que existe una regla sencilla que puede ser utilizada en estos casos:

" Al invertir la posición de los elementos de un sistema óptico dado, la matriz que relaciona este nuevo sistema se encuentra con solo cambiar los elementos de la diagonal de la matriz correspondiente al sistema original "

Como el determinante de cada elemento es unitario, también el determinante de todo el sistema lo será.

La siguiente matriz de transferencia se refiere a un sistema cuyo índice de refracción no es constante, sino que depende de la distancia r al eje focal z . La dependencia del índice con la distancia viene expresada en la siguiente ecuación:

$$n(r) = n_0 - n_2 r^2/2 \dots\dots\dots 1.2.11$$

en donde:

$$r^2 = x^2 + y^2$$

Para encontrar esta matriz, primero creemos conveniente saber cuál es el cambio que sufre el frente de onda de una onda plana cuando pasa a través de una lente delgada. La figura 6 nos da una

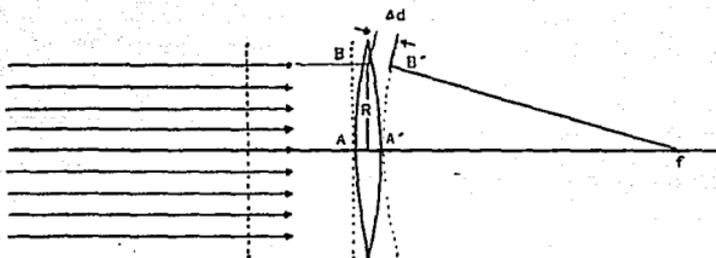


FIGURA 6

idea del efecto experimentado por los rayos de luz al cruzar la lente convergente.

Las fases en A y en B a la izquierda de la lente y en el punto focal f a la derecha de ésta, son iguales. Pero si las ondas están en fase en el punto focal, entonces en A' y en B' no lo estarán; el rayo en B' tiene que recorrer mayor distancia que el rayo en A'. Esta distancia está dada aproximadamente por medio de la siguiente relación:

$$\Delta d = (r^2 + f^2)^{1/2} - f \approx r^2/2f$$

Con lo anterior, tenemos ahora una expresión aproximada para el campo eléctrico justo a la derecha de la lente

$$E_R(x,y) = E_L \exp(ikr^2/2f)$$

en donde E_R y E_L son los campos eléctricos a la derecha y a la izquierda de la lente, respectivamente. El símbolo k se le

conoce como número de onda y es igual a $2\pi/\lambda$. Físicamente se podría decir que la onda plana al cruzar la lente delgada se ha transformado en una onda esférica convergente.

Así, el efecto que causa la lente sobre la onda plana es un cambio de fase $kr^2/2f$ que crece cuadráticamente con la distancia al eje focal. Mientras más grande sea la distancia al eje, mayor debe ser el cambio de fase producido por la lente. Esto nos hace pensar que una delgada lámina de un medio descrito por la ecuación 1.2.11 actuará como una lente, introduciendo un cambio de fase proporcional al cuadrado de la distancia focal.

El comportamiento de un rayo que se propaga a través de un medio inhomogéneo como el que estamos estudiando, es descrito por medio de la siguiente ecuación diferencial:

$$d(n \, dr/ds) = \nabla n \dots\dots\dots 1.2.12$$

donde s es una distancia medida a lo largo del rayo a partir de un punto fijo en él; r es el vector de posición del punto en s . Para el caso en que se manejen rayos paraxiales sustituimos d/ds por d/dz , obteniendo:

$$d^2r/dz^2 = (1/n(r)) \, d(n(r))/dr \dots\dots\dots 1.2.13$$

$$\text{con } r = r(r, \theta, z) \quad \text{y} \quad n = n(r)$$

Si consideramos a n_0 mucho mayor que n_2 entonces $n(r)$ se aproximará bastante al valor de n_0 . Haciendo en r el valor de x igual a cero, la ecuación 1.2.13 se convertirá en una ecuación diferencial homogénea de segundo grado de la forma:

$$d^2y/dz^2 + (n_2/n_0)y = 0$$

Aplicando las condiciones a la frontera dadas por:

$$y(0) = y_0$$

y

$$V(0) = V_0$$

obtenemos para y el valor de:

$$y(z) = y_0 \cos(L z) + V_0 L^{-1} \operatorname{sen}(L z)$$

en donde

$$L = (n_2/n_0)^{1/2}$$

Derivando a y con respecto de z, obtenemos la pendiente del rayo con respecto al eje óptico.

$$dy/dz = V(z) = -y_0 L \operatorname{sen}(L z) + V_0 \cos(L z)$$

De esta forma, la matriz de transferencia para un medio cuyo índice de refracción cambia de acuerdo con la ecuación 1.2.11, viene dada por:

$$M = \begin{pmatrix} \cos(L z) & L^{-1} \operatorname{sen}(L z) \\ -L \operatorname{sen}(L z) & \cos(L z) \end{pmatrix} \quad 1.2.14$$

El índice de refracción que hemos analizado, nos indica que va disminuyendo su valor conforme nos alejamos del eje focal. Sin embargo, existen algunos tipos de materiales que en vez de disminuir su índice, va aumentando al alejarnos del eje. En tales casos, la ecuación que describe a estas sustancias es muy similar a la ecuación 1.2.11, solo que el signo negativo que

aparece debe ser ahora positivo. Usando el hecho de que $e^x + e^{-x} = 2 \cosh(x)$ y $e^x - e^{-x} = 2 \sinh(x)$, se obtiene la matriz de transferencia para este tipo de índices:

$$M = \begin{pmatrix} \cosh(L z) & L^{-1} \sinh(L z) \\ L \sinh(L z) & \cosh(L z) \end{pmatrix} \quad 1.2.15$$

Debemos aclarar que las matrices anteriores describen la altura y la pendiente que tiene el rayo en un punto determinado dentro del medio donde se propaga, pero no nos indica los cambios que le puedan ocurrir a estas variables en el momento de pasar de un medio a otro. Por ejemplo, no se puede conocer con estas ecuaciones la alteración que pueda sufrir la pendiente al pasar el rayo del vacío a un material cuyo índice es similar al que estamos estudiando. Para índices constantes, este problema está resuelto haciendo uso de la ley de Snell.

Por otra parte, si comparamos el elemento C de la matriz 1.2.14 con su respectivo elemento de la matriz para las lentes delgadas, vemos que:

$$L \operatorname{sen}(L z) = 1/f$$

es decir, el elemento $L \operatorname{sen}(L z)$ es el inverso de la longitud focal f . La longitud focal es positiva cuando su argumento se encuentra entre $n\pi$ y $(n + 1)\pi$ radianes, con n par; y negativa cuando no se halla en ese intervalo. Si el rayo se va desplazando indefinidamente dentro del material, la longitud focal es alternadamente positiva y negativa, correspondiendo a un sistema

óptico convergente y divergente, respectivamente. La divergencia natural de un rayo es continuamente neutralizada por la convergencia del medio, ondulando el rayo cuando se propaga dentro de él. Tales materiales existen y son usados, entre otras cosas, para comunicación.

Las causas más comunes que dan origen a un índice de refracción que varía cuadráticamente con r son:

1.- El bombeo en ciertos láseres sólidos como los de rubí, dan origen a un índice de refracción que decrece con r .

2.- Guías de onda ópticas formadas por filamentos de vidrio cuyo índice decrece al decrecer r . Tales guías pueden ser usadas para la transmisión simultánea de un número considerable de haces láser, los cuales son introducidos en la guía en diferentes ángulos. Como consecuencia de la ecuación 1.2.14, los rayos emergerán con una dirección única, logrando con ello ser separados. Además, las guías de onda pueden ser usadas para transmitir información de la misma forma que un sistema de lentes transmite la imagen de un cámara.

La siguiente matriz corresponde a un rayo que viajando en un medio con índice de refracción n_1 constante atraviesa otro medio con índice n_2 también constante de longitud d . Las superficies que separan ambos medios son planas, como lo muestra la figura 7. Los valores de los elementos de esta matriz, se obtendrán del análisis hecho en la figura 7.

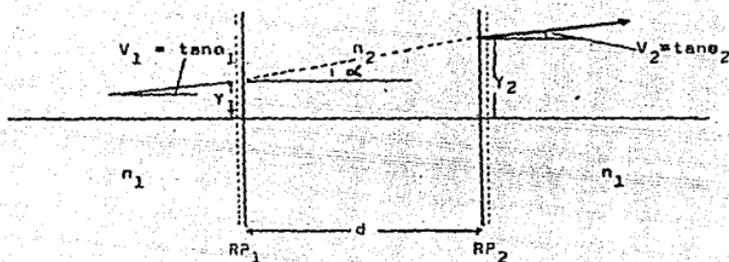


FIGURA 7

Como se puede observar la pendiente del rayo incidente es igual a la pendiente del rayo emergente, con lo cual concluimos que C y D son 1 y 0, respectivamente.

Por otra parte, note que $Y_2 = Y_1 + d \tan \theta_2$ y además por la ley de Snell $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$. Como suponemos que se trabaja con rayos paraxiales, esta ley se transformará en $n_1 \tan \theta_1 = n_2 \tan \theta_2$. Por consecuencia, despejando $\tan \theta_2$ y sustituyendola en Y_2 obtenemos:

$$Y_2 = Y_1 + (n_1/n_2) d V_1$$

en donde

$$\tan \theta_1 = V_1$$

Así, la matriz resultante que representa este sistema, es:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & (n_1/n_2) d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 1.2.16$$

Este resultado también se puede obtener aplicando adecuadamente la matriz de refracción 1.2.5. Para ello considere que las superficies planas situadas en los planos de entrada y de salida tienen radios de curvatura infinitos. Se deja para el lector la deducción de esta matriz por el método señalado.

MATRICES DE TRANSFERENCIA EN ESPEJOS ESFERICOS

Los espejos esféricos son parte importante de los sistemas ópticos y es por ello que deduciremos aquí su matriz correspondiente.

Cuando se trata con espejos esféricos, se tiene la característica de que el plano de entrada RP_1 coincide con el plano de salida RP_2 y por consecuencia, los elementos A y B son 1 y 0, respectivamente.

Para encontrar el valor de cada uno de los elementos restantes, mostraremos primeramente que la longitud focal de un espejo de esta naturaleza es igual a la mitad del radio de su curvatura. La demostración estará basada en la figura 8.

Observe que el ángulo que forma el rayo incidente es igual al ángulo formado por el rayo reflejado, dividiendo en partes iguales al ángulo SAP por medio de la línea CA. El lado SP es

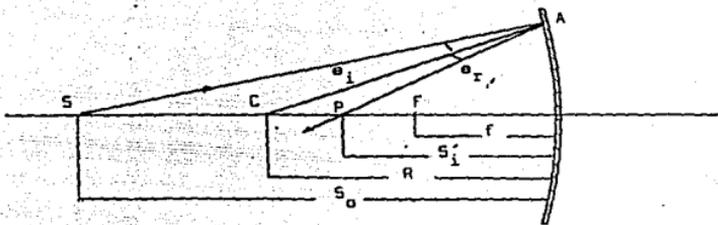


FIGURA 8

dividido en segmentos proporcionales a los dos lados restantes, esto es:

$$|SC|/|SA| = |CP|/|PA| \dots\dots\dots 1.2.17$$

además

$$SC = S_0 - |R| \quad \text{y} \quad CP = |R| - S_1$$

Si tomamos como positivo el valor de R cuando el espejo es cóncavo y negativo cuando es convexo, independientemente de la ubicación de su centro, entonces $|R| = R$ concluyendo que:

$$SC = S_0 - R \quad \text{y} \quad CP = R - S_1$$

En la región paraxial SA se aproxima a S₀ y PA se aproxima a S₁. De esta forma, la ecuación 1.2.17 se expresará ahora como:

$$1/S_0 + 1/S_1 = 2/R \quad \dots\dots\dots 1.2.18$$

Al comparar la fórmula anterior con la fórmula para las lentes delgadas, concluimos que $2f = R$. Por consecuencia, la matriz de transferencia asociada a un espejo esférico es:

$$M_s = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2/R & 1 \end{pmatrix} \quad 1.2.19$$

1.3 DERIVACION DE LAS PROPIEDADES DE UN SISTEMA EN TERMINOS DE SU MATRIZ DE TRANSFERENCIA.

Hemos visto que un rayo paraxial lo podemos caracterizar por medio de dos parámetros: la pendiente o ángulo de inclinación v y la altura Y que forma el rayo con el eje focal, cuando éste atraviesa un plano de referencia dado. Sin embargo, para hablar de las propiedades de un sistema por medio de su matriz de transferencia, es conveniente reemplazar la pendiente por su coseno de dirección óptico, definido como: $v = n \sin \theta = n \tan \theta \approx n \theta$, donde n es el índice de refracción del medio en el cual el rayo está viajando. El coseno de dirección óptico tiene la propiedad de que, por la ley de Snell, permanecerá inalterado cuando el rayo cruza un plano que divide dos medios con índices de refracción diferentes. Su matriz de transferencia asociada queda expresada en función de los cosenos directores como:

$$\begin{pmatrix} Y_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$$

Anteriormente no se había tomado esta definición ya que la mayoría de los sistemas ópticos se encuentran en un medio cuyo índice no cambia de un plano de referencia a otro.

Suponga ahora que se ha evaluado la matriz de transferencia para un sistema en donde el rayo está caracterizado por estos parámetros. Si alguno de los elementos de esa matriz es igual a cero, su interpretación geométrica es diferente para cada uno de ellos. Los siguientes incisos explican las consecuencias que traen consigo el que uno de los elementos de la matriz sea nulo.

a).- Si $D = 0$, la ecuación para v_2 se convierte en $v_2 = C Y_1$, es decir:

$$v_2 = C Y_1 / n_2$$

Como consecuencia, todos los rayos que pasen a la misma altura a través del plano de entrada, saldrán formando el mismo ángulo con respecto del eje focal; no importando el ángulo que forme el rayo en el momento cruzar por el primer plano. Para este caso, el plano de entrada se identificará con el nombre de primer plano focal. Observe la figura 9.

b).- Si $B = 0$, la ecuación para Y_2 se convierte en: $Y_2 = A Y_1$, afirmando que todos rayos que pasen por el plano de entrada a una misma altura Y_1 , emergerán con una altura $A Y_1$, independientemente de la inclinación que tengan los rayos al cruzar por el primer plano principal. Así, los puntos O e I vistos en la figura 10 son los puntos objeto e imagen, respectivamente. Los planos de entrada y de salida serán, para este caso, los planos conjugados y la razón $A = Y_2 / Y_1$ da la amplificación producida por el sistema en estas condiciones.

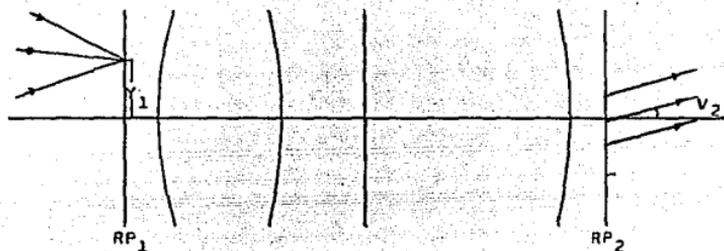


FIGURA 9

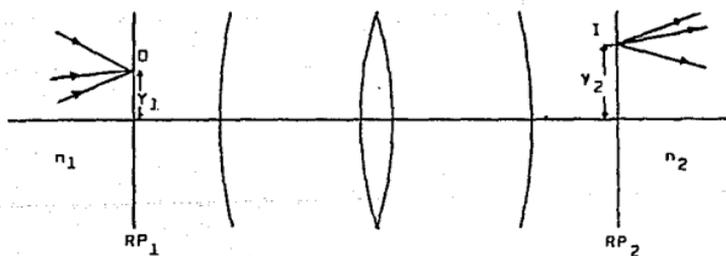


FIGURA 10

c).- Si $C = 0$, V_2 será igual a $(n_1/n_2) D V_1$, provocando que todos los rayos que entren al sistema paralelamente, emerjan también paralelamente con una nueva dirección. Un sistema de lentes que satisfaga esta condición, es llamado " Sistema Telescópico ". La amplificación angular está dada por $D = n_2 V_2 / n_1 V_1$. Observe la figura 11

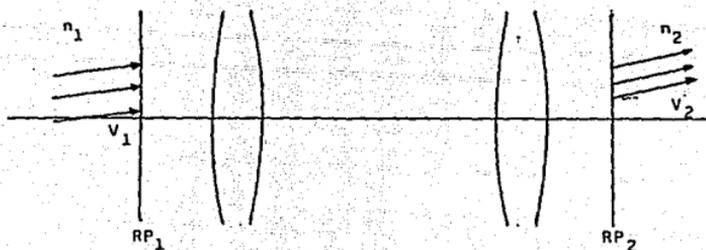


FIGURA 11

d).- Si A es igual a cero, V_2 es igual a Bn_1V_1 , implicando que todos los rayos que entran al sistema con un ángulo V_1 , pasen por el mismo punto Y_2 . Este sistema provoca que todos los rayos que entran paralelos, los converja en un punto en el plano de salida. Al plano RP_2 se le conoce como segundo plano focal. Observe la figura 12.

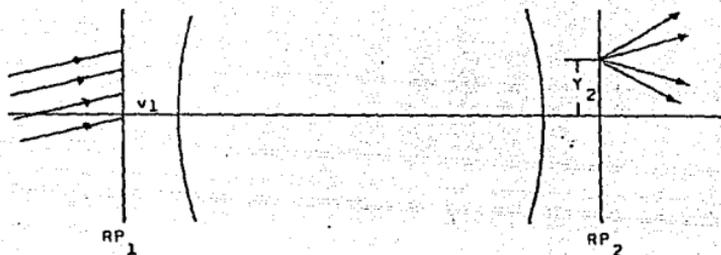


FIGURA 12

e).- En este inciso se pone atención en el valor del determinante de una matriz de transferencia. Si A ó D es igual a cero, entonces $B = -1/C$. De la misma forma, si B ó C se hacen cero, $D = 1/A$. Para el caso en que el determinante sea diferente de 1, el análisis es completamente similar. El hecho de que B se haga cero para la relación objeto-imagen y que A para este caso sea la amplificación transversal, nos guía a un método experimental para encontrar los elementos restantes de la matriz asociada, sin necesidad de medir sus componentes individuales.

En general, a menos que el valor de v sea cero, el rayo cruzará el eje en alguna parte. Con respecto a un plano de referencia dado, en donde el rayo tenga una altura Y y una pendiente V , la posición en el eje horizontal donde el rayo lo cortará está dado por $-Y/V = -nY/v$. Si este cociente es positivo, el punto de cruce se cortará a la derecha del plano de referencia y a la izquierda de éste si es negativo. Observe la figura 13.

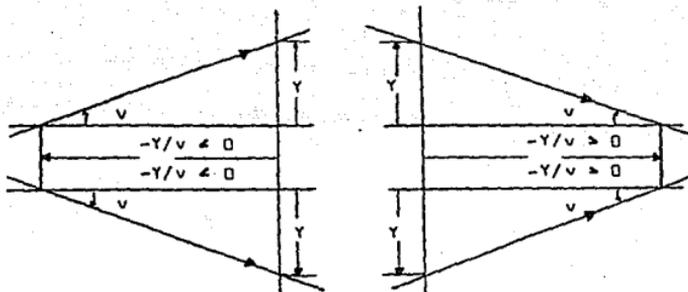


FIGURA 13

1.4 LOCALIZACION DE LOS PUNTOS FUNDAMENTALES DE UN SISTEMA.

Sea M la matriz que describe un sistema dado, la cual relaciona el plano de referencia de salida con el plano de referencia de entrada. Ahora localizaremos con respecto a estos planos, los puntos focales, los planos principales de amplificación transversal, los planos nodales de amplificación angular, etc. Para generalizar, supondremos que n_1 y n_2 son los índices de los medios que se encuentran a la izquierda y a la derecha del sistema.

a).- Consideremos el caso que se muestra en la figura 14. En ésta, se observa que un rayo entra al sistema paralelamente al eje focal a una altura Y_1 . De acuerdo con las leyes de la Óptica Geométrica, el rayo llega al segundo plano principal con la misma altura y se dobla de tal forma que pasa a través del segundo plano focal F_2 . Para el rayo de entrada $v_1 = 0$ tal que $Y_2 = A Y_1$ y $V_2 = C Y_1 / n_2$. Si t_2 es igual a la longitud que existe entre el

plano RP_2 y el punto focal F_2 , entonces debemos tener: $t_2 = -Y_2 / v_2 = -n_2 A / C$, con la cual se puede localizar el segundo foco.

Cuando el rayo que hemos considerado emerge del segundo plano principal H_2 , su altura será igual a Y_1 . Por consecuencia, si definimos la segunda longitud focal f_2 como la longitud que existe de H_2 a F_2 , entonces su valor debe ser igual a: $f_2 = -Y_1 / v_2 = -n_2 / C$.

El desplazamiento que existe entre el plano RP_2 y el segundo plano principal H_2 , es igual a: $s_2 = t_2 - f_2 = n_2(1 - A) / C$.

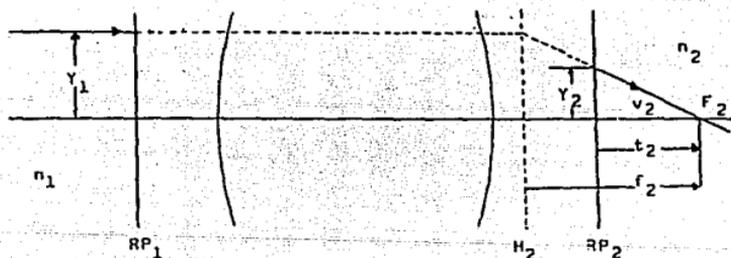


FIGURA 14

b).- Consideremos ahora un rayo el cual entra al sistema con un ángulo v_1 después de pasar por el primer foco F_1 .

En la figura 15 vemos que el rayo se hace paralelo al eje focal en el primer plano principal H_1 y continuará así cuando pase a través de RP_2 . Por lo tanto se puede escribir: $Y_1 = -n_1 D V_1 / C$. De la misma figura observe que si t_1 es el desplazamiento que hay del plano de entrada al punto focal F_1 , su valor estará dado por: $t_1 = -Y_1 / V_1 = n_1 D / C$. Con la cual podemos localizar el primer foco.

Considerando el mismo rayo, recordemos que en el primer plano principal su altura debe ser igual: $Y_2 = A Y_1 + B V_1 n_1$. Por consecuencia, si la primera longitud focal f_1 es definida como el desplazamiento del punto F_1 al punto H_1 , debemos tener: $f_1 = Y_2 / V_1 = -n_1 (AD - BC) / C$. Recordando que el determinante de una matriz es unitario, obtenemos finalmente: $f_1 = -n_1 / C$, que corresponde a la primera longitud focal.

Para encontrar el desplazamiento s_1 que existe de RP_1 hasta H_1 , solo es necesario darse cuenta que: $s_1 = f_1 + t_1$. Por consiguiente: $s_1 = n_1 (D - 1) / C$.

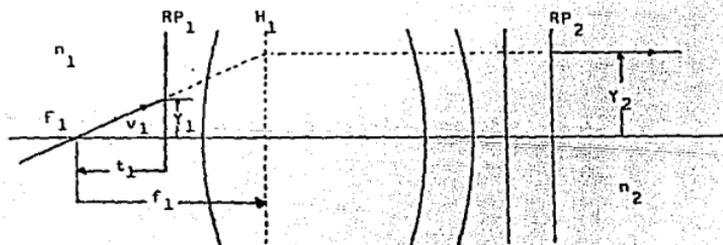


FIGURA 15

c).- Finalmente, determinemos los puntos nodales L_1 y L_2 de tal manera que cualquier rayo que entra al sistema en dirección a L_1 , salga de él como un rayo que parte de L_2 formando el mismo ángulo. Observe la figura 16.

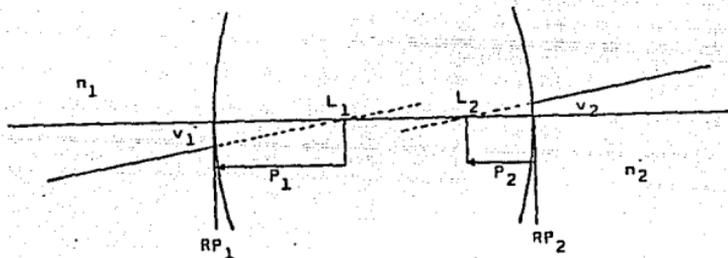


FIGURA 16

Como en esta sección se ha estado trabajando con el concepto de coseno de dirección óptico, es necesario utilizar también el concepto de " Espesor Reducido " que a continuación explicaremos.

Cuando observamos el fondo de una piscina a través del agua que la llena, notaremos que su profundidad se ve menor a que si la viéramos sin agua. Esto es debido a que el índice de refracción del agua es mayor que el del aire, provocando con ello una sensación de disminución de la profundidad de la piscina. De manera análoga sucedería si observamos un objeto que se encuentra separado de nosotros por una distancia d . Esta distancia no sería alterada si viéramos al objeto en el aire, pero si colocáramos un

vidrio entre nosotros y el objeto, con un espesor d , la distancia se reduciría. La reducción aparente de esta distancia se puede calcular por medio de la siguiente ecuación: $d - d/n$. De todo esto definiremos el espesor reducido como: d/n .

Con la anterior definición debemos alterar la matriz de transferencia correspondiente a un rayo que viaja una distancia d a través de un medio con índice de refracción n , resultando:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & d/n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para lograr el objetivo que nos hemos planteado, hagamos la suposición de que un rayo paraxial parte del punto nodal L_1 y llega al plano RP_1 , después se dirige al plano RP_2 y por último parte de él y llega al punto nodal L_2 . Llamaremos a P_1 al desplazamiento del punto L_1 al plano RP_1 y a P_2 como el desplazamiento del plano RP_2 al punto nodal L_2 . Así, la trayectoria seguida por el rayo paraxial se puede escribir por medio del producto de matrices siguiente:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & P_2/n_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & P_1/n_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De esta última ecuación se concluye que:

$$Y_2 = Y_1(A + CP_2/n_2) + n_1 V_1(P_1/n_1(A + CP_2) + DP_2/n_2 + B)$$

y

$$n_2 V_2 = v_2 = Y_1 C + n_1 V_1(CP_1/n_1 + D)$$

Para un punto nodal, se cumple $Y_1 = Y_2 = 0$, y aplicando la condición de que el ángulo V_1 es igual al ángulo V_2 , entonces las ecuaciones anteriores se transforman en:

$$n_1 (CP_1/n_1 + D) = n_2$$

$$(P_1/n_1)(A + CP_2/n_2) + DP_2/n_2 + B = 0$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones con dos incógnitas, se llega a:

$$P_1 = (n_2 - Dn_1) / C \quad \text{y} \quad P_2 = (n_1 - An_2) / C$$

Así, se han recopilado en la siguiente tabla todos los resultados obtenidos anteriormente:

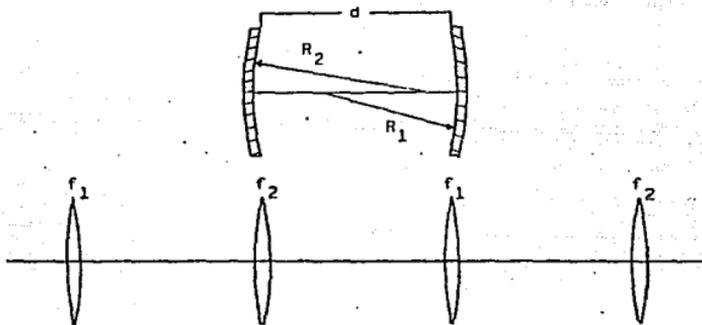
Parámetro descrito	Medición	Formula	Caso
en el sistema	De A	Función	Especial
Primer punto focal	RP ₁ F ₁	n ₁ D/C	D/C
Primera long. focal	F ₁ H ₁	-n ₁ /C	1/C
Primer punto principal	RP ₁ H ₁	n ₁ (D-1)/C	(D-1)/C
Primer punto nodal	RP ₁ L ₁	(Dn ₁ - n ₂)/C	(D-1)/C
Segundo punto focal	RP ₂ F ₂	-n ₂ A/C	-A/C
Segunda long. focal	H ₂ F ₂	-n ₂ /C	-1/C
Segundo punto principal	RP ₂ H ₂	n ₁ (1-A)/C	(1-A)/C
Segundo punto nodal	RP ₂ L ₂	(n ₁ - An ₂)/C	(1-A)/C

La columna de la derecha que se muestra en esta tabla, describe el caso más frecuentemente más encontrado, que es el de un sistema localizado en el aire. En éste los puntos nodales coinciden con los puntos principales; esto se debe a que las condiciones para la amplificación angular y lineal, son las mismas. Vemos también que las longitudes focales son iguales.

1.5.- SUCESIONES PERIODICAS.

Los rayos que viajan en los espejos esféricos de un resonador óptico, experimentan una acción enfocadora periódica. El efecto que experimentan estos rayos dentro del resonador es equivalente

al que experimentan los rayos dentro de una sucesión periódica de lentes; la cual puede ser usada para describir un resonador. La figura 17 muestra un resonador y su equivalente sucesión periódica (guía de onda lenticular).



FIGUREA 17

Un simple elemento de la sucesión es caracterizado por su matriz de transferencia. Un número n de elementos consecutivos de la sucesión, es representada por medio de la matriz de transferencia elevada a la n -ésima potencia; la cual puede ser calculada por medio del Teorema de Sylvester.

Supongamos que se tiene una matriz M y queremos obtener la función matricial dada por: $f(M) = M^n$.

Un polinomio de interpolación puede ser empleado para una evaluación de funciones de matrices. Sea M una matriz de dos por dos, con valores propios λ_1 y λ_2 distintos. Por analogía con las funciones escalares, podemos definir una única función

matricial polinomial $P_1(M)$ como una matriz de interpolación de primer orden para cualquier función matricial arbitraria $f(M)$:

$$P_1(M) = (M - \lambda_2 I) f(\lambda_1) / (\lambda_1 - \lambda_2) + (M - \lambda_1 I) f(\lambda_2) / (\lambda_2 - \lambda_1)$$

Esta es una definición bastante importante, ya que dada una función escalar $f(\lambda)$ y una matriz M con valores propios λ_1 y λ_2 , los valores de $f(\lambda_1)$ y $f(\lambda_2)$ especifican completamente a $f(M)$.

Para poder aplicar esta definición a las matrices de transferencia, primeramente debemos obtener sus raíces características. La ecuación que determina estas raíces viene dada por: $\text{Det}(M - \lambda I) = \lambda^2 - \lambda(A + B) + (AD - BC) = 0$.

Haciendo uso de las siguiente hipótesis: a).- $(A + D) = \cos \theta$ y b).- $\text{Det}(M) = AD - BC = 1$, el valor de λ_1 es igual a $e^{i\theta}$ y el de λ_2 , a $e^{-i\theta}$. Sustituyendo los valores de las lambdas así encontradas en el polinomio de interpolación, se tiene:

$$M^n = 1/\sin \theta \begin{pmatrix} A \sin n\theta - \sin(n-1)\theta & B \sin n\theta \\ C \sin n\theta & D \sin n\theta - \sin(n-1)\theta \end{pmatrix} \quad 1.5.1$$

La ecuación anterior describe la transferencia de un rayo a través de n elementos consecutivos de la sucesión de lentes delgadas, que a su vez equivale a describir el viaje de un rayo dentro de un resonador. Cada elemento de la sucesión de lentes es similar a un viaje completo dentro de la sucesión.

El resultado dado anteriormente, solo se aplica para el caso en que los valores propios sean diferentes. Cuando el mínimo polinomio de M tiene sus raíces iguales, el cálculo para $f(M)$ se realiza en forma diferente.

Para el caso en que las raíces del polinomio característico sean iguales, se cumple: $P_1(\lambda_0) = f(\lambda_0)$ y $P'_1(\lambda_0) = f'(\lambda_0)$, en donde $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$.

La función matricial para el caso de tener raíces idénticas queda expresada como:

$$P_1(M) = f(\lambda_0) I + (M - \lambda_0 I) f'(\lambda_0)$$

en donde $P(\lambda)$ y $f(\lambda)$ son tangentes en $\lambda = \lambda_0$.

Como $\lambda^2 - \lambda(A + D) - (AD - BC) = 0$, $(A + D)/2 = \cos \theta$ y $\text{Det}(M) = 1$, entonces la única raíz posible es: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0 = \cos \theta$. Por consecuencia, para que esta condición se cumpla es necesario que el ángulo θ se múltiplo entero del número π .

Sustituyendo la raíz encontrada en la función matricial antes señalada, encontramos que:

$$M^n = \begin{pmatrix} n A \cos^{n-1} \theta + (1-n) \cos^n \theta & n B \cos^{n-1} \theta \\ n C \cos^{n-1} \theta & n D \cos^{n-1} \theta + (1-n) \cos^n \theta \end{pmatrix} \quad 1.5.2$$

Esta ecuación describe el viaje de un rayo a través de n elementos consecutivos de una sucesión de lentes delgadas cuando la matriz de transferencia asociada a ese elemento tiene raíces idénticas.

Las sucesiones periódicas pueden ser clasificadas en estables, inestables y condicionalmente estables. La sucesión es estable cuando la traza de la matriz obedece la desigualdad:

$$-1 < (A + D)/2 < 1$$

Para una sucesión estable, todos los rayos que viajen a través de

ella serán reenfocados.

En los sistemas inestables, la hipótesis $(A + D)/2 = \cos \theta$ se sustituye por $(A + D)/2 = \cosh \theta$. De esta forma, las raíces características de la matriz de transferencia asociada a una sucesión inestable, están dadas por: $\lambda_1 = e^\theta$ y $\lambda_2 = e^{-\theta}$.

La matriz M^n para este tipo de sistemas cuyas raíces son distintas, se expresa de la siguiente manera:

$$M^n = 1/\sinh \theta \begin{pmatrix} A \sinh n\theta - \sinh (n-1)\theta & B \sinh n\theta \\ -C \sinh n\theta & D \sinh n\theta - \sinh (n-1)\theta \end{pmatrix} \quad 1.5.3$$

Estos resultados, se obtuvieron empleando las ecuaciones matriciales $P_1(M)$ que anteriormente se mencionaron.

1.6.- DIAGRAMA DE ESTABILIDAD.

El objetivo de esta sección es mostrar una gráfica que nos ayude a identificar cuándo un sistema sea estable, inestable o condicionalmente estable.

Si para cualquier número de recorridos completos dentro de la cavidad, la posición del rayo no ha rebasado la altura de cualquiera de los dos espejos, entonces se dice que la cavidad es estable ya que no permite que el rayo escape hacia afuera de ella. Si el rayo rebaza alguna de las superficies de los espejos después de recorrer un número determinado de ciclos, se dice que la cavidad es inestable. Y si los espejos deben estar perfectamente alineados para que el rayo no escape, el sistema será condicionalmente estable.

Una cavidad estable debe cumplir la desigualdad siguiente: $-1 < (A + D)/2 < 1$; la inestable: $1 < |(A + D)/2|$ y la condicionalmente estable: $(A + D)/2 = 1$. En donde A y D son los elementos de la matriz de transferencia que describe el recorrido de un ciclo a través de la cavidad.

Para abordar el problema que nos hemos planteado, tomaremos un caso específico de una cavidad como la mostrada en la figura 18. La siguiente multiplicación de matrices representa cada una de las etapas del recorrido que realiza un rayo para completar un ciclo.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2/R_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2/R_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 1.6.1$$

Efectuando el producto e identificando los elementos A y D, la condición de estabilidad viene expresada como:

$$0 < (A + D + 2)/4 = (1 - d/R_1)(1 - d/R_2) < 1$$

Al definir a $g_1 = 1 - d/R_1$ y a $g_2 = 1 - d/R_2$ esta condición de estabilidad puede ser escrita ahora como:

$$0 < g_1 g_2 < 1$$

La estabilidad vista como lo expresa la ecuación anterior nos permite representarla por medio de un diagrama en donde el eje horizontal corresponda a la variable g_1 y el vertical a la variable g_2 . Esta gráfica nos indicará si una cavidad dada es estable o no. Si las dimensiones de la cavidad son tales que el producto de los parámetros se encuentra dentro de la región no oscura, entonces la cavidad es estable; si se encuentra dentro de la región oscura, es inestable; si se encuentra sobre la

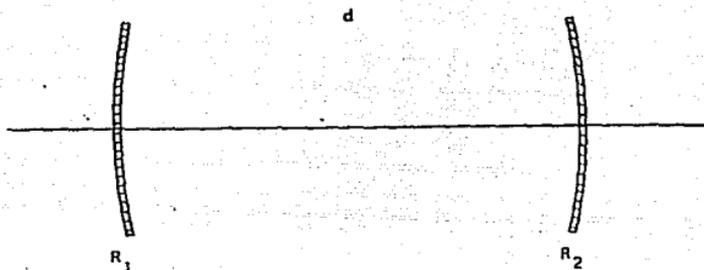


FIGURA 18

línea, se dice que es condicionalmente estable, requiriendo perfecto alineamiento.

En el caso particular en el que $g_1 = g_2 = 0$ (Geometría confocal) los espejos que forman la cavidad tienen el mismo radio de curvatura y están separados por una distancia d igual al valor de estos radios. Este caso se encuentra situado en el origen del diagrama de estabilidad, considerándolo como un sistema condicionalmente estable. Muchas cavidades que se hayan en esta situación, lo tratan de evitar aumentando o disminuyendo el valor de la separación entre los espejos. Otro tipo de resonadores que se representa en este diagrama es el resonador concéntrico, cuyos espejos tienen igual radio de curvatura pero la distancia que los separa es igual al doble del radio. En el diagrama de estabilidad este sistema se ubica en el punto $g_1 = -1$ y $g_2 = -1$. Otro sistema llamado comúnmente paralelo, tiene la característica de estar formado por dos espejos planos y paralelos. En este caso, los valores de g_1 y g_2 son unitarios; independientemente de

la distancia que los separa.

La línea vertical que pasa por el punto $g_1 = 1$ corresponde a puntos en los cuales el sistema tiene al menos un espejo plano. Esta afirmación se emplea para la línea horizontal que cruza el punto $g_2 = 1$. El punto de cruce de estas dos líneas nos da el sistema óptico formado por los planos paralelos.

Existe orto par de líneas, horizontal y vertical, que pasan por los puntos cuyos valores para g_1 y g_2 corresponden a -1 . La intersección de ellas corresponde a un sistema concéntrico. El cruce de las líneas $g_1 = -1$ y $g_2 = 1$ ó $g_1 = 1$ y $g_2 = -1$ no corresponden a sistemas que sean estables.

Para sistemas que tengan al menos una de estas variables igual a cero, son considerados como condicionalmente estables. En general, todos los puntos que se ubican ya sea en los ejes o sobre las líneas que conforman la hipérbola se consideran puntos que representan sistemas condicionalmente estables.

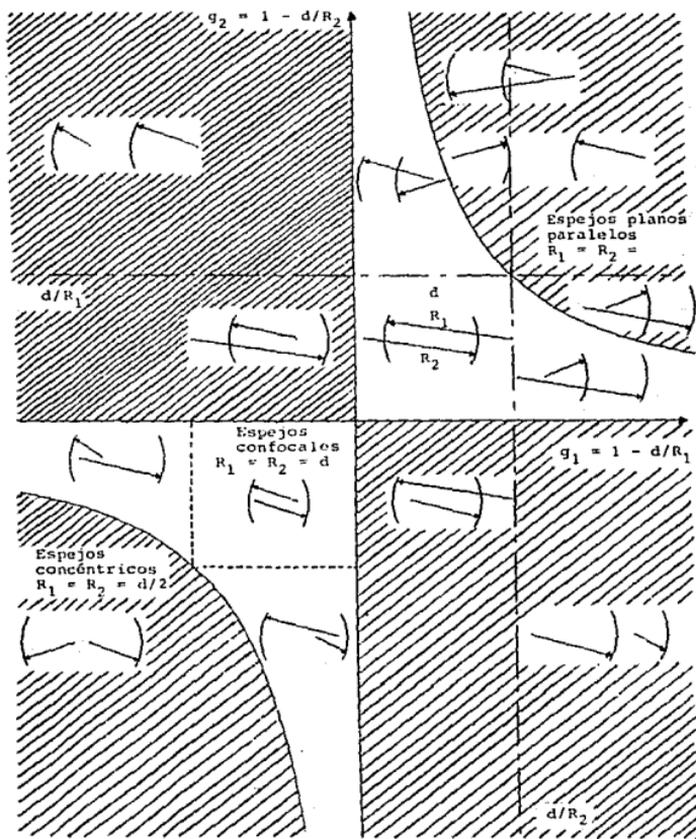


DIAGRAMA DE ESTABILIDAD.

CAPITULO II

ANALISIS ONDULATORIO DE HACES GAUSSIANOS

2.1.-INTRODUCCION

Como apreciamos en el capítulo anterior, hemos utilizado el hecho de representar a la luz por medio de líneas rectas, las cuales son caracterizadas por su altura y por su pendiente que forma con respecto a un sistema de referencia dado. Sin embargo, dicha representación tiene sus limitaciones ya que, desde este punto de vista, la amplitud, la fase, la extensión espacial o la intensidad carecen de sentido y obviamente esta información es vital.

La Óptica Física contempla algunas características de la luz que no pueden ser tratadas en la Óptica Geométrica y es por ello la necesidad de emplearla. Esta ciencia se basa, entre otras cosas, en el conjunto de ecuaciones que son solución de la ecuación de onda. La interpretación física que trae consigo estas soluciones nos proporciona la información necesaria para describir el comportamiento de la radiación conforme se desplaza en algún sistema óptico. En la Óptica Física tiene significado emplear términos como la amplitud, la intensidad, etc. que juegan un papel importante en esta ciencia.

Este capítulo tiene por objetivo deducir una solución aproximada de la ecuación de onda, la cual es utilizada para describir a los haces gaussianos, que es el tipo de radiación que mejor representa a un haz láser. De esta ecuación se deducirán dos parámetros muy importantes, que permiten calcular el radio de

curvatura del frente de onda y el radio de la mancha producida por el haz cuando la amplitud del campo eléctrico decae hasta un factor $(1/e)$ de su máximo valor. La combinación de ellos es conocida con el nombre de " parámetro complejo ", que depende de una sola variable, que es la posición sobre el eje de propagación.

Apoyados con gráficas analizaremos con detalle la dependencia de los parámetros mencionados con la posición sobre el eje.

La amplitud y el factor de fase radial están en función de las tres coordenadas, no siendo así el factor de fase longitudinal que solo depende de la posición sobre el eje de propagación. Se dibujan las trazas de la amplitud para cada variable de la cual dependa y a su vez es analizado su comportamiento. De igual forma se muestran algunos casos particulares del término trigonométrico que aparece en la fase ϕ .

Al final, dentro de esta sección, presentaremos una breve interpretación física de cada uno de los elementos que constituyen la solución de la ecuación de onda.

En la última sección de este capítulo, se estudiarán dos familias de ecuaciones que también son solución aproximada de la ecuación de onda. Una de ellas está expresada en coordenadas cartesianas, correspondiendo a los polinomios de Hermite; la otra familia se expresa en función de las coordenadas cilíndricas, correspondiendo a los polinomios Asociados de Legendre. El estudio de estas ecuaciones conduce a los llamados " números modales " que están relacionados con el número de puntos que presenta un haz para un patrón determinado. Mostraremos algunas fotografías de haces láser con diferentes números modales en los dos

sistemas de coordenadas.

Por último se dará una pequeña explicación del significado físico que tiene cada término para las diferentes familias de polinomios.

2.2.- SOLUCION APROXIMADA DE LA ECUACION DE ONDA.

Un haz láser es muy similar en muchos aspectos a las ondas planas, sin embargo, la distribución de la intensidad no es uniforme sino que se halla concentrada cerca del eje de propagación y su frente de onda es ligeramente curvo, al igual que los factores de fase, longitudinal como radial, presentan características muy peculiares que difieren de las ondas planas o esféricas.

En la presente sección, realizaremos un desarrollo algebraico sobre la función de onda, considerando algunas hipótesis que son las que caracterizarán a los haces gaussianos, para obtener así una expresión que nos permita calcular la amplitud del campo eléctrico, así como también el parámetro complejo y los factores de fase que se mencionaron en la sección anterior.

El campo eléctrico \vec{E} satisface las siguientes ecuaciones:

$$\nabla \times \vec{H} = c \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \sigma \vec{E}$$

2.2.1

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

Aplicando la definición de rotacional a la segunda igualdad e insertando la primera ecuación en el lado derecho del segundo

rotacional se obtiene:

$$\nabla^2 \bar{E} - \mu c \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} - \mu \sigma \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = 0$$

donde hemos usado el hecho de que $\nabla \times \nabla \times \bar{E} = \nabla (\nabla \cdot \bar{E}) - \nabla^2 \bar{E}$ y que $\nabla \cdot \bar{E} = 0$. Si suponemos que el campo \bar{E} se puede escribir como un producto de solo dos factores dados por: $\bar{E}(\vec{r}, t) = \text{Re } \bar{E}(\vec{r}) \cdot \exp(i\omega t)$ - esto es, una radiación monocromática pura - la ecuación de onda se convertirá ahora en una nueva expresión de la forma:

$$\nabla^2 \bar{E} + k^2 \bar{E} = 0 \quad 2.2.2$$

con

$$k^2 = \mu c \omega^2 \left[1 - \frac{i \sigma}{\epsilon \omega} \right]$$

donde ω es la frecuencia angular, μ es la permeabilidad del espacio, y c es la permitividad eléctrica del medio.

Podemos generalizar la ecuación 2.2.2 al suponer que el número de onda k tenga una posible dependencia de la posición, dada por:

$$k^2(\vec{r}) = k^2 - k k_2 r^2 \quad 2.2.3$$

donde k_2 es constante.

Así, considerando la hipótesis anterior, la ecuación 2.2.2 queda expresada en función del nuevo término de la siguiente forma:

$$\nabla^2 \vec{E} + k^2(\vec{r}) \vec{E} = 0 \quad 2.2.4$$

Como se mencionó anteriormente, la clase de propagación que estamos considerando es la de una onda aproximadamente plana en la cual el flujo de energía predomina a lo largo de un eje de referencia, de tal forma que se puede limitar nuestra derivación a una simple componente transversal escalar E . Si por convención identificamos al eje de propagación con el eje z , uno puede escribir el valor del campo eléctrico escalar de la siguiente manera:

$$E = E_0 \Psi(x, y, z) \exp(-ikz) \quad 2.2.5$$

Al interpretar físicamente la ecuación anterior, observamos que el factor E_0 corresponde a la amplitud del campo, que es proporcional a la intensidad de la radiación; el factor $\exp(-ikz)$ nos indica que la onda se propagará en la dirección del eje z , aproximadamente como una onda plana. El término $\Psi(x, y, z)$ es un factor que expresa la diferencia entre una onda plana y una onda gaussiana, es decir, mide la distribución no uniforme de la intensidad, la dispersión del haz cuando se propaga, el radio de curvatura del frente de onda y otras diferencias.

Sustituyendo la ecuación 2.2.5 en la igualdad 2.2.4 y haciendo el desarrollo algebraico, obtenemos el siguiente resultado:

$$\nabla^2 \Psi - 2ik \frac{\partial \Psi}{\partial z} - k^2 r^2 \Psi = 0 \quad 2.2.6$$

Supongamos ahora que la segunda derivada de Ψ con respecto a z , es despreciada. Para justificar esto, recordemos que los

parámetros contenidos en esa función dependen también de z , con lo cual la primera y segunda derivada con respecto de esta variable no necesariamente se anulan. Pero la primera derivada se halla multiplicada por un número muy grande, k ; mientras que el coeficiente de la segunda derivada es la unidad. De esto podemos inferir que la segunda derivada es mucho menor que el factor k multiplicado por la primera derivada, despreciando así este término.

Con lo afirmado anteriormente, la ecuación 2.2.6 se transforma en una ecuación de la forma:

$$\nabla_t^2 \Psi - 2ik \frac{\partial \Psi}{\partial z} - k k_2 r^2 \Psi = 0 \quad 2.2.7$$

donde:

$$\nabla_t^2 = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}$$

Proponemos la siguiente ecuación como solución a la ecuación diferencial 2.2.7

$$\Psi(\bar{r}) = \exp \left[-i \left(P(z) + \frac{Q(z)}{2} r^2 \right) \right] \quad 2.2.8$$

$$\text{con } r^2 = x^2 + y^2$$

e introduciendo esta solución en la ecuación diferencial antes mencionada, obtenemos:

$$Q^2(z) r^2 + 2i Q(z) + k r^2 Q'(z) + 2k P'(z) + k k_2 r^2 = 0$$

Si la suma de los coeficientes de r^2 es igual a cero, se tiene:

$$P'(z) = -i \frac{Q(z)}{k}$$

y

2.2.9

$$Q^2(z) + k Q'(z) + k k_2 = 0$$

La ecuación de onda se ha reducido a las ecuaciones 2.2.9. Si el medio donde viaja el haz es homogéneo entonces k_2 es igual a cero y la segunda de las ecuaciones anteriores se transforma en:

$$Q^2(z) + k Q'(z) = 0 \quad 2.2.10$$

La ecuación anterior es una ecuación diferencial homogénea de primer grado y su solución se da como:

$$Q(z) = \frac{k}{z + q_0} \quad 2.2.11$$

donde: q_0 es una constante.

Al sustituir esta ecuación en la primera de las dos ecuaciones diferenciales 2.2.9 e integrando se llega a:

$$P(z) = -i \ln(1 + z/q_0) \quad 2.2.12$$

Sustituyendo los resultados dados por las ecuaciones 2.2.11 y 2.2.12 en la ecuación 2.2.8, encontramos que el valor de Ψ es igual a:

$$\Psi(\vec{r}) = \exp \left[-\ln(1 + z/q_0) - \frac{ik r^2}{2(q_0 + z)} \right] \quad 2.2.13$$

Expresemos ahora la constante q_0 como un número imaginario puro en términos de una nueva constante w_0 :

$$q_0 = \frac{i \pi w_0^2}{\lambda} = i z_0$$

Al expresar a q_0 en función de una nueva variable w_0 podemos escribir el exponente de la ecuación 2.2.13 de una manera diferente:

$$\exp[-\ln(1-iz/z_0)] = \frac{1}{[1 + (z/z_0)^2]^{1/2}} \exp[i \arctan(z/z_0)]$$

Sustituyendo q_0 en el segundo exponente de la ecuación 2.2.13 y separando sus partes real e imaginaria, se llega a:

$$\exp\left[\frac{-ikr^2}{2(q_0 + z)}\right] = \exp\left[-\frac{ikr^2}{2} \left(\frac{1}{R(z)} - \frac{\lambda i}{\pi w^2(z)}\right)\right] \quad 2.2.14$$

donde se ha definido

$$w^2(z) = w_0^2 [1 + (z/z_0)^2] \quad 2.2.15$$

$$R(z) = z [1 + (z_0/z)^2] \quad 2.2.16$$

Recopilando todos estos resultados en la ecuación 2.2.5 la nueva expresión queda de la siguiente forma:

$$E = E_0 \left[\frac{w_0}{w(z)} \right] \exp \left[-i \left(\phi + \frac{k r^2}{2 q(z)} \right) \right] \quad 2.2.17$$

donde:

$$w_0/w = (1 + (z/z_0)^2)^{-1/2}$$

$$\phi(z) = k z - \arctan(z/z_0) \quad 2.2.18$$

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} - \frac{i \lambda}{\pi w^2(z)} \quad 2.2.19$$

La ecuación 2.2.17 corresponde a un haz de luz coherente ya que está en función de la longitud de onda λ , y como se puede apreciar, ésta es constante.

También es necesario mencionar que el perfil de intensidad presenta forma gaussiana, como consecuencia del término cuadrático que aparece en la ecuación mencionada.

La ecuación 2.2.17 es conocida con el nombre de " haz gaussiano fundamental ". Además, esta ecuación no es la única solución a la ecuación 2.2.4, pero sí es la más importante. Las demás soluciones son conocidas con el nombre de " haces gaussianos con modos de orden superior ", que serán discutidas en las próximas secciones.

2.3.- DESCRIPCION FISICA DE UN HAZ GAUSSIANO FUNDAMENTAL.

La interpretación física de $R(z)$, $w(z)$ y de la ecuación 2.3.17, es el tema principal de esta sección. En el primer inciso se analiza con detalle cuál es el comportamiento que presenta la amplitud del Campo Eléctrico para cada una de las variables de las cuales depende. Los puntos máximo y mínimo que alcance son calculados y ubicados en este inciso. También se estudian las condiciones que deben cumplirse para que la amplitud del campo decaiga hasta un factor $(1/e)$ de su máximo valor. A partir de este análisis se obtiene una gráfica que describe cómo el haz gaussiano se dispersa conforme se desplaza a través del vacío.

En el segundo inciso estudiamos algunos casos particulares

del término trigonométrico que aparece en el factor de fase longitudinal que, como su nombre lo indica, depende solo de la posición sobre el eje.

En el tercer inciso se ha dibujado una gráfica del radio de curvatura del frente de onda para un haz de esta naturaleza. El radio así trazado depende también de la posición sobre el eje, alcanzando un mínimo a una distancia del origen conocida comunmente como " distancia de Rayleigh ". Para distancias cercanas al origen y muy alejadas del mismo, el comportamiento del radio es asintótico con respecto a las líneas $z = 0$ y $R(z) = z$.

a).- La magnitud del campo eléctrico depende esencialmente del producto de dos factores: $w_0/w(z)$ que solo es función de la variable z , y de $\exp[-r^2/w^2(z)]$ donde es función de las tres coordenadas. La dependencia de la amplitud del campo de los factores antes mencionados, viene expresada por medio de la siguiente relación:

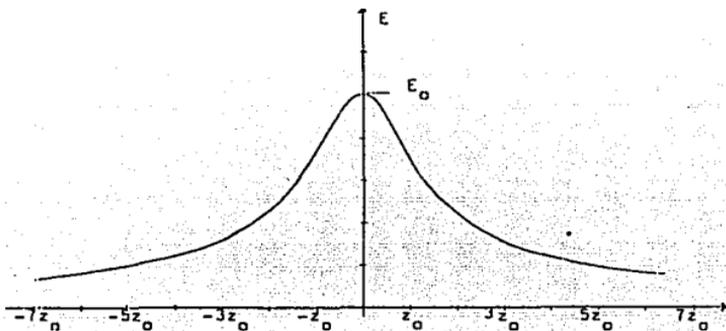
$$E = E_0 \left[\frac{w_0}{w(z)} \right] \exp[-r^2/w^2(z)] \quad 2.3.1$$

i).- Si el valor de r es igual a cero, el exponente que aparece en la ecuación es unitario y la amplitud se simplifica a solo dos términos dados por:

$$E = E_0 \left[\frac{w_0}{w(z)} \right] \quad 2.3.2$$

La magnitud en este caso será inversamente proporcional a $w(z)$. Para un valor de $z = 0$, alcanza un máximo, disminuyendo asintóticamente hacia el eje $E = 0$ para z muy grande o muy

pequeña. Físicamente podríamos decir que si nos situamos en el eje de propagación, observaríamos que la amplitud va decreciendo conforme nos vayamos alejando del origen. Es importante también señalar que $w(z)$ es igual w_0 cuando el haz se halla en el origen, ocasionando que el cociente que aparece en nuestra ecuación, sea unitario. La figura 20 muestra el comportamiento de la amplitud en función de la posición, cuando la distancia r al eje es igual a cero.



La amplitud del campo eléctrico es máximo cuando el haz se halla en el origen e irá disminuyendo asintóticamente conforme nos alejamos de él. Este hecho solo es válido si r es igual a cero.

FIGURA 20

ii).- Si el valor de r es constante, la dependencia de la amplitud del campo con la variable z viene expresada ahora como:

$$E = E_0 \left[\frac{w_0}{w(z)} \right] \exp [-c^2/w^2(z)] \quad 2.3.3$$

La gráfica correspondiente a esta ecuación, se encuentra representada en la figura 21. En ella se muestra que existen dos máximos y un mínimo si se cumple que el valor de r^2 es igual a c^2 , es decir, cuando la distancia al eje de propagación es constante.

Si z es igual a cero se presenta el mínimo de esta función, siendo igual a:

$$E(0) = E_0 \exp [-c^2/w_0^2] \quad 2.3.4$$

De manera análoga, cuando $z_1 = \pm [z_0/w_0] [2c^2 - w_0^2]$ aparecen los dos máximos, dando como resultado en estos puntos, el siguiente valor:

$$E(z_1) = \frac{E_0 w_0}{\sqrt{2} c} \exp (-1/2) \quad 2.3.5$$

Es importante aclarar que el par de máximos solo se presentarán cuando $w_0^2 < 2c^2$. En el caso especial en que $2c^2$ sea igual a w_0^2 , la función solo tendrá un máximo y éste se hallará sobre la línea $z = 0$. Bajo estas circunstancias, la ecuación anterior se convertirá en:

$$E(0) = E_0 \exp (-1/2) \quad 2.3.6$$

Así, si nos situamos en un punto que se encuentre alejado una distancia $r = c$ del eje y viajamos en la dirección de propagación de la onda, partiendo del origen de nuestro sistema,

$$E = E_0 \left[\frac{w_0}{w(z)} \right] \exp \left[-c^2/w^2(z) \right] \quad 2.3.3$$

La gráfica correspondiente a esta ecuación, se encuentra representada en la figura 21. En ella se muestra que existen dos máximos y un mínimo si se cumple que el valor de r^2 es igual a c^2 , es decir, cuando la distancia al eje de propagación es constante.

Si z es igual a cero se presenta el mínimo de esta función, siendo igual a:

$$E(0) = E_0 \exp \left[-c^2/w_0^2 \right] \quad 2.3.4$$

De manera análoga, cuando $z_1 = \frac{c}{w_0} [2c^2 - w_0^2]$ aparecen los dos máximos, dando como resultado en estos puntos, el siguiente valor:

$$E(z_1) = \frac{E_0 w_0}{\sqrt{2} c} \exp (-1/2) \quad 2.3.5$$

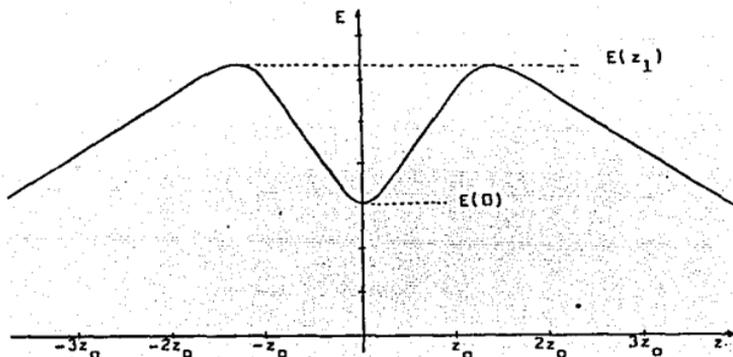
Es importante aclarar que el par de máximos solo se presentarán cuando $w_0^2 < 2c^2$. En el caso especial en que $2c^2$ sea igual a w_0^2 , la función solo tendrá un máximo y éste se hallará sobre la línea $z = 0$. Bajo estas circunstancias, la ecuación anterior se convertirá en:

$$E(0) = E_0 \exp (-1/2) \quad 2.3.6$$

Así, si nos situamos en un punto que se encuentre alejado una distancia $r = c$ del eje y viajamos en la dirección de propagación de la onda, partiendo del origen de nuestro sistema,

observaríamos que la amplitud aumentará desde el lugar donde nos encontremos hasta alcanzar su máximo valor en el punto $z = z_1$. Después de rebasar este sitio, la amplitud disminuirá asintóticamente hasta que en el infinito su valor sea despreciable.

También consideramos conveniente establecer la diferencia que hay entre las ecuaciones 2.3.4 y 2.3.6. La primera de ellas indica el mínimo valor local adquirido para la amplitud del campo en el



Cuando nos situamos a una distancia $r = c$ alejados del origen y nos desplazamos en la dirección de propagación del haz, observaremos que la amplitud del campo crecerá hasta alcanzar un máximo y a partir de ese punto la amplitud - decaerá asintóticamente a cero.

FIGURA 21

punto z igual a cero y además cuando se cumpla : $w_0^2 < 2c^2$. La

segunda ecuación representa el máximo valor que puede asumir la amplitud cuando z sea igual a cero y $2c^2$ se iguale con w_0^2 .

En forma similar, es necesario mencionar que siempre se cumplirá que el valor de la magnitud del campo dada por la ecuación 2.3.2 será mayor o igual que el valor de la amplitud dado por la relación 2.3.4 y en particular del expresado en la ecuación 2.3.3. Esto nos indica que la amplitud del campo, en general, será mayor en el eje de propagación que fuera de él.

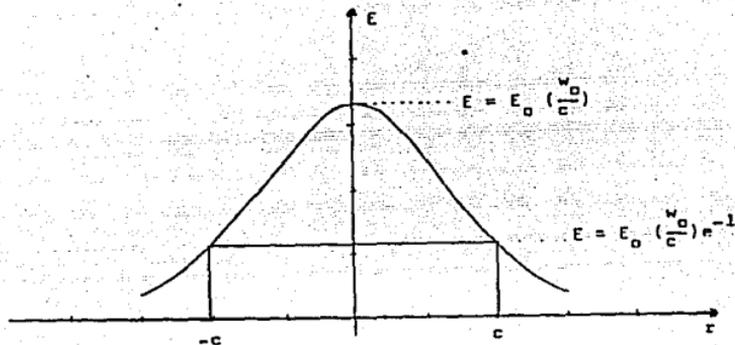
iii).- Para este inciso se tomará el valor de z constante. En estas condiciones, la amplitud del campo solo será función de las coordenadas radiales. Así la ecuación para la amplitud asume la forma siguiente:

$$E = E_0 \left[\frac{w_0}{c_1} \right] \exp (-r^2/c_1^2) \quad 2.3.7$$

donde

$$w(c) = c_1$$

La ecuación anterior nos indica que el decaimiento de la amplitud del campo en la dirección perpendicular a la propagación de la onda, adquiere forma gaussiana, precisamente por el término cuadrático que aparece en el exponente. Así, la amplitud es máxima cuando el valor de r es igual a cero y a una distancia $r = c$, alejado del eje, asume un valor que es proporcional a $(1/e)$. La figura 22 muestra este comportamiento.



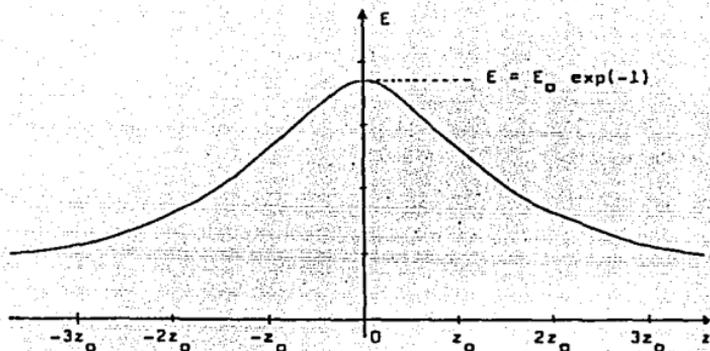
Si z es constante, la amplitud del campo decae en forma gaussiana.

FIGURA 22

iv).- Consideremos en este inciso el caso en el cual r es igual a $w(z)$, es decir, la distancia al eje se iguala con el parámetro dado por la ecuación 2.2.15. En esta situación, la ecuación para la amplitud del campo adquiere la forma siguiente:

$$E = E_0 \left[\frac{w_0}{w(z)} \right] \exp(-1) \quad 2.3.8$$

La gráfica correspondiente a esta relación, viene dibujada en la figura 23. Ella es similar a la gráfica de la figura 20, solo que está afectada por el factor $\exp(-1)$. De aquí se concluye que la amplitud del campo, es menor que en el caso en el que r era igual a cero.



Esta gráfica es muy similar a la mostrada en la figura 20, solo que está afectada por el factor $\exp(-1)$.

FIGURA 23

Para que se cumpla la condición $r = w(z)$ es necesario que $r^2 = w_0^2 [1 + (z/z_0)^2]$. Observando esta condición solo en el plano $y = 0$ y reordenando términos, se llega a:

$$\frac{x^2}{w_0^2} - \frac{z^2}{z_0^2} = 1 \quad 2.3.9$$

que representa una hipérbola centrada en el origen, con asíntotas cuyas pendientes son iguales a: $m = \pm \frac{\lambda}{\pi w_0}$.

La figura 24 representa la hipérbola dada por la ecuación anterior. En esta figura, el punto $\exp(-1)$ de la amplitud del

campo, es dibujado como una función de la coordenada z . Es decir, $w(z)$ representa la distancia que existe del eje al campo cuando su amplitud es igual a un factor $(1/e)$ de su máximo valor.

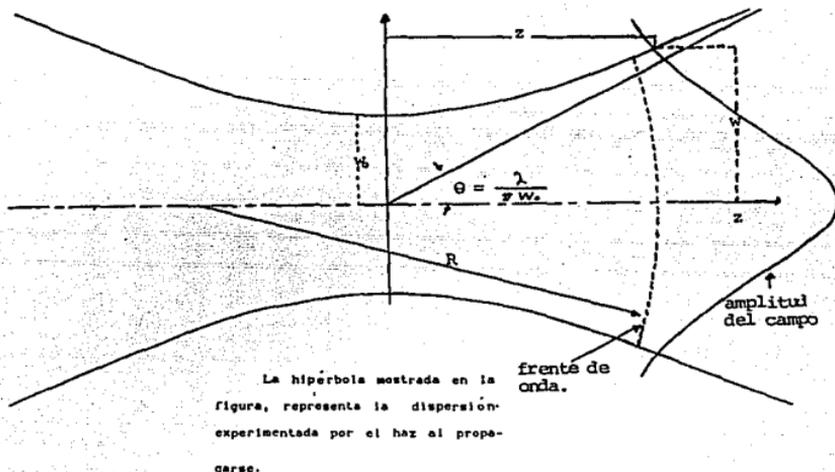


FIGURA 24

Así, conforme el rayo se propague, el valor de $w(z)$ será cada vez más grande, ocasionando con ello que el punto $(1/e)$ se vaya alejando cada vez más.

b).- La fase ϕ de la onda en la dirección de propagación, está dada por la ecuación 2.2.18, donde k es el número de onda. Más adelante veremos que esta ecuación es muy útil para calcular el cambio de fase experimentado por una haz gaussiano al viajar dentro de un resonador. La fase que tengan estos haces no se alterará en el momento de reflejarse en alguno de los espejos que forman el resonador; solo cambiará su fase cuando

víajen de un espejo a otro, ya que este factor depende de la posición.

Si en ϕ tomamos solo el término trigonométrico, éste adquirirá un valor nulo cuando el haz se halle en el origen. Por otra parte, el ángulo dado por $\theta = \arctan(z/z_0)$ se igualará con $\pi/2$ cuando el valor de z tienda a infinito. Este hecho es posible cuando el haz se propague indefinidamente.

Finalmente podemos decir que θ será igual a $\pi/4$ cuando el haz se encuentre a una distancia z_0 del origen.

c).- El valor $R(z)$ dado por la ecuación 2.2.16, expresa el radio de curvatura del frente de onda que se intercepta con el eje z . Este radio es muy parecido al radio del frente de onda esférico.

Para demostrar que efectivamente los frentes de onda del haz gaussiano no son planos sino que son similares a los frentes de onda esféricos, es necesario escribir la ecuación 2.2.17 en forma diferente:

$$E = E_0 \frac{w_0}{w} \exp(-r^2/w^2) \exp(i \arctan(z/z_0)) \exp(-ik(z+r^2/2R(z)))$$

Por otra parte, una onda esférica es representada por medio de un relación de la forma:

$$E = 1/\rho \exp(-ik\rho) \quad 2.3.10$$

donde:

$$\rho = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$$

En una vecindad alrededor del eje z y para valores de r

mucho menores que z , es posible expresar a ρ por medio de una serie dada por:

$$\rho = z(1 + r^2/z^2)^{1/2} = z(1 + r^2/2z^2 + \dots) \quad 2.3.11$$

Si la serie contiene solo dos términos, entonces ρ es aproximadamente igual a:

$$\rho \approx z + r^2/2z = z + r^2/2\rho \quad 2.3.12$$

donde:

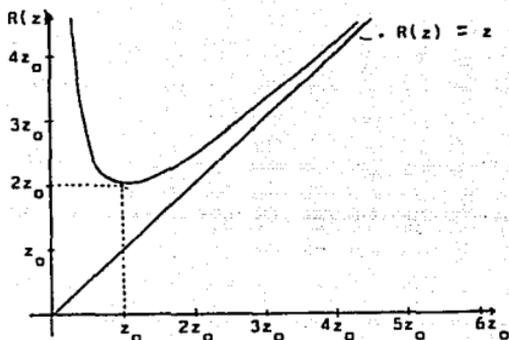
$$\rho \approx z$$

Sustituyendo la ecuación 2.3.12 en la ecuación 2.3.10, la onda esférica se expresará ahora como:

$$E \approx 1/\rho \exp(-ik(z + r^2/2\rho)) \quad 2.3.13$$

Al comparar esta expresión con el último factor de la ecuación 2.2.17, vemos que ambas expresiones presentan la misma forma funcional. A consecuencia de ello es posible concluir que el frente de onda del haz gaussiano es muy similar a un frente de onda esférico, para valores de z mucho mayores que r .

Sin embargo, para un haz gaussiano, el centro del radio de curvatura no permanece en un solo lugar, sino que cambia para los diferentes valores que tenga z . La posición del centro de curvatura se puede calcular por medio de la relación: $C(z) = -z_0^2/z$. Cuando z tiende a infinito, el centro de curvatura coincide con el origen y el radio también tenderá a infinito. Si z tiende a cero, la posición del centro de curvatura tenderá a infinito, al igual que el valor del radio. En el caso que z sea igual a z_0 , la posición del centro de curvatura coincidirá con este valor y el radio alcanzará su mínimo valor siendo igual a $2z_0$. A la distancia z_0 se le conoce como " distancia de Rayleigh ". La figura 25 muestra la dependencia del radio de curvatura $R(z)$ y el centro $C(z)$ con la posición sobre el eje de propagación.



La figura muestra la dependencia del radio y del centro de curvatura del frente de onda en función de la posición z . Para z igual con z_0 el radio alcanza su mínimo valor.

FIGURA 25

El factor que se encuentra contenido en la ecuación 2.2.14, dado por $\exp[-ikr^2/2R(z)]$ es conocido con el nombre de factor de fase radial, que indica que para un plano situado en una posición constante, no necesariamente existirá una superficie de igual fase ya que también depende de la distancia r al eje. Sin embargo, si uno se desplaza sobre el eje de propagación, el valor de r será, por consiguiente, igual a cero, desapareciendo el factor de fase radial. Esto significa que el único factor que juega un papel importante cuando nos movemos sobre el eje de propagación, es el factor de fase longitudinal.

Para resumir todo lo expuesto anteriormente, permítanos reescribir la ecuación 2.2.17 y asignar brevemente una interpretación física a cada término.

$$E(x, y, z)$$

Campo Eléctrico.

||

$$E_0$$

Amplitud del Campo Eléctrico en el origen

X

$$\left[\frac{w_0}{w(z)} \right] \exp[-r^2/w(z)]$$

Dependencia de la Amplitud con las tres coordenadas.

X

$$\exp[-i(kz - \arctan(z/z_0))]$$

Factor de fase Longitudinal.

X

$$\exp[-r^2k/2R(z)]$$

Factor de fase Radial

2.4 HACES GAUSSIANOS CON MODOS DE ORDEN SUPERIOR.

Al considerar un láser de gas como el mostrado en la figura 26, vemos que existen amplias razones por las cuales el láser no oscila en su modo fundamental. Por ejemplo, supongamos que la ventana tiene una capa de basura cerca del eje, o que en el espejo de la derecha se ha practicado un orificio por el cuál la radiación saldrá de la cavidad. Si el Campo Eléctrico E que oscila en este resonador, está descrito por la ecuación 2.2.5 se verá que existen considerables pérdidas por dispersión debidas a la capa de basura o al orificio. Por consecuencia se deben

considerar otro tipo de posibilidades que no pueden ser descritas por la ecuación 2.2.17.

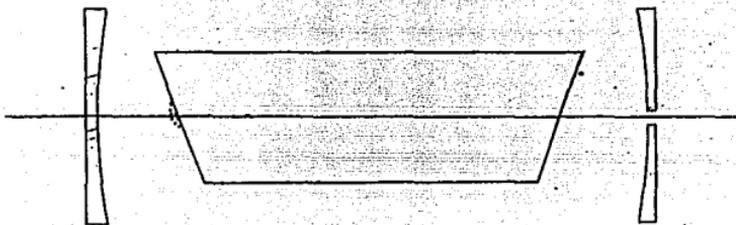


FIGURA 26

Uno puede escoger coordenadas cilíndricas para hacer variaciones en ϕ o coordenadas cartesianas para hacer variaciones en x o en y . Se describen diferentes modos para cada sistema de coordenadas, para este ejemplo que se muestra en la figura, y para más láseres, el sistema cartesiano es el más apropiado para describirlo. La razón es que el orificio o la capa de basura, discrimina modos puramente cilíndricos.

Para estudiar los modos de orden superior, debemos darnos cuenta que la solución a la ecuación diferencial 2.2.7 dada por la ecuación 2.2.17, no es la única solución; hay más soluciones con propiedades similares. Estas soluciones forman una serie ortogonal de funciones que son llamados "Haces Gaussianos con Modos de Orden Superior". Cada distribución arbitraria puede ser expresada en términos de estos modos.

a).- MODOS DE ORDEN SUPERIOR EN COORDENADAS CARTESIANAS.

Para sistemas con geometría rectangular uno puede proponer una solución a la ecuación diferencial 2.2.7 (en donde el valor de k_2 se considera igual a cero por tratarse de un medio homogéneo), de la forma:

$$\psi = g(x') h(y') \exp \left[-i(P(z) + \frac{k r^2}{2 q(z)}) \right] \quad 2.4.1$$

donde g es una función de $x' = x/w(z)$ y h es función de $y' = y/w(z)$. Sustituyendo la ecuación que hemos propuesto en la ecuación diferencial 2.2.7, se llega a :

$$\begin{aligned} & \frac{g''(x')}{g(x')} - \frac{2ikx w(z)}{q(z)} \cdot \frac{g'(x')}{g(x')} + 2ikx w'(z) \frac{g'(x')}{g(x')} \\ + & \frac{h''(y')}{h(y')} - \frac{2iky w(z)}{q(z)} \cdot \frac{h'(y')}{h(y')} + 2iky w'(z) \frac{h'(y')}{h(y')} \\ = & 2k w^2(z) \left[\frac{i}{q(z)} + P'(z) \right] \quad 2.4.2 \end{aligned}$$

donde hemos supuesto que el valor de $q'(z)$ es igual a 1 y además se han pasado hacia el lado derecho de la igualdad todos los términos que solo dependen de z .

Si el valor de z permanece constante, los dos términos del lado izquierdo de la ecuación anterior también permanecerán constantes. Este hecho nos permite asignarle un valor constante a cada término del lado derecho, obteniendo así el siguiente par de ecuaciones diferenciales:

$$g''(x') + 2ik x g'(x') \left[w'(z) - \frac{w(z)}{q(z)} \right] + 4m g(x') = 0$$

2.4.3

$$h''(y') + 2ik y h'(y') \left[w'(z) - \frac{w(z)}{q(z)} \right] + 4n h(y') = 0$$

y los términos que solo dependen de z se agrupan en una sola ecuación de la forma:

$$2k w^2(z) \left[\frac{i}{q(z)} + P'(z) \right] + 4(m+n) = 0 \quad 2.4.4$$

donde m y n son enteros positivos.

Los términos que solo dependen de z y se encuentren como factores de la primera derivada de las funciones que aparecen en las ecuaciones 2.4.3 se simplifican a un valor constante de la forma:

$$2ik w(z) w'(z) - \frac{2ik w^2(z)}{q(z)} = -4$$

Así, las ecuaciones diferenciales se convierten en la forma:

$$g''(x') - 4 x' g'(x') + 4 m g(x') = 0$$

2.4.5

$$h''(y') - 4 y' h'(y') + 4 n h(y') = 0$$

Las ecuaciones 2.4.5 son similares a las ecuaciones diferenciales que se resuelven por medio de los polinomios de Hermite, a excepción de que el factor -4 es igual a -2 . Para poder cambiar este factor, simplemente hacemos un cambio de variable en el que x' sea igual a $\sqrt{2} x / w(z)$ y y' igual a $\sqrt{2} y / w(z)$, obteniendo así las ecuaciones deseadas.

Por consecuencia, las funciones $g'(x)$ y $h(y')$ deberán convertirse en los Polinomios de Hermite, para poder ser soluciones de las ecuaciones diferenciales antes mencionadas. El orden m y n de cada familia de polinomios se le conoce con el nombre de "Número Modal".

La función generadora de los polinomios de Hermite se expresa de la siguiente manera:

$$g(x') = H_m(x') = (-1)^m e^{x'^2} \frac{d^m e^{-x'^2}}{d x'^m} \quad 2.4.6$$

Como ejemplo, enunciamos algunos polinomios de Hermite que han sido obtenidos por medio de la función generadora:

$$H_0(x') = 1$$

$$H_1(x') = 2 x'$$

$$H_2(x') = 4 x'^2 - 2$$

$$H_3(x') = 8 x'^3 - 12 x'$$

Para la función $h(y')$ la función generadora es idéntica y los polinomios resultantes, por consecuencia, también resultarán idénticos, solo que en función de otra variable.

Por otra parte, observamos que $q'(z)$ es igual a uno, es decir, su valor no se alteró para haces cuyos modos son de orden superior. De aquí concluimos que el valor de $q(z)$ no depende del orden en que se halle el haz gaussiano.

Al pasar todos los sumandos que se encuentran en el lado derecho de la igualdad 2.4.4, a excepción del término $P'(z)$, la nueva expresión queda de la siguiente forma:

$$P'(z) = \frac{-i}{q(z)} - \frac{2(m+n)}{k w^2(z)}$$

e integrando con respecto de z , se tiene:

$$P(z) = i \ln[1 + (z/z_0)]^{1/2} - (m+n+1) \arctan(z/z_0) \quad 2.4.7$$

Notamos en esta expresión que, como no cambió el valor de $q(z)$, los valores de $w(z)$ y $R(z)$ igualmente no cambiaron. No sucede lo mismo para el factor de fase longitudinal ya que, además de depender de la posición sobre el eje, depende de los números modales m y n . Este factor queda expresado ahora como:

$$\exp(-i\phi) = \exp[-i(kz - (m+n+1) \arctan(z/z_0))] \quad 2.4.8$$

la expresión nos muestra que la fase cambia para cada número modal. En un valor particular de z , la fase es diferente para números modales diferentes.

Al agrupar todos los resultados obtenidos en el análisis realizado, el campo eléctrico queda expresado ahora como:

$$E = E_0 H_m(x') H_n(y') \left[\frac{w_0}{w(z)} \right] \exp \left[-i \left(\phi - \frac{k r^2}{2} \right) \right] \quad 2.4.9$$

que es la expresión matemática más general que describe a los haces gaussianos de orden superior en coordenadas cartesianas.

En el esquema mostrado en la figura 27 se observa el comportamiento del campo eléctrico y su respectiva intensidad para algunos números modales. Note que, tanto el campo como la intensidad, se aproximan a cero cuando los valores de x o y tienden a más o menos infinito. Sin embargo, para valores muy

cercanos al origen, estas funciones se ven afectadas considerablemente por los polinomios de Hermite, ocasionando que se igualen a cero para un número finito de veces. El número de veces que el campo o la intensidad se hacen cero, es igual al número modal asociado al polinomio, coincidiendo con los cruces efectuados por los mismos. En la figura 28 se muestran fotografías de patrones de haces con diferentes números modales. Para la dirección x' , los puntos que aparezcan en un haz se calculan con solo aplicar la fórmula $(m + 1)$ y para la dirección y' la fórmula es $(n + 1)$. Conjugando ambos casos, es decir, los puntos que aparezcan en ambas direcciones, coincidirá con el producto $(m + 1)(n + 1)$.

De la isma forma como se hizo en la sección anterior, resumimos todo lo expuesto anteriormente por medio de una sola ecuación, asgnándole una interpretación a cada uno de los términos.

$E(x, y, z)$

Campo Eléctrico.

| |

E_0

Amplitud del Campo
Eléctrico en el origen.

X

$$\left[\frac{w_0}{w(z)} \right] H_m(x') H_n(y') \exp[-r^2/w^2(z)]$$

Variación de la Amplitud del
Campo con la posición.

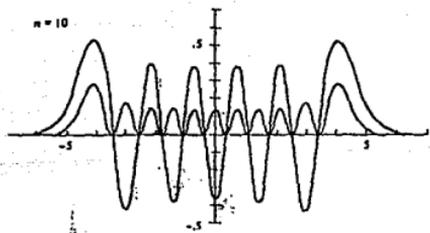
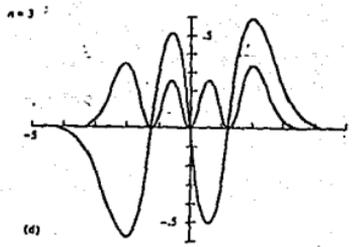
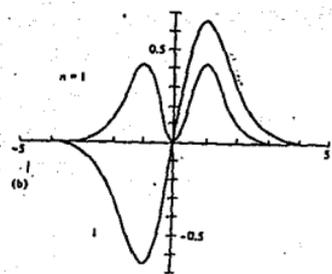
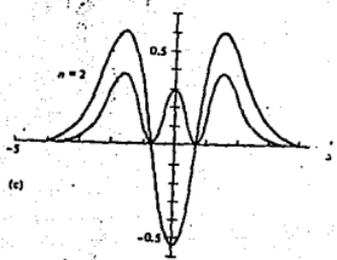
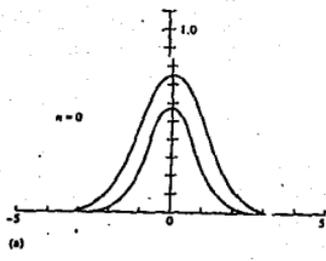
X

$\exp[-i(kz - (m + n + 1)\arctan(z/z_0))]$ Factor de fase Longitudinal.

X

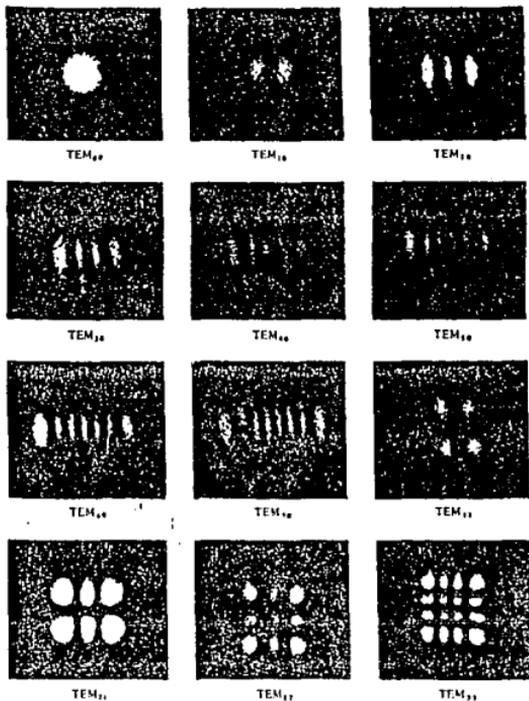
$$\exp[-ikr^2/2R(z)]$$

Factor de fase Radial.



La figura muestra la gráfica de la distribución de la amplitud y la intensidad del Campo Eléctrico para algunos modos de orden superior.

FIGURA 27



La fotografía muestra algunos
 haces de orden superior. Observe
 que el número de puntos es igual
 al producto $(m + 1)(n + 1)$.

FIGURA 28

ESTA TESIS NO DEBE SALIR DE LA BIBLIOTECA

b).- MODOS DE ORDEN SUPERIOR EN COORDENADAS CILINDRICAS.

Para sistemas con una geometría cilíndrica, uno puede proponer una solución a la ecuación diferencial 2.2.7 (donde k_2 es igual a cero) de la forma:

$$\psi(r, \theta, z) = \left[\frac{\sqrt{2} r}{w(z)} \right]^l g(r') \exp \left[-i \left(P(z) + \frac{k r^2}{2q(z)} + l\theta \right) \right] \quad 2.4.10$$

en donde :

$$r^2 = x^2 + y^2; \quad \theta = \arctan(y/x) \quad \text{Y} \quad r' = \frac{2 r^2}{w^2(z)}$$

Introduciendo la expresión 2.4.10 en la ecuación diferencial antes señalada, multiplicando por $[w^2(z)/g(r')] [w(z)/\sqrt{2}r]^l$ y suponiendo de nuevo que $q'(z) = 1$, obtenemos el siguiente resultado:

$$\frac{8 r'}{g(r')} g''(r') + \frac{1}{g(r')} g'(r') [8l + 8 - 4ikw(z) \left[\frac{w(z)}{q(z)} - w'(z) \right] r'] - 2ikw(z) \left[\frac{1}{q(z)} \frac{w(z)}{r'} - 1 \frac{w'(z)}{q(z)} + \frac{w(z)}{q(z)} \right] - 2kP'(z) w^2(z) = 0 \quad 2.4.11$$

Observemos que el valor de $q(z)$ no ha cambiado, es decir, es el mismo parámetro que en el caso fundamental. Por tal motivo, podemos afirmar que tampoco han cambiado los valores del radio de curvatura y de la mancha producida por el haz. En estas circunstancias, la expresión encerrada dentro del paréntesis que multiplica a la primera derivada de la función g se transformará en un valor dado por:

$$-2ikw(z) \left[\frac{w(z)}{q(z)} - w'(z) \right] = -4$$

De esta manera, la ecuación diferencial 2.4.11 se simplificará a una expresión más pequeña de la forma:

$$\frac{8r'}{g(r')} g''(r') + \frac{1}{g(r')} g'(r') [8l + 8 - 8r'] = 2k P'(z) w^2(z) + 2ik w(z) \left[\frac{1}{q(z)} \frac{w(z)}{q(z)} - w'(z) \right] + \frac{w(z)}{q(z)} \quad 2.4.12$$

El lado derecho de la ecuación anterior depende exclusivamente de z y, si ésta es constante, el lado izquierdo también lo será, garantizando con ello que cada término se iguale con una constante arbitraria, obteniéndose así:

$$r' g''(r') + (1 + l - r') g'(r') + s g(r') = 0 \quad 2.4.13$$

en donde se ha multiplicado el lado izquierdo de la ecuación 2.4.12 por $g(r')/8$ y se igualó con la constante $8s$.

La ecuación 2.4.13 es similar a la ecuación diferencial que se resuelve por medio de los Polinomios Asociados de Lagerre. Por tal motivo, la función $g(r')$ deberá igualarse con este tipo de Polinomios para que la ecuación diferencial tenga solución.

$$g(r') = L_S^l(r') = L_S^l\left(\frac{2r^2}{w^2(z)}\right)$$

Se puede desarrollar cualquier polinomio Asociado de Laguerre por medio de la función generadora siguiente:

$$L_S^l(r') = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(s+1)!}{(s-m)! (l+m)! m!}$$

Algunos ejemplos de esta clase de polinomios son:

$$L_0^1(r') = 1$$

$$L_1^1(r') = 1 + 1 - r'$$

$$L_2^1(r') = \frac{1}{2} (1 + 1)(1 + 2) - (1 + 2) r' + \frac{1}{2} r'^2$$

Regresando a la ecuación 2.4.12, igualando con la misma constante el lado derecho de la igualdad y despejando a $P'(z)$ se llega al siguiente resultado:

$$P'(z) = \frac{-i}{q(z)} - \frac{2(2s + 1)}{k w^2(z)} \quad 2.4.14$$

donde

$$\frac{w^2(z)}{q(z)} - w'(z) w(z) = -\frac{2i}{k}$$

e integrando a $P'(z)$ con respecto de la misma variable. se tiene:

$$P(z) = i \ln[1 + (z/z_0)^2]^{1/2} - (2s + 1 + 1) \arctan(z/z_0) \quad 2.4.15$$

Como no ha cambiado el valor de $q(z)$, los valores del radio de curvatura del frente de onda y de la mancha igualmente no cambiaron. No sucede lo mismo para el factor de fase longitudinal, ya que además de depender del valor de z , depende del número modal radial s y del número modal angular l . Este factor queda expresado ahora como:

$$\exp(-i\phi) = \exp[-i(kz - (2s + 1 + 1) \arctan(z/z_0))] \quad 2.4.16$$

La igualdad anterior nos muestra que la velocidad de fase cambia al cambiar los números modales. Cuando estos números son iguales a cero, la igualdad toma la forma correspondiente al factor de fase longitudinal para un haz gaussiano fundamental.

De manera análoga podemos decir que el factor de fase radial además de depender de la posición, también depende de la suma del producto del ángulo θ multiplicado por el número modal l . La siguiente relación representa este hecho:

$$\exp[-i(kr^2/2R(z) + l\theta)] \quad 2.4.17$$

Si z es constante, no necesariamente afirmaremos que existen superficies de igual fase, ya que el factor también depende de la distancia r al eje y del ángulo θ .

Agrupando todos los resultados obtenidos en este análisis de haces gaussianos con modos de orden superior en coordenadas cilíndricas, el campo eléctrico queda expresado en función de los Polinomios, junto con otros factores, de la siguiente forma:

$$E = E_0 \left[\frac{w_0}{w(z)} \right] r^{1/2} L_l^1(r') \exp[-i(\phi + \frac{kr^2}{2(z)} + l\theta)] \quad 2.4.18$$

que es la expresión matemática más general que describe a los haces gaussianos en este tipo de geometría.

Resumiremos todo lo expuesto por medio de una sola ecuación asignándole una breve interpretación física a cada término:

$E(\bar{r})$

Campo Eléctrico.

| |

E_0

Amplitud del Campo Eléctrico en
el origen.

X

$\left[\frac{w_0}{w(z)} \right] r'^{1/2} L_G^1(r') \exp[r^2/w^2(z)]$ Variación de la Amplitud del
Campo con la posición.

X

$\exp[-i(kz - (2s + 1 + 1) \arctan(z/z_0))]$ Factor de fase longitudinal.

X

$\exp[-i(kr^2/2R(z) + 1\theta)]$ Factor de fase radial.

CAPITULO III

LEY A B C D

3.1.- La ecuación más general que permite estudiar con detalle los cambios experimentados por el parámetro complejo cuando un haz gaussiano ha cruzado un determinado sistema óptico, es la llamada " Ley ABCD ". En este capítulo nos encargaremos de deducirla y aplicarla en algunos ejemplos sencillos que muestren su utilidad.

La Ley que hemos de analizar es una ecuación que relaciona el valor que tenga el parámetro complejo antes de entrar al sistema óptico y el valor que asuma después de salir. Los factores que están incluidos en esta ecuación también contemplan a los elementos de la matriz de transferencia correspondiente. La idea de la demostración es analizar primeramente cómo se comporta una onda esférica cuando cruza un sistema óptico y en base a esto extrapolar los resultados a una onda gaussiana.

Finalmente debemos señalar que las conclusiones llevadas a cabo, serán válidas para haces gaussianos de todos los órdenes ya que el parámetro complejo es el mismo para cualquier orden.

3.2.- DEDUCCION Y APLICACION DE LA LEY ABCD PARA UNA ONDA ESFERICA.

La propagación de la luz a través de una estructura óptica, es mucho mejor descrita en términos de los frentes de onda. Si considermos a la luz como ondas que emergen de un punto, veremos que las superficies de igual fase se expanden adquiriendo radios de curvatura cada vez mayores. Además sabemos que, si en la

trayectoria seguida por la onda colocamos una lente, podemos hacer que cambie el radio de curvatura del mismo frente. De igual forma podemos decir que utilizando lentes apropiadas y colocándolas de manera conveniente, podremos lograr que la luz se colime. Y si en vez de introducir cuerpos transparentes en la trayectoria seguida por la onda, introducimos cuerpos que absorban o reflejen la luz, entonces los frentes de onda se distorsionarán provocando efectos de difracción.

Hemos dicho que es mejor considerar a la luz no como un simple rayo, sino por un conjunto de rayos que emergen de un mismo punto. En la figura mostramos un haz divergiendo de un punto objeto O , situado a una distancia R_1 del plano de referencia RP_1 . Para todos los elementos de este haz, por considerarlos paraxiales, la razón de la altura Y_1 y el ángulo V_1 que formen es aproximadamente igual a:

$$R_1 = \frac{Y_1}{V_1} \quad 3.2.1$$

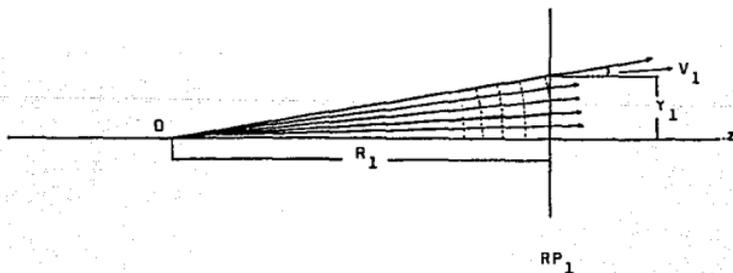


FIGURA 29

En base a lo anterior, consideremos ahora lo que le sucedería al valor de R_1 cuando el haz se ha propagado a través de un sistema óptico. Utilizando la matriz de transferencia, se puede concluir que:

$$Y_2 = A Y_1 + B V_1$$

y

3.2.2

$$V_2 = C Y_1 + D V_1$$

Dividiendo la primera ecuación entre la segunda y considerando el hecho de que $R_1 = Y_1/V_1$ y que $R_2 = Y_2/V_2$, se obtiene:

$$R_2 = \frac{A R_1 + B}{C R_1 + D} \quad 3.2.3$$

Esta última ecuación calcula el valor del radio de curvatura del frente de onda después de cruzar al sistema óptico, en función de los elementos de la matriz de transferencia y del valor del radio de curvatura antes de cruzarlo. A esta ecuación se le conoce con el nombre de " Ley ABCD " correspondiente al parámetro real.

Así, para una onda que viaja una distancia z en el vacío, su matriz de transferencia está dada por la ecuación 1.2. . Aplicando la Ley antes mencionada, resulta que ambos radios se relacionan en la forma siguiente:

$$R_2 = R_1 + z \quad 3.2.4$$

Cuyo resultado concuerda con las leyes de la óptica geométrica.

De manera similar, se puede encontrar una fórmula que calcule el cambio sufrido por el radio de curvatura cuando cruce una lente delgada. La matriz de transferencia asociada a ella está

expresada en la ecuación 1.2.4 .La sustitución de sus elementos en la ley nos da como resultado:

$$1/R_2 = 1/R_1 - 1/f \quad 3.2.5$$

Se puede aplicar esta ley a cualquier tipo de estructura óptica con solo conocer la matriz de transferencia y los parámetros de entrada que tenga el haz antes de cruzar el plano de referencia RP_1 .

4.3.- DEDUCCION Y APLICACION DE LA LEY ABCD PARA EL PARAMETRO DE CURVATURA COMPLEJO.

Como sabemos por el capítulo anterior, un haz gaussiano se caracteriza esencialmente por dos parámetros: a).- $w(z)$ que es el radio de la mancha formada por el haz y representa la distancia, en dirección radial, desde el eje de propagación hasta un punto donde la amplitud del campo es $(1/e)$ menor que su máximo valor y b).- $R(z)$ que es el radio de curvatura del frente de onda que, como se ha mencionado anteriormente, es muy similar al radio de una onda esférica.

Los dos parámetros se combinan en un solo término llamado " Parámetro de curvatura complejo " cuya expresión está dada por:

$$1/q(z) = 1/R(z) - i\lambda/\pi w^2(z)$$

Por otra parte, si sustituimos los valores de $w^2(z)$ y $R(z)$ dados por las ecuaciones 2.2.15 y 2.2.16 respectivamente, en la ecuación anterior, se verifica fácilmente que:

$$q(z) = q_0 + z \quad 3.2.5$$

donde

$$q_0 = i\pi w_0^2/\lambda$$

De esta ecuación se concluye que el valor de $q(z)$ se comporta de manera análoga a como cambia el radio de curvatura de

una onda esférica, después que el haz ha viajado una distancia determinada en el vacío.

Por otra parte, la refracción que sufre un haz gaussiano cuando atraviesa una lente delgada debe ser descrita por medio de cuatro ecuaciones:

$$1/q_1 = 1/R_1 - i\lambda/\pi w_1^2$$

$$1/q_2 = 1/R_2 - i\lambda/\pi w_2^2$$

$$1/R_2 = 1/R_1 - 1/f$$

$$w_2 = w_1$$

Las dos primeras ecuaciones representan los parámetros complejos del haz antes y después de cruzar la lente, respectivamente. La tercera ecuación describe cómo cambia el radio de curvatura del frente de onda del haz cuando cruza la lente. Observe que esta ecuación es idéntica a la ecuación 4.2.5. La cuarta igualdad nos indica que el radio de la mancha no cambia cuando el haz cruza la lente delgada. Este hecho es muy importante ya que nos muestra que radio de la mancha no se altera al cruzar una lente de este tipo.

Combinando las cuatro ecuaciones anteriores encontramos que:

$$1/q_2 = 1/q_1 - 1/f \quad 3.2.6$$

Esta última relación nos indica que el parámetro complejo se comporta de manera similar a como lo hace el radio de curvatura de una onda esférica al cruzar una lente delgada. De toda esta analogía se puede pensar que la Ley ABCD que se aplica al radio de la onda esférica es aplicable de manera similar al parámetro complejo, es decir:

$$q_2 = \frac{A q_1 + B}{C q_1 + D}$$

donde q_1 y q_2 son los valores del parámetro complejo antes y después de cruzar el sistema óptico, respectivamente.

Como ejemplo, expresemos el valor de q_2 en términos de q_1 y de los valores de los elementos de la matriz de transferencia para el sistema mostrado en la figura. Como se puede observar en la figura, el sistema consta del recorrido de una distancia d_1 en el vacío, pasando después por una lente delgada de longitud focal f y por último del recorrido de una nueva distancia d_2 también en el vacío.

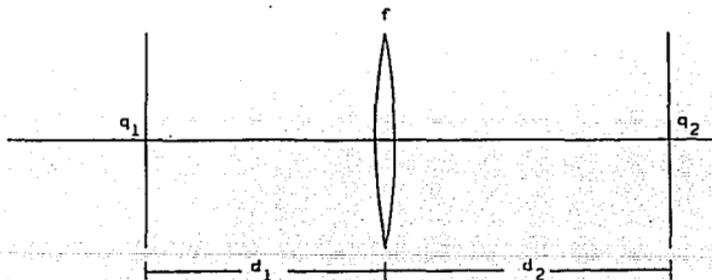


FIGURA 29

La matriz de transferencia se obtiene de la simple multiplicación de las matrices que constituyen cada elemento del sistema. Sustituyendo el resultado de esa multiplicación en la ecuación representativa de la Ley ABCD, se obtiene:

$$q_2 = \frac{q_1(1 - d_2/f) + d_2(1 - d_1/f) + d_1}{1 - d_1/f - q_1 f} \quad 3.2.7$$

Con solo conocer el parámetro q_1 y haciendo uso de la ecuación anterior, será posible conocer fácilmente el valor de q_2 . Estructuras ópticas más complejas pueden ser tratadas de manera análoga haciendo uso de esta Ley. En el próximo capítulo se hará uso de ella y del criterio de autoconsistencia para el estudio de los Resonadores Ópticos, que son las cavidades donde se generan los haces láser.

CAPITULO IV

RESONADORES OPTICOS

4.1.- INTRODUCCION:

El Resonador Optico más comunmente usado está compuesto por dos espejos esféricos colocados uno frente a otro. La estabilidad de tales cavidades ha sido discutida en el primer capítulo en términos de la aproximación paraxial. Para estudiar los llamados Modos de los Resonadores Opticos, uno debe tomar en cuenta su naturaleza ondulatoria y esto es hecho en este capítulo por medio del análisis ondulatorio del haz gaussiano cuando viaja entre los espejos del resonador.

Un Modo de un Resonador Optico se define como un Campo con una configuración " Autoconsistente ". Es decir, si un Modo puede ser representado por una onda que se propaga de un espejo a otro dentro de un resonador, entonces los parámetros que describen al haz deben ser los mismos después que éste ha completado justamente una vuelta a la cavidad. Esta condición es usada para conocer los valores que asuman los radios de curvatura tanto del frente de onda así como de la mancha producida por el haz. También debemos mencionar que una onda que viaja en ambas direcciones dentro de un resonador representa un Modo y, por consiguiente, formará un patrón de onda estacionario.

4.2.- APLICACION DE LA LEY ABCD Y DEL CRITERIO DE AUTOCONSISTENCIA A LOS RESONADORES OPTICOS.

Como se mencionó en la sección anterior, un Modo de un Resonador Optico es un Campo con una configuración autoconsistente, es decir, es una distribución del Campo que se reproduce a sí mismo en forma y en fase después de que el haz ha completado una vuelta al Resonador. Esta definición es de mucha importancia ya que se aplica por igual a Resonadores de baja frecuencia, Circuitos LC, a cavidades que generan microondas y a Cavidades Opticas.

Nosotros podemos fácilmente encontrar los Modos característicos de una Cavidad Optica por medio del uso de las matrices de transferencia, de la Ley ABCD y del criterio de Autoconsistencia. Para ello, suponga que se tiene una cavidad arbitraria y que q_1 es el valor del parámetro que describe al haz en un punto fijo t dentro de la cavidad. Además suponga que se conocen los elementos A, B, C y D de la matriz de transferencia que corresponde a un viaje completo dentro de la cavidad. Si q_2 es el parámetro que representa al haz después del recorrido completo al Resonador, entonces, por la Ley ABCD se tiene que ambos parámetros se relacionan de la siguiente forma:

$$q_2 = \frac{A q_1 + B}{C q_1 + D}$$

El criterio de Autoconsistencia nos dice que q_2 es igual a q_1 , es decir, ambos parámetros son iguales. Aplicando esta condición, la ecuación anterior se transforma en una ecuación cuadrática de la forma:

$$\frac{B}{q^2} + \frac{(A - D)}{q} - C = 0 \quad 4.2.1$$

Resolviendo por la fórmula general la ecuación 4.2.1, observamos que los valores para los cuales $1/q$ cumplen esta igualdad son:

$$\frac{1}{q} = -\frac{(A - D)}{2B} \pm \frac{(1 - \cos^2 \theta)^{1/2}}{B}$$

Comparando la ecuación anterior con la ecuación e igualando partes reales e imaginarias, llegamos a la siguiente conclusión:

$$R(t) = -\frac{2B}{A - D} \quad 4.2.2$$

y

$$w^2(t) = \frac{\lambda B}{\pi \sin \theta} \quad 4.2.3$$

donde:

$$\sin^2 \theta = 1 - [(A + D)/2]^2$$

La primera ecuación nos proporciona el valor del radio de curvatura del frente de onda del haz exactamente en el punto t dentro de la cavidad. Observe que este valor tendería a infinito si el valor de A es muy similar al que tenga D . Bajo estas condiciones, el frente de onda sería plano. Note además que la posición del punto t , que es el punto donde ha comenzado y finalizado el ciclo, se toma con respecto al punto $z = 0$. Recuerde que ese punto se ubica, por definición, en donde se localiza el mínimo valor para el radio de la mancha, que es w_0 .

La segunda ecuación representa el valor del radio de la mancha en el mismo punto. Como en el caso anterior, este valor tendería a infinito si $\sin \theta$ se asemeja mucho a cero, es decir, si el valor de θ es muy similar a un múltiplo de π . Note también que el elemento B de la matriz no puede asumir valores nulos, ya que $w(t)$ en ningún caso puede ser igual a cero.

Del análisis hecho a estas ecuaciones se concluye que la cavidad donde se genere el láser debe ser estrictamente estable porque la teoría que presentamos no considera a las cavidades inestables y a las condicionalmente estables.

Apoyados por las ecuaciones 2.2.15, 2.2.16 y por la relación $\lambda^2 z R(z) = \pi^2 w_0^2 w^2(z)$, podremos expresar a w_0 y a la posición t en función de $w(t)$ y $R(t)$, es decir:

$$w_0^2 = \frac{w^2(t)}{1 - (\pi w^2(t)/\lambda R(t))^2} \quad 4.2.4$$

$$t = \frac{R(t)}{1 - (\lambda R(t)/\pi w^2(t))^2} \quad 4.2.5$$

Sustituyendo las ecuaciones 5.2.2 y 5.2.3 en las dos expresiones anteriores, obtendremos a w_0 y a t en función de los elementos de la matriz de transferencia.

$$w_0^2 = - \frac{\lambda \sin \theta}{\pi C} \quad 4.2.6$$

$$t = \frac{A - D}{2 C} \quad 4.2.7$$

En la primera relación debemos observar que independientemente del punto t de partida que se escoja dentro de la cavidad, el valor de w_0 y del término trigonométrico serán constantes y, por consecuencia, el elemento C de la matriz tampoco variará. Es importante recalcar que este último elemento es siempre el mismo, no importando el punto de partida dentro de la cavidad. Así, los elementos A y D pueden variar en matrices que representen diferentes puntos dentro de ella, pero la suma de estos términos no lo hará ya que se trata del mismo resonador.

En la segunda igualdad vemos que si el valor de D coincide con el de A , nuestro punto de partida coincide con el origen. Para conocer la posición de alguno de los espejos que forman el resonador, es necesario comenzar nuestro ciclo precisamente en donde se halle el espejo. Del sentido con que se recorra la cavidad dependerá el signo que tenga la posición del punto t . En este trabajo utilizaremos, por convención, el sentido que sea contrario al movimiento de las manecillas del reloj. Con esta convención, veremos que la posición del espejo de un resonador que se encuentre a la izquierda del origen, será negativa y la del espejo que se halle a la derecha, positiva.

La resonancia ocurre cuando el cambio de fase que experimenta un haz al viajar de un espejo a otro, es un múltiplo de π . Para calcularla es necesario utilizar la ecuación 2.2.18 y los valores t_1 y t_2 de las posiciones de los espejos que constituyen la cavidad y pueden ser obtenidas haciendo uso de la ecuación 4.2.7. Así, el cambio de fase que sufre el haz, se puede escribir matemáticamente como:

$$\phi(t_2) - \phi(t_1) = \pi (h + 1) \quad 4.2.8$$

donde h es el número de semilongitudes de onda que existe entre un espejo y otro.

Después de hacer una serie de pasos algebraicos, uno obtiene la fórmula para la frecuencia de resonancia de la forma:

$$\nu/\nu_0 = (h + 1) + (1/\pi) \arccos [(A + D + 2)/4]^{1/2} \quad 4.2.9$$

en donde ν es la frecuencia de resonancia y ν_0 es la frecuencia fundamental.

Para el caso de un haz gaussiano con Modo de Orden Superior expresado en coordenadas cartesianas, la expresión 5.2.9 queda de la forma siguiente:

$$\nu/\nu_0 = (h + 1) + (1/\pi)(1 + n + m) \arccos [(A+D+2)/4]^{1/2} \quad 4.2.10$$

y en coordenadas cilíndricas, se tiene:

$$\nu/\nu_0 = (h + 1) + (1/\pi)(1 + 2s + 1) \arccos [(A+D+2)/4]^{1/2} \quad 4.2.11$$

Para ilustrar cómo se aplican las ecuaciones que anteriormente se obtuvieron, se ha escogido, sin pérdida de generalidad, un resonador que conste de dos espejos esféricos de radio de curvatura diferente y separado una distancia d . Observe la figura 29.

Como se ha mencionado, el primer paso que debemos seguir es encontrar los elementos de la matriz de transferencia para un ciclo dentro de la cavidad. Recuerde que el sentido que seguiremos es contrario al de las manecillas del reloj. Con los valores ya obtenidos, lo que procede enseguida es sustituirlos en cada una de las ecuaciones que calculan la posición, el radio de curvatura tanto de la mancha como de la cintura, el radio de curvatura del frente de onda y el cambio de fase experimentado por el haz al ir de un espejo a otro.

Para el espejo de la izquierda, el ciclo debemos comenzarlo

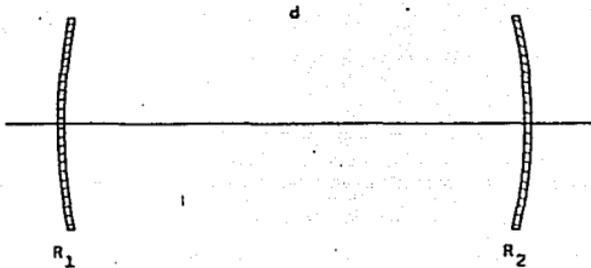


FIGURA 30

en ese lugar, obteniéndose como resultado las siguientes ecuaciones:

$$R(t_1) = -R_1 \quad 4.2.12$$

$$w^2(t_1) = (\lambda R_1 / \pi) \left[\frac{d(R_2 - d)}{(R_1 + R_2 - d)(R_1 - d)} \right]^{1/2} \quad 4.2.13$$

$$t_1 = \frac{-d(R_2 - d)}{R_1 + R_2 - 2d} \quad 4.2.14$$

La primera relación nos indica que ambos radios, tanto de espejo como del frente de onda, coinciden en magnitud. Sin embargo, sus signos no coinciden debido a la convención que hemos adoptado, ya que considera que los haces que divergen hacia la izquierda tengan radios de curvatura con signos negativos.

La segunda relación expresa el valor que debe asumir el radio de la mancha del haz justo en el momento de reflejarse, en función de los radios de los espejos y de la distancia entre ellos. Note en esta ecuación, que la distancia entre los espejos no puede coincidir con el radio del espejo derecho, ni tampoco con la suma de ambos radios, ya que llegaríamos a una indeterminación. Tampoco la distancia entre los espejos no podrá coincidir con el radio del espejo derecho ya que, según esa ecuación, el radio de la mancha se igualaría con cero y esto es imposible. En pocas palabras, la cavidad no puede estar comprendida dentro de la línea que represente lo condicionalmente estable.

La última relación nos indica la posición del espejo izquierdo con respecto al origen, en función de los mismos parámetros que caracterizan a la cavidad.

Para el espejo de la derecha se tienen los siguientes resultados:

$$R(t_2) = R_2 \quad 4.2.15$$

$$w_2^2(t_2) = (\lambda R_2 / \pi) \left[\frac{d (R_1 - d)}{(R_1 + R_2 - d)(R_2 - d)} \right]^{1/2} \quad 4.2.16$$

$$t_2 = \frac{d (R_1 - d)}{R_1 + R_2 - 2d} \quad 4.2.17$$

Las conclusiones hechas para las ecuaciones anteriores son aplicables, en esencia, de manera muy similar a estos resultados. Por ejemplo, los radios de curvatura del espejo como del haz coinciden en magnitud y en signo; la resta de t_2 menos t_1 es

igual a d ; etc.

Por último, presentamos las ecuaciones para el radio de la cintura y para el cambio de fase experimentado por un haz fundamental.

$$w_0^2 = (\lambda/\pi) \left[\frac{d (R_1 - d) (R_2 - d) (R_1 + R_2 - d)}{R_1 + R_2 - 2d} \right]^{1/2} \quad 4.2.18$$

$$v/v_0 = (h + 1) + (1/\pi) \arccos \left[(1 - d/R_1) (1 - d/R_2) \right]^{1/2} \quad 4.2.19$$

Si deseáramos encontrar los valores de los parámetros que caracterizan al haz en otro punto de la cavidad, deberemos iniciar nuestro ciclo en el punto de interés y así obtener los valores de los elementos de la matriz de transferencia correspondientes. Este método es muy preciso, sin embargo, como se puede apreciar, es demasiado laborioso y no tendríamos una visión muy general del comportamiento del haz en toda la cavidad. En el siguiente capítulo se planteará un método gráfico alternativo que, a pesar de no ser muy exacto, es muy fácil de manejar y muy práctico.

CAPITULO V

DIGRAMAS CIRCULARES

La propagación de haces gaussianos a través de algún sistema óptico, puede ser representada gráficamente por medio de un diagrama circular. En tal diagrama, es posible describir un haz conforme se propaga en el espacio, o cruza una lente delgada o se refleja en un espejo, proporcionando así un enfoque gráfico. Los diagramas circulares son similares a los diagramas de impedancia, como la carta de Smith. En efecto, hay una estrecha analogía entre los circuitos eléctricos y los sistemas ópticos.

El primer diagrama circular para haces gaussianos fue propuesta por Collins. Los fundamentos para la derivación de esta carta son las leyes de propagación discutidas en los pasados capítulos.

Para la construcción de este tipo de diagramas, debemos combinar las ecuaciones 2.2.22 y 3.2.6 para eliminar así el parámetro $q(z)$. Es decir:

$$[1/R(z) - i\lambda/\pi w^2(z)] [z + iz_0] = 1 \quad 5.1.1$$

Esta relación contiene las cuatro cantidades las cuales describen completamente a los haces. Cada par de cantidades puede ser expresada en una sola variable, a saber:

$$W = 1/R(z) - i\lambda/\pi w^2(z)$$

$$Z = z - iz_0$$

Al término constante z_0 se le conoce con el nombre de

longitud de Rayleigh. Para estas variables la ecuación 5.1.1 define una transformación de la forma:

$$Z = \frac{1}{W} \quad 5.1.2$$

Si conocemos a W por medio de esta relación se podrá conocer también a Z y viceversa.

Los diagramas circulares se dibujan en cualquiera de los planos complejos, W y Z . Para dibujar nuestros diagramas solo en el plano W , es necesario igualar las partes real e imaginaria de la ecuación 5.1.2, obteniéndose los siguientes resultados:

$$(1/R - 1/2z)^2 + (\lambda/\pi w^2)^2 = (1/2z)^2 \quad 5.1.3$$

$$(1/R)^2 + (\lambda/\pi w^2 - 1/2z_0)^2 = (1/2z_0)^2 \quad 5.1.4$$

La primera ecuación representa una familia de círculos con centro en $(0, 1/2z)$ y radio $1/2z$, es decir, la magnitud de la posición del centro coincide con la magnitud del radio. Asimismo, para cada valor de z existe asociado un solo círculo y para cada uno de ellos le corresponde únicamente un valor de z . No hay un solo círculo que tenga dos valores de z diferentes, ni tampoco dos círculos distintos con valores de z similares.

Para dos círculos dados, la posición que representan será mayor para el que tenga un radio menor. De esta forma, el círculo más pequeño estaría describiendo posiciones del haz más alejadas del origen, en comparación del que tiene un diámetro mayor.

Como z puede asumir valores positivos y negativos, tiene sentido hablar de círculos cuyo centro se ubique por arriba o por abajo del eje horizontal. Por consecuencia, un elemento de esta familia que se halle por debajo del eje referido, representa haces

cuya posición se encuentra a la izquierda del sistema de referencia de la estructura óptica en la cual viaja.

Si analizamos puntos muy específicos de un círculo particular, estaremos en condiciones de obtener algunas conclusiones muy importantes. Por ejemplo, el punto $(0, 1/z)$, en donde z es constante y diferente de cero, nos indica que el radio de curvatura del frente de onda se iguala con la posición y además el radio de la mancha asume un valor indeterminado. De igual forma, el radio de la cintura es igual a cero. De todos estos resultados, concluimos que cualquier punto sobre el eje vertical del plano, no asumirá un significado real.

Para un círculo en particular de esta familia, cada punto de él representa valores de z_0 diferentes. Por ejemplo, como se mencionó en el párrafo anterior, en el punto $(0, 1/z)$ se tiene un valor de z_0 igual a cero. Este punto no representa una situación real ya que dicho parámetro nunca debe anularse. Sin embargo, para puntos que estén fuera de la vertical, los valores que asuma la distancia de Rayleigh, si serán diferentes de cero y conforme nos desplazemos sobre el círculo, a partir de este eje, se obtendrán valores cada vez mayores. Esta afirmación solo es válida cuando el sentido seguido sobre el círculo es idéntico al que llevan las manecillas del reloj en su movimiento y cuando z sea positiva; en caso de que esta posición sea negativa, la afirmación anterior se cumple si el sentido seguido es contrario al de las manecillas del reloj. Así, para un punto sobre el círculo en el cual se cumpla la relación $R = \pi w^2/\lambda$, z_0 se iguala con z . De manera análoga, si el punto sobre el círculo satisface la expresión $R = 2 \pi w^2/\lambda$, z_0 será igual a $2z$; y así sucesivamente. En el origen del plano, este parámetro asumirá un valor indeterminado, sin un

significado real. Observe la figura 31.

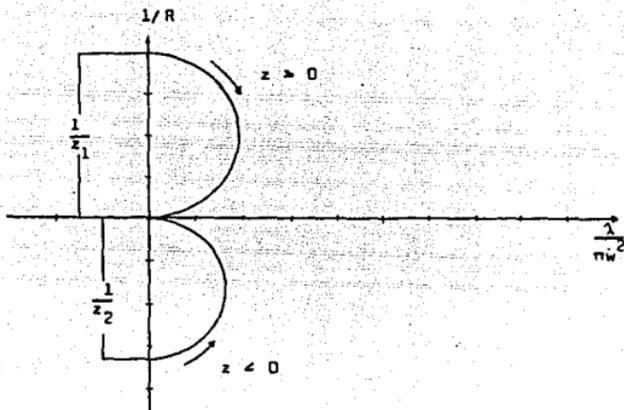


FIGURA 31

Note en la figura, que solo tomamos la parte de los círculos en donde z_0 sea positivo, es decir, se estudian únicamente los puntos que se ubiquen exclusivamente en el primer y cuarto cuadrante del plano W .

La segunda ecuación también representa una familia de círculos con centro en $(1/2z_0, 0)$ y radio $1/2z_0$. La mayoría de las conclusiones que se mencionaron para la primera familia de círculos, son aplicables a esta segunda familia a excepción de algunas características que difieren considerablemente y que es conveniente enumerarlas.

Usted habrá notado que esta nueva familia ubica su centro sobre el eje horizontal. Ningún círculo del referido conjunto se corta, teniendo solo un punto en común que también es el origen. Como z_0 toma valores exclusivamente positivos, no tiene sentido

hablar de círculos cuyo centro se encuentre a la izquierda del origen. Por tal motivo solo estudiaremos aquellas familias que se encuentren contenidas en el primer y cuarto cuadrante del plano.

Para dos círculos dados, el valor de z_0 será mayor para aquel cuyo radio tenga una magnitud menor. Así el círculo más pequeño estaría describiendo longitudes de Rayleigh mayores en comparación del círculo más grande.

Al igual que en la primera ecuación, estudiando puntos específicos de un círculo estaremos en condiciones de obtener algunas conclusiones de sumo interés. Un punto muy importante que se ubica en este círculo es el de coordenadas $(1/z_0, 0)$ que también forma parte del eje horizontal. En dicha posición, el haz tendrá un frente de onda plano ya que el factor $1/R$ es igual a cero. En este punto el haz se hallará justamente en el origen del sistema óptico. Conforme el haz vaya alejándose de este origen, el punto que lo describe se moverá sobre el círculo ya sea en sentido contrario a las manecillas del reloj si el haz se encuentra a la derecha del origen del sistema óptico, o se moverá en el mismo sentido, si el haz se halla a la izquierda del mismo origen.

Cuando el punto sobre el plano tiene como coordenadas $(1/2z_0, 1/2z_0)$, el valor del radio de curvatura del frente de onda es igual a $2z_0$ y la posición del haz será z_0 . Por consecuencia, podemos afirmar que si en un sistema óptico la posición del haz se iguala con la longitud de Rayleigh, el punto sobre el círculo se encuentra en su máxima altura. En este punto, el valor de $\pi w^2/\lambda$ toma el valor $2z_0$.

Si el haz se sigue alejando del origen del sistema, el punto situado sobre el círculo que lo representa se moverá siguiendo la

regla mancomunada anteriormente. Para distancias muy grandes el punto se hallará muy cerca del origen del plano, de tal forma que en el límite el punto se ubicará sobre este origen. En tal situación, tanto el factor $1/R$ como también $\lambda/\pi w^2$ tomarán valores nulos, es decir, el frente de onda será plano y el radio de la mancha tenderá a un valor infinito. Observe la figura 32.

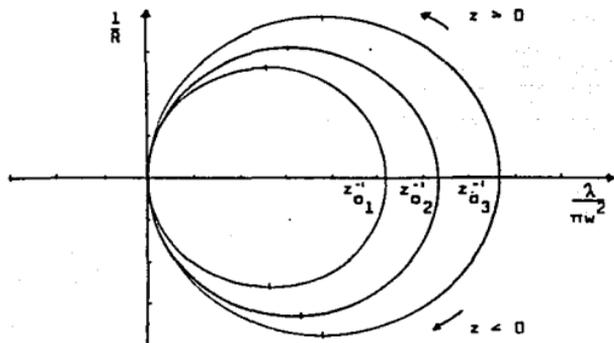


FIGURA 32

El ángulo $\theta = \arctan(z/z_0)$ del factor de fase longitudinal también se puede obtener por el método gráfico. Para saber este ángulo, se procede de la siguiente manera: sobre el plano W se grafica un punto en el cual se representen los parámetros R y w que correspondan a una haz gaussiano viajando en un sistema óptico dado. Trace una línea que una a este punto con el origen del plano. La pendiente de esta recta es igual a $\pi w^2/\lambda R = z/z_0$. Aplicando la función inversa de la tangente a esta igualdad, obtendremos el ángulo deseado. Observe la figura 33.

Para cada punto sobre el plano se pueden dibujar solo dos círculos que pasen por ese punto. Uno de esos círculos satisface la ecuación 5.1.3 y el otro la ecuación 5.1.4. La forma de construir estos círculos a partir de este punto es muy sencilla: se traza una línea recta que una nuestro punto de

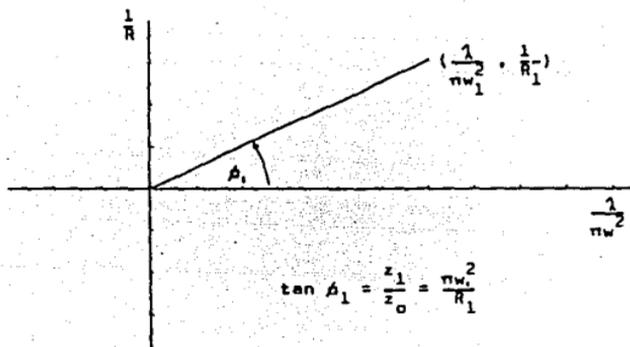


FIGURA 33

interés con el origen. Mida luego la longitud de esta línea y con este dato, ubique el punto medio. Trace, a partir del punto medio, otra línea que sea perpendicular a la primera y prolonguela hasta cruzar los ejes. Los puntos de cruce representarán los centros de cada una de los círculos. Por medio de un compás dibuje ambos círculos. Note que ambos diagramas pasan por el origen. Observe la figura 34.

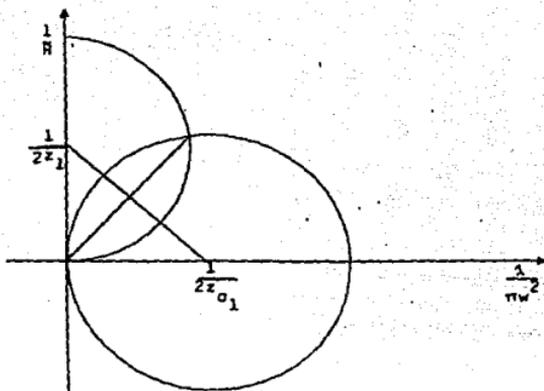


FIGURA 34

Como se mencionó, este tipo de diagramas pueden ser usados para describir la propagación de haces gaussianos a través de sistemas ópticos. A manera de ejemplo, supongamos que un haz parte de una posición z_1 a la izquierda del origen del sistema. En la figura 35 la posición del haz en este punto se encuentra representada por el punto 1. Supongamos también que los parámetros del haz en esta posición son: R_1 y w_1 . Al comienzo el haz recorre la distancia z_1 antes de llegar a la posición marcada con el número 2. Este punto concuerda con el primer origen, de los dos que existen en el sistema óptico. Después de este punto, el haz cruzará una distancia z_2 antes de llegar a la lente, donde está marcada con el número 3. Después de haber cruzado el haz a la lente, ésta se encontrará en la posición marcada con el número 4 y recorrerá, por último, una distancia z_3 para llegar a la posición número 5, donde ahora el haz adquirirá un segundo mínimo valor para w ; correspondiendo al segundo origen de nuestro sistema óptico. Observe la figura 35.

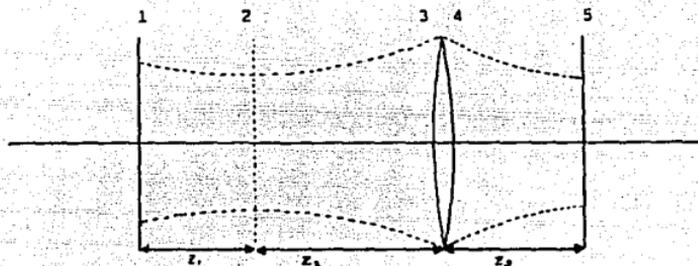


FIGURA 35

Para conocer los parámetros R y w que describen al haz en cada punto de la trayectoria, es necesario utilizar las matrices de transferencia para cada punto de interés. Sin embargo, este método, a pesar de ser muy preciso, presenta muchos inconvenientes ya que la cantidad de operaciones por realizar son demasiadas y además no se tendría una visión objetiva de cómo varían los parámetros conforme se propaga el haz.

El método gráfico que aquí presentamos, tiene la ventaja de poder describir al haz en cada punto del sistema óptico en el cual viaja. Para este ejemplo solo es necesario conocer los parámetros R_1 y w_1 que describen al haz al comienzo del viaje, para así dibujar en el plano los círculos correspondientes a este punto.

Como se observa en la figura 36, hemos situado sobre el plano al punto marcado con el número 1, cuyas coordenadas son:

$(\lambda/\pi w_1^2, -1/R_1)$. El círculo asociado a este punto es el que se muestra en esta misma figura. Conforme el haz se desplace dentro del sistema, el punto situado en el círculo también se moverá siguiendo la trayectoria circular. Como se puede observar, el punto se movió en dirección contraria a la que se mueven las manecillas del reloj, ya que el haz se encuentra a la izquierda del origen del sistema y además se acerca a él. Cuando el haz llega al punto antes mencionado, el punto sobre el círculo estará justamente sobre el eje horizontal; este punto está marcado con el número 2. Al situarse el haz antes de la lente, la posición del punto sobre el círculo coincidirá con la marcada con el número 3. El hecho de que el haz cruce la lente, se representa gráficamente por medio de una línea vertical cuya longitud es proporcional al valor de $1/f$. Ahora nuestro punto se halla en el extremo de la línea, que coincide con el número 4. Como se puede notar, el extremo de la línea no necesariamente debe coincidir con el contorno del círculo donde se encontraba. Por consecuencia, es necesario construir otro círculo que pase ahora por este punto, para así describir al haz conforme se propague. El valor de z_0 para nuevo círculo, se encuentra con solo medir su radio.

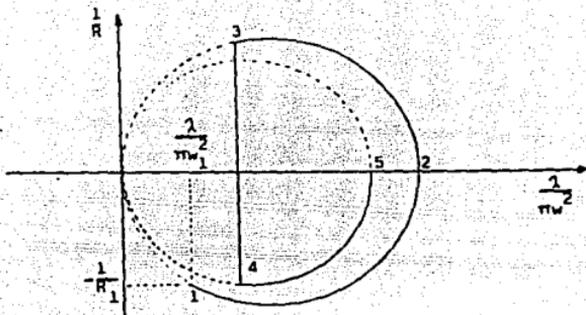


FIGURA 36

Con el ejemplo anterior hemos ilustrado cómo se deben utilizar los diagramas circulares. Es necesario destacar que en el ejemplo se conocían previamente los valores del parámetro complejo en algún punto del recorrido realizado. En particular estos valores corresponden al principio del viaje. De igual forma, también se conocían previamente las posiciones del punto de partida como de la lente. Los valores de z_0 se obtenían a partir del análisis realizado al diagrama.

Todo el mecanismo usado en el ejemplo anterior es poco usual debido a que estos parámetros se desconocen. Sin embargo, para el caso de trabajar con Resonadores Ópticos el método a utilizar es muy similar, solo que los datos mínimos que se requieren se obtendrán del análisis que se realice al resonador. Para abordar este problema, debemos tomar en cuenta la propiedad que tienen los haces de igualar su radio de curvatura del frente de

onda con el radio de los espejos en el momento de reflejarse. Además, se deben conocer las distancias de los espejos, de las lentes, o de cualquier sistema óptico que forme parte del resonador, para así describir al haz en cada punto del mismo.

Para utilizar los diagramas circulares, es necesario conocer la matriz de transferencia correspondiente a un recorrido completo al resonador. El punto de partida del ciclo es arbitrario, pero se recomienda comenzar en alguno de los espejos ya que por medio de las ecuaciones 4.2.7 y 4.2.3 se podrá conocer simultáneamente la posición del espejo, así como también el valor de w , para así graficar el primer punto sobre el plano W . Una vez ubicado nuestro primer punto, se procede a construir los círculos asociados a él. Con el valor de la longitud del radio del círculo se podrá conocer el valor de z_0 asociado. Con el primer punto que se ha ubicado en el plano y con la ayuda del círculo situado sobre el eje horizontal, la descripción del movimiento del haz dentro del resonador puede ser totalmente gráfica si conocemos las posiciones y características de los sistemas ópticos que constituyan al resonador. En el caso de existir lentes delgadas dentro del él, es necesario saber la posición de ellas así como también su longitud focal. Como se mencionó anteriormente, el cruce de un haz a través de una lente delgada es representado gráficamente por medio de una línea vertical cuya longitud es proporcional al valor de $1/f$. Por consiguiente, una lente delgada puede forzar a que el punto sobre el círculo en el cual se encuentre, se salga de él ocasionando con ello la construcción de otro círculo diferente. El número de círculos situados sobre el eje horizontal, dependerá del número de lentes dentro del

resonador, del valor de su longitud focal y de la posición relativa entre ellas y los espejos. En el caso de no existir lentes delgadas, tendremos un solo círculo.

A continuación presentamos diferentes resonadores junto con su respectivo diagrama circular, además de las fórmulas que describen al haz cuando éste se encuentra justo en el espejo izquierdo del resonador. En los dibujos se ha marcado, tanto en los resonadores como en los diagramas, números que señalan algunos de los puntos más importantes. Estos números tienen el objetivo de ir marcando al lector los lugares que son equivalentes.

El primer resonador que se presenta corresponde a uno formado por dos espejos planos, en cuyo espacio se sitúa una lente delgada con una longitud focal que permita al resonador alcanzar la condición de estabilidad. En esta serie de ejemplos, no se considera a los resonadores formados por solo dos espejos planos, ya que éstos pertenecen a la clase de resonadores condicionalmente estables y, como se mencionó anteriormente, la teoría que utilizamos no los considera.

Como primer paso, debemos obtener la matriz de transferencia que describe el recorrido de un ciclo al resonador. El comienzo del ciclo es arbitrario, pero hemos establecido para todos los resonadores el espejo izquierdo. Una vez encontrada la matriz, procederemos a sustituir sus elementos en la ecuación 4.2.7 que representa la posición del mismo espejo. Sin embargo, vemos que para un espejo plano como el que se está tratando, el valor de esa posición es igual a cero. Este resultado era de esperarse debido a que en un espejo de esta naturaleza, se alcanza el mínimo valor del radio de la mancha y, por definición, la

posición de ese punto corresponde a la del origen. Este tipo de razonamientos también se puede aplicar a todos los resonadores que al menos presenten un espejo plano.

Procediendo de la misma forma, sustituyendo ahora los elementos de la matriz de transferencia en la ecuación 4.2.6 para obtener el valor de z_{o_1} que es el valor del radio de la cintura en este espejo, se observará que va a depender solo de los parámetros d_1 , d_2 y f que dan la separación de los espejos y de la lente, así como también la distancia focal. La ecuación que describe a z_{o_1} en función de los parámetros antes señalados se halla expresada en la parte inferior de cada resonador.

Con los datos obtenidos anteriormente, su puede ubicar nuestro primer punto sobre el plano W. A este punto se le deben asociar los dos círculos que le corresponden. En este caso solo se trazará uno de ellos ya que nuestro punto se halla sobre el eje horizontal. El sitio marcado con el número 1 ubicado en ambos diagramas, representa la misma posición del haz.

El siguiente punto en el diagrama circular, corresponde a la posición del haz justo antes de cruzar la lente. Como se observa, la posición de la lente es d_1 unidades a la derecha del espejo de partida. Este dato es necesario ya que con él se construirá el círculo asociado sobre el eje vertical. La intersección de ambos círculos representa esta posición y para mayor claridad se ha señalado con el número 2.

El recorrido que realiza el haz del espejo de partida hasta la lente delgada, es descrito en nuestro diagrama circular por medio de una línea continua que parte del punto 1 y llega al al punto 2. La trayectoria seguida por la línea coincide con la del

círculo situado sobre el eje horizontal cuyo radio es de $1/2z_0$. Observe que el sentido que se ha seguido es opuesto al de las manecillas del reloj, debido a que el haz viaja de izquierda a derecha.

La línea vertical que se ha dibujado, parte del punto 2 y llega al punto 3, indicando con ello que el haz ha cruzado la lente delgada. Como se mencionó, la longitud de la línea es igual a $1/f$.

Como el lector puede apreciar, el punto 3 no ha caído en el contorno del círculo donde se hallaba originalmente, éste se ubica por lo general fuera de él. Por consiguiente, podemos afirmar que dependiendo de la posición que ocupe la lente dentro del resonador, el punto extremo de la línea vertical que representa el cruce del haz a través de ella, caerá sobre el contorno del círculo donde originalmente se encontraba.

Como consecuencia de lo mencionado anteriormente, vemos necesario construir un nuevo círculo sobre el eje horizontal que pase por el punto antes mencionado. A partir de él, y siguiendo la trayectoria del círculo, debemos trazar una línea continua que llegue al punto 4. Esta línea representa la distancia d_2 recorrida por el haz desde la lente hasta el espejo derecho del resonador.

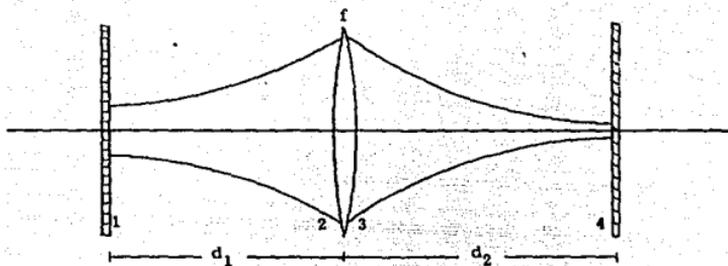
De esta forma es esquematizado en el diagrama las líneas que representan el recorrido que realiza el haz desde el espejo izquierdo hasta el derecho. Para describir el recorrido que realizaría el haz desde el espejo derecho hasta el izquierdo, solo hay que recorrer esas líneas en sentido contrario, es decir, a partir del punto 4 regresarse al 3 siguiendo la línea

continúa correspondiente, y así sucesivamente.

La ventaja de este método, es que permite obtener directamente los parámetros que describen al haz en un punto particular de la trayectoria seguida por éste dentro del resonador. Para ello solo es necesario dibujar un círculo sobre el eje vertical, ayudados por el valor de la ubicación del punto de interés. La intersección que forme el círculo así construido las líneas que describen el desplazamiento del haz dentro del resonador, representa la ubicación de éste al pasar por el punto escogido. Las coordenadas se pueden obtener directamente a partir del diagrama y con solo hacer un par de divisiones sencillas obtendremos los valores deseados.

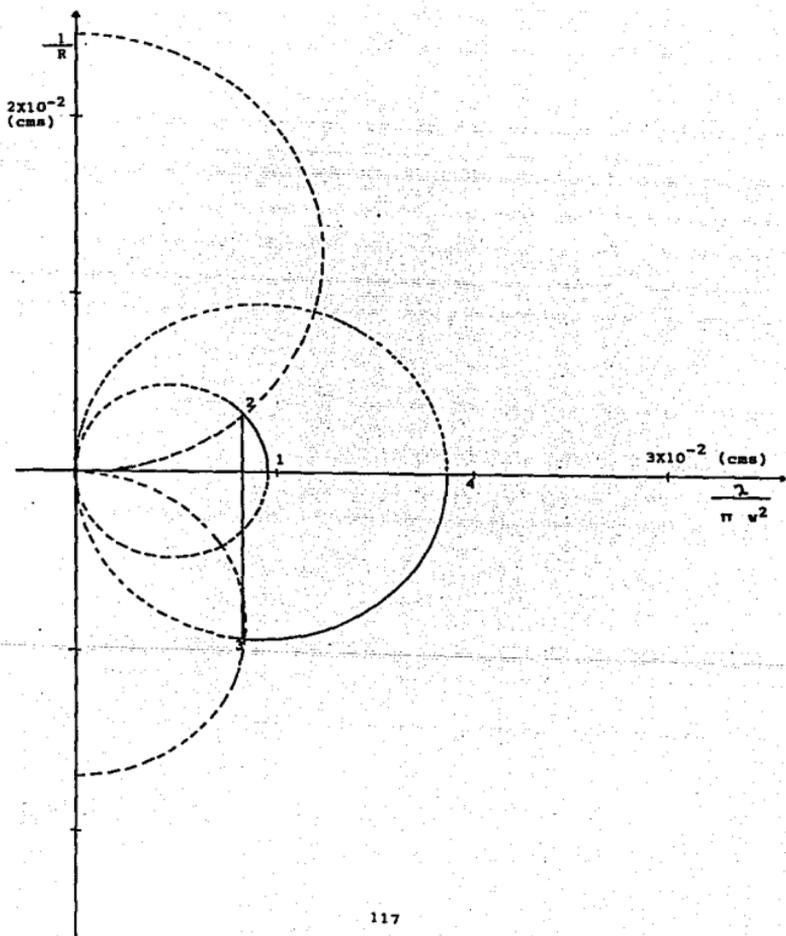
En este resonador que se ha tomado como ejemplo, hemos supuesto los siguientes valores: $d_1 = 40$ cms; $d_2 = 60$ cms. y $f = 80$ cms. Con estos datos el valor de z_{01} es igual a 105.83 cms.

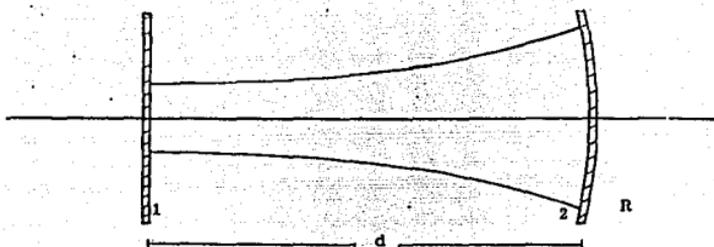
El método que se empleará para construir los diagramas circulares para los restantes resonadores, es muy similar. Por ello, hemos considerado que para las restantes cavidades solo se mencionarán sus características y las ecuaciones necesarias y suficientes que dan los valores del parámetro complejo en un punto particular de la cavidad. Se deja al lector construir o verificar dichos diagramas.



$$t_1 = \frac{A - D}{2C} = 0$$

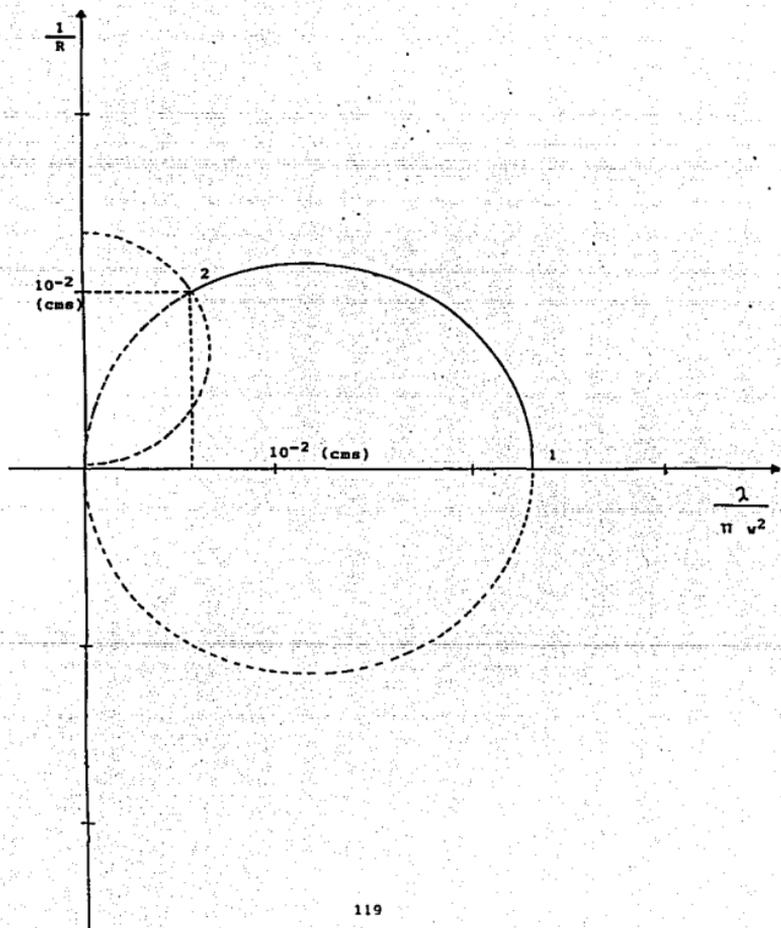
$$\frac{2}{\sigma_1} = \frac{\text{Sen}^2 \theta}{C^2} = \frac{(1 - d_1/f) (d_1 f + d_2 f - d_1 d_2)}{(1 - d_2/f)}$$

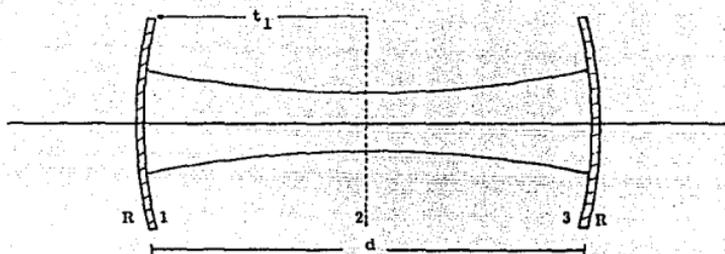




$$t_1 = \frac{A - D}{2C} = 0$$

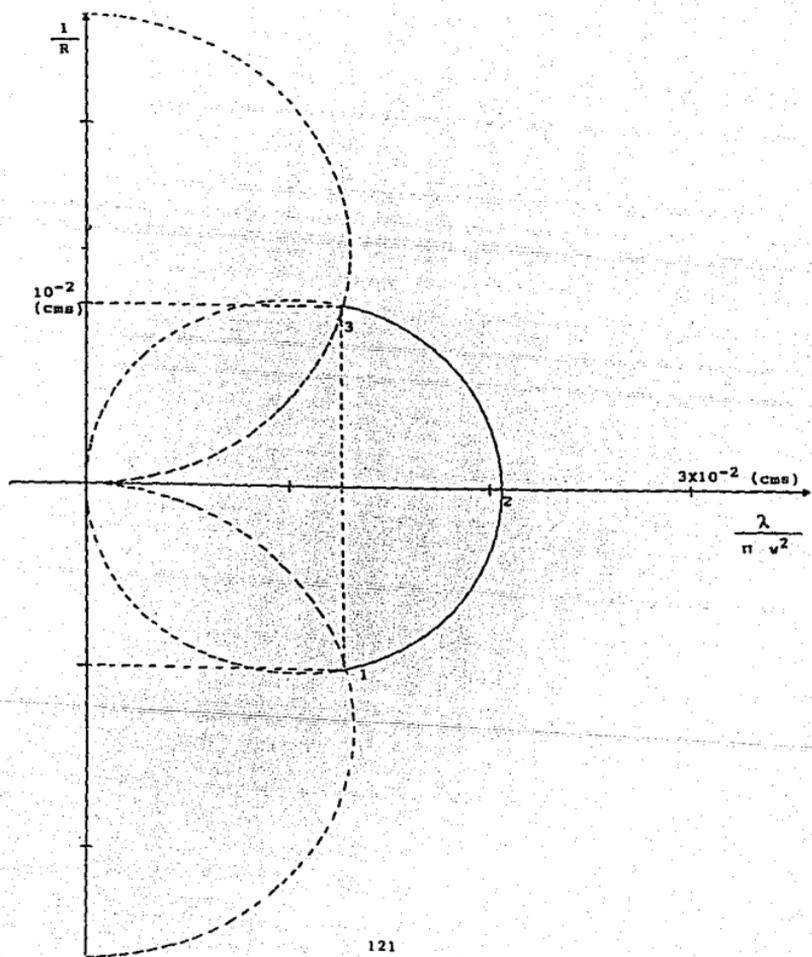
$$\frac{2}{r_{o1}} = dR(1 - d/R)$$

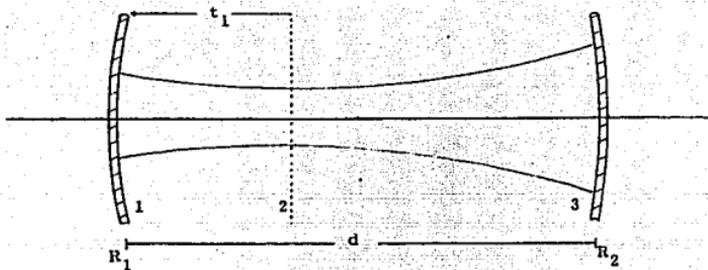




$$t_1 = \frac{A - D}{2C} = -\frac{1}{2} d$$

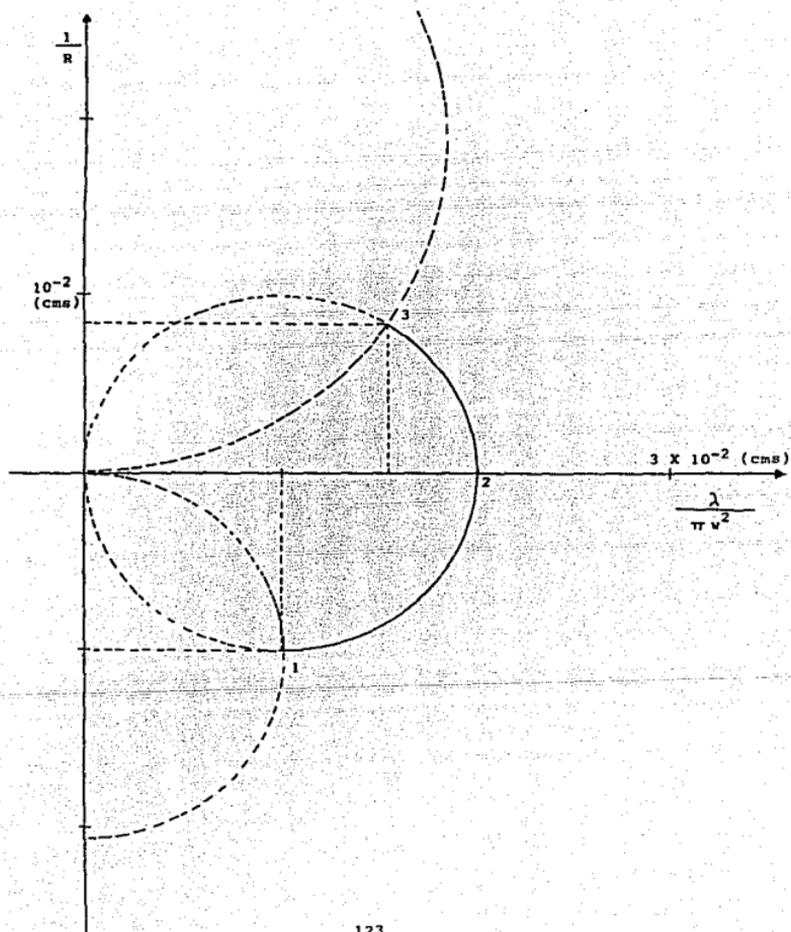
$$z_{O_1}^2 = \frac{\text{Sen}^2 \theta}{C^2} = \frac{1}{4} d (2R - d)$$

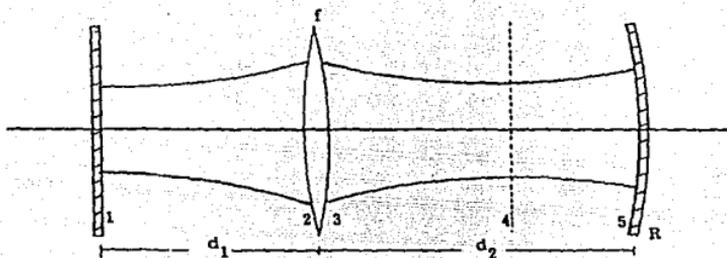




$$t_1 = \frac{A - D}{2C} = \frac{-d(R_2 - d)}{R_1 + R_2 - 2d}$$

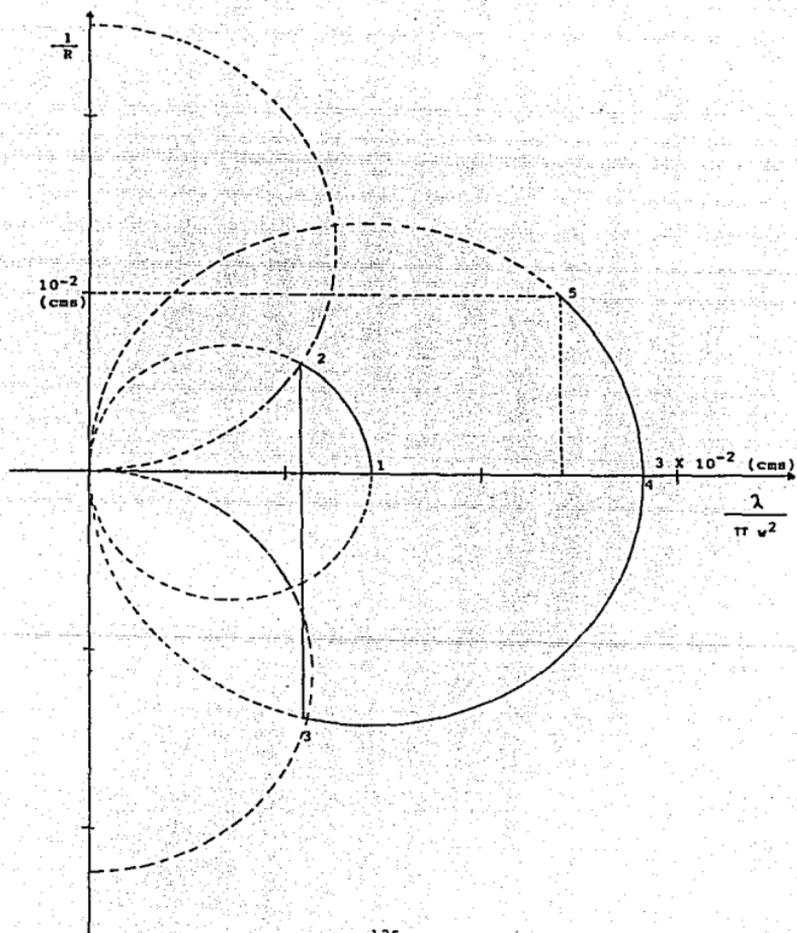
$$z_{o1}^2 = \frac{\text{Sen}^2 \theta}{C^2} = \frac{d(R_1 - d)(R_2 - d)(R_1 + R_2 - d)}{(R_1 + R_2 - 2d)^2}$$

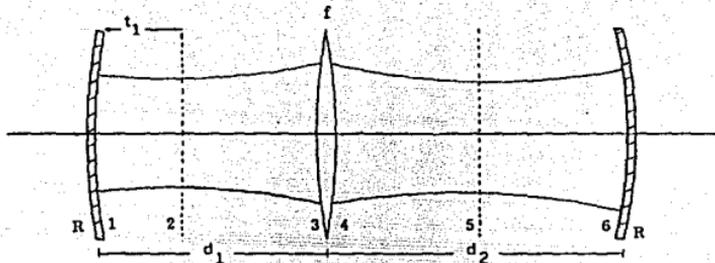




$$t_1 = \frac{A - D}{2C} = 0$$

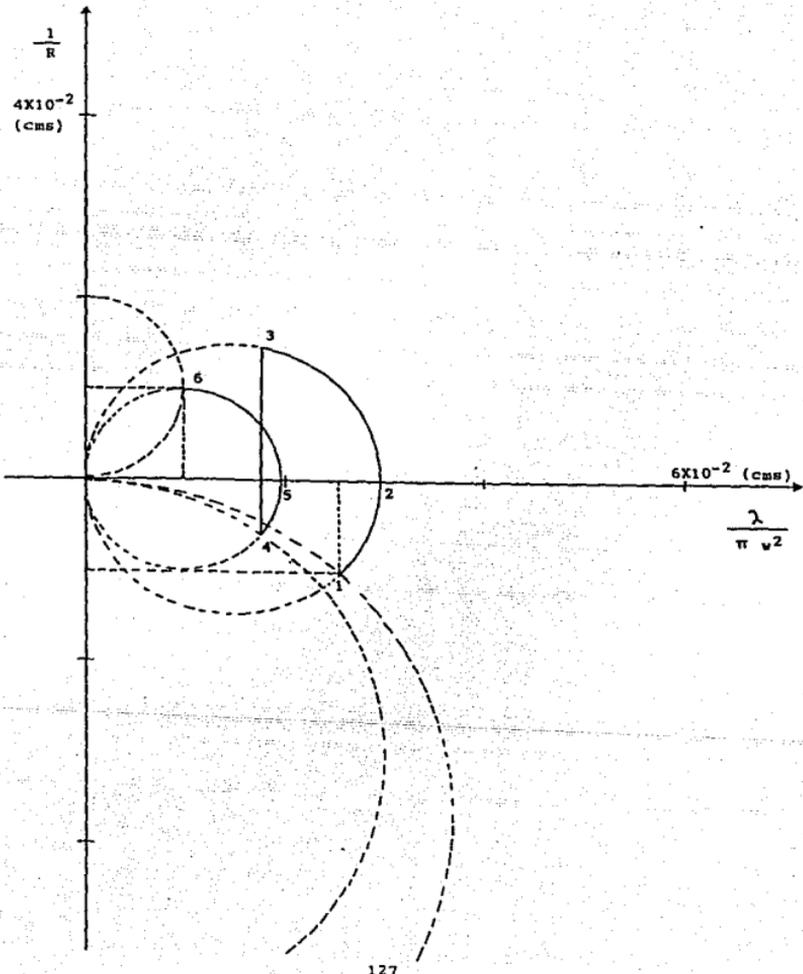
$$z_{o1}^2 = \frac{(d_1 + d_2 - d_1 d_2 / f) (1 - d_1 / R - d_1 / f - d_2 / R + d_1 d_2 / f R)}{(1 - d_2 / f) (1 / R + 1 / f - d_2 / f R)}$$

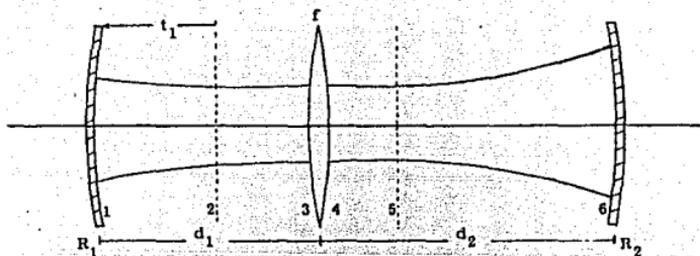




$$t_1 = \frac{(d_1 + d_2 - d_1 d_2 / f) (-1 - 1/R (d_1 + d_2 - d_1 d_2 / f) - d_1 / f)}{(d_2 / f - R / f - 1) (1 - d_2 / f) (1 - 2d_1 / R) - 2d_2 / R} - 1$$

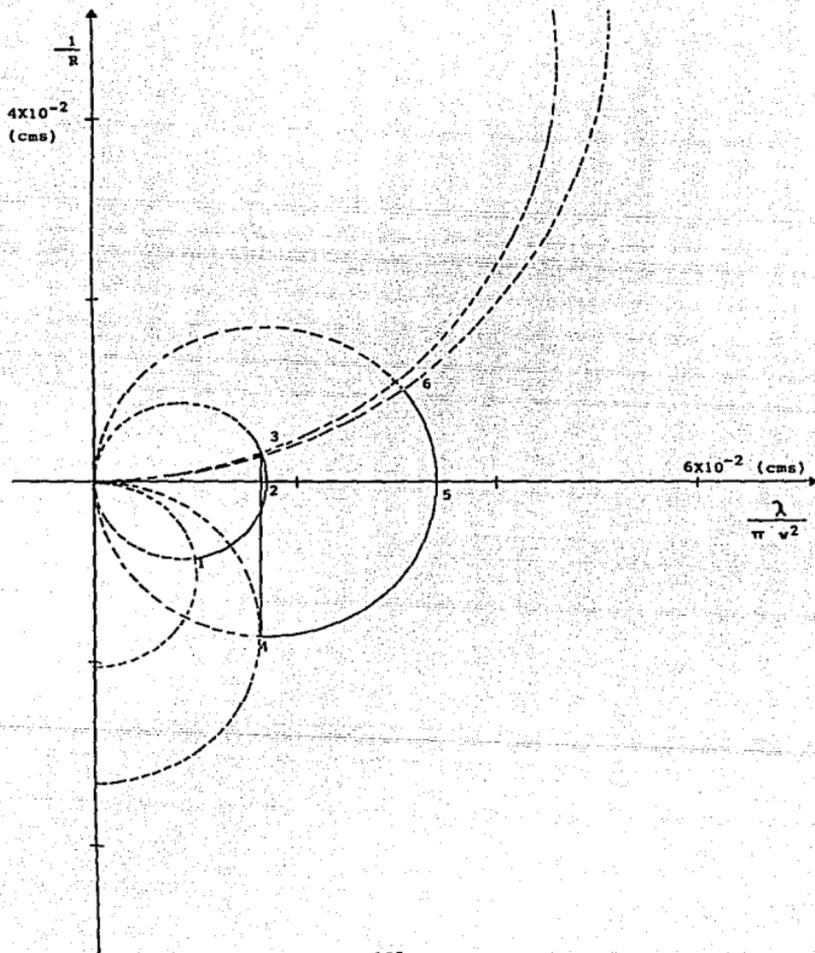
$$R(t_1) = \frac{-2B}{A-D} = -R$$





$$t_1 = \frac{(d_1 + d_2 - d_1 d_2 / f) (1 - d_1 / f - d_1 / R_2 - d_2 / R_2 + d_1 d_2 / f R_2)}{R_1 (d_2 / R_2 f - 1 / f - 1 / R_2) (1 - d_2 / f) (1 - 2d_1 / R_1) - 2d_2 / R_1 - 1}$$

$$R(t_1) = -R_1$$



Como una aplicación de estos resultados en el diseño de Resonadores Ópticos, calculemos la separación que deben tener dos espejos, uno plano y el otro cóncavo, para que el radio de la mancha del haz que emergerá del espejo plano tenga un valor aproximado de 2.5 mm. Este cálculo es necesario ya que en la construcción de un láser de Bióxido de Carbono se efectuó una perforación central en el espejo plano con el fin de poder transmitir el haz hacia afuera de la cavidad y no tener necesidad de utilizar sustratos de materiales que son depositados en el vidrio y que solo se adquieren en el extranjero. Para evitar que el gas fluya hacia el exterior a través del orificio se adhirió en el lado externo un pequeño cristal de cloruro de sodio para sellar la perforación y efectuar el vacío en la cavidad y la salida de la radiación.

Aunque el láser de Bióxido de Carbono puede emitir en un gran número de longitudes de onda, en particular entre 9mm. y 11mm, la línea más intensa ocurre a 10.6 mm, que es la longitud de onda que se utilizará en nuestros cálculos.

Si el radio del espejo cóncavo es de 6 mts. y utilizamos la ecuación correspondiente al resonador cóncavo-paralelo, obtenemos una ecuación de segundo grado de la forma:

$$d^2 - dR + (r w_c^2 / \lambda)^2 = 0$$

Sustituyendo cada valor en esta relación, se obtiene:

$$d = 64 \text{ cms.}$$

que corresponde a la distancia a la que se deben colocar los espejos para que el radio de la mancha del haz emergente sea de 2.5 mm.

Con este ejemplo se ha ilustrado la forma como es posible utilizar las ecuaciones que se presentan para cada resonador.

CONCLUSIONES

A pesar que hace poco más de treinta años fue construido el primer láser, la Investigación, Desarrollo y Aplicación de este tipo de radiación ha dado, en tan corto tiempo, un instrumento poderoso que se usa para beneficio de la sociedad. En la Medicina, la Biología, la Química, las Comunicaciones, la Investigación y la Industria en general, se han mejorado y superado técnicas, procedimientos y calidades de épocas anteriores.

Sin embargo en México el desarrollo de recursos humanos en Óptica el cual pueda incorporarse a la realización de Investigación, Desarrollo Tecnológico y Enseñanza sobre este campo, ha sido muy escaso, a pesar de los grandes esfuerzos que realizan las escuelas de educación superior. Aunado al poco personal especializado, el bajo grado de desarrollo tecnológico es causa que en nuestro país no se construyan en forma industrial dispositivos láser. Solo en algunos Institutos de Investigación y en algunas Universidades se diseñan y construyen láseres usando, en la medida de lo posible, material de origen nacional.

El presente trabajo intenta divulgar las características más relevantes del láser, sin tomar en cuenta los aspectos cuánticos que involucra la generación de este tipo de radiación. Por consecuencia, es posible afirmar que la obra no es propiamente una tesis de investigación en donde se plasmen nuevos resultados, sino una recopilación de la información de los temas que son analizados. Así, el futuro lector encontrará una explicación detallada y de fácil acceso en cada uno de estos temas. Para que la lectura sea más objetiva, se recomienda que cada resultado que se deduce sea

verificado por el propio lector.

No solo la exposición didáctica de los temas es el objetivo que persigue esta tesis. Como hemos visto, hay diferentes diseños de cavidades que tienen considerablemente más importancia que la cavidad más simple que es la formada por espejos planos. En el último capítulo se presentan algunas expresiones que sirven para calcular los parámetros que caracterizan al haz gaussiano en un punto determinado dentro de cada cavidad que es analizada. Con el uso de estas expresiones es posible graficar sobre el plano complejo estos parámetros conforme el haz recorre la cavidad. Para ello solo es necesario conocer las características de la cavidad y de algún instrumento óptico que pueda estar contenido.

El conocimiento de dichos parámetros es importante ya que con ellos es posible calcular el radio de la mancha así como también el radio de curvatura del frente de onda del haz en el momento de emerger de la cavidad. Por lo tanto, los parámetros de salida dependen de las propiedades de la cavidad. Así, si deseáramos que el láser emergente tenga ciertas dimensiones específicas, solo es necesario diseñar los espejos y su separación de tal forma que satisfaga las necesidades requeridas.

BIBLIOGRAFIA

- 1.- Bertolotti, M. Matrix Methods in Optical Instrument Design. New York: Benjamin, 1964.
- 2.- Curtis, Charles W. Algebra Lineal. 3d. Boston Allyn and Bacon, 1974.
- 3.- Churchill, R; Brown, J. W; Verhey, R. F. Variables Complejas y sus Aplicaciones. 2da Ed. Mc Graw Hill, 1978.
- 4.- Edminister, Joseph A. Circuitos Eléctricos. Mc Graw Hill, 1984.
- 5.- Hecht, E; Zajac, A. Optica. Fondo Educativo Interamericano, 1977.
- 6.- Kogelnik, H; Li, T. Laser Beams and Resonators. Procc. IEEE, vol. 54, 1966.
- 7.- Reza, Fazlollah. Linear Spaces in Engineering. Gin, 1971.
- 8.-Ruiz Boullosa, Ricardo. Láser, Breve Introducción y Algunas Demostraciones Sencillas. UNAM, 1985.
- 9.- Siegman, A. E. Introduction to Laser and Maser. Mc Graw Hill, 1968.
- 10.- Spiegel, Ph. D; Murray, R. Análisis de Fourier. Mc Graw Hill, 1976.
- 11.- Verdeyen, J.T. Laser Electronics. Prentice Hall, 1981.
- 12.- Yariv, A. Introduction to Optical Electronics. Holt, Kinehart.