# UNIVERSIDAD AUTONOMA DE GUADALAJARA

## ESCUELA DE MATEMATICAS



# PARADOJAS MATEMATICAS

**Tesis que para Obtener el Título de Matemático presenta**

**Alfredo Rodríguez Carrazco**

Guadalajara, Jalisco Agosto de 1989

# CONTENIDO

Pág.

# INTRODUCCION

## ¿Qué es una Paradoja?

**¿QUE ES UNA PARADOJA?**

Paradoja es una palabra que hemos escuchado y expresado varias veces en nuestra vida cotidiana. La mayoría de las veces la utilizamos para expresar algo que nos parece absurdo o contradictorio, como pudiera ser si una persona nos dice: "Dos padres y dos hijos salieron de la ciudad, pero el número de habitantes de ésta es solo tres". A primera instancia parece una cosa absurda, pero si analizamos un poco lo que dijo la persona, podemos ver que tendrá razón si las tres personas la formaran padre, hijo y nieto.

Si una persona dice: "Estoy mintiendo". ¿Dijo la verdad?. Si la persona está mintiendo entonces su afirmación es verdadera. Ahora, como su afirmación es falsa y está mintiendo, entonces lo que dijo es cierto.

Pues bien, utilizaremos la palabra "paradoja" en el mismo sentido que tienen estos ejemplos, es decir, una paradoja es algo que a primera vista parece ser falso, pero en realidad es cierto; o que parece cierto pero en verdad es falso; o sencillamente que encierra en si mismo contradicciones.

El problema de los padres y los hijos y el caso del mentiroso puede ser ejemplo de que un juicio precipitado puede ser causa de un razonamiento equivocado. Es decir, se puede llega a una conclusión verdadera siendo en realidad falsa, o a una conclusión falsa siendo en realidad verdadera. En matemáticas es frecuente que ocurra esto por hacer juicios prematuros y pasar por alto las propiedades y las teorías ya probadas de éstas.

Nuestro objetivo será analizar paradojas sencillas que involucran juegos de palabras, y paradojas más complicadas como son los sofismas en la aritmética, en geometría, en trigonometría y en cálculo. Veremos como personas que dominan ampliamente las matemáticas no están exentas de caer en uno de los sofismas mencionados por algunas distracciones debido a juicios prematuros de un determinado problema.

Quizás alguno de los sofismas que presente sean un poco difíciles de comprender, pero en cada sofisma o paradoja, haré un comentario con el fin de analizar cada una de las conclusiones que involucren ellas.

Debo aclarar que para comprender algunos de los sofismas y comentarios acerca de ellas, será necesario tener unas bases un tanto sólidas tanto en matemáticas como en lógica.

# CAPITULO I

## "Algunas Paradojas Sencillas"

## I.- ALGUNAS PARADOJAS SENCILLAS.

Quizás algunas de las paradojas que mencione en este capítulo ya se nos hayan presentado alguna vez, igual o bajo similares condiciones. La mayoría de ellas son muy conocidas ya que se encuentran en enciclopedias, libros de acertijos, etc.

Empezaremos con un problema muy divertido.

¿Verdad que estamos de acuerdo, que entre dos relojes, el mejor es el que está con mayor frecuencia en la hora exacta?. Supongamos que se nos dan a elegir dos relojes. Uno se retrasa un minuto diario, y el otro no marcha. ¿Cuál escogeremos?. A primera vista parece que elegiremos el reloj que se atrasa 1 minuto diario, pero si hacemos caso de lo que dijimos con anterioridad escogeríamos el que no funciona, porque si ponemos a la hora ambos relojes, el que se atrasa tendrá que atrasarse 12 horas o sea 720 minutos para que vuelva a estar bien, y como pierde un minuto cada día, tardará 720 días para que vuelva a estar en la hora correcta nuevamente. En cambio el reloj que no funciona estará en la hora correcta 2 veces al día.

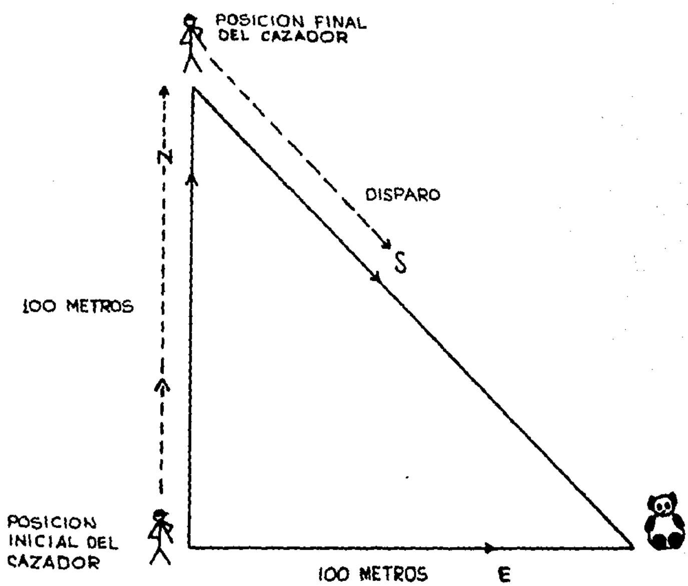
Otro problema divertido puede ser el siguiente: Un joven fue a solicitar empleo a un cierto negocio y le dijo al gerente que creía merecer un sueldo de $1,500.00 dólares anuales, pero éste no era de la misma opinión y le dijo: "Mire joven, el año tiene 365 días. Duerme 8 horas diarias que son aproximadamente 122 días. Quedan 243 días. Descansa otras 8 horas diarias, es decir otros 122 dias. Quedan 121. Hay 52 domingos en los que no se trabaja. Quedan 69. Tampoco trabaja los 52 sábados en la tarde, 26 dias en total. Quedan 43 dias. Además todos los días utiliza una hora para comer, que suman 15 días. Quedan 28. Tiene dos semanas de vacaciones. Quedan 14 días. Y todavia hay 7 días festivos en los que no se trabaja. ¿Le parece justo que le pague $1,500.00 dólares por 7 días de trabajo?. Analice Usted lo que dijo el gerente. ¿Que le responderia el joven?.

Una paradoja que resulta interesante y nos deja pensar puede ser la siguiente, que se relaciona con los cambios de moneda extranjera. Los gobiernos de dos paises vecinos, Norte y Sur, tenían un acuerdo en el cual se estipulaba que un peso del Norte valía también un peso en el Sur, y viceversa. Pero un día el gobierno del Norte hizo el decreto de que en lo sucesivo un peso del Sur iba a valer solo 90 centavos en el Norte. Para no quedarse atrás, el gobierno del Sur contestó al día siguiente con otro decreto en el cual se decía que el peso del Norte no valdría más que 90 centavos en el Sur. Cierto día, un joven muy vivo fue a comprar a una tienda en el Norte una máquina de rasurar con un peso del Norte. La máquina valía 10 centavos. La pagó y le dieron de vuelto un peso del Sur, es decir, 90 centavos. Cruzó al Sur, y fue a otra tienda a comprar una navajas de rasurar cuyo precio era de 10 centavos. Pagó y le devolvieron 1 peso del Norte (90 centavos). Total, el joven regresó a su casa con el mismo dinero que con el que salió, es decir, un peso del Norte y además lo que compró. Y las cajas registradoras de ambas tiendas tenían 10 centavos más en su caja. Entonces, ¿Quién pagó la máquina y las navajas de afeitar?. Realmente quien pagó podemos ver fue el propio joven solo que se vio beneficiado por la devaluación de la moneda extranjera en ambos paises. Si Usted se pone analizar que pasaría si el joven hubiera ido primero a comprar a la tienda del Sur con el peso del Norte entonces la devaluación lo hubiera afectado bastante.

Hay otro tipo de paradoja en las que interviene directamente la geografía como en los siguientes dos casos. El primero se refiere a una persona que hizo una casa de planta cuadrada, con una ventana en cada pared, de modo que la vista a través de cada una de las ventanas daba hacia el sur. La pregunta es, ¿Cómo o dónde puede suceder esto?. En realidad esto parece imposible, pero si la casa fue construida en el Polo Norte, donde todas las direcciones dan hacia el sur, pudiera ser posible.

El segundo caso resulta bastante paradójico si no se conoce al anterior. Trata de un cazador que sale a cazar su primer oso. De pronto divisó uno, a cien metros al ESTE. Asustado se echó a correr, pero tal era su miedo que no lo hizo en sentido contrario donde estaba el oso, sino hacia el NORTE. Cien metros más allá, se serenó, paró, se volteó y mató al oso que había permanecido en la misma posición desde el principio, apuntando hacia el SUR. La pregunta es, ¿Que color era el oso?.

Podemos analizar los datos de este problema mediante un dibujo de la siguiente manera:



Por lo tanto dado que el cazador corrió hacia el Norte en lugar del Oeste y que su disparo fue hacia el Sur, cuando el oso no se había movido de su lugar inicial, entonces por el resultado del caso anterior, podemos concluir que el cazador se encontraba en el Polo Norte, y como consecuencia el oso era blanco. Claro, esto si estamos de acuerdo que en el Polo Norte solo hay osos blancos.

Existen muchos problemas cuya solución nunca es la que parece evidente. Los siguientes cuatro son ejemplos de estos. Sus soluciones estarán en los comentarios que haré inmediatamente después de cada uno de ellos.

**PARADOJA 1.-** Una empresa comercial proyectaba abrir una sucursal en cierta ciudad, y puso anuncios solicitando 3 empleados. Entre todos lo que se presentaron el gerente de personal escogió a 3 jóvenes, y les dijo: "Sus sueldos serán $1,000.00 anuales, pagaderos por semestres. Si su trabajo es bueno, se les aumentará el sueldo; pero, díganme que prefieren, ¿Un aumento de $150.00 anuales o uno de $50.00 cada semestre?. Los dos primeros aceptaron rápidamente la primera alternativa, pero el tercero, después de pensar un poco, escogió la segunda. Inmediatamente el gerente lo puso al frente de los dos. ¿Por qué?.

**COMENTARIO.-** Parecería quizás, que el gerente escogió al tercero para un mejor puesto, debido a la modestia de este y a su aparente deseo de ahorrarle dinero a la empresa, pero no fue así. En realidad el tercero eligió la segunda alternativa porque de esa manera cobraba un salario más alto que sus compañeros.

Sus compañeros llegaron precipitadamente a la conclusión de que un aumento de $50.00 cada semestre equivalía a otro de $100.00 anuales, pero él, había tomado en consideración todas las condiciones del problema, y estudio las 2 alternativas de esta manera:

**AUMENTO**

| | **$150.00 ANUAL** | **$50 SEMESTRAL** |
|---|---|---|
| 1er Año | $500 + $500 = $1000 | $500 + $550 = $1050 |
| 2do Año | $575 + $575 = $1150 | $600 + $650 = $1250 |
| 3er Año | $650 + $650 = $1300 | $700 + $750 = $1450 |
| 4to Año | $725 + $725 = $1450 | $800 + $850 = $1650 |

De esa forma se dio cuenta que su sueldo excedería al de los otros en los años subsiguientes en $50, $100, $150, $200, $250,..., ya que el aumento anual que a él le correspondía siempre sería $50 mayor que el de ellos. Es decir lo que impresionó al gerente no fue su modestia, sino su inteligencia.

**PARADOJA 2.-** Un reloj tarda 5 segundos en dar 6 campanadas. ¿Cuánto tardará en dar 12 campanadas?

**COMENTARIO.-** A primera instancia parece que el resultado es 10 segundos, pero no es así. Los 5 segundos que tarda el reloj en dar las 6 campanadas corresponden a los 5 intervalos que hay entre cada campanada. Entre 12 campanadas hay 11 intervalos, por lo tanto la respuesta correcta es 11 segundos, como se ve en la siguiente figura:

```
          1  2  3  4  5  6  Campanadas
          ----------------
           1  2  3  4  5    Segundos

1  2  3  4  5  6  7  8  9  10  11  12 Campanadas
-----------------------------------------
 1  2  3  4  5  6  7  8  9   10  11   Segundos
```

**PARADOJA 3.-** Una botella y su tapón valen $1.10. Si la botella cuesta 1 peso más que el tapón. ¿Cuánto cuesta la botella?.

**COMENTARIO.-** Se podría pensar quizás que la respuesta es $1.00. Pero entonces el tapón tendría que valer $0.10 y en este caso la botella cuesta sólo $0.90 más que el tapón. Si pensamos mas detenidamente las condiciones del problema podemos llegar a la respuesta correcta que es $1.05. Claro, en este problema suponemos que desconocemos los sistemas de ecuaciones lineales, si no resultaría inmediato el problema y no seria nada paradójico.

**PARADOJA 4.-** En el fondo de un pozo de 30 metros hay una rana. Cada hora sube 3 metros y resbala perdiendo 2. ¿Cuántas horas tardaría en salir?.

**COMENTARIO.-** Por lo menos, la respuesta no es 30 horas, a menos que la rana no se dé cuenta cuando está fuera del pozo.

Si tomamos en cuenta que en 27 horas la rana está a 3 metros del borde del pozo, entonces en la siguiente hora subirá los 3 metros restantes para poder salir. Por lo tanto el resultado es 28 horas.

# CAPITULO II

## "Paradojas Aritméticas"

## II.- PARADOJAS ARITMETICAS

En la aritmética hay muchos casos que casi resultan increíbles de que puedan suceder.

En este capítulo quizá no haya nada que pueda sorprender a un conocedor de las matemáticas, pero algunos casos pueden resultar paradójicos a personas que no conozcan a fondo éstas, desde el punto de vista que si tuviera que dar una opinión acerca de ellas, le parecerían falsas o por lo menos improbables de suceder.

Muchos de estos casos están relacionados con los números grandes, que hoy en día en que los gobiernos piden préstamos, y tienen presupuestos de miles de millones de dólares, hemos perdido un poco la noción de lo que valen y ya no somos capaces de apreciar su verdadera magnitud.

Por ejemplo, ¿Qué tan grande es mil millones?. Supongamos primeramente que tenemos un conjunto de dados de 1 cm.de longitud por lado. Claramente el volumen de cada dado será 1 $Cm^3$. También supongamos que tenemos un cuarto de 10 metros de largo por 10 metros de ancho y de 10 metros de altura. Claramente también, el volumen del cuarto es 1000 $m^3$, que equivalen a 1,000,000,000$Cm^3$. Es decir que con mil millones de dados de 1 Cm. de longitud de lado, bien acomodados, podemos llenar un cuarto con las dimensiones del cuarto supuesto. Parece increible, ¿Verdad?.

Ahora, si aún no nos hemos dado cuenta a cuánto asciende la deuda externa de nuestro país, consideremos que para pagar cien mil millones de dólares a razón de un dólar cada segundo, durante las 24 horas del día, los 7 días de la semana, y las 52 semanas del año se tardarían aproximadamente 3180 años en hacerlo. ¿Qué les parece?.

Los profesionistas que manejan constantemente números muy grandes, son afectos de poner estos números como potencia de 10. Como puede ser:

$$1,000,000,000 = 1 \times 10^9$$

Otra potencia que se usa frecuentemente en algunos problemas es la de 2. Precisamente comentaré un caso muy curioso sobre un número de esta potencia, el

$2^{64} - 1$.

Este número, el $2^{64}-1$, está relacionado según una leyenda con el origen del ajedrez.

La leyenda dice que a un antiguo Shah de Persia le gustó mucho el juego, que mandó a su inventor que pidiera el regalo que quisiera. El inventor que al parecer sabia bastante de aritmética, pidió un grano de trigo por el primer cuadro del tablero, dos granos por el segundo, cuatro granos por el tercer cuadro, y así sucesivamente hasta que se hubiera tenido en cuenta a todos los 64 cuadros de los que consta el tablero. Pedía pues:

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{63} = 2^{64} - 1 \quad (1)$$

Granos de trigo. El Shah creyó que esto era una pobre recompensa, hasta que sus consejeros le resolvieron el problema y encontraron que $2^{64} - 1$ es aproximadamente $1.84 \times 10^{19}$ y que son en realidad bastantes toneladas de trigo. Como vemos, el inventor era un poco ambicioso, ¿verdad?.

Si se coloca al lado del primero un segundo tablero de ajedrez, y si se continúa doblando el número de granos para cada cuadro del segundo tablero, el último de los de éste contendrá $2^{127}$ granos de trigo. Si a ese montón le quitamos un grano quedaría:

$$2^{127} - 1 = 170{,}141{,}183{,}460{,}469{,}231{,}731{,}687{,}303{,}715{,}884{,}105{,}727$$

---

(1)
$$\sum_{K=0}^{n} X^k = \frac{1 - X^{n+1}}{1 - X}, \quad X \neq 1$$

Ejercicio 8 Pág. 49 del libro Cálculo de Apóstol. Vol. I.

que fue hasta 1938 el mayor número primo conocido. Este número fue publicado por H. Steinhaus en 1938, en el libro Mathematical Snapshots.

# CAPITULO III

## "Paradojas Algebraicas"

## III.- PARADOJAS ALGEBRAICAS

En este capítulo veremos como varios casos del álgebra parecen cierto siendo en realidad falsos. A este tipo de paradojas se les llama "SOFISMAS" que significa razonamiento falso que nos induce al error. Es decir, veremos como es fácil a veces llegar a contradecir resultados ya probados en matemáticas, debido a que pasamos por alto algunas propiedades ya establecidas en ella.

Muchos de éstos sofismas ocurren por el hecho de olvidar a veces que no se puede dividir entre cero. Veamos el siguiente caso que nos indica como al dividir por cero, se llega a varias contradicciones.

Supongamos que:

$$\Longleftrightarrow \qquad a = b \qquad (1)$$

$$\Longleftrightarrow \qquad a^2 = ab \qquad (2)$$

$$\Longleftrightarrow \qquad a^2 - b^2 = ab - b^2 \qquad (3)$$

$$\Longleftrightarrow \qquad (a - b)\ (a + b) = b(a - b) \qquad (4)$$

$$\Longleftrightarrow \qquad (a + b) = b \qquad (5)$$

Ahora, sean $a = b = 1$. Por lo tanto con este resultado llegamos a que $2 = 1$. También si restamos $b$ a ambos miembros de (5) obtendremos que $a = 0$, o sea que cualquier número es igual a cero.

Si analizamos un poco cada uno de los 5 pasos, podemos ver rápidamente que del (4) al (5) paso dividimos por $(a - b)$, pero como en (1) supusimos que $a = b$, o sea, $a - b = 0$, entonces la división hecha fue por cero, y fue por eso que llegamos a las contradicciones ya mencionadas.

Pero, ¿por qué no podemos dividir por cero?.

Antes de contestar esta pregunta, diremos que en las matemáticas todas las definiciones, axiomas, teoremas, leyes, etc., se hacen de tal manera que haya compatibilidad entre ellas, es decir, que no se contradigan unas con otras o que no nos conduzcan a contradicciones. Teniendo como antecedente esto, contestemos pues la pregunta.

Tenemos que a es divisible por b si existe un x tal que $x \cdot b = a$, o sea que, $x = a/b$. Supongamos que $b = 0$. Entonces tenemos dos casos, uno cuando $a \neq 0$ y otro cuando $a = 0$. Analicemos estos casos:

1er. CASO: $a \neq 0$

Si $a \neq 0$, entonces $x \cdot 0 = a$, pero no existe x tal que x por cero de igual a a, cuando $a \neq 0$.

Ahora veamos el caso 2:

2do. CASO: $a = 0$

Si $a = 0$, entonces $x \cdot 0 = 0$

Por lo tanto x puede ser cualquier número, ya que cualquier número multiplicado por cero, es cero.

Ahora, como nosotros necesitamos que a/b esté definida y sea un número único, y acabamos de ver que la división entre cero nos conduce o a ningún número, o a cualquier número, es por eso que esta división entre cero no está definida en matemáticas.

A continuación veremos unos cuantos sofismas derivados de la división entre cero que acabamos de ver.

**PARADOJA** 1.- Demuestre que $1 = 0$

Demostración:

$$
\begin{array}{lrr}
\text{Sea} & x = 0 & (1) \\
\Leftrightarrow & x(x-1) = 0 & (2) \\
\Leftrightarrow & (x-1) = 0 & (3) \\
\Leftrightarrow & x = 1 & (4)
\end{array}
$$

$\therefore$ por (1) y (4)

$$1 = 0$$

**COMENTARIO.-** Podemos ver que el error está del paso (2) al (3) cuando dividimos la igualdad por x, teniendo en (1) que $x = 0$.

**PARADOJA 2.-** Demuestre que dos números diferentes son iguales.

Demostración:

Supongamos que $a = b + c$ (1), donde a, b y c son números positivos. Esto implica que a es mayor que b. Multiplicando (1) por $(a - b)$ tenemos:

$$a^2 - ab = ab + ac - b^2 - bc \qquad (2)$$

$$\Longleftrightarrow \quad a^2 - ab - ac = ab - b^2 - bc \qquad (3)$$

$$\Longleftrightarrow \quad a(a - b - c) = b(a - b - c) \qquad (4)$$

$$\Longleftrightarrow \quad a = b \qquad (5)$$

Hemos demostrado que si a es mayor que b, entonces es igual a b.

**COMENTARIO.-** El error está que en el primer paso supusimos que $a = b + c$, o sea que $a - b - c = 0$, y para obtener (5) dividimos (4) por $a - b - c$ que es cero.

**PARADOJA 3.-** Demuestre que todos los enteros positivos son iguales.

Demostración:

Por división algebraica tenemos que:

$$\frac{x - 1}{x - 1} = 1$$

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$$

$$\frac{x^3 - 1}{x - 1} = x^2 + x + 1$$

$$\cdot$$

$$\cdot$$

$$\cdot$$

$$\frac{x^{n-} - 1}{x - 1} = x^{n-1} + x^{n-2} + \ . \ . \ . + x + 1$$

Supongamos ahora que $x = 1$. Tenemos entonces que todos los términos del lado izquierdo son iguales, mientras que los del lado derecho son 1, 2, 3, . . ., n respectivamente. Esto implica que $1 = 2 = 3 = . . . = n$.

**COMENTARIO.-** El error está en que si $x = 1$, todos los miembros izquierdos de las igualdades son "0/0" , y como ya vimos 0/0 puede ser un "número cualquiera".

Existen muchas paradojas que por el contrario de las anteriores, llegan a conclusiones válidas en base a una serie de pasos falsos. Estas paradojas son llamados en inglés, "Howlers". Veamos algunas muy sencillas de esta clase.

**PARADOJA 4.-**

Pruebe que $$\frac{a^2 - b^2}{a - b} = a + b$$

Demostración:

Tenemos que $$\frac{a^{\cancel{2}} \overset{+}{\cancel{-}} b^{\cancel{2}}}{a \cancel{-} b} = a + b$$

**COMENTARIO.-** Los pasos verdaderos deben ser:

$$\frac{a^2 - b^2}{a - b} = \frac{(a + b)\cancel{(a - b)}}{\cancel{a - b}} = a + b$$

**PARADOJA 5.-**

Simplifique a) $\frac{26}{65}$ y b) $\frac{16}{64}$

Solución:

a) $$\frac{2\cancel{6}}{\cancel{6}5} = \frac{2}{5}$$

b) $$\frac{1\cancel{6}}{\cancel{6}4} = \frac{1}{4}$$

**COMENTARIO:** Lo correcto deberá ser:

a) $\frac{26}{65} = \frac{2}{5}$ ; dividiendo por 13 numerador y denominador.

b) $\frac{16}{64} = \frac{8}{32} = \frac{4}{16} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

**PARADOJA 6.-**

$36^2 = 3(6)^2 = 3(36) = 336$

**COMENTARIO.-** Para obtener el resultado de 336 quito el paréntesis, olvidandose de que éste indicaba producto. Claramente el resultado correcto debe ser 108.

**PARADOJA** 7.- Resolver la ecuación:

$(x + 3)\ (2 - x) = 4$

Solución:

Si $(x + 3)\ (2 - x) = 4$

$\iff x + 3 = 4$ ó $2 - x = 4$

$\iff x = 1$ ó $x_1 = -2$

Sustituyendo en la ecuación original vemos que los resultados son correctos.

**COMENTARIO.-** La manera correcta de resolver esa ecuación debe ser

$$(x + 3)(2 - x) = 4$$

$$\Longleftrightarrow \quad -x^2 - x + 6 = 4$$

$$\Longleftrightarrow \quad x^2 + x - 2 = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad (x + 2)(x - 1) = 0$$

$$\therefore \quad x + 2 = 0 \quad ó \quad x - 1 = 0$$

$$x = -2 \quad ó \quad x = 1$$

Otras sofismas algebraicos son aquellos que ocurren al extraer raíces cuadradas y no tomar en cuenta el doble signo (±) que aparece al hacer esto. A veces tomamos un signo inapropiado y caemos en contradicciones. Veamos los siguientes casos:

**PARADOJA 8.-** Pruebe que dos números diferentes son iguales.

Demostración:

Sean a y b dos números distintos y sea c la media aritmética de ellos. Es decir, $c = (a+b)/2$, o sea que:

$$a + b = 2c \qquad (1)$$

Multiplicando ambos miembros por $(a - b)$ tenemos:

$$a^2 - b^2 = 2ac - 2bc \qquad (2)$$

Sumando $b^2 - 2ac + c^2$ a ambos miembros:

$$a^2 - 2ac + c^2 = b^2 - 2bc + c^2 \qquad (3)$$

$$\Longleftrightarrow \quad (a - c)^2 = (b - c)^2 \qquad (4)$$

Extrayendo raíz cuadrada a ambos miembros tenemos:

$$a - c = b - c \qquad (5)$$

$$a = b \qquad (6)$$

* si a es distinto a b, entonces a = b

**COMENTARIO.-** Antes que todo recordemos que la ecuación $x^2 = a^2$ tiene dos soluciones que son $x = a$ y $x = -a$. Ahora bien, al extraer raíces cuadradas en (4) no tomamos en cuenta el doble signo. Es decir (5) se pudo haber puesto de la siguiente manera.

$$a - c = -(b - c) \qquad (5)$$

$$\Longleftrightarrow \quad a - c = -b + c$$

$$\Longleftrightarrow \quad a + b = 2c$$

$$\Longleftrightarrow \quad c = \frac{a + b}{2}$$

Y no llegamos a ninguna contradicción. Además es claro que $[-(b - c)]^2 = (b - c)^2$ , o sea que:

$$(b - c)^2 = (c - b)^2$$

**PARADOJA 9.-** Demuestre que $n = n + 1$, para cualquier n.

Demostración:

Tenemos que $(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1$ (1), para cualquier n. Restando $(2n + 1)$ a ambos miembros de la igualdad tenemos:

$$(n + 1)^2 - (2n + 1) = n^2 \qquad (2)$$

Restando otra vez, pero ahora $n(2n+1)$ a ambos miembros:

$$(n + 1)^2 - (2n + 1) - n(2n + 1) = n^2 - n(2n +1) \qquad (3)$$

sumando $\dfrac{(2n + 1)^2}{4}$ a ambos miembros:

$$(n+1)^2 -(2n+1)-n(2n+1)+\frac{(2n+1)^2}{4} = n^2 -n(2n+1)+\frac{(2n+1)^2}{4} \qquad (4)$$

Que es equivalente a:

$$(n+1)^2 -(n+1)(2n+1)+\frac{(2n+1)^2}{4} =n^2 - n(2n+1)+\frac{(2n+1)^2}{4} \qquad (5)$$

$$\left[(n+1) - \frac{2n+1}{2}\right]^2 = \left[n - \frac{2n+1}{2}\right]^2 \qquad (6)$$

Extrayendo raíz cuadrada a ambos miembros:

$$(n+1) - \left(\frac{2n+1}{2}\right) = n - \left(\frac{2n+1}{2}\right) \qquad (7)$$

$$n + 1 = n \qquad (8)$$

**COMENTARIO.-** En esta paradoja sucede algo muy similar a lo que ocurrió en la paradoja anterior. El error está al extraer raíz cuadrada en la igualdad (6), y no tomar en cuenta el doble signo, es decir, si tomamos la opción de poner el signo negativo en el miembro derecho de (7) tenemos:

$$(n+1) - \left(\frac{2n+1}{2}\right) = -n + \frac{2n+1}{2}$$

$$\cancel{n} + 1 - \cancel{n} - \frac{1}{2} = - \cancel{n} + \cancel{n} + \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Y no hay ninguna contradicción.

En desigualdades también existen algunos sofismas. Mencionaré a continuación dos ejemplos:

**PARADOJA 10.-** Demuestre que todo número es mayor que si mismo.

Demostración:

Supongamos que a y b son dos números positivos y que:

$$a > b \qquad (1)$$

Multiplicando ambos miembros por b tenemos

$$ab > b^2 \qquad (2)$$

Restando $a^2$ a ambos miembros y sacando factor común:

$$a(b - a) > (b + a)\ (b - a) \qquad (3)$$

Dividiendo ambos miembros por (b - a) tenemos:

$$a > b + a \qquad (4)$$

∴ Puesto que b es positivo, esto implica que a es mayor que todo número mayor que él.

**COMENTARIO.-** El error está en haber multiplicado (3) por 1/(b-a), que es un número negativo, y no cambiar el sentido de la desigualdad. Debemos tener que si $a > b$, entonces $-a < -b$. Lo que debe de ser la expresión (4) utilizando este resultado es:

$$a < b + a$$

Y esto no es ninguna contradicción para a y b positivos.

**PARADOJA 11.-** Demuestre que $1/8 > 1/4$

Demostración:

Tenemos que $3 > 2$ (1)

Multiplicando ambos miembros por Log 1/2 tenemos:

$$3 \operatorname{Log} 1/2 > 2 \operatorname{Log} 1/2 \qquad (2)$$

Utilizando la propiedad de logaritmos de que $\text{Log } (x)^n = n \text{ Log } x$ y que la función logarítmo es creciente:

$$\text{Log}\left(\frac{1}{2}\right)^3 > \text{Log}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \qquad (3)$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 > \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\frac{1}{8} > \frac{1}{4}$$

**COMENTARIO.-** Cometimos el mismo error que en la paradoja anterior. Log 1/2 es un número negativo y al multiplicar (1) por esa cantidad, debimos cambiar el sentido de la desigualdad. O sea:

$$3 \text{ Log}\left(\frac{1}{2}\right) < 2 \text{ Log}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \text{Log}\left(\frac{1}{2}\right)^3 < \text{Log}\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{8} < \frac{1}{4}$$

que no es ninguna contradicción.

Los números imaginarios nacieron ante la necesidad de que la ecuación $x^2 = a$ siempre tuviera solución. En particular, si $x^2 = 1$ tiene solución, ¿por qué no ha de tenerla $x^2 = -1$ ?.

La raíz cuadrada de -1 se define de un modo similar a la de un número positivo, es decir -1 es aquel número que elevado al cuadrado da -1. La raíz cuadrada de todo número negativo tal como -1, donde a es positivo, se puede escribir de la siguiente manera:

$$\sqrt{-a} = \sqrt{-1}\ \sqrt{a} = i\ \sqrt{a}$$

Donde por consecuencia $\sqrt{-1}$ se representa como $i$. Ahora puesto que $\sqrt{-1} = i$, entonces $i^2 = -1$. Pero que pasa si decimos que $\sqrt{-1}\ \sqrt{-1} = \sqrt{(-1)\ (-1)} = \sqrt{1} = 1$. Llegamos a la conclusión de que 1 = -1.

¿Por qué sucede esto?.

En realidad, esto sucede por querer aplicar las reglas de los radicales a los números complejos (imaginarios). Veremos cómo al olvidar esto, se puede dar origen a algunas paradojas muy interesantes. Aquí dos de ellas.

**PARADOJA 12.-** Demuestre que -1 = 1

Demostración:

Tenemos que $$\sqrt{-1} = \sqrt{-1} \qquad (1)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \sqrt{\frac{1}{-1}} = \sqrt{\frac{-1}{1}} \qquad (2)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{1}} \qquad (3)$$

$$\iff \sqrt{1}\,\sqrt{1} = \sqrt{-1}\,\sqrt{-1} \quad (4)$$

$$\iff \sqrt{1} = i^2$$

$$\iff 1 = -1$$

**COMENTARIO.-** El error está en que empezamos con la forma $i = i$ en (1) y en (3) teníamos la igualdad $1/i = i/1$, que no es válida, ya que si lo fuera entonces $i = 1$ y entonces contradecimos que $i^2 = -1$.

Es decir al pasar del paso (2) al paso (3) aplicamos la regla de los radicales que dice $\sqrt{a / b} = \sqrt{a}/\sqrt{b}$ a los números imaginarios donde no es válida.

**PARADOJA 13.-** Demuestre que $1 = -1$

Demostración:

Tenemos que $\sqrt{x - y} = \sqrt{(-1)\ (y - x)} = i\sqrt{y - x}$ (1).

Sustituyendo $x = a$ y $y = b$ en (1) y suponiendo que $a = b$, tenemos:

$$\sqrt{a - b} = i\sqrt{b - a} \qquad (2)$$

Sustituyendo $x = b$ y $y = a$ en (1) nuevamente y suponiendo $a = b$, tenemos:

$$\sqrt{b - a} = i\sqrt{a - b} \qquad (3)$$

Multiplicando (2) por (3) tenemos:

$$\sqrt{a - b}\,\sqrt{b - a} = i^2\,\sqrt{b - a}\,\sqrt{a - b} \qquad (4)$$

Dividiendo ambos miembros por $\sqrt{a-b}\ \ \sqrt{b-a}$ :

$$1 = i^2 \qquad (5)$$

$$\Longleftrightarrow \qquad 1 = -1$$

**COMENTARIO.-** Dijimos que $\sqrt{-a} = i\ \sqrt{a}$ si **a** era un número positivo, pero no dijimos que **a** se pudiera escribir como $i\ \sqrt{-a}$, ya que esta expresión es igual a $i^2 \sqrt{a}$ o sea $-\sqrt{a}$, lo que nos conduce a una clara contradicción. Por lo tanto nuestro error está en el paso (1).

# CAPITULO IV

## "Paradojas del Infinito"

## IV.- PARADOJAS DEL INFINITO

Desde hace muchos años se han venido haciendo estudios acerca del infinito en matemáticas, ya que este es indispensable en muchos de los terrenos de esta ciencia. Estos estudios han dado origen a muchas contradicciones, algunas de las cuales se han podido superar, pero otras han dejado todavía en que pensar.

El infinito en matemáticas es una especie de fantasma que se presenta cuando menos esperamos. A veces es difícil de reconocer ya que hay mas de una clase: el infinito en el álgebra, en la aritmética, en la geometría, lo infinitamente pequeño, lo infinitamente grande, etc. No hay un solo infinito sino toda una jerarquía de infinitos.

En este capítulo veremos algunas notables paradojas que nos permitan apreciar lo contradictorio que es muchas veces el infinito.

### 4.1.- EL INFINITO EN ARITMETICA

Antes de analizar algunas paradojas que involucren al infinito, empezaremos por definir, de manera intuitiva, a que nos referimos cuando hablamos de una colección o conjunto infinito de cosas.

La palabra "infinito" significa "sin fin, sin límite", o sencillamente "no finito". Sujeto a esto, diremos que "un conjunto es infinito cuando no se pueden contar sus elementos en un periodo finito de tiempo, por muy largo que sea este". No debemos confundir el concepto de infinito y el de muy grande aunque finito. Por ejemplo, el número de cabellos que tiene una persona, ó el número de automóviles que hay en el mundo en un instante dado. Estos números son muy grandes, pero son finitos. Bastaría solo paciencia para ponerse a contar y con seguridad podríamos terminar la tarea.

Un ejemplo claro de un conjunto infinito son los números naturales, 1, 2, 3, 4, 5, ..., ya que si quisiéramos contarlos jamás terminaríamos aunque tuviéramos toda la paciencia del mundo.

Otros ejemplos de conjuntos infinitos pueden ser los siguientes, que son originados por los números naturales:

1.- Los valores de $n^2$, donde $n \in \mathbb{N}$ (*)

1, 4, 9, 16, 25, 36, ...,

2.- Los valores de $1/n$, donde $n \in \mathbb{N}$.

1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5. ...,

3.- Los valores de $2^n$, donde $n \in \mathbb{N}$

2, 4, 8, 16, 32, ...,

(*)NOTA: IN Representa los Números naturales.

4.- Los valores de $1/2^n$, donde n   IN.

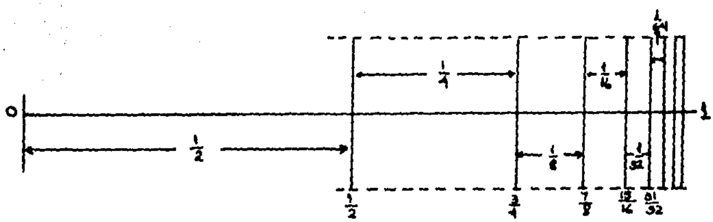
1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/32, ...,

Con estos ejemplos podemos con seguridad distinguir ya, la diferencia entre un conjunto finito muy grande y un conjunto infinito, y procederemos a estudiar algunas paradojas que involucran al infinito.

**4.2.- PARADOJAS DE ZENON**

Los estudios sobre el infinito comenzaron hace unos 2400 años, cuando el filósofo griego Zenón de Elea (495-455 a de C.), originó una crisis en la matemática antigua estableciendo algunas paradojas ingeniosas. Dos de las más famosas fueron la de la Dicotomía, en la cual afirma que es imposible recorrer una distancia dada, o sea que el movimiento es imposible y la otra es la de Aquiles y la Tortuga. Analizaremos por separado cada una de estas interesantes paradojas que quedaron inconclusas por mucho tiempo.

En la primera, la Dicotomía, Zenón afirma que para que una persona recorra una distancia dada, primero, debe recorrer la mitad de la distancia; luego, la mitad de la distancia restante; luego, otra vez, la mitad de la que queda y asi sucesivamente. En la siguiente figura se muestra el razonamiento:



**Paradoja de Zenón (La Dicotomía).**

!Esto significa, según Zenón, que siempre queda alguna parte de la distancia por recorrer y, por lo tanto, el movimiento es imposible!.

Es evidente, que Zenón pensó que la persona nunca puede llegar a la meta es equivalente a decir que nunca llega a ella en un tiempo finito. O dicho de otro modo, que "la suma de un número infinito de intervalos de tiempo, es infinita":. Esta afirmación en general es cierta, pero no siempre.

Tuvieron que pasar no años, sino siglos, para poder demostrar con formalidad matemática que Zenón no tenia razón.

Una solución a esta paradoja muestra que las distancias sucesivas a recorrer forma una serie geométrica infinita:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1/2)^n = 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32 + \ldots$$

Cada uno de cuyos términos es la mitad del anterior. Esta serie aunque tiene un número infinito de términos, tiene suma finita igual a 1. Esto es válido debido a que la serie es geométrica con una razón de 1/2, y por el teorema 10.5 del libro de Cálculo de Tom M. Apóstol Tomo I Pág. 475,

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}, \qquad \text{si } |x| < 1$$

Por lo tanto:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1/2)^n = \frac{1/2}{1-1/2} = 1$$

Es decir la distancia total que recorre la persona es 1 y por lo tanto hemos contradicho a Zenón.

En la segunda paradoja de Zenón que analizaremos, la de Aquiles y la Tortuga, Zenón dice que si Aquiles le da algo de ventaja a la tortuga en una carrera, nunca podrá alcanzarla, estableciendo que Aquiles, corriendo para alcanzar a la tortuga, debe llegar primero al lugar de donde ella partió, pero la tortuga ya ha salido. Este proceso se repite, indefinidamente. A medida que Aquiles llega a cada nuevo punto de su carrera, la tortuga, que había estado allí, ya lo ha abandonado. Por lo tanto siempre tendrá que empezar por llegar al sitio de donde la tortuga acaba de partir, y por tanto ésta siempre estará por delante.

Para analizar esta paradoja, hagamos las siguientes suposiciones: Supongamos que en la carrera, Aquiles le da a la tortuga una ventaja de 100 metros, y que las velocidades de Aquiles y la Tortuga son de 10 metros por segundo y 1 metro por segundo respectivamente. Por lo tanto Aquiles tarda 10 segundos en recorrer los primeros 100 metros de la carrera, mientras tanto, la tortuga se ha adelantado otros 10 metros. Aquiles tarda 1 segundo en recorrer esos 10 metros, pero la tortuga ha avanzado 1 metros más. Aquiles recorre esa distancia en 1/10 segundo, pero la tortuga estará todavía 1/10 metro adelante y así sucesivamente. Por lo tanto el número de segundos que transcurren hasta que Aquiles alcanza a la tortuga, es la suma de la serie infinita:

$$10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \ldots$$

$$= 11 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n$$

$$= 11 + \frac{1/10}{1-1/10} = 11 + 1/9 = 11.111\overline{1}$$

Que es una serie geométrica con $x = 1/10$, y la cual como ya vimos tiene suma 1/9 mas los 11 primeros segundos. Por lo tanto, Aquiles si alcanzará a la tortuga, y esto sucederá 11 1/9 segundos después de haber iniciado la carrera.

En el último siglo se han dado muchos criterios para determinar si la suma de una serie es infinita o finita. No profundizaremos en estos criterios, pero consideremos las siguientes dos series:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n = 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \ldots$$

y

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32 + \ldots$$

Es claro que la primera serie no tiene suma finita, es decir diverge hacia el infinito, mientras que la segunda tiene suma finita 1, es decir, converge a 1. ¿Puede deberse esta diferencia a que los términos sucesivos de la primera serie sean crecientes, mientras que los de la segunda son decrecientes?. La respuesta es No. Lo cierto es que una condición necesaria de convergencia, es que los términos sucesivos sean decrecientes. Pero esta condición no es suficiente, y se ve con claridad en la serie.

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1/n = 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + \ldots$$

llamada "serie armónica".

Intercalando paréntesis, esta serie se puede escribir en la forma:

$$1 + 1/2 + (1/3 + 1/4) + (1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8\ ) +$$

$$+ (1/9 + 1/10 + 1/11 + 1/12 + 1/13 + 1/14 + 1/15 + 1/16) + \ldots$$

puesto que $1/3 > 1/4$, entonces:

$$(1/3 + 1/4) > (1/4 + 1/4) = 1/2.$$

También puesto que 1/5, 1/6, 1/7, son todos mayores que 1/8, el segundo grupo de paréntesis es mayor que $(1/8 + 1/8 + 1/8 + 1/8)$ o sea 1/2. Del mismo modo el tercer grupo es mayor que $8/16 = 1/2$, y asi sucesivamente. Por lo tanto la suma de la serie es mayor que $1 + 1/2 + 1/2 + 1/2 + \ldots$, y por lo tanto la serie Armónica $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ diverge, aunque muy lentamente, hacia el infinito.

Por lo tanto la condición de que los términos sucesivos sean decrecientes, no es una condición suficiente para la convergencia de una serie de términos positivos. Por otra parte, esta condición si es suficiente para la convergencia de una "serie alternada", una en que los términos sean alternadamente positivos y negativos. Este teorema lo demostró Leibniz y está escrito como el Teorema 10.14 Pág. 493 del libro de Cálculo de Tom M. Apóstol Vol. I. Por ejemplo, la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n} = 1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/5 - 1/6 + \ldots$$

Converge hacia un límite finito aplicando esta regla. El valor de este límite es Ln 2 y está demostrado en la página 495 ejemplo 4 del libro antes mencionado.

Aunque algunos matemáticos ya habían estudiado ciertos casos aislados de series infinitas, fue hasta el siglo XIX cuando se les empezó a estudiar de una manera más lógica y firme, y con una idea más amplia del infinito. En 1851 apareció un libro titulado "Die Paradoxien des Unendlichen" (Paradojas del Infinito) escrito por Bolzano y publicado después de su muerte.

Quizás apreciemos los mejores esfuerzos de los matemáticos de aquel tiempo, si vemos unos cuantos ejemplos tomados del libro de Bolzano. Consideremos la serie:

$$S = a - a + a - a + a - a + a - a + a - a + \ldots$$

si agrupamos esta serie de otro modo tenemos:

$$\begin{aligned} S &= (a - a) + (a - a) + (a - a) + (a - a) + \ldots \\ &= 0 + 0 + 0 + 0 + 0 \ldots \\ &= 0 \end{aligned}$$

si por otra parte la agrupamos de este modo tenemos:

$$\begin{aligned} S &= a - (a - a) - (a - a) - (a - a) - \ldots \\ &= a - 0 - 0 - 0 - \ldots \\ &= a \end{aligned}$$

y si todavia la agrupamos de otra manera tenemos que:

$$\begin{aligned} S &= a - (a - a + a - a + a - a + \ldots) \\ &= a - S \end{aligned}$$

$$2S = a \text{ ó sea que } S = a/2$$

Así pues, tenemos una serie infinita cuya suma parece ser una de las tres cantidades: 0, a, ó a/2. Actualmente, valiéndonos de las definiciones de convergencia y divergencia, diríamos que esta serie ni converge hacia un número finito, ni diverge hacia el infinito. Simplemente diríamos que es una "serie oscilante" y llegaríamos a la conclusión que no tiene una suma determinada. Pero en los días anteriores a Bolzano las ideas de convergencia y divergencia no estaban tan claramente definidas, y las series oscilantes presentaban muchas dificultades inclusive Leibniz, uno de los genios del siglo XVII, que descubrió el Cálculo Infinitesimal al mismo tiempo que Newton, no vio claro este caso en particular. Decía que puesto que los límites 0 y a, son "igualmente probables", el verdadero límite de la serie, es su valor medio a/2. El método de agrupamiento por medio del cual se llega al límite a/2, es obra de un matemático de principios del siglo XIX y lo publicó en el libro Annales de Mathematique en 1830 firmando como "M.R.S.".

Más sorprendentes son todavía los resultados que se obtienen en las siguientes series, para el caso en que $x = 1$. Por ejemplo, por división ordinaria, tenemos que para cualquier valor de $x$ distinto de $-1$,

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \ldots$$

$$\frac{1}{1+x+x^2} = 1 - x + x^3 - x^4 + x^6 - x^7 + \ldots$$

$$\frac{1}{1+x+x^2+x^3} = 1 - x + x^4 - x^5 + x^8 - x^9 + \ldots$$

$$\frac{1}{1+x+x^2+x^3+x^4} = 1 - x + x^5 - x^6 + x^{10} - x^{11} + \ldots$$

Y así sucesivamente. Pero si $x = 1$, todos los segundos miembros se reducen al mismo número es decir a la "suma" de la serie:

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots,$$

Mientras que los primeros miembros adquieren respectivamente los valores 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, .... Por consiguiente $1/2 = 1/3 = 1/4 = 1/5 = \ldots = 1/n$, donde n es un número natural cualquiera. Como sabemos, esto es absurdo, lo cierto es que la serie $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots$ no tiene una suma fija, sino que oscila entre 0 y 1. Veamos todavía otro ejemplo del libro de Bolzano. Sea:

$$S = 1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + 64 - 128 + \ldots,$$

ésto significa que:

$$S = 1 - 2\,(1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + 64 - \ldots)$$
$$= 1 - 2\,S$$
$$\therefore 3\,S = 1 \quad \text{ó sea} \quad S = 1/3$$

Por otra parte la serie dada se puede escribir en la forma:

$$S = 1 + (-2 +4) + (-8 +16) + (-32 +64) + \ldots$$
$$= 1 + 2 + 8 + 32 + 64 + \ldots$$

Y S diverge hacia el infinito. Pero también podemos escribir:

$$S = (1 -2) + (4 -8) + (16 -32) + (64 -128) + \ldots$$
$$= -1 -4 -16 -64 - \ldots$$

y S diverge hacia menos infinito.

Estas contradicciones ocurren debido a que esta serie no solo es oscilante, sino que oscila entre límites infinitos. La suma de los dos primeros términos es -1; de los tres primeros es 3; de los cuatro primeros es -5; y así sucesivamente 11, -21, 43, -85, .... Es claro que al continuar, las sumas parciales saltan de números positivos cada vez más grandes a números negativos también cada vez más grandes. En conclusión, la serie no tiene suma.

Quizás no sea tan sorprendente, el que se pueda hacer que una serie que no converge a un límite determinado, parezca converger hacia varios límites diferentes. Pero consideremos ahora la serie:

$$1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/5 - 1/6 + 1/7 - 1/8 + \dots$$

Que como ya mencionamos en la página 41 converge hacia el límite finito Ln 2, o sea 0.6931471. Por simplicidad le llamaremos a este límite L. Entonces:

$$L = 1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/5 - 1/6 + 1/7 - 1/8 + 1/9 - 1/10 + 1/11 - 1/12 + 1/13 - 1/14 + \dots$$

multiplicando ambos miembros por 2 tenemos:

$$2L = 2 - 2/2 + 2/3 - 2/4 + 2/5 - 2/6 + 2/7 - 2/8 + 2/9 - 2/10 + 2/11 - 2/12 + 2/13 - 2/14 + \dots$$

$$= 2 - 1 + 2/3 - 1/2 + 2/5 - 1/3 + 2/7 - 1/4 + 2/9 - 1/5 + 2/11 - 1/6 + 2/13 - 1/7 + 2/15 - 1/8 + \ldots$$

agrupando los números de igual denominador tenemos:

$$2L = (2 - 1) - 1/2 + (2/3 - 1/3) - 1/4 + (2/5 - 1/5) - 1/6 + (2/7 - 1/7) - 1/8 + (2/9 - 1/9) - 1/10 + \ldots$$

$$= 1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/5 - 1/6 + 1/7 - 1/8 + 1/9 - 1/10 + \ldots$$

Pero la serie del segundo miembro, es la dada, y su límite ya no es L, sino 2L. Si repetimos indefinidamente la multiplicación por 2, y si agrupamos los términos de igual denominador, se puede llegar a que la suma de esta serie, no solo es L y 2L, sino también 4L, 8L, 16L, 32L, ..., Esto sí que es sorprendente, ¡una serie infinita que converge hacia un límite finito; 0.693147 y que se puede hacer, mediante arreglos adecuados, que converja hacia 1.3862944, ó 2.7725887, ó hacia 5.5451774 y así sucesivamente!.

La dificultad o la contradicción se deriva al querer aplicar a las series infinitas, los procedimientos de la aritmética finita. En la aritmética finita se cumple la asociatividad en la suma, es decir, $A + B + C = (A + B) + C = A + (B + C)$, pero esta propiedad no se puede aplicar en términos generales a las series infinitas, y he aqui la razón de los resultados contradictorios.

Surge entonces el problema de considerar si siempre es posible alterar el orden, y agrupar los términos de una serie infinita convergente, con la seguridad de no cambiar el límite. La respuesta es Si, siempre y cuando la serie en consideración sea "absolutamente convergente". Una serie infinita es absolutamente convergente o converge absolutamente si converge no solo la serie en si, sino también la constituida al cambiar todos los signos mas por signos menos o viceversa. Todas las series convergentes de términos positivos son absolutamente convergentes, y el criterio por lo tanto se aplica solo a las series en que hay términos negativos.

Consideremos nuevamente la serie:

$$1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/5 - 1/6 + 1/7 - 1/8 + \ldots$$

Si cambiamos todos los signos menos por signos más, se transforma en la serie armónica.

$$1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 + \ldots$$

Que como ya vimos anteriormente es divergente. Por lo tanto la serie en consideración no es absolutamente convergente y por lo tanto no hay que asombrarse que mediante arreglos adecuados lo hagamos converger hacia límites distintos de Ln 2.

Si una serie converge, pero no absolutamente, se dice que es "condicionalmente convergente". La cuestión de la ordenación de términos de una serie condicionalmente convergente la estableció en 1854 el matemático alemán Riemann, quien demostró el importante teorema. "Se pueden ordenar los términos de una serie condicionalmente convergente, de modo que su límite sea cualquier número finito dado, o más infinito, o menos infinito".

Terminaremos este tema de series con cuatro ejemplos más de los curiosos resultados que se pueden obtener cambiando el orden y reagrupando los términos de una serie condicionalmente convergente. Los primeros dos ejemplos se refieren también a la serie que converge a Ln 2.

**PARADOJA 1.-** Sea $L = \ln 2$. Entonces

$$L = 1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/5 - 1/6 + 1/7 - 1/8 + 1/9 - 1/10 + 1/11 - 1/12 + 1/13 - 1/14 + 1/15 - 1/16 + \ldots$$

Agrupando los términos de dos en dos tenemos:

$$L = (1 - 1/2) + (1/3 - 1/4) + (1/5 - 1/6) + (1/7 - 1/8) + (1/9 - 1/10) + (1/11 - 1/12) + \ldots \qquad (1)$$

Si ahora agrupamos de cuatro en cuatro tenemos:

$$L = (1 - 1/2 + 1/3 - 1/4) + (1/5 - 1/6 + 1/7 - 1/8) + (1/9 - 1/10 + 1/11 - 1/12) + \dots \quad (2)$$

Dividiendo la igualdad (1) entre 2 y agrupando los términos de dos en dos tenemos:

$$1/2\ L = (1/2 - 1/4) + (1/6 - 1/8) + (1/10 - 1/12) + (1/14 - 1/16) + \dots \quad (3)$$

Sumando (2) y (3) paréntesis a paréntesis

$$3/2\ L = (1 + 1/3 - 1/2) + (1/5 + 1/7-1/4) + (1/9 + 1/11 - 1/6) + (1/13 + 1/15 - 1/8) + \dots$$

$$= 1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/5 - 1/6 + 1/7 - 1/8 + 1/9 - 1/10 + \dots$$

$$= L$$

Por lo tanto la suma de la serie es L y también (3/2)L

**PARADOJA 2.-** Sea L = Ln 2. Entonces

$$L = 1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/5 - 1/6 + 1/7 - 1/8 + \dots$$

Agrupando primero términos positivos y luego los negativos tenemos:

$$(1)\ L = (1 + 1/3 + 1/5 + 1/7 + 1/9 + \ldots) -$$
$$(1/2 + 1/4 + 1/6 + 1/8 + 1/10 + \ldots \qquad (1)$$

Llamémosle (1) a esta igualdad y consideremos la identidad:

$$0 = (1/2 + 1/4 + 1/6 + 1/8 + \ldots) -$$
$$(1/2 + 1/4 + 1/6 + 1/8 + \ldots) \dashrightarrow \quad (2)$$

Sumando (1) y (2) tenemos:

$$L = [(1 + 1/3 + 1/5 + 1/7 + \ldots) +$$
$$(1/2 + 1/4 + 1/6 + 1/8 + \ldots)] -$$
$$2\ (\ 1/2 + 1/4 + 1/6 + 1/8 + \ldots\ )$$

$$= (\ 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \ldots\ ) -$$
$$(\ 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \ldots\ )$$

$$= 0$$

Por lo tanto la suma de la serie es 0 y L a la vez.

**PARADOJA 3.-** Se puede demostrar que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{7.9} + \ldots$$

Es convergente(*). Llamemos M a su suma. "Demostraremos" que M es 1 y 1/2 a la vez.

Demostración

Primeramente, la serie se puede escribir en la forma

$$M = (1/1 - 2/3) + (2/3 - 3/5) + (3/5 - 4/7) + (4/7 - 5/9) + \ldots$$

ya que $1/1 - 2/3 = \dfrac{3-2}{1.3} = \dfrac{1}{1.3}$

$$2/3 - 3/5 = \frac{10-9}{3.5} = \frac{1}{3.5}$$

$$3/5 - 4/7 = \frac{21-20}{5.7} = \frac{1}{5.7}$$

y así sucesivamente.

---

(*)NOTA:

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{1}{2}$ Ya que es una serie Telescópica. Ver ejercicio 1. Pág. 477 libro de Cálculo de Apóstol Tomo I.

Quitando los paréntesis tenemos que:

$$M = 1 - 2/3 + 2/3 - 3/5 + 3/5 - 4/7 + 4/7 - 5/9 + 5/9 - \ldots$$

$$= 1$$

por lo tanto $M = 1$

Por otra parte también la serie puede escribirse de la siguiente forma:

$$M = 1/2\ (1/1 - 1/3) + 1/2\ (1/3 - 1/5) + 1/2\ (1/5 - 1/7) + 1/2\ (1/7 - 1/9) + \ldots$$

ya que: $$1/2\left(\frac{3-1}{1.3}\right) = \left(\frac{1}{1.3}\right)$$

$$1/2\left(\frac{5-3}{3.5}\right) = \left(\frac{1}{3.5}\right)$$

y así sucesivamente.

Si quitamos los paréntesis tenemos:

$$M = 1/2 - 1/6 + 1/6 - 1/10 + 1/10 - 1/14 + 1/14 - 1/18 + 1/18 \ldots$$

$$= 1/2$$

por lo tanto $M = 1/2$

y en conclusión tenemos que $M = 1$ y $M = 1/2$ a la vez.

PARADOJA 4.- Demostrar que todas las series infinitas, sean o no convergentes, se pueden "sumar" de modo que su suma valga cualquier número N dado.

Demostración:

Consideremos la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + \ldots$$

podemos notar que

$$a_1 = N + (a_1 - N)$$

$$a_2 = -(a_1 - N) + (a_1 + a_2 - N)$$

$$a_3 = (a_1 + a_2 - N) + (a_1 + a_2 + a_3 - N)$$

$$\vdots$$

$$a_i = -(a_1 + a_2 + \ldots + a_{i-1} - N) + (a_1 + a_2 + \ldots + a_i - N)$$

$$\vdots$$

y así sucesivamente. Sumando cada una de las igualdades anteriores tendremos:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots = N + (a_1 - N) - (a_1 - N) + (a_1 + a_2 - N) - (a_1 + a_2 - N) + (a_1 + a_2 + a_3 - N) - (a_1 + a_2 + a_3 - N) + \ldots$$

$$= N$$

por lo tanto $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = N$

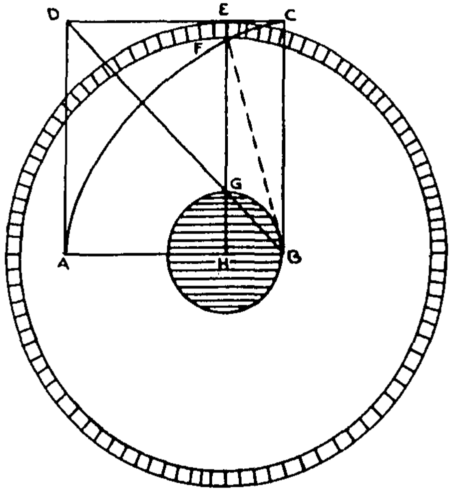
$\therefore$ Todas las series infinitas tienen suma N, donde N es arbitraria.

**4.3.- EL INFINITO EN GEOMETRIA**

La paradoja que analizaremos a continuación apareció en el siglo XVII en el libro "Diálogos Relativos a Dos Nuevas Ciencias", escrito por Galileo.

El infinito en Geometría era una confusión típica de aquellos tiempos y Galileo pensó lo siguiente:

Tomemos un cuadrado A B C D cualquiera y tracemos la diagonal BD. Haciendo centro en B y radio BC describamos el arco de $90^{\circ}$ CFA. Tracemos una recta arbitraria HE paralela a BC y que intersecte el arco de $90^{\circ}$ en F, y a la diagonal en G. Haciendo centro en H, tracemos círculos de radios HG, HF y HE, respectivamente como se ve en la figura.




Primeramente tenemos que el triángulo FBH es rectángulo. Por lo tanto por el Teorema de Pitágoras $(\overline{BF})^2 = (\overline{HB})^2 + (\overline{HF})^2$, o sea que:

$$(\overline{HB})^2 = (\overline{BF})^2 - (\overline{HF})^2 \quad \text{---->} \quad (1)$$

Tenemos además que HE = BC, y puesto que BC y BF son radios del mismo arco tenemos que BC = BF. Por lo tanto HE = BF. También tenemos que HB y HG son iguales ya que son radios del mismo círculo. Ahora, sustituyendo en (1), BF por HE y HB por HG tenemos:

$$(\overline{HG})^2 = (\overline{HE})^2 - (\overline{HF})^2$$

multiplicando esta igualdad por ¶ tenemos:

$$\P\ (\overline{HG})^2 = \P\ (\overline{HE})^2 - \P\ (\overline{HF})^2$$

Notemos que el primer miembro de esta igualdad representa el área del círculo rayado y el segundo miembro representa la diferencia entre las áreas de los círculos de radio HE y HF, y representa por lo tanto el área de la corona circular rayada.

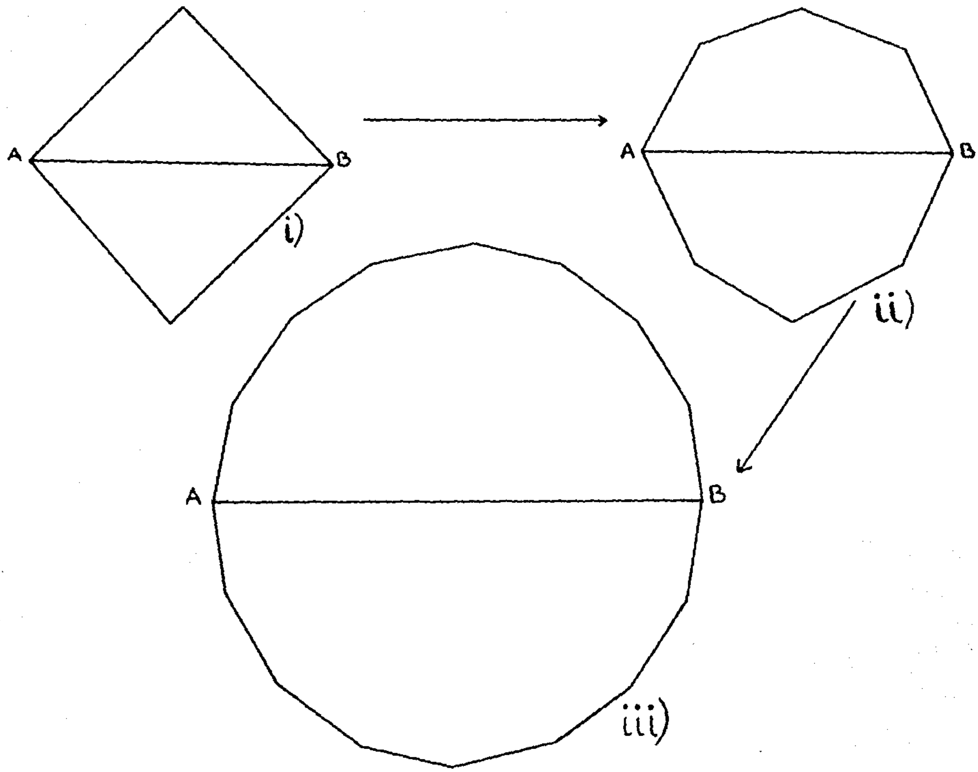
Hagamos ahora que HE se aproxime a BC. Entonces cuando HE coincida con BC, el círculo rayado se reduce al punto B, y la corona rayada se reduce a la circunferencia de radio BC. Pero como el área del círculo y de la corona rayadas son iguales para cualquier posición de HE llegamos a la conclusión de que !Un punto es igual a la circunferencia!.

Dos siglos después, Bolzano comprendio que aquí solo hay una apariencia de paradoja. Las dos clases de puntos, una compuesta por un solo miembro, el punto B, y la otra de los puntos que hay en la circunferencia de radio BC, ocupan exactamente la misma cantidad de superficie. El área de ambas es igual a cero. La paradoja surge del concepto erróneo de que el número de puntos de una configuración dada es una indicación del área que ella ocupa. Los puntos, en número finito o infinito no tienen dimensiones y no pueden por lo tanto, ocupar superficie alguna.

En el transcurso de los siglos se han acumulado paradojas similares que se han originado por ideas inciertas y reflexiones filosóficas dudosas.

Dedicaremos el resto de esta sección a dos paradojas que involucran el concepto de "curvas límites", es decir curvas definidas como el límite de una sucesión indefinida de polígonos, o de una sucesión indefinida de figuras construidas por líneas rectas. Este tema es caracteristico en la geometría plana. Un ejemplo de una "curva límite" puede ser la circunferencia, que se puede considerar como límite de una sucesión indefinida de polígonos regulares.

La siguiente figura muestra un cuadrado con el segmento AB como diagonal, y las figuras ii) y iii) muestran respectivamente polígonos regulares de 2.4, o sea 8 lados y 2.8 o sea, 16 lados.

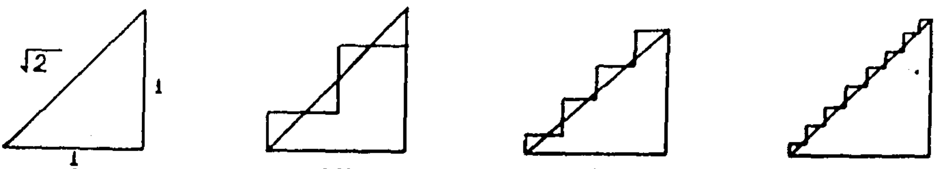



NOTA: En la figura (iii) AB está en escala

Denotemos a estos polígonos sucesivos P1, P2 y P3. Si continuamos doblando indefinidamente el número de lados obtendremos una sucesión de polígonos P1, P2, P3, P4, P5, P6, .... Intuitivamente es evidente, y se puede demostrar con toda formalidad, que esta sucesión de polígonos regulares tiende a un límite que es la circunferencia de diámetro AB.

Pero hay que tener cuidado al recurrir a la intuición, como lo acabamos de hacer. En las siguientes dos paradojas veremos como razonamientos intuitivos nos llevan a caminos equivocados.

**PARADOJA 1.-** Consideremos un triángulo rectángulo isósceles con cada cateto de 1 pulgada de longitud, como se muestra en la figura i). Por el Teorema de Pitágoras la hipotenusa tiene entonces 2 pulgadas de longitud.



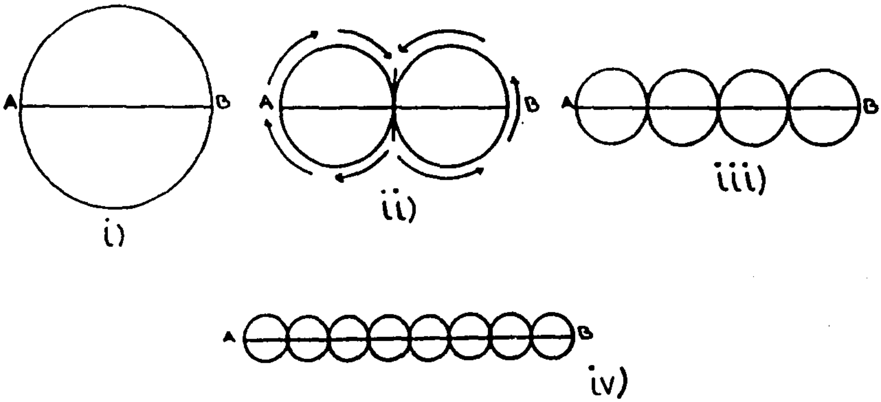

i) ii) iii) iv)

En la figura ii) se han trazado unos "escalones" empezando con el vértice inferior izquierdo, subiendo 1/4 pulg., 1/2 pulg. a la derecha, 1/2 pulg. arriba, 1/2 pulg. a la derecha y 1/4 pulg. hacia arriba. Denotemos esos escalones como L1. En la figura iii), se ha doblado el número de escalones, resultando L2; y en iv) se han vuelto a doblar resultando L3. Si continuamos indefinidamente doblando el número de escalones obtenemos la sucesión L1, L2, L3, L4, L5, L6, .... Esta sucesión de líneas tiene como límite la hipotenusa del triángulo dado. Por lo tanto la longitud de la línea límite es  2 pulg. ¿Será cierto este resultado?. Si no, ¿Cuál es su longitud?.

**COMENTARIO.-**

La longitud de la línea límite "parece ser"  2 solo porque la línea límite "parece" ser la hipotenusa del triángulo dado. Consideremos la primera línea L1 de la figura ii). Es inmediato que la suma de los segmentos horizontales es igual a 1 pulg., y que la suma de los segmentos verticales también es 1 pulg. Por lo tanto la longitud de L1 es 2. Por el mismo razonamiento L2 y L3 de la figura iii) y iv) respectivamente tienen longitud 2 pulg., ya que en ambas, la suma de los segmentos horizontales es 1 pulg., así como la de los segmentos verticales. Ahora, como no importa el número de veces que se doblan los escalones ya que la suma de los segmentos horizontales sigue siendo 1 pulg., al igual que la de los segmentos verticales, esto implica que todos L1, L2, L3, L4, L5, L6, ... tienen 2 pulg. de longitud. Por lo tanto la longitud de la línea límite es 2 pulg. y no  2 pulg. como habíamos creído.

**PARADOJA 2.-** Dibujemos una circunferencia de diámetro AB como en la figura i). Denotemos esa curva como C1, y construyamos ahora como en la figura ii) una curva que conste de dos circunferencias cada una de ellas de diámetro AB/2. Se puede considerar que estas dos circunferencias forman una sola curva trazada como indican las flechas.




Denotemos esta curva como C2. En las figuras iii) y iv) están dibujados las curvas C3 y C4, que constan respectivamente de 4 circunferencias de diámetro AB/4, y de 8 circunferencias de diámetro AB/8. Si continuamos indefinidamente el proceso de doblar el número de circunferencias dividiendo por 2 los diámetros, resulta una sucesión de curvas C1, C2, C3, C4, C5, ... . La curva límite estará formada de circunferencias infinitamente pequeñas, y no será posible distinguirla del segmento AB. Debemos de recordar que en cada curva vamos de A a B y luego de regreso de B a A. Por tanto la longitud de la curva límite es 2 AB ¿Será cierto este resultado?. Si no, ¿Cuál será la longitud?

**COMENTARIO.**

Consideremos la curva C1 de la figura i). Puesto que la longitud de una circunferencia es ¶ veces el diámetro, la longitud de C1 es ¶ (AB). La curva C2 del dibujo ii) consta de 2 circunferencias cada una de diámetro AB/2. La longitud de cada una de las circunferencias de ¶ AB/2. Por lo tanto la longitud de C2 es 2 ¶ (AB)/2, o sea ¶ (AB). La curva C3 del dibujo iii) consta de 4 circunferencias cada una de ellas de diámetro AB/4, y de longitud ¶ (AB)/4. Por lo tanto la longitud de C3 es 4 ¶ (AB)/4, o sea ¶ (AB). Análogamente la longitud de C4 es 8 ¶ (AB)/8, o sea ¶ (AB), y así sucesivamente. Por lo tanto la longitud de cada una de las curvas C1, C2, C3, C4, C5, ... , es ¶ (AB). Por lo tanto la longitud de la curva límite no es 2(AB), sino ¶ (AB).

## 4.4.- LA ARITMETICA DEL INFINITO

Al principio de este capitulo, presentamos como ejemplo de conjuntos infinitos al conjunto de los números naturales 1, 2, 3, 4, 5, ... , y al formado por el cuadrado de todos los números naturales, A alguien se le puede ocurrir, si hay o no "más" elementos en el primer conjunto que en el segundo. Es cierto que todos los elementos del segundo conjunto están contenidos en el primero, mientras que hay elementos del primer conjunto que no pertenecen al segundo. Por lo tanto, podríamos decir, a pesar de que ambos conjuntos son infinitos, que la infinitud del primer conjunto es "mayor" que la del segundo.

Este problema lo estudió Galileo en 1638 en sus "Diálogos Relativos a dos Nuevas Ciencias", libro ya mencionado anteriormente. Galileo llegó a la conclusión de que todo lo que podemos decir acerca de los dos conjuntos es que ambos son infinitos, ya que la relación "igual", "mayor" y "menor" se pueden aplicar a los conjuntos finitos, pero no a los infinitos. Así quedó este problema hasta que en 1851 Bolzano en su libro "Paradojas del Infinito" ya mencionado, volvió a despertar interés en estas cuestiones. Pero Bolzano tampoco profundizó lo suficiente en sus investigaciones. Sin embargo despejó la mayor parte de la confusión preparando el camino a Georg Cantor, matemático alemán(*) , que en 1873 consiguió comparar diferentes grados de infinitud. Mientras Weirstrass se ocupaba del cálculo infinitesimal, él se dedicaba a la tarea opuesta, al cálculo de lo infinitamente grande.

(*) Georg Cantor, nació en San Petesburgo en 1845. Aunque nació en Rusia vivió la mayor parte de su vida en Alemania, de donde fue profesor en la Universidad de Halle.

Tratando la ciencia del infinito, Cantor comprendió que el primer requisito era definir términos.

Su definición de clase infinita se basa en una paradoja. "Una clase infinita tiene la singular propiedad de que el todo no es mayor que alguna de sus partes".

Esta proposición es tan esencial para las matemáticas del infinito como lo que expresa: "El todo es mayor que cualquiera de sus partes", para la aritmética finita. Si recordamos que dos clases tienen el mismo número de elementos si sus elementos se pueden poner en una correspondencia uno a uno, esta última preposición resulta evidente. Pero lo que es evidente en lo finito, es falso para lo infinito. Por ejemplo, puesto que la clase de los hombres y la de los matemáticos son ambas finitas podemos concluir, verificando que hay por lo menos un hombre que no es matemático, que la clase de los hombres es la mas grande de las dos. También podríamos inferir que el número de enteros(*), pares e impares, es mayor que el número de enteros pares. Esto última aseveración es falsa ya que podemos

---

(*) Me referiré al escribir números enteros a los números enteros positivos formar una correspondencia uno a uno entre los números enteros y los números pares de la siguiente manera:

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & \ldots \end{array}$$

Es decir, haciendo que a cada número entero le corresponda su duplo, que es un entero par. Además, es importante notar que esta correspondencia la podemos llevar a cabo sin límite, es decir, hasta donde lo deseemos. Ahora, estando equiparadas estas dos clases, debemos llegar a la conclusión de que tienen la misma cardinalidad (mismo "número" de elementos). De esta manera llegamos a la paradoja fundamental de todas las clases infinitas.

Existen componentes de una clase infinita que son tan grandes como la clase misma, es decir, **¡el todo no es mayor que alguna de sus partes!.**

Cantor llamó Contables ó Numerables Infinitas a las clases infinitas que pueden ponerse en correspondencia uno a uno con los números enteros. En realidad es sencillo verificar que de cualquier clase numerable o contable puede siempre sacarse un número numerable infinito de clases numerables infinitas, sin afectar la cardinalidad de la clase original.

Ejemplo:

$$
\begin{array}{cccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \ldots \\
\updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\
2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & \ldots \\
\updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\
1 & 4 & 9 & 16 & 25 & 36 & 49 & \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}
$$

Puesto que todos estos conjuntos son contables dado que podemos asignar un número entero a cada uno de sus elementos, sería muy natural que se tratara de representar la cardinalidad de los números enteros mediante un número o símbolo. Y así fue como se creó el primero de los números transfinitos para representar la cardinalidad de las clases infinitas numerables. Se sugirió representarlo con un símbolo etimológicamente antiguo, pero matemáticamente nuevo: la primera letra del alfabeto hebreo, $\aleph$ (Aleph). Sin embargo, Cantor, decidió usar finalmente $\aleph_0$. (Aleph-cero).

Ahora ya podemos decir que hay $\aleph_0$ números enteros. También puesto que pudimos formar una correspondencia uno a uno con los números enteros y los números pares, los cuadrados de los números enteros y los cubos de los números enteros, estos tienen cardinalidad $\aleph_0$ también. Dicho de otro modo hemos estado demostrando que !el todo es igual a una parte!. Si hay un resultado contradictorio con lo que el sentido común nos dice, es éste. Pero hoy debemos de recordar que esto solo se cumple en las clases infinitas.

Al principio de este capítulo definimos vagamente un conjunto infinito, diciendo que era "uno que no se puede acabar de contar en un periodo finito de tiempo". Pero ahora, siguiendo a Cantor podemos definirlo diciendo que "es un conjunto que se puede poner en correspondencia uno a uno con una parte del mismo".

Cantor sospechó que había una infinidad de números transfinitos y que la cardinalidad de los números enteros, $\aleph_0$ , era la mas pequeña de todas. Sospechando que había otras clases infinitas con una cardinalidad mayor a la de los números enteros, inmediatamente podemos revisar la posibilidad de que sean los números racionales. Pues bien, Cantor, mediante una demostración muy ingeniosa y simple, demostró que la cardinalidad de los números racionales era la misma que la de los números enteros, es decir, también tienen cardinalidad $\aleph_0$ . Su demostración fue elaborada de la siguiente manera:

Ordenó el conjunto de los números racionales de la siguiente manera:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1/1 | 1/2 | 1/3 | 1/4 | 1/5 | 1/6 | 1/7 | 1/8 | ... |
| 2/1 | (2/2) | 2/3 | (2/4) | 2/5 | (2/6) | 2/7 | 2/8 | ... |
| 3/1 | 3/2 | (3/3) | 3/4 | 3/5 | (3/6) | 3/7 | 3/8 | ... |
| 4/1 | (4/2) | 4/3 | (4/4) | 4/5 | 4/6 | 4/7 | 4/8 | ... |
| 5/1 | 5/2 | 5/3 | 5/4 | 5/5 | 5/6 | 5/7 | 5/8 | ... |
| 6/1 | (6/2) | (6/3) | 6/4 | 6/5 | 6/6 | 6/7 | 6/8 | ... |
| 7/1 | 7/2 | 7/3 | 7/4 | 7/5 | 7/6 | 7/7 | 7/8 | ... |
| 8/1 | 8/2 | 8/3 | 8/4 | 8/5 | 8/6 | 8/7 | 8/8 | ... |
| . | . | . | . | . | . | . | . | |
| . | . | . | . | . | . | . | . | |

Notemos que en cada renglón los denominadores sucesivos son 1, 2, 3, 4, 5, ..., mientras que los numeradores del primer renglón son 1, los del segundo 2, los del tercero 3, y así sucesivamente.

Nótese también que todas las fracciones en que el numerador y el denominador tienen un factor común se han encerrado entre paréntesis. Si se tachan esas fracciones entonces en el ordenamiento aparecerán todos los números racionales únicamente una vez. Entonces, siguiendo las direcciones indicadas por las flechas, podemos establecer una correspondencia uno a uno entre los números naturales y los racionales de la siguiente manera:

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | ... |
| $\updownarrow$ | $\updownarrow$ | $\updownarrow$ | $\updownarrow$ | $\updownarrow$ | $\updownarrow$ | $\updownarrow$ | $\updownarrow$ | $\updownarrow$ | $\updownarrow$ | ... |
| 1/1 | 2/1 | 1/2 | 1/3 | 3/1 | 4/1 | 3/2 | 2/3 | 1/4 | 1/5 | ... |

Es decir; a cualquier número racional que se nos ocurra, podemos asignarle como pareja un número natural, solo construyendo la tabla hasta donde sea necesario, o viceversa. Esto es, a cualquier número racional le corresponde uno y solo uno natural, y a cada natural le corresponde uno y solo uno racional. Por lo tanto la correspondencia es uno a uno, y por lo tanto la cardinalidad del conjunto de los números racionales es la misma que la de los naturales, es decir, $\aleph_0$ .

Se podría sospechar que todos los conjuntos infinitos tienen cardinalidad $\aleph_0$ , pero Cantor consiguió demostrar que la cardinalidad del conjunto de los números reales es mayor que $\aleph_0$ . Si puede demostrarse que la clase de los números reales, comprendidos entre 0 y 1, no es numerable, se deducirá, a fortiori, que los números reales son no numerables. Empleando un recurso, usado muy frecuentemente en matemáticas superiores, la prueba por contradicción o de reducción a lo absurdo, Cantor supuso que era verdadero lo que sospechaba que era falso y entonces demostró que su suposición lo llevaba a una contradicción. Supuso que los números reales entre 0 y 1 eran numerables y podrían por lo tanto ponerse en correspondencia uno a uno con los números naturales. Habiendo probado que esta hipótesis lo llevaba a una contradicción, dedujo que su suposición era falsa y que por lo tanto los números reales comprendidos entre 0 y 1 no podían ser apareados con los números naturales, es decir, no son numerables.

Para hacer su demostración, Cantor utilizó el siguiente razonamiento:

Supongamos que existe una correspondencia uno a uno entre los números naturales y los números reales comprendidos entre 0 y 1. Veremos como hay un número entre 0 y 1 que no puede estar incluido en la correspondencia, es decir un número real al que no le corresponde un número natural.

| NUMEROS NATURALES | | NUMEROS REALES | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | <--------> | $.a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ | $a_6$ | $a_7$ | $a_8$ | ... |
| 2 | <--------> | $.b_1$ | $b_2$ | $b_3$ | $b_4$ | $b_5$ | $b_6$ | $b_7$ | $b_8$ | ... |
| 3 | <--------> | $.c_1$ | $c_2$ | $c_3$ | $c_4$ | $c_5$ | $c_6$ | $c_7$ | $c_8$ | ... |
| 4 | <--------> | $.d_1$ | $d_2$ | $d_3$ | $d_4$ | $d_5$ | $d_6$ | $d_7$ | $d_8$ | ... |
| 5 | <--------> | $.e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $e_4$ | $e_5$ | $e_6$ | $e_7$ | $e_8$ | ... |
| 6 | <--------> | $.f_1$ | $f_2$ | $f_3$ | $f_4$ | $f_5$ | $f_6$ | $f_7$ | $f_8$ | ... |
| 7 | <--------> | $.g_1$ | $g_2$ | $g_3$ | $g_4$ | $g_5$ | $g_6$ | $g_7$ | $g_8$ | ... |
| 8 | <--------> | $.h_1$ | $h_2$ | $h_3$ | $h_4$ | $h_5$ | $h_6$ | $h_7$ | $h_8$ | ... |
| . | <--------> | . | . | . | . | . | . | . | . | . |
| . | <--------> | . | . | . | . | . | . | . | . | . |
| . | <--------> | . | . | . | . | . | . | . | . | . |

**FIGURA (*)**

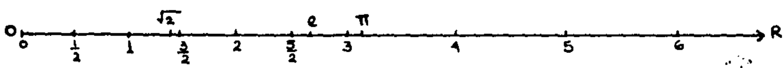
Llamemos a las cifras sucesivas del primer número real, expresado en forma decimal ilimitada, $a_1$, $a_2$, $a_3$, ..., las del segundo número $b_1$, $b_2$, $b_3$, ..., y así sucesivamente. La correspondencia entre los números tendrá la forma de la figura (*). Recordemos que en la parte derecha de la figura, estamos suponiendo que aparecen todos los números reales comprendidos entre 0 y 1, pero vamos a construir un número, que representaremos por $0.z_1\ z_2\ z_3\ z_4, \ldots$ , de la siguiente manera. A lo largo de la diagonal de la figura (*), elegimos para z1 una cifra diferente de a1, z2 diferente de b2, z3 diferente de c3, z4 diferente de d4, z5 diferente de c5 y asi sucesivamente.

Este número claramente está comprendido entre 0 y 1. Además no está comprendido en el cuadro de números reales de la figura (*), ya que difiere del primero en la primera cifra decimal, del segundo en la segunda cifra decimal, del tercero en la tercera cifra decimal y así sucesivamente. Por lo tanto a este nuevo número no le corresponde ningún número natural de la columna de la izquierda, y esto implica, que nuestra suposición de que existe una correspondencia uno a uno entre los números naturales y los números reales comprendidos entre 0 y 1 es falsa. Por lo tanto el número transfinito que representa la cardinalidad de los números reales comprendidos entre 0 y 1 es mayor que $\aleph_0$.

Le asignaremos a este nuevo número transfinito el símbolo $\alpha$ (Alpha). Podríamos sentir la tentación de identificarlo con $\aleph_1$ , el número transfinito mayor que $\aleph_0$. Quizás sea cierto que $\alpha$ y $\aleph_1$ son el mismo número, pero hasta ahora nadie ha podido demostrarlo. Dicho de otra manera, puede haber un número transfinito mayor que $\aleph_0$ y al mismo tiempo menor que $\alpha$ . Este problema está todavía sin resolver.

Para probar que el conjunto de los números reales positivos tiene el número transfinito $\alpha$ , recurriremos a una demostración geométrica que quizás sea más clara que las aritméticas algo abstractas, que hemos empleado hasta ahora.

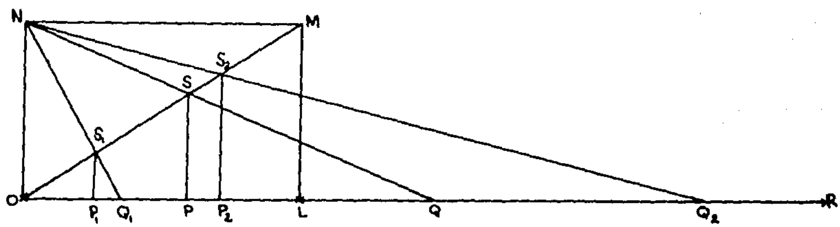
Todos sabemos que los números reales se pueden representar por medio de los puntos de una recta. Empleando una semirrecta, ya que sólo nos ocuparemos de los números positivos, podemos llamar al extremo O, y nos imaginaremos que la recta se extiende indefinidamente hacia la derecha, como se muestra en la figura:




De esta manera podemos asociar a cada número real r, un punto determinado de la semirrecta, por ejemplo, el que está a la distancia de r unidades de O (el punto O se asocia con el número 0). En realidad lo que estamos haciendo es establecer una correspondencia uno a uno entre los números reales y los puntos de la semirrecta.

Una vez establecida la correspondencia entre los números reales positivos y los puntos de la semirrecta, el problema de demostrar que todos los números reales positivos se pueden hacer corresponder uno a uno con los números reales entre 0 y 1, se reduce a demostrar que se puede establecer una correspondencia uno a uno entre todos los puntos de la semirrecta OR y los del intervalo entre 0 y 1.

Este último problema lo trataremos de la siguiente manera. Construyamos, como en la siguiente figura, el rectángulo O L M N sobre la semirrecta OR.

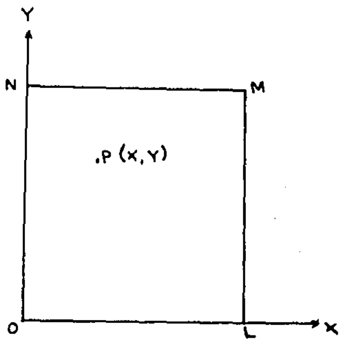



Hagamos que la longitud OL del rectángulo sea una unidad; la altura puede ser cualquiera. Sea P un punto cualquiera de OL. Trazamos por P una perpendicular a OL, que cortará la diagonal OM en S. Tracemos NS prolongándola hasta que corte a OR en Q. De este modo se empareja el punto P de OL con el punto Q de OR. Exactamente de la misma manera se empareja P1 con Q1, P2 con Q2 y así sucesivamente. Recíprocamente, dado el punto Q de OR, el punto P correspondiente de OL se encuentra sin más que unir Q con N y trazar la perpendicular a OL desde el punto S en que QN corta a OM. Es evidente que la correspondencia es uno a uno, ya que a cada punto de OL le corresponde uno y solo uno de OR y a cada punto de OR le corresponde uno y solo uno de OL.

Este razonamiento no sólo demuestra que el conjunto de todos los números reales positivos tiene el número transfinito $\propto$ , sino que descubre además una nueva y asombrosa paradoja, ya que acabamos de demostrar que !no hay más puntos que una semirrecta de longitud infinita, que es un segmento de una unidad de longitud!.

Si nos pusiéramos a buscar un número transfinito mayor que $\propto$ , quizás se nos podría ocurrir estudiar el conjunto de todos los puntos de un plano, ya que parece seguro que habrá más puntos en un plano que en una recta. Pues bien, demostraremos que esto no es cierto mediante una demostración muy sencilla.

Consideremos el cuadrado OLMN donde cada uno de sus lados tiene una unidad de longitud, y el segmento de recta OS también de una unidad de longitud, como se muestran en las siguientes figuras:





Demostraremos que a cada punto P del cuadrado le corresponde un punto Q del segmento unidad.

Sean (x, y) las coordenadas del punto P. Puesto que tanto x como y son menores que 1, se pueden expresar como decimales ilimitados de la siguiente manera:

$$x = 0.x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5\ x_6, \cdots ,$$
$$y = 0.y_1\ y_2\ y_3\ y_4\ y_5\ y_6 \cdots ,$$

Formaremos ahora con las cifras sucesivas de x y y el número

$$z = 0.\ x_1\ y_1\ x_2\ y_2\ x_3\ y_3\ x_4\ y_4\ x_5\ y_5,\ \ldots\ ,$$

(Por ejemplo si x = 0.23384345, ... y y = 0.77283541,... , entonces z = 0.2737328843354451, ..., ). Es claro que z siempre toma un valor entre 0 y 1, y por lo tanto se puede representar por un punto Q del segmento de recta OS, es decir, que dado un punto P del cuadrado, podemos determinar x e y y por tanto z, y por consiguiente sitúar el punto correspondiente a Q del segmento.

Este razonamiento nos muestra claramente que no hay más puntos en el cuadrado unidad que en el segmento unidad. Esta demostración se puede generalizar probando que hay tantos puntos en el segmento unidad como en un plano de extensión infinita. Inclusive, se puede llegar a demostrar que hay tantos puntos en un segmento unidad, como en la totalidad de un espacio de 3, 4, 5, ..., n, hasta $\aleph_0$ dimensiones (*).

El problema de encontrar un conjunto cuya cardinalidad sea mayor que el número transfinito $\alpha$ es bastante complicado como habremos notado, por lo tanto nos contentaremos con la afirmación, de que se ha demostrado que hay una infinidad de números transfinitos, y que se

---

(*) Estas demostraciones las hizo Cantor en el Siglo XIX.

pueden ordenar según sus magnitudes crecientes y también, que así como no hay un número natural que sea el último, o el más grande, tampoco hay un número transfinito último ni más grande. (*)

Antes de abandonar este tema de los números transfinitos, veremos unos resultados que se obtienen al hacer con ellos algunas operaciones aritméticas. Si n es un número natural finito cualquiera, y si $\aleph_0$ y $\propto$ son los números transfinitos que ya conocemos, por muy increíble que sea, las siguientes conclusiones son ciertas, como se puede demostrar.

$$\aleph_0 + n = \aleph_0$$
$$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$$
$$n \cdot \aleph_0 = \aleph_0$$
$$\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$$
$$(\aleph_0)^n = \aleph_0$$
$$(2)^{\aleph_0} = (\aleph_0)^{\aleph_0} = \propto$$
$$\propto + n = \propto$$
$$\propto + \aleph_0 = \propto$$
$$\propto + \propto = \propto$$
$$n\propto = \propto$$
$$\propto \cdot \propto = \propto$$
$$(\propto)^n = \propto$$

(*) Ibidem.

$$(\alpha)^{\aleph_0} = \alpha$$

$$(2)^{\alpha} = (\alpha)^{\alpha} = \text{otro número transfinito.}$$

Así pues, estas son unas cuantas de las cosas extravagantes que tiene el infinito. En el siguiente capítulo veremos que existen más pruebas, del hecho de que el infinito es uno de los enemigos más temibles para un matemático.

# CAPITULO V

## "Miscelánea de Paradojas"

# V.- MISCELANEA DE PARADOJAS

En este último capitulo veremos un compendio de paradojas relacionadas principalmente con la Trigonometría, la Geometría Analítica y el Cálculo Diferencial e Integral.

Para analizar estas paradojas, será necesario tener conocimientos matemáticos un poco más elevados que los que hemos utilizado hasta ahora. Sin embargo, como en los capitulos anteriores, haremos un estudio completo después de cada una de ellas mediante un comentario.

## 5.1.- GEOMETRIA Y TRIGONOMETRIA

**PARADOJA 1.-** Demostrar que 2 rectas no paralelas no se intersectan nunca.

**DEMOSTRACION.**

Sean a y b dos rectas no paralelas como se muestra en la figura i). Tracemos una tercera recta AB que forma ángulos iguales con a y b.

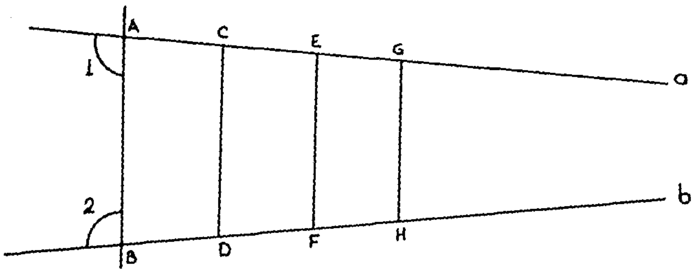



FIGURA i)

Es inmediato que puesto que los ángulos 1 y 2 son obtusos, a y b no pueden tener ningún punto en común a la izquierda de la transversal AB. Por lo tanto nos ocuparemos solamente de lo que ocurre a la derecha de AB.

Tomemos AC = BD = AB/2 . Los puntos C y D no pueden coincidir, como en la figura ii), porque si asi fuera, la suma de los dos lados del triángulo resultante sería igual al tercer lado.

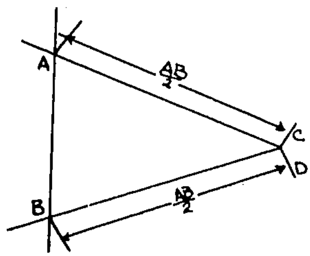



figura ii)

Menos todavía pueden tener los segmentos AC y BD algún otro punto en común, como el punto S de la figura iii), porque la suma de dos lados del triángulo ABS sería menor que el tercer lado.

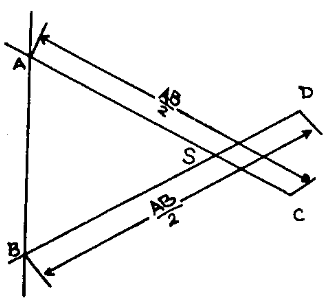



figura iii)

Tracemos ahora CD en la figura i) y tomemos CE = DF = CD/2. Similarmente se puede demostrar que los segmentos CE y DF no tienen ningún punto en común. Por lo tanto podemos trazar EF en la figura i), y formar EG = FH = EF/2, y demostrar que los segmentos EG y FH no tienen ningún punto en común. Y así sucesivamente. Puesto que este razonamiento se puede hacer indefinidamente, debemos concluir que las rectas a y b no se intersectaron nunca.

**COMENTARIO.-** Es obvio que la afirmación de que a y b "nunca" se intersectan es falsa.

Supongamos que en la figura i) de la demostración AB = 1. Llamémosle $\Theta$ a los ángulos iguales ABD y BAC. Puesto que AC y BD son iguales a 1/2, la proyección de AC o de BD sobre AB es $1/2 \cos \Theta$. Como CD es paralela a AB, es de igual longitud que su proyección sobre AB. Por lo tanto es fácil ver que $CD = 1 - \cos \Theta$. Análogamente $EF = (1 - \cos \Theta)^2$, $GH = (1 - \cos \Theta)^3$, ...,. En general la longitud de la n - ésima línea trazada entre a y b es igual a $(1 - \cos \Theta)^n$, y como este proceso se realiza "indefinidamente", n tiende a infinito. Además puesto que $0 < \cos \ < 1$, tenemos que $\lim_{n \to \infty} (1 - \cos \Theta)^n = 0$

Por lo tanto a y b tienen que intersectarse.

**PARADOJA 2.-** Demostrar que todos los triángulos son isósceles.

**DEMOSTRACION.-** Sean ABC un triángulo cualquiera como en la figura a) y sean a, b y c los lados opuestos a los ángulos A, B y C respectivamente. Prolonguemos BC una distancia **b** hasta P, y AC una distancia **a** hasta Q y tracemos AP y BQ.

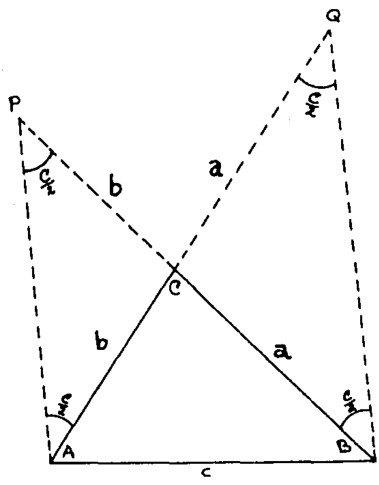



Figura a)

En el triángulo APC, AC = CP, y por lo tanto el ángulo CAP es igual al ángulo CPA e igual a la mitad del ángulo

C, (C/2). Análogamente ∢ CQB = ∢ CBQ = 1/2 ∢ C.(*) Si ahora aplicamos la "Ley de los Senos" a los triángulos ABP y ABQ tendremos:

Respecto al triángulo ABP

$$\frac{BP}{AB} = \frac{a + b}{c} = \frac{\text{Sen } (A + C/2)}{\text{Sen } (C/2)} \quad \text{------>} \ (1)$$

Respecto al triángulo ABQ.

$$\frac{AQ}{AB} = \frac{a + b}{c} = \frac{\text{Sen } (B + C/2)}{\text{Sen } (C/2)} \quad \text{------->} \ (2)$$

Por lo tanto, de (1) y (2)

$$\frac{\text{Sen } (A + C/2)}{\text{Sen } (C/2)} = \frac{\text{Sen } (B + C/2)}{\text{Sen } (C/2)} \quad \text{------>} \ (3)$$

O sea

$$\text{Sen } (A + C/2) = \text{Sen } (B + C/2) \quad \text{-------->} \ (4)$$

De donde

$$A + C/2 = B + C/2 \quad \text{-------->} \ (5)$$

(*) El símbolo ∢ significa ángulo.

Y por tanto

$$A = B \qquad \text{--------->} \ (6)$$

Y esto implica que a = b y el triángulo es isósceles.

**COMENTARIO.-** Es evidente que nuestra conclusión es falsa. En (4) y (5) llegamos a la conclusión de que por ser

$$\text{Sen } (A + C/2) = \text{Sen } (B + C/2)$$

Es $$A + C/2 = B + C/2.$$

Esta conclusión no es necesariamente cierta. Es decir que si Sen x = Sen y, x no es necesariamente igual a y, sino que puede ser igual al suplemento de y.

Esto es una consecuencia de que

$$\text{Sen } y = \text{Sen } (180^{\circ} - y)$$

Así, en lugar de (5) podemos tener

$$A + C/2 = 180^{\circ} - (B + C/2)$$

y por tanto $A + B + C = 180^{\circ}$

lo cual es cierto y no nos lleva a ninguna falsedad.

**PARADOJA 3.-** Demostrar que 1 = 2

Demostración. Tenemos, para cualquier valor de x,

$$\text{Cos}^2 x = 1 - \text{Sen}^2 x \qquad \text{---->} \ (1)$$

$$(\mathrm{Cos}^2x\ )^{3/2} = (1 - \mathrm{Sen}^2x)^{3/2} \quad \text{---->} \ (2)$$

$$\mathrm{Cos}^3x = (1 - \mathrm{Sen}^2x)^{3/2} \quad \text{---->} \ (3)$$

$$\mathrm{Cos}^2x + 3 = (1 - \mathrm{Sen}^2x)^{3/2} + 3 \quad \text{---->} \ (4)$$

$$(\cos^3x + 3)^2 = [(1 - \mathrm{Sen}^2x)^{3/2} + 3]^2 \quad \text{---->} \ (5)$$

Si le damos a x el valor de ¶/2, entonces Cos x = 0 y Sen x = 1, y la igualdad (5) se reduce a

$$9 = 9$$

Pero si x = ¶, Cos x = -1 y Sen x = 0, y la igualdad (5) se reduce a $2^2 = 4^2 \iff 2 = 4 \iff 1 = 2$

**COMENTARIO.-** Este es un caso en el que se deja de tener en cuenta el doble signo al extraer una raiz cuadrada. Al extraer raiz cuadrada en el paso (2) el primer miembro de (3) debería ser $\pm \mathrm{Cos}^3x$, en cuyo caso (5) sería,

$$(\pm \cos^3 x + 3\ )^2 = [(1 - \mathrm{Sen}^2x)^{3/2} + 3]^2 \qquad (5')$$

El valor negativo de $\pm \mathrm{Cos}^3x$ se debe tomar cuando x = ¶. Entonces (5') se reduce entonces $4^2 = 4^2$, o sea que 16 = 16, y no hay ninguna contradicción.

**PARADOJA 4.-** Demostrar que Sen x = 0 para cualquier valor de x.

**DEMOSTRACION.-**

Tenemos que la serie de Sen x contiene únicamente las potencias impares de x, es decir, que Sen x se puede escribir en la forma:

$$\text{Sen } x = a_1 x + a_2 x^3 + a_3 x^5 + a_4 x^7 + \ldots \qquad (1)$$

Los coeficientes $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$, ... se pueden determinar de la siguiente manera. Sabemos que

$$\text{Sen}^2 x = 1 - \text{Cos}^2 x$$

de donde extrayendo raíz cuadrada obtenemos

$$\text{Sen } x = (1 - \text{Cos}^2 x)^{1/2} \qquad \text{---->} \ (2)$$

Puesto que $\text{Cos}^2 x \leq 1$ para cualquier valor de x, el segundo miembro de (2) se puede desarrollar mediante la serie binomial (*) resultando:

$$\text{Sen } x = 1 - 1/2 \text{ Cos}^2 x - 1/8 \text{ Cos}^4 x - 1/16 \text{ Cos}^6 x - \ldots \ (3)$$

---

(*) Si n es un número real no entero positivo y distinto de cero, entonces el teorema del Binomio da origen a la siguiente serie llamada "serie Binomial"

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} x^3 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{r!} x^r + \ldots$$

Tomada de la Sección 13.9 del libro de "College Algebra" de Richard Heineman.

Por otra parte tenemos que el desarrollo en serie de Cos x, contiene solamente las potencias pares de x, por lo tanto es inmediato que el segundo miembro de (3) contiene solamente potencias pares de x, es decir, que los coeficientes de las potencias impares de x en (3) son todos iguales a cero. Esto implica que todos los coeficientes $a_1$, $a_2$ $a_3$ $a_4$, ..., de la expresión (1) son todos cero, y por lo tanto Sen x = 0 para todos los valores de x.

**COMENTARIO.-** El error cometido es el mismo que el de la paradoja 3. Al extraer raiz cuadrada las expresiones (2) y (3) debieron ser respectivamente.

$$\text{Sen } x = \pm \, (1 - \text{Cos}^2 x)^{1/2}$$

$$\text{Sen } x = \pm \, (1 - 1/2 \text{ Cos}^2 x - 1/8 \text{ Cos}^4 x - 1/16 \text{ Cos}^6 x \ldots)$$

Con el doble signo, Sen x ya no es una función "par".(*)

## 5.2.- GEOMETRIA ANALITICA

**PARADOJA 1.-** Demostrar que ¶ = 8/3

Demostración.- Los dos teoremas que enunciaremos a continuación, son pertenecientes a la teoría de secciones cónicas y son muy conocidos.

---

(*) Una función f(x) es par si f(x) = f(-x), para toda x.

**TEOREMA 1.-** El área de la semielipse de la figura i) es ¶ ab/2, siendo 2a y 2b el eje mayor y el eje menor de la elipse respectivamente.

**TEOREMA 2.-** El área del segmento parabólico de la figura ii) segmento limitado por una cuerda perpendicular al eje de la parábola, es 2/3 de las del rectángulo circunscrito.

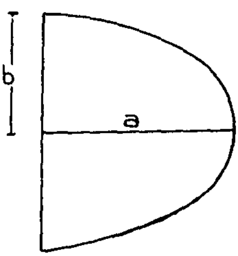



**figura i)**

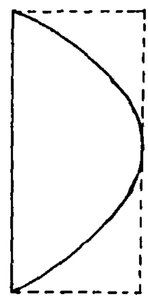


**figura ii)**

Si hacemos que el eje mayor de la elipse aumente infinitamente, la elipse pasa a ser una parábola, y la semielipse se transforma en un segmento parabólico. Pero los teoremas 1 y 2 son ciertos para cualquiera que sean las dimensiones de las curvas. Por lo tanto,

$$\frac{\P\ ab}{2} = \frac{2}{3} \quad (a\ .\ 2b)$$

$$= \frac{4}{3}\ ab$$

$$\therefore\ \P/2 = 4/3, \text{ o sea, } \P = 8/3$$

**COMENTARIO.-** Este es un caso en que el infinito no ha sido utilizado correctamente. Si se hace crecer sin límite el eje mayor de la elipse, el área en cuestión (llámese semielipse o segmento parabólico) se hace infinita y la relación.

$$\frac{\P\ ab}{2} = \frac{2}{3} \quad (a\ .\ 2b)$$

no tiene sentido.

**PARADOJA 2.-** Demostrar que un diámetro intersecta a una circunferencia en un solo punto.

Demostración. Las ecuaciones.

$$x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \qquad \text{---->}\ (1)$$

y

$$y = \frac{2t}{1 + t^2} \qquad \text{----->}\ (2)$$

Son las paramétricas de una circunferencia de radio 1 y centro en el origen. Esto se comprueba fácilmente, elevando al cuadrado y sumando las ecuaciones (1) y (2), obteniéndose $x^2 + y^2 = 1$

Consideremos la intersección de la circunferencia con el eje x lo cual equivale a sustituir $y = 0$ en (2). La ecuación (2) se reduce entonces a $t = 0$, que sustituida en (1), resulta $x = 1$. Por lo tanto el eje x corta a la circunferencia solamente en el punto (1,0).

Pero mediante una traslación de ejes, toda circunferencia dada se puede transformar en una circunferencia de radio 1, y cualquiera de los diámetros de la misma se puede hacer coincidir con el eje x. Por lo tanto, un diámetro cualquiera de cualquier circunferencia la intersecta solamente en un punto.

**COMENTARIO.-** El error está en que $y = 0$ no solo cuando $t = 0$ sino también cuando t tiende a infinito. Más concretamente, las ecuaciones (1) y (2) resultan

$$\lim_{t \to \infty} x = -1 \qquad \lim_{t \to \infty} y = 0$$

Esto explica el segundo punto en que el eje x corta a la circunferencia, es decir el punto (-1,0).

### 5.3.- CALCULO DIFERENCIAL

**PARADOJA 1.-** Demostrar que dos números cualesquiera son iguales entre si.

Demostración.- Partiremos de la relación.

$$x = a - b \qquad \text{---->} \ (1)$$

multiplicando ambos miembros de (1) por x tenemos

$$x^2 = ax - bx \qquad \text{---->} \ (2)$$

y si elevamos al cuadrado ambos miembros de (1)

$$x^2 = a^2 - 2ab + b^2 \qquad \text{---->} \ (3)$$

de (2) y (3) tenemos,

$$ax - bx = a^2 -2ab + b^2$$

es decir

$$ax - a^2 + ab = bx - ab + b^2,$$

o sea,

$$a(x - a + b) = b(x - a + b) \text{----->} \ (4)$$

Si dividimos ambos miembros de (4) por el factor $(x - a + b)$ obtenemos $a = b$. Pero, evidentemente, ese razonamiento es incorrecto ya que por ser $x = a - b$, hemos estado dividiendo por cero. En vez de eso escribiremos:

$$a \frac{(x - a + b)}{(x-a+b)} = b \frac{(x - a + b)}{(x-a+b)} \quad \text{----->} \ (5)$$

En este caso puesto que x = a-b, la ecuación (5) se reduce a a(0/0) = b(0/0). Para hallar el verdadero valor de esa expresión recurriremos a un artificio que se utiliza frecuentemente para ese efecto. Es decir, hacemos uso del hecho que

$$\lim_{x \to \alpha} \frac{f\ (x)}{g\ (x)} = \lim_{x \to \alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad (*)$$

Derivando los numeradores y los denominadores de las fracciones de (5) obtenemos:

a(1/1) = b (1/1)

o sea, a = b

**COMENTARIO.-** El Teorema que dice:

$$\lim_{x \to \alpha} \frac{f\ (x)}{g\ (x)} = \lim_{x \to \alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

No está bien empleado en este problema. La x en este caso no es una variable, sino una constante, ya que al principio supusimos x = a - b.

---

(*) $\lim_{x \to \alpha} \frac{f\ (x)}{g\ (x)} = \lim_{x \to \alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ Por la regla de L'Hôpital

**PARADOJA 2.-** Demostrar que todas las fracciones propias tienen el mismo valor.

Demostración: Sean m y n dos enteros cualesquiera, siendo n menor que m. Entonces por división ordinaria,

$$\frac{1 - x^n}{1 - x^m} = 1 - x^n + x^m - x^{n+m} + x^{2m} - \cdots \text{------>(1)}$$

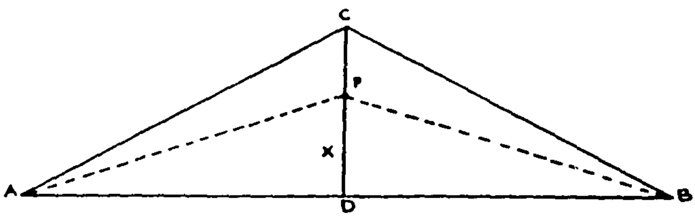
Si x = 1, el primer miembro de la expresión (1) toma la forma indeterminada 0/0. Podemos evitar ésta dificultad derivando numerador y denominador antes de tomar el límite. Tenemos entonces.

$$\lim_{x \to 1} \frac{1 - x^n}{1 - x^m} = \lim_{x \to 1} \frac{- n\, x^{n-1}}{- m\, x^{m-1}} = \frac{n}{m}$$

Pero el límite del segundo miembro de (1) cuando x tiende a 1, es 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + ... . Por lo tanto, al ser n/m igual a una expresión independiente de n y de m, entonces tiene que tener siempre el mismo valor.

**COMENTARIO.-** La dificultad aquí no está en la aplicación de la regla de L'Hôpital, sino en la expresión a la que se reduce el segundo miembro de (1) cuando se da a x el valor de 1, es decir, en la serie 1-1+1-1+1-1+ ... Razonamos que esta serie tiene siempre el mismo valor, dándole a la palabra "valor" el significado de suma de la serie. Pero ésta es oscilante y por lo tanto no tiene una suma definida. Por tanto nuestra conclusión es incorrecta.

**PARADOJA 3.-** Consideremos el triángulo isóscelesABC de la siguiente figura:




Supongamos que AB tiene 12 centímetros de largo y que la altura CD que es perpendicular a AB es de 3 centímetros. Propongámonos hallar el punto P de CD para el cual la suma de las distancias de P a los tres vértices es mínima.

Si le llamamos S a la suma de las distancias de P a los puntos A, B y C, y x a la longitud DP, el problema se reduce a hallar el valor de x que hace mínima a S. Como $S = CP + AP + PB$ y además, $CP = 3 - x$, $AP = PB = x^2+36$ (por el Teorema de Pitágoras). Entonces.

$$S = 3 - x + 2 \quad x^2 + 36$$

y

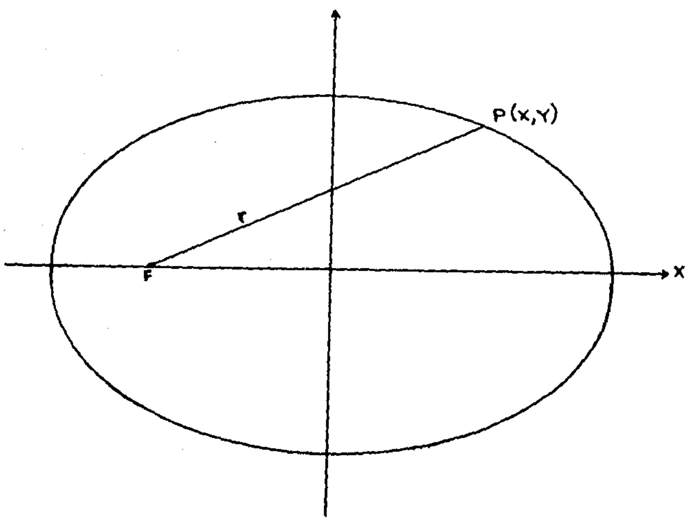
$$\frac{dS}{dx} = -1 + \frac{2x}{x^2 + 36}$$

Igualando a cero $dS/dx$ resulta que $x = 2\sqrt{3} = 3.464$, y para este valor de x, P queda fuera del triángulo, sobre la prolongación de DC. Por lo tanto, no hay ningún punto de CD para el cual S sea mínima. Sin embargo, el problema parecía o parece muy sencillo. ¿Dónde está nuestro error?.

**COMENTARIO.-** Si P está sobre CD, los valores que puede tomar x deben estar comprendidos entre 0 y 3. Por lo tanto el valor de x para el cual S es mínima no puede encontrarse haciendo $dS/dx$ igual a cero. Para valores de x comprendidos en el intervalo de 0 a 3, S tiene un mínimo cuando $x = 3$. Esto se puede comprobar analizando S o su gráfica para x entre 0 y 3 inclusive. Es cierto que la función S tiene un mínimo para $x = 2\sqrt{3}$, pero en este caso la distancia CP, es decir, $3-x$ es negativa. El resultado correcto pues, ocurre cuando x es 3, en donde S será $6\sqrt{5} = 13.416$.

**PARADOJA 4.-** Demostrar que toda elipse es una circunferencia.

Demostración.- Llamemos a y e al semieje mayor y a la excentricidad de la elipse de la siguiente figura:




Sabemos que la longitud del radio vector trazado desde el foco F a un punto P cualquiera de la elipse está dada por la expresión.

$$r = a + ex$$

Como $dr/dx = e$, y puesto que no hay valores de x para los cuales $dr/dx$ sea cero, r no tiene ni máximo ni mínimo. Pero la única curva cerrada en la cual el radio vector no tiene máximo ni mínimo es la circunferencia. Por lo tanto, toda elipse es una circunferencia.

**COMENTARIO.-** Es similar a la paradoja anterior, la 3. La relación entre r y x es lineal, de tal manera que es evidente que dr/dx nunca se anulará. Pero el intervalo de valores que puede tomar x va de **-a**, a **a**. Y es fácil ver que r tiene un máximo cuando x = a, y un mínimo cuando x = -a.

### 5.4.- CALCULO INTEGRAL

**PARADOJA 1.-** Demuestre que 0 = 1

Demostración.- Consideremos la integral.

$$I = \int 1 / x \, dx$$

Integrando por partes tenemos:

$$I = \int 1 \cdot (1/x) \, dx$$

sea $u = 1/x$ y $dv = 1\,dx$

$\therefore du = -1/x^2\,dx \qquad v = x$

ó sea que,

$$I = x\,(1/x) - \int x\,(-1/x2)\,dx$$

$$= 1 + \int 1/x \, dx$$

$$= 1 + I$$

por lo tanto 0 = 1

**COMENTARIO.-** El error ocurre al omitir la constante para integrales indefinidas. El error desaparece si definimos

$$I = \int_a^b 1/x \, dx$$

Entonces

$$I = x\ (1/x) \Big|_a^b - \int_a^b x\ (-1/x2)\ dx$$

$$= 1 \Big|_a^b - \int_a^b 1/x\ dx$$

$$= 0 - I$$

Por lo tanto $I = I$

(Notemos que $1 \Big|_a^b = 0$, ya que la función 1 vale 1 cuando $x = b$ y también cuando $x = a$ ).

**PARADOJA 2.-** Demuestre que $2 = 1$

Demostración.- Sea $f(x)$ una función dada. Entonces tenemos:

$$\int_1^2 f(x)\ dx = \int_0^2 f(x)\ dx - \int_0^1 f(x)\ dx.$$

Si escribimos $x = 2y$ en la primera integral del lado derecho tenemos:

$$\int_0^2 f(x)\ dx = 2\int_0^1 f(2y)\ dy = 2\int_0^1 f(2x)\ dx.$$

Supongamos, en particular, que la función f(x) es tal que $f(2x) = 1/2\ f(x)$ para todo valor de x. Entonces tenemos:

$$\int_1^2 f(x)\ dx = 2\int_0^1 1/2\ f(x)\ dx - \int_0^1 f(x)\ dx$$
$$= 0$$

Ahora,, la relación $f(2x) = 1/2\ f(x)$, la satisface la función $f\ (x) = 1/x$

Por lo tanto $\int_1^2 1/x\ dx = 0$

ó sea que, $Ln\ 2 = 0$

o $2 = 1$ , tomando exponencial en ambos lados.

**COMENTARIO.-** El error ocurre ya que $\int_0^1 f(x)\ dx$ no existe para cuando $f(x) = 1/x$. Veremos cómo evitar este error utilizando la misma integral. Tenemos que ES válido para cualquier $\delta > 0$ que:

$$\int_1^2 dx/x = \int_\delta^2 dx/x - \int_\delta^1 dx/x \qquad (1)$$

Si escribimos $x = 2y$ en la primera integral del lado derecho ésta integral será:

$$\int_{\frac{1}{2}\delta}^1 2dx/2x = \int_{\frac{1}{2}\delta}^1 dx/x$$

Por lo tanto podemos escribir (1) como:

$$\int_1^2 dx/x = \int_{\frac{1}{2}\delta}^{1} dx/x - \int_{\delta}^{1} dx/x$$

$$= \int_{\frac{1}{2}\delta}^{\delta} dx/x$$

Ahora como $\delta > 0$

$$\int_{\frac{1}{2}\delta}^{\delta} dx/x = \operatorname{Ln}x \Big|_{\frac{1}{2}\delta}^{\delta}$$

$$= \operatorname{Ln}\delta - \operatorname{Ln}\tfrac{1}{2}\delta$$

$$= \operatorname{Ln}\left[\frac{\delta}{\frac{1}{2}\delta}\right]$$

$$= \operatorname{Ln}2$$

y por lo tanto $\int_1^2 dx/x = \operatorname{Ln}2$

**PARADOJA 3.-** Demostrar que Sen x = 0, para todos los valores de x.

Demostración

Sabemos que Sen 0 = 0, y que Sen 2n ¶ = 0 para todos los valores enteros de n. Por lo tanto, el área limitada para la curva y = Senx, y el eje x entre x = 0 y x = 2n ¶ está dada por la integral definida de Sen x desde 0 hasta 2n ¶. Esto es,

$$A = \int_0^{2n¶} \operatorname{Sen} x \, dx$$

$$= \left[-\text{Cos } x\right]\Big|_{o}^{2n¶}$$

$$= -\ [\text{Cos } 2n\ ¶ - \text{Cos } 0]$$

$$= -1 + 1 = 0$$

Por si el área entre la curva y = Sen x y el eje x es igual a cero, la curva debe coincidir con el eje. Por lo tanto Sen x = 0 para cualquier valor de x.

**COMENTARIO.-** Es cierto que para todos los valores enteros de n, Sen 2n ¶ = 0, pero también es cierto que Sen n ¶ = 0. El área limitada por y = Sen x y el eje x es igual numéricamente al área limitada por la curva y el eje x entre ¶ y 2 ¶ , pero esas dos áreas son de signo opuesto. Es fácil ver que el área obtenida al integrar de 0 a 2n ¶ consta de igual número de partes positivas que negativas, y que la suma de esas partes es cero, pero no implica ésto que la curva coincida con el eje x.

**PARADOJA 4.-** Demostrar que 1 = -1

Demostración

Tenemos que $\int dx/x = \int -dx/-x$ (1)

Integrando en ambos miembros de (1) tenemos

$$\text{Ln}x = \text{Ln}\ (-x) \qquad (2)$$

ó sea que $x = -x$

de donde $1 = -1$

**COMENTARIO.-** En este caso el error ocurre al omitir la constante de integración. Si dos funciones son iguales, sus integrales no necesariamente son iguales, sino que pueden diferir en una constante. La igualdad (2) debería ser:

$$\text{Ln } x = \text{Ln } (-x) + C$$

El segundo miembro de ésta relación se reduce al primero si tomamos para valor de C, Ln (-1).

Es decir que

$$\text{Ln } (-x) + \text{Ln } (-1) = \text{Ln } [(-x)\ (-1)]$$

$$= \text{Ln } x$$

**PARADOJA 5.-** Demostrar que $\text{Tan } x = \pm\, i$ para todos los valores de x .

Demostración.- Consideremos la integral

$$I = \int \text{Sen } x \text{ Cos } x \, dx$$

Puesto que Cos x dx se puede escribir como d(Sen x), tenemos

$$I = \int \text{Sen } x \, d(\text{Sen } x) = 1/2 \text{ Sen}^2 x \qquad (1)$$

Y como también Sen x dx se puede escribir como - d(Cos x), tenemos:

$$I = - \int \text{Cos } x \, d(\text{Cos } x) = - 1/2 \text{ Cos}^2 x \qquad (2)$$

De (1) y (2), tenemos

$$\text{Sen}^2 x = - \text{Cos}^2 x \qquad (3)$$

Dividiendo ambos miembros de (3) por $\text{Cos}^2 x$, obtenemos $\text{Tan}^2 x = -1$

Por lo tanto

$$\text{Tan } x = \pm \sqrt{-1} = \pm i$$

**COMENTARIO.-**. Es similar a la paradoja anterior. Sustituyendo $(1 - \text{Cos}^2 x)$ por $\text{Sen}^2 x$ en (1) tenemos:

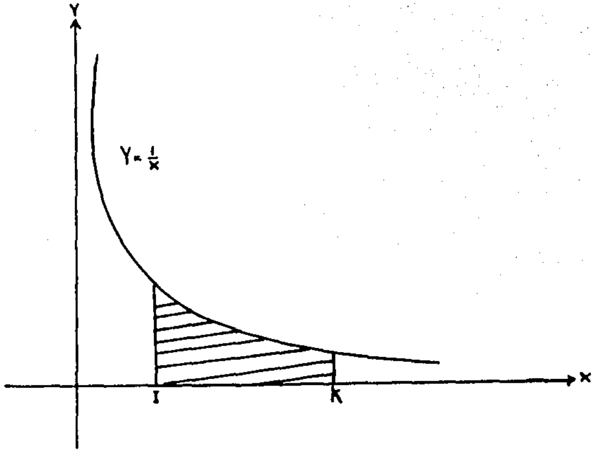
$$I = 1/2 \ (1 - \text{Cos}^2 x)$$

$$= 1/2 - 1/2 \text{ Cos}^2 x$$

Este resultado se diferencia del valor de I dado en (2) sólo por la constante 1/2.

**PARADOJA 6.-** Demostrar que una superficie infinita puede generar un sólido de revolución de volumen finito.

Demostración:




Consideremos la superficie limitada por el eje X y la curva Y = 1/x desde x = 1 hasta x = k. El valor de esta área, que es función de k viene dado por la integral:

$$A(k) = \int_{1}^{k} 1/2 \, dx = Lnx \Big|_{1}^{k} = \text{Ln } k \text{ unid. de superficie}$$

Si giramos esta superficie alrededor del eje x, dá origen a un sólido cuyo volumen es:

$$V(k) = ¶ \int_{1}^{k} dx/x^2 = -¶/x \Big|_{1}^{k} = ¶ \; (1 - 1/k) \text{ unid. de vol.}$$

Por lo tanto si K tiende a infinito tenemos:

$$A(k) = \lim_{K \to \infty} (\text{Ln } k) = \infty$$

Mientras que

$$V(k) = \lim_{k \to \infty} [\,\P\,(1 - 1/k)] = \P \text{ unid. de vol.}$$

**COMENTARIO.-** Este razonamiento no es erróneo. El área que queda bajo la curva la genera la ordenada $1/x$. Al crecer $x$ sin límite, $1/x$ tiende a cero, pero tan despacio que el área total es infinita. Por otra parte, el volumen, se engendra por la sección transversal del sólido, que es proporcional a $1/x^2$. Al tender $x$ a infinito la cantidad $1/x^2$ tiende a cero mucho más rápidamente que $1/x$, con suficiente rapidez como para que el volumen total sea finito. Esto es similar al hecho de que la serie

$$1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + \ldots$$

diverge mientras que la serie

$$1 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 + 1/5^2 + \ldots$$

es convergente.

## 5.5.- NUMEROS COMPLEJOS

**PARADOJA 1.**-Demostrar que $\pi = 0$

Demostración:

Tenemos que para todos los valores de ,

$$\text{Cos}\,\theta = \text{Cos}\,(2\pi + \theta)$$

$$\text{Sen}\,\theta = \text{Sen}\,(2\pi + \theta)$$

Por lo tanto

$$\text{Cos}\,\theta + i\,\text{Sen}\,\theta = \text{Cos}\,(2\pi + \theta) + i\,\text{Sen}\,(2\pi + \theta)$$

y $(\text{Cos}\,\theta + i\,\text{Sen}\,\theta)^{i} = [\text{Cos}\,(2\pi + \theta) + i\,\text{Sen}\,(2\pi + \theta)]^{i}$ (1)

Y como, según la fórmula de De Moivre, $(\text{Cos}\,x + i\,\text{Sen}\,x)^n = r^n\,(\text{Cos}\,nx + i\,\text{Sen}\,nx)$, y para $r = 1$, la igualdad (1) se puede escribir en la forma

$$\text{Cos}\,i\theta + i\,\text{Sen}\,i\theta = \text{Cos}\,i(2\pi + \theta) + i\,\text{Sen}\,i(2\pi + \theta) \quad (2)$$

Aplicando la fórmula de Euler, $e^{ix} = \text{Cos}\,x + i\,\text{Sen}\,x$, a ambos miembros de (2), obtenemos:

$$e^{-\theta} = e^{-2\pi - \theta}$$

Dividiendo ambos miembros de esta expresión por $e^{-\theta}$ tenemos,

$$e^{-2\P} = 1$$

Pero $e^{x}$ tiene el valor de 1 sólo cuando $x = 0$, y por lo tanto $2\,\P = 0$, o sea que $\P = 0$.

**COMENTARIO.-** La fórmula de De Moivre

$$(\text{Cos } x + i \text{ Sen } x)^{n} = r^{n} (\text{Cos } nx + i \text{ Sen } nx)$$

Sólo es válida para valores reales de n. En la paradoja considerada se supuso incorrectamente que éste teorema podía aplicar cuando n tiene el valor de $i$. Además es incorrecto que $e^{x}$ adquiera el valor de 1 sólo cuando x sea cero. Esto es cierto para los valores reales de x, pero no para valores complejos. Para comprobar ésta afirmación sustituyamos en la fórmula de Euler.

$$e^{ix} = \text{Cos } x + i \text{ Sen } x$$

El valor de $x = 2n\,\P$. De inmediato se puede ver que $e^{2n\P i}$ tiene el valor de 1 para todos los valores enteros de n.

**PARADOJA 2.-**

Demostrar que $-1 = 1$

Demostración:

Sea x la solución de la ecuación $e^x = -1$. Elevando al cuadrado ambos miembros tenemos $e^{2x} = 1$. Pero, según acabamos de notar, $e^{2x}$ vale 1 sólo cuando 2x vale cero. Por lo tanto x = 0. Sustituyendo éste valor en la ecuación dada tenemos que $e^0 = -1$. Pero todo número elevado a la potencia de cero es 1. En particular $e^0 = 1$. Por lo tanto 1 = -1.

**COMENTARIO.-** Como ya vimos en el comentario de la paradoja 1, la ecuación $e^{2x} = 1$ no implica que 2x sea igual a cero y por lo tanto x valga cero. Esto sólo se cumple para cuando x toma valores reales, no así para valores complejos.

**PARADOJA 3.-**

Demostrar que -1 = 1

Demostración:

Consideremos la ecuación $(-1)^2 = 1$. tomando logaritmo natural en ambos miembros, $\text{Ln } (-1)^2 = \text{Ln}(1) = 0$. Pero $\text{Ln } (-1)^2 = 2 \text{ Ln } (-1)$. Por lo tanto $2 \text{ Ln}(-1) = 0$, y $\text{Ln } (-1) = 0$ y por consiguiente $\text{Ln } (-1) = \text{Ln } (1)$, o sea que $-1 = 1$.

**COMENTARIO.-** Esta paradoja es el mismo razonamiento erróneo que en la paradoja 2 pero en forma logarítmica.

Además Ln(-1) no está definido ya que el dominio de la función Ln x son todos los números reales positivos.

# CONCLUSIONES

En nuestra vida cotidiana es frecuente que tomemos decisiones equivocadas respecto a un problema. Generalmente esto nos ocurre por hacer juicios precipitados del problema sin tener fundamentos. Un problema, sea o no matemático, es muy importante analizarlo detalladamente, paso por paso, por muy insignificante que parezca éste. Hacer esto nos permitirá ser mas eficientes al solucionarlo. Nunca debemos de sobreestimar o subestimar un problema. Muchas veces tenemos el error de pensar que un problema es imposible de resolver cuando en realidad es muy fácil ó pensar que es fácil cuando en realidad es muy complicado. Siempre es recomendable analizar el problema antes de hacer algún juicio.

Como ya hemos visto en el contenido de esta tésis, en las matemáticas, nos es difícil que lleguemos a soluciones equivocadas o contradictorias en un problema. Y a veces llegamos a soluciones correctas a base de procedimientos incorrectos. Esto ocurre principalmente por olvidar o aplicar erróneamente las propiedades o teoremas ya probados en esta ciencia. En las matemáticas, "El fin no justifica los medios". Es sumamente importante que al aplicar un resultado ya establecido, tengamos presente las restricciones y limitaciones de éste. No tomar en cuenta esto, nos lleva a conclusiones equivocadas o contradictorias y de aquí que surgen algunas paradojas.

# BIBLIOGRAFIA

* MATEMATICAS E IMAGINACION
Autor: Edward Kasner y James Newman
Editorial: CECSA
Primera Edición en Español 1972
303 Páginas.

* FALLACIES IN MATHEMATICS
Autor: E. A. Maxwell, $P_H$. D.
Editorial: Cambridge University Press
Editado en 1959
95 Páginas.

* PARADOJAS MATEMATICAS
Autor: Eugene P. Northrop
Editorial: VTEHA
Editado en 1981
355 Páginas.

* AHA! GOTCHA. PARADOXES TO PUZZLE AND DELIGHT
Autor: Martin Gardner
Editorial: W. H. Feeman and Company
Editado en 1982
164 Páginas.

* MATEMATICAS RECREATIVAS
Autor: Y. Perelman
Editorial: Enciclopedias Martínez Roca
Tercera Edición 1972
356 Páginas.

* DIVERTIMIENTOS LOGICOS Y MATEMATICOS
Autor: Mariano Mataix
Editorial: Publicaciones Marcombo, S.A.
Editado en 1983
94 Páginas.

* JUEGOS MENTALES
Autor: Antonio Lamar
Editorial: Grupo Editorial Sayrols
10ª Edición 1985
275 Páginas.

* CALCULUS VOLUMEN 1
  Autor: Tom M. Apostol
  Editorial: Reverté
  2da. Edición 1980
  813 Páginas.

* CALCULUS VOLUMEN 2
  Autor: Tom M. Apostol
  Editorial Reverté
  2da. Edición 1980
  813 Páginas.

* COLEGE ALGEBRA
  Autor: Richard Heineman
  Editorial: McGraw-Hill
  Editado en 1973
  341 Páginas.