23
2ej.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

MATEMATICAS

LA MATEMATICA Y EL METODO CARTESIANOS

Tesis que para obtener
el título de MATEMATICO
presenta
IRIS AZUCENA OREA CORIA

Cd. Universitaria
marzo 1992.

LA MATEMATICA Y EL METODO CARTESIANOS

I N D I C E

CAPITULO SEGUNDO: RESUMEN DE LA GEOMETRIA DE DESCARTES

Prólogo

<u>Primer Libro</u>

1. Aritmética y goemetría
2. Ecuaciones
3. El ejemplo de Pappus
    a) Enunciado
    b) Resumen de la respuesta
    c) Primera parte de la respuesta
    d) Primeras generalizaciones

<u>Segundo Libro</u>

1. Introducción
2. Ejemplo
3. Características de las curvas geométricas
4. Continuación de la respuesta al problema de Pappus
5. El caso de las 5 líneas
6. Utilidad del método de la geometría analítica
7. Método para trazar normales
8. Otro ejemplo

<u>Tercer Libro</u>

1. Introducción
2. Ecuaciones
3. Reducciones
4. Resolución gráfica de ecuaciones de 3o. y 4o. grados. Problemas sólidos
5. Dos construcciones que resuelven todos los problemas sólidos
6. Resolución de ecuaciones de 5o. y 6o. grados
7. Aplicaciones de esta regla
8. Conclusión

INTRODUCCION

La Geometría de Descartes es una de las obras fundamentales en el desarrollo de la Geometría Analítica. Esta materia forma parte de los programas de todas las licenciaturas del área físico-matemática. Su importancia como antecedente histórico y didáctico para el estudio del cálculo es innegable. Así pues, la geometría cartesiana sigue siendo un objeto de estudio indispensable en la formación de todo científico y una herramienta poderosa en su trabajo cotidiano.

Sin embargo, el quehacer científico no consiste sólo en la acumulación de hechos o técnicas, sino que incluye el desarrollo de conceptos filosóficos que contribuyan a la construcción de marcos teóricos referenciales. Sin éstos, sería imposible "crear nuevos planteos y sobre todo perseverar en la problematicidad" [La pregunta por la cosa, Heidegger, pág. 63].

El propósito del presente trabajo es el de estudiar la mutua y profunda interacción que existe entre la matemática cartesiana, representada por "La Geometría", y el sistema filosófico cartesiano en general.

Para esto, se divide el estudio en tres partes. La primera ubica históricamente la obra científica y filosófica de René Descartes. La segunda es una exposición de "La Geometría". La tercera conjunta los temas de la filosofía cartesiana que se correlacionan con la matemática del mismo autor.

CAPITULO PRIMERO

CONTEXTO HISTORICO

0. Cronología de Descartes.

1596	Nace en La Haye, Turena, Francia
1604	Ingresa en el colegio jesuíta de La Flèche
1614	Estudia leyes en la Universidad de Poitiers
1618	Se alista en el ejército del Príncipe Mauricio de Nassau
1619	El 10 de noviembre descubre los fundamentos de "una ciencia admirable"
1628	Participa en el sitio de La Rochelle. Escribe las Reglas
1634	Renuncia a publicar el Tratado del Mundo a causa de la condena de Galileo
1637	Publica el Discurso del método seguido de La Geometría y otros dos tratados
1641	Publica las Meditaciones Metafísicas
1644	Edita los Principios de la Filosofía
1649	Publica Las pasiones del alma
1650	Muere el 11 de febrero en Estocolmo, Suecia

1. Política.

La primera mitad del siglo XVII es una etapa pródiga en acontecimientos históricos. Entre éstos, cabe destacar la Contrarreforma cuya expresión artística fue el estilo barroco, las guerras de religión en Francia entre los años 1560 y 1598, las de los Países Bajos entre 1572 y 1609 y las de Alemania entre 1618 y 1648.

El triunfo político de la nueva burguesía se anuncia con el establecimiento de los Estados Generales en Holanda en 1576 y de la Commonwealth en Inglaterra en 1649, que eran los dos países en donde se concentraba el núcleo del comercio y de las manufacturas mundiales.

Francia fué presa de conflictos constitucionales. Tras el gran reinado de Enrique IV (1589 - 1610), vino la minoría de Luis XIII. María de Medicis subió al poder y el reino cayó en un desorden general. En 1624, consigue la entrada de Richelieu en el Consejo de Estado como Primer Ministro.

En 1628, la gran fortaleza de La Rochela, que era casi una república independiente de hugonotes es derrotada por Richelieu, quedando así barrido el protestantismo como fuerza política. Richelieu es el verdadero creador del absolutismo real al dominar la nobleza y disminuir el poder de la Casa Habsburgo de Austria. Fundó la Academia Francesa en 1634.

Tras el inflexible mandato de Richelieu llegó la minoría de Luis XIV (1643 - 1661). Durante cada regencia surgían nuevamente elementos hostiles a la extensión del poder real, sobre todo entre la nobleza y los miembros de los Parlamentos.

2. Panorama científico.

La revolución científica del siglo XVII no es el resultado de cambios internos de las estructuras formales que actuaban como depositarias y transmisoras del saber dentro de la sociedad renacentista. Es, al contrario, fruto de la labor de científicos que trabajan al margen de las universidades, y en ocasiones enfrentándose decididamente a las clases académicas.

Sin embargo, la ciencia se desarrolla en proporciones tan sorprendentes que se propicia la aparición de actividades de carácter colectivo para impulsar su avance. Entre ellas se destacan el intercambio epistolar científico, la aparición del corresponsal científico, la de las publicaciones científicas periódicas y la de academias científicas.

Entre los corresponsales cabe mencionar al padre Marino Mersenne (1588-1648), quién intervino directamente ó como intermediario en las principales controversias entre los científicos europeos durante la primera mitad del siglo XVII. Fué amigo y colaborador de Descartes y estuvo también vinculado a Fermat y a otros importantes científicos de la época.

La influencia de la matemática en el espíritu del siglo XVII se puede observar tanto en las artes como en las ciencias, al mismo nivel que en el pensamiento filosófico y político.

En medicina, por ejemplo, una escuela adoptó los principios de Descartes que consideran el cuerpo humano como una máquina, entre ellos, el italiano Giovanni Borelli se interesó especialmente en las leyes físicas que gobiernan los movimientos del cuerpo. Sin embargo, el gran pionero de la medicina en este siglo fué el inglés William Harvey. En 1628, expuso su descubrimiento sobre la circulación de la sangre en "De motu cordis et sanguinis", una obra que fué el resultado de observaciones precisas y cuidadosos experimentos. Sus nuevos métodos experimentales abrieron el camino hacia investigaciones posteriores en psicología y anatomía.

3. Matemáticas.

a) Introducción.

La ciencia del siglo XVII busca conocimientos que se expresen en forma armoniosa como fórmulas matemáticas. La intervención de las matemáticas en otros campos del saber se relaciona con el rápido desarrollo de distintas ramas de ellas: la culminación " del largo proceso de maduración del álgebra simbólica (Vieta), el renacer de la teoría de los números (Fermat), la creacion del cálculo de probabilidades (Pascal y Fermat), de la geometria analítica (Descartes) y del cálculo infinitesimal (Leibniz y Newton)" [Une histoire des mathématiques, Dahan y Peifîer, pág. 35]. A continuación consideraremos la situacion de algunos de estos avances que se relacionan con la obra cartesiana.

b) Algebra.

La intrincada historia de las notaciones matématicas está llena de sistemas generados por los investigadores. Gran parte de esos sistemas caian en desuso despues de la muerte de sus autores.

La aparición de un verdadero lenguaje algebraico simbólico fue el resultado de transformaciones conceptuales en las que participaron Vieta (1540 - 1603) y Descartes (1596 - 1650).

Desde la Antigüedad, en geometría las cantidades indeterminadas, es decir, no deconocidas sino sólo dadas de manera no específica, se designaban por medio de letras. Pero este uso de las letras se limita a dar un nombre a los objetos sin hacer nada después con estos símbolos.

A principios del siglo XVI empezó el uso de letras en álgebra. Las letras mayúsculas se introducen para representar a las incógnitas en las ecuaciones.

El método de representación literal de Vieta expuesto en su obra "Arte analítico" reúne el método de los antiguos y los nuevos métodos en álgebra: Vieta designa con letras no sólo las incógnitas y sus potencias, sino también los coeficientes indeterminados. De este modo realiza grandes progresos en el cálculo algebraico y en sus aplicaciones a la geometría.

Pero sobre todo, la introduccion de la representación literal permite que el álgebra se transforme en el estudio de tipos generales de ecuaciones. Esto da lugar a interesarse mas en la estructura de los problemas que en su forma particular.

Vieta consideraba aún el álgebra como una herramienta en el estudio de la geometría. Todas las magnitudes tenian un significado puramente geométrico. Habrá que esperar la obra cartesiana para encontrar la emancipación del álgebra respecto de la geometría.

Para Descartes el álgebra no es una ciencia ya que no aporta conocimientos de lo fisico. Es un método que estructura los razonamientos acerca de cantidades desconocidas. El álgebra permitirá simplificar el pensamiento al mecanizar la manipulación de las magnitudes. Es pues una extensión de la lógica y una parte importante de la búsqueda cartesiana del Método General. Así, el resultado del desarrollo del simbolismo algebraico y de la teoría de las ecuaciones fue el de otorgar al álgebra su autonomía como rama de las matemáticas.

c) Geometría.

En 1511, el recién impreso "Tratado de la pintura" de Leone B. Alberti despierta una inquietud que dará origen a la geometría proyectiva: determinar las propiedades geométricas comunes a dos perspectivas de una misma figura.
Desargues (1591 - 1661) publica en 1639 su obra principal "Brouillon project d'une atteinte aux événements des rencontres du cône avec un plan" en la que estudia las propiedades comunes de las cónicas que se conservan por perspectiva.

A pesar de una difusión poco exitosa, las ideas de Desargues fueron apreciadas y retomadas por Pascal (1623 - 1662) al redactar sus tratados sobre conicas. El célebre teorema del hexagrama místico ocupa un lugar importante en el estudio de las propiedades de las cónicas.

Los métodos proyectivos caen en el olvido durante casi un siglo. Esto puede deberse en parte a la gran popularidad que alcanzó la Geometría de Descartes. La controversia entre éste y Desargues acerca de los medios utilizados en el desarrollo de la geometría será la siguiente: "Desargues cree en la potencia de la geometría, Descartes sólo tiene fe en la virtud del álgebra" [Dahan y Peiffer, <u>Une histoire des mathématiques,</u> pág. 135].

La idea de ecuación de una curva fue descubierta independientemente por Descartes y por Fermat (1601 - 1665). Este último la publica en su "Isagoge" en 1679 de modo más claro que Descartes, quien, sin embargo, amplía el estudio de las ecuaciones que van más allá del primero y segundo grado que es hasta donde llegó Fermat.

d) El problema de las tangentes.

Los métodos de cuadraturas han sido estudiados desde tiempos muy antiguos. No así el problema de las tangentes que no fué investigado sino hasta mediados del siglo XVII por Torricelli (1608 - 1647), Roberval (1602 - 1675), Fermat, Descartes, Wallis (1616 - 1703) y Barrow (1630-1677) entre otros.

Los dos primeros incluyen el estudio de las tangentes en sus trabajos sobre movimiento de proyectiles. Su método dinámico no es aplicable a todas las curvas ya que descansa sobre conceptos físicos.

En la búsqueda de un método general, Fermat utiliza la "propiedad específica" es decir la ecuación de la curva. Considera la tangente como una posición límite de una secante cuando los puntos de intersección con la curva se aproximan entre sí.

Descartes critica el uso que hace Fermat de los elementos infinitesimales lo que provoca una áspera discusión entre ellos. Esto permite que Fermat extienda su método estableciendo la equivalencia entre el infinitesimal de arco de una curva y el infinitesimal de su tangente. Con este principio tan general. Fermat puede encontrar tangentes de curvas algebraicas y trascendentes mientras que el método de Descartes, que se expondrá en capítulo segundo de esta tesis. se aplica solamente a las curvas algebraicas.

Los dos fueron continuadores de los trabajos de Vieta aunque con enfoques diferentes: "Descartes adopta el objetivo de Vieta. la construcción geométrica de las raices de ecuaciones algebraicas, pero continuándolo en conjunción con un simbolismo algebraico mucho más apropiado. Fermat conserva la notación de Vieta, pero la aplica a un campo nuevo, el estudio de los lugares geométricos" [Historia de las Matemáticas. Collette, pág. 27].

4. Física.

a) Matematización de la Mecánica.

La Física del siglo XVI progresó a grandes pasos por medio de la experimentación y la cuantificación propias del nuevo método científico. Galileo es el principal iniciador de la aplicación de los métodos matemáticos a la Mecánica. El objetivo de su trabajo deja de ser el estudio de la esencia y de los primeros principios para concentrarse en describir fenómenos observables. Con la premisa "un efecto puede tener solamente una causa" desarrolla su método experimental de medición. Todos sus experimentos, mentales y reales, están diseñados específicamente para simplificar y controlar las relaciones cuantitativas entre los cuerpos.

La primacía de la razón sobre los sentidos es producto de su concepción geométrica del universo. La matematización de la Física de Galileo permitió a sus seguidores considerar como evidente la geometrización de los procesos del mundo real.

Para Descartes la materia es solamente extensión, así lo real queda reducido a lo geométrico. La conclusión general de la Física cartesiana es el mecanicismo, que postula que todos los fenómenos pueden ser explicados por el movimiento, la extensión y la disposición de las distintas partes de los cuerpos. Sin embargo, esta reducción de todos los hechos a movimiento local quedó planteada únicamente a nivel cualitativo en Le Monde y en los Principios.

Así pues, las geometrizaciones galileana y cartesiana son motivadas por concepciones metodologicas diferentes. La primera corresponde a un interés puramente cinemático. La segunda se genera de la premisa ontológica que identifica la esencia de los cuerpos con la extensión.

b) La caída de los cuerpos.

Cardano (1501-1576) y Kepler (1571-1630) aún aceptaban las categorías aristotélicas del movimiento. Galileo deja de lado la preocupación causal de la caída libre de los cuerpos y se dedica a estudiarla cinemáticamente. El pensamiento galileano, al respecto, sigue una clara evolución. Primero considera que dos cuerpos de la misma materia caen a la misma rapidez sin importar sus pesos. En su obra De Motu explica que dos cuerpos de distinta materia caen con velocidades propias a sus "naturalezas". Después abandonó esta teoría y dijo que todo cuerpo cae a la misma velocidad en el vacío, a pesar de no poder comprobar esto experimentalmente. Más adelante, comete el mismo error que Beeckman y Descartes al afirmar que la velocidad instantánea es proporcional a la distancia de caída y no al tiempo. Pero en carta a Paolo Sarpi, fechada en 1604, dijo haber demostrado que la distancia es proporcional al cuadrado de los tiempos. Galileo no reporta datos de medida individual, sino que sólo relata sus conclusiones, dada la confianza que tiene en su intuición matemática.

c) Inercia.

Galileo no pudo hacer una distinción clara entre peso y masa, pues el peso era para él una tendencia intrínseca hacia abajo y no una relación extrínseca con otro cuerpo atrayente como sugirieron Gilbert y Kepler.

En 1605, Kepler expone en una carta la idea de que la atracción gravitacional es una acción recíproca y conduce a una aproximación mutua susceptible de formalización matemática. En otra carta de 1608 describe la atracción entre la Tierra y una piedra como regida por líneas o cadenas magnéticas. La importancia de la labor de Kepler en el análisis de las causas del movimiento reside en el nuevo enfoque que intenta dar una definición cuantitativa del concepto de fuerza. Galileo continua y perfecciona estas tesis de Kepler.

Para Galileo, fuerza es todo lo que causa un cambio de velocidad. Galileo define además el momento o ímpetu como el producto del peso por la velocidad, éste será no la causa, sino el efecto y la medida del movimiento. Por lo tanto, la conservación del movimiento se indentificará con la conservación del momento.

Descartes fue el primero en expresar el principio de inercia, aunque no en publicarlo, pero llegó a él por un método metafísico en Le Monde.

"El movimiento, como el reposo, es un estado. Y como tal, obedece a las leyes generales de la naturaleza, es decir, a las leyes de la persistencia y de la conservación que Dios ha establecido para ella" [Le Monde citado en Estudios Galileanos, pág. 309, Alexandre Koyré, Siglo XXI Editores, 1981].

Pero además de conservarse, el movimiento es una cantidad. En el mundo existe una cantidad determinada de movimiento que es constante. Al eliminar la pesantez de la esencia de los cuerpos, Descartes pudo formular el principio de inercia, cosa que Galileo no pudo hacer. Descartes al considerar que el espacio real coincide con el espacio euclidiano infinito, puede pensar que un cuerpo en movimiento rectilíneo continuará indefinidamente en ese estado sin la presencia de fuerzas externas.

5. Astronomía.

a) La consolidación del sistema heliocéntrico.

En 1616 la iglesia católica incluyó en su índice de libros prohibidos el "De revolucionibus" de Copérnico (1473-1543) y todos aquellos textos publicados en los que se postulaba o se defendía el movimiento de la Tierra.

El 22 de junio de 1633, un tribunal inquisitorial condenó las tesis copernicanas expuestas por Galileo en su famoso "Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo" y le obligó a abjurar de las mismas.

En ese mismo año Descartes terminaba el "Tratado del Mundo". Pero mientras se disponía a publicarlo, tuvo noticias de la condena de Galileo. Puesto que en el tratado aceptaba la hipótesis de Copérnico, renunció sin más a la publicación del mismo, para evitar un enfrentamiento con la iglesia. Separó del tratado original algunas partes fundamentales y publicó en 1637 tres ensayos: La Dióptrica, Los Meteoros y La Geometría, prologados por el Discurso del Método.

A pesar de este clima, en los primeros años del siglo XVII la elaboración teórica del sistema copernicano y la acumulación de datos observacionales en su apoyo fue decisiva.

Kepler dió a la imprenta sus trabajos astronómicos fundamentales entre 1604 y 1618, y Galileo efectuaba sus trascendentales observaciones con ayuda del telescopio entre 1609 y 1619. "Tres cuartos de siglo después de la publicación de su genial obra, Copérnico ha vencido, y una de las mutaciones más profundas que conoce el pensamiento occidental a lo largo de su evolución histórica se establece de forma irreversible" [Historia de la Ciencia, Tomo 2, Felipe Cid, Editorial Planeta, pág. 153].

b) Kepler.

Cuando Maestlin (1550-1631) era profesor en Tubinga, si bien enseñaba el sistema de Ptolomeo, también exponía a sus mejores alumnos el sistema de Nicólas Copérnico, del cuál Kepler se convirtió en un adepto convencido.

En 1596, aparece su primera obra publicada "Prodromus dissertationum cosmographicarum continens mysterium cosmographicum" que contiene una representación de las órbitas de los 5 planetas conocidos mediante una sucesión de poliedros regulares encajados en esferas intermedias.

Tycho Brahe (1546–1601), quién no estaba de acuerdo con esta representación, recibió como discípulo a Kepler en Praga en 1600 cuando éste fue expulsado de Graz. Las observaciones de Tycho Brahe sobre Marte fueron el fundamento de las leyes de los movimientos planetarios. Kepler publica en 1609 "Astronomia Nova" donde expone sus dos primeras leyes. En 1619 en "Harmonias mundi libri, tras laboriosos cálculos, enunció su tercera ley.

Kepler rechaza lo que Koyré llama el "hechizo de la circularidad" en su estudio de las trayectorias de los planetas buscando la concordancia con las observaciones de Tycho Brahe, y concibe la idea de adoptar un tipo de curva distinta del círculo. En 1627, publica sus Tablas Rudolfinas haciendo uso de la notación decimal de Stevin y de los logaritmos de Neper, a quién dedica esa obra.

c) Galileo.

Las observaciones astronómicas de Galileo son pruebas decisivas que, junto con las precisas observaciones de Tycho y las generalizaciones matemáticas de Kepler, hunden de forma irreversible la resistente tradición aristótelica en el campo de la ciencia natural.

Gracias a la relación epistolar mantenida con Kepler, sabemos que en 1597 Galileo era ya decidido partidario del sistema copernicano. Galileo conoce el "Mysterium cosmographicum" y escribe a Kepler indicando que, por su parte, ha recogido muchas pruebas naturales que confirman el sistema heliocéntrico.

Construye varios telescopios en busca de perfeccionamiento y se decide por primera vez a observar los cielos con su ayuda. En 1611, expone en su obra "Sidereus nuncius" sus sorprendentes descubrimientos: la existencia de montañas y cráteres lunares, la de nuevas estrellas en Orión y en las Pléyades, la comprobacion de que la Vía Láctea no es una nebulosa en la que se refleja la luz difusa del Sol y de la Luna sino una inmensa colección de estrellas que a simple vista no se pueden distinguir, y sobre todo la existencia de los cuatro satélites de Júpiter.

Este conjunto de hechos invalida una parte sustancial de las críticas anticopernicanas basadas en la cosmología aristotélica. Desde la publicación del "Sidereus nuncius", Galileo se ve obligado a mantener una apasionada defensa del copernicanismo. La exposición de las implicaciones de sus descubrimientos astronómicos, vinculados con otros de sus trabajos, se encuentra principalmente en su famoso "Diálogo sopra i due massimi sistemi del mondo".

6. Filosofía de la ciencia.

a) Matematización de la ciencia.

La nueva ciencia surgida en el Renacimiento queda integrada por diversos elementos: "las investigaciones naturalistas de los últimos escolásticos, que habían dirigido su interés a la naturaleza, apartándolo del mundo sobrenatural, considerado ya como inaccesible para la investigación humana; el aristotelismo del Renacimiento que había elaborado el concepto del orden necesario de la naturaleza; y la doctrina de Telesio (1509 - 1588), que había afirmado la perfecta autonomía de la naturaleza" [Historia de la Filosofía, Tomo II, Abbagnano, pág. 133]. La nueva ciencia integrará estos elementos reduciendo la naturaleza solamente a objetividad mensurable regida por leyes matemáticas.

Galileo perfecciona la tesis de Leonardo da Vinci sobre la estructura matemática de la realidad objetiva. El mundo físico es un entramado de entidades matemáticas con un conjunto de leyes reguladoras cognoscibles con certeza absoluta. Descartes también estaba de acuerdo con "la identificación de las sustancias del mundo real con las entidades matemáticas contenidas en la teoría" [Crombie, pág.273].

De esta concepción ontológica se desprende la adopción de la matemática, no sólo como un instrumento esencial de la investigación, sino como la única herramienta válida para llegar al auténtico conocimiento de la naturaleza. Galileo resume su

postura metodológica para el estudio de la naturaleza en Il Sagiatore (1623):
"La filosofía está escrita en este gran libro continuamente abierto ante nuestros ojos, me refiero al universo, pero no se puede comprender si antes no se ha aprendido su lenguaje y nos hemos familiarizado con los caracteres en los que está escrito. Está escrito en lenguaje matematico, y los caracteres son triángulos, círculos y demás figuras geométricas, sin las cuales es humanamente imposible entender ni una sola palabra; sin ellos se dan vueltas en vano por un oscuro laberinto." [citado en Historia de la Ciencia, Felipe Cid, pág. 147].

El análisis cualitativo de la ciencia aristotélica será sustituido por el ideal cuantitativo, como criterio para discernir en la experiencia los elementos verdaderamente objetivos. La búsqueda de causas mensurables se basará en la premisa de que una variación en la causa producirá una variación en el efecto.

b) El método científico en el siglo XVII.

La búsqueda de un método que pudiera conducir a un conocimiento verdadero de la naturaleza y que garantizara la certeza de sus resultados fue una de las principales preocupaciones del siglo XVII, como lo había sido a lo largo de toda la tradición racionalista europea.

Así, el método inductivo de Bacon expone claramente el principio empírico, pero carece de valor en cuanto a procedimientos técnicos. La colección de casos del fenómeno a investigar se clasifica en Tablas que después son interpretadas, hasta llegar por eliminación a la verdadera definición de la "forma".

Galileo afirma también que el razonamiento sirve para extender la experiencia sensible y para suplirla donde ésta no alcanza, pero no puede sustituirla. El enfoque cinemático de su estudio del movimiento, y su táctica de fraccionar un problema en cuestiones independientes son sus principales aportaciones metodológicas.

Descartes publica en 1637 la obra que marca una época "Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences. Plus la dioptrique, les météores et la geométrie qui sont des essais de cette méthode". Más adelante se verá que en este tratado se exponen las reglas de su método analítico basado en el orden que prepara la mente para un acto intuitivo. La meta de Descartes es reducir las proposiciones complicadas surgidas de la experiencia a proposiciones simples cuya claridad las haga evidentes.

Descartes considera a la matemática universal como la ciencia general que se remite a principios seguros y a demostraciones infalibles con un criterio absoluto de verdad que además es capaz de ofrecer un ordenamiento preciso y racional de todo el conocimiento humano. Este proyecto enciclopédico se basa en la idea de que la unidad de la naturaleza implica la unidad del conocimiento ejemplificada por la imagen del árbol de la ciencia, común a las obras de Bacon y Descartes.

Según lo expone Rossi en su libro "Clavis Universalis", estas características del método son influidas por la tradición luliana que se presenta en la cultura del Renacimiento. También la construcción de una lengua perfecta al estilo de la característica leibniziana fue una de las preocupaciones de los filósofos de la época, problema que también se relacionó con el desarrollo de una lógica formal.

c) Mecanicismo y utilitarismo.

Aunque Bacon fue uno de los primeros autores modernos en proponer la reducción de todos los fenómenos naturales a materia y movimiento, fue Descartes quien no sólo proclamó la filosofía mecanicista como la explicación universal, sino que fue el primero en intentar realizar las explicaciones específicas.

Descartes criticó las obras de Galileo y de Harvey por carecer de investigación causal. La explicación debía ser el fin último de la investigación científica porque era la conexión entre los fenómenos observados por experiencia y las "naturalezas simples", es decir, las ideas autoevidentes e irreductibles.

La concepción mecanicista del universo propone un programa de leyes unificadoras argumentando que todo fenómeno sería explicable por los principios mecánicos universales. Esta creencia en el mecanicismo, que fue sostenida por Bacon, Boyle y Descartes, culminaría en la construcción del mundo-máquina de Newton.

El descubrimiento de la ley fija que rige y explica cada fenómeno provee un medio de predicción y control. La idea utilitaria de la ciencia fue expresada tanto por Bacon como por Descartes. El propósito final de la ciencia es el dominio de la naturaleza, como lo expresa Bacon en el "Novum Organum" (1620, libro I, aforismo 3):

"El saber humano y el poder humano son lo mismo; porque donde no se conoce la causa, no se puede producir el efecto. Para poder dar órdenes a la naturaleza se la debe obedecer; y lo que en la contemplación es como la causa, en la operación es la regla."

Como Bacon, Descartes busca una filosofía no puramente especulativa, sino también práctica por la cual el hombre pueda convertirse en dueño y poseedor de la naturaleza [Discurso,VI].

CAPITULO SEGUNDO

RESUMEN DE LA GEOMETRIA DE DESCARTES

P R O L O G O

"La Geometría" de Descartes ejemplifica la aplicación del Método Cartesiano en el campo de las matemáticas. El antiguo problema de Pappus será resuelto aquí de manera general, mostrando la potencia de este nuevo método. El enunciado de dicho problema puede resumirse como sigue:

Dadas en posición tres o más líneas, se pide encontrar el lugar geométrico de los puntos C tales que trazando desde él otras líneas que hagan un ángulo fijo con las ya dadas, el producto de algunas de ellas esté en una razón dada con el producto de las otras, dependiendo del número de líneas originales.

En el Primer Libro se encuentra la solución al problema de Pappus para el caso de 4 líneas, estando antecedida por una explicación del método algebraico que será utilizado en esta obra. En esta introducción, Descartes relaciona las operaciones aritméticas con sus construcciones geométricas correspondientes, propone la representación de segmentos por medio de letras y la de operaciones con segmentos por medio de operaciones algebraicas. También se explica el modo de llegar a una ecuación que resuelva cada problema, que consiste en suponer el problema ya resuelto, buscar las dependencias de sus elementos y encontrar dos expresiones para alguna cantidad, lo que constituirá una ecuación. También se explica como las ecuaciones cuadráticas pueden ser resueltas con construcciones geométricas hechas con regla y compás.

La generalización completa de la solución al problema de Pappus se encuentra en el Segundo Libro, estando antecedida por la discusión acerca de la caracterización y clasificación de las curvas geométricas que serán hechas con criterios algebraicos. En este libro se expone también el método para trazar normales a las curvas geométricas, y con esto Descartes considera haber abarcado todos los elementos de dichas curvas.

En el Tercer Libro se expone la resolución de ecuaciones de 3o., 4o., 5o. y 6o. grados por medio de reducciones algebraicas del grado de la ecuación y por medio de construcciones geométricas. También se mencionan algunas aplicaciones de estas resoluciones.

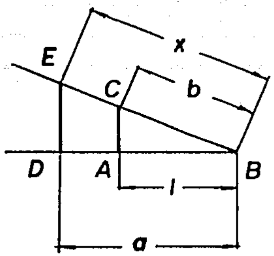
P R I M E R L I B R O

1. Aritmética y geometría.

Todos los problemas de Geometría se pueden reducir fácilmente a términos tales que no haya necesidad más que de conocer las longitudes de ciertas líneas rectas para construirlos.

Por lo tanto, las operaciones aritméticas al ser relacionadas con construcciones geométricas permitirán encontrar las líneas buscadas en los problemas geométricos.
La adición y la sustracción de segmentos no son explicadas por Descartes pero son bien conocidas. La multiplicación y la división equivalen a la búsqueda de una cuarta proporcional; esto es, siendo a y b las longitudes de los segmentos que se quieren multiplicar, formamos la proporción $a:1::x:b$, de donde $x = ab$. Igualmente, si se tiene la proporción $1:a::x:b$, entonces $x = a/b$. La raíz cuadrada se obtendrá buscando la media proporcional entre 1 y a, entonces si $1:x::x:a$, se tiene $x^2 = a$.

Así definidas estas operaciones aritméticas, sus equivalentes construcciones geométricas sólo expresan estas proporciones en triángulos semejantes (ver figuras 1, 2 y 3). La construcción de otras raíces será dada en el tercer libro.



ED // AC

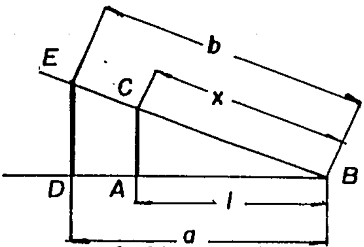
Δ ABC ~ Δ EDB

Figura No. 1

Multiplicación

$BD \cdot BC = x = BE$

$a : 1 :: x : b$



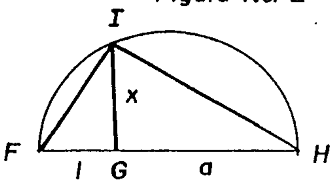
Δ ABC ~ Δ EDB

Figura No. 2

División

$$\frac{BE}{BD} = \frac{b}{a} = x = BC$$

$1 : a :: x : b$



Δ GIH ~ ΔFIG

Figura No. 3

Raíz cuadrada

$$\frac{FG}{GI} = \frac{GI}{GH}$$

$1 : x :: x : a$

$x^2 = a$

$x = \sqrt{a}$

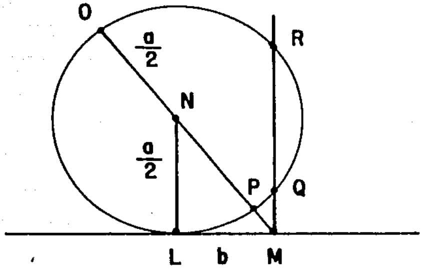
Cada segmento será designado por una sola letra y las operaciones con segmentos serán representadas por operaciones algebraicas con las letras correspondientes.

Las expresiones tales como a^2 o b^3 o parecidas sólo designan la línea obtenida por construcción de la tercera proporcional de 1 y a , etc.; no representan superficies, ni volúmenes, solamente segmentos lineales obtenidos en una multiplicación. Por ejemplo, $1:a::a:x$ implica que $x = a^2$.

2. Ecuaciones.

Para solucionar un problema, se pensará que ya está resuelto y se buscarán las dependencias mutuas entre las líneas hasta llegar a una ecuación, es decir, a dos expresiones de una misma cantidad.

Los problemas geométricos que pueden ser resueltos solamente con rectas y círculos se reducen a una ecuación cuadrática; y, viceversa, toda ecuación de la forma $z^2 = az \pm b$ puede ser resuelta por medio de construcciones con regla y compás, considerando sólo las raíces positivas (fig. 4).



$NL = \frac{a}{2}$

$LM = b$

Figura No. 4

a) $z^2 = az + b^2$

$z = OM = \frac{1}{2} a + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2}$

b) $y^2 = -ay + b^2$

$y = PM = -\frac{1}{2} a + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2}$

c) $z^2 = az - b^2$

$$z = \begin{cases} MQ = \frac{1}{2} a + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2} \\ MR = \frac{1}{2} a - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2} \end{cases}$$

3. El ejemplo de Pappus.

a) Enunciado.

"La cuestión, pues, cuya resolución había sido comenzada por Euclides, y continuada por Apolonio, sin haber sido acabada por nadie, es esta. Teniendo 3 ó 4 ó un número mayor de líneas rectas dadas en posición, primeramente se pide un punto, desde el cual se puedan trazar otras tantas líneas rectas, una sobre cada una de las dadas, que hagan con ellas ángulos dados, y que el <u>rectángulo</u> contenido en 2 de ellas, que serán así trazadas desde un mismo punto, tenga la proporción dada con el <u>cuadrado</u> de la tercera, si no hay más que 3; o bien, con el <u>rectángulo</u> de las otras dos, si hay 4; o bien, si hay 5. que el <u>paralelepipedo</u> compuesto de 3 tenga la proporción dada con el <u>paralelepipedo</u> compuesto de las 2 que quedan y otra línea dada. O si hay 6, que el <u>paralelepípedo</u> compuesto de 3 tenga la proporción dada con el <u>paralelepípedo</u> de las otras 3. O si hay 7, que <u>lo que se produce</u> cuando se multiplican 4 una por otra, tenga la razón dada con <u>lo que se produce</u> por la multiplicación de las otras 3, y además de otra línea dada; o si hay 8, que el <u>producto</u> de la multiplicación de 4 tenga la proporción dada con el <u>producto</u> de las otras 4.

Y así esta cuestión puede extenderse a cualquier otro número de líneas. Luego, como hay siempre una infinidad de puntos que pueden satisfacer lo que se pide aquí, se requiere también conocer, y trazar la línea en la cual deben encontrarse todos ellos. Y Pappus dice que cuando no hay más que 3 ó 4 líneas dadas, se trata de una de las 3 secciones cónicas, pero no intenta determinarla, ni describirla, ni explicar la naturaleza de las líneas requeridas cuando la cuestión es propuesta en un número mayor de líneas" [La Geometría pág. 21-23].

Las palabras cuadrado, rectángulo y paralelepípedo sólo expresan el producto de la multiplicaciónh de los factores de que se trata y no tienen una intención geométrica tridimensional, como se ve en la generalización del problema.

b) Resúmen de la respuesta.

Descartes nos da aquí un breve sumario de su solución, que explicará adelante.

i) Primero agrupa los casos respecto a la clase de líneas que se necesitan emplear para resolver el problema (cuadro 1).

ii) Después agrupa los casos respecto al tipo de líneas que resultan ser los lugares geométricos buscados (cuadro 2).

iii) Finalmente, mostrará cuál es la línea más simple después de las secciones cónicas que resuelva el problema.

C U A D R O 1

Número de líneas dadas	Tipo de geometría que se usa para resolver el problema.
Hasta 5, no todas paralelas	Geometría plana o simple (rectas y círculos)
Desde 5 todas paralelas hasta 9 no todas paralelas	Geometría de sólidos (secciones cónicas)
Desde 9 todas paralelas hasta 13 no todas paralelas	Geometría lineal (curvas de un grado más que las cónicas)
Desde 13 todas paralelas hasta 17 no todas paralelas	Geometría lineal (curvas de un grado más que las precedentes)

... y así hasta el infinito.

C U A D R O 2

Número de líneas dadas	Líneas resultantes
Hasta 4	Recta, círculo o sección cónica
De 5 a 8	Alguna de las anteriores o cada curva un grado más compuesta que las cónicas
De 9 a 12	Cada curva un grado más compuesta que las últimas

c) Primera parte de la respuesta.

Enseguida, se muestra la primera parte de la respuesta al problema en el caso de 4 líneas dadas (Fig. 5).

Sean AB, AD, EF y GH las líneas dadas en posición. Se busca un punto, como C, desde el cual, habiendo trazado otras rectas sobre las dadas, como CB, CD, CF y CH, de modo que los ángulos CBA, CDA, CFE y CHG sean dados y que el producto de la multiplicación de una parte de esas líneas sea igual al producto de la multiplicación de las otras, o bien que tengan alguna otra proporción dada.

Se consideran una de las líneas conocidas y una de las desconocidas, AB y CB, como las principales, en función de las cuales se expresarán todas las demás.

AB se designa por x y BC se designa por y.

Se prolongan todas las otras líneas hasta cortar éstas dos en los puntos marcados en la figura. Enseguida, se buscarán expresiones para CB, CD, CF y CH en función de x y y.

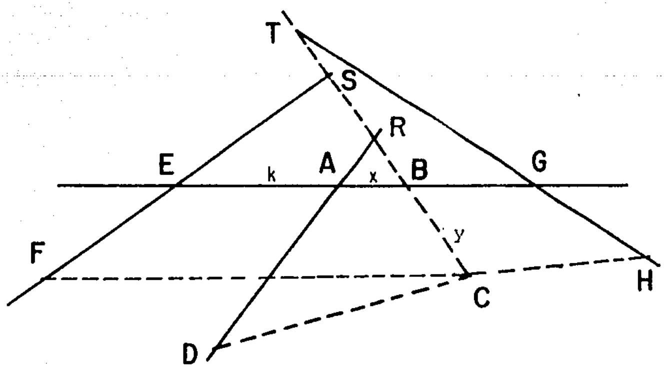


Figura No. 5

Ya que todos los ángulos del triángulo ARB son conocidos, la proporción que hay entre sus lados AB y BR es conocida, pues la razón de los senos de los ángulos opuestos es conocida, y se le denominará z/b. De donde, $BR = bx/z$, entonces,

$$CR = y + \frac{bx}{z}$$

(los signos + ó – dependen del caso particular).

Igualmente, todos los ángulos del triángulo DRC son dados, y por consiguiente, la proporción entre sus lados CR y CD es conocida. Sea dicha proporción z/c, entonces:

$$CD = \frac{c}{z}\ CR$$

$$= \frac{cy}{z} + \frac{cbx}{z^2}$$

Ya que las líneas AB, AD y EF están dadas en posición, la distancia que hay entre los puntos A y E es conocida, y si se lo llama k, tendremos $EB = k + x$ (los signos dependerán de la posición que se considere para los puntos A, B y E).

Como los ángulos del triángulo ESB están dados, se conoce la proporción de BE a BS, que designaremos por z/d, entonces:

$$BS = \frac{d}{z}\,BE = \frac{dk + dx}{z}$$

y por lo tanto:

$$CS = \frac{zy + dk + dx}{z}$$

(los signos dependen de las posiciones de S, B y C).

Como los ángulos del triángulo FSC son dados, la proporción $\frac{CS}{CF} = \frac{z}{e}$ será conocida. Entonces:

$$CF = \frac{e}{z}\,CS = \frac{ezy + edk + edx}{z^2}$$

Del mismo modo, siendo $AG = l$, $BG = l-x$.

Si $\frac{BG}{BT} = \frac{z}{f}$, entonces $BT = \frac{fl - fx}{z}$,

entonces $CT = \frac{zy + fl - fx}{z}$;

y siendo $\frac{TC}{CH} = \frac{z}{g}$, entonces:

$$CH = \frac{g}{z} CT = \frac{gzy + gfl - gfx}{z^2}.$$

d) Primeras generalizaciones.

Así pues, para cualquier número de líneas dadas, todas las líneas trazadas desde C bajo las condiciones del problema se pueden expresar por una suma de la forma $ax + by + c$.

En caso que las líneas dadas sean paralelas a AB ó a CB, el término en x o en y será nulo respectivamente.
Así, al multiplicar n de esos segmentos se encontrarán términos de grado a lo más n para x ó y.

Veremos en seguida que, cuando el problema se plantea en 5 líneas o menos, se puede resolver con regla y compás.

La condición para determinar el punto C puede expresarse como una ecuación con 2 incógnitas, entonces se puede dar un valor arbitrario a y ó a x, y encontrar el correspondiente valor de la otra. En el caso de 5 líneas ó menos, la cantidad x, que no aparece en la expresión del primer segmento (CB = Y), no puede tener un grado mayor que 2.

Entonces, asignando un valor a y tendremos una ecuación de la forma $x^2 = \pm ax \pm b^2$ que puede ser resuelta con regla y compás como se vió anteriormente.

Asignando un número infinito de valores a y, obtendremos infinitos valores correspondientes de x, y la curva buscada podrá ser conocida por esta sucesión de puntos determinados por x y por y.

También se pueden solucionar con regla y compás los casos de 6 o más líneas cuando hay entre ellas algunas paralelas a AB o a BC, de modo que alguna de las incógnitas se encuentre solamente en segundo grado.

En el caso de cinco líneas todas paralelas, C no puede encontrarse con regla y compás, ya que no aparecerá x en la ecuación, y se deberá resolver una ecuación de tercer grado en y, lo cual requiere el uso de alguna sección cónica.

Aún teniendo hasta 9 líneas no todas paralelas, se puede hacer que la ecuación sea a lo más de grado 4. Adelante se mostrará que estas ecuaciones pueden resolverse siempre por medio de secciones cónicas.

Teniendo hasta 13 líneas no todas paralelas, se puede hacer que la ecuación sea a lo más de grado 6. Más adelante se mostrará que estas ecuaciones pueden resolverse siempre por medio de curvas de grado mayor que las cónicas.

S E G U N D O   L I B R O

1. Introducción.

Los antiguos clasificaban las curvas como geométricas y mecánicas. Las geométricas comprendían rectas, círculos y secciones cónicas. Las mecánicas eran todas las otras curvas más compuestas.

Descartes refuta esta última clasificación explicando que:

i) todas las curvas son "mécanicas", en el sentido que todas requieren de un instrumento o máquina para ser trazadas

ii) la imprecisión de trazado de las más complejas no impide tener la misma perfección en el conocimiento teórico de ellas;

iii) sólo es necesario agregar el postulado: "dos ó más líneas pueden moverse, una sobre otra, determinando sus intersecciones otras curvas" para trazar las líneas que Descartes desea introducir en la categoría de las geométricas.

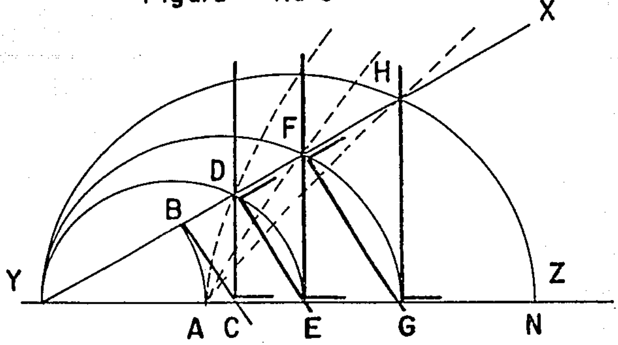
Las líneas geométricas serán aquellas que pueden imaginarse como descritas por un movimiento continuo o por varios que se siguen, cada uno enteramente determinado por los que le preceden. Así pues, la espiral, la cuadratriz y otras descritas por 2 movimientos independientes no son líneas geométricas.

2. Ejemplo.

Enseguida, Descartes muestra un ejemplo de una máquina que traza curvas de grados sucesivamente crecientes (Fig.6). Consideremos las curvas AB, AD, AF y las similares que se supone han sido descritas con ayuda del instrumento YZ. Este instrumento está compuesto de varias reglas tan unidas que estando la marcada con YZ apoyada en la línea AN , se puede abrir o cerrar el ángulo XYZ; y que cuando éste está completamente cerrado, los puntos B, C, D, F, G y H coinciden todos en el punto A. Pero que, a medida que se abre, la regla BC, unida en ángulo recto con XY en el punto B, empuja hacia Z la regla CD, que corre asimismo sobre YX conservándose paralela a BC; DE empuja EF, EF empuja FG, ésta empuja GH, y así pueden concebirse una infinidad de ellas que se empujen consecutivamente del mismo modo, unas haciendo siempre los mismos ángulos con YX y otras con YZ.

Mientras se abre así el ángulo XYZ, el punto B describe la línea AB, que es un círculo, y los otros puntos D, F y H, donde se intersectan las otras reglas con XY, describen otras líneas curvas AD, AF, AH, de las cuales las últimas son más compuestas por orden que la primera y ésta lo es más que el círculo. Todas estas curvas pueden ser conocidas con toda precisión y, por lo tanto, pueden ser recibidas dentro de las geométricas.

Figura No 6



Por ejemplo, para conocer la ecuación de la curva AD, designemos $YA = YB = a$, $YC = x$, $CD = y$, $YD = z$; entonces $z:x = x:a$ por la semejanza de los triángulos YBC y YDC. De aquí se tiene que $z = x^2 / a$. Además, $z^2 = x^2 + y^2$; y por lo tanto, la ecuación de la curva será $x^2 = a^2 (x^2+y^2)$.

3. Característica de las curvas geométricas.

Descartes señala que todos los puntos de las curvas llamadas geométricas, "es decir, que caen bajo una medida precisa y exacta, tienen necesariamente alguna relación con todos los puntos de una línea recta, que puede ser **expresada por alguna ecuación**" (pág. 49). Esta declaración contiene el concepto fundamental de la geometría analítica.

Las curvas se clasificarán en géneros dependiendo del grado de su ecuación de la siguiente manera: en el primer género, las curvas de grado 2, en el segundo género las de tercero y cuarto grados, en el tercer género las de quinto y sexto grados, etcétera. La razón de esto es que hay una regla general para reducir al tercer grado las ecuaciones de cuarto, y a quinto las de sexto.

4. Continuación de la respuesta al problema de Pappus.

En el primer libro se habían obtenido los siguientes valores para el caso de 4 líneas:

$$CB = y, \qquad CD = \frac{czy + bcx}{z^2}, \qquad CF = \frac{ezy + dek + dex}{z^2}$$

$$CH = \frac{gzy + fgl - fgx}{z^2}$$

Ya que CB multiplicado por CF debe ser igual a CD por CH, la ecuación será:

$$y^2 = \frac{(cfglz - dekz^2)y - (dez^2 + cfgz - bcgz)xy + bcfglx - bcfgx^2}{ez^3 - cgz^2}$$

Aquí se supuso que ez es mayor que cg, de otro modo se deben cambiar los signos + y −. Si y es negativa o cero en esta ecuación, suponiendo que está C dentro del ángulo DAG, habrá que suponer que está dentro de alguno de los ángulos DAI, EAR ó RAG y los signos deberán ser cambiados como corresponda. Si en las 4 posiciones se obtiene una "y" nula el problema será imposible de resolver. Suponiendo que éste no es el caso, sean

$$2m = \frac{cflgz - dekz^2}{ez^3 - cgz^2}, \qquad \frac{2n}{z} = \frac{dez^2 + cfgz - bcgz}{ez^3 - cgz^2}$$

Entonces se tendrá: $y^2 - 2my - \frac{2n}{z}xy + \frac{bcfglx - bcfgx^2}{-cgz^2 + ez^3}$

cuya raíz es:

$$y = m - \frac{nx}{z} + \sqrt{m^2 - \frac{2mnx}{z} + \frac{n^2x^2}{z^2} + \frac{bcfglx - bcfgx^2}{ez^3 - cgz^2}}$$

Para abreviar, sean:

$$o = -\frac{2mn}{z} + \frac{bcfgl}{ez^3 - cgz^2} \ ; \qquad \frac{p}{m} = \frac{n^2}{z^2} - \frac{bcfg}{ez^3 - cgz^2}$$

Entonces:

$$y = m - \frac{n}{z}x + m^2 + ox + \frac{p}{m}x^2$$

Las distintas clases de curvas que representa la ecuación de la forma general

$$y = \pm m \pm \frac{n}{z}x \pm \frac{n^2}{x} \pm \sqrt{\pm m^2 \pm xo \pm \frac{p}{m}x^2}$$

pueden ser agrupadas como sigue:

A) Si todos los términos del miembro derecho son cero, excepto n^2/x, la ecuación representa una hipérbola referida a sus asíntotas.

B) Si n^2/x no aparece, hay varios casos:

a) Si la cantidad bajo el radical es cero ó un cuadrado perfecto, la ecuación representa una recta,

b) Si la cantidad no es cuadrado perfecto y si $\frac{p}{m} x^2$ la ecuación representa una parábola,

c) Si no es cuadrado perfecto y si $\frac{p}{m} x^2$ es negativo, la ecuación representa un círculo o una elipse,

d) Si $\frac{p}{m} x^2$ es positivo, la ecuación representa una hipérbola.

5. El caso de 5 líneas.

Si todas las líneas son paralelas, el lugar geométrico buscado será una recta.

Si se tiene alguno de los siguientes casos que son los mas simples posibles después del precedente, el punto buscado yacerá en una curva descrita por el movimiento de una parábola de la manera que se explica enseguida:

a) cuatro líneas paralelas y la quinta perpendicular a ellas,

b) que las líneas trazadas desde el punto buscado corte las líneas dadas en ángulos rectos,

c) si el producto de tres de las líneas así trazadas sobre 3 de las que son paralelas es igual al producto de dos líneas trazadas una sobre la cuarta de las que son paralelas y la otra sobre la que las corta en ángulos rectos y de una tercera línea dada.

Sean, por ejemplo, las líneas AB, IH, ED, GF y GA, y que se pida encontrar el punto C tal que si CB, CF, CD, CH y CM son dibujados perpendiculares a las correspondientes líneas dadas, el producto de CF, CD y CH sea igual al de CB y CM con un tercer segmento AI. Sean CB = y, CM = x, AI = AE = GE = a (ver Fig. 7).

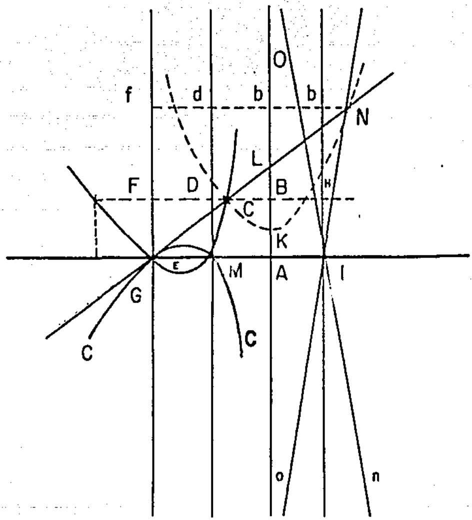


Figura No 7

Suponiendo que C está entre AB y DE se tendrá que $CF = 2a - y$, $CD = a - y$, $CH = y + a$. Multiplicando estas tres juntas se obtiene $y^3 - 2ay^2 - a^2y + 2a^3$ igual al producto de las otras 3 o sea axy.

Considérese ahora la curva CEG, la que se imaginará descrita por la intersección de la parábola CKN, la cual es movida de tal modo que su diámetro KL esté siempre sobre la recta AB, y de la regla GL que mientras gira alrededor del punto G de tal modo que pasa siempre en el plano de la parábola por el punto L.

Sea $KL = a$, y sea también a el lado recto de la parábola, y sean $CB = MA = y$, $CM = AB = x$. Ya que los triángulos GMC y CBL son semejantes se tiene que:

$\frac{GM}{MC} = \frac{CB}{BL}$, entonces $\frac{2a - y}{x} = \frac{y}{BL}$, de donde $BL = \frac{xy}{2a-y}$

Ya que $BK = LK - BL$, se tiene que:

$$BK = a - \frac{xy}{2a - y} = \frac{2a^2 - ya - xy}{2a - y}$$

Finalmente, ya que BK es un segmento del eje de la parábola y a es el lado recto, se tiene que:

$\frac{BK}{BC} = \frac{BC}{a}$, de donde $y^3 - 2ay^2 - a^2y + 2a^3 = axy$;

y por consiguiente el punto C es el que se buscaba.

El punto C puede ser tomado en cualquier lugar de la curva CEG ó en su adjunta cEGc que se describe del mismo modo pero con el vértice de la parábola hacia el otro lado, o en sus contrapuestas NIo, nIO, que son descritas por la intersección de la recta GL con la otra rama de la parábola.

Aún si las paralelas no son equidistantes y si Ga no es perpendicular a ellas, la curva buscada será de la misma naturaleza. Para los demás casos, Descartes no da mayores detalles y considera resuelto el problema.

Descartes considera que es imposible conocer la proporción entre las rectas y curvas; y que por lo tanto, las líneas que parecen cuerdas no deben ser recibidas en las geométricas.

6. La utilidad del método de la geometría analítica.

Cuando la relación entre los puntos de una curva y los de una recta, es decir, su ecuación, es conocida, es fácil encontrar las relaciones de esta curva con otros puntos o líneas; y por estas relaciones encontrar sus ejes, diámetros, centros y otras líneas y puntos de especial significado para esa curva, y así se describirá la curva de varias maneras, pudiendo escoger la más sencilla.

Descartes considera que su método es suficiente para determinar casi todo lo que se refiere a las áreas comprendidas entre curvas, pero no da más explicaciones.

Todas las demás propiedades de las curvas tambien pueden conocerse ya que sólo dependen de los ángulos que forman con otras líneas, definiendo el ángulo entre 2 curvas como el ángulo entre las normales de las curvas en el punto de intersección.

Es por esto, que Descartes considerará haber abarcado todos los elementos de las curvas después de dar el método para trazar normales.

7. Método para trazar normales.

Considérese la figura 8. Sea CE la curva y sea C el punto donde se quiere trazar la normal. Suponiendo el problema ya resuelto, sea CP la línea buscada, la cual se prolonga hasta intersectar la recta GA en P. Dicha recta es a la que se reportan todos los puntos de la curva CE, es decir, es un eje coordenado. Siendo MA = y, CM = x, se conocerá la ecuación que relaciona x con y. Siendo PC = s, PA = v, se tiene que PM = v − y. Ya que el triángulo PMC es rectángulo se tiene que $s^2 = x^2 + (v-y)^2$,

de donde $y = v - \sqrt{s^2 - x^2}$

ó también $x = \sqrt{s^2 - v^2 + 2vy - y^2}$ . . . . (1)

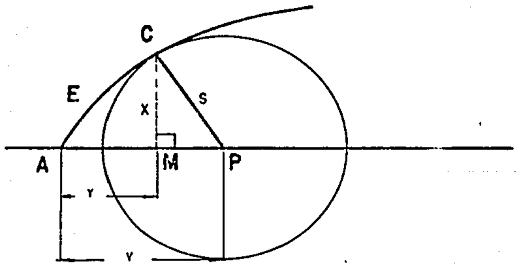


Figura No. 8

Ahora se sustituye una de las cantidades x ó y en la ecuación de la curva, obteniendo así una ecuación con una sola literal.

Sea, por ejemplo, la elipse de ecuación:

$$x^2 = ry - \frac{r}{q} y^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

donde r es el lado recto y q es el eje transverso.

Eliminando x^2 al sustituir (1) en (2), se tiene:

$$y2 + \frac{qry - 2qvy + qv^2 - qs^2}{q - r} = 0 .$$

Una vez encontrada dicha ecuación, en lugar de utilizarla para determinar x ó y que son conocidas, pues el punto C está dado, se la usa para encontrar v ó s que determinan el punto buscado P.

Para esto, hay que considerar que si P es el punto deseado, el círculo que pasa por C y con centro en P será tangente a la curva CE. Entonces, la última ecuación debe tener una raíz única e, y por lo tanto, su miembro izquierdo será el cuadrado del binomio y − e. En caso que la expresión resultante no sea del grado de la precedente, deberá ser multiplicada por otra expresión que la haga del mismo grado para que se puedan igualar término a término.

Siguiendo el ejemplo de la elipse, se tiene que su miembro izquierdo debe ser: $(y-e)^2 = y^2 - 2ey + e^2$. Igualando los coeficientes de y se tiene que:

$$\frac{qry - 2qvy}{q - r} = -2ey\ ;$$

de donde: $$v = e - \frac{r}{q}e + \frac{1}{2}r\ .$$

Y, ya que $y = e$, se tiene: $v = y - \frac{r}{q}y + \frac{1}{2}r$.

Esta cantidad v determina suficientemente el punto buscado P.

8. Otro ejemplo.

Sea la curva de ecuación

$y^3 - by^2 - cdy + bcd + dxy = 0$ . . . .(3)

Eliminando x, al sustituir (1) en (3), se tiene:

$$y^3 - by^2 - cdy + bcd + dy\sqrt{s^2 - v^2 + 2vy - y^2} = 0.$$

Acomodando los términos por medio de la multiplicación, se tiene que:

$$y^6 - 2by^5 + (b^2-2cd+d^2)y^4 + (4bcd-2d^2v)y^3$$
$$+ (c^2d^2-d^2s^2+d^2v^2-2b^2cd)y^2 - 2bc^2d2y + b^2c^2d^2 = 0.$$

El miembro izquierdo debe tener la misma forma que la expresión obtenida multiplicando $(y-e)^2 = y^2-2ey+e^2$ por $y^4 + fy^3 + g^2y^2 + h^3y + k^4$, es decir,

$$y^6 + (f-2e)y^5 + (g^2-2ef+e^2)y^4 + (h^3-2eg^2+e^2f)y^3$$
$$+ (k^4-2eh^3+e^2g^2)y^2 + (e^2h^3-2ek^4)y + e^2k^4 .$$

De estas 2 ecuaciones se sacan otras 6, que sirven para conocer las cantidades f, g, h, k, v y s. Para encontrar la cantidad v que es la única necesaria para determinar el punto P, se van despejando las otras por igualación de términos del mismo grado. Igualando los términos independientes o de grado cero se obtiene: $k^4 = \dfrac{b^2c^2d^2}{e^2}$.

Igualando los términos de primer grado se obtiene:

$$h^3 = \frac{2b^2c^2d^2}{e^3} - \frac{2bc^2d^2}{e^2}$$

Así se sigue en el mismo orden

6 5 4 3 2 1 0

1 3 5 6 4 2

hasta encontrar la última, si hubiera más.

Igualando los términos de tercer grado se puede despejar v:

$$v = \frac{2e^3}{d^2} - \frac{3be^2}{d^2} + \frac{b^2e}{d^2} - \frac{2ce}{d} + e + \frac{2bc}{d} + \frac{bc^2}{e^2} - \frac{b^2c^2}{e^3} \quad ;$$

y poniendo y = e, se obtiene:

$$v = \frac{2y^3}{d^2} - \frac{3by^2}{d^2} + \frac{b^2y}{d^2} - \frac{2cy}{d} + e + \frac{2bc}{d} + \frac{bc^2}{y^2} - \frac{b^2c^2}{y^3}$$

que será la longitud de AP.

Este método puede usarse también para trazar tangentes a una curva por un punto dado, y para descubrir puntos de inflexión, máximos y mínimos.

TERCER LIBRO

1. Introducción.

En Geometría se tratará siempre de resolver cada problema usando las líneas curvas más simples que se pueda. Esto no quiere decir que sean las que se describen más fácilmente, ni que permitan una construcción o demostración del problema más fácil; sino principalmente las que sean del genero más simple que permita encontrar la cantidad buscada. Para evitar utilizar curvas más complicadas de lo necesario o demasido simples se darán algunas reglas, pero para esto es necesario primero hablar de la naturaleza de las ecuaciones.

2. Ecuaciones.

Una ecuación con una incógnita puede tener tantas raíces como el número que denota su grado. Aquí cabe notar que Descartes escribe "puede tener" y no "debe tener" pues él sólo considera las raíces reales positivas como verdaderas raíces.

Las raíces negativas serán llamadas raíces falsas.

Cuando una ecuación es igualada a cero en la forma $F(x)=0$, su miembro izquierdo es divisible entre un binomio de la forma $x-a$ donde a es una raíz. Realizando la división se puede bajar el grado de la ecuación.

Si el polinomio no es divisible entre el binomio x-a, entonces a no es el valor de ninguna de las raices.

Un polinomio tiene tantas raíces positivas o verdaderas como cambios de signo tenga, y tantas negativas o falsas como veces se sigan 2 signos iguales.

Para hacer que las raíces verdaderas se vuelvan falsas y viceversa, se deben cambiar los signos de los términos que se encuentran en los lugares pares del polinomio y dejar los otros sin cambio:

$$P = \underset{1}{x^n} + \underset{2}{a_{n-1} x^{n-1}} + \underset{3}{a_{n-2} x^{n-2}} + \dots + \underset{n}{a_1 x} + \underset{n+1}{a_0}$$

Para aumentar o disminuir el valor de una raíz, sin conocerla, se sustituye la incógnita por otra variable que sea mayor o menor que la primera, obteniendo así una nueva ecuación.

Las raices de esta nueva ecuación serán la suma de las antiguas con el número positivo o negativo que se haya agregado; y es posible que algunas cambien de verdaderas a falsas o viceversa si la cantidad les sobrapasa en valor absoluto.

Para desaparecer el segundo término del polinomio p se cambia el valor de sus raíces del siguiente modo:

a) si los signos del primero y segundo términos son distintos, la nueva variable será $z = x - \frac{|a_{n-1}|}{n}$;

b) si los signos son iguales, la nueva variable será

$$z = x + \frac{|a_{n-1}|}{n}$$

La nueva ecuación en z carecerá del término de grado n-1.

Para hacer que todas las raíces de un polinomio sean verdaderas se debe aumentar la variable un número mayor que el máximo valor absoluto de las raíces falsas. Cuando esto sucede no hay 2 signos iguales consecutivos, y además el coeficiente del tercer término es mayor que el cuadrado de la mitad del segundo, es decir, $a_{n-2} > \left(\frac{a_{n-1}}{2}\right)^2$

Para tener presentes todos los términos del polinomio, es decir, con coeficientes todos distintos de cero, basta aumentar la variable con cualquier número positivo y sustituir para obtener una nueva ecuación como se quiere.

También se pueden dividir o multiplicar el valor de las raíces cambiando la incógnita por otra dividida o multiplicada por el número que se quiera (x=by). Si la primera ecuación es $x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0 = 0$, la nueva ecuación será de la forma:

$$y^n + \frac{a_{n-1}}{b} y^{n-1} + \frac{a_{n-2}}{b^2} y^{n-2} + \ldots + \frac{a_0}{b^n} = 0$$

Esto puede servir para cambiar los coeficientes fraccionarios por enteros y en algunos casos para quitar radicales en los coeficientes, o en general para cambiar algún coeficiencte por otro deseado.

Como ya se dijo, una ecuación de grado n tiene n raíces, aunque algunas de ellas pueden ser imaginarias. Estas raíces no pueden hacerse reales aunque se les hagan las operaciones antes explicadas.

3. Reducciones.

A.- Cuando para encontrar la construcción de un problema, se llega a una ecuación de tercer grado se deben seguir los siguientes pasos:

a) Primero, se deben reducir a enteros los coeficientes fraccionarios, si los hay, por medio de la multiplicación mencionada antes. Si hay radicales deben racionalizarse, en lo posible, por medio de la multiplicación o de alguna otra forma.

b) Después, examinando por orden los factores del último término, se determinará si con alguno de ellos puede formarse un binomio al sumarlo o restarlo a la incógnita x que divida el polinomio. Si esto es posible, el problema puede construirse con regla y compás; ya que, o bien la cantidad conocida de este binomio es la raíz buscada; o bien, la ecuación dividida por él se reduce a una de segundo grado que puede ser resuelta de la manera expuesta en el primer libro.

Si no es posible encontrar ningún binomio que divida toda la suma, se sabrá que el problema sólo puede resolverse por medio de cónicas o de curvas más compuestas.

B.- Cuando la ecuación es de cuarto grado se procederá de la siguiente manera para reducirla:

a) Se procurará que todos los coeficientes sean enteros.

b) Se buscará un binomio que divida al polinomio de cuarto grado y que sea la suma o resta de la incógnita con algún factor del último término. Si se encuentra este binomio, la cantidad conocida será la raíz buscada, o al menos, al dividir el polinomio se obtendrá una ecuación de tercer grado que puede ser resuelta como se dijo antes.

c) Si no se encuentra dicho binomio, se seguirán los siguientes pasos: primero, se desaparecerá el segundo término del polinomio, en la manera ya explicada, obteniendo una ecuación de la forma:

$$y^6 + 2py^4 + (p^2 + 4r) y^2 - q^2 = 0 .$$

Considerando que la incógnita de esta ecuación es y^2, se puede resolver con el método para ecuaciones de tercer grado. Si no es posible hacerlo, se puede concluir que el problema es sólido. Pero si se encuentra el valor de y^2, se formarán estas dos ecuaciones de segundo grado:

$$x^2 - yx + \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{2} p + \frac{q}{2y} = 0$$

$$x^2 + yx + \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{2} p - \frac{q}{2y} = 0$$

Estas ecuaciones pueden resolverse con círculos y rectas, y sus raíces serán las mismas que las de la ecuación de cuarto grado.

C.- Para las ecuaciones de quinto grado ó más altos grados se tiene la siguiente regla general:

a) Tratar de poner la ecuación dada en la forma de una ecuación del mismo grado obtenida por la multiplicación de otras 2, cada una de grado inferior.

b) En caso que esta reducción no sea posible; si la ecuación es de tercer ó cuarto grado, el problema es sólido; si es de quinto ó sexto grado el problema es un grado más compuesto, y así sucesivamente.

4. Resolución gráfica de ecuaciones de tercero y cuarto grados. Problemas sólidos.

A.- Regla.

Cuando se tiene la seguridad de que el problema propuesto es sólido, es decir, que su ecuación es de tercer ó cuarto grado y no se puede reducir, se puede siempre encontrar la raíz usando cualquiera de las 3 secciones cónicas, círculos y rectas solamente. Enseguida se da una regla general para resolver todas estas ecuaciones usando una parábola, ya que en cierta forma es la más simple.

a) El segundo término del polinomio debe desaparecer, obteniendo una ecuación de la forma:

$$z^3 = \pm pz \pm q \quad ó \quad z^4 = \pm pz^2 \pm qz \pm r .$$

Se tomará a como la unidad.

b) Dibujar los siguientes elementos:

-la parábola FAG tal que su eje sea la recta ACDKL, A su vértice y su lado recto a = 1,

-el punto C, tal que AC = $\frac{1}{2}$ con C dentro de la parábola,

-el punto D, tal que CD = $\frac{1}{2}p$, con D y A del mismo lado de C si p es positivo ó en lados contraios si p es negativo. Si p = 0 , entonces C = D,

-el punto E tal que ED sea perpendicular al eje de la parábola y que ED = $\frac{1}{2}q$,

-el círculo con centro en E y radio AE , si r = 0 , es decir, si la ecuación es cúbica (Figura 9).

Si r es positivo, el círculo con centro en E y radio EH; donde H es el punto obtenido de la siguiente manera: prolongando AE se toma de un lado AR = r y del otro AS = 1, se construye el círculo de diámetro RS, se traza la perpendicular a AE en A y su intersección con éste círculo será H (Figura 10).

Si r es negativo, el círculo con centro en E y radio EI, donde I es el punto obtenido de la siguiente manera: después de localizar H como se explicó antes, se construye el círculo de diámetro AE y sobre él se traza la cuerda AI tal que AI = AH (Figura 11).

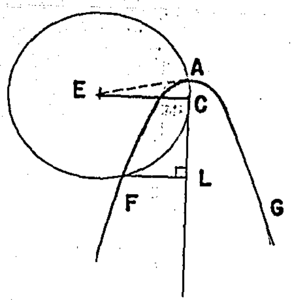


Figura No 9

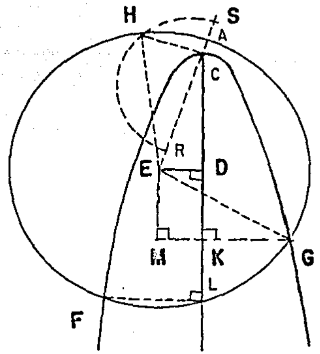


Figura No 10

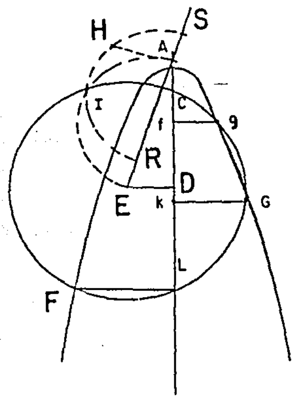


Figura No. 11

c) Este círculo con centro en E puede cortar la parábola en 1, 2, 3 ó 4 puntos. Tirando segmentos perpendiculares al eje desde ellos se tendrán las raíces de la ecuación.

Si q es positivo, las raíces positivas serán las longitudes de los segmentos perpendiculares que se encuentren del mismo lado del eje que el punto E. Las otras serán las negativas.

Si q es negativo, será a la inversa. Si el círculo no toca la parábola todas las raíces serán imaginarias.

B.- Demostración.

Se demostrará, como un ejemplo, en el caso de la Figura 10, que el segmento GK que se designará por z cumple la ecuación

$pz^2 - qz + r = z^4$.

a) $AC = \frac{1}{2}$; $CD = \frac{1}{2}\, p$; $GK = z$

por la naturaleza de la parábola se tiene: $z^2 = AK$

$DK = AK - AC - CD$

$DK = EM$

$DK = z^2 - \frac{1}{2}\, p - \frac{1}{2}$

$$(EM)^2 = (DK)^2 = z^4 - pz^2 - z^2 + \frac{1}{4}\, p^2 + \frac{1}{2}\, p + \frac{1}{4}$$

b) $DE = KM = \frac{1}{2} q$

$GM = GK + KM = z + \frac{1}{2} q$

$(GM)^2 = z^2 + qz + \frac{1}{4} q^2$

c) Como el ángulo EMG se construye recto, el triángulo EMG es rectángulo, entonces:

$(GE)^2 = (EM)^2 + (GM)^2$

$(GE)^2 = z^4 - pz^2 + qz + \frac{1}{4} q^2 + \frac{1}{4} p^2 + \frac{1}{2} p + \frac{1}{4}$

d) Como GE es radio del círculo con centro en E, se buscará el otro radio EH para igualarlos.

En el triángulo rectángulo EAD se tiene que:

$EA^2 = AD^2 + ED^2$

$EA^2 = (\frac{1}{2} p + \frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2} q)^2$

$EA = \sqrt{\frac{1}{4} q^2 + \frac{1}{4} p^2 + \frac{1}{2} p + \frac{1}{4}}$

En el triángulo rectángulo EAH se tiene que:

$EH^2 = EA^2 + AH^2$

$EH^2 = \frac{1}{4} q^2 + \frac{1}{4} p^2 + \frac{1}{2} p + \frac{1}{4} + r$

($AH = \sqrt{r}$ pues $AR = r$)

e) Como $GE^2 = EH^2$, entonces $z^4 = pz^2 - qz + r$.

Por lo tanto, queda demostrado que z es raíz de esta ecuación.

5. Dos construcciones que resuelven todos los problemas sólidos.

A.- La primera construcción que se hace aplicando la regla anteriormente expuesta es la de 2 medias proporcionales. Sean a y q dos cantidades dadas, se buscan z y x tales que $\frac{a}{z} = \frac{z}{x} = \frac{x}{q}$, entonces $x = \frac{z^2}{a}$ y $q = \frac{z^3}{a^2}$

entonces $z^3 = a^2 q$.

Por la construcción de la figura 9, tomando $AC = \frac{1}{2}$ a, y $CE = \frac{1}{2}$ q , se obtienen FL y LA como las 2 medias proporcionales buscadas (si a = 1, esta construcción nos da la raíz cúbica de un número q).

B.- La segunda construcción es la trisección de un ángulo. Sea en el círculo con centro en O y radio NO = 1 el arco NQTP que se quiere trisectar. Sea NP = q, y NQ = QT = TP = z. Sea QS paralela a TO (figura 12).

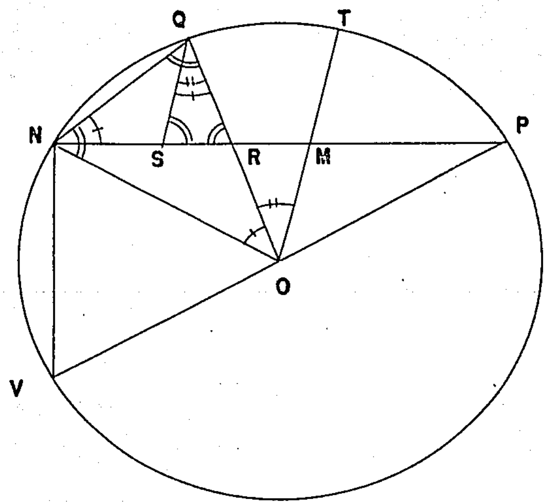


Figura No. 12

El ángulo NOQ es medido por el arco NQ.

El ángulo QNS es medido por la mitad del arco QP, o sea NQ.

El ángulo SQR, que es igual al ángulo QOT, es medido por el arco QT o por el arco NQ.

Por lo tanto, los ángulos OQN, NQR y QSR son iguales. En consecuencia, los triangulos NOQ, NQR y QSR son congruentes.

Entonces, $NO : NQ = NQ : QR = QR : RS$

$QR = z^2 \; ; \; RS = z^3$

$NP = 2NR + MR = 2NQ + MR = 2NQ + MS - RS$

$\quad = 2NQ + QT - RS = 3NQ - RS$

Es decir, $q = 3z - z^3$.

6. Resolución de ecuaciones de 5o. y 6o. grados.

Se ha visto que la curvtura del círculo, al depender únicamente de un parámetro (su radio), puede servir para determinar un solo punto, como al buscar una media proporcional o al bisectar un ángulo.

Así tambien, la curvatura de las secciones cónicas, al depender de 2 parámetros, puede servir para determinar 2 puntos, como al buscar 2 medias proporcionales o al trisectar un angulo.

Del mismo modo, es imposible que los problemas que son un grado mas compuestos que los sólidos, y que presuponen la búsqueda de 4 medias proporcionales, o la división de un ángulo en 5 partes iguales, puedan ser construídos por medio de secciones cónicas.

En la regla que se dará enseguida, se empleará la curva descrita por la interseccion de una parábola y una recta en movimiento, en la forma explicada en el párrafo e del 2o. libro, que es la más simple de su género.

La ecuación debe ser llevada a la forma:

$y^6 - py^5 + qy^4 - ry^3 + 5y^2 - ty + u = 0$

en la cual q es mayor que $(\frac{1}{2} p)^2$.

Sea la recta infinita BK y A el punto tal que AB sea perpendicular a BK, y $AB = \frac{1}{2} p$.

Sea la parábola CDF, cuyo lado recto es

$$n = \sqrt{\frac{t}{u} + q - \frac{1}{4} p^2}$$

y cuyo eje DE coincide con la recta BK (Figura 13).

Sea $DE = \frac{2 \sqrt{u}}{pn}$

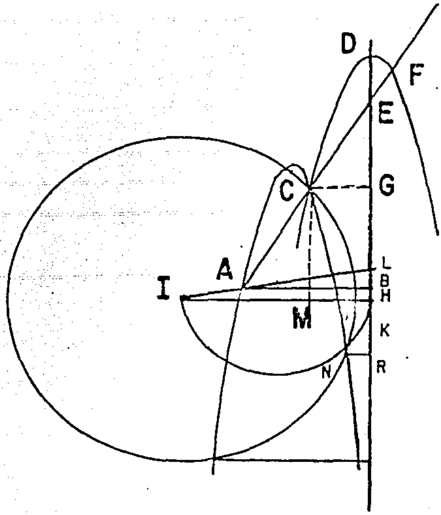


Figura No. 13

SE aplica en E y en A una larga regla de tal modo que siempre una los puntos A y E, mientras se baja o se sube la parábola a lo largo de la recta BK. La intersección de la parábola y la recta AE se da en el punto C que describe la curva ACN, la cual nos servirá para resolver la ecuación .

Sea el punto L sobre la recta BK del lado del vértice de la parábola, y tal que BL = DE = $\frac{2\sqrt{u}}{pn}$

Sea el punto H, tal que H esté del mismo lado de L que B y que LH = $\frac{t}{2n\sqrt{u}}$

Sea el punto I, tal que HI sea perpendicular a BK y que

HI = $\frac{r}{2n^2} + \frac{u}{n^2} + \frac{pt}{4n^2u} - \frac{m}{n^2}$

Sea el punto P, tal que P está en el círculo de diámetro LI y tal que LP = $\frac{s + pu}{n^2}$

Sea el círculo de centro I y radio IP, cuyas intersecciones con la curva ACN serán tantas como las raíces de la ecuación.

Los segmentos perpendiculares a BK trazados desde estos puntos serán las raíces buscadas.

Si el círculo PCN es tan pequeño queno corta la curva ACN, o si LP es mayor que IL, entonces todas las raíces serán imaginarias.

La demostración de que estos segmentos son raíces de la ecuación es análoga a la que se hizo en el caso de las ecuaciones de 3o. y 4o. grados.

7. Aplicaciones de esta regla.

Si se buscan 4 medias proporcionales entre las líneas a y b, tomando x por la primera de las 4, se tendrá la ecuación $x^5-a^4b=0$,

ó también $x^6 - a^4bx = 0$.

Tomando $y-a = x$, se obtiene:

$$y^6-6ay^5+15a^2y^4-20a^3y^3+15a^4y^2-(6a^5+a^4b)y+a^6+a^5b = 0$$

Entonces se tendrá que:

$AB = 3a$,

$$n = \sqrt{\frac{6a^3 + a^2b}{\sqrt{a^2 + ab}} + 6a^2}$$

$$DE = BL = \frac{2a}{3n} \sqrt{a^2 + ab}$$

$$LH = \frac{6a^3 + a^2b}{2n\sqrt{a^2 + ab}}$$

$$HI = \frac{10a^3}{n^2} + \frac{a^2}{n^2}\sqrt{a^2+ab} + \frac{18a^4 + 3a^3b}{2n^2\sqrt{a^2 + ab}}$$

$$LP = \frac{a}{n}\sqrt{15\ a^2 + 6a\sqrt{a^2 + ab}}$$

El círculo con centro en I cortará la curva en 2 puntos, C y N, siendo NR y CG las perpendiculares desde ellos. Si NR es la menor y se resta de CG, se obtendrá el valor de x; pues sabemos que a es una raíz de la ecuación y entonces NR = a, y CG = y, de donde x = y-a = CG-NR.

Esta regla puede aplicarse también para dividir un ángulo en cinco partes iguales o para inscribir una figura de once o trece lados en un círculo.

8. Conclusión.

Habiendo construído todos los problemas planos cortando un círculo con una recta; todos los sólidos cortando un círculo con una parábola; y, finalmente, todos los que son un grado más compuestos cortando también un círculo con un curva que no es más que un grado mayor que la parábola; sólo hace falta seguir el mismo método general para construir todos los que son más compuestos hasta el infinito. Pues, en materia de progresiones matemáticas, cuando se tienen los 2 ó 3 primeros términos, no es difícil encontrar los otros.

CAPITULO TERCERO

FILOSOFIA Y MATEMATICAS CARTESIANAS

I

SISTEMA FILOSOFICO CARTESIANO

1. Pensamiento y duda.

La crisis intelectual del siglo XVI tiene como transfondo la disputa acerca de los principios fundamentales del pensamiento y de la determinación de la esencia de las cosas.

El trabajo de Descartes se desarrolla en una época en la que se destaca cada vez más la búsqueda de un saber normativo que trate de fundamentar constantemente sus propios supuestos y que inicie así una nueva percepción de la realidad.

El instrumento que Descartes utiliza para elegir los principios de su método será la duda metódica. La aplicación de ésta sobre toda idea incierta, incluso sobre la realidad misma, permitirá evitar el error al suspender los juicios y al considerar todo lo dudoso como provisionalmente falso.

Esta duda se extiende a todas las ideas, comprometiendo nuestra propia conciencia. Sin embargo, la duda universal engendra el descubrimiento de la identidad del pensamiento con el yo mismo. La certeza de la existencia propia está garantizada por el acto de dudar. Esta será la primera evidencia intuitiva absolutamente cierta.

En contraposición con el realismo, que aceptaba la existencia del ser como algo independiente del pensamiento, Descartes da a la realidad un caracter problemático ya que la única existencia segura es la del yo pensante. La existencia de lo real es indudable sólo hasta que se haya demostrado mediante una reconstrucción metafísica metódica.

2. El Método.

Vinculado con el procedimiento matemático, Descartes formula su método, el cuál se resume en cuatro reglas fundamentales:

i) "No aceptar nunca como verdadero lo que con toda evidencia no reconociese como tal; es decir, se evitará cuidadosamente la precipitación y los prejuicios, no dando cabida en los juicios sino a aquellos que se presenten al espíritu en forma tan clara y distinta que no sea admisible la más mínima duda". (Regla de la evidencia).

ii) "Dividir cada una de las dificultades que hallase a mi paso en tantas partes como fuere posible y requiriera su más fácil solución". (Regla del análisis).

iii) "Ordenar los conocimientos, empezando por los más sencillos y fáciles, para elevarme poco a poco y como por grados hasta los más complejos, estableciendo también cierto orden en los que naturalmente no lo tienen". (Regla de la síntesis).

iv) "Hacer siempre enumeraciones tan completas y revistas tan generales que se pueda tener la seguridad de no haber omitido nada". (Regla de la prueba) La enumeración verifica el análisis y la revisión verifica la síntesis. [Discurso del Método, Ed. Porrúa, pág. XV].

En la primera regla se encuentra el criterio de verdad definido por Descartes. Solamente las ideas claras y distintas son verdaderas. La claridad es la presencia y manifestación de la idea en la mente atenta. La distinción es la separación de todas las otras ideas y la división perfecta de sus elementos. La evidencia intuitiva es el acto en el cual una idea verdadera se hace patente a la conciencia de manera inmediata e indudable.

La metafísica cartesiana es fundamentalmente una justificación del acto intuitivo, la cual comprueba la validez de la aplicación general del método.

La existencia de Dios, como el ser creador perfecto, veraz, bueno y justo, garantiza la certeza de las ideas claras y distintas, pues Dios no engaña. Esta garantía de verdad se aplica no sólo al momento presente en que se concibe una idea evidente, sino aún después, cuando ya no se piense pero se recuerde haberla comprendido clara y distintamente alguna vez.

II

EPISTEMOLOGIA CARTESIANA

1. Prioridad de la teoría del conocimiento.

La filosofía del siglo XVII da un enfasis especial a la reflexión acerca de los pensamientos y de sus objetos, es decir, a la teoría del conocimiento.

Así ha ocurrido históricamente en la obra de Descartes y de otros filosofos. Ya en las "Reglas para la dirección del espíritu" escritas en 1628, Descartes aborda el problema epistemológico que despues retomara en las primeras Meditaciones, anteponiéndolo a la metafísica.

2. Descripcion fenomenológica.

En el fenómeno del conocimiento se hallan frente a frente el sujeto y el objeto. Se mantienen completamente separados en una correlación irreversible.

El sujeto sale de sí mismo tratando de captar al objeto mediante el pensamiento. El objeto imprime su imagen en el sujeto produciendo en él una modificación.

El objeto permanece inalterable ante la actividad cognoscente de la conciencia, es decir, es independiente del sujeto.

La verdad del conocimiento es la concordancia entre el objeto y el pensamiento. Cuando no se alcanza esta concordancia, no se tiene un conocimiento falso sino que no se ha realizado el fenómeno del conocimiento.

La enumeración de los tres elementos del conocimiento revela la incumbencia de tres áreas en este fenómeno: con respecto al sujeto, la sicología; con respecto al pensamiento, la lógica; y con respecto al objeto, la ontología.

3. Posibilidad del conocimiento.

La postura cartesiana respecto a la posibilidad del conocimiento contiene rasgos dogmáticos, escépticos y críticos a la vez.

La confianza en la razón humana y el supuesto de la existencia de la verdad constituyen una postura que ha sido calificada algunas veces como dogmática ya que emprende la exploración metafísica sin haber evaluado antes la capacidad de la razón humana para tal empresa.

La duda universal es el ingrediente escéptico del sistema cartesiano. La diferencia entre este escepticismo metódico y el escepticismo griego es su carácter provisional, voluntario, metodico y optimista. La duda cartesiana no es conclusión sino herramienta en la búsqueda de la verdad.

Este balance entre la confianza dogmática en la razón y la incomodidad de la revisión permanente por medio de la duda constituye un brote de criticismo en la obra de Descartes.

4. Origen del conocimiento.

La doctrina cartesiana acerca del origen del conocimiento es el racionalismo: la verdadera fuente del conocimiento humano es el pensamiento.

La teoría de las ideas innatas asevera que los conceptos fundamentales del conocimiento no proceden de la experiencia sino que son un patrimonio originario de la razón.

Aún la percepción sensorial es un acto racional:
"Pues bien, ¿qué es esa cera, sólo concebible por medio del entendimiento? Sin duda, es la misma que veo, toco e imagino; la misma que desde el principio juzgaba yo conocer. Pero lo que se trata aquí de notar es que la impresión que de ella recibimos, o la acción por cuyo medio la percibimos, no es una visión, un tacto o una imaginación, y no lo ha sido nunca, aunque así lo pareciera antes, sino sólo una inspeccion del espíritu (...) comprendo mediante la facultad de juzgar, que reside en mi espíritu, lo que creía ver con los ojos." [Meditaciones Metafísicas, pág. 29, Ed. Alfaguara].

Así pues, la experiencia es un ejercicio interpretativo de la razón y por ello tiene valor en la investigación científica: "... así, esos filósofos que, olvidando la experiencia, creen que la verdad saldrá de su cerebro como Minerva del de Júpiter." [Reglas, pág. 104, Ed. Porrúa].

La experiencia resulta decisiva en la investigación científica para determinar entre varias deducciones posibles la única que concuerde con los hechos:

"Pero también es preciso que confiese que la potencia de la naturaleza es tan amplia y tan vasta, y aquellos principios son tan simples y tan generales que no observo casi ningún efecto particular que no conozca en seguida que puede ser deducido de los mismos de muchas maneras diversas; y mi dificultad más grande consiste, ordinariamente, en encontrar de cuál de esas maneras depende de aquéllos; porque no conozco otro expediente para resolverlo que el de buscar algunas experiencias que sean tales que su resultado no sea el mismo, cuando hay que explicarlo de una manera o cuando hay que explicarlo de la otra." [Discurso, pág. 151, Editorial Sarpe].

5. Intuición.

Contrapuesto al conocimiento discursivo está el intuitivo. El primero es un proceso de aproximaciones sucesivas tendiente a abarcar totalmente la realidad del objeto. El método discursivo es indirecto, ya que en él el razonamiento circula a través de conceptos generales y abstractos, y por lo tanto, exige el uso de un lenguaje que le permita ser comunicable.

La intuición es un acto único en el que el espíritu contempla y aprehende inmediatamente el objeto. El método intuitivo es directo pues nos revela realidades singulares y seres concretos sin mediación de deducciones o de palabras, lo que da a la intuición la calidad de inefable. La filosofía utiliza ambos métodos variando, a través de la historia, la importancia de cada uno de ellos. Así, antes del Renacimiento el énfasis principal recaía en el discurso, por medio del cual era comprobada la intuición. El método cartesiano acentúa la importancia de la intuición e investiga los caminos para llegar a ella.

El cogito cartesiano es el reconocimiento de la intuición como un fuente autónoma de conocimiento, ya que este principio no es una inferencia sino una vivencia inmediata de la realidad del yo.

El método para lograr la intuición, según Descartes, es el análisis de toda idea confusa, descomponiendola en elementos más y más simples hasta convertirlos en ideas claras y distintas. Descartes es el pionero en la utilización de la intuición como método primordial de la filosofía como sigue siendo en los diferentes sistemas filosóficos.

6. Interacción entre res extensa y res cogitans.

Para Descartes las 3 realidades sustanciales son: Dios (res infinita), el yo pensante (res cogitans) y los cuerpos materiales (res extensa). La esencia del yo es el pensamiento y la esencia del cuerpo es la extensión. El dualismo metafísico establece que el alma y el cuerpo son sustancias diferentes y con existencias independientes.

Sin embargo, hay en el yo una facultad pasiva de sentir, es decir, de recibir ideas de las cosas sensibles, aún en contra de la voluntad. Es necesario, entonces, que exista en otra sustancia distinta del yo mismo una facultad activa que produzca en él esas ideas o sensaciones. Ya que Dios ha dado esa facultad de sentir y una fuerte inclinación a creer que esas ideas provienen de cuerpos, y dado que Dios no es falaz, debe reconocerse la existencia de las cosas corpóreas. Pero los cuerpos no son tal como los percibimos por medio de los sentidos, sino que su esencia consiste en lo que tienen de inteligible.

La unión entre alma y cuerpo en el hombre que hace posible la interacción de ambos se verifica en la glándula pineal, que es la única parte del cerebro que no es doble y puede, por tanto, unificar las sensaciones que provienen de los órganos de los sentidos.

III

CORRELACION ENTRE LA MATEMATICA Y LA FILOSOFIA EN EL SISTEMA CARTESIANO.

1.Fundamentación del método.

Descartes aplazó la fundamentacion del método como lo explica en el Discurso:
"... habiendo advertido que los principios de la ciencia han de ser todos tomados de la filosofía, en la cual yo no encontraba aún ninguno cierto, creí que era preciso, ante todo, establecerlos allí, y que siendo eso la cosa más importante del mundo y en lo que más deben temerse la precipitación y la prevención, no debía proponerme llevar a cabo la empresa antes de haber alcanzado una edad más madura que la de veintitrés años que entonces tenía y de haber dedicado mucho tiempo para prepararme a ella." [Discurso del Método, pág. 67-68, Ed. Sarpe].

Así pues, por lo menos cronológicamente la aplicacion del método en el desarrollo de la Geometría Analítica antecede a la sistematización de la filosofía cartesiana.

2. Inspiración y crítica.

Desde su juventud, Descartes se complacía en el estudio de las matemáticas que

"tienen invenciones sutilísimas y que pueden servir de mucho, tanto para contentar a los curiosos como para facilitar todas las artes y disminuir el trabajo de los hombres". [Discurso del Método, pág. 41, Ed. Sarpe].

Sin embargo, se extrañó de que

"siendo sus fundamentos tan firmes y sólidos, no se hubiese construido sobre los mismos algo de mayor elevación". [Discurso, pág. 43].

Además, criticó la sujeción exagerada a las figuras y a las reglas:

"Por lo que hace al análisis de los antiguos y al álgebra de los modernos, aparte de que no se refieren sino a materias muy abstractas y que no parecen de ningún uso; el primero está siempre tan sujeto a la consideración de las figuras que no puede ejercitar el entendimiento sin fatigar mucho la imaginación; y en la segunda, los matemáticos se han sujetado tanto a ciertas reglas y a ciertas cifras que han hecho de ella un arte confuso y oscuro, que confunde el espíritu, en lugar de una ciencia que lo cultive. Todo eso fue causa de que yo pensase que era preciso buscar algún otro método que, comprendiendo todas las ventajas de aquellos tres, estuviera libre de sus defectos". [Discurso, pág. 62].

También señaló que las obras matemáticas que había leído no explicaban el método para descubrir las verdades que se exponían: "Así como muchos artesanos ocultan el secreto de sus inventos, Pappio y Diofanto, temiendo tal vez que la facilidad y la sencillez de su método le hicieran perder su valor, prefirieron, para excitar la admiración de todos, presentarnos como productos de su ingenio algunas verdades estériles muy sutilmente deducidas, en lugar demostrar el método de que se servían." [Reglas, pág. 103, Ed. Porrúa].

En general, Descartes encontró en las matemáticas la inspiración para construir su método, que sería aplicable a cualquier materia:

"... nunca seremos matemáticos, aunque sepamos de memoria las demostraciones inventadas por los demás, si nuestro espíritu no es capaz de resolver por sí mismo toda clase de problemas..." [Reglas, pág. 99].

3. Modelo de evidencia.

En varios pasajes de su obra, Descartes exalta la matemática como el modelo de la evidencia. Presenta a la aritmética y a la geometría como las únicas ciencias exentas de falsedad e incertidumbre, a causa de la claridad y sencillez de sus objetos [Reglas, pags. 97 y 98]. Por lo tanto, consideró a las matemáticas como antecedentes indispensables para el conocimiento de las otras ciencias, y como ejercicio obligatorio para acostumbrar "al espíritu a alimentarse de verdades y a no contentarse con falsas razones." [Discurso, pág. 65].

4. Matemáticas y conciencia.

De acuerdo a su teoría de las ideas innatas, Descartes reconoce que las "primeras semillas de los pensamientos útiles" formaron desde la antigüedad algunas ideas verdaderas sobre la filosofía y las matemáticas [Reglas, pág. 101 y 103].

Advierte además que aunque los objetos de las distintas ramas de las matemáticas sean variados, "no dejan de concordar todas en que no consideran otra cosa que las diversas relaciones o proporciones que se encuentran en ellos ..." [Discurso, pág. 65].

Estos esquemas de pensamiento, como el principio de identidad y la idea de proporción, generan la matemática y encuentran en ella su grado más alto de realización. Además, esos mismos principios son los que rigen toda la racionalidad, ya que "todas las cosas que pueden caer bajo el conocimiento de los hombres se siguen de la misma manera las unas de las otras, y que, mientras uno se abstenga de aceptar como verdadero lo que no lo es y observe siempre el orden preciso para deducir las unas de las otras, no puede haber ninguna tan alejada que no se llegue finalmente a ella, ni tan oculta que no se la descubra". [Discurso, pág. 64].

Por lo tanto, la evidencia matemática representa a la "conciencia misma funcionando rectamente" [Introducción a las Meditaciones, Vidal Peña, pág. XXIII, Ed. Alfaguara].

La duda metódica no es realmente grave cuando cuestiona la evidencia de los sentidos, ya que la verdad de las cosas sensibles está en su inteligibilidad. El asunto se agrava cuando se plantea que "podría ocurrir que Dios haya querido que me engañe cuantas veces sumo 2+3, o cuando enumero los lados de un cuadrado" [Meditaciones, págs. 19 y 20]. Dudar de la matemática es pensar lo impensable, volver loca a la propia conciencia.

En el proceso metafísico por el cual Descartes resuelve esta duda, la evidencia matemática aparecerá ligada al cogito y a la existencia de Dios:

"... que es al menos tan cierto que Dios, que ese ser perfecto, es o existe, como lo pueda ser cualquier demostración de la geometría" [Discurso, pág. 100].

"... engáñeme quien pueda, que lo que nunca podrá será hacer que yo no sea nada, mientras yo esté pensando que soy algo, ni que alguna vez sea cierto que yo no haya sido nunca, siendo verdad que ahora soy, ni que dos más tres sean algo distinto de cinco, ni otras cosas semejantes, que veo claramente no poder ser de otro modo que como las concibo" [Discurso, pág. 32].

"... aunque nada de lo que he concluido en las Meditaciones precedentes fuese verdadero, yo debería tener la existencia de Dios por algo tan cierto, como hasta aquí he considerado las verdades de la matemática, que no atañen sino a números y figuras; aunque, en verdad ello no parezca al principio del todo patente, presentando más bien la apariencia de sofisma" [Meditaciones, pág. 55].

Este aparente sofisma consiste en que el criterio de evidencia garantiza la verdad de los razonamientos presentados, siendo él quien necesitaba ser garantizado.

5. Racionalismo y matemáticas.

Como se vió en la introducción histórica, el racionalismo está ligado a la matemática ya que muchos filósofos representantes de dicha corriente cultivaron tambien esta ciencia. Más aún, siendo el rasgo característico de la ciencia de su época la exigencia matemática, Descartes participa en esta reflexión de lo matemático como fundamento del pensar.

La herencia que la matemática ha legado a la epistemología racionalista es muy amplia. Tomando como modelo del conocimiento a la matemática, se impondrán las condiciones de necesidad lógica y valide⁻ universal a todo verdadero conocimiento. El conocimiento matemático, siendo conceptual y deductivo, es generado por el pensamiento que de manera independiente de la experiencia, sigue sólo sus propias leyes. Al extender esta concepción del conocimiento matemático a todo conocimiento humano se llega al racionalismo.

Foucault diferencía la "matematización de lo empírico" [Las palabras y las cosas, pág. 63] como un esfuerzo de traducción de algunas ciencias al lenguaje matemático, de la "mathesis, entendida como ciencia universal de la medida y del orden". Lo fundamental para el saber clásico será su relación con la mathesis. Esta impondrá a los problemas la forma del orden y la medida. Sin embargo, no significa que todo el saber quede absorbido por la matemática sino que la ciencia del orden es el fondo sobre el que se construyen las ciencias usando los signos como instrumentos del análisis.

Para Heidegger la esencia del proyecto matemático es "la posición de una determinación de la cosa que no se ha obtenido de ella por la experiencia y que, sin embargo, fundamenta todas las determinaciones de las cosas, las posibilita y les abre el camino" [La pregunta por la cosa, pág. 82]. Así pues, este proyecto determina la manera como las cosas deben ser consideradas de antemano, es decir, que es un proyecto axiomático y como tal "prefigura en esquema fundamental la estructura de cada cosa y de sus relaciones con toda otra cosa" [La pregunta por la cosa, pág. 85].

El modo de cuestionar a la naturaleza se transformará de experiencia en experimento ya que las condiciones de la investigación estarán predeterminadas. Este proyecto exige la medicion uniforme y numérica como modo de determinación de las cosas, y es esta medición la que lleva a la formación de lenguajes y técnicas matemáticas. Pero la nueva forma de la ciencia no se debe a que la matemática sea un medio de determinación esencial sino que "fue consecuencia del proyecto matemático el hecho de que pudiera y debiera entrar en juego una matemática" [La pregunta por la cosa, pág. 86].

La física cartesiana da cuenta de la participación de Descartes en la matematización de la ciencia. La distinción entre las cualidades subjetivas o cualitativas y las objetivas o cuantitativas de los cuerpos establece la posibilidad de reducir lo real a lo matemático. Más aún, para Descartes, la única esencia del cuerpo es la extensión: "... no son la pesantez, la dureza, etc., lo que constituye la naturaleza del cuerpo, sino la extensión únicamente" [Principios II-4, Ed. Porrúa]. Así, "el universo cartesiano es la geometría realizada", como dice Koyré [Estudios Galileanos, pág. 306].

En contraste, Galileo considera a la experiencia no sólo como el fundamento sino también como el límite del conocimiento humano. Ya que le es imposible alcanzar la esencia de las cosas, debe limitarse a determinar sus cualidades y sus accidentes. Así la postura galileana ha quitado explícitamente de la investigacion natural toda preocupación ontológica o causal.

En el sistema cartesiano, la divisibilidad de la materia y el movimiento de sus partes bastan para explicar todos los fenómenos de la naturaleza [Principios II-20]. Descartes da al movimiento el mismo status ontológico que el reposo. El movimiento no es un proceso sino un estado. Pero ese movimiento es ante todo una trayectoria, un movimiento geométrico intemporal.

El radicalismo del pensamiento cartesiano excluye la pesantez de la esencia de los cuerpos y los considera únicamente como cuerpos euclidianos. La eliminación del tiempo en el estudio del movimiento, lo convierte en una relación funcional. Así, Descartes sustituye la Física por el análisis matemático, indiferente ante la concepción dinamica causal.

En este espacio cartesiano infinito, continuo y pleno, bastarán el principio de inercia y el de la conservación del movimiento para explicar todos los fenómenos naturales.

Descartes participa también en la fundamentación de lo matemático que lleva necesariamente a la reflexión metafísica. Heidegger resalta los rasgos fundamentales del pensamiento moderno expresados en las "Reglas para la dirección del espíritu". Ya el título de este escrito formula la idea de una norma para el espíritu investigador, la idea de la ciencia única, la mathesis universalis.

En la Regla IV se expresa que "es necesario el método para seguir tras la verdad de las cosas". Esto no significa solamente que la ciencia debe tener un metodo propio sino sobre todo que "el modo como estamos en general tras las cosas, decide de antemano sobre lo que encontramos de verdadero en las cosas" [La pregunta por la cosa, pag. 93]. El método no es sólo un elemento de la ciencia, sino que es el fundamento que determina lo que se puede considerar como objeto.

La Regla V dice: "Todo el método consiste en el orden y la disposición de aquello a lo cual debe ser dirigida la mirada aguda de la inteligencia, para encontrar alguna verdad. Pero sólo cumpliremos con tal proceder, si reducimos las proposiciones más complejas y oscuras paso a paso a las más simples, para intentar luego ascender a partir de la intuición de las proposiciones más simples al conocimiento de todas las otras a través de los mismos pasos".

Esta reflexion sobre lo matemático determinó cambios en la metafísica y la configuración de la filosofía moderna. En esta regla se expresa el carácter axiomático de la mathesis que, según Descartes, debe fundamentar todo el saber.

C O N C L U S I O N.

La invención del método de Descartes, según él mismo explica en el Discurso (pág. 62), consiste en conjuntar las ventajas de los métodos de la lógica, de la geometría y del álgebra, tratando a la vez de librarlos de sus defectos.

Descartes considera que el método axiomático deductivo de la geometría se puede extender a cualquier clase de conocimiento humano y que es además un método completo: "Aquellas largas cadenas de razones, tan simples y fáciles, de las cuales los geómetras suelen servirse para llegar a sus demostraciones más difíciles, me habían dado ocasión de imaginar que todas las cosas que pueden caer bajo el conocimiento de los hombres se siguen de la misma manera las unas a las otras, y que, (...) no puede haber ninguna tan alejada que no se llegue finalmente a ella..." [Discurso, pág. 64].

La tercera regla del método cartesiano indica que los pensamientos se deben ordenar por grados crecientes de dificultad, por lo tanto, la primera aplicación del método debía ser también la más simple, la aplicación del método a su campo natural: la matemática. El desarrollo de la geometría analítica es, según Descartes, más que un fin en sí mismo, un medio de ejercitarse en el uso del metodo.

Así pues, la matemática cumple este doble papel como fuente principal y como campo de aplicación del método cartesiano, existiendo una subordinación de la matemática al método ya que "el método que enseña a seguir el orden verdadero y enumerar con exactitud todas las cirucunstancias de aquello que se busca, contiene todo lo que da certeza a las reglas de la aritmética" [Discurso, pág. 67].

El objetivo de "La Geometría" de Descartes queda explicado por él de la siguiente manera: "tomaría todo cuanto hay de mejor en el analisis geométrico y en el álgebra, y corregiría todos los defectos de uno por la otra" [Discurso, pág.66]. Así pues, queda claro desde aquí que el método algebraico normará la investigación geométrica que hasta ese momento había sido defectuosa.

La causa de dichas deficiencias en el análisis geométrico es que "está siempre tan sujeto a la consideración de las figuras que no puede ejercitar el entendimiento sin fatigar mucho la imaginación" [Discurso, pág. 62].

Ahora bien, sabiendo que "los cuerpos no son propiamente concebidos sino por el solo entendimiento, y no por la imaginación ni por los sentidos, y que no los conocemos por verlos o tocarlos, sino sólo porque los concebimos en el pensamiento" [Meditaciones, pág. 30], sería necesario romper la dependencia que la geometría sufría respecto a las representaciones visuales y sustituirlas por otras más intelectuales que serán las representaciones algebraicas.

"Método y no otra cosa parece lo que se designa con el extraño nombre de álgebra, con tal que se prescinda de la multiplicidad de números y figuras inexplicables que lo obscurecen: por este medio se le puede dar esa claridad y facilidad suprema que creemos deben hallarse en las verdaderas matemáticas" [Reglas, pág. 103, Ed. Porrúa]. El álgebra es pues El Método por excelencia en el quehacer matemático.

Como hemos visto anteriormente, Descartes considera que la esencia del cuerpo es la extensión (res extensa) y que la esencia humana es la razón (res cogitans). Además "la Geometría es la ciencia que enseña un conocimiento general de las medidas de los cuerpos" [La Geometría, pág. 43]. Entonces, la interacción entre estas dos esencias no se da plenamente en la percepción sensorial, sino en la posibilidad de captar lo que los cuerpos tienen de inteligible, es decir, en su geometrización. Así pues, la razón es capaz de aprehender la esencia de los cuerpos, que es la extensión, en su estudio geométrico.

Por esto, para Descartes, el mundo es comprensible por medio de la razón; la res cogitans puede dar cuenta de la res extensa.

Ya se ha mencionado que la evidencia matemática aparece en la obra cartesiana representando a la conciencia sana funcionando correctamente. De este modo, Descartes participa en la reflexión de su época acerca de lo matemático como fundamento del pensar. La interacción entre la razón y la realidad material, es decir, el acto mismo de conocer, es ya un acto matemático.

En la siguiente cita se expresa nuevamente la síntesis del álgebra con la geometría y la supremacía del álgebra sobre la geometría, lo que constituye la esencia de la Geeometría Analítica:

"... todo lo que cae bajo la consideración de los geómetras se reduce a un mismo género de problemas, que es buscar el valor de las raices de alguna ecuación ..." La Geometria, Tercer libro].

B I B L I O G R A F I A

DESCARTES, R. 1954. The Geometry of René Descartes. Dover Publications, Inc.

DESCARTES, R. 1977. Meditaciones Metafísicas con objeciones y respuestas. Ediciones Alfaguara.

DESCARTES, R. 1981. Discurso del Método. Meditaciones Metafísicas. Reglas para la dirección de espíritu. Principios Filosóficos. Editorial Porrúa.

DESCARTES, R. 1984. Discurso del Método.Editorial Sarpe.

ABBAGNANO, N.1955. Historia de la Filosofía. Tomo II. Montaner y Simon, S. A.

CID. F. Historia de la Ciencia. Tomo 2 . Editorial Planeta.

COLLETTE, J. 1986. Historia de las Matemáticas II. Siglo XXI Editores.

CROMBIE. 1983 Historia de la Ciencia de San Agustín a Galileo. Alianza Universidad.

DAHAN, A. 1985. Une histoire des Mathématiques. Editions du Sevil.

FOUCAULT, M. 1990. Las palabras y las cosas. Siglo XXI Editores.

GARCIA, M. Lecciones preliminares de Filosofía. 14a. Edición. Editorial Losada.

HEIDEGGER, M. 1975. La pregunta por la cosa.Editorial Alfa Argentina.

HESSEN, J. <u>Teoría del conocimiento</u>. Espasa Calpe S. A.

KOYRE, A. 1981. <u>Estudios Galileanos</u>. Siglo XXI Editores.

RIGO, M. <u>Geometría Analítica ... ¿Sueño cartesiano?</u>

ROSSI, P. 1989. <u>Clavis Universalis</u>. Fondo de Cultura Económica.

<u>Nueva Historia universal</u>. Tomo 5 . Promexa.

LECLERC, M. <u>Parabole</u>. Science et Techniques en Perspective 1984.