

Nº 34
2EJ.



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
FACULTAD DE INGENIERIA

GASTO DE DESPEGUE EN CUBETAS DE LANZAMIENTO
(ESTUDIO EXPERIMENTAL)

T E S I S

Que para obtener el Título de:

INGENIERO CIVIL

Presenta

CARLOS ESPINO GODINEZ

DIRECTOR DE TESIS:
M. I. VICTOR FRANCO



MEXICO, D. F.

1992

FALLA DE ORIGEN



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE

AGRADECIMIENTOS	1
DEDICATORIA	111
CAPITULO 1.- INTRODUCCION	1
CAPITULO 2 .- DISEÑO DE EXPERIMENTOS	6
CAPITULO 3 .- CORRELACION MULTIPLE	14
CAPITULO 4 .- MEDICIONES	22
CAPITULO 5 .- ANALISIS DE RESULTADOS.....	36
CAPITULO 6 .- CONCLUSIONES.....	62
REFERENCIAS	64

1. INTRODUCCION.

La obra de excedencias, llamada vertedor, es una de las estructuras que forman una presa, su función principal es la de descargar el agua excedente o de avenidas que ya no cabe en el volumen destinado para el almacenamiento. Generalmente esta obra se usa como estructura de control y seguridad para que en el caso de que se presente una avenida esta se regule y no se produzcan aguas abajo daños severos o sean lo mas pequeño posible.

El vertedor se compone, principalmente, de cinco estructuras conjuntas: canal de llamada, cimacio o estructura de control, rápida, estructura terminal y canal de descarga; la primera y la última no siempre se necesitan.

La estructura terminal es una de las más importantes, ya que tiene la función de disipar la energía cinética que trae el flujo en la rápida. Para disipar ésta energía, generalmente, existen dos formas de hacerlo, una consiste en formar un salto hidráulico y la otra lanzando el chorro lo más lejos posible.

Para formar un salto hidráulico se requiere como estructura terminal un tanque amortiguador, dentro del cual se forma el salto al presentarse un cambio brusco de pendientes.

La segunda forma de disipar la energía, es por medio de una cubeta deflectora. Una cubeta deflectora, llamada también cubeta de lanzamiento o salto de ski, es un dispositivo que se ubica al final de la estructura vertedora de una presa con el objetivo de lanzar el flujo descargado por el vertedor a cierta distancia tal que las erosiones que se formen en el lecho del río no pongan en peligro la estabilidad de la cortina o del mismo vertedor. Los factores geométricos que gobiernan su diseño son su radio (R) y el ángulo de salida (θ), ver fig 1.

Generalmente, en la cubeta de lanzamiento se producen dos tipos de funcionamiento hidráulico. El primero se presenta al empezar a escurrir el agua sobre el vertedor con gastos pequeños se forma un salto hidráulico ahogado en la cubeta, funcionando como tanque amortiguador, esto se debe a que al ser la cubeta de forma circular, se produce un cambio brusco de pendiente formándose una depresión en la parte baja de la cubeta y una especie de escalón formado por el labio de salida. Al ir aumentando el gasto poco a poco, el salto formado se va barriendo hasta llegar a un punto en donde se barre completamente hasta el labio de la cubeta y provocar con ello el despegue del chorro, y a partir de este momento cuando el flujo despegó completamente se dice que la cubeta trabaja como de lanzamiento. A este gasto con el cual el flujo despega se le llama "gasto de despegue" a gasto creciente, este comportamiento puede verse en la fig. 2.

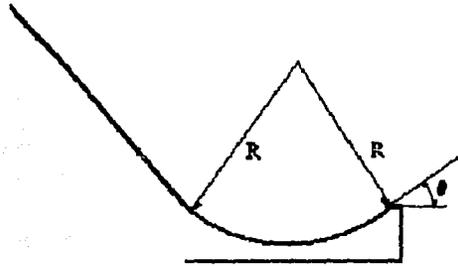
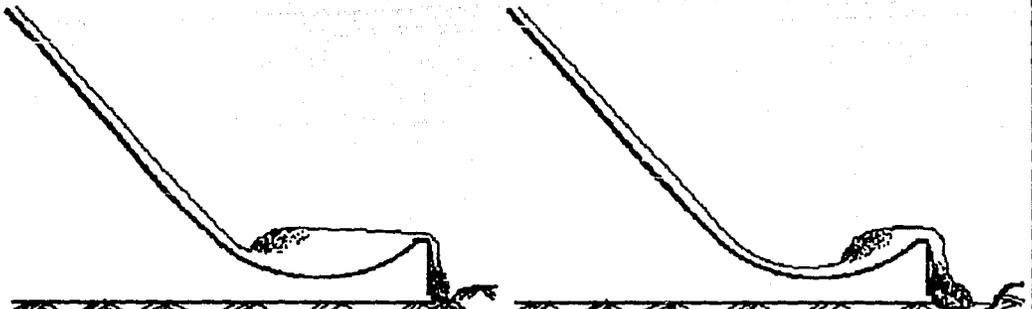
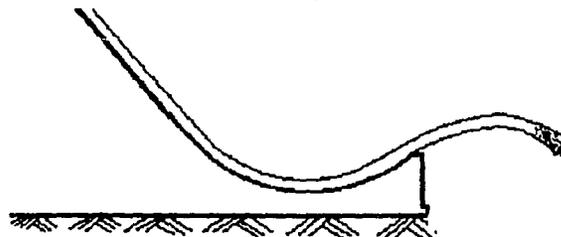


Fig. 1 Cubeta de lanzamiento.



a. Salto hidráulico ahogado en la cubeta

b. Salto hidráulico barrido en la cubeta



c. Despegue del flujo en la cubeta

Fig. 2 Comportamiento hidráulico de la cubeta.

El segundo funcionamiento se presenta cuando el gasto que escurre por el vertedor empieza a disminuir por lo cual en esta condición también se tendrá un "gasto de despegue" a gasto decreciente, en este caso se observa que el funcionamiento en la cubeta es de forma similar al de la primera, conforme va disminuyendo el gasto de vertido, el chorro empieza a decrecer hasta llegar a un punto en que se observa que se empieza a formar un salto hidráulico en el labio de la cubeta, que se va ahogando dentro de la cubeta. A este gasto, decreciente, se le llama gasto de retroceso o de adherencia y de acuerdo con las observaciones y mediciones realizadas resulta ser más pequeño que el de despegue a gasto creciente.

La determinación del gasto de despegue es muy importante, ya que si se mantienen gastos menores a él, el escurrimiento que se presenta por el labio de la cubeta, podría producir erosiones que podrían llegar a poner en peligro la estabilidad de la cimentación de la cubeta. En este trabajo se presenta un criterio que permite valuar el gasto de despegue a gasto creciente.

Existen varios métodos teóricos propuestos por diversos autores para calcular el gasto de despegue, pero estos métodos son muy laboriosos y de todas formas no se puede decir exactamente si el gasto calculado sería con el cual funcionaría la cubeta. En ocasiones es necesario construir un modelo a escala de la estructura vertedora en un laboratorio y entre algunas de las variables que se miden está el gasto de despegue, si la estructura lleva una cubeta, y se observa su comportamiento hidráulico y si es el caso luego se trataría de comprobarlo en el prototipo, reportando el valor medido

en éste.

El objetivo de este trabajo es el de encontrar una ecuación empírica que permita calcular el gasto de despegue, con un cierto grado de confiabilidad, de una manera más sencilla y rápida, y con ello darse una idea del rango en el cual se encontraría su valor. Además ello serviría al proyectista, ya que muchas veces no es posible construir un modelo para cada proyecto que elaboran la CFE y la CNA.

Para poder encontrar ésta ecuación, se utilizarán técnicas de diseño de experimentos y probabilidad, por ello el trabajo está estructurado de la forma siguiente: en los caps 2 y 3 se expondrán los dos métodos mencionados; en el cap. 4 se describe la determinación de las variables que intervienen o influyen en la determinación del gasto de despegue, así como los resultados obtenidos en los ensayos realizados en el laboratorio; en el cap. 5 se analizan los resultados obtenidos en los ensayos así como la determinación de las ecuaciones propuestas y un ejemplo práctico de aplicación de las mismas; por último en el cap. 6 se dan las conclusiones que resultan del trabajo.

2. DISEÑO DE EXPERIMENTOS.

Para realizar el diseño de un experimento con la finalidad de poder predecir resultados a partir de datos ya conocidos, se debe tomar especial atención en tres aspectos fundamentales:

- 1.- Cuales son los factores más importantes que ayudan a determinar el resultado.
- 2.- Cuantos ensayos son el mínimo necesario para poder obtener resultados con bastante confiabilidad.
- 3.- Qué tan posible sería encontrar una fórmula con la cual se pudiera predecir valores a partir de los datos conocidos.

Para responder estas preguntas, se tendrá como principal herramienta los principios de Probabilidad y Estadística, además de la correlación lineal múltiple. Este último tema se verá con mayor detalle en el cap 3, para comprender con mayor facilidad lo que ahí se menciona se estudiará un caso simple.

Supóngase que el resultado de un experimento "Y" parece depender de dos factores principales " X_1 " y " X_2 ", y se considera que se puede establecer una relación lineal de la forma:

$$Y = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + \epsilon \quad (2.1)$$

Donde ϵ es el error que se pueda cometer al valorar "Y" mediante esa relación.

Suponiendo que se hicieran $i=1,2,3, \dots, n$ ensayos, empleando el método de errores mínimos cuadrados, se partiría de la fórmula

$$\epsilon = Y_{est} - Y_{medido} \quad (2.2)$$

Si Y_{est} lo calculamos mediante la fórmula:

$$Y_{est} = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2$$

Y el Y_{medido} , obtenido en cada ensayo, se designa como Y_i .

Sustituyendo en la ec 2.2 se tiene que

$$\epsilon = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 - Y_i$$

Haciendo la suma de los errores al cuadrado

$$\sum_{i=1}^n \epsilon^2 = \sum_{i=1}^n (b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 - Y_i)^2$$

Desarrollando los términos y reduciendo se llega a

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \epsilon^2 = & \sum_{i=1}^n Y_i^2 + n b_0^2 + b_1^2 \sum_{i=1}^n X_{1i}^2 + b_2^2 \sum_{i=1}^n X_{2i}^2 + 2 b_0 b_1 \sum_{i=1}^n X_{1i} + \\ & + 2 b_0 b_2 \sum_{i=1}^n X_{2i} + 2 b_1 b_2 \sum_{i=1}^n X_{1i} X_{2i} - 2 b_0 \sum_{i=1}^n Y_i - 2 b_0 \sum_{i=1}^n Y_i X_{1i} - \\ & - 2 b_0 \sum_{i=1}^n Y_i X_{2i} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Así para minimizar el error en la ec 2.3 teniendo en cuenta que

las constantes b_0, b_1 y b_2 no se conocen, se calcula la derivada de la ec. 2.3 con respecto a cada una de las constantes y se igualan a cero, obteniéndose el sistema de ecuaciones siguiente

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^n \epsilon_i^2}{\partial b_0} = n b_0 + b_1 \sum_{i=1}^n X_{1i} + b_2 \sum_{i=1}^n X_{2i} - \sum_{i=1}^n Y_i = 0 \quad (2.4a)$$

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^n \epsilon_i^2}{\partial b_1} = b_0 \sum_{i=1}^n X_{1i} + b_1 \sum_{i=1}^n X_{1i}^2 + b_2 \sum_{i=1}^n X_{1i} X_{2i} - \sum_{i=1}^n Y_i X_{1i} = 0 \quad (2.4b)$$

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^n \epsilon_i^2}{\partial b_2} = b_0 \sum_{i=1}^n X_{2i} + b_1 \sum_{i=1}^n X_{1i} X_{2i} + b_2 \sum_{i=1}^n X_{2i}^2 - \sum_{i=1}^n Y_i X_{2i} = 0 \quad (2.4c)$$

La solución de dicho sistema dará como resultado los valores de las constantes b_0, b_1 y b_2 . El sistema de ecs 2.4 se puede escribir en forma matricial como sigue

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^n X_{1i} & \sum_{i=1}^n X_{2i} \\ \sum_{i=1}^n X_{1i} & \sum_{i=1}^n X_{1i}^2 & \sum_{i=1}^n X_{1i} X_{2i} \\ \sum_{i=1}^n X_{2i} & \sum_{i=1}^n X_{1i} X_{2i} & \sum_{i=1}^n X_{2i}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n Y_i \\ \sum_{i=1}^n Y_i X_{1i} \\ \sum_{i=1}^n Y_i X_{2i} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Por otra parte, con las ecs 2.4 se puede escribir la ec 2.3 como

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \epsilon_i^2 = & \sum_{i=1}^n Y_i + b_0 \left[n b_0 + b_1 \sum_{i=1}^n X_{1i} + b_2 \sum_{i=1}^n X_{2i} - 2 \sum_{i=1}^n Y_i \right] + \\
& + b_1 \left[b_1 \sum_{i=1}^n X_{1i}^2 + b_0 \sum_{i=1}^n X_{1i} + b_2 \sum_{i=1}^n X_{1i} X_{2i} - 2 \sum_{i=1}^n Y_i X_{1i} \right] + \\
& + b_2 \left[b_2 \sum_{i=1}^n X_{2i}^2 + b_0 \sum_{i=1}^n X_{2i} + b_1 \sum_{i=1}^n X_{1i} X_{2i} - 2 \sum_{i=1}^n Y_i X_{2i} \right] \quad (2.6)
\end{aligned}$$

De las ecs 2.4a, 2.4b, y 2.4c se obtiene

$$\sum_{i=1}^n Y_i = n b_0 + b_1 \sum_{i=1}^n X_{1i} + b_2 \sum_{i=1}^n X_{2i} \quad (A)$$

$$\sum_{i=1}^n Y_i X_{1i} = b_0 \sum_{i=1}^n X_{1i} + b_1 \sum_{i=1}^n X_{1i}^2 + b_2 \sum_{i=1}^n X_{1i} X_{2i} \quad (B)$$

$$\sum_{i=1}^n Y_i X_{2i} = b_0 \sum_{i=1}^n X_{2i} + b_1 \sum_{i=1}^n X_{1i} X_{2i} + b_2 \sum_{i=1}^n X_{2i}^2 \quad (C)$$

Sustituyendo estas ecuaciones por los términos A, B y C

correspondientes en la ec 2.6 se tiene

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \epsilon_i^2 = & \sum_{i=1}^n Y_i^2 + b_0 \left(\sum_{i=1}^n Y_i - 2 \sum_{i=1}^n Y_i \right) + b_1 \left(\sum_{i=1}^n X_{1i} Y_i - 2 \sum_{i=1}^n X_{1i} Y_i \right) + \\
& + b_2 \left(\sum_{i=1}^n X_{2i} Y_i - 2 \sum_{i=1}^n X_{2i} Y_i \right)
\end{aligned}$$

Desarrollando lo anterior:

$$\sum_{i=1}^n \epsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n Y_i^2 - b_0 \sum_{i=1}^n Y_i - b_1 \sum_{i=1}^n X_{1i} Y_i - b_2 \sum_{i=1}^n X_{2i} Y_i \quad (2.7)$$

Despejando $\sum_{i=1}^n Y_i^2$ queda la ecuación siguiente

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n Y_i^2 = & b_0 \sum_{i=1}^n Y_i + b_1 \sum_{i=1}^n X_{1i} Y_i + b_2 \sum_{i=1}^n X_{2i} Y_i + \sum_{i=1}^n \epsilon_i^2 \quad (2.8) \\
\downarrow & \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\
SST & \quad SS(b_0) \quad SS(b_1) \quad SS(b_2) \quad SSE
\end{aligned}$$

Si se aplica el teorema estadístico que dice: "la dispersión o variación de los resultados SST es igual a la suma de las variaciones de cada uno de los términos de los que depende (SSb_0), (SSb_1), (SSb_2) mas la dispersión o variación de los errores SSE " (ref 2).

Con base en lo anterior se puede concluir que si la variación de alguno de los términos es menor que la variación del error, significaría que ese o esos términos servirían de muy poco para explicar la variación de Y_i y que por lo tanto no serían factores importantes en la ecuación de tipo lineal propuesta (ec 2.1) y podrían eliminarse.

Cabe hacer la aclaración de que una cosa es determinar cuáles son los factores que determinan a "Y" y otra es saber si la relación lineal propuesta es la adecuada.

Suponiendo que la relación fuera lineal para determinar el número de ensayos necesarios, se propone escoger valores de X_1 y X_2 máximos y mínimos alternativamente, según se muestra en la tabla 1. Además es conveniente hacer un cierto número k de ensayos complementarios, con el fin de ver en que medida se cometería un error al obtener el resultado en el experimento, en este caso k sería igual a tres. Así, en la tabla los primeros cuatro valores de "Y" muestran los resultados al valuar con las combinaciones de los valores máximos y mínimos que puedan tomar variables dependientes X_1 y X_2 , y los últimos tres serían los valores que tomaría "Y" haciendo los ensayos con los valores promedio de X_1 y X_2 . De esta forma se obtiene el número total de ensayos mínimos a realizar.

condición ensayo	X1	X2	Y
1	M	M	Y1
2	M	m	Y2
3	m	M	Y3
4	m	m	Y4
5	p	p	Y5
6	p	p	Y6
7	p	p	Y7

Tabla 1

Por último, para saber si la relación lineal propuesta es la adecuada, basta con aplicar el criterio de la prueba F de Fisher, lo cual se puede hacer de la forma siguiente.

Con las condiciones expuestas en la tabla 1, la media de los resultados complementarios sería

$$\bar{Y}_c = \sum_{i=1}^k \frac{Y_i}{k}$$

Y la variancia entre ellos estaría dada por

$$S_{yc}^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(Y_i - \bar{Y}_c)^2}{(k-1)} \quad (2.9)$$

Se puede observar que el número de ensayos complementarios es k (5 al 7 de la tabla 1).

De esta manera se puede suponer que SSE (ec 2.8) está formado por la suma de los errores que se podrían cometer en los ensayos complementarios, representados por $\sum_{i=1}^k (Y_i - \bar{Y}_c)^2$ mas un error que se atribuye a la falta de concordancia de los resultados con el modelo

seleccionado, que en este caso es lineal; este error de concordancia se puede valorar a partir de 2.8 mediante la fórmula

$$SSL = \underbrace{\sum_{i=1}^k Y_i^2 - (b_0 \sum_{i=1}^k Y_i + b_1 \sum_{i=1}^k Y_i X_{1i} + b_2 \sum_{i=1}^k Y_i X_{2i})}_{\text{SSE}} - \sum_{i=1}^k (Y_i - \bar{Y}_c)^2 \quad (2.10)$$

Por otra parte, para evaluar $\sum_{i=1}^n Y_i^2$ se emplean n datos, de tal forma que el número de grados de libertad asociado a esta suma será $\nu_y = n$; además, para valorar cada una de las constantes de la correlación (b_1) se puede suponer que se usó una de las ecs 2.4, de modo que $\nu_{b_0} = \nu_{b_1} = \nu_{b_2} = 1$ será el número de grados de libertad de cada uno de los terminos encerrados en el paréntesis de la ec 2.10. Finalmente, como el número de grados de libertad asociado al último término de la ec. 2.10 es $\nu_c = k-1$, de acuerdo con la ec 2.9, se puede pensar que el número de grados de libertad asociado a SSL será $\nu_L = n - (1+1+1) - (k-1)$.

De esta manera, un estimador de la variancia producida por la falta de concordancia será

$$SLF^2 = \frac{SSL}{\nu_L}$$

Y como el estimador de la variancia producida por el error al hacer las mediciones está dada por la ec. 2.9, mediante la F de Fisher se puede comparar si la variancia debida a la falta de concordancia difiere significativamente de la variancia debida a los errores en la determinación del resultado Y_i , es decir

$$F_{calc} = \frac{SLF^2}{S_{yc}^2}$$

Si $F_{calc} > F_{0.05}$ con $\nu_1 = \nu_L$ y $\nu_2 = k-1$ grados de libertad,

donde $F_{0.05}$ es la F de Fisher calculada en tablas, puede decirse que el modelo seleccionado no es el adecuado, si la desigualdad se invierte se dice que el modelo es el adecuado. Con esto se da solución al tercer punto planteado.

Esta es una forma de diseñar un experimento y comprobar si es posible encontrar un modelo matemático que diga si el resultado del mismo es confiable, a partir de los datos producidos en un cierto número de ensayos y de los factores que influyen en su resultado.

3. CORRELACION MULTIPLE

En la mayoría de los problemas de ingeniería que dependen de los resultados de experimentos, es posible encontrar algunas veces una relación en la cual se tienen una o varias variables que están estrechamente ligadas entre sí y que influyen en el resultado del experimento. Por otra parte, también se pretende encontrar una ecuación que relacione todas las variables para poder predecir el resultado del experimento. A esta relación que puedan tener estas variables se le conoce como correlación múltiple.

Existen varios tipos de correlación múltiple, las más usuales son las siguientes

- a) Lineal $Y = a_0 + a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 + \dots + a_nX_n$
- b) Polinomial $Y = a_0 + a_1X_1 + a_2X_2^2 + a_3X_3^3 + \dots + a_nX_n^n$
- c) De potencias $Y = a_0 X_1^{a^1} X_2^{a^2} X_3^{a^3} \dots X_n^{a^n}$

En la mayoría de los casos el experimentador debe de buscar una correlación que de alguna forma pueda ajustarse a una lineal; así, por ejemplo, si se tiene una correlación de potencias de la forma:

$$Y = a_0 X_1^{a_1} X_2^{a_2} X_3^{a_3} \dots X_n^{a_n} \quad (3.1)$$

Esta puede ajustarse a una lineal de la manera siguiente

Si se aplica logaritmos a ambos miembros de la ecuación queda:

$$\log Y = \log a_0 + a_1 \log X_1 + a_2 \log X_2 + a_3 \log X_3 + \dots + a_n \log X_n$$

Haciendo los cambios de variables siguientes

$$Y' = \log Y, \quad A_0 = \log a_0, \quad X_1' = \log X_1, \quad X_2' = \log X_2, \quad X_3' = \log X_3 \\ X_n' = \log X_n$$

Con base en lo anterior la ec 3.1 se puede escribir de la forma siguiente

$$Y' = A_0 + a_1 X_1' + a_2 X_2' + a_3 X_3' + \dots + a_n X_n' \quad (3.1a)$$

Suponiendo que tenemos una correlación lineal o cualquier otra ajustada a una correlación lineal del tipo siguiente

$$Y = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + \dots + a_n X_n + \varepsilon \quad (3.2)$$

Donde ε es el error que se puede cometer al valuar el experimento con la ec. 3.1a, además del posible error cometido al hacer las mediciones del experimento, por tanto la ec.3.2 se expresa

$$\varepsilon = Y - (a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + \dots + a_n X_n) \quad (3.3)$$

Si aplicamos el método de mínimos cuadrados para hacer que la suma de los errores al cuadrado sea mínima se tiene

$$\sum_{i=1}^n \epsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n [Y_i - [a_0 + a_1 X_{i1} + a_2 X_{i2} + a_3 X_{i3} + \dots + a_n X_{in}]]^2 \quad (3.4)$$

Donde "n" es el número total de experimentos realizados. Para hacer mínimo $\sum \epsilon^2$ se deben calcular las derivadas parciales de $\sum \epsilon^2$, con respecto a cada incógnita, que en este caso son $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, e igualarlas a cero.

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^n \epsilon_i^2}{\partial a_0} = 2 \sum_{i=1}^n [a_0 + a_1 X_{i1} + a_2 X_{i2} + a_3 X_{i3} + \dots + a_n X_{in} - Y_i] = 0$$

$$n a_0 + a_1 \sum_{i=1}^n X_{i1} + a_2 \sum_{i=1}^n X_{i2} + a_3 \sum_{i=1}^n X_{i3} + \dots + a_n \sum_{i=1}^n X_{in} - \sum_{i=1}^n Y_i = 0 \quad (3.5a)$$

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^n \epsilon_i^2}{\partial a_1} = 2 \sum_{i=1}^n [a_0 + a_1 X_{i1} + a_2 X_{i2} + a_3 X_{i3} + \dots + a_n X_{in} - Y_i] X_{i1} = 0$$

$$a_0 \sum_{i=1}^n X_{i1} + a_1 \sum_{i=1}^n X_{i1}^2 + a_2 \sum_{i=1}^n X_{i2} X_{i1} + a_3 \sum_{i=1}^n X_{i3} X_{i1} + \dots + a_n \sum_{i=1}^n X_{in} X_{i1} - \sum_{i=1}^n Y_i X_{i1} = 0 \quad (3.5b)$$

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^n \epsilon_i^2}{\partial a_2} = 2 \sum_{i=1}^n [a_0 + a_1 X_{i1} + a_2 X_{i2} + a_3 X_{i3} + \dots + a_n X_{in} - Y_i] X_{i2} = 0$$

$$a_0 \sum_{i=1}^n X_{i2} + a_1 \sum_{i=1}^n X_{i1} X_{i2} + a_2 \sum_{i=1}^n X_{i2}^2 + a_3 \sum_{i=1}^n X_{i3} X_{i2} + \dots + a_n \sum_{i=1}^n X_{in} X_{i2} - \sum_{i=1}^n Y_i X_{i2} = 0 \quad (3.5c)$$

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^n e_i^2}{\partial a_3} = 2 \sum_{i=1}^n (a_0 + a_1 X_{i1} + a_2 X_{i2} + a_3 X_{i3} + \dots + a_n X_{in} - Y_i) X_{i3} = 0$$

$$a_0 \sum_{i=1}^n X_{i3} + a_1 \sum_{i=1}^n X_{i1} X_{i3} + a_2 \sum_{i=1}^n X_{i2} X_{i3} + a_3 \sum_{i=1}^n X_{i3}^2 + \dots + a_n \sum_{i=1}^n X_{in} X_{i3} - \sum_{i=1}^n Y_i X_{i3} = 0 \quad (3.5d)$$

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^n e_i^2}{\partial a_n} = 2 \sum_{i=1}^n (a_0 + a_1 X_{i1} + a_2 X_{i2} + a_3 X_{i3} + \dots + a_n X_{in} - Y_i) X_{in} = 0$$

$$a_0 \sum_{i=1}^n X_{in} + a_1 \sum_{i=1}^n X_{i1} X_{in} + a_2 \sum_{i=1}^n X_{i2} X_{in} + a_3 \sum_{i=1}^n X_{i3} X_{in} + \dots + a_n \sum_{i=1}^n X_{in}^2 - \sum_{i=1}^n Y_i X_{in} = 0 \quad (3.5e)$$

De las ecs 3.5, se forma un sistema de ecuaciones lineal de n+1 ecuaciones y n+1 incógnitas, siendo n el número de variables independientes que influyen en el resultado del experimento, siendo las incógnitas las constantes a₀, a₁, a₂, a₃, ... a_n. Para resolver el sistema, se puede construir una matriz, como la expresada por la ec 3.6

Como se mencionó antes, ésta solución es aplicable a cualquier tipo de correlación que se tenga, siempre y cuando pueda ajustarse o transformarse por medio de artificios matemáticos a una correlación del tipo lineal.

$$\begin{array}{c}
 \left[\begin{array}{cccc}
 N & \sum_{i=1}^n X_{1i} & \sum_{i=1}^n X_{2i} & \dots \sum_{i=1}^n X_{ni} \\
 \sum_{i=1}^n X_{1i} & \sum_{i=1}^n X_{1i}^2 & \sum_{i=1}^n X_{1i} X_{2i} & \dots \sum_{i=1}^n X_{1i} X_{ni} \\
 \sum_{i=1}^n X_{2i} & \sum_{i=1}^n X_{1i} X_{2i} & \sum_{i=1}^n X_{2i}^2 & \dots \sum_{i=1}^n X_{2i} X_{ni} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \sum_{i=1}^n X_{ni} & \sum_{i=1}^n X_{1i} X_{ni} & \sum_{i=1}^n X_{2i} X_{ni} & \dots \sum_{i=1}^n X_{ni}^2
 \end{array} \right]
 \begin{array}{c}
 \left[\begin{array}{c}
 a_0 \\
 a_1 \\
 a_2 \\
 \vdots \\
 a_n
 \end{array} \right]
 =
 \left[\begin{array}{c}
 \sum_{i=1}^n Y_i \\
 \sum_{i=1}^n Y_i X_{1i} \\
 \sum_{i=1}^n Y_i X_{2i} \\
 \vdots \\
 \sum_{i=1}^n Y_i X_{ni}
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

(3.6)

CONFIABILIDAD DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS CON LA CORRELACION

Para valuar el grado de confiabilidad con el cual se puede aplicar la correlación obtenida, existen dos métodos.

El primero es un método gráfico el cual está basado en calcular el error típico de la estima o desviación estandar de los resultados obtenidos al aplicar la correlación (ref 7). Para esto es necesario graficar la Y_{calc} (que es el valor obtenido de Y al aplicar la correlación) contra la Y_{medida} (que es el resultado real obtenido en el experimento), colocando en el eje de las abscisas el Y_{calc} y en el de las ordenadas el Y_{medido} . Posteriormente se traza una recta de 45° la cual representa los valores que deberían tomar los resultados si al valuar Y_{calc} son iguales a los obtenidos al realizar el experimento ($Y_{calc} = Y_{med}$). La distancia vertical que existe entre los puntos y la recta es el error cometido (e) al valuar el

experimento por medio de la correlación. De esta forma se puede valorar el error por medio de la ecuación siguiente

$$e = Y_{med} - Y_{calc} \quad (3.7)$$

Esta gráfica representa la dispersión de los resultados al valorar la correlación. Si se calcula la desviación estandar de los resultados por medio de la ecuación siguiente

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n e^2}{n}} \quad (3.8)$$

Se podría decir que la desviación estandar representaría el error típico cometido al estimar Y, por lo que se podría trazar dos rectas paralelas a la de 45° a una distancia S, medida verticalmente, por encima y por debajo de la misma. Estas rectas delimitarían una zona que representa que para cualquier punto que caiga dentro de la misma se estaría cometiendo un error menor al típico. Con esto se trata de lograr que al valorar Y_{calc} pueda llegar a caer dentro del error típico o aceptable, o lo que es lo mismo, el grado de confiabilidad al valorar Y estaría dado por

$$\text{Confianza} = \frac{\# \text{ de resultados que caen dentro de la zona}}{\# \text{ total de resultados}}$$

El segundo método consiste en valorar la confiabilidad por medio de intervalos de confianza. Este método tiene dos variantes, la primera es suponer que la distribución de los errores se comporta como una distribución normal de probabilidad, siempre y cuando el tamaño de la muestra sea mayor de 30, por lo que el intervalo de confianza estaría dado por (ref 7)

$$\Delta Y = \bar{e} \pm Z_c \sigma_e \quad (3.9)$$

donde σ_e es la desviación estandar de los errores.

La segunda es similar a la primera pero en vez de suponer que la distribución de los errores siguen una distribución normal, éstos se comportarían como una distribución T de Student, esto se usa cuando n es menor de 30, valuando el intervalo de confianza como sigue

$$\Delta Y = \bar{e} \pm t_c \sigma_e \quad (3.10)$$

En donde los valores de Z_c y t_c dependen del nivel de confianza que se necesite según el criterio del estimador, y se pueden obtener de tablas de distribución normal y de distribución T de probabilidad, respectivamente. Para la T de Student también se necesitara definir los grados de libertad que es igual a $\nu=n-1$, en la tabla 2 se pueden ver los valores que tomarían Z_c y t_c para diferentes niveles de confianza requeridos.

Niv. Conf	Z_c	t_c
99%	2.58	2.75
97.5%	2.24	2.11
95%	1.96	1.74
90%	1.645	1.33
85%	1.439	1.096
80%	1.28	0.863
75%	1.151	0.776
70%	1.038	0.689
65%	0.935	0.473
60%	0.842	0.257
55%	0.755	0.128
50%	0.674	

TABLA 2

El error medio (\bar{e}) y la desviación estandar de los errores (σ_e) se pueden valuar mediante las ecuaciones siguientes

$$\bar{e} = \frac{\sum_{i=1}^n e_i}{n} \quad (3.11)$$

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\bar{e} - e_i)^2}{n - 1}} \quad (3.12)$$

En ambos criterios el valor real de Y (Y_{real}) estaría dentro del intervalo siguiente

$$Y_{calc} + \Delta Y < Y_{real} < Y_{calc} - \Delta Y$$

De esta forma se obtendría un rango de valores según el nivel de confianza requerido por el estimador, dentro del cual se encontraría el resultado real del experimento.

4. MEDICIONES

Para llegar a una ecuación o relación que pueda dar como resultado el gasto de despegue, es necesario hacer mediciones experimentales de dicho gasto, para diferentes geometrias de la cubeta, y con esto tener los datos suficientes para aplicar el método de correlación múltiple.

En un estudio hecho anteriormente (ref 1), para cubetas de sección rectangular considera que el gasto unitario de despegue depende del radio de la cubeta, ángulo de salida, y de la carga hidráulica, lo cual se expresa como

$$q = F(R, \theta, H)$$

Para aprovechar los datos que resultaron de éste estudio, en este capítulo se explicará el procedimiento que se hizo para obtener los resultados necesarios para aplicar luego el método de correlación múltiple.

Partiendo de la suposición ántes mencionada, se puede decir que:

$$q = a_0 R^{a_1} \theta^{a_2} H^{a_3} \quad (4.1)$$

Aplicando logaritmos en ambos miembros de la ec. 4.1, esta se puede escribir de la forma siguiente

$$\log q = \log a_0 + a_1 \log R + a_2 \log \theta + a_3 \log H \quad (4.2)$$

Haciendo cambio de variables:

$$Y = \log q, A_0 = \log a_0, X_1 = \log R, X_2 = \log \theta, X_3 = \log H$$

Se puede escribir la ec. 4.2 de la forma siguiente

$$Y = A_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 \quad (4.3)$$

Siguiendo el procedimiento de diseño de experimentos visto en el cap.2 se tiene que la variable "q" depende de tres variables independientes (R, θ , H).

Para realizar el experimento, es conveniente contrastar los valores de R, θ , y H en cada uno de los ensayos, escogiendo alternativamente los valores máximos (M) y mínimos (m) que podrían tomar estas variables. Basándose en esto, se forma una tabla, como se puede ver la tabla 3, en la cual los ocho primeros renglones muestran los valores de "q" que se encontrarían de acuerdo con este criterio, y los últimos cuatro muestran los valores que obtendría "q" al hacer cuatro ensayos complementarios con el valor medio de las variables independientes, ésto con el fin de ver en qué medida se cometería un error al realizar el experimento.

condición ensayo	R	θ	H	q
1	M	M	M	q1
2	m	M	M	q2
3	M	m	M	q3
4	M	M	m	q4
5	m	m	M	q5
6	m	M	m	q6
7	M	m	m	q7
8	m	m	m	q8
9	p	p	p	q9
10	p	p	p	q10
11	p	p	p	q11
12	p	p	p	q12

Tabla 3

Con ésta tabla se puede ver que el número mínimo de ensayos a realizar es de doce y el número mínimo de cubetas que se deben construir para realizar el experimento es de cinco, ya que con la construcción de las mismas se puede ensayar los valores máximos, mínimos y promedio que puede tomar H, cambiando únicamente la estructura terminal del vertedor, por tanto se tiene que:

cubeta	R	θ
1	p	p
2	m	m
3	m	M
4	M	m
5	M	M

Tabla 4

Donde m , M y p son los valores mínimo, máximo y promedio que tomarían R y θ .

Por la disponibilidad de espacio en las instalaciones del laboratorio de Hidráulica de la Facultad de Ingeniería, Abraham Bernal (ref.1) propuso utilizar los datos siguientes

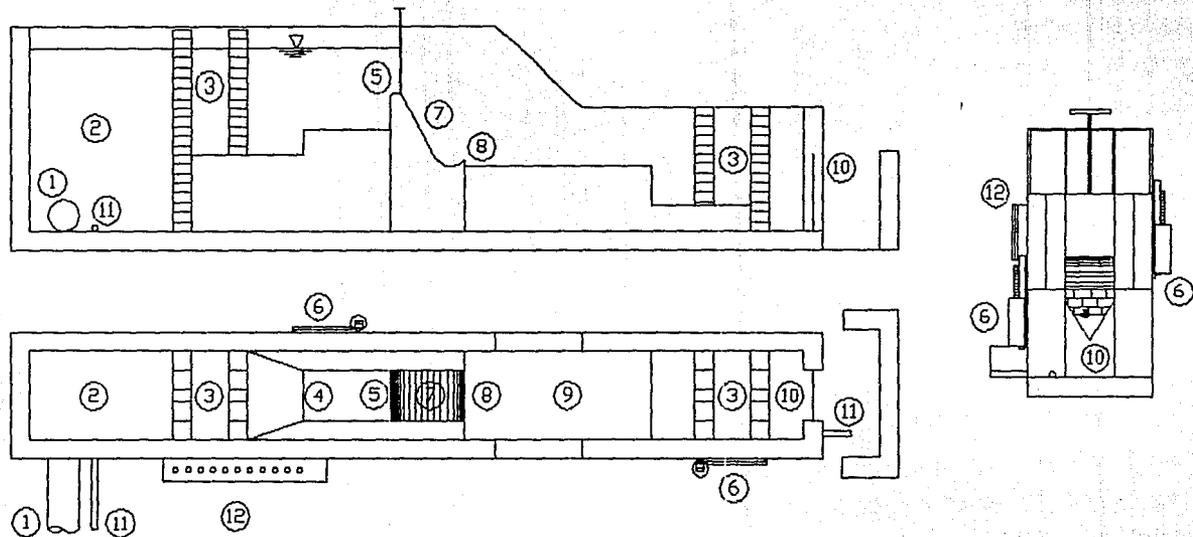
Variables	m	M	p
θ , en grados	30	45	37.5
R , en cm	10	40	25
H , en cm	47.5	70.15	58.83

TABLA 5

Para ensayar las cubetas de lanzamiento con las características geométricas señaladas anteriormente, se construyó una instalación experimental en el salón de modelos aerodinámicos del laboratorio de Hidráulica de la Facultad de Ingeniería.

El modelo construido en el laboratorio a escala 1:100 por Bernal (ref 1) consta de las siguientes estructuras que se pueden ver en las figs. 3, 4, y 5.

1.- Alimentación: Consta de una tubería de fofo de 10" de diámetro, con una capacidad máxima de 90 lts/s. La tubería en su llegada al tanque de almacenamiento del modelo tiene una válvula de 10" de diámetro, a la que se instaló un by-pass con tubería y válvula de 2" de diámetro para dar gastos pequeños con buena regulación, ver fig 3.



- 1.- Alimentación, tubo de 10 pulg.
- 2.- Almacenamiento.
- 3.- Dispositivo tranquilizador.
- 4.- Canal de acceso.
- 5.- Cimacio.
- 6.- Linímetros.

- 7.- Rápida.
- 8.- Estructura Terminal.
- 9.- Canal de Salida.
- 10.- Vertedor triangular.
- 11.- Descarga.
- 12.- Piezómetros.

Fig. 3 Modelo Hidráulico
Plano General

P	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x	-2.60	0	1.40	3.10	4.60	12.30	18.70	24.85	39.95
y	0.54	0	0.09	0.40	0.84	5.21	11.35	18.95	39.95

Características Hidráulicas

Ecuacion del cimacio $y = 2.55x^{1.858}$ (USBR)

Radios $r_1 = 8\text{cm}$; $r_2 = 3.54\text{cm}$

Longitud de la cresta $L = 40\text{cm}$

Carga de diseño $H_d = 15.1\text{cm}$

Gasto de diseño $Q = 50\text{ lts/s}$

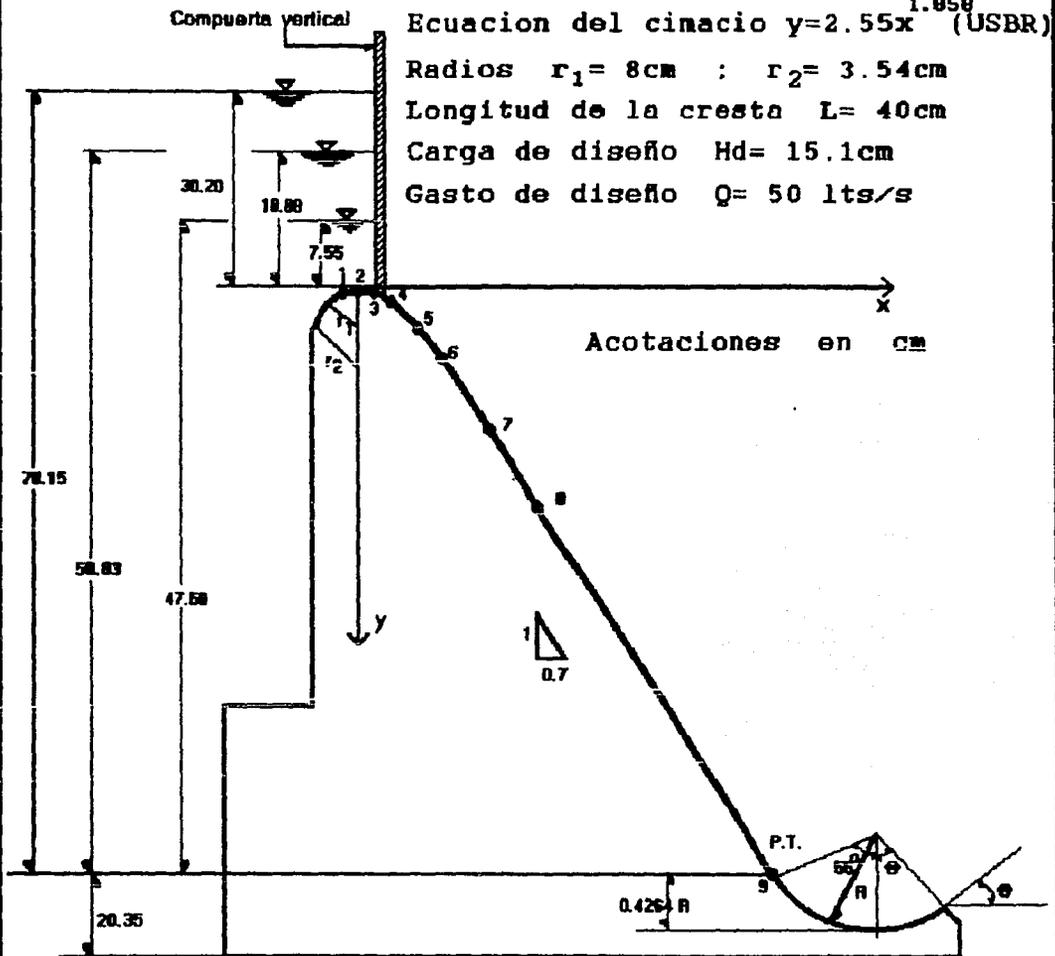


Fig. 4 Modelo hidráulico cubeta de lanzamiento

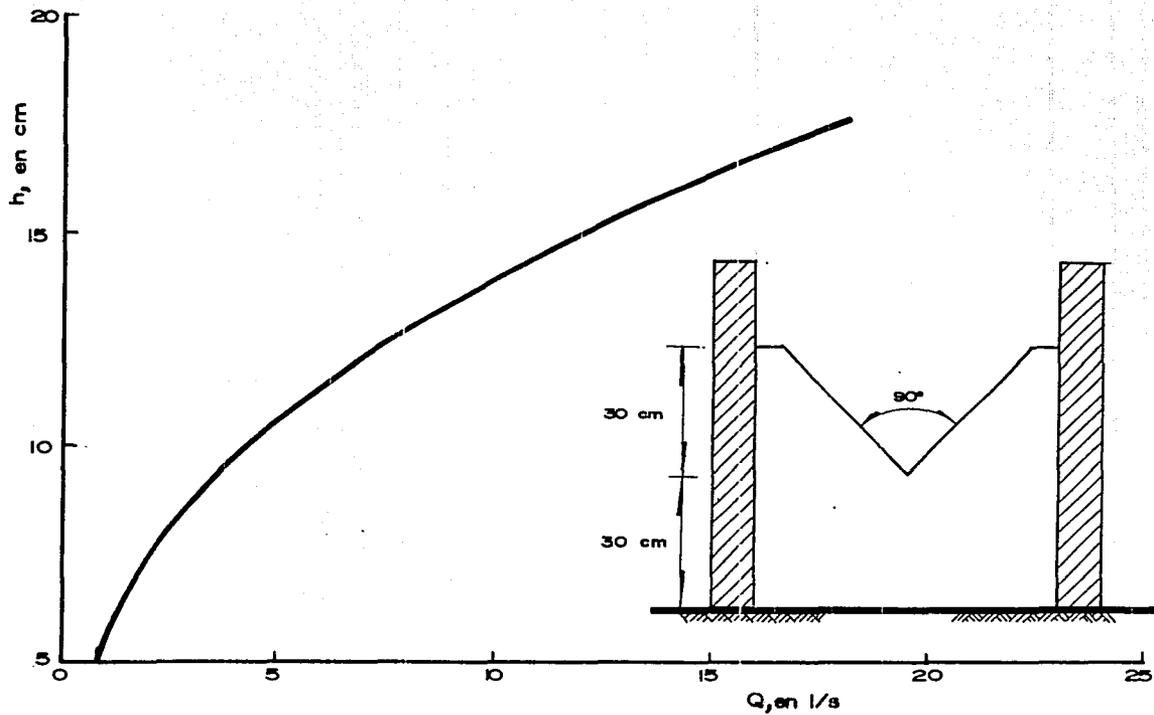


FIG. 5

CURVA CARGA DE AGUA - GASTOS DEL VERTEDOR TRIANGULAR

- 2.- Almacenamiento: Consiste de un tanque cuyas dimensiones son 1.3 x 0.7 x 1.60 m, que sirve para almacenar el agua que llega al modelo, proporcionando de esta forma la carga sobre el cimacio vertedor, ver fig 3.
- 3.- Dispositivos tranquilizadores: Son dos y se encuentran localizados uno aguas arriba y otro aguas abajo del cimacio, sirven para evitar, en la medida de lo posible la formación de ondas que puedan provocar variaciones u oscilaciones en los niveles de la superficie del agua tanto en el cimacio como en el vertedor triangular donde se aforaban los gastos, ver fig 3.
- 4.- Canal de acceso: Sirve para captar el agua del almacenamiento y conducirla hasta la cresta del cimacio con velocidad pequeña. La profundidad del canal de acceso es de 30 cm, respecto a la cresta vertedora, ver fig 3.
- 5.- Cimacio: Es un cimacio de cresta controlada por una compuerta plana deslizante colocada a 4.53 cm aguas abajo de la cresta vertedora. El perfil del cimacio se diseñó para una carga hidráulica de 15.1 cm y un gasto de 50 lts/s, la longitud de cresta es de 40 cm. La ecuación del perfil es la propuesta por USBR e igual a: $Y = 2.557 X^{1.858}$, ver fig 4.
- 6.- Limnímetros: Se cuenta con dos limnímetros de gancho, uno colocado aguas arriba del cimacio y el otro aguas abajo, con el objeto de determinar la carga sobre las crestas del cimacio y el vertedor triangular, respectivamente, ver fig 3.

7.- Rápida: El perfil del cimacio continúa con una rápida de fuerte pendiente (0.70:1) y de longitud corta (23.68 cm), que termina en el inicio de la cubeta de lanzamiento, ver fig 4.

8.- Estructura terminal: Consiste de una cubeta de lanzamiento, la cual es intercambiable, ver fig 4. Las cubetas de ensayo quedan identificadas como a se muestra en la tabla siguiente

cubeta	R en cm	θ en °
1	25	37.5
2	10	30
3	10	45
4	40	30
5	40	45

TABLA 6

9.- Canal de salida: Inicia después de la cubeta de lanzamiento, es de sección rectangular y sus dimensiones son: longitud 6.06 m y ancho de 0.70 m ; conduce el agua hacia un vertedor triangular de pared delgada, ver fig 3.

10.- Vertedor triangular: Es la estructura que permite aforar el gasto en el modelo, tiene un ángulo central de 90° y altura de vertido de 30 cm, y la profundidad de la cresta al fondo del canal es de 30 cm. En la fig 5 se muestra la curva gastos-carga del vertedor.

Para realizar los ensayos se siguió la metodología siguiente

- 1.- Se colocaba una cubeta.
- 2.- Se abría la válvula hasta mantener la carga hidráulica deseada aguas arriba del cimacio.

3.- Abrir la compuerta lentamente hasta el momento en que se observa que el salto hidráulico producido en la cubeta se barre hasta el labio de la misma.

4.- En el momento que se produce el despegue del flujo se mide, en el limnómetro de aguas abajo, la carga hidráulica sobre el vertedor triangular.

5.- Se entra a la gráfica gasto-carga del vertedor, o en su defecto a la ecuación del vertedor triangular, y se obtiene el gasto de despegue para la cubeta y carga hidráulica ensayadas.

6.- Se repite el procedimiento para los 12 ensayos requeridos.

Después de realizar los ensayos para las cubetas y condiciones hidráulicas mencionadas, se llegó a los resultados siguientes

ensayo	R (m)	θ ($^{\circ}$)	H (m)	Q (lts/s)	q ($m^3/s/m$)
1	0.40	45	0.7015	4.87	0.012175
2	0.40	30	0.7015	1.87	0.004675
3	0.10	45	0.7015	0.68	0.001700
4	0.10	30	0.7015	0.38	0.000950
5	0.40	45	0.4750	5.00	0.01250
6	0.40	30	0.4750	2.13	0.005325
7	0.10	45	0.4750	0.78	0.001950
8	0.10	30	0.4750	0.47	0.001175
9	0.25	37.5	0.5883	1.95	0.004875
10	0.25	37.5	0.5883	1.95	0.004875
11	0.25	37.5	0.5883	1.95	0.004875
12	0.25	37.5	0.5883	1.95	0.004875

TABLA 7

Como la finalidad de esta tesis es la de no tener que construir un modelo hidráulico para valuar el gasto de despege, es necesario transformar los datos y resultados de la tabla 7, que estan a escala 1:100, a dimensiones reales, así los resultados en prototipo de los experimentos realizados por Abraham Bernal (ref 1) serían los mostrados en la tabla 8.

Para obtener un mayor número de datos sobre gastos de despege, se pidió la colaboración del laboratorio de Hidráulica de la Secretaría de Agricultura y Recursos Hidráulicos (SARH), ésto con el fin de que la ecuación que se pretende encontrar sea más confiable y representativa, y pueda ser aplicada a cualquier modelo deseado.

ensayo	R (m)	θ ($^{\circ}$)	H (m)	Q (m^3/s)	q ($m^3/s/m$)
1	40	45	70.15	487	12.175
2	40	30	70.15	187	4.675
3	10	45	70.15	68	1.700
4	10	30	70.15	38	0.950
5	40	45	70.15	500	12.500
6	40	30	47.50	213	5.325
7	10	45	47.50	78	1.950
8	10	30	47.50	47	1.175
9	25	37.5	58.83	195	4.875
10	25	37.5	58.83	195	4.875
11	25	37.5	58.83	195	4.875
12	25	37.5	58.83	195	4.875

TABLA 8

En el laboratorio se proporcionó la información de gastos de despegue y características geométricas, de los modelos hidráulicos construidos de diversas presas del país que cuentan con un vertedor cuya estructura terminal es una cubeta de lanzamiento. Con esto se incrementa el número de datos en 22 mas los 12 realizados en el laboratorio de Hidráulica de la Facultad de ingeniería.

Los datos recabados en el laboratorio de SARH se pueden observar en la tabla 9.

En la fig 6 se pueden observar las variables que aparecen en la tabla mencionada.

Estudios realizados por Abraham Bernal (ref 1) indican que el gasto unitario de despegue, con los datos de la tabla 8, puede calcularse para cubetas de sección rectangular por medio de la fórmula siguiente.

$$q = \frac{3.4636 R^{1.2032} (1-\cos\theta)^{0.676365}}{H^{0.6322638}} \quad (4.4)$$

Si se sustituyen los datos de las 12 cubetas rectangulares estudiadas en el laboratorio de Hidráulica en la ec. 4.4, se obtienen los resultados mostrados en la tabla 8a.

Aplicando el criterio de la F de Fisher vista en el cap 2, para ver si ésta correlación es la adecuada, se tiene que el número de ensayos complementarios es k=4, y la media de los resultados obtenidos en los mismos esta dada por

$$\bar{Y}_c = 4(4.875) / 4 = 4.875$$

Como el valor de la media es igual al valor de los resultados de los ensayos complementarios, de la ec 2.9 se tiene que $S_{yc}^2 = 0$.

$$\text{Si } F_{calc} = \frac{S_{LF}^2}{S_{yc}^2}; \text{ entonces } F_{calc} = \infty$$

De tablas se puede obtener $F_{0.05}$ para los siguientes grados de libertad

$$\nu_1 = n - (1+1) - (k-1) = 12 - (3) - (4-1) = 6$$

$$\nu_2 = k - 1 = 4 - 1 = 3$$

Por lo que $F_{0.05} = 5.28$

Como $F_{calc} \gg F_{0.05}$ se concluye que la ec 4.4 propuesta no es la adecuada.

ensayo	R (m)	θ ($^{\circ}$)	H (m)	q_c ($m^3/s/m$)	q_m ($m^3/s/m$)
1	40	45	70.15	9.92	12.175
2	40	30	70.15	5.84	4.675
3	10	45	70.15	2.26	1.700
4	10	30	70.15	1.33	0.950
5	40	45	70.15	9.92	12.500
6	40	30	47.50	5.84	5.325
7	10	45	47.50	2.26	1.950
8	10	30	47.50	1.33	1.175
9	25	37.5	58.83	4.80	4.875
10	25	37.5	58.83	4.80	4.875
11	25	37.5	58.83	4.80	4.875
12	25	37.5	58.83	4.80	4.875

TABLA 8a

TABLA 9. DATOS DE LAS CUBETAS EXISTENTES EN EL LABORATORIO DE SARH

ENSAYE No	NOMBRE PRESA	ESTADO	R (m)	ANG. DESP θ (°)	ANG. LLEG. α (°)	b (m)	k	Htotal (m)	Q desp (m ³ /s)
1	SANTA INES	B-C-S.	5.000	25.000	52.220	60	0	19.210	49.12
2	SANTA INES	B-C-S.	2.500	45.000	52.220	60	0	21.230	47.30
3	BUENA MUJER	B-C-S.	7.250	30.000	42.060	3	0	17.478	5.00
4	LAS TROJES	COL	35.000	24.000	7.130	25	0.5	37.530	200.00
5	PICO AGUILA	CHIH	10.000	30.000	7.410	40	0.5	23.980	97.00
6	SANTIAGO	DGO	15.000	30.000	30.300	21	0.5	27.580	88.00
7	SANTIAGO	DGO	15.000	30.000	19.030	21	0.5	27.490	43.00
8	LA LABORCITA	DGO	8.000	30.000	12.240	10	0.5	25.772	15.60
9	EL GALLO	GRO	35.000	25.000	1.150	50	0.5	35.910	700.00
10	ANDRES FIGUEROA	GRO	43.580	16.880	16.690	40	0.5	38.880	127.00
11	EL GUINEO	GRO	15.000	30.000	9.090	50	0.5	44.051	222.00
12	LA PEÑA	HGO	41.222	20.000	5.710	5	0.5	24.350	31.80
13	TRIGOMIL	JAL	13.000	25.000	53.130	50	0	69.620	77.00
14	CALDERON	JAL	25.000	20.000	5.143	8	0.5	18.490	44.50
15	LOS CARROS	MOR	39.300	16.220	18.770	15	0.5	26.195	123.00
16	LOS CARROS	MOR	30.160	27.490	18.780	15	0.5	27.740	170.00
17	CAYEHUACAN	MOR	15.000	30.000	4.858	18	0.5	23.000	133.00
18	TETLAMA	MOR	15.000	15.960	14.036	20	0.5	32.750	36.00
19	SABINAL	SIN	16.000	25.000	2.860	15	0.5	51.356	60.00
20	EL SALTO	SIN	15.000	30.000	5.029	60	0.5	15.557	395.00
21	QUELITE	SIN	36.550	28.160	12.230	25	1	35.990	365.34
22	CUAUHTEMOC	SON	29.380	25.000	19.090	20	0.5	31.248	150.00

5.- ANALISIS DE RESULTADOS

Con el fin de encontrar una ecuación con la cual se pueda calcular el gasto de despegue en las cubetas de lanzamiento, aplicando el método descrito en el cap 3, es necesario establecer los factores o las variables independientes de las cuales depende dicho gasto.

En la literatura especializada, diversos investigadores como Locher y Hsu, Lozoya Corrales, y Bernal Ortiz (refs 3, 4, 5), coinciden en que el gasto de despegue depende de las características geométricas de la cubeta, las cuales son el radio de la cubeta (R) y el ángulo de salida (θ); pero observando el comportamiento del flujo en las cubetas de lanzamiento, se considero que también deben de intervenir otras variables como son el ángulo de llegada de la rápida (α), ancho del canal (b), talud en las paredes del canal (k) (cuando el canal tiene sección trapecial), y de la caída o desnivel que existe entre el cimacio y la parte más baja de la cubeta (H). Según se ve en la fig 6.

Variables independientes de la ecuación .

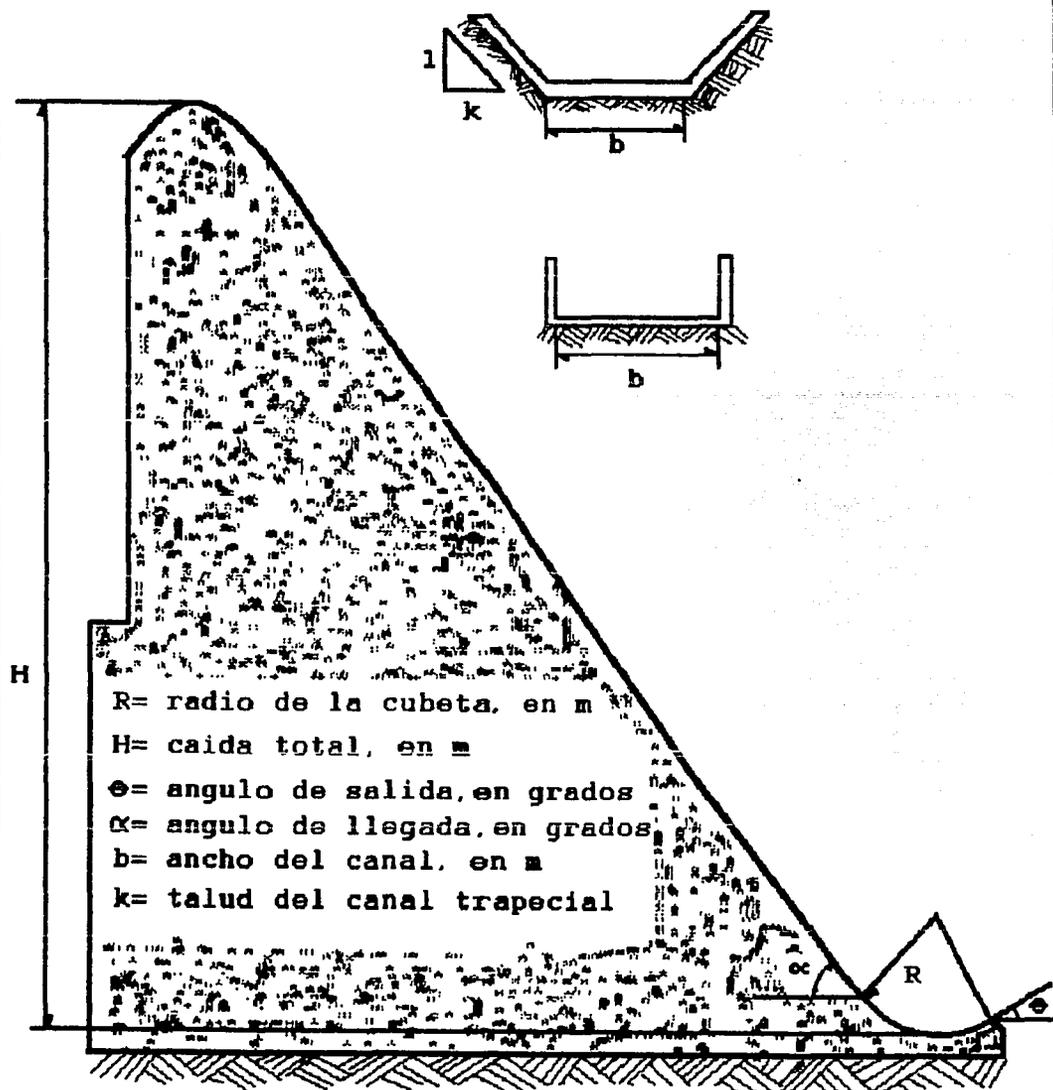


Fig. 6 Características geométricas

Para tener resultados calculados con la ecuación más confiables, se podrían suponer dos ecuaciones, una que nos permita calcular el gasto de despegue en cubetas de sección transversal rectangular y otra para el caso en que ella sea trapecial. De esta manera las relaciones que nos permitirían calcular el gasto de despegue, serían de la forma siguiente

$$a) Q = a_0 R^{a_1} \theta^{a_2} \alpha^{a_3} H^{a_4} b^{a_5}$$

$$b) Q = a_0 R^{a_1} \theta^{a_2} \alpha^{a_3} H^{a_4} k^{a_5} b^{a_6}$$

Siendo a) la ecuación para cubetas de sección rectangular y b) la ecuación para cubetas de sección trapecial.

Aplicando el método de correlación múltiple, se tendrá que ajustar estas ecuaciones a una relación de tipo lineal, haciendo cambio de variables y aplicando logaritmos se tiene lo siguiente:

a) Para cubetas de sección transversal rectangular

$$Y = A_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + a_4 X_4 + a_5 X_5$$

donde

$$Y = \log Q, A_0 = \log a_0, X_1 = \log R, X_2 = \log \theta, X_3 = \log \alpha,$$

$$X_4 = \log H, X_5 = \log b$$

b) Para cubetas de sección transversal trapecial

$$Y = A_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + a_4 X_4 + a_5 X_5 + a_6 X_6$$

donde

$$Y = \log Q, A_0 = \log a_0, X_1 = \log R, X_2 = \log \theta, X_3 = \log \alpha,$$

$$X_4 = \log H, X_5 = \log k, X_6 = \log b$$

Para poder encontrar los coeficientes $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5,$ y $a_6,$ se debe aplicar el método de mínimos cuadrados descrito en el cap 3, que da como resultado el sistema de ecuaciones de 6

ecuaciones con 6 incógnitas para la relación del inciso a), y de 7 ecuaciones con siete incógnitas para la relación del b). De esta manera la matriz que resultaría para cada uno de los casos sería la siguiente

a) Para cubetas de sección rectangular.

N	$\sum X_1$	$\sum X_2$	$\sum X_3$	$\sum X_4$	$\sum X_5$	a0	$\sum Y$
$\sum X_1$	$\sum X_1^2$	$\sum X_1X_2$	$\sum X_1X_3$	$\sum X_1X_4$	$\sum X_1X_5$	a1	$\sum YX_1$
$\sum X_2$	$\sum X_1X_2$	$\sum X_2^2$	$\sum X_2X_3$	$\sum X_2X_4$	$\sum X_2X_5$	a2	$\sum YX_2$
$\sum X_3$	$\sum X_1X_3$	$\sum X_2X_3$	$\sum X_3^2$	$\sum X_3X_4$	$\sum X_3X_5$	a3	$\sum YX_3$
$\sum X_4$	$\sum X_4X_1$	$\sum X_4X_2$	$\sum X_4X_3$	$\sum X_4^2$	$\sum X_4X_5$	a4	$\sum YX_4$
$\sum X_5$	$\sum X_1X_5$	$\sum X_2X_5$	$\sum X_5X_3$	$\sum X_5X_4$	$\sum X_5^2$	a5	$\sum YX_5$

b) Para cubetas de sección trapecial.

N	$\sum X_1$	$\sum X_2$	$\sum X_3$	$\sum X_4$	$\sum X_5$	$\sum X_6$	a0	$\sum Y$
$\sum X_1$	$\sum X_1^2$	$\sum X_1X_2$	$\sum X_1X_3$	$\sum X_1X_4$	$\sum X_1X_5$	$\sum X_1X_6$	a1	$\sum YX_1$
$\sum X_2$	$\sum X_1X_2$	$\sum X_2^2$	$\sum X_2X_3$	$\sum X_2X_4$	$\sum X_2X_5$	$\sum X_2X_6$	a2	$\sum YX_2$
$\sum X_3$	$\sum X_1X_3$	$\sum X_2X_3$	$\sum X_3^2$	$\sum X_3X_4$	$\sum X_3X_5$	$\sum X_3X_6$	a3	$\sum YX_3$
$\sum X_4$	$\sum X_4X_1$	$\sum X_4X_2$	$\sum X_4X_3$	$\sum X_4^2$	$\sum X_4X_5$	$\sum X_4X_6$	a4	$\sum YX_4$
$\sum X_5$	$\sum X_5X_1$	$\sum X_5X_2$	$\sum X_5X_3$	$\sum X_5X_4$	$\sum X_5^2$	$\sum X_5X_6$	a5	$\sum YX_5$
$\sum X_6$	$\sum X_6X_1$	$\sum X_6X_2$	$\sum X_6X_3$	$\sum X_6X_4$	$\sum X_6X_5$	$\sum X_6^2$	a6	$\sum YX_6$

Para poder aplicar estas matrices, es necesario cambiar la

carga hidráulica en los ensayos de las 12 cubetas rectangulares hechos en el laboratorio de hidráulica (tabla 8) por la caída o desnivel (H) que corresponda, y aumentar los datos de las variables que se consideran para ser congruentes y tener una solución confiable.

Por otra parte se necesita separar los datos correspondientes a cubetas de sección rectangular de los que corresponden a cubetas de sección trapecial. En las tablas 10 y 11 se presentan los datos correspondientes a cubetas de sección rectangular y trapecial, respectivamente, las cuales se emplearán para calcular las sumatorias implicadas en las matrices que darán solución a las constantes de las ecuaciones planteadas.

Las tablas 12 y 13 muestran las tablas de cálculo que se desarrollaron para poder calcular las sumatorias de los términos implicados en las matrices, para cada sección descrita. Con estos resultados se forman las matrices siguientes

a) Para cubetas de sección rectangular.

16	19.0712	24.7437	27.6699	26.0377	24.9571	a ₀	32.0749
19.0712	24.7113	29.5553	33.0501	37.8294	29.8865	a ₁	40.3326
24.7437	29.5553	38.3937	42.6485	40.2971	38.6519	a ₂	19.8823
27.6699	33.0501	42.8023	47.8646	45.0839	43.2744	a ₃	55.6380
26.0371	31.8294	40.2974	45.0839	42.8632	40.9535	a ₄	53.2226
24.9571	29.8865	38.6519	43.2744	40.9535	40.2369	a ₅	51.6380

TABLA 10 " DATOS DE TODAS LAS CUBETAS DE SECCION RECTANGULAR "

ENSAYE No	NOMBRE PRESA	ESTADO	R (m)	ANG-DESP θ (°)	ANG-LLEG- α (°)	b (m)	Htotal (m)	Q desp (m ³ /s)
1	SANTA INES	B-C-S	5.000	25.000	52.220	60	19.210	49.12
2	SANTA INES	B-C-S	2.500	45.000	52.220	60	21.230	47.30
3	BUENA MUJER	B-C-S	7.250	30.000	42.060	3	17.478	5.00
4	TRIGOMIL	JAL	13.000	25.000	53.130	50	69.620	77.00
5	LAB- HIDRA	F-I-	40.0000	45.000	55.008	40.0000	57.0000	487.0000
6	LAB- HIDRA	F-I-	40.0000	30.000	55.008	40.0000	57.0000	187.0000
7	LAB- HIDRA	F-I-	10.0000	45.000	55.008	40.0000	44.2000	68.0000
8	LAB- HIDRA	F-I-	10.0000	30.000	55.008	40.0000	44.2000	38.0000
9	LAB- HIDRA	F-I-	40.0000	45.000	55.008	40.0000	57.0000	500.0000
10	LAB- HIDRA	F-I-	40.0000	30.000	55.008	40.0000	57.0000	213.0000
11	LAB- HIDRA	F-I-	10.0000	45.000	55.008	40.0000	42.0000	78.0000
12	LAB- HIDRA	F-I-	10.0000	30.000	55.008	40.0000	42.0000	47.0000
13	LAB- HIDRA	F-I-	25.0000	37.500	55.008	40.0000	50.6000	195.0000
14	LAB- HIDRA	F-I-	25.0000	37.500	55.008	40.0000	50.6000	195.0000
15	LAB- HIDRA	F-I-	25.0000	37.500	55.008	40.0000	50.6000	195.0000
16	LAB- HIDRA	F-I-	25.0000	37.500	55.008	40.0000	50.6000	195.0000

TABLA 11 " DATOS DE TODAS LAS CUBETAS DE SECCION TRAPECIAL "

ENSAYE No	NOMBRE PRESA	ESTADO	R (m)	ANG.DESP θ (°)	ANG.LLEG. α (°)	b (m)	k	Htotal (m)	Qdesp (m ³ /s)
1	LAS TROJES	COL	35.000	24.000	7.130	25	0.5	37.530	200.00
2	PICO AGUILA	CHIH	10.000	30.000	7.410	40	0.5	23.980	97.00
3	SANTIAGO	DGO	15.000	30.000	30.300	21	0.5	27.580	88.00
4	SANTIAGO	DGO	15.000	30.000	19.030	21	0.5	27.490	43.00
5	LA LABORCITA	DGO	8.000	30.000	12.240	10	0.5	25.772	15.60
6	EL GALLO	GRO	35.000	25.000	1.150	50	0.5	35.910	700.00
7	ANDRES FIGUEROA	GRO	43.580	16.880	16.690	40	0.5	38.880	127.00
8	EL GUINEO	GRO	15.000	30.000	9.090	50	0.5	44.051	222.00
9	LA PEÑA	HGO	41.222	20.000	5.710	5	0.5	24.350	31.80
10	CALDERON	JAL	25.000	20.000	5.143	8	0.5	18.490	44.50
11	LOS CARROS	MOR	39.300	16.220	18.770	15	0.5	26.195	123.00
12	LOS CARROS	MOR	30.160	27.490	18.780	15	0.5	27.740	170.00
13	CAYEHUACAN	MOR	15.000	30.000	4.858	18	0.5	23.000	133.00
14	TETLAMA	MOR	15.000	15.960	14.036	20	0.5	32.750	36.00
15	SABINAL	SIN	16.000	25.000	2.860	15	0.5	51.356	60.00
16	EL SALTO	SIN	15.000	30.000	5.029	60	0.5	15.557	395.00
17	QUELITE	SIN	36.550	28.160	12.230	25	1	35.990	365.34
18	CUAUHTEMOC	SON	29.380	25.000	19.090	20	0.5	31.248	150.00

TABLA 12

TABLA DE CALCULO PARA FORMAR LA MATRIZ DE CUBETAS DE SECCION RECTANGULAR

ENSAYE No	R (m)	θ (g)	ρc (g)	H (m)	b (m)	Q (m ³ /s)	Log R X1	Log θ X2	Log ρc X3	Log H X4	Log b X5
1	5.000	25.000	52.220	19.2100	60.0000	49.120	0.6990	1.3979	1.7178	1.2835	1.7782
2	2.500	45.000	52.220	21.2300	60.0000	47.300	0.3979	1.6532	1.7178	1.3269	1.7782
3	7.250	30.000	42.060	17.4780	3.0000	5.000	0.8603	1.4771	1.6239	1.2425	0.4771
4	13.000	25.000	53.130	69.6200	50.0000	77.000	1.1139	1.3979	1.7253	1.8427	1.6990
5	40.000	45.000	55.008	57.000	40.000	487.000	1.6021	1.6532	1.7404	1.7559	1.6021
6	40.000	30.000	55.008	57.000	40.000	187.000	1.6021	1.4771	1.7404	1.7559	1.6021
7	10.000	45.000	55.008	42.200	40.000	68.000	1.0000	1.6532	1.7404	1.6253	1.6021
8	10.000	30.000	55.008	42.200	40.000	38.000	1.0000	1.4771	1.7404	1.6253	1.6021
9	40.000	45.000	55.008	57.000	40.000	500.000	1.6021	1.6532	1.7404	1.7559	1.6021
10	40.000	30.000	55.008	57.000	40.000	213.000	1.6021	1.4771	1.7404	1.7559	1.6021
11	10.000	45.000	55.008	42.200	40.000	78.000	1.0000	1.6532	1.7404	1.6253	1.6021
12	10.000	30.000	55.008	42.200	40.000	47.000	1.0000	1.4771	1.7404	1.6253	1.6021
13	25.000	37.500	55.008	50.600	40.000	195.000	1.3979	1.5740	1.7404	1.7042	1.6021
14	25.000	37.500	55.008	50.600	40.000	195.000	1.3979	1.5740	1.7404	1.7042	1.6021
15	25.000	37.500	55.008	50.600	40.000	195.000	1.3979	1.5740	1.7404	1.7042	1.6021
16	25.000	37.500	55.008	50.600	40.000	195.000	1.3979	1.5740	1.7404	1.7042	1.6021
							19.071191	24.743674	27.669984	26.037054	24.957114

TABLA 12 Cont.

Log α Y	X1 X2	X1 X3	X1 X4	X1 X5	X2 X3	X2 X4	X2 X5	X3 X4	X3 X5	X4 X5	X1 ²
1.6913	0.9771	1.2007	0.8971	1.2429	2.40143	1.79429	2.48575	2.20489	3.05457	2.28231	0.48856
1.6749	0.6579	0.6836	0.5280	0.7076	2.83995	2.19373	2.93966	2.27948	3.05457	2.35952	0.15836
0.6990	1.2708	1.3971	1.0690	0.4105	2.39865	1.83531	0.70477	2.01764	0.77478	0.59282	0.74018
1.8865	1.5572	1.9219	2.0527	1.8926	2.41192	2.57603	2.37506	3.17934	2.93130	3.13075	1.24087
2.6875	2.6485	2.7883	2.8130	2.5666	2.87729	2.90283	2.64855	3.05597	2.78827	2.81302	2.56660
2.2718	2.3664	2.7883	2.8130	2.5666	2.57082	2.59364	2.36644	3.05597	2.78827	2.81302	2.56660
1.8325	1.6532	1.7404	1.6253	1.6021	2.87729	2.68699	2.64855	2.82873	2.78827	2.60385	1.00000
1.5798	1.4771	1.7404	1.6253	1.6021	2.57082	2.40078	2.36644	2.82873	2.78827	2.60385	1.00000
2.6990	2.6485	2.7883	2.8130	2.5666	2.87729	2.90283	2.64655	3.05597	2.78827	2.81302	2.56660
2.3284	2.3664	2.7883	2.8130	2.5666	2.57082	2.59364	2.36644	3.05597	2.78827	2.81302	2.56660
1.8921	1.6532	1.7404	1.6253	1.6021	2.87729	2.68699	2.64655	2.82873	2.78827	2.60385	1.00000
1.6721	1.4771	1.7404	1.6253	1.6021	2.57082	2.40078	2.36644	2.82873	2.78827	2.60385	1.00000
2.2900	2.2004	2.4330	2.3823	2.2396	2.73948	2.68239	2.52169	2.96595	2.78827	2.73015	1.95424
2.2900	2.2004	2.4330	2.3823	2.2396	2.73948	2.68239	2.52169	2.96595	2.78827	2.73015	1.95424
2.2900	2.2004	2.4330	2.3823	2.2396	2.73948	2.68239	2.52169	2.96595	2.78827	2.73015	1.95424
32.074924	29.555285	33.050121	31.829376	29.886474	42.802335	40.297402	38.651935	45.083958	43.274415	40.953458	24.711297

TABLA 12 Cont.

X2*2	X3*2	X4*2	X5*2	X1 Y	X2 Y	X3 Y	X4 Y	X5 Y
1.95424	2.95096	1.64744	3.16182	1.18214	2.36428	2.90531	2.17078	3.00731
2.73311	2.95096	1.76080	3.16182	0.66649	2.76890	2.87714	2.22246	2.97816
2.18189	2.63695	1.54379	0.22764	0.60135	1.03246	1.13504	0.86846	0.33349
1.95424	2.97680	3.39567	2.88650	2.10144	2.63720	3.25484	3.47630	3.20509
2.73311	3.02908	3.08310	2.56660	4.30558	4.44306	4.67744	4.71896	4.30558
2.18189	3.02908	3.08310	2.56660	3.63963	3.35579	3.95397	3.98907	3.63963
2.73311	3.02908	2.64164	2.56660	1.83251	3.02953	3.18934	2.97840	2.93579
2.18189	3.02908	2.64164	2.56660	1.57978	2.33353	2.74949	2.56764	2.53091
2.73311	3.02908	3.08310	2.56660	4.32391	4.46197	4.69736	4.73905	4.32391
2.18189	3.02908	3.08310	2.56660	3.73020	3.43930	4.05237	4.08834	3.73020
2.73311	3.02908	2.64164	2.56660	1.89209	3.12803	3.29305	3.07524	3.03125
2.18189	3.02908	2.64164	2.56660	1.67210	2.46989	2.91016	2.71768	2.67880
2.47757	3.02908	2.90413	2.56660	3.20133	3.60459	3.98563	3.90256	3.66877
2.47757	3.02908	2.90413	2.56660	3.20133	3.60459	3.98563	3.90256	3.66877
2.47757	3.02908	2.90413	2.56660	3.20133	3.60459	3.98563	3.90256	3.66877
38.393764	47.864629	42.863157	40.236942	40.332561	49.882284	55.63804	53.222652	51.375218

TABLA 13

TABLA DE CALCULO PARA FORMAR LA MATRIZ DE CUBETAS DE SECCION TRAPECIAL

ENSALLE No	R (m)	ϕ (g)	αC (g)	H (m)	k	b (m)	Q (m^3/s)	Log R X1	Log ϕ X2	Log αC X3	Log H X4
1	35.000	24.000	7.130	37.5300	0.5	25.0000	200.000	1.5441	1.3802	0.8531	1.5744
2	10.000	30.000	7.410	23.9800	0.5	40.0000	97.000	1.0000	1.4771	0.8698	1.3798
3	15.000	30.000	30.300	27.5800	0.5	21.0000	88.000	1.1761	1.4771	1.4814	1.4406
4	15.000	30.000	19.030	27.4900	0.5	21.0000	43.000	1.1761	1.4771	1.2794	1.4392
5	8.000	30.000	12.240	25.7720	0.5	10.0000	15.600	0.9031	1.4771	1.0878	1.4111
6	35.000	25.000	1.150	35.9100	0.5	50.0000	700.000	1.5441	1.3979	0.0607	1.5552
7	43.580	16.880	16.690	38.8800	0.5	40.0000	127.000	1.6393	1.2274	1.2225	1.5897
8	15.000	30.000	9.090	44.0510	0.5	50.0000	222.000	1.1761	1.4771	0.9586	1.6440
9	41.222	20.000	5.710	24.3500	0.5	5.0000	31.800	1.6151	1.3010	0.7566	1.3865
10	25.000	20.000	5.143	18.4900	0.5	8.0000	44.500	1.3979	1.3010	0.7112	1.2669
11	39.300	16.220	18.770	26.1950	0.5	15.0000	123.000	1.5944	1.2101	1.2735	1.4182
12	30.160	27.490	18.780	27.7400	0.5	15.0000	170.000	1.4794	1.4392	1.2737	1.4431
13	15.000	30.000	4.858	23.0000	0.5	18.0000	133.000	1.1761	1.4771	0.6865	1.3617
14	15.000	15.960	14.036	32.7500	0.5	20.0000	36.000	1.1761	1.2030	1.1472	1.5152
15	16.000	25.000	2.860	51.3560	0.5	15.0000	60.000	1.2041	1.3979	0.4564	1.7106
16	15.000	30.000	5.029	15.5570	0.5	60.0000	395.000	1.1761	1.4771	0.7015	1.1919
17	36.550	28.160	12.230	35.9900	1.0	25.0000	365.340	1.5629	1.4496	1.0874	1.5562
18	29.380	25.000	19.090	31.2480	0.5	20.0000	150.000	1.4681	1.3979	1.2808	1.4948
								24.009013	25.045204	17.168082	26.379263

TABLA 13 Cont.

Log k X5	Log b X6	Log Q Y	X1 X2	X1 X3	X1 X4	X1 X5	X1 X6	X2 X3	X2 X4	X2 X5	X2 X6
-0.3010	1.3979	2.3010	2.1311	1.3172	2.4309	-0.4648	2.1585	1.17744	2.17297	-0.4155	1.92945
-0.3010	1.6021	1.9868	1.4771	0.8698	1.3798	-0.3010	1.6021	1.28483	2.03820	-0.4447	2.36644
-0.3010	1.3222	1.9445	1.7372	1.7423	1.6943	-0.3540	1.5551	2.18827	2.12793	-0.4447	1.95308
-0.3010	1.3222	1.6335	1.7372	1.5047	1.6926	-0.3540	1.5551	1.88989	2.12584	-0.4447	1.95308
-0.3010	1.0000	1.1931	1.3340	0.9824	1.2744	-0.2719	0.9031	1.60679	2.08444	-0.4447	1.47712
-0.3010	1.6990	2.8451	2.1585	0.0937	2.4014	-0.4648	2.6233	0.08485	2.17410	-0.4208	2.37506
-0.3010	1.6021	2.1038	2.0120	2.0040	2.6060	-0.4935	2.6262	1.50041	1.95119	-0.3695	1.96632
-0.3010	1.6990	2.3464	1.7372	1.1274	1.9334	-0.3540	1.9981	1.41592	2.42832	-0.4447	2.50958
-0.3010	0.6990	1.5024	2.1013	1.2221	2.2394	-0.4862	1.1289	0.98441	1.80388	-0.3916	0.90938
-0.3010	0.9031	1.6484	1.8188	0.9942	1.7711	-0.4208	1.2625	0.92531	1.64832	-0.3916	1.17495
-0.3010	1.1761	2.0899	1.9293	2.0304	2.2612	-0.4800	1.8752	1.54096	1.71612	-0.3643	1.42313
-0.3010	1.1761	2.2304	2.1292	1.8843	2.1350	-0.4454	1.7399	1.83307	2.07688	-0.4332	1.69260
-0.3010	1.2553	2.1239	1.7372	0.8073	1.6015	-0.3540	1.4763	1.01398	2.01144	-0.4447	1.85419
-0.3010	1.3010	1.5563	1.4149	1.3493	1.7820	-0.3540	1.5301	1.38017	1.82285	-0.3621	1.56518
-0.3010	1.1761	1.7782	1.6833	0.5495	2.0598	-0.3625	1.4162	0.63797	2.39130	-0.4208	1.64411
-0.3010	1.7782	2.5966	1.7372	0.8250	1.4018	-0.3540	2.0913	1.03617	1.76062	-0.4447	2.62655
0.0000	1.3979	2.5627	2.2656	1.6995	2.4321	0.0000	2.1848	1.57637	2.25589	0.0000	2.02650
-0.3010	1.3010	2.1761	2.0522	1.8803	2.1945	-0.4419	1.9100	1.79049	2.08967	-0.4208	1.81876
-5.11751	23.808196	36.618964	33.193487	22.883487	35.291257	-6.756957	31.636631	23.867293	36.679962	-7.102975	33.265476

TABLA 13 Cont.

X3 X4	X3 X5	X3 X6	X4 X5	X4 X6	X5 X6	X1^2	X2^2	X3^2	X4^2	X5^2	X6^2
1.34309	-0.2568	1.19257	-0.4739	2.20089	-0.4208	2.38415	1.90498	0.72776	2.47867	0.09062	1.95424
1.20022	-0.2618	1.39350	-0.4154	2.21060	-0.4823	1.00000	2.18189	0.75658	1.90398	0.09062	2.56660
2.13416	-0.4460	1.95879	-0.4337	1.90478	-0.3980	1.38319	2.18189	2.19467	2.07531	0.09062	1.74826
1.84134	-0.3851	1.69170	-0.4332	1.90290	-0.3980	1.38319	2.18189	1.63696	2.07122	0.09062	1.74826
1.53502	-0.3275	1.08778	-0.4248	1.41115	-0.3010	0.81537	2.18189	1.18327	1.99134	0.09062	1.00000
0.09440	-0.0183	0.10312	-0.4682	2.64226	-0.5114	2.38415	1.95424	0.00368	2.41869	0.09062	2.88650
1.94337	-0.3680	1.95845	-0.4786	2.54684	-0.4823	2.68726	1.50644	1.49440	2.52723	0.09062	2.56660
1.57584	-0.2886	1.62857	-0.4949	2.79303	-0.5114	1.38319	2.18189	0.91884	2.70259	0.09062	2.88650
1.04908	-0.2278	0.52887	-0.4174	0.96912	-0.2104	2.60864	1.69268	0.57250	1.92238	0.09062	0.48856
0.90107	-0.2141	0.64229	-0.3814	1.14416	-0.2719	1.95424	1.69268	0.50583	1.60513	0.09062	0.81557
1.80605	-0.3834	1.49771	-0.4269	1.66795	-0.3540	2.54209	1.46422	1.62171	2.01134	0.09062	1.38319
1.83808	-0.3834	1.49798	-0.4344	1.69722	-0.3540	2.18872	2.07122	1.62230	2.08256	0.09062	1.38319
0.93477	-0.2066	0.86169	-0.4099	1.70934	-0.3779	1.38319	2.18189	0.47122	1.85430	0.09062	1.57571
1.73832	-0.3454	1.49260	-0.4561	1.97134	-0.3916	1.38319	1.44729	1.31617	2.29587	0.09062	1.69268
0.78066	-0.1374	0.53673	-0.5149	2.01181	-0.3540	1.44990	1.95424	0.20827	2.92612	0.09062	1.38319
0.83611	-0.2112	1.24734	-0.3588	2.11942	-0.5353	1.38319	2.18189	0.49208	1.42069	0.09062	3.16182
1.69223	0.0000	1.52016	0.0000	2.17545	0.0000	2.44262	2.10143	1.18250	2.42170	0.00000	1.95424
1.91458	-0.3856	1.66637	-0.4500	1.94481	-0.3916	2.15518	1.95424	1.64046	2.23449	0.09062	1.69268
25.158359	-4.84678	22.506217	-7.472492	35.023081	-6.746159	32.911631	35.016873	18.549215	38.943623	1.540524	32.887782

TABLA 13 Cont.

X1 Y	X2 Y	X3 Y	X4 Y	X5 Y	X6 Y
3.55295	3.17591	1.96298	3.62269	-0.69268	3.21670
1.98677	2.95470	1.72813	2.74145	-0.59808	3.18293
2.28689	2.87224	2.86064	2.80121	-0.58535	2.57103
1.92111	2.41283	2.08992	2.35085	-0.49172	2.15980
1.07750	1.76239	1.29786	1.68368	-0.35917	1.19312
4.39302	3.97728	0.17269	4.42474	-0.85646	4.83374
3.44874	2.58215	2.57181	3.34447	-0.63331	3.37042
2.75953	3.46585	2.24913	3.85730	-0.70632	3.98638
2.42661	1.95470	1.13679	2.08311	-0.45228	1.05015
2.30431	2.14457	1.17234	2.08837	-0.49621	1.48862
3.33213	2.52889	2.66142	2.96394	-0.62912	2.45792
3.29980	3.21001	2.84091	3.21878	-0.67143	2.62321
2.49784	3.13719	1.45793	2.89211	-0.63934	2.66601
1.83035	1.87228	1.78546	2.35813	-0.46849	2.02480
2.14111	2.48575	0.81149	3.04169	-0.53528	2.09127
3.05384	3.83549	1.82147	3.09495	-0.78165	4.61714
4.00521	3.71497	2.78674	3.98802	0.00000	3.58250
3.19461	3.04205	2.78715	3.25287	-0.65507	2.83116
49.512312	51.10923	34.214869	53.808351	-10.25196	49.946905

b) Para cubetas de sección Trapecial.

18	24.009	25.045	17.118	26.379	-5.117	23.808	a0	36.619
24.009	32.912	33.193	22.883	35.291	-6.757	31.637	a1	49.512
25.045	33.193	35.017	23.867	36.679	-7.103	33.265	a2	51.109
17.188	22.883	23.867	18.549	25.158	-4.847	22.506	a3	34.215
26.379	35.291	36.679	25.158	38.944	-7.472	35.023	a4	53.808
-5.117	-6.757	-7.103	-4.847	-7.472	1.541	-6.746	a5	-10.252
23.808	31.637	33.265	22.506	35.023	-6.746	32.888	a6	49.947

Como se observa en estas matrices hay algunos renglones que son semejantes, eso es debido a que los valores que se emplearon para calcularlas son del mismo orden y al tomar logaritmos se vuelven mas parecidos. Resolviendo las matrices por medio de un programa en Basic, se obtuvieron los resultados siguientes

a) Cubetas de sección rectangular

$$A_0 = 12.422344 ; a_0 = 10^{12.422344}$$

$$a_0 = 2.644E 12$$

$$a_1 = 1.3239673$$

$$a_2 = 1.6961007$$

$$a_3 = -9.7882956$$

$$a_4 = -0.2404437$$

$$a_5 = 1.7310669$$

b) Cubetas de sección trapecial

$$A_0 = -2.186112 ; a_0 = 10^{-2.18611}$$

$$a_0 = 0.0065146$$

$$a_1 = 1.2486547$$

$$a_2 = 1.4907794$$

$$a_3 = -0.1976192$$

$$a_4 = -0.3845592$$

$$a_5 = 0.4872746$$

$$a_6 = 1.0369479$$

Sustituyendo estas constantes en las correlaciones propuestas,

para calcular el gasto de despegue quedan las ecuaciones siguientes

a) Cubetas de sección rectangular.

$$Q = \frac{2.644 \times 10^{12} R^{1.323967} \theta^{1.6861007} b^{1.731067}}{\alpha^{9.788295} H^{0.2404437}}$$

b) Cubetas de sección trapezoidal.

$$Q = \frac{0.0065146 R^{1.248655} \theta^{1.4907794} b^{1.036948} k^{0.12973}}{\alpha^{0.197619} H^{0.384692}}$$

Aplicando estas ecuaciones para los datos que se tienen de las cubetas, se puede hacer una tabla en donde se comparan los resultados de los ensayos con los valores de gasto de despegue que resultan al aplicar las ecuaciones. Estos resultados se resumen en las tablas 14 y 15.

Si se aplica el método del error típico cometido al valuar el gasto de despegue visto en el cap 3, se tiene que

$$e = Q_{med} - Q_{calc}$$

En las tablas 14 y 15 se pueden ver los errores cometidos al valuar Q para cada cubeta, con las ecuaciones para las cubetas rectangulares y trapezoidales, respectivamente. En las figs 7 y 8 se puede observar la dispersión de los resultados con respecto a la recta de 45°.

Si se hace

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{l=1}^n e^2}{n}}$$

**TABLA 14 COMPARACION DE RESULTADOS DE Q_{med} Y Q_{calc}
PARA CUBETAS DE SECCION RECTANGULAR**

ENSAYE No	Q medido (m^3/s)	Q calculado (m^3/s)	Error e	ERROR e^2	$(\bar{e}-e_i)^2$
1	49.120	47.28	1.842	3.39	0.065
2	47.300	49.96	-2.662	7.08	22.635
3	5.000	5.00	-0.004	0.00	4.409
4	77.000	75.69	1.306	1.71	0.624
5	487.000	460.99	26.013	676.70	572.047
6	187.000	231.75	-44.750	2002.56	2194.546
7	68.000	79.06	-11.063	122.39	173.160
8	38.000	39.75	-1.747	3.05	14.769
9	500.000	460.99	39.013	1522.05	1362.902
10	213.000	231.75	-18.750	351.56	434.555
11	78.000	79.06	-1.063	1.13	9.979
12	47.000	39.75	7.253	52.61	26.594
13	195.000	186.89	8.114	65.83	36.213
14	195.000	186.89	8.114	65.83	36.213
15	195.000	186.89	8.114	65.83	36.213
16	195.000	186.89	8.114	65.83	36.213
			27.843945	5007.5658	4961.1354

e medio = 1.740

TABLA 15 COMPARACION DE VALORES DE Q_{medido} Y $Q_{calculado}$ PARA CUBETAS DE SECCION TRAPEZIAL

ENSAYE No	Q_{medido} (m^3/s)	$Q_{calculado}$ (m^3/s)	Error e	ERROR e^2	$(\bar{e}-e_i)^2$
1	200.00	212.99	-12.992	168.80	271.73979
2	97.00	119.30	-22.302	497.36	665.31705
3	88.00	72.80	15.203	231.13	137.14136
4	43.00	79.91	-36.906	1362.07	1632.0186
5	15.60	18.89	-3.290	10.82	45.991972
6	700.00	677.50	22.503	506.37	361.40579
7	127.00	225.00	-97.997	9603.43	10300.049
8	222.00	189.63	32.368	1047.68	833.81324
9	31.80	46.30	-14.499	210.21	323.67029
10	44.50	45.81	-1.313	1.72	23.091594
11	123.00	76.64	46.359	2149.12	1837.5364
12	170.00	118.27	51.730	2676.03	2326.9311
13	133.00	95.53	37.473	1404.20	1154.684
14	36.00	29.44	6.563	43.08	9.4335179
15	60.00	53.25	6.754	45.61	10.638679
16	395.00	384.29	10.713	114.77	52.145826
17	365.34	365.37	-0.026	0.00	12.373834
18	150.00	127.48	22.516	506.99	361.92458
			<hr/>	<hr/>	<hr/>
			62.857091	20579.407	20359.91

$e_{medio} = 3.4920606$

De las tablas 14 y 15 se obtiene $\sum_{i=1}^n e^2$ y sustituyendo en S

$$S = \sqrt{\frac{5007.57}{16}} = \underline{17.613} \quad \text{Para cubetas rectangulares}$$

$$S = \sqrt{\frac{20579.407}{18}} = \underline{33.8127} \quad \text{Para cubetas trapeciales}$$

Se pueden trazar rectas paralelas a una distancia S de la recta de 45° en ambas correlaciones, como se puede ver en las figs. 9 y 10, y cuantificar los puntos que caen dentro de la zona del error típico; esto es 12 puntos para cubetas rectangulares y 13 para trapeciales. Con esto se puede valuar la confianza que se tiene al valuar el gasto de despegue por medio de las ecuaciones propuestas.

Esto es:

Confiabilidad = $12/16 = 75\%$; para cubetas rectangulares.

Confiabilidad = $13/18 = 72.2\%$; para cubetas trapeciales.

Esto significa que cuando se aplica cualquiera de estas ecuaciones se tendrá una confianza de 75% y 72.2%, respectivamente de que el resultado obtenido sea el correcto.

Cabe mencionar que para llegar a esta solución definitiva, antes se realizaron otras pruebas, proponiendo otras ecuaciones variando las variables dependientes que aparecen en las mismas, como por ejemplo, tomando el criterio de las refs. 1 y 5 haciendo que el

FIG. 7 DISPERSION DE RESULTADOS

CUBETAS DE SECCION RECTANGULAR

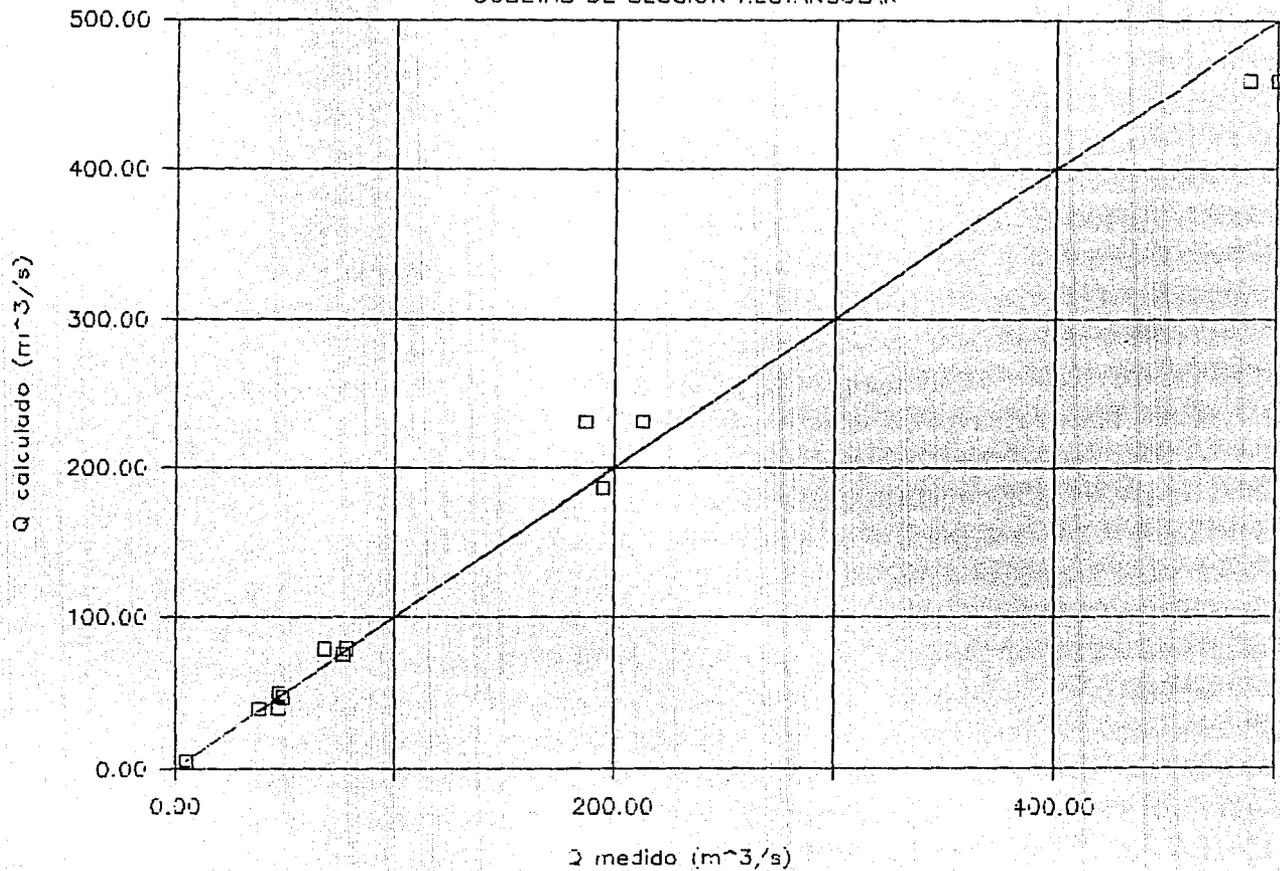


FIG. 8. DISPERSION DE RESULTADOS

CUBETAS DE SECCION TRAFECIAL

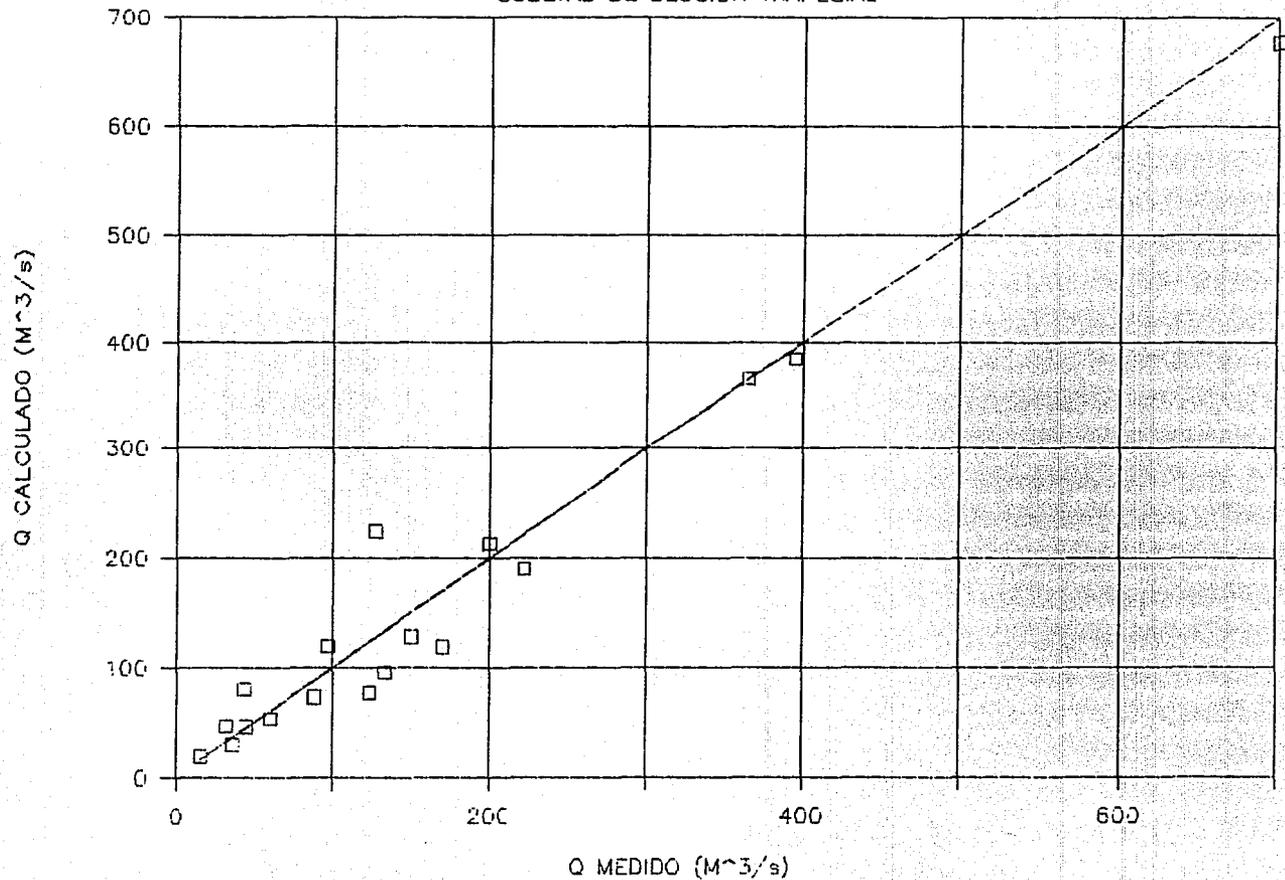


FIG. 9 RECTAS DE DESVIACION ESTANDAR

CUBETAS DE SECCION RECTANGULAR

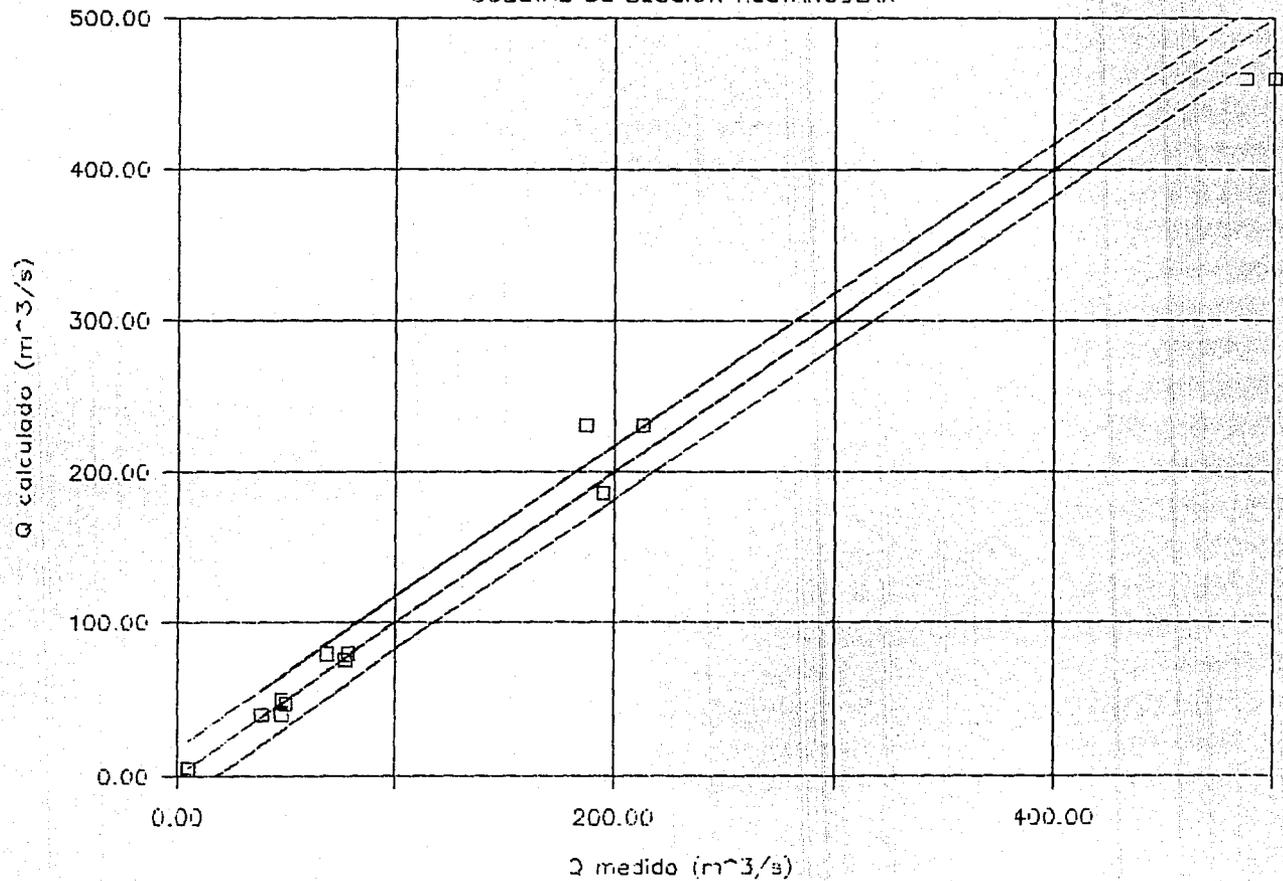
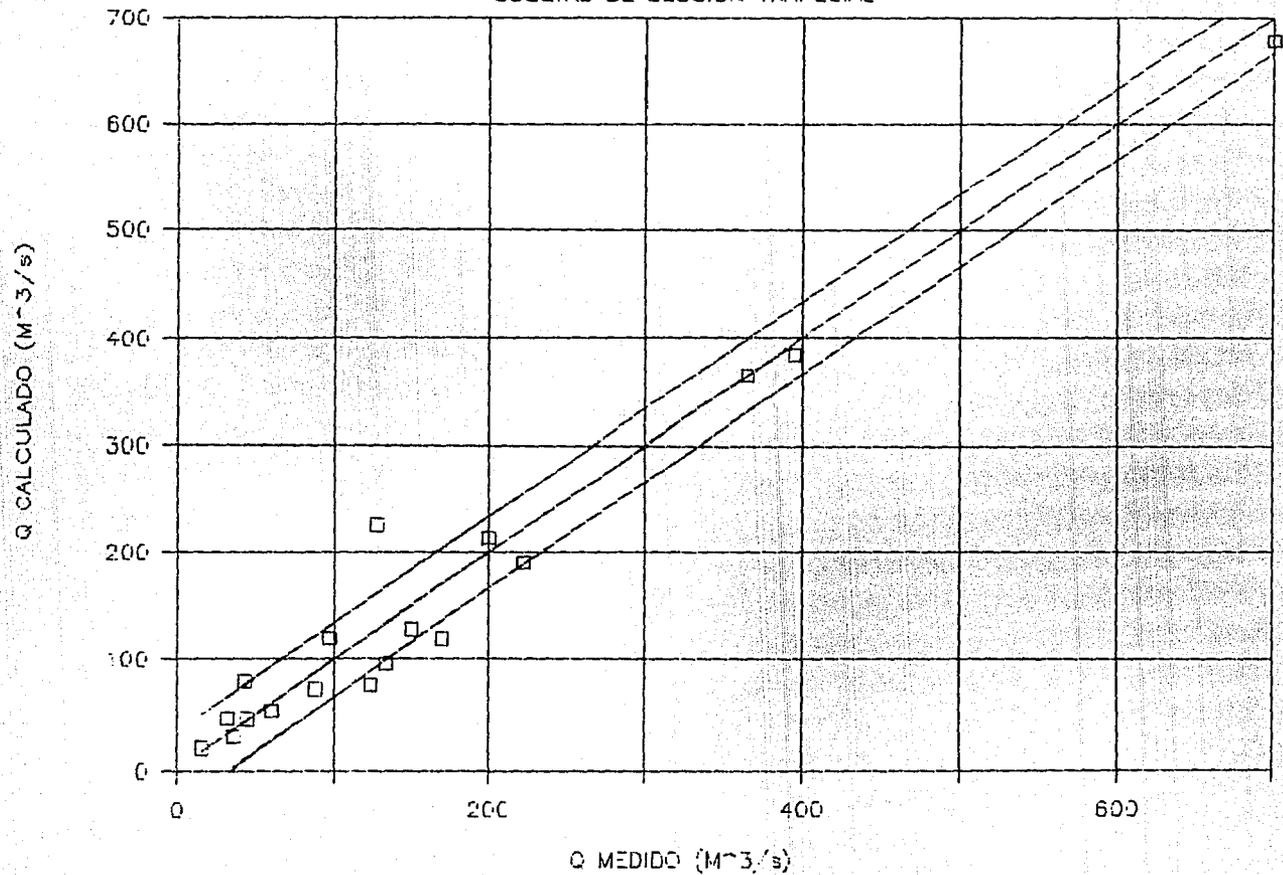


FIG. 10 RECTAS DE DESVIACION ESTANDAR

CUBETAS DE SECCION TRAFECIAL



termino θ fuera afectado por $(1 - \cos\theta)$ y eliminando algunas variables que podrían no tener importancia significativa como α y H , e incluso se hizo una ecuación general para cubetas rectangulares y trapeciales; pero se observó que la dispersión de los resultados era importante y la confianza que se obtenía era muy baja; por esta razón se tomó la decisión de elegir la correlación con mayor grado de confianza y menor dispersión de los resultados, eligiendo las ecuaciones descritas en este capítulo.

Es importante mencionar que para que estas ecuaciones se puedan aplicar, deben usarse para las variables que intervienen en ellas las unidades siguientes : R en metros, θ en grados, α en grados, b en metros, H en metros, y k sin unidades; dando el Q en m^3/s .

Para tener una idea más clara de la forma en que se debe aplicar este método, a continuación se muestran dos ejemplos:

Ejemplo 1:

Con la colaboración del laboratorio de Hidráulica de C.F.E., se proporcionaron los datos de la cubeta de lanzamiento con la que cuenta el vertedor del P.H. Aguamilpa.

$R = 30.019$ m, $\theta = 15^\circ$, $\alpha = 23.557^\circ$, $b = 42.5$ m, $H = 112.025$ m, $k = 0.25$, escala del modelo 1:70.

Como se puede ver, la cubeta es de sección trapecial, por lo que se aplicará la ecuación b) para calcular el gasto de despegue. Sustituyendo los datos en la ecuación se tiene

$$Q = \frac{0.00651 (30.019)^{1.248655} (15)^{1.4807784} (42.5)^{1.036948} (.25)^{0.487274}}{(23.557)^{0.197619} (112.025)^{0.38455924}}$$

Resolviendo esta ecuación se encuentra que el gasto de despegue vale

$$Q = 55.961 \text{ m}^3/\text{s}$$

Aplicando el método visto en el cap 3 para obtener el grado de confiabilidad de este resultado, suponiendo que los errores se comportan como una distribución T de Student, y con ayuda de la tabla 15, se tiene que

$$\Delta Q = \bar{e} \pm t_c \sigma_e$$

donde

$$\bar{e} = \frac{\sum e}{\# \text{ dat.}} = \frac{62.857091}{18} = \underline{3.492}$$

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{\sum (\bar{e} - e_i)^2}{n - 1}} = \sqrt{\frac{20359.91}{17}} = \underline{34.6069}$$

Sustituyendo en ΔQ

$$\Delta Q = 3.492 \pm t_c 34.6069$$

Se tiene que entonces el Q_{real} se encuentra entre los rangos

$$Q_{\text{real}} = Q_{\text{calc}} \pm \Delta Q$$

Si se toman los valores de t_c para diferentes niveles de confiabilidad y se sustituyen en las ecuaciones antes mencionadas,

en la tabla 16 se pueden ver los rangos de valores de Q_{real} para los diferentes grados de confiabilidad con el criterio de la T de Student.

Si se hace la suposición de que los errores se comportan como una distribución normal, aplicando el método visto en el cap 3, se tiene que

$$\Delta Q = \bar{e} \pm Z_c \sigma_e$$

por lo que si se sustituyen los valores de \bar{e} y σ_e se tiene

$$\Delta Q = 3.492 \pm Z_c 34.6069$$

De la misma forma se presenta un rango de valores en los que se encontraría Q_{real} igual a

$$Q_{real} = Q_{calc} \pm \Delta Q$$

Procediendo de la misma forma que con la T de Student pero substituyendo Z_c , se puede ver en la tabla 17 los rangos de valores de Q_{real} para los diferentes grados de confiabilidad según el criterio de la distribución normal.

Si comparamos estos rangos de resultados con el valor real del gasto de despegue que se midió en el laboratorio de C.F.E. ($Q_{med} = 75 \text{ m}^3/\text{s}$), se puede ver que éste se encuentra en un rango de 65% de confiabilidad, para el criterio de la T de Student, y de 50% para el de la normal . Esto demuestra que aún y cuando la dispersión de los resultados vista en la fig 7 es regular, se pueden manejar valores con un alto grado de confiabilidad que están muy cerca del valor real de gasto de despegue, por medio de la ecuación propuesta.

TABLA 16 RANGOS DE CONFIANZA PARA EL RESULTADO OBTENIDO
CON EL CRITERIO DE LA DISTRIBUCION T DE STUDENT

CUBETA AGUAMILPA $Q_{med}=75 \text{ m}^3/\text{s}$

Qcal	CONFIANZA	t _c	$\Delta Q+$	$\Delta Q-$	Q _{max}	Q _{min}
55.961	99	2.75	98.6612	-91.6771	154.6222	-35.7161
55.961	97.5	2.11	76.51274	-69.5286	132.4737	-13.5676
55.961	95	1.74	63.70817	-56.724	119.6692	-0.76305
55.961	90	1.33	49.51931	-42.5352	105.4803	13.42581
55.961	85	1.096	41.42129	-34.4372	97.38229	21.52383
55.961	80	0.863	33.35787	-26.3737	89.31887	29.58726
55.961	75	0.776	30.34706	-23.3629	86.30806	32.59806
55.961	70	0.689	27.33625	-20.3521	83.29725	35.60887
55.961	65	0.473	19.86115	-12.877	75.82215	43.08397 *
55.961	60	0.257	12.38605	-5.40193	68.34705	50.55907
55.961	55	0.128	7.921751	-0.93763	63.88275	55.02337

TABLA 17 RANGOS DE CONFIANZA PARA EL RESULTADO OBTENIDO
CON EL CRITERIO DE LA DISTRIBUCION NORMAL

CUBETA AGUAMILPA $Q_{med}=75 \text{ m}^3/\text{s}$

Qcal	CONFIANZA	Z _c	$\Delta Q+$	$\Delta Q-$	Q _{max}	Q _{min}
55.961	99	2.58	92.77801	-85.7939	148.739	-29.8329
55.961	97.5	2.24	81.01165	-74.0275	136.9726	-18.0665
55.961	95	1.96	71.3217	-64.3376	127.2827	-8.37658
55.961	90	1.645	60.42051	-53.4364	116.3815	2.524614
55.961	85	1.439	53.29147	-46.3074	109.2525	9.653647
55.961	80	1.28	47.78897	-40.8048	103.75	15.15615
55.961	75	1.151	43.32467	-36.3405	99.28567	19.62045
55.961	70	1.038	39.41408	-32.43	95.37508	23.53104
55.961	65	0.935	35.84957	-28.8654	91.81057	27.09555
55.961	60	0.842	32.63112	-25.647	88.59212	30.314
55.961	55	0.755	29.62031	-22.6362	85.58131	33.32481
55.961	50	0.6745	26.83445	-19.8503	82.79545	36.11067 *

Ejemplo 2:

Con la colaboración del laboratorio de Hidráulica de C.N.A., se proporcionaron los datos de la cubeta de lanzamiento con la que cuenta el vertedor de la presa Trigomil.

R= 13.0 m, $\theta = 25^\circ$, $\alpha = 53.13^\circ$, b= 50 m, H= 69.62 m, escala del modelo 1:100.

La cubeta es de sección rectangular, por lo que se aplicará la ecuación a) para calcular el gasto de despegue. Sustituyendo los datos en la ecuación se tiene

$$Q = \frac{2.644 \cdot 12 \cdot (13)^{1.323987} \cdot (25)^{1.8981007} \cdot (50)^{1.731087}}{(53.13)^{0.788295} \cdot (69.62)^{0.2404437}}$$

Resolviendo esta ecuación se encuentra que el gasto de despegue vale

$$Q = 75.52 \text{ m}^3/\text{s}$$

Aplicando el método visto en el cap 3 para obtener el grado de confiabilidad de este resultado, suponiendo que los errores se comportan como una distribución T de Student, y con ayuda de la tabla 14, se tiene que

$$\Delta Q = \bar{e} \pm t_c \sigma_e$$

donde

$$\bar{e} = \frac{\sum e}{\# \text{ dat.}} = \frac{27.843944}{16} = 1.740$$

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{\sum (\bar{e} - e_i)^2}{n - 1}} = \sqrt{\frac{4961.1354}{15}} = 18.186$$

Sustituyendo en ΔQ

$$\Delta Q = 1.740 \pm t_c 18.186$$

Se tiene que entonces el Q_{real} se encuentra entre los rangos

$$Q_{\text{real}} = Q_{\text{calc}} \pm \Delta Q$$

Si se toman los valores de t_c para diferentes niveles de confiabilidad y se sustituyen en las ecuaciones antes mencionadas, en la tabla 18 se pueden ver los rangos de valores de Q_{real} para los diferentes grados de confiabilidad con el criterio de la T de Student.

Si se hace la suposición de que los errores se comportan como una distribución normal, aplicando el método visto en el cap 3, se tiene que

$$\Delta Q = \bar{e} \pm Z_c \sigma_e$$

por lo que si se sustituyen los valores de \bar{e} y σ_e se tiene

$$\Delta Q = 1.740 \pm Z_c 18.186$$

De la misma forma se presenta un rango de valores en los que se encontraría Q_{real} igual a

$$Q_{\text{real}} = Q_{\text{calc}} \pm \Delta Q$$

Procediendo de la misma forma que con la T de Student pero sustituyendo Z_c , se puede ver en la tabla 19 los rangos de valores de Q_{real} para los diferentes grados de confiabilidad según el criterio de la distribución normal.

Si comparamos estos rangos de resultados con el valor real del gasto de despegue que se midió en el laboratorio de C.N.A. ($Q_{med} = 77 \text{ m}^3/\text{s}$), se puede ver que éste se encuentra en un rango de 55% de confiabilidad, para el criterio de la T de Student, y de 50% para el de la normal.

TABLE 18 RANGOS DE CONFIANZA PARA EL RESULTADO OBTENIDO
CON EL CRITERIO DE LA DISTRIBUCION T DE STUDENT

CUBETA TRIGOMIL $Q_{med}=77 \text{ m}^3/\text{s}$

Qcal	CONFIANZA	tc	$\Delta Q+$	$\Delta Q-$	Qmax	Qmin
75.52	99	2.75	52.109	-48.629	127.629	26.891
75.52	97.5	2.11	40.38676	-36.9068	115.9068	38.61324
75.52	95	1.74	33.60984	-30.1298	109.1298	45.39016
75.52	90	1.33	26.10028	-22.6203	101.6203	52.89972
75.52	85	1.096	21.81434	-18.3343	97.33434	57.18566
75.52	80	0.863	17.54671	-14.0667	93.06671	61.45329
75.52	75	0.776	15.95322	-12.4732	91.47322	63.04678
75.52	70	0.689	14.35972	-10.8797	89.87972	64.64028
75.52	65	0.473	10.40347	-6.92347	85.92347	68.59653
75.52	60	0.257	6.447212	-2.96721	81.96721	72.55279
75.52	55	0.128	4.084448	-0.60445	79.60445	74.91555 *

TABLE 19 RANGOS DE CONFIANZA PARA EL RESULTADO OBTENIDO
CON EL CRITERIO DE LA DISTRIBUCION NORMAL

CUBETA TRIGOMIL $Q_{med}=77 \text{ m}^3/\text{s}$

Qcal	CONFIANZA	Zc	$\Delta Q+$	$\Delta Q-$	Qmax	Qmin
75.52	99	2.58	49.00128	-45.5153	124.5213	30.00472
75.52	97.5	2.24	42.77384	-39.2878	118.2938	36.23216
75.52	95	1.96	37.64536	-34.1594	113.1654	41.36064
75.52	90	1.645	31.87582	-28.3898	107.3958	47.13018
75.52	85	1.439	28.10272	-24.6167	103.6227	50.90329
75.52	80	1.28	25.19048	-21.7045	100.7105	53.81552
75.52	75	1.151	22.82772	-19.3417	98.34772	56.17828
75.52	70	1.038	20.75801	-17.272	96.27801	58.24799
75.52	65	0.935	18.87146	-15.3855	94.39146	60.13454
75.52	60	0.842	17.16807	-13.6821	92.68807	61.83793
75.52	55	0.755	15.57458	-12.0886	91.09458	63.43142
75.52	50	0.6745	14.10014	-10.6141	89.62014	64.90586 *

6. CONCLUSIONES

Con base en los resultados obtenidos se puede decir que calcular el gasto de despegue por medio de las fórmulas empíricas encontradas, se hace de una manera rápida y sencilla, pero sin embargo solo se puede tener una confiabilidad al rededor del 75%, lo cual se mejorará conforme aumenten los datos.

Aunque los resultados o valores que se puedan obtener no se deben de tomar como los reales, por medio de los rangos de confiabilidad en los resultados, se puede ver de manera muy aproximada el valor real que puede tener el gasto de despegue. De esta forma el proyectista al aplicar estas ecuaciones, podría tomar una primera decisión con respecto a las dimensiones de la cubeta, y después por medio de la construcción, si ello es posible, del modelo hidráulico de la cubeta diseñada, realizar las mediciones para encontrar el valor real de gasto de despegue, comparandolo con el que obtuvo teóricamente.

Las ecuaciones propuestas son aplicables a cualquier cubeta de lanzamiento de sección rectangular o trapecial, siempre y cuando se respeten los intervalos de las variables que fueron utilizadas para determinarlas. Esto se mejorará conforme se cuente con mayor información.

REFERENCIAS

- 1.- BERNAL ORTIZ, A. "Gasto de despegue en cubetas de lanzamiento (estudio experimental)". Informe Interno del Instituto de Ingeniería, UNAM, México ago 1989.
- 2.- SANCHEZ BRIBIESCA, J.L. "Primeras nociones de estadística para experimentadores", Informe Interno, Instituto de Ingeniería, UNAM, México, feb 1988.
- 3.- LOCHER, F.A. and HSU, S.T., "Energy dissipation at high dams", Developments in Hydraulic Engineering, vol 2(chap 5), Editor P. Novac, Elsevier, Belfast, 1984.
- 4.- LOZOYA CORRALES, J., "Obras de Excedencias", Fascículo A.2.10, Manual de Diseño de Obras Civiles, Comisión Federal de Electricidad, México, 1983.
- 5.- BERNAL ORTIZ, A., "Evaluación del gasto de despegue a gasto creciente en cubetas deflectoras", Trabajo de investigación, División de Estudios de Posgrado, Facultad de Ingeniería, UNAM, México, 1987.
- 6.- CANAVOS, G. C., "Probabilidad y Estadística. Aplicaciones y Métodos", Mc Graw Hill, México, 1986.
- 7.- SPIEGEL, M. R. "Probabilidad y Estadística", Serie Schaum, Mc Graw Hill, México, 1984.