

01180

1
24

SEPARACION DE LA CAPA LIMITE POR
EFECTOS TERMICOS

FEDERICO MENDEZ LAVIELLE

TESIS DOCTORAL

Presentada a la División de Estudios de Posgrado
de la

FACULTAD DE INGENIERIA

de la

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

como requisito para obtener

el grado de

DOCTOR EN INGENIERIA

(MECANICA)

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

CIUDAD UNIVERSITARIA, D. F., noviembre de 1991

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE

	página
RESUMEN	(i)
NOMENCLATURA	(v)
I INTRODUCCION	1
II ANTECEDENTES HISTORICOS	11
2.1. Introducción	11
2.2. Flujo Externo	15
2.3. Comentarios Finales	21
III ECUACIONES DE MOVIMIENTO	24
3.1. Introducción	24
3.2. Consideraciones Generales	25
3.3. El Fracaso de la Teoría Clásica	35
3.4. La Estructura de las tres Capas	43
a. Estructura de la Capa Intermedia	46
b. Estructura de la Capa Superior	49
c. Estructura de la Capa Inferior	52
d. Modelo Final para las Ecuaciones de la Capa Inferior	57

IV	ANALISIS LINEAL	61
	4.1. Planteamiento	61
	4.2. Aplicación de la Transformada Directa de Fourier	66
	4.3. Solución Lineal de Orden θ_w	68
	4.4. Solución Lineal de Orden θ_w^2	72
V	ANALISIS NO LINEAL	78
	5.1. Introducción	78
	5.2. Generalidades sobre el Esquema Numérico	79
	5.3. Formulación en Diferencias Finitas de las Ecuaciones Parabólicas para la Capa Inferior	82
	5.4. Discretización de la Ley de Interacción (Integral de Hilbert)	90
VI	RESULTADOS Y CONCLUSIONES	93
	REFERENCIAS	114
	APENDICE	120

NOMENCLATURA

$A(\bar{x})$	espesor de desplazamiento adimensional
$A_1(\bar{x})$	función de Airy
$\hat{A}_0(\bar{x})$	espesor de desplazamiento para el análisis lineal
A	matriz definida en la ecuación (5.25)
$B(w)$	constante compleja de la ecuación de Airy
B	factor de relajación
C_{ij}	matriz relacionada con la ley de interacción
C_p	calor específico del gas
$\Delta\bar{x}$	incremento en \bar{x}
$\Delta\bar{y}$	incremento en \bar{y}
F_0	función de corriente adimensional
G_0	distribución de temperatura adimensional
h	incremento en z
h_0	longitud inicial del incremento en $\Delta\bar{y}$
h_j	longitud variable de $\Delta\bar{y}$
$H(\bar{x})$	función de Heaviside
i	número imaginario
$\text{Im } \omega$	parte imaginaria de ω
k	conductividad térmica
k_n	longitud variable del incremento en $\Delta\bar{x}$
K	razón de dos incrementos adyacentes

- K constante que depende del número de Prandtl ,
 $K = 9^{1/3} \Gamma(2/3) / \Gamma(1/3) Pr^{1/3}$
- l^* distancia longitudinal entre el borde principal de la placa plana y el punto donde se inicia el escalón de temperatura
- Nu número de Nusselt , $Nu = - \frac{\theta_w (1 + \lambda^{-5/4} R^{-3/8} \bar{x})}{(T_w^* - 1) \lambda^{-3/4} R^{-5/8}} \frac{\partial T}{\partial \bar{y}} \Big|_{\bar{y}=0}$
- Pr número de Prandtl , $Pr = \mu_{\infty}^* c_p / k$
- p_{∞}^* presión en regiones retiradas de la placa plana
- p^* distribución de presión
- p presión adimensional , $p = p^* - p_{\infty}^* / \rho_{\infty}^* u_{\infty}^{*2}$
- \hat{p}_0 presión adimensional para el análisis lineal
- \tilde{p} presión adimensional en la capa inferior
- R número de Reynolds , $R = u_{\infty}^* l^* / \nu_{\infty}^*$
- R^* constante del gas ideal
- R_i vector relacionado a la ley de interacción
- R vector para una estación anterior
- T_{∞}^* temperatura lejos de la placa plana
- T_w^* temperatura en la pared
- T^* distribución de temperatura
- T_w razón de la temperatura , $T_w = T_w^* / T_{\infty}^*$
- T temperatura adimensional , $T = T^* / T_{\infty}^*$
- \hat{T}_0 temperatura para el análisis lineal hasta términos de orden θ_w
- \hat{T}_1 temperatura para el análisis lineal hasta términos de orden θ_w^2

\bar{U}	cambio de variable en el método de la caja de Keller
u_{∞}^*	velocidad en la dirección x para zonas alejadas de la placa
u^*	distribución de la velocidad en la dirección x
u	velocidad adimensional en la dirección x , u^* / u_{∞}^*
\bar{u}	velocidad adimensional en la dirección x para la capa inferior
\hat{u}_0	velocidad adimensional para el análisis lineal
U	cambio de variable en el método de la caja de Keller
v^*	velocidad en la dirección y
v	velocidad adimensional en la dirección y v^* / u_{∞}^*
\bar{v}	velocidad adimensional en la dirección y para la capa inferior
\hat{v}_0	velocidad adimensional para el análisis lineal
V	cambio de variable en el método de la caja de Keller
x^*	coordenada longitudinal medida desde el borde principal, fig.1
x	coordenada adimensional longitudinal, x^* / l^*
\bar{x}	escala longitudinal para la capa inferior
\bar{x}_0	valor inicial de \bar{x} para completar los calculos numéricos
y^*	coordenada longitudinal medida desde el borde principal, fig.1
y	coordenada transversal adimensional, y^* / l^*
\bar{y}	escala transversal para la capa inferior
\bar{y}_0	valor inicial de \bar{y} para completar los calculos numéricos
\bar{y}_e	valor extremo en la escala de \bar{y}
Y	coordenada transversal de la capa límite
z	coordenada longitudinal modificada, $z = \bar{x}^{1/3}$

Simbolos griegos

β_1	diferencia de presiones
δ	función delta de Dirac
$\bar{\delta}$	vector incógnita para las ecuaciones de la cantidad de movimiento y de la energía
η	variable adimensional de semejanza
θ	temperatura adimensional
θ_w	parámetro de temperatura definido por $T_w - 1$
χ	variable compleja definida como $\chi = \theta s \bar{x}$
μ_∞^*	viscosidad en la corriente libre del gas
μ^*	coeficiente de viscosidad
μ	coeficiente de viscosidad adimensional, μ^* / μ_∞^*
ν_∞^*	viscosidad cinemática en la corriente libre del gas, $\mu_\infty^* / \rho_\infty^*$
ρ_∞^*	densidad en la corriente libre del gas
ρ^*	densidad del gas
ρ_w	densidad en la pared
σ	variable de alargamiento para el análisis lineal, $\bar{y} = \sigma / Pr^{1/3}$
τ	esfuerzo cortante adimensional
$\hat{\tau}_0$	esfuerzo cortante adimensional para el análisis lineal
ϕ	función de orden superior para determinar \hat{T}_1
ψ_0	función de semejanza
ω	frecuencia de Fourier

Subíndices

B	perfil de Blasius
e	borde externo de la capa inferior
F	variable de Fourier
i	índice sobre la variable z
j	índice sobre la variable \bar{y}
J	valor máximo de j

- n índice sobre la variable \bar{x}
- N valor máximo de n
- w valor de las variables físicas en la pared
- ∞ valor de las variables físicas en la corriente libre

Superíndices

- ^ barra para designar variables lineales
- ~ barra para designar variables de la capa inferior compresible
- barra para designar variables de la capa inferior incompresible
- * asterisco empleado para denotar las variables físicas con sus correspondientes dimensiones

CAPITULO I

INTRODUCCION

Generalmente, los procesos y equipos donde intervienen efectos de expansión térmica suelen ser tan variados y de tal complejidad que resultaría audaz reseñar estos a la luz del presente trabajo. Además es evidente que la formulación de teorías e hipótesis plausibles que alcancen a fundamentar y generar los principios básicos que intervienen en los susodichos sistemas, es en muchas ocasiones una área interdisciplinaria cuyo estudio y análisis se dificulta considerablemente. Esto es particularmente característico del fenómeno de expansión térmica en gases tanto reactantes como no-reactantes, donde pueden ocurrir en general y de manera simultánea, operaciones de transporte de masa, cantidad de movimiento, energía y concentración de especies.

Es entonces en este tipo de acoplamiento, donde las operaciones de transporte son las que determinan y regulan unívocamente el comportamiento global en sistemas tales como intercambiadores de calor, compresores, motores de combustión interna, cámaras de combustión, convertidores catalíticos, etc., donde el efecto de expansión térmica suele ser distinguible y de considerable interés ingenieril su caracterización. Sin embargo, es notorio que en estos y otros tipos no mencionados de sistemas termodinámicos, los procesos ahí desarrollados son específicamente de carácter global; con lo cual llegan adicionalmente a involucrar

a diferentes y muy variados fenómenos y efectos; cuyo reconocimiento y análisis es, en la mayoría de las ocasiones, motivo de una mayor dificultad metodológica. Ello, claramente no significa que no se deban abordar de manera conjunta, sino que en repetidas situaciones es más pertinente y cómodo para el estudio fundamental teórico y experimental, individuar tan sólo un fenómeno involucrado. Paralelamente, es correcto tanto desde un punto de vista científico como técnico, que la consolidación del conocimiento fundamental procede muy frecuentemente a través del simple esclarecimiento de un único fenómeno estudiado. Es desde esta perspectiva central, donde el presente trabajo inscribe sus lineamientos analíticos básicos, en lo referente al fenómeno de expansión térmica a considerar en las líneas siguientes.

Dentro de estas observaciones generales, es además prudente reconocer que una gran parte de los problemas relativos a la Mecánica de los Fluidos, la Transferencia de Calor y la Combustión son aquellos que tratan a la sustancia de trabajo en directa interacción con un medio, el cual en la mayoría de las ocasiones de interés práctico, coincide con un dispositivo o arreglo mecánico. Es importante mencionar esto dado que el problema de expansión térmica aquí desarrollado, se genera de acuerdo a un muy específico tipo de interacción. De hecho esto conlleva un aspecto aun más novedoso y de relativo reciente interés que suele distinguirse como las formas acopladas en las operaciones de transferencia; aspecto el cual posteriormente será explorado con más detalle.

Pues bien, la orientación que se sigue en el presente trabajo

radica fundamentalmente en revisar y corregir los resultados de la teoría clásica de la capa límite laminar, para el problema específico de un flujo convectivo forzado sobre una placa plana expuesta a un escalón de temperatura uniforme, tomado a una cierta distancia del borde principal. La atención que se deriva de ello, radica indudablemente en seguir considerando a la transferencia de calor entre un cuerpo sólido y un fluido como un problema, cuyo significado envuelve sustancialmente al objeto general de estudio del movimiento de los fluidos. El impacto conceptual que esto tiene desde un punto de vista práctico, se refleja en una amplia gama de aplicaciones que van desde flujo sobre cuerpos de sustentación, sobre álabes de turbinas, etc, hasta aquellos que derivan en mezclas reactantes y combustión catalítica. Sin embargo, el punto de apoyo que da origen al presente estudio, radica en una muy peculiar falla de la teoría clásica de la capa límite : dado que las ecuaciones que gobiernan el proceso son válidas asintóticamente hasta el orden principal en el límite para el cual el número de Reynolds es alto, este sistema no permite prever o al menos lo refleja a través de alguna irregularidad en alguna variable física fundamental, que términos de orden superior lleguen en un momento dado y para un cierto reescalamiento de las ecuaciones, a ser de tal orden de magnitud que sea necesario retenerlos dentro del orden principal.

Esto quiere decir desde el punto de vista físico, que una muy relevante e inusitada situación aparece : mientras que en la teoría clásica se impone una estructura jerárquica para resolver el problema (es necesario conocer previamente el valor de la presión en la zona externa donde son válidas las ecuaciones de

Euler para resolver el problema de la capa límite), ahora es indispensable, como se demostrará más adelante por el hecho de retener términos de orden superior, introducir una nueva y necesaria estructura interactiva, la cual además de corregir las deficiencias de la teoría clásica, permite predecir correctamente la interacción entre la capa límite y la zona externa. Es decir, cantidades físicas de interés, tales como la distribución de presión, deberán calcularse simultáneamente tanto en la zona externa, donde prevalece el flujo potencial, como en una zona interna que aparentemente es reconocible como la capa límite. Sin embargo, no es esta propiamente la capa límite en un sentido clásico, en su lugar, aparece una nueva región donde el acoplamiento entre ambas zonas obliga a la simultaneidad de la solución. Así, el escalón de temperatura al modificar sustancialmente la capa límite de cantidad de movimiento, hace que esta a su vez interactue con el movimiento del flujo externo; convirtiendo al problema en uno interactivo. El resultado de esta interacción se ve convenientemente representada a través de cambios sustanciales en el gradiente de presión a lo largo de todo el campo de flujo. Situación por cierto, no presente en la teoría clásica.

Pero además, la nueva estructura interactiva permite mirar más allá donde la teoría clásica encuentra dificultades estructurales : ayuda a distinguir y caracterizar las zonas de desprendimiento y readherencia de la capa límite, producidas en un momento dado, por la presencia de efectos de perturbación considerables.

Sin embargo, para que pudiera abordarse el problema de expansión térmica en la capa límite a la luz de estas consideraciones, fue necesario esperar un desarrollo más audaz en la teoría clásica que tomase en cuenta estos nuevos acontecimientos; de hecho, este esfuerzo se vio recientemente consolidado, por la creación de la teoría asintótica de las tres capas para altos números de Reynolds que permitió suplantar correctamente anteriores teorías, y a pesar de que dejaban entrever estas nuevas dificultades, no alcanzaban o lo hacían a través de hipótesis a priori, a explicar del todo el fenómeno interactivo. Situación por cierto, muy similar a la paradoja de D'Alembert dada la íntima relación histórica con el problema de la capa límite.

A pesar de que actualmente, se dispone de una teoría interactiva aplicada exitosamente a problemas exclusivamente de Mecánica de los Fluidos con capa límite, lo cual ha derivado en sustanciosas contribuciones a la literatura especializada; en lo referente a procesos donde interviene la transferencia de calor en la capa límite, la bibliografía existente hasta la fecha ha sido raquítica, siendo en ciertas situaciones desarrollada para problemas más simples. Así, para el caso particular aquí desarrollado no se ha hecho más que mención expresa de ello y no obstante que se ha reconocido la importancia del problema, lo cierto es que el impacto de la teoría interactiva, sobre problemas que involucran a la transferencia de calor está muy lejos de haberse iniciado. De hecho, una situación similar y aun quizás de mayor relevancia, ocurre en la Teoría de la Combustión, donde el problema de expansión ocasionado en la generación de llamas reviste especial atención, dado que la presencia de fuertes

gradientes de presión en la zona de combustión perturban considerablemente la zona no-reactiva, que en muchas situaciones se reduce a modificar la zona potencial del gas combustible.

Igualmente, cabe añadir junto con los comentarios anteriores, que una de las motivaciones centrales que dieron origen al presente trabajo, proviene de la relación que hay entre Transferencia de Calor y Combustión. Del proceso particular aquí analizado, se deriva -entre otras cosas- un número de Nusselt modificado el cual toma en cuenta correctamente el efecto de expansión. Esta información en las teorías de la combustión catalítica es de considerable interés. En particular, en el estudio de la ignición y combustión de materiales sólidos catalíticos expuestos al flujo convectivo de un gas oxidante, en donde esta en juego la determinación de tiempos y distancias de ignición, así como las condiciones de extinción para diferentes situaciones físicas; el conocimiento que proporciona la evolución de la fase gaseosa oxidante durante los eventos de ignición, es determinante para establecer el modelo matemático. Y justamente este acoplamiento entre la actividad catalítica y la fase gaseosa que produce un efecto de expansión térmica sobre esta última, puede regularse introduciendo en modelos recientes, una transferencia de calor (cuantificada a través del número de Nusselt modificado) que de cuenta de este acoplamiento. Es entonces en este tipo de problemas, donde el sentido de formas acopladas de transferencia de calor encuentra su mayor evidencia.

Una vez señalados los aspectos anteriores que configuran la problemática general del presente trabajo, la organización del

material , junto con este primer capítulo introductorio, viene estructurada mediante el contenido siguiente :

Capítulo II. Antecedentes Históricos.

Con objeto de colocar al problema de interés dentro de una secuencia histórica en lo tocante a modernos problemas de capa límite, se realiza una extensa revisión bibliográfica que permite ver el justificable interés por el estudio realizado. De esta forma, el capítulo desarrolla los antecedentes históricos que dieron origen a un replanteamiento de la teoría clásica de la capa límite, derivando con ello en la importancia que tiene el impacto de recientes teorías de la Mecánica de los Fluidos en áreas afines. Especial énfasis se hace de esta influencia en problemas relativos a la Transferencia de Calor. De aquí la relación con el análisis desarrollado en el presente trabajo se vuelve inmediata, reafirmando que el proceso seleccionado de expansión térmica es una extensión natural a problemas de transferencia de calor de la teoría interactiva.

Capítulo III. Ecuaciones Fundamentales.

Se describe en este capítulo, una formulación detallada de las ecuaciones que gobiernan el proceso de un flujo convectivo forzado sobre una placa plana expuesta a un escalón de temperatura uniforme, tomado a una cierta distancia del borde principal. Para ello, la discusión se inicia con la presentación de las ecuaciones de Navier-Stokes y de la Energía junto con las correspondientes condiciones en la frontera.

Una vez completado la presentación general de las ecuaciones básicas, se plantea la necesidad de evidenciar las fallas estructurales de la teoría clásica de la capa límite, haciendo notar que términos de orden superior dentro de un adecuado reescalamiento, pueden competir con términos de orden principal. Lo anterior da inicio y sentido a la elaboración del modelo interactivo : se aplica la teoría de las tres capas válida para altos números de Reynolds y se deduce el conjunto de ecuaciones que gobiernan a cada capa (inferior , intermedia y superior), se establecen además las condiciones de acoplamiento entre las capas y de estas con el campo externo.

Dado que el comportamiento de la capa inferior adyacente a la placa plana describe el comportamiento de la zona de expansión térmica y es por tal motivo la que mayores dificultades de solución presenta, reservando para ello los capítulos subsecuentes; la solución de las capas restantes es alcanzada a través de métodos analíticos convencionales. Cabe señalar que la zona de la capa inferior queda descrito por un conjunto de ecuaciones que depende, entre otras cosas, del parámetro adimensional razón de la temperatura y que utilizado ampliamente en problemas relativos a transferencia de calor, viene definido como el cociente de la temperatura de la placa plana a la temperatura de la corriente libre. El valor de este parámetro, determina la escala del proceso de expansión.

Capítulo IV. Análisis Lineal.

Para aquellas situaciones donde el número adimensional razón de la temperatura es del orden de la unidad, es decir, cuando la

temperatura de la placa plana es próxima al valor que tiene la corriente libre, el problema puede ser linearizado. El conjunto de ecuaciones resultantes se resuelven con ayuda de métodos integrales. Por la forma del sistema, el uso de la transformada de Fourier en la coordenada longitudinal, proporciona un esquema adecuado. Valores para las principales cantidades físicas de interés, tales como la distribución de presión, coeficiente de fricción, espesor de desplazamiento y número de Nusselt, evaluados en la pared son derivados con ayuda del teorema de inversión compleja.

Capítulo V. Análisis No-Lineal.

Tomando en cuenta que desde el punto de vista físico, la razón de la temperatura puede diferir ampliamente de la unidad, esto es, que la temperatura de la pared sea mucho mayor que la temperatura de la corriente libre -como es el caso aquí considerado-, invalidando los resultados del capítulo anterior, las ecuaciones para la capa inferior deducidas en el capítulo III se resuelven numéricamente con un algoritmo numérico específico. Se deriva entonces, un conjunto de resultados similares en las variables físicas a los presentados en el capítulo anterior. Sin embargo, el análisis no-lineal a diferencia del lineal encuentra y hasta donde el esquema numérico lo permite, el valor crítico de la razón de la temperatura para la cual se observa el desprendimiento de la capa límite.

Capítulo VI. Resultados y Conclusiones.

Sirve el contenido de este capítulo, para presentar los resultados y conclusiones más relevantes del fenómeno considerado. De igual forma, se establece las líneas futuras que se pueden seguir a propósito de problemas de naturaleza interactiva, con especial cuidado de aquellos que quedan circunscritos a la transferencia de calor. Esto, con objeto de ampliar el espectro de aplicación que se puede derivar del uso intensivo de la teoría de las tres capas.

Apéndice.

Finalmente, se presenta relaciones en diferencias finitas de un conjunto de coeficientes utilizados en la elaboración del programa numérico, que dan forma más detallada de diversos cálculos y desarrollos utilizados a lo largo de todo el trabajo. De igual forma, y con especial cuidado, se incluyen el diagrama de flujo y los listados de los programas de computadora utilizados en el análisis presente.

CAPITULO II

ANTECEDENTES HISTORICOS

2.1. Introducción.

La teoría de la capa límite ha sido desde sus orígenes hasta la época reciente, objeto de estudio fundamental dada la importancia práctica que de ella se deriva. De ella han surgido aspectos de relevancia excepcional, que juntos han ido formando el amplio panorama de lo que constituye actualmente, una disciplina de la Mecánica de los Fluidos. Así, entre el vasto espectro de cuestiones fundamentales, son notoriamente distinguibles, aspectos tales como movimiento transitorio, problemas tridimensionales, métodos numéricos exactos de solución, métodos analíticos aproximados, soluciones de semejanza, estabilidad, problemas con turbulencia, capa límite de orden superior, transferencia de calor, aplicaciones en aerodinámica, flujo interno y externo, etc.. Sin embargo, estos y muchos otros aspectos no mencionados aquí explícitamente, se han desarrollado e implementado a sabiendas de que la teoría clásica de la capa límite es fundamentalmente válida. Esto, claramente no significa que el trabajo previo resulte innecesario para el marco continuo de conocimientos desarrollados; de hecho, muchos de estos aspectos son y seguirán siendo motivo de análisis. Sólo que en determinadas situaciones, las dificultades que surgen de emplear la teoría clásica, ponen en entredicho su validez. Es más, no son estas

situaciones, casos particulares que puedan bajo un esquema propio dejar de ser intratables. Lo que esta de por medio, es la estructura misma de la teoría clásica.

Para prologar entonces la discusión hacia estas relativamente recientes dificultades, habrá que dirigir momentáneamente la atención hacia cinco contribuciones fundamentales, que a través de éxitos y fracasos, han ido reafirmando el soporte global de la teoría de la capa límite. Son pues, las siguientes :

Primera, Prandtl introduce [1] el concepto de flujo adherido, esto es, la relativamente delgada capa viscosa, la cual conducida por un gradiente de presión dictado por las propiedades no-viscosas para el resto del campo de flujo, hace posible que el gradiente de presión sea indispensable para reducir la velocidad de deslizamiento a un valor igual a cero en la superficie del cuerpo en el caso de flujo no viscoso. Es justamente con esta idea de flujo adherido, que la paradoja de D'Alambert encuentra su explicación. Segunda, la solución de semejanza de Blasius [2], demuestra que la estrategia de Prandtl, funciona correctamente para una muy particular geometría seleccionada: la placa plana alineada paralelamente a un flujo uniforme. Es quizás este trabajo el que mejor ejemplifica las propuestas de Prandtl. Tercera, el análisis de Goldstein [3] sobre el problema de la estela que se presenta en el borde de salida para el problema de la placa plana en un flujo uniforme, demuestra que es posible la continuación de la solución de Blasius en la región de la estela, salvo que la forma de la solución introduce una

singularidad en regiones aguas abajo y muy próximas al borde de salida de la placa plana. Esto es, ahí la capa límite exhibe una estructura doble, y no obstante que el espesor de desplazamiento varía continuamente en la región de interés, presenta una singularidad en su pendiente. Es evidente entonces, que esta circunstancia introduce una falla en la solución y esto exige un replanteamiento de las características del flujo en regiones cercanas al borde principal. Cuarta, en el problema de la separación que se presenta sobre un cilindro circular, Goldstein [4], encuentra una singularidad en la solución, justo en la región donde se inicia el gradiente de presión adverso. En particular, la propuesta de Goldstein conduce a que el coeficiente de fricción tienda a cero de una manera irregular, con resultados similares para el espesor de desplazamiento. Cálculos numéricos exactos de las ecuaciones de capa límite con gradientes de presión específicos, confirman la ocurrencia de esta singularidad. Así pues, estas dificultades, tanto para el problema de la estela en el borde de salida como para la separación de la capa límite en el cilindro, anuncian el colapso de la estrategia de flujo adherido. De hecho, el problema de la separación no es único para cuando la geometría es cilíndrica, de tal suerte que tal tipo de dificultades eventualmente están presentes en otros tipo de geometrías, extendiendo las mismas fallas estructurales de la teoría clásica a otros problemas, y lo que es más, que tales singularidades no pueden removerse ni con análisis convencional de escala mas corta ni recurriendo a las ecuaciones de orden superior, lo cual fue ampliamente confirmado por la quinta y última contribución dada por Stewartson [5]. Por lo tanto, es necesario una nueva estrategia que contemple estas

dificultades.

A reserva de los múltiples aspectos ya mencionados que dan sustento a la teoría clásica, los trabajos anteriores dan cuenta resumidamente, de los principios y deficiencias de la estrategia de flujo adherido, siendo -quizás- su principal característica el de resolver los problemas de una manera jerárquica : calcula como toda teoría asintótica en el orden mas bajo, el problema de la zona externa aquí representada por la región no-viscosa, esto permite a su vez, calcular la zona interna viscosa en el mismo orden y con esta información regresar a la zona externa para corregir el flujo potencial a través de términos de orden superior y repetir así sucesivamente el proceso. Sin embargo, este esquema aun en el orden superior falla para situaciones límite como las previamente mencionadas.

Para tomar entonces en cuenta una visión que comprenda las dificultades enunciadas, un continuo y exhaustivo desarrollo se ha venido presentando en la literatura especializada, a raíz de ciertos trabajos de frontera que dieron nuevos horizontes a la teoría clásica. Así, estos análisis dieron origen a la teoría interactiva de las tres capas. Pero además, dado el amplio espectro de aplicaciones que se han encontrado; ha sido del todo conveniente dividir estas nuevas contribuciones, desde la perspectiva general de la Mécanica de los Fluidos : flujos externos, flujos internos y aquellas situaciones, que pudiéndose presentar tanto en flujo externo como interno, permiten que la estrategia clásica siga siendo compatible con la separación. Es importante mencionar esto, dado que el problema de expansión

térmica aquí desarrollado, cae dentro de la categoría de flujos externos, lo cual sirve para individuar aun mas los antecedentes bibliográficos, que sirven como punto de referencia al presente trabajo.

2.2. *Flujo Externo.*

Como ha sido comentado previamente y con objeto de centrar la discusión de los antecedentes bibliográficos, esta sección dedica sus comentarios a los trabajos mas sobresalientes que han incidido en la construcción de la nueva estrategia interactiva en problemas exclusivamente relativos a flujo externo.

Los orígenes de esta nueva teoría, se remontan a fines de los años sesenta e inicios de los setenta, a partir de una serie de trabajos que surgieron independientemente y que derivaron en una aproximación de multiestructura para el campo de flujo. De hecho, lo que motivo tal replanteamiento del problema, fue el análisis de la estela para el problema de la placa plana. En particular, el intento por corregir la singularidad que se presenta en el borde de salida, dió las bases para que los trabajos fundamentalmente de Stewartson y Williams [6], Neiland [7], Messiter [8] y otros, se consolidarán como el punto de partida necesario para problemas interactivos. Estos trabajos tienen en común las características siguientes : para flujo externo la estructura local consiste de dos capas, que dentro de la escala de la capa límite clásica van acopladas a la región de la estela y fuera de la capa límite, surge otra capa acoplada al flujo externo, donde el espesor de desplazamiento altera a la fuerza de presión, haciendo que esta a su vez modifique el flujo viscoso de la capa inferior, próxima a

la superficie de la placa plana. De esta forma, la estructura de capa límite anteriormente jerárquica, cambia por una interactiva. Es interesante mencionar el razonamiento que condujo a tal situación y que en las palabras textuales de Stewartson [9] revela su total significado :

" La razón para la importancia del borde de salida es la siguiente. La teoría de Goldstein para regiones aguas abajo y próximas al borde de salida, involucra un flujo -desde la zona de potencial- hacia la capa límite el cual es de orden $\nu^{1/2}(x^*)^{-2/3}$ para x^* pequeñas. Reconociendo que el flujo externo es potencial, entonces la variación de presión deberá ser del mismo orden; en consecuencia, el gradiente de presión resultante en la capa límite induce un coeficiente de fricción de orden $\nu(-x^*)^{-4/3}$ cuando x^* es pequeña y próxima por la izquierda al borde de salida. Este término no es integrable, de tal forma que la corrección al arrastre ciertamente no es casi de $O(\nu)$, sino que es del mismo orden que el coeficiente de fricción de Blasius, cuando $x^* \sim R^{-3/8}$. Por lo tanto, uno esperaría que es necesario un análisis más cuidadoso en esta región y que la corrección al arrastre de Blasius deberá ser de orden $R^{-3/8}$..." .

Con estos antecedentes, la teoría de las tres capas se aplicó exitosamente a otras situaciones con configuraciones de flujos básicos y ha involucrado en su desarrollo, desde los análisis lineales preliminares -válidos única y exclusivamente para pequeñas perturbaciones-, hasta muy específicos algoritmos numéricos de solución dada la naturaleza elíptica no-lineal de las ecuaciones para la capa inferior. Sin embargo, dado el particular

interés que suscitó el problema de la estela, conviene continuar estas líneas generales, a la luz del trabajo de Stewartson. Pues bien, a pesar de que la contribución de Stewartson [9] proveía la solución asintótica al problema del borde de salida, encontrando expresiones explícitas -en la región de interacción- para la presión y el espesor de desplazamiento, tuvo que transcurrir algún tiempo para que las ecuaciones de la zona de interacción fueran resueltas numéricamente. Este trabajo fue desarrollado independientemente por Veldman y van de Vooren [10] y Jobe y Burggraf [11]. En ambos trabajos se implementó un algoritmo para la integral de Cauchy de la presión con el espesor de desplazamiento para la zona externa y en la zona interna se utilizó el método de Crank-Nicholson. Esto permitió el cálculo del coeficiente de fricción, la distribución de presión, espesor de desplazamiento, entre otras cantidades de interés. En particular, estos trabajos predicen salvo pequeñas diferencias, la corrección de orden superior al cálculo del arrastre y al compararse con trabajos experimentales previos, revelaron un sorprendente acuerdo, no obstante que las teorías tradicionales de orden superior habían fracasado; Van Dyke [12] comenta al respecto, sobre estos fallidos intentos.

Otra situación que mereció especial atención fue el análisis de un flujo convectivo laminar sobre una placa plana, la cual tiene sobre su superficie y aguas abajo del borde principal, un escalón de carácter geométrico. Fue Smith [13] quien resolvió mediante el uso de una teoría linealizada, esto es, para cuando el escalón en la superficie es pequeña, las ecuaciones interactivas con ayuda de la transformada de Fourier, complementando su

análisis lineal, con el desarrollo de los límites asintóticos para la presión y espesor de desplazamiento y tratando tanto el caso subsónico como el supersónico. Sus resultados demuestran -aun con una teoría linearizada-, que la presencia del salto genera una interacción entre la región no-viscosa fuera de la capa límite y la región viscosa que permanece cercana al escalón. Sin embargo, el análisis anterior, no contempla aquellas situaciones para cuando la perturbación, esto es, la magnitud del escalón por efecto de geometría, se va haciendo cada vez mas grande. Para resolver esta situación, hubo que recurrir a la solución numérica. A este respecto, el trabajo de Napolitano et al. [14] desarrolló una técnica numérica con diferencias finitas centradas y métodos de relajación. No obstante, que los resultados para la presión y el esfuerzo cortante en la pared extienden los resultados de Smith (op. cit.), para valores no necesariamente pequeños de la perturbación, el esquema encuentra serias dificultades en la región de flujo readherido, donde la solución presenta comportamiento oscilatorio y divergente. Precisamente para remediar esta situación, Burggraf y Duck [15] desarrollaron para el mismo problema físico, un modelo numérico basado en las técnicas espectrales [16]. Estos autores reconocieron que cualquier implementación numérica vía diferencias finitas, produce a la larga problemas oscilatorios que no pueden ser evitados, fundamentalmente cuando se produce la separación y la readherencia de la capa límite. Tal dificultad numérica se origina cuando se presenta la separación : aparece un flujo invertido el cual hace que el fluido avance en la dirección opuesta a la corriente de flujo principal. Como resultado de esta situación, se modifica el carácter de las ecuaciones para la capa inferior; es decir, las

ecuaciones que son de tipo parabólico para situaciones antes de la separación se transforman en unas de tipo cuasi-elíptico si se esta en la región de flujo invertido y esto permite que la información dinámica se propage tanto aguas arriba como aguas abajo. De hecho, la única excepción que evita problemas oscilatorios y en general de convergencia, es para cuando tal flujo invertido es muy lento, como fue confirmado por Reyhner y Flüge-Lotz [17]. Visto que las técnicas espectrales proporcionan una alternativa viable para incluir los fenomenos de desprendimiento y readherencia, recientemente Treviño, Méndez y Liñán [18] han desarrollado un algoritmo espectral para analizar el problema de interacción libre, para un salto continuo de temperatura.

Las trabajos anteriores ciertamente proporcionan soluciones completas para aquellas situaciones donde falla la teoría clásica y por tal motivo, los mismos argumentos estructurales pueden ser aplicados a una amplia variedad de problemas de flujo tanto incompresible como compresible. De manera sobresaliente, destacan para el primer caso, los estudios particulares de Stewartson [19], para el problema de flujo sobre una esquina, Napolitano y Messick [20], placa plana porosa con inyección o succión, Werle y Verdon [21], flujo uniforme con diferentes formas del borde principal, etc.. También la teoría interactiva para flujos compresibles ha recibido considerable atención en la literatura para flujos subsónicos y supersónicos. El trabajo fundamental de Stewartson y Williams [22], Smith y Stewartson [23] y otros no de menor importancia, proporcionan la guía para el estudio mas elaborado de problemas interactivos, en particular la vinculación que esto tiene con la interacción de ondas de choque con capas límites

supersónicas. El estado del arte sobre estas cuestiones y otras que involucran la formación de zonas interactivas en flujo interno, así como aquellas situaciones donde la estrategia de flujo adherido es compatible con la separación como puede ser la separación marginal, pueden encontrarse desarrolladas detalladamente en el trabajo de Smith [24].

Sin embargo, la totalidad de estos trabajos involucran para generar la zona de interacción, una perturbación de naturaleza dinámica o bien geométrica, esto es, un cambio de velocidad para la condición en la frontera o un salto en la geometría para la placa plana o efectos similares, conducen a problemas interactivos exclusivamente dinámicos. Por lo tanto y en un esfuerzo por obtener y extender el rango de aplicabilidad de la teoría interactiva, donde pueden estar presentes otros tipos de perturbaciones, Messiter y Liñán [25] estudiaron el problema de la convección libre laminar sobre una placa plana vertical. Entre otras cosas, el análisis considera la estructura del campo de fluido en regiones próximas a una discontinuidad de la temperatura en la superficie de la placa plana y demuestra la existencia de una zona de interacción viscosa-noviscosa para la convección libre. El análisis permite que una solución analítica para la distribución de presión pueda obtenerse gracias a que las condiciones en la frontera para el campo de velocidad son continuas, lo cual simplifica considerablemente el tratamiento del problema.

Muy recientemente y en la misma línea del trabajo de Messiter y Liñán (op.cit.), Higuera [26] estudió el problema de la

solidificación de un líquido que fluye a lo largo de una placa plana cuya temperatura presenta una reducción, desde una cierta temperatura que lo mantiene líquido hasta un valor por debajo de la temperatura de solidificación. En este trabajo, se describe la estructura del campo de flujo para regiones cercanas al cambio de temperatura y se calcula la formación y crecimiento de la capa solidificada sobre la placa plana.

Finalmente, Zeytounian [27] propuso estudiar el flujo incompresible sobre una placa plana la cual esta expuesta, en una región finita de su longitud, a un escalón continuo de temperatura. Sin embargo, sus comentarios son mas que nada temáticos y de carácter general.

Es pertinente aclarar que estos tres últimos trabajos, son los únicos reportados en la literatura, que tratan directamente con problemas interactivos relacionados con la Transferencia de Calor. Esto claramente indica que un mayor esfuerzo deberá realizarse si se quiere tener una cobertura mas amplia, esto es, hacia otras disciplinas, de la teoría interactiva.

2.3. Comentarios Finales.

Los comentarios anteriores han servido para formarse una idea global de lo que actualmente acontece en la teoría de flujos laminares externos en el límite asintótico de altos números de Reynolds. Claramente se ha puesto especial cuidado en señalar la importancia que para la transferencia de calor tiene, el aplicar

la teoría interactiva; en especial los tres últimos trabajos citados ([25],[26],[27]), dan clara muestra de ello. Por lo tanto, en un esfuerzo por extender los principios de la teoría interactiva hacia problemas específicos de la Transferencia de Calor, el presente trabajo desarrolla teóricamente, utilizando tanto técnicas analíticas como numéricas, la estructura fluido-dinámica de un flujo de capa límite producida por un proceso de expansión térmica, utilizando lógicamente la teoría de las tres capas. En particular se ha seleccionado el problema de un flujo convectivo laminar sobre un placa plana la cual está expuesta, a una cierta distancia del borde principal, a un escalón de temperatura en la superficie de la placa plana. Las ecuaciones que gobiernan el proceso demuestran que para valores de los números de Prandtl y Reynolds constantes, el problema depende de un único parámetro definido como la razón de la temperatura de la placa a la temperatura de la corriente libre. Para valores de este parámetro cercanos a la unidad, el conjunto de ecuaciones puede linealizarse y una solución puede obtenerse con ayuda de la transformada de Fourier. En caso contrario, si el parámetro toma valores mayores y diferentes a la unidad, el conjunto de ecuaciones se resuelven numéricamente hasta que alcanza un valor crítico el parámetro por encima del cual se presenta la separación de la capa límite.

Los cálculos determinan las distribuciones de presión, esfuerzo cortante, espesor de desplazamiento y número de Nusselt, para diferentes valores del parámetro de temperatura y tanto para el caso lineal como el no-lineal. Estos resultados permiten anticipar que la existencia de una descripción explícita del campo

de flujo cercano al escalón de temperatura confirma la validez de una fuerte interacción de la capa límite con el flujo externo potencial. De esta manera, el análisis presente convalida la utilidad de la teoría interactiva, incluyendo -para el caso aquí considerado- perturbaciones de temperatura compatibles con las escalas de la teoría de las tres capas.

Finalmente y desde un punto de vista mas moderno, es importante enfatizar que independientemente de la aplicación que aquí se hace de la teoría de las tres capas, la estructura matemática que esta detrás de la teoría interactiva y aun de la teoría clásica, es justamente el método de las expansiones asintóticas acopladas que ha resultado ser una espléndida herramienta para el tratamiento de aquellos problemas que involucran capas límite. Brevemente, esta técnica matemática, permite dividir un problema en dos o mas zonas, resolver y calcular las propiedades de interés para cada zona y finalmente integrar toda la información, para producir una solución global. Es pertinente mencionar aun cuando mas adelante será visto con mayor detalle, que el carácter asintótico de la mencionada técnica deriva de la existencia para el problema de interés, del uso de un parámetro grande , en el presente caso tal cantidad es el número de Reynolds y se verá que juega un papel central en el establecimiento de estructuras múltiples de capa límite.

CAPITULO III

ECUACIONES DE MOVIMIENTO

3.1. Introducción.

En este capítulo se presentan las ecuaciones de movimiento para flujos viscosos laminares ; las cuales contienen la información física básica que referidas a un elemento de fluido, establecen simplemente la conservación de masa, la conservación de la cantidad de movimiento y la conservación de la energía. Estas ecuaciones deberán ir acompañadas de las correspondientes condiciones en la frontera que den cuenta del proceso de expansión térmica dentro del flujo convectivo, así como todas aquellas suposiciones factibles de ser ciertas sobre la naturaleza del movimiento del fluido para el modelo en cuestión. Posteriormente, se lleva a cabo un análisis detallado de las razones teóricas fundamentales que revelan el fracaso de la teoría de capa límite clásica para predecir el campo de flujo en regiones muy próximas al escalón de temperatura. Es aquí, donde aparece el punto neurálgico que da motivo a un replanteamiento de las ecuaciones de movimiento, siguiendo los dictados de la teoría interactiva. Siendo así, se presentan los argumentos que hacen viable a la teoría de las tres capas, para estudiar el proceso de expansión térmica y esto último, acompañado de la deducción de las ecuaciones para cada región. Como se verá mas adelante, las capas

superior e intermedia son relativamente simples de resolver y su deducción se incluye en el presente capítulo.

3.2. Consideraciones Generales.

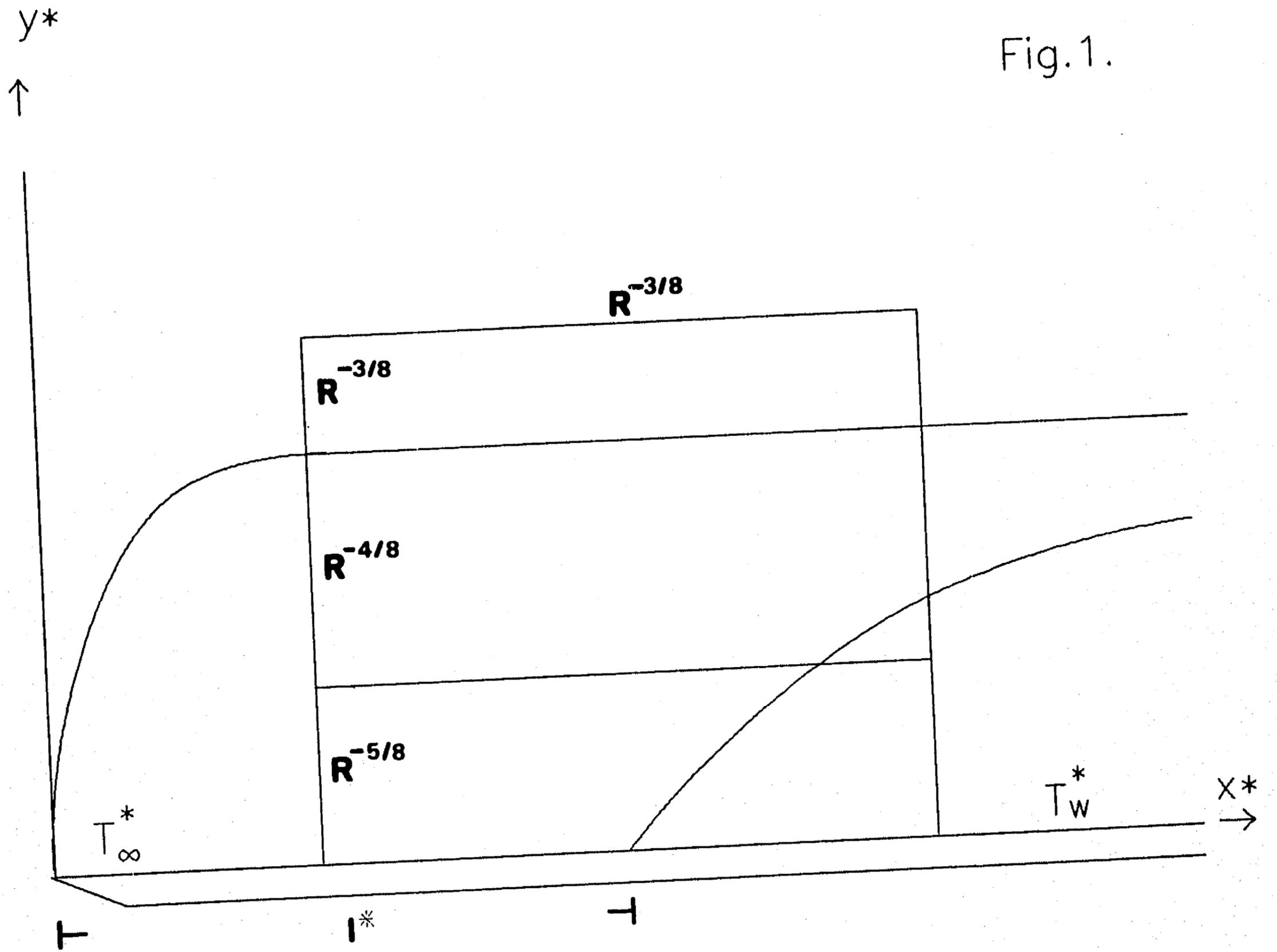
Es bien sabido desde un punto de vista general, que la transferencia de calor entre un objeto y un fluido que se encuentran a diferentes temperaturas, constituye un problema superpuesto, debido concretamente a la interrelación que existe entre el campo de velocidad y el de temperatura. De esta forma, para poder determinar la distribución de temperatura es necesario combinar las ecuaciones de movimiento con la ecuación de la energía. A simple vista pudiera parecer evidente que la distribución de temperatura alrededor de un objeto de temperatura diferente a sus alrededores, fuera similar a la distribución de velocidades dentro del flujo de la capa límite de la cantidad de movimiento; claramente la temperatura de la corriente se incrementa en un región delgada y próxima a la geometría del objeto y tal situación en analogía con el fenómeno de flujo permite hablar correctamente de una capa límite térmica. Sin embargo; salvo ciertos casos particulares, las soluciones de semejanza son posibles solamente bajo condiciones muy restrictivas en las condiciones en la frontera, de tal suerte que el problema acoplado de la cantidad de movimiento y la energía es -en la mayoría de los casos-, uno en ecuaciones diferenciales parciales. De hecho, una de las mayores dificultades que presenta el problema del escalón de temperatura se origina porque el flujo de calor local no solamente es determinado por la diferencia local entre la temperatura de la placa plana y la de la corriente libre, sino que

es necesario incluir la "historia anterior" de la capa límite. Consecuentemente, la complejidad asociada con las ecuaciones, obliga a rescatar aquellos métodos que permiten un manejo más acorde con el problema físico, en este sentido conviene recordar que el flujo viscoso con altos números de Reynolds sobre un objeto de diferente temperatura a la corriente libre es, junto con otras situaciones básicas de capa límite, el prototipo de problema de perturbación singular. Así, el primer intento racional para tratar problemas singulares es la teoría de Prandtl (op.cit.) de la capa límite, teoría que por cierto sirvió para verificar posteriormente que solo constituía el término principal de una expansión asintótica para altos números de Reynolds. El método que permitió conocer tal resultado, tiene sus orígenes en los trabajos de Friedrichs [28], [29] y no obstante la ambigüedad inicial en el nombre de "Expansiones Externas e Internas" o "Expansiones Asintóticas Dobles", lo cierto es que al cabo de los años el método aceptó la denominación hecha por Bretherton [30] bajo el nombre de "Expansiones Asintóticas Acopladas". Esta técnica fue exitosamente desarrollada y utilizada para flujos viscosos por Kaplun [31], para estudiar la teoría de la capa límite y fue el justamente quien demostró que la teoría de Prandtl solo era el término principal de una expansión asintótica. Estos comentarios son necesarios no solamente para iniciar la presentación de las ecuaciones básicas, sino que también vienen a constituir el marco de referencia teórico sobre el cual se alza la teoría moderna de la mecánica de los fluidos.

Sea entonces el siguiente el problema clásico dentro de la transferencia de calor que da sentido al presente trabajo. Se

considera por simplicidad, un flujo convectivo plano y permanente, además el flujo posee una velocidad y temperatura de la corriente libre uniformes, con valores dados respectivamente por u_{∞}^* y T_{∞}^* , con ello claramente el flujo es laminar y forzado. Bajo estas circunstancias, el flujo incide paralelamente sobre una placa plana la cual se encuentra expuesta, a una cierta distancia tomada desde el borde de entrada y en la dirección del flujo, a un escalón de temperatura uniforme de valor T_w^* ; ciertamente para distancias menores a esta, la temperatura de la placa asume el valor de la corriente libre. En estas condiciones, el panorama fluido-dinámico sería el siguiente (ver fig.1): en el borde principal de la placa plana se inicia el crecimiento de la capa límite de cantidad de movimiento, incrementándose el espesor aguas abajo hasta encontrar la zona donde se inicia el escalón de temperatura dando origen con ello al crecimiento también de la capa límite térmica y lo que es aun mas relevante, el impacto físico adicional de amplificación del espesor de cantidad de movimiento en relación a su valor original debido al efecto de expansión del gas. Justamente es este efecto de expansión térmica el cual obliga a replantear las consideraciones y resultados clásicos previamente registrados y que por añadidura no son contemplados desde las ecuaciones de Prandtl; estas son como es bien sabido, ecuaciones de orden principal en el límite de números de Reynolds altos y para conseguir una descripción del efecto expansivo es necesario recurrir a términos de orden superior en las ecuaciones de movimiento; es decir, lo que subyace como característica principal dentro del fenómeno expansivo es el reconocimiento intuitivo de que el valor de la distribución de presión dentro y aun fuera de la capa límite pueda ser alterada

Fig. 1.



respecto al valor uniforme que alcanza con una descripción clásica.

Es pertinente aclarar que la descripción de este modelo, no toma en cuenta la posibilidad real de tener flujo de calor longitudinal a lo largo de la placa; sin embargo, esta situación es aun mas compleja de ser analizada y no entra en las consideraciones del presente trabajo. Sin lugar a dudas, es significativo anticipar que una orientación hacia este tipo de problemas que tomen en cuenta la transferencia de calor longitudinal sea en el futuro, materia de un mayor cuidado y profundo análisis.

Bajo las anteriores consideraciones las ecuaciones adimensionales de Navier-Stokes pueden escribirse como (Schlichting, [32]) :

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0 \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = & - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{Gr}{R^2} T \cos \alpha - \frac{M}{Fr} \gamma (p-p_\infty) \cos \alpha \\ & + \frac{1}{R} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \mu \left[2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \mu \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right] \right\} \quad (3.2) \end{aligned}$$

$$\rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{Gr}{R^2} T \sin \alpha - \frac{M}{Fr} \gamma (p-p_\infty) \sin \alpha$$

$$+ \frac{1}{R} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \mu \left[2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \mu \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right] \right\} \quad (3.3)$$

$$\rho u \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = \frac{1}{PrR} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right] \right\} + Ec \left[u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} \right] + \frac{Ec}{R} \mu \Phi(x, y) \quad (3.4)$$

donde Φ representa la función de disipación y esta definida por la expresión :

$$\Phi = 2 \left\{ \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]^2 + \left[\frac{\partial v}{\partial y} \right]^2 \right\} + \left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right]^2 - \frac{2}{3} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right]^2 \quad (3.5)$$

en las anteriores ecuaciones R , Pr , Gr , Ec , M , Fr y γ representan los parámetros adimensionales definidos por $R = \rho_{\infty}^* u_{\infty}^* l^* / \mu_{\infty}^*$, $Pr = \mu^* c_p / k$, $Gr = g \beta l^{*3} (T_w^* - T_{\infty}^*) / \nu_{\infty}^*$, $Ec = u_{\infty}^{*2} / c_p (T_w^* - T_{\infty}^*)$, $M = u_{\infty}^* / c_{\infty}^*$, $Fr = gl^* / u_{\infty}^{*2}$ y $\gamma = c_p / c_v$ y son respectivamente los números de Reynolds, Prandtl, Grashof, Eckert, Mach, Froude y razón de los calores específicos. Paralelamente, la coordenada longitudinal x y la transversal y se miden desde el borde principal de la placa plana y se definen respectivamente como $x = x^* / l^*$, $y = y^* / l^*$; donde l^* representa la distancia longitudinal por encima de la cual se tiene la presencia del salto. Similarmente, las componentes longitudinal y transversal del campo de velocidad $u(x, y)$, $v(x, y)$ se adimensionalizan con referencia a u_{∞}^* , esto es, $u = u^* / u_{\infty}^*$, $v = v^* / u_{\infty}^*$, asimismo para la presión

se tiene $p = p^* / \rho_\infty^* u_\infty^{*2}$, la densidad como $\rho = \rho^* / \rho_\infty^*$, la viscosidad $\nu = \nu^* / \nu_\infty^*$ y finalmente la temperatura con referencia a la diferencia de temperatura entre la placa plana y la corriente libre, $\vartheta = T^* / (T_w^* - T_\infty^*)$; sin embargo, resultará mas cómodo trabajar con $T = \vartheta / \vartheta_w$. Para mayores detalles sobre la simbología utilizada, conviene consultar la nomenclatura proporcionada al inicio del presente trabajo. Antes de complementar las ecuaciones con las condiciones en la frontera, conviene mencionar ciertos límites a las anteriores ecuaciones. En particular, para el modelo de expansión térmica en el flujo laminar es permisible hacer las siguientes simplificaciones : Dado que la velocidad de la corriente libre es considerablemente mas pequeña que la velocidad del sonido, los trabajos de compresión y fricción son despreciables y esto implica que el número de Mach y el de Eckert sean pequeños. Por otro lado, el número de Froude solamente es importante para aquellos flujos que forman superficie libre; es decir, los que directamente son afectados por la gravedad; en el presente caso la sustancia de trabajo es el aire y en consecuencia el número de Froude tendrá un valor grande. Además, la viscosidad del aire es pequeña con lo cual para velocidades moderadas que permitan un flujo laminar, el número de Reynolds tomará valores grandes, finalmente el número de Grashof es importante solamente en aquellas situaciones donde los efectos de flotación conducen a que la convección libre predomine sobre la forzada, lo cual no es el caso para el presente modelo; en consecuencia las ecuaciones bajo estas consideraciones pueden tomarse sin pérdida de generalidad en una primera aproximación, como :

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0 \quad (3.6)$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$+ \frac{1}{R} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \mu \left[2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \mu \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right] \right\} \quad (3.7)$$

$$\rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial y}$$

$$+ \frac{1}{R} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \mu \left[2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \mu \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right] \right\} \quad (3.8)$$

$$\rho u \frac{\partial T}{\partial x} + \rho v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{PrR} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \frac{\partial T}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \frac{\partial T}{\partial y} \right] \right\} \quad (3.9)$$

Como puede apreciarse del sistema (3.6)-(3.9), se tienen seis incógnitas (u, v, p, T, ρ, μ) para única y exclusivamente cuatro ecuaciones, de tal forma que para poder completar y hacerlo compatible al sistema anterior, es necesario añadir una ecuación

de estado, junto con una ley de tipo empírico que establezca la relación entre la viscosidad μ y la temperatura T . En relación a la primera situación lo mas simple es asumir un gas ideal y en ese caso la ecuación de estado puede escribirse como :

$$\rho T = p / p_{\infty} \quad (3.10)$$

A pesar de que para el caso del aire, bien podría utilizarse la fórmula de interpolación de Sutherland como ha sido demostrado por Driest [33] para correlacionar la viscosidad con la temperatura, frecuentemente es mas útil emplear una relación lineal entre estas variables, siempre y cuando la temperatura no sea suficientemente alta. Para el presente caso :

$$\mu = T \quad (3.11)$$

El conjunto de ecuaciones (3.6)-(3.11) forman un sistema de seis incógnitas con seis ecuaciones, por consiguiente el problema deberá complementarse con las correspondientes condiciones en la frontera para intentar una solución particular. De ellas, la más relevante es la que produce el efecto de expansión sobre el gas, junto con la condiciones de no deslizamiento sobre la placa plana y el hecho de que la placa es impermeable, esto en las variables adimensionales toma la forma :

$$\text{en } y = 0 \quad | \quad u = v = 0, \quad \begin{cases} T = 1, & \text{si } x \leq 1 \\ T = T_w, & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad (3.12)$$

Adicionalmente, una condición inicial sobre la variable x deberá dar cuenta del patrón de flujo en regiones aguas arriba de la zona del escalón de temperatura y por los comentarios introducidos al comienzo de esta sección, tanto el perfil de velocidad como la distribución de la temperatura asumen valores uniformes. En consecuencia, aquella puede escribirse como :

$$\text{en } x = 0 ; y > 0 \quad | \quad v = 0 , \quad u = T = 1 \quad (3.13)$$

Finalmente, para regiones suficientemente alejadas de la superficie de la placa plana, el patrón de flujo deberá recuperar los valores no perturbados -tanto para la velocidad como para la temperatura- de la corriente libre y son estos a saber :

$$x^2 + y^2 \rightarrow \infty \quad | \quad v \rightarrow 0 , \quad u \rightarrow 1 , \quad T \rightarrow 1 \quad (3.14)$$

El problema definido por las ecuaciones (3.6)-(3.14) constituye el punto de partida para el análisis completo del proceso de expansión térmica. Como puede apreciarse, el sistema depende exclusivamente de tres parámetros adimensionales : los números de Reynolds, R , Prandtl, Pr y la razón de la temperatura de la pared a la temperatura de la corriente uniforme, T_w^* / T_∞^* . Pero al elegir al aire como sustancia de trabajo, el número de Prandtl queda automáticamente determinado con un valor constante e igual a 0.72 ,por consiguiente los únicos parámetros que realmente afectan la solución del problema son el Reynolds y la razón de temperatura. Con lo anterior claramente lo que se pretende es

encontrar para un valor fijo de Prandtl un conjunto finito de soluciones según se varíe los números de Reynolds y la razón de temperatura. Sin embargo, la certeza de estar trabajando con números de Reynolds altos permite el moderno empleo de la teoría de la capa límite con la cual y como se evidenciará mas adelante, se elimina la dependencia en una primera aproximación del número de Reynolds. Esto tiene por ende, un profundo significado : el proceso de expansión del gas queda única y exclusivamente dependiente de la razón de la temperatura. De ser así, los valores que se asignan a este parámetro hace posible caracterizar la evolución que sufre el gas desde aquellas soluciones que son próximas a la solución de Blasius, hasta una situación que degenera en la separación de la capa límite.

Para poder presentar entonces el esquema que conduce al desarrollo dinámico de la expansión del gas, es necesario revisar los antecedentes que provee la teoría clásica de la capa límite. Es desde aquí, donde se pueden encontrar las fallas estructurales que conducen a un replanteamiento de las ecuaciones de movimiento.

3.3. *El Fracaso de la Teoría Clásica.*

A pesar de que el problema del escalón de temperatura ha recibido considerable atención por parte de la literatura especializada (ver las citas siguientes : Chapman, [34], Klein, [35], Donoughe, [36], Spalding, [37] Hartnett, [38]) y que además ha dado origen de manera genérica, al estudio de la capa límite térmica sobre objetos con una distribución de temperatura arbitraria, trabajos que por cierto tiene como referencia obligada

la solución integral para el flujo de calor con altos números de Prandtl proporcionada por Lighthill [39]; los análisis anteriores encuentran severas dificultades si se considera el estudio de la estructura fluido-dinámica en regiones muy próximas al cambio, en este caso discontinuo, en la condición en la frontera; cambio que por cierto no es otra cosa mas que la presencia del escalón de la temperatura. Es importante mencionar que la necesidad de llevar a cabo un análisis local para la región de salto, sigue muy de cerca el estudio equivalente que realizó Goldstein [3] para la región próxima al borde de salida, para el caso de una placa plana y donde se da inicio a la formación de la estela.

Por consiguiente para averiguar lo que acontece en esta región, es indispensable recurrir a un análisis local de las ecuaciones convencionales de la capa límite. Estas se deducen directamente de las ecuaciones (6)-(14); sin embargo, se pueden suponer preliminarmente ciertas hipótesis concernientes a la naturaleza del perfil de velocidades. Esto es, el problema en cuestión tiene una interesante particularidad y proviene del hecho de que el perfil de temperaturas queda confinado dentro de la zona del campo de velocidad, donde la componente de velocidad longitudinal u es prácticamente proporcional a la distancia transversal y . Esta suposición que fue inicialmente introducida por Levêque [40] para altos números de Prandtl y conocida como la aproximación de Lighthill, es igualmente aplicable cuando el escalón de la temperatura inicia a una distancia $x = 1$ del borde principal donde se ha establecido ya un perfil de velocidad. No obstante, para aplicar estos resultados, es necesario previamente deducir las ecuaciones de la capa límite, para ello se hace uso de

las siguientes expansiones :

$$u = U_0 + R^{-1/2}U_1 + \dots, \quad v = R^{-1/2}V_1 + \dots, \quad p = P_0 + R^{-1/2}P_1 + \dots \quad (3.15)$$

junto con la variable interna de la capa límite $y = R^{-1/2}Y$.
Con estas transformaciones las ecuaciones (3.6)-(3.9) pueden escribirse en el orden mas bajo en $R^{-1/2}$ como :

$$\frac{\partial \rho U_0}{\partial x} + \frac{\partial \rho V_0}{\partial Y} = 0 \quad (3.16)$$

$$\rho U_0 \frac{\partial U_0}{\partial x} + \rho V_0 \frac{\partial U_0}{\partial Y} = - \frac{\partial P_0}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial Y} \left[\mu \frac{\partial U_0}{\partial Y} \right] \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial P_0}{\partial Y} = 0 \quad (R^{-1/2}) \quad (3.18)$$

$$\rho U_0 \frac{\partial T}{\partial x} + \rho V_0 \frac{\partial T}{\partial Y} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial Y} \left[\mu \frac{\partial T}{\partial Y} \right] \quad (3.19)$$

complementadas con las condiciones inicial y en las fronteras que correspondiendo a las ecuaciones (3.12)-(3.14) permanecen inalteradas. Antes de intentar una solución a la ecuación de la energía, es menester utilizar desde el punto de vista de la teoría clásica de la capa límite, la ecuación (3.18) que evidencia que la distribución de presión es a lo más una función de x , añadido al

hecho de que para una placa plana en el orden mas bajo en $R^{-1/2}$, la distribución de presión se determina directamente con ayuda de la ecuación de Euler y que sin mayores dificultades, permite establecer que para el caso de una placa plana tiene el valor de $P_0(x) = \text{constante}$, resultado el cual al incorporarse a la ecuación (3.17) elimina el efecto, en el orden mas bajo, del término forzante originado por la fuerza de presión.

Sin embargo, las anteriores ecuaciones mantienen el signo de ser ecuaciones de flujo compresible para la capa límite y como tales son mas difíciles de resolver. Para tal efecto, y bajo el resultado independiente de Howarth [41] y Dorodnitsyn [42] es posible introducir una transformación la cual reduce las ecuaciones compresibles a una forma prácticamente equivalente a aquellas ecuaciones que se emplean para las de un flujo incompresible; específicamente esta transformación puede expresarse como :

$$\eta = \int_0^Y \rho(x, Y) dY \quad (3.20)$$

Recordando que el escalón de temperatura se inicia aguas abajo del desarrollo de la capa viscosa, es entonces posible utilizar en este límite la aproximación de Lighthill que permite escribir formas aproximadas para el perfil de velocidades, en el supuesto de que la capa térmica es mucho más delgada que la capa viscosa. Estas formas para la distribución de velocidades toman la forma :

$$\rho U_0 = \rho \sigma(x) \eta \quad , \quad \rho V_0 = - \frac{\partial}{\partial x} \left[\sigma(x) \frac{\eta^2}{2} \right] \quad (3.21)$$

con esta solución para el campo de velocidad, el problema restante para la ecuación de la energía (3.19) con sus correspondientes condiciones en la frontera puede simplificarse considerablemente si además se hace uso de las siguientes transformaciones (ver Higuera op.cit. para mayores detalles) :

$$T = 1 + (T_w - 1) \vartheta (\zeta) \quad , \quad \zeta = \eta / \delta_T(x) \quad (3.22)$$

de esta manera, la ecuación de la energía satisface la ecuación :

$$\frac{d^2 \vartheta}{d\zeta^2} + Pr \zeta^2 \frac{d\vartheta}{d\zeta} = 0 \quad (3.23)$$

con :

$$\vartheta (0) = 1 \quad , \quad \vartheta (\infty) = 0 \quad (3.24)$$

y tiene por solución a la siguiente expresión :

$$\vartheta = 1 - \frac{(9Pr)^{1/3}}{\Gamma(1/3)} \int_0^{\zeta} \exp(-Pr v^3/3) dv \quad (3.25)$$

donde v representa una variable muda, $\Gamma(1/3)$ es la función Gamma de $1/3$ y $\delta_T(x)$ es el espesor de la capa límite térmica y queda relacionado con $\sigma(x)$ a través de la condición de compatibilidad, dada por la expresión :

$$\sigma(x) \delta_T^2 \frac{d\delta_T}{dx} + \frac{\delta_T^3}{2} \frac{d\sigma}{dx} = \frac{1}{Pr} \quad (3.26)$$

Esta ecuación ordinaria deberá resolverse con ayuda de una suposición razonable para el valor de la función $\sigma(x)$ y con alguna condición inicial y en regiones próximas al escalón de la temperatura que es equivalente a tomar el límite cuando $x \rightarrow 1$. Para esto puede observarse que para regiones suficientemente alejadas de la región donde se inicia el salto, el perfil de velocidad deberá recuperar el perfil de velocidad dado por la solución de Blasius; pero con alguna modificación debido a la presencia del escalón de la temperatura. Esto obliga a que la componente longitudinal de la velocidad en regiones aguas abajo sea de la forma :

$$U_0 = f'_B(\zeta) \quad (3.27)$$

donde f_B es la función de corriente adimensionalizada para el perfil de Blasius; de esta forma la función $\sigma(x)$ puede escribirse después de ciertas manipulaciones como :

$$\sigma(x) = R^{1/2} \lambda / (x)^{1/2} \quad (3.28)$$

donde $\lambda = f''_B(0) = 0.33206$. Con ayuda de esta expresión para $\sigma(x)$, la ecuación (3.26) puede resolverse para regiones cercanas al escalón de la temperatura, esto es, para cuando $x \rightarrow 1$, junto con la condición inicial $\delta(1) = 0$, debido a que la capa límite térmica inicia su crecimiento en $x = 1$. El resultado para $x \rightarrow 1$ produce la siguiente expresión para el espesor de la capa límite térmica :

$$R^{1/2} Pr^{1/3} \delta_T(x) = \left(\frac{3}{\lambda} \right)^{1/3} (x - 1)^{1/3} \quad (3.29)$$

Este resultado para el espesor de la capa límite térmica es muy significativo por lo siguiente. Con ayuda de la variable de Howarth-Dorodnitsyn ec.(3.20) y de las relaciones (3.22) y (3.25) puede demostrarse fácilmente que el espesor de la capa límite viscosa esta dado por :

$$\delta_v(x) = \delta_T(x) \int_0^{\infty} \left[1 + (T_w - 1) \Gamma(1/3, Pr \zeta^3 / 3) / \Gamma(1/3) \right] d\zeta \quad (3.30)$$

Independientemente de que la integral de la expresión (3.30) pueda evaluarse explícitamente los cálculos son un tanto irrelevantes y lo que merece especial atención es justamente el hecho de que el espesor de la capa límite viscosa resulte también

proporcional al espesor térmico. Con ello y con ayuda de la ecuación (3.29) puede verse fácilmente que $\delta_v(x) \propto (x - 1)^{1/3}$. Adicionalmente y utilizando la teoría potencial linealizada (ver Smith, [24], op.cit.) puede demostrarse que la corrección de la presión P_1 en la expansión asintótica (3.15) al flujo potencial externo es directamente proporcional a la pendiente del espesor de la capa límite viscosa. Este resultado junto con los anteriores comentarios, permite concluir que la presión inducida P_1 se comporta como :

$$P_1 \propto (x - 1)^{-2/3} \quad (3.31)$$

lo cual da un comportamiento divergente para cuando $x \rightarrow 1$; es decir, la presencia de esta singularidad invalida las ecuaciones fundamentales de la teoría clásica de la capa límite en una región próxima $x \rightarrow 1$. Así, el gradiente de presión para regiones en la vecindad de $x \rightarrow 1$ será lo suficientemente fuerte como para influenciar significativamente el movimiento del fluido, en una región muy cercana a la superficie de la placa plana y lo que es aún más relevante : el gradiente de presión en P_1 deja de ser una pequeña corrección para convertirse en un término del mismo orden de magnitud que los términos inerciales de las ecuaciones fundamentales de la capa límite.

Consecuentemente, esta característica local de la presión P_1 en regiones próximas al escalón de la temperatura, altera significativamente el esquema jerárquico mencionado en la sección 2.1, ya que en el análisis anterior el término inercial de la ecuación (3.17) es de orden $(x - 1)^{-1/3}$ mientras que la fuerza de

presión $R^{-1/2} dP_1 / dx$ es de orden $R^{-1/2} (x - 1)^{-5/3}$, como se sigue de la ecuación (3.31). De esta manera cuando se está en regiones próximas al inicio del escalón de la temperatura, la fuerza de presión eventualmente será del mismo orden de magnitud que las fuerzas inerciales de orden principal siempre que :

$$x - 1 = O(R^{-3/8}) \quad (3.32)$$

Así entonces, cuando la escala dada por la relación (3.32) se mantiene válida dentro del conjunto de ecuaciones fundamentales para la capa límite, surge un novedoso conjunto de eventos físicos que quedan enmarcados en un esquema interactivo popularmente conocido como la teoría de las tres capas; teoría por cierto que fue rigurosamente fundamentada independientemente por Stewartson [43] y Messiter [44] y cuyos argumentos estructurales serán presentados con relativa simplicidad a lo largo del presente capítulo.

3.4. La Estructura de las Tres Capas.

Para delimitar los eventos físicos que se originan dentro de la escala donde $x - 1 = O(R^{-3/8})$ es indispensable remitirse al análisis anterior, donde al menos se han sido delimitado dos regiones : la primera es una región cuyas propiedades no solamente son no lineales y viscosas sino que además estas fuerzas son alteradas por la fuerza de presión inducida P_1 , efecto el cual fija la longitud de escala (3.32). La segunda región comprende el resto de la capa límite y sus propiedades pueden ser linearizadas debido al efecto predominantemente pequeño del espesor de

desplazamiento; claramente el orden de magnitud de estas regiones lo delimitan respectivamente las variables ζ y Y y son respectivamente $Y = O(R^{-1/8})$ y $Y = O(1)$. Finalmente es necesaria una tercera región que alcanza a la región de flujo potencial la cual relacione a la presión con el espesor de desplazamiento, según se aprecia de la relación (3.31). Aquí se espera que el espesor de esta región sea comparable con la escala (3.32) por consiguiente $Y = O(R^{1/8})$. Son pues estas tres regiones las que delimitan la nueva estructura interactiva y la naturaleza de la interacción viscosa-noviscosa puede describirse mediante los siguientes argumentos.

Es entonces posible reafirmar que la estructura de las tres capas se extiende sobre una distancia longitudinal y alrededor del punto donde la temperatura de la placa plana se incrementa de orden $l^* R^{-3/8}$. Complementariamente, en la dirección normal a la placa plana, la estructura consiste de las siguientes regiones :

Una capa intermedia o principal no viscosa y rotacional donde como se ha anticipado, es de espesor $l^* R^{-1/2}$ e incluye prácticamente a la totalidad de la capa límite clásica; sin embargo, la corriente de flujo en esta zona sufre un desplazamiento hacia la zona de potencial de orden $l^* R^{-5/8} A(x)$, debido a la presencia de la capa inferior donde el efecto de expansión térmica es lo suficientemente fuerte como para ocasionar distorsiones en la corriente de flujo, $A(x)$ representa el espesor de desplazamiento que deberá ser determinado de las ecuaciones fundamentales. Si bien la capa intermedia se altera por el efecto expansivo, la velocidad longitudinal en esta capa es prácticamente

determinada por la solución de Blasius, solo que relativamente modificada por la presencia de la capa inferior. En consecuencia, $u = f'_B \left(Y + R^{-1/8} A(x) \right)$.

Para la capa inferior donde esta presente de manera muy significativa el proceso de expansión térmica, el espesor de esta capa deberá ser un orden de magnitud mucho menor que la capa intermedia, como se puede inferir de la variable ζ . Si δ_v representa el espesor de la capa inferior, entonces deberá ocurrir que $\delta_v \ll l^* R^{-1/2}$, mientras que la velocidad longitudinal $u_v = O(u_\infty^* l^* R^{1/2} \delta_v)$. Equivalentemente, los ordenes de magnitud de los diferentes términos en la ecuación de cantidad de movimiento para la capa inferior son $V \cdot \nabla u = O(u_v^2 / \ell)$, donde V representa el campo de velocidad, ∇ es el operador gradiente y ℓ juega el papel de la longitud de la región de interacción. Similarmente, para la fuerza de presión $(\partial p / \partial x) / \rho = O(u_\infty^{*2} R^{-1/2} l^{*2/3} / \ell^{5/3})$ y para el término viscoso se tendría que $\partial^2 u / \partial \eta^2 = O(u_v / \delta_v^2)$, donde claramente para arribar a estas consideraciones se ha hecho uso de la longitud de escala (3.32) y de la forma local de la distribución de presión P_1 , expresión (3.31). En consecuencia el soporte físico que delimita a la presente capa, es que estos términos sean del mismo orden de magnitud y esto sólo ocurre si $\ell = O(l^* R^{-3/8})$, junto con $\delta_v = O(l^* R^{-5/8})$, $u_v = O(u_\infty^* R^{-1/8})$ y finalmente el orden de magnitud para la fuerza de presión, $\Delta p = O(\rho u_\infty^* R^{-1/4})$.

Finalmente la capa superior es distinguible por un espesor que va como $l^* R^{-3/8}$, la cual se extiende en la región de flujo potencial. Como se ha comentado previamente, esta región siente la

influencia de la capa intermedia a través del espesor de desplazamiento y tal efecto produce perturbaciones sobre la velocidad y la presión cuyos ordenes de magnitud pueden escribirse respectivamente como $u_{\infty}^* \delta_v / l \sim u_{\infty}^* R^{-1/4}$ y $\Delta p \sim \rho u_{\infty}^{*2} R^{-1/4}$. Como se ha comentado previamente, esta zona es necesaria para mantener una relación entre la presión inducida y el espesor de desplazamiento; relación por cierto que puede establecerse fácilmente usando la teoría potencial linearizada para superficies de sustentación delgadas y que fue ampliamente estudiada en el pasado por diversos autores, para mayores detalles sobre el particular se remite al lector al excelente libro de Liepmann y Roskko [45]. Los detalles de escala de estas tres zonas aparecen confinados claramente en la fig.1.

Antes de establecer formalmente el conjunto de ecuaciones que gobiernan el comportamiento fluido-dinámico que resulta del proceso de expansión térmica dentro del gas para cada capa; es pertinente aclarar que la estructura de las tres capas tiene como fin principal remover la discontinuidad en la componente de velocidad transversal y por consiguiente en la pendiente del espesor de desplazamiento, justo en la región donde se inicia el escalón de la temperatura.

Sirvan pues las líneas siguientes para especificar detalladamente las ecuaciones de movimiento para cada una de las capas mencionadas.

3.4.a. Estructura de la Capa Intermedia.

Para iniciar la discusión en esta sección, puede

observarse que la forma analítica de la presión inducida P_1 junto con la ecuación de continuidad (3.6) y los comentarios anteriores, permiten establecer una solución asintótica de la forma :

$$(u, v, p) = (U_B(\eta), 0, p_S) + (R^{-1/8} \tilde{u}_1, R^{-1/4} \tilde{v}_1, R^{-1/4} \tilde{p}_1) + \dots \quad (3.33)$$

$$(T, \mu, \rho) = (1, 1, 1) + R^{-1/8} (T_1, \mu_1, \rho_1) + \dots$$

donde $U_B(\eta)$ representa la solución de Blasius al perfil de velocidad y viene dada por la ecuación (3.27) y su forma asintótica para $\eta \rightarrow 0$ y $x \rightarrow 1$ es $U_B = \lambda \eta + \dots$, con la constante λ dada posteriormente a la ecuación (3.28).

En el presente caso puede demostrarse que para una placa plana la presión $p_S = 0$. Si la expansión dada por la ecuación (3.33) se sustituye en el sistema (3.6)-(3.9) con ayuda de la variable interna $y = R^{-1/2} \gamma$ y la nueva escala longitudinal que fija la estructura de las tres capas :

$$x - 1 = R^{-3/8} \tilde{x} \quad (3.34)$$

entonces el conjunto resultante de ecuaciones resultan linealizadas y con ayuda de la transformación de Howarth-Dorodnitsyn (3.20) son de la forma :

$$\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial \eta} = 0 \quad (3.35)$$

$$U_B \frac{\partial u_1}{\partial X} + U_B'(\eta) \tilde{v}_1 = 0 \quad (3.36)$$

donde la prima sobre U_B significa derivada con respecto a η .

Similarmente las restantes ecuaciones aparecen como :

$$\frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial \eta} = 0 \quad (3.37)$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial X} = 0 \quad (3.38)$$

El conjunto de ecuaciones (3.35)-(3.36) puede integrarse facilmente y en términos de las componentes \tilde{u}_1 y \tilde{v}_1 será :

$$\tilde{u}_1 = U_B'(\eta) \tilde{A}(X) \quad , \quad \tilde{v}_1 = -U_B(\eta) \tilde{A}'(X) \quad (3.39)$$

complementariamente

$$\tilde{p}_1 = P(X) \quad , \quad T_1(X, \eta) \rightarrow 1 \quad (3.40)$$

El hecho de que $T_1(X, \eta) \rightarrow 1$ para la capa intermedia se deduce facilmente de un acoplamiento con la capa superior donde el campo de temperatura es uniforme. Es conveniente aclarar que tanto $\tilde{A}(X)$ como $P(X)$ son funciones desconocidas de X y forman parte del problema completo. Es interesante también hacer notar, que estas funciones que definen el espesor de desplazamiento y la presión en el campo de interés, deben satisfacer ciertas condiciones de

frontera con respecto a la variable \bar{X} , así cuando $x^- \rightarrow 1$ que es equivalente a exigir que la variable interna $\bar{X} \rightarrow -\infty$, la componente de velocidad longitudinal deberá ser próxima al perfil de velocidad de Blasius, esto es $u \rightarrow U_B(Y)$ cuando $\bar{X} \rightarrow -\infty$, esta situación conduce a que $\bar{A}(-\infty) \rightarrow 0$. Por otro lado cuando $\bar{X} \rightarrow \infty$ $\bar{A}(\bar{X})$ se acopla con la forma clásica del espesor de desplazamiento dado por la expresión (3.30), mientras que la presión P_1 en las regiones aguas arriba $P_1 \rightarrow 0$ y en las regiones aguas abajo ocurre que $P_1 \rightarrow (x - 1)^{-2/3}$ cuando $x^+ \rightarrow 1$ ó $\bar{X} \rightarrow \infty$.

3.4.b. Estructura de la Capa Superior.

La capa superior es necesaria debido al efecto de desplazamiento ocasionado por la expansión térmica del gas, efecto el cual desgraciadamente no es contemplado por las teorías convencionales de la capa límite. Ahora bien la naturaleza de las ecuaciones en esta región son de tipo elíptico, por lo que el proceso de expansión transmite su información aguas arriba, alterando significativamente dentro de la escala \bar{X} el flujo potencial. De esta forma, la expansión del gas altera la capa inferior mediante la interacción viscosa y la capa superior.

Para evaluar la forma de las ecuaciones dentro de esta región la forma de la expansión (3.33) y la solución (3.39) sugieren una expansión de la forma :

$$(u, v, p) = (1, 0, 0) + R^{-1/4} (\bar{u}_2, \bar{v}_2, \bar{p}_2) + \dots$$

$$(T, \mu, \rho) = (1, 1, 1) + R^{-1/4} (T_2, \mu_2, \rho_2) + \dots$$

(3.41)

junto con $y = R^{-3/8} \bar{Y}$ y la $x - 1 = R^{-3/8} \bar{X}$. Al sustituir estas expansiones en las ecuaciones (3.6)-(3.9) y utilizando de nuevo la variable de Howarth-Dorodnitsyn definida para el presente caso como $\bar{\eta} = \int_0^{\bar{Y}} \rho(\bar{X}, \bar{Y}) d\bar{Y}$ se llega al siguiente conjunto de ecuaciones de Euler :

$$\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial \bar{X}} + \frac{\partial \bar{v}_2}{\partial \bar{\eta}} = 0 \quad (3.42)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial \bar{X}} = - \frac{\partial \bar{p}_2}{\partial \bar{X}} \quad (3.43)$$

$$\frac{\partial \bar{v}_2}{\partial \bar{X}} = - \frac{\partial \bar{p}_2}{\partial \bar{\eta}} \quad (3.44)$$

$$\frac{\partial \bar{T}_2}{\partial \bar{X}} = 0 \quad (3.45)$$

para este sistema la siguiente simplificación es posible : se toma la derivada de la ecuación (3.43) con respecto a \bar{X} y similarmente la derivada de la ecuación (3.44) con respecto a $\bar{\eta}$; posteriormente se suman las ecuaciones resultantes y haciendo uso además de la ecuación (3.42) puede derivarse que la presión \bar{p}_2 satisface una ecuación de Laplace, esto es :

$$\nabla^2 \tilde{p}_2 = 0 \quad (3.46)$$

es evidente que el acoplamiento de la zona superior con la zona intermedia, deberá conducir a una de las condiciones en la frontera necesarias para resolver la ecuación de Laplace. De hecho este acoplamiento se lleva a cabo cuando $\tilde{\eta} \rightarrow 0$ ó $\eta \rightarrow \infty$ visto desde la zona externa o la intermedia según sea la capa que se este considerando; lo cierto es que el resultado de tal límite conduce a que :

$$\tilde{p}_2(\tilde{X}, 0) = \tilde{P}(\tilde{X}) \quad , \quad v_2(\tilde{X}) = -\tilde{A}'(\tilde{X}) \quad (3.47)$$

por otro lado el acoplamiento de esta zona con el flujo potencial conduce a que $\tilde{p}_2 \rightarrow 0$ cuando $\tilde{\eta} \rightarrow \infty$. La solución a este problema de Laplace ha sido ampliamente estudiado en la literatura en relación con el problema aerodinámico de la sustentación de cuerpos delgados (ver Liepmann y Roskho, op.cit.), circunstancia geométrica que permite linearizar las ecuaciones. Tomando en cuenta que la ecuación de Laplace es una ecuación lineal, se puede hacer uso del principio de superposición, en el entendido de que la solución resultante puede escribirse como una distribución continua de fuentes y sumideros. Estas consideraciones sirven para demostrar que la solución final produce una relación integral entre la presión y el espesor de desplazamiento de la forma :

$$P(X) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\bar{A}(X_1) dX_1}{X - X_1} \quad (3.48)$$

donde la barra sobre el signo integral representa el valor principal de la integral de Cauchy-Hilbert.

Al igual que la zona intermedia, la solución de la capa superior depende del conocimiento de las funciones desconocidas $P(X)$ y $\bar{A}(X)$; en consecuencia, el conocimiento de estas funciones solamente lo proporciona la interacción que se lleva a cabo entre la capa superior con la inferior. A continuación se analiza la estructura de esta capa, la cual constituye el análisis central del presente trabajo.

3.4.c. Estructura de la Capa Inferior.

Podría decirse sin pérdida de generalidad, que lo establecido hasta el momento solo constituye el punto de partida para analizar el fenómeno de interés: el proceso de la expansión térmica del gas en la capa límite. Ciertamente tal aseveración queda ratificada con la presentación de la capa inferior, donde la necesidad de retener en las ecuaciones de movimiento tanto las fuerzas inerciales, como las viscosas y las de presión origina un problema único en las operaciones de transferencia de calor para flujos de capa límite. Para caracterizar esta región es indispensable mantener presentes los comentarios señalados en la

sección introductoria 3.4., donde el balance principal de estas fuerzas condujo a la nueva relación de escala longitudinal \bar{X} ; también y de nueva cuenta, las formas de las expresiones (3.33) y (3.39) sugieren una expansión para la región inferior de la forma

$$(u, v, p) = (R^{-1/8} \bar{U}, R^{-3/8} \bar{V}, R^{-1/4} \bar{P}) + \dots \quad (3.49)$$

junto con la variable transversal para la capa inferior caracterizada por $y = R^{-5/8} \bar{Y}$. El uso de nuevo de esta expansión en las ecuaciones (3.6)-(3.9) conduce al siguiente sistema de ecuaciones de tipo parabólico :

$$\frac{\partial \rho \bar{U}}{\partial \bar{X}} + \frac{\partial \rho \bar{V}}{\partial \bar{Y}} = 0 \quad (3.50)$$

$$\rho \bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{X}} + \rho \bar{V} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{Y}} = - \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{X}} + \frac{\partial}{\partial \bar{Y}} \left(\mu \rho \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{Y}} \right) \quad (3.51)$$

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{Y}} = 0 \quad (3.52)$$

$$\rho \bar{U} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{X}} + \rho \bar{V} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{Y}} = \frac{1}{Pr} \left(\mu \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{Y}} \right) \quad (3.53)$$

el acoplamiento de la expansión (3.49) cuando $\bar{Y} \rightarrow \infty$ con la capa intermedia a través del uso de la expansión (3.33), proporciona la

primera condición en la frontera para el sistema de ecuaciones (3.50)-(3.53); en particular, conduce a la llamada relación de desplazamiento :

$$\bar{O} = \lambda (\eta + \bar{A}(\bar{X})), \quad T \rightarrow 1 \quad \eta \rightarrow 0 \quad (3.54)$$

expresión que se obtiene con ayuda de las soluciones (3.27) y (3.39); puede verse además que en la región aguas arriba la solución del sistema anterior de ecuaciones, debe converger a la solución no perturbada de Blasius, situación que puede reproducirse con el acoplamiento que resulta entre las expansiones (3.49) y el hecho de que desde la variable longitudinal externa x , ocurre que $u \rightarrow U_B(\eta)$ cuando $\bar{X} \rightarrow -\infty$. Así se tiene que :

$$(\bar{O}, \bar{V}, \bar{P}, \bar{A}, T) \rightarrow (\lambda\eta, 0, 0, 0, 1), \quad \bar{X} \rightarrow -\infty \quad (3.55)$$

Tomando en consideración que las ecuaciones son de segundo orden en la variable \bar{Y} , un conjunto de condiciones para la superficie de la placa plana deberán de imponerse y son a saber :

$$\bar{Y} = 0 : \bar{O} = \bar{V} = 0 \quad , \quad T = \begin{cases} T = 0, & \text{si } \bar{X} < 1 \\ T = T_w, & \text{si } \bar{X} \geq 1 \end{cases} \quad (3.56)$$

Es conveniente observar que la relación integral de la presión con el espesor de desplazamiento dada por la ecuación (3.48), transforma al conjunto anterior de ecuaciones en unas de tipo elíptico, lo cual obliga a introducir equivalentemente

condiciones en la frontera para cuando $\bar{x} \rightarrow \infty$. Para el caso considerado es suficiente exigir que la presión converga a cero, dado que en la región aguas abajo donde ocurre la etapa de calentamiento convectivo del gas, la solución deberá retomar la solución de Blasius modificada por la presencia del salto y es bien sabido que la relación $\bar{P} \equiv 0$ subsiste, entonces :

$$\bar{P} \rightarrow 0 \quad , \quad \bar{x} \rightarrow \infty \quad (3.57)$$

Por lo tanto y a manera de resúmen el problema local definido por las ecuaciones (3.50)-(3.57) junto con la relación integral (3.48), constituye la estructura matemática que da sentido al proceso de la expansión térmica del gas. Debe reiterarse que la presión $\bar{P}(\bar{x})$ y el espesor de desplazamiento $A(\bar{x})$, son ambas funciones desconocidas y la relación integral que existe entre ambas, ocasiona que el problema sea interactivo en clara contraposición a los problemas clásicos de la capa límite, donde regularmente se tiene una estructura de solución jerárquica. Por consiguiente para hablar de la solución de este tipo de sistemas, deben abandonarse los algoritmos numéricos clásicos de solución concernientes a aquellos tipos de ecuaciones de movimiento de capa límite, donde regularmente el análisis de la zona interna puede llevarse a cabo siempre que la zona externa haya sido previamente estudiada.

Antes de finalizar el presente capítulo, es oportuno observar que el factor de escala $\lambda = 0.33206$ puede removerse de las ecuaciones (3.50)-(3.57) junto con la ecuación (3.48). Para ello se hace uso de la siguiente transformación :

$$U = \lambda^{1/4} \bar{u} \quad , \quad V = \lambda^{3/4} \bar{v} \quad , \quad P = \lambda^{1/2} \bar{p} \quad (3.58)$$

$$\bar{A} = \lambda^{-3/4} A \quad , \quad \bar{X} = \lambda^{-5/4} \bar{x} \quad , \quad \bar{Y} = \lambda^{-3/4} \bar{y}$$

lo que produce el siguiente sistema de ecuaciones, con ayuda de la relación $\mu\rho = 1$:

$$\frac{\partial \rho \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \rho \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (3.59)$$

$$\rho \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \rho \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = - \frac{d\bar{p}}{d\bar{x}} + \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left\{ \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right\} \quad (3.60)$$

$$\rho \bar{u} \frac{\partial T}{\partial \bar{x}} + \rho \bar{v} \frac{\partial T}{\partial \bar{y}} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left\{ \mu \frac{\partial T}{\partial \bar{y}} \right\} \quad (3.61)$$

donde se ha hecho uso de que la presión depende exclusivamente de la variable \bar{x} , además las condiciones (3.54) y (3.55) se reducen a las mismas expresiones, salvo que el factor λ desaparece de ellas. Las restantes condiciones permanecen inalteradas. Sin embargo, el conjunto anterior de ecuaciones compresibles se puede simplificar aún más si se hace uso de la transformación de Howarth-Dorodnitsyn, definida para la capa inferior como :

$$\bar{x} = \bar{x} \quad , \quad \bar{y} = \int_0^{\bar{y}} \rho(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{y} \quad (3.62)$$

junto con :

$$\rho \bar{u} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad , \quad \rho \bar{v} = - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (3.63)$$

en consecuencia las ecuaciones (3.59)-(3.61) toman la forma :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \bar{y}} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} - \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \bar{y}^2} = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial^3 \Psi}{\partial \bar{y}^3} \quad (3.64)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \bar{y}} \frac{\partial T}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{x}} \frac{\partial T}{\partial \bar{y}} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial \bar{y}^2} \quad (3.65)$$

en las ecuaciones anteriores se hace uso de que $\rho \mu = 1$ junto con $\rho T = 1$; además la ecuación de continuidad con ayuda de la función de corriente Ψ se satisface idénticamente. El sistema anterior de ecuaciones se complementa con las condiciones de frontera definidas previamente a través de las expresiones (3.54)-(3.57) junto con la integral de Cauchy-Hilbert, transformadas apropiadamente en términos de Ψ ; sin embargo, es más conveniente utilizar una transformación adicional que permite escribir las ecuaciones en una forma más convencional. Para cumplir con este objetivo se reserva exclusivamente la próxima subsección para presentar, en forma final, a las ecuaciones que describen la expansión térmica del gas en la capa inferior.

3.4.d. Modelo Final de las Ecuaciones de la Capa Inferior.

Siguiendo los comentarios anotados en la sección previa, se

sugiere definir las siguientes transformaciones sobre el campo de velocidad (Schlichting, op. cit.) :

$$\bar{u} = \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{y}} \quad , \quad \bar{v} = - \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{x}} \quad (3.66)$$

lo que permite reescribir el problema local para el escalón de temperatura como :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (3.67)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = - T \frac{d\bar{p}}{d\bar{x}} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \quad (3.68)$$

$$\bar{u} \frac{\partial T}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial T}{\partial \bar{y}} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial \bar{y}^2} \quad (3.69)$$

y las condiciones de frontera se transforman en :

$$\bar{y} \rightarrow \infty \quad : \quad \bar{u} \rightarrow \bar{y} + A(\bar{x}) \quad , \quad T \rightarrow 1 \quad (3.70)$$

donde $\bar{A}(\bar{x}) = A(\bar{x}) \int_0^\infty (T - 1) d\bar{y}$, debido al uso de la variable de

Howarth-Dorodnitsyn

$$\bar{x} \rightarrow -\infty : (\bar{u}, \bar{v}, \bar{p}, T) \rightarrow (\bar{Y}, 0, 0, 1) \quad (3.71)$$

$$\text{en } \bar{y} = 0, \forall \bar{x} : \bar{u} = \bar{v} = 0, T = 1 + (T_w - 1) H(\bar{x}) \quad (3.72)$$

$$\bar{x} \rightarrow \infty : \bar{p} \rightarrow 0 \quad (3.73)$$

en la ecuación (3.72) la función $H(\bar{x})$ representa la función de Heaviside. Esto permite un manejo mas simple del escalón de temperatura y finalmente la relación integral entre la presión y el espesor de desplazamiento :

$$\bar{p}(\bar{x}) = \frac{1}{\Pi} \int_0^{\infty} \frac{d\bar{A}(\bar{x}_1)}{d\bar{x}} \frac{d\bar{x}_1}{\bar{x} - \bar{x}_1} \quad (3.74)$$

que en contraste con la teoría clásica de la capa límite, transforma el problema aparentemente parabólico -según se aprecia de las ecuaciones (3.67)-(3.69) - en uno de tipo elíptico. De esta manera, el sistema de ecuaciones (3.67)-(3.74) exige el empleo de algún tratamiento numérico para el cálculo de la solución, dada la naturaleza no-lineal del modelo matemático. Como puede observarse, el sistema anterior depende fundamentalmente de dos únicos parámetros : el número de Prandtl Pr y la razón de temperaturas T_w como se había previsto anteriormente. Si bien es cierto que una solución rigurosa debería darse para diferentes valores de estos parámetros, en el presente trabajo se supone que la sustancia que incide sobre la placa plana es aire en cuyo caso, el valor del número de Prandtl queda determinado; por ello el problema local de

la expansión térmica del gas, depende única y exclusivamente de la razón de temperaturas T_w , parámetro que regula y patentiza la presencia del escalón de temperatura. Los valores que se asignen a este parámetro serán cruciales para caracterizar el tipo de metodología empleada para resolver las ecuaciones de movimiento. En particular, para valores de este parámetro cercanos a la unidad el tratamiento del problema puede seguirse con ayuda de la transformada de Fourier, dado que en este límite el problema puede ser linearizado y el próximo capítulo da cuenta de los detalles que conducen a la solución lineal. Contrariamente, para valores de T_w muy diferentes a la unidad la solución lineal impide ver una de las características más relevantes de la teoría de las tres capas: su estructura anticipa el fenómeno de la separación. Por ello, un capítulo posterior analiza la solución no-lineal mediante el empleo de técnicas numéricas.

CAPITULO IV

ANALISIS LINEAL

4.1. Planteamiento.

Para analizar lo que ocurre cuando el parámetro T_w es próximo a la unidad, lo cual es equivalente desde el punto de vista físico a exigir que la temperatura de la superficie de la placa plana es próxima al valor que tiene la temperatura de la corriente libre; situación que solamente perturba debilmente el campo de flujo; es útil introducir el parámetro de perturbación definido como $\theta_w = 1 - T_w$, tal que $\theta_w \ll 1$. Así pues los valores asignados a este parámetro permiten suponer que el flujo aguas arriba caracterizado a través de la condición (3.71), experimenta solamente una pequeña perturbación; de tal suerte que para analizar tal comportamiento se sugiere emplear los siguientes desarrollos :

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \bar{y} + \theta_w \hat{u}_0 + \dots & , & & \bar{v} &= \theta_w \hat{v}_0 + \dots \\ \bar{p} &= \theta_w \hat{p}_0 + \dots & , & & \bar{A} &= \theta_w \hat{A}_0 + \dots \\ \rho &= 1 - \theta_w \hat{T}_0 & , & & \mu &= 1 + \theta_w \hat{T}_0 + \dots \\ T &= 1 + \theta_w \hat{T}_0 + \theta_w^2 \hat{T}_1 & , & & \tau &= 1 + \theta_w \hat{\tau}_0 + \dots \end{aligned} \tag{4.1}$$

Deberá observarse que en particular la expansión propuesta

para la distribución de temperatura en potencias de θ_w , incluye términos hasta de orden cuadrático; la justificación sobre tal consideración proviene de que la presente teoría lineal produce cambios significativos en el perfil de temperatura sólo si se toman en cuenta términos de tal orden; en cualquier otro caso, si solamente se retienen términos de orden θ_w , la integración de la ecuación de la energía conduce exclusivamente a la bien conocida solución de Lighthill para el cálculo del número de Nusselt (Lighthill, op.cit.) como lo demuestran los cálculos siguientes .

Con ayuda de los comentarios arriba señalados y haciendo uso de las expansiones anteriores, las ecuaciones (3.67)-(3.74) de la capa inferior definidas en la sección 3.4.d. se transforman en el siguiente conjunto de ecuaciones lineales hasta términos de orden θ_w^2 :

$$\frac{\partial \hat{u}_0}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \hat{v}_0}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (4.2)$$

$$\bar{y} \frac{\partial \hat{u}_0}{\partial \bar{x}} + \hat{v}_0 = - \frac{d\hat{p}_0}{d\bar{x}} + \frac{\partial^2 \hat{u}_0}{\partial \bar{y}^2} \quad (4.3)$$

$$\bar{y} \frac{\partial \hat{T}_0}{\partial \bar{x}} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \hat{T}_0}{\partial \bar{y}^2} \quad (4.4)$$

$$\bar{y} \frac{\partial \hat{T}_1}{\partial \bar{x}} + \hat{u}_0 \frac{\partial \hat{T}_0}{\partial \bar{x}} + \hat{v}_0 \frac{\partial \hat{T}_0}{\partial \bar{y}} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \hat{T}_1}{\partial \bar{y}^2} \quad (4.5)$$

con las condiciones :

$$\bar{y} = 0 : \hat{u}_0 = \hat{v}_0 = 0 \quad \hat{T}_1 = 0 \quad , \quad \hat{T}_0 = H(\bar{x}) \quad (4.6)$$

$$\bar{x} \rightarrow -\infty : \hat{u}_0 \rightarrow 0, \hat{v}_0 \rightarrow 0, \hat{p}_0 \rightarrow 0, \hat{T}_0 \rightarrow 0, \hat{T}_1 \rightarrow 0 \quad (4.7)$$

$$\bar{y} \rightarrow \infty : \left\{ \begin{array}{l} \hat{u}_0 \rightarrow \hat{A}_0 + \int_0^{\infty} \hat{T}_0(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{y} \\ \hat{T}_0 \rightarrow 0 \quad , \quad \hat{T}_1 \rightarrow 0 \end{array} \right. \quad (4.8)$$

$$\bar{x} \rightarrow \infty : \hat{p}_0 \rightarrow 0 \quad (4.9)$$

junto con la integral de Cauchy-Hilbert :

$$\hat{p}_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A'_0(\bar{x}_1) d\bar{x}_1}{\bar{x} - \bar{x}_1} \quad (4.10)$$

Para simplificar el procedimiento de la integración de las

ecuaciones, primero se analiza el sistema hasta términos de orden θ_w . La razón para proceder así, es bastante simple : los términos de orden θ_w^2 dependen del conocimiento de lo que se tenga para términos de orden inferior. Bajo esta situación, una atenta mirada al sistema de ecuaciones permite distinguir que la ecuación de la energía (4.4) aparece desacoplada de la ecuación de la cantidad de movimiento (4.3); en consecuencia, la distribución de la temperatura puede obtenerse con relativa facilidad. Para ello se utiliza una variable de semejanza definida como :

$$\eta^{\circ} = (Pr)^{1/3} \bar{y} / \bar{x}^{1/3} \quad (4.11)$$

lo que reduce la ecuación diferencial (4.4) a una de la forma :

$$\frac{d^2 \hat{T}_0}{d\eta^{\circ 2}} + 3 \eta^2 \frac{d\hat{T}_0}{d\eta^{\circ}} = 0 \quad (4.12)$$

sujeta a :

$$\eta^{\circ} = 0 : \hat{T}_0 = H(\bar{x}) \quad , \quad \eta^{\circ} \rightarrow \infty : \hat{T}_0 \rightarrow 0 \quad (4.13)$$

cuya solución puede escribirse como :

$$\hat{T}_0 = \frac{\Gamma(1/3, \frac{Pr}{9\bar{x}} \bar{y}^3)}{\Gamma(1/3)} H(\bar{x}) \quad (4.14)$$

donde $\Gamma(1/3, \frac{Pr}{9\bar{x}} \bar{y}^3)$ representa la función Gamma incompleta y se define como (Abramowitz y Stegun [46]) :

$$\Gamma(a, x) = \int_x^{\infty} e^{-t} t^{a-1} dt \quad (4.15)$$

con el conocimiento de la distribución de la temperatura es ahora posible plantear el problema restante para la cantidad de movimiento, donde la principal modificación ocurre en la condición (4.8) dado que ahí la presencia del perfil de temperatura, regula la relación de desplazamiento. Por consiguiente, introduciendo la ecuación (4.14) en la (4.8) se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones necesarias para calcular el campo de velocidad :

$$\frac{\partial \hat{u}_0}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \hat{v}_0}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (4.16)$$

$$\bar{y} \frac{\partial \hat{u}_0}{\partial \bar{x}} + \hat{v}_0 = - \frac{d\hat{p}_0}{d\bar{x}} + \frac{\partial^2 \hat{u}_0}{\partial \bar{y}^2} \quad (4.17)$$

y la condición (4.8) se reduce a :

$$\bar{y} \rightarrow \infty : \quad \hat{u}_0 \rightarrow \hat{A}_0(\bar{x}) + \frac{9^{1/3} \Gamma(2/3) \bar{x}^{1/3}}{\Gamma(1/3) Pr^{1/3}} H(\bar{x}) \quad (4.18)$$

mientras que las restantes condiciones iniciales y de frontera permanecen inalteradas.

4.2. Aplicación de la Transformada Directa de Fourier.

Para resolver el sistema anterior de ecuaciones para la cantidad de movimiento, se emplea la técnica convencional de la transformada de Fourier. En particular, tal transformación se toma con respecto a la variable \bar{x} y definiendo la transformada directa de Fourier de una función arbitraria $g(\bar{x})$ como :

$$g_F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\bar{x}) e^{-i\omega \bar{x}} d\bar{x} \quad (4.19)$$

las ecuaciones (4.16)-(4.17) en el espacio de Fourier se reducen a :

$$i\omega u_F + \frac{\partial v_F}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (4.20)$$

$$i\omega \bar{y} u_F + v_F = -i\omega p_F + \frac{\partial^2 u_F}{\partial \bar{y}^2} \quad (4.21)$$

con las condiciones :

$$\bar{y} = 0 : u_F = v_F = 0 \quad (4.22)$$

$$\bar{y} \rightarrow \infty : u_F \rightarrow A_F + \frac{9^{1/3} \Gamma(2/3)}{\text{Pr}^{1/3} \Gamma(1/3)} \frac{\Gamma(4/3)}{2\pi i^{4/3} \omega^{4/3}} \quad (4.23)$$

mientras que la condición de interacción se reduce a :

$$\text{Pr} = |\omega| A_F \quad (4.24)$$

si la ecuación (4.21) se deriva con respecto a \bar{y} y se utiliza en la ecuación resultante la ecuación de continuidad (4.20), el resultado final es la ecuación diferencial de Airy (ver Abramowitz y Stegun, op. cit.) para la primera derivada de u_F :

$$\frac{\partial^3 u_F}{\partial \bar{y}^3} - i\omega \bar{y} \frac{\partial u_F}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (4.25)$$

cuya solución para el presente caso puede escribirse como :

$$\frac{\partial u_F}{\partial \bar{y}} = B(\omega) \text{Ai} [(i\omega)^{1/3} \bar{y}] \quad (4.26)$$

donde Ai representa la función de Airy y la constante $B(\omega)$ puede encontrarse si se hace uso de las condiciones (4.22) y (4.23)

junto con la ecuación (4.24), el resultado de tal procedimiento conduce a :

$$B(\omega) = \begin{cases} \frac{3 \kappa \Gamma(4/3) \omega^{1/3}}{2\pi i^{2/3} (\theta^{4/3} + i^{1/3} \omega^{4/3})} & \text{si } \omega > 0 \\ \frac{-3 \kappa \Gamma(4/3) \omega^{1/3}}{2\pi i^{2/3} (\theta^{4/3} - i^{1/3} \omega^{4/3})} & \text{si } \omega < 0 \end{cases} \quad (4.27)$$

donde $\theta = [-3A'(0)]^{3/4} = 0.8272$, y $\kappa = 9^{1/3} \Gamma(2/3) / \text{Pr}^{1/3} \Gamma(1/3)$.

4.3. Solución Lineal de Orden θ_w .

Para completar la solución del problema lineal es ahora necesario recurrir al teorema de inversión compleja (ver Carrier et. al. [47]) y los resultados para la distribución de presión, el esfuerzo cortante en la pared y el espesor de desplazamiento son :

$$\bar{p}(\bar{x}) = \frac{\kappa \theta_w \Gamma(4/3) \theta^{2/3}}{2\pi} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{[(1+\sqrt{3}) s^{4/3}] \cos \theta s \bar{x}}{s^{1/3} (1+\sqrt{3}) s^{4/3} + s^{8/3}} \right.$$

$$- \left. \frac{(\sqrt{3} + s^{4/3}) \operatorname{sen} \theta s \bar{x}}{s^{1/3} (1 + \sqrt{3} s^{4/3} + s^{8/3})} ds \right\} \quad (4.28)$$

$$\bar{t}-1 = \frac{\kappa_3 \Gamma(4/3) \theta_w}{2\pi A_1^{-1}(0)} \int_0^\infty \frac{[s^{1/3} (\cos \theta s \bar{x} + (\sqrt{3} + 2s^{4/3}) \operatorname{sen} \theta s \bar{x})] ds}{(1 + \sqrt{3} s^{4/3} + s^{8/3})} \quad (4.29)$$

$$A(\bar{x}) = - \theta_w \kappa \left\{ \bar{x}^{1/3} H(\bar{x}) - \frac{\Gamma(4/3)}{2\pi \theta^{1/3}} \int_0^\infty \frac{[2(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} s^{4/3}) \operatorname{sen} \theta s \bar{x} - s^{4/3} \cos \theta s \bar{x}] ds}{1 + \sqrt{3} s^{4/3} + s^{8/3}} \right\} \quad (4.30)$$

las soluciones anteriores son válidas para valores tanto positivos como negativos de \bar{x} y la variable s se relaciona con la variable de Fourier ω a través de $s = \omega / \theta$. Paralelamente las diferentes soluciones que se obtienen dependiendo de que $\bar{x} < 0$ o bien que $x > 0$ corresponden a cerrar el contorno de integración siempre que $Im \omega > 0$ $Im < 0$, respectivamente; donde Im representa de manera compacta la parte imaginaria. Aun cuando los resultados y conclusiones son reservados para el capítulo 6, donde se discute la naturaleza física de las ecuaciones (4.28), (4.29) y (4.30),

considerables progresos se pueden hacer si se complementa la información que proveen las anteriores ecuaciones, con la estructura asintótica de estas soluciones. La razón que da sentido a tal aseveración radica fundamentalmente en el hecho de que un análisis asintótico revela las principales características físicas del problema matemático. Por consiguiente la relevancia de este breve análisis proviene de considerar la existencia de los límites de las anteriores ecuaciones para cuando $\bar{x} \rightarrow \pm\infty$ y $x \ll 1$. En el primer caso, las correspondientes expresiones después de ciertas manipulaciones produce :

$$\bar{A}(\bar{x}) \sim -\kappa \theta_w \left\{ \frac{\Gamma(4/3)}{\pi \theta^{4/3}} \frac{1}{(\pm \bar{x})} - (\pm \bar{x})^{1/3} H(\bar{x}) + \dots \right\}, \quad \bar{x} \rightarrow \pm \infty \quad (4.31)$$

$$\bar{p}(\bar{x}) \sim \begin{cases} -(3)^{1/2} \kappa \theta_w / \bar{x}^{2/3} + \dots, & \text{si } \bar{x} \rightarrow \infty \\ 2(3)^{1/2} \kappa \theta_w / (-\bar{x})^{2/3} + \dots, & \text{si } \bar{x} \rightarrow -\infty \end{cases} \quad (4.32)$$

$$\bar{t} - 1 \sim \begin{cases} \theta_w \kappa \Gamma(4/3) \text{Ai}(0) / 3^{1/2} \Gamma(2/3) (\theta \bar{x})^{4/3} + \dots, & \text{si } \bar{x} \rightarrow \infty \\ -2\theta_w \kappa \Gamma(4/3) \text{Ai}(0) / 3^{1/2} \Gamma(2/3) (-\theta \bar{x})^{4/3} + \dots, & \text{si } \bar{x} \rightarrow -\infty \end{cases} \quad (4.33)$$

Estas expansiones son oportunas para hacer los siguientes comentarios: la ecuación (4.31) muestra claramente que para $\bar{x} \rightarrow -\infty$ $\bar{A}(\bar{x}) \sim 1 / \bar{x}$ y en consecuencia este resultado ratifica, en este límite, la solución de Blasius. Seguramente es mejor apreciado si paralelamente se observa lo que ocurre en la expresión para la presión. Esta conduce cuando $\bar{x} \rightarrow -\infty$ a que $\bar{p}(\bar{x}) \sim 0$, lo que puede interpretarse como una de las evidencias más relevantes del valor de la distribución de presión, para el caso de la placa plana desde la perspectiva de la teoría clásica de la capa límite. Similarmente, la ecuación para el esfuerzo cortante conduce a que en este límite $\bar{\tau} \sim 1$. De manera complementaria, Para valores de la variable \bar{x} tales que $\bar{x} \rightarrow \infty$, el comportamiento asintótico de las anteriores ecuaciones produce que $\bar{A} \sim -\bar{x}^{1/3}$. Este resultado tiene un especial significado: claramente señala una evidencia de que el proceso de expansión térmica es lo suficientemente importante como para ocasionar un cambio relevante en el valor del espesor de desplazamiento y además muestra la concordancia que existe entre este análisis y los resultados de la sección 3.3 (en particular, es conveniente consultar las expresiones (3.29) y (3.30) que determinan, desde la teoría clásica, la forma del espesor de desplazamiento). Sin embargo, tales variaciones del espesor de desplazamiento no son aun suficientes para alterar significativamente el valor de la distribución de presión, para la cual $\bar{p} \sim 1 / \bar{x}^{2/3}$ cuando $\bar{x} \rightarrow \infty$. Para obtener significativas variaciones de presión es indispensable recurrir al otro límite intermedio para cuando $\bar{x} \ll 1$, ya que bajo estas circunstancias la expansión térmica del gas cambia de manera drástica el valor de las anteriores propiedades físicas. Así, tomando el límite para

cuando $x \ll 1$ se puede demostrar que ,

$$p(\bar{x}) = \kappa \theta_w \Gamma(4/3) \theta_w^{2/3} \left(c - 3\pi(\theta_w \bar{x})^{2/3} / \Gamma(2/3) \right) / 2\pi, \quad \text{mientras}$$

que el esfuerzo cortante cambia su valor de $1 - 0.4182 \theta_w$ en $x=0^-$ a $1 + 0.6970 \theta_w$ en $\bar{x} = 0^+$. En la expresión anterior c representa una constante que puede determinarse; sin embargo lo realmente importante es la forma analítica de la expansión, que muestra un comportamiento de la forma $\tilde{p}(\bar{x}) = -\bar{x}^{2/3}$, lo cual claramente manifiesta las desviaciones a la solución de Blasius . Finalmente, el salto discontinuo que se produce sobre el esfuerzo cortante, es un resultado esperado debido a que en este límite, la estructura de las tres capas se vuelve singular. Justamente esta singularidad en la teoría interactiva solamente puede ser corregida, introduciendo otra región para la cual $x - 1 = O(R^{-3/4})$. Esta otra región fue descubierta por Stewartson ([9], op. cit.) y se conoce actualmente como la región central; ahí, las ecuaciones son totalmente elípticas y son indispensables si se quiere suavizar el valor singular del esfuerzo cortante. Sin embargo, las dificultades asociadas para esta otra región están más allá de los alcances estructurales del presente trabajo. Como comentarios adicionales a esta sección se puede agregar que los resultados de las expresiones (4.28), (4.29) y (4.30) se pueden apreciar en el capítulo de conclusiones a través de las figuras 2, 3 y 4, respectivamente.

4.4. Solución Lineal de Orden θ_w^2 .

Para concluir el presente capítulo, se desarrolla la solución para el problema restante en la temperatura \hat{T}_1 . Como se había

indicado anteriormente , esta corrección es necesaria para modificar la solución clásica de Lighthill para el valor del número de Nusselt. El análisis complementario aquí desarrollado, confirma la importancia que la teoría de las tres capas introduce a través del proceso de expansión del gas, al proporcionar una nueva predicción para la transferencia de calor. Por lo tanto, para entender el papel que juega la expansión térmica dentro del formalismo de la capa inferior, es indispensable incluir la distribución de temperatura \hat{T}_1 a través del cálculo de la ecuación (4.5) y sus correspondientes condiciones en la frontera. Aun cuando este sistema se podría resolver con ayuda de los calculos realizados para \hat{u}_0 , \hat{v}_0 y \hat{T}_0 , es de esperarse que los cambios en \hat{T}_1 ocurren en regiones muy próximas a la superficie de la placa plana; por consiguiente, para analizar esta región que aparece contenida dentro de la escala transversal de la capa inferior, es conveniente introducir la variable $\bar{y} = \sigma / Pr^{1/3}$. Adicionalmente la ecuación (4.17) se deriva con respecto a \bar{y} para trabajar con el esfuerzo cortante como variable dependiente; entonces las ecuaciones (4.2), (4.3) y (4.5) se transforman en :

$$\frac{\partial \hat{u}_0}{\partial \bar{x}} + Pr^{1/3} \frac{\partial \hat{v}_0}{\partial \sigma} = 0 \quad (4.34)$$

$$\frac{\sigma}{Pr} \frac{\partial \hat{\tau}_0}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial^2 \hat{\tau}_0}{\partial \sigma^2} \quad (4.35)$$

$$\frac{1}{Pr^{1/3}} \frac{\partial^2 \hat{T}_1}{\partial \sigma^2} - \frac{\sigma}{Pr^{1/3}} \frac{\partial \hat{T}_1}{\partial \bar{x}} = \hat{u}_0 \frac{\partial \hat{T}_0}{\partial \bar{x}} + \hat{v}_0 Pr^{1/3} \frac{\partial \hat{T}_0}{\partial \sigma} \quad (4.36)$$

donde $\hat{T}_0 = \frac{\Gamma(1/3, \sigma^{1/3} / 9\bar{x})}{\Gamma(1/3)} H(\bar{x})$, y las restantes condiciones en

la frontera permanecen inalteradas. Las ecuaciones para la cantidad de movimiento pueden resolverse facilmente y los resultados en términos del campo de velocidad se pueden expresar como :

$$\hat{u}_0 = \left\{ \frac{\Gamma(1/3)}{\Gamma(2/3) Pr^{1/3}} \hat{A}(\bar{x}) + \frac{H(\bar{x})}{Pr^{2/3}} \right\} \sigma \quad (4.37)$$

$$\hat{v}_0 = - \frac{\Gamma(1/3)}{2 \Gamma(2/3)} \left\{ \frac{(9\bar{x})^{1/3} \hat{A}'(\bar{x}) - 3 \hat{A}(\bar{x}) (9\bar{x})^{-2/3}}{(9\bar{x})^{2/3}} \right\} \frac{\sigma}{Pr^{2/3}} - \frac{\delta(\bar{x}) \sigma^2}{2 Pr} \quad (4.38)$$

donde $\delta(\bar{x})$ representa la función delta de Dirac. Claramente, las componentes de la distribución de la velocidad \hat{u}_0 y \hat{v}_0 dentro de esta aproximación, aparecen como funciones lineal y cuadrática de la coordenada σ , respectivamente, lo que se entiende como una aplicación mas de la aproximación de Lighthill. Por otro lado, el análisis de la transformada de Fourier proporciona la ecuación (4.30) para el espesor de desplazamiento $\hat{A}(\bar{x})$. Por lo tanto, la ecuación de la energía para \hat{T}_1 se puede simplificar considerablemente si se sustituyen los valores de \hat{u}_0 , \hat{v}_0 t \hat{T}_0 y el

resultado en función de la variable σ es :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \hat{T}_1}{\partial \sigma^2} - \sigma \frac{\partial \hat{T}_1}{\partial \bar{x}} &= \frac{\Gamma(1/3, \frac{\sigma^3}{9\bar{x}}) \delta(\bar{x}) P_r^{1/3}}{\Gamma(1/3)} \left\{ \frac{\Gamma(1/3)}{\Gamma(2/3)} \frac{\hat{A}(\bar{x})}{P_r^{1/3} (9\bar{x})^{1/3}} + \frac{H(\bar{x})}{P_r^{2/3}} \right\} \sigma \\ &+ \frac{P_r^{1/3} e^{-\sigma^3/9\bar{x}}}{\Gamma(1/3) (9\bar{x})^{1/3}} H(\bar{x}) \left\{ \frac{9\sigma^2}{9\bar{x}} \left[\frac{\Gamma(1/3)}{\Gamma(2/3) P_r^{1/3}} \frac{\hat{A}(\bar{x})}{(9\bar{x})^{1/3}} + \frac{H(\bar{x})}{P_r^{2/3}} \right] \right. \\ &\left. - 3 P_r^{1/3} \left[\frac{-\Gamma(1/3)}{\Gamma(2/3) P_r^{2/3}} \left(\frac{(9\bar{x})^{1/3} \hat{A}'(\bar{x}) - 3\hat{A}(\bar{x}) (9\bar{x})^{-2/3}}{(9\bar{x})^{2/3}} \right) \frac{\sigma^2}{2} - \frac{\delta(\bar{x})}{P_r} \frac{\sigma^2}{2} \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.39)$$

con :

$$\begin{aligned} \sigma = 0 & : \hat{T}_1 = \quad , \quad \sigma \rightarrow \infty & \hat{T}_1 = 0 \\ \bar{x} < 0 & : \hat{T}_1 = 0 , \quad \bar{x} \rightarrow \infty & \hat{T}_1 = 0 \end{aligned} \quad (4.40)$$

Para simplificar la ecuación anterior de la energía, deberá observarse que los términos que involucran a la función $\delta(\bar{x})$ son irrelevantes en todo el rango de la variable \bar{x} , ya que debido a las propiedades de la función delta, puede demostrarse que tanto

para valores finitos como para valores próximos a cero de la variable \bar{x} , estos términos se hacen idénticamente iguales a cero. Por lo tanto, para resolver la ecuación en \hat{T}_1 se propone como solución $\hat{T}_1 = \sigma [\exp(-\sigma^3/9\bar{x})] \phi(\bar{x}) H(\bar{x})$, de tal forma que se obtiene una ecuación diferencial ordinaria para $\phi(\bar{x})$:

$$\frac{d\phi}{d\bar{x}} + \frac{12\phi}{9\bar{x}} = - \frac{9}{2\Gamma(2/3)(9\bar{x})^{5/3}} \left\{ \hat{A}(\bar{x}) + \frac{\bar{x}\hat{A}'(\bar{x})}{3} + \frac{2\Gamma(2/3)}{\Gamma(1/3)} \frac{(9\bar{x})^{1/3} H(\bar{x})}{Pr^{1/3}} \right\} \quad (4.41)$$

con la condición :

$$\bar{x} \rightarrow \infty : \phi = 0 \quad (4.42)$$

El sistema anterior es trivial y la solución puede escribirse como :

$$\hat{T}_1 = - \frac{9}{2} \frac{\sigma}{\Gamma(2/3)} \frac{e^{-\frac{\sigma^3}{9\bar{x}}}}{(9\bar{x})^{4/3}} \int_0^{\bar{x}} \left\{ \frac{\hat{A}(\bar{x}) + \bar{x}\hat{A}'(\bar{x})}{3} + \frac{2\Gamma(2/3)}{\Gamma(1/3)} \left(\frac{9\bar{x}}{Pr} \right)^{1/3} H(\bar{x}) \right\} d\bar{x} H(\bar{x}) \quad (4.43)$$

Finalmente la comparación entre el número de Nusselt

modificado y la solución que proporciona el análisis integral de Lighthill produce después de ciertas manipulaciones la siguiente expresión :

$$\begin{aligned} \text{Nu}^* &= \text{Nu} / \left(- \frac{3^{1/3} \rho_w \text{Pr}^{1/3} R^{1/2} x}{\Gamma(1/3) (x-1)^{1/3}} \right) - 1 = \\ &= \frac{\Gamma(1/3) \theta_w}{2\Gamma(2/3)} \left\{ \frac{\hat{A}(\bar{x})}{(9\bar{x})^{1/3}} + \frac{2 \Gamma(2/3)}{3 \Gamma(1/3) \text{Pr}^{1/3}} + \frac{7}{27\bar{x}} \int_0^{\bar{x}} \frac{\hat{A}(\bar{x}) d\bar{x}}{(9\bar{x})^{1/3}} \right\} H(\bar{x}) \end{aligned} \quad (4.44)$$

donde se reitera que $\hat{A}(\bar{x})$ lo proporciona la ecuación (4.30) y en consecuencia el número de Nusselt esta completamente determinado. En la fig.5 del capítulo correspondiente a las conclusiones aparece la gráfica correspondiente y claramente se observa la corrección a la aproximación de Lighthill. Adicionalmente en esta misma gráfica se puede apreciar que el número de Nusselt es discontinuo en $\bar{x} = 0$, lo cual es un resultado esperado dado al cambio discontinuo en la condición en la frontera. Finalmente, el análisis asintótico para el número de Nusselt muestra que ,

$$\begin{aligned} \text{Nu} &= \left(1 + \frac{\Gamma(1/3)}{2\Gamma(2/3)} \theta_w \right) \frac{1}{\bar{x}^{1/3}} \text{ cuando } \bar{x} \rightarrow 0 \text{ y correspondientemente} \\ \text{Nu} &= \bar{x}^{-1/3} \text{ cuando } \bar{x} \rightarrow \infty \text{ lo cual confirma la física del problema.} \end{aligned}$$

CAPITULO V

ANALISIS NO LINEAL

5.1. Introducción.

Para dar sentido a la presente sección deberá recordarse que los valores asignados al parámetro T_w determinan un esquema distinto para resolver las ecuaciones de la capa inferior. Así se ha visto en el capítulo anterior, que para valores próximos de T_w cercanos a la unidad, se puede obtener una solución linearizada con ayuda de la transformada de Fourier. Sin embargo, la existencia de tal solución proporciona solamente información sobre un proceso débil de interacción libre entre la capa inferior y la zona externa. Por consiguiente, para describir la existencia de tal interacción, es indispensable que no sean restringidos los valores del parámetro T_w . Dada la naturaleza no lineal del conjunto de ecuaciones (3.67)-(3.74) es fácil entender que para valores arbitrarios y no necesariamente cercanos a la unidad de T_w , la posibilidad de encontrar una solución analítica por técnicas convencionales al sistema anterior no es actualmente factible. Por ello, cualquier alternativa de solución solo puede generarse con el empleo, en general, de alguna específica técnica numérica. En particular, la elección de cual es la mas correcta depende directamente de la naturaleza específica de las ecuaciones, pero enfaticamente habría que señalar que la exclusividad del sistema de ecuaciones presentes, obliga a

construir un algoritmo particular de solución.

ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA

Es importante también añadir que la secuencia del análisis numérico adoptado en el presente capítulo, permite obtener soluciones válidas para valores de T_w tales que la evolución hacia la separación de la capa límite y la separación misma queden contempladas dentro del esquema numérico.

5.2. Generalidades sobre el Esquema Numérico.

Aun cuando en la literatura especializada se han utilizado una multiplicidad de técnicas para tratar problemas interactivos incluidos los que generan estructuras de tres capas (ver al respecto la excelente obra de T.Cebeci y P.Bradshaw, [48]); la ley de interacción dada por la ecuación (3.74) introduce una dificultad adicional : la naturaleza elíptica de la capa superior. Esta dificultad como ha sido reconocido por Veldman y Dijkstra [49], obliga a tratar simultáneamente, desde el punto de vista numérico, a la presión y al espesor de desplazamiento, lo cual marca justamente la característica intrínseca de todo problema interactivo de carácter elíptico. Desde esta perspectiva general señalada por Veldman y Dijkstra, el presente análisis sienta las bases para el esquema numérico desarrollado.

En particular el algoritmo de solución desarrollado para el conjunto de ecuaciones (3.67)-(3.74) puede entenderse bajo las siguientes etapas de carácter general :

* Con ayuda de la solución lineal proporcionada en el capítulo

anterior, las expresiones para la distribución de presión y el espesor de desplazamiento son utilizadas para generar los perfiles iniciales.

* La información anterior se puede aplicar para resolver simultáneamente las ecuaciones parabólicas junto con la ley de interacción y las condiciones en la frontera. Es importante enfatizar que la implementación de un criterio de convergencia local para cada estación deberá ser garantizado, con el fin de obtener convergencia local; esto exige que los valores previamente conocidos en una específica estación sean incorporados después de la convergencia local como condiciones iniciales para la próxima estación de la malla numérica. Este proceso deberá ser indefinidamente repetido hasta completar el rango de la variable \bar{x} .

* La disposición anterior evidentemente no prevé que los nuevos valores de la presión y el espesor de desplazamiento coinciden con los utilizados inicialmente. Esta dificultad obliga a emplear un criterio de convergencia global que permita garantizar la convergencia total de las ecuaciones y que conduzca con ello a que los calculos sean detenidos.

* Por lo anterior el parámetro seleccionado para garantizar la convergencia global lo proporciona el espesor de desplazamiento $\bar{A}(\bar{x})$, como ha sido sugerido en diferentes problemas interactivos, en particular ver los trabajos fundamentales de Burgraff y Jobe (op.cit.) y Veldman y Dijkstra (op.cit.); en el presente caso este criterio se implementa mediante la condición :

$$| A_{\text{nueva}} - A_{\text{anterior}} | < 10^{-6} \quad (5.1)$$

la cual permite tener una exactitud de cinco dígitos en el espesor de desplazamiento. En consecuencia la comparación de la nueva $\bar{A}(\bar{x})$ con la anterior determina si el programa dentro de la exactitud señalada converge.

* El esquema anterior dificulta enormemente en tiempo de máquina la convergencia global. Consecuentemente, para disminuir el número global de iteraciones se sugiere el empleo de la relajación sobre el espesor de desplazamiento, en particular se utiliza la fórmula :

$$\bar{A}(\bar{x}) = B A_{\text{anterior}} + (1-B) A_{\text{nueva}} \quad (5.2)$$

hasta que la diferencia entre ambas $\bar{A}(\bar{x})$ sea menor que 10^{-6} . Aquí, B representa el parámetro de relajación y deberá determinarse con diferentes ensayos de convergencia que vuelvan óptimo el tiempo global de convergencia.

Los puntos anteriores constituyen de manera general el esquema numérico desarrollado. Para mayores detalles sobre este algoritmo el apéndice A proporciona el correspondiente diagrama de flujo utilizado en el presente trabajo. Las líneas siguientes describen con mayor detalle los aspectos metodológicos desarrollados para la solución numérica de las ecuaciones

(3.67)-(3.74).

5.3. Formulación en Diferencias Finitas de las Ecuaciones Parabólicas para la Capa Inferior.

Para implementar en diferencias finitas las ecuaciones parabólicas junto con las condiciones en la frontera, esto es, las ecuaciones (3.67)-(3.73); se utilizó la técnica de Keller (ver Cebeci y Bradshaw, op.cit. para mayores detalles) la cual es ampliamente conocida como el método de la Caja. La técnica en sí tiene varias características deseables que la hacen muy apropiada para la solución de todo tipo de ecuaciones parabólicas. Sin pérdida de generalidad podría decirse que las principales ventajas del método de Keller quedan resumidas en los puntos siguientes :

a) exactitud de segundo orden con variaciones no uniformes en el espaciamiento tanto de \bar{x} como de \bar{y} , b) facilidad en la programación de un gran número de ecuaciones acopladas. En síntesis la solución por este método puede obtenerse mediante las cuatro etapas siguientes :

1. Reduce las ecuaciones en este caso para la capa inferior a un sistema de primer orden.
2. Escribe las ecuaciones resultantes en diferencias finitas con ayuda de las diferencias centradas.
3. Lineariza las ecuaciones algebraicas a través del empleo del método de Newton.
4. Escribe las ecuaciones lineales en forma matricial.
5. Resuelve el sistema lineal mediante algún método de

eliminación.

Si se sigue con mayor detalle las etapas anteriores e introduciendo previamente el cambio de variable (3.66) $\bar{u} = \partial\psi / \partial\bar{y}$ y $\bar{v} = -\partial\psi / \partial\bar{x}$; es posible además definir nuevas variables dependientes $U(\bar{x}, \bar{y})$, $V(\bar{x}, \bar{y})$ y $T(\bar{x}, \bar{y})$ tales que las ecuaciones de la cantidad de movimiento y de la energía, esto es, las ecuaciones (3.68) y (3.69) respectivamente, pueden reescribirse como (la ecuación de continuidad se satisface idénticamente para ψ) :

$$\frac{\partial\psi}{\partial\bar{y}} = U \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}} = V \quad (5.4)$$

$$\frac{\partial V}{\partial\bar{y}} = T \frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{x}} + U \frac{\partial U}{\partial\bar{x}} - \frac{\partial\psi}{\partial\bar{x}} V \quad (5.5)$$

$$\frac{\partial T}{\partial\bar{y}} = T \quad (5.6)$$

$$\frac{1}{Pr} \frac{\partial T}{\partial\bar{y}} = U \frac{\partial T}{\partial\bar{x}} - \frac{\partial\psi}{\partial\bar{x}} T \quad (5.7)$$

Como se puede apreciar el sistema de ecuaciones (5.3)-(5.7), es un sistema de primer orden según establece el punto uno del método de Keller. Las condiciones en la frontera expresadas por las ecuaciones (3.70)-(3.73) permanecen inalteradas salvo que en donde sea necesario se reemplaza \bar{u} y \bar{v} por la función de corriente $\bar{\psi}$, esto es :

$$\bar{y} = 0 : U = 0 , \bar{\psi} = 0 , T = 1 + (T_w - 1) H(\bar{x}) \quad (5.8)$$

$$\bar{y} \rightarrow \infty : U \rightarrow \bar{y} + A(\bar{x}) , T \rightarrow 1 \quad (5.9)$$

$$\bar{x} \rightarrow -\infty : U \rightarrow \bar{y} , \bar{p} \rightarrow 0 , T \rightarrow 1 \quad (5.10)$$

Una vez establecido el sistema de ecuaciones de primer orden el paso siguiente es escribirlas en diferencias finitas. Convencionalmente, la técnica de Keller propone escribir las ecuaciones (5.3), (5.4) y (5.6) en términos del punto medio $(\bar{x}_n, \bar{y}_{j-1/2})$ del segmento P_1P_2 según se aprecia en la fig.6. Equivalentemente las restantes ecuaciones (5.5) y (5.7) se discretizan conforme al punto medio $(\bar{x}_{n-1/2}, \bar{y}_{j-1/2})$ del rectángulo $P_1P_2P_3P_4$. Complementariamente, la definición del método de la Caja permite establecer un rectángulo en el plano $\bar{x} \bar{y}$ tal que la discretización tanto de \bar{x} como de \bar{y} vienen dadas por las expresiones :

$$\bar{x}_0 = 0, \quad \bar{x}_n = \bar{x}_{n-1} + k_n \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (5.11)$$

$$\bar{y}_0 = 0, \quad \bar{y}_j = \bar{y}_{j-1} + h_j \quad j = 1, 2, \dots, J \quad (5.12)$$

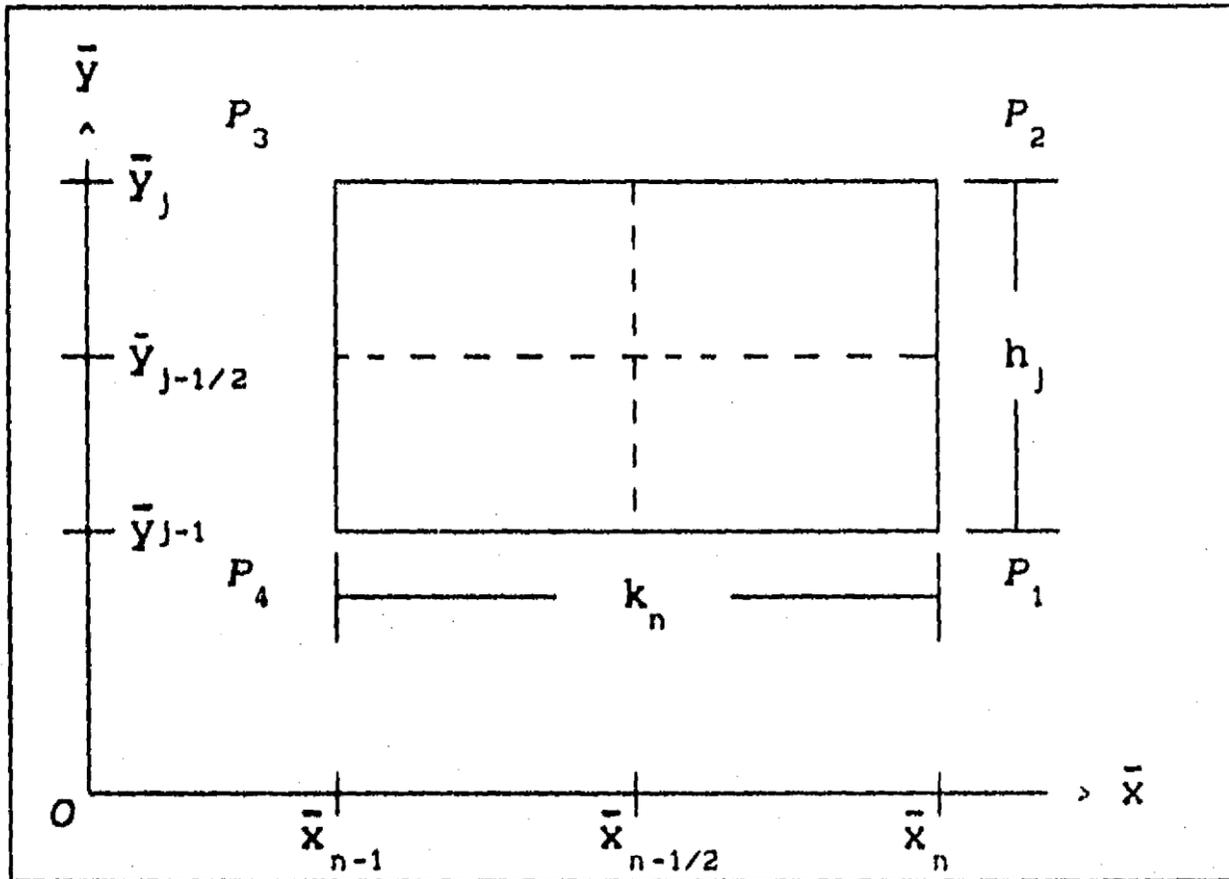


Fig.6 Malla discreta para el uso del método de Keller.

Con ayuda de las consideraciones anteriores y utilizando el cambio de variable $z^3 = \bar{x}$, las ecuaciones pueden escribirse como :

$$h_j^{-1} (\psi_j^n - \psi_{j-1}^n) = U_{j-1/2}^n \quad (5.13)$$

$$h_j^{-1} (U_j^n - U_{j-1}^n) = V_{j-1/2}^n \quad (5.14)$$

$$h_j^{-1} (T_j^n - T_{j-1}^n) = T_{j-1/2}^n \quad (5.15)$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \bar{y}} \right)_{j-1/2}^{n-1/2} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{z^2} \right)^{n-1/2} \left\{ T \left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} \right)_{j-1/2}^{n-1/2} + \left(U \frac{\partial U}{\partial z} \right)_{j-1/2}^{n-1/2} - \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} V \right)_{j-1/2}^{n-1/2} \right\}$$

(5.16)

$$\frac{1}{Pr} \left(\frac{\partial T}{\partial \bar{y}} \right)_{j-1/2}^{n-1/2} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{z^2} \right)^{n-1/2} \left\{ \left(U \frac{\partial T}{\partial z} \right)_{j-1/2}^{n-1/2} - \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} T \right)_{j-1/2}^{n-1/2} \right\} \quad (5.17)$$

Las ecuaciones anteriores deberán completarse con las correspondientes condiciones en la frontera, sin embargo dada la forma trivial que estas adquieren su presentación se pospone hasta el uso del método de Newton, donde en forma compacta se presenta el sistema linearizado de ecuaciones. Sin embargo, antes de proceder con tal etapa, es posible reducir las ecuaciones aún más si se utilizan aproximaciones en diferencias finitas para cada una de las derivadas que aparecen en el conjunto de ecuaciones anteriores. Además, tomando en consideración que los valores de las funciones Ψ_j^{n-1} , U_j^{n-1} , V_j^{n-1} , T_j^{n-1} y \bar{T}_j^{n-1} se conocen para $0 \leq j \leq J$; entonces se tiene un sistema no lineal de ecuaciones para las incógnitas Ψ_j^n , U_j^n , V_j^n , T_j^n , \bar{T}_j^n , el cual puede resolverse con ayuda del método de Newton que consiste brevemente en el procedimiento siguiente (Keller, op.cit.) :se introducen las

iteracciones $\Psi_j^i, U_j^i, V_j^i, T_j^i, \tau_j^i$ ($i = 0, 1, 2, \dots$) con valores iniciales iguales a los de una estación \bar{x} arbitraria y para las iteracciones subsecuentes se emplea las expresiones siguientes :

$$\begin{aligned} \Psi_j^{i+1} &= \Psi_j^i + \delta \Psi_j^i, & U_j^{i+1} &= U_j^i + \delta U_j^i \\ V_j^{i+1} &= V_j^i + \delta V_j^i, & T_j^{i+1} &= T_j^i + \delta T_j^i \\ \tau_j^{i+1} &= \tau_j^i + \delta \tau_j^i \end{aligned} \quad (5.18)$$

Si se sustituyen las aproximaciones (5.18) en las ecuaciones (5.13)-(5.17) y se desprecian términos cuadráticos en las cantidades que involucran a las δ 's , puede demostrarse después de múltiples manipulaciones que tal simplificación conduce a un sistema de ecuaciones lineales de la forma :

$$\delta \psi_j - \delta \psi_{j-1} - \frac{h_j}{2} (\delta U_j + \delta U_{j-1}) = (r_1)_j \quad (5.19)$$

$$\delta U_j - \delta U_{j-1} - \frac{h_j}{2} (\delta V_j + \delta V_{j-1}) = (r_4)_{j-1} \quad (5.20)$$

$$\delta T_j - \delta T_{j-1} - \frac{h_j}{2} (\delta \tau_j + \delta \tau_{j-1}) = (r_5)_{j-1} \quad (5.21)$$

$$\begin{aligned}
& (S1)_j \delta W_j + (S2)_j \delta W_{j-1} + (S3)_j \delta \psi_j + (S4)_j \delta \psi_{j-1} \\
& + (S5)_j \delta U_j + (S6)_j \delta U_{j-1} + (S7)_j \delta T_j + (S8)_j \delta T_{j-1} = (r_2)_j
\end{aligned}
\tag{5.22}$$

$$\begin{aligned}
& -(\beta1)_j \delta T_j + (\beta2)_j \delta T_{j-1} + (\beta3)_j \delta \psi_j + (\beta4)_j \delta \psi_{j-1} + \\
& (\beta5)_j \delta U_j + (\beta6)_j \delta U_{j-1} + (\beta7)_j \delta T_j + (\beta8)_j \delta T_{j-1} \\
& + (\beta9)_j \delta W_j + (\beta10)_j \delta W_{j-1} = (r_3)_j
\end{aligned}
\tag{5.23}$$

donde los coeficientes S , β and r se definen por simplicidad en el apéndice A y se elimina por comodidad el superíndice i sobre las cantidades que involucran a δ . La discretización de las condiciones en la frontera son omitidas dada su simplicidad. De tal forma que el conjunto completo de ecuaciones (5.19)-(5.23) puede escribirse de manera compacta utilizando la notación matricial mediante la forma :

$$A \delta = R \tag{5.24}$$

y la solución al correspondiente sistema puede llevarse a cabo junto con la integral de Hilbert, mediante algún método específico de eliminación; en particular, aquí se utilizó el método de descomposición de matrices.

Por otro lado y al igual que otros procesos de interacción libre, se prevé que el proceso de expansión térmica dentro de la escala \bar{x} induzca cambios de velocidad mas rápidos que aquellos que ocurren en regiones externas, por ello, es útil emplear una malla no uniforme. En particular, se ha hecho uso de una la cual la razón de dos longitudes adyacentes permanezca constante(ver para mayores detalles Cebeci y Bradshaw, op. cit.) . Esto puede ser ilustrado para la variable \bar{y} . Ya que $\bar{y}_j = \bar{y}_{j-1} + h_j$, entonces se elige $h_j = Kh_{j-1}$, de tal forma que la distancia a la j-ésima línea se calcula con ayuda de la fórmula siguiente :

$$\bar{y}_j = h_0 \frac{K^j - 1}{K - 1} \quad j = 1, 2, \dots, J, \quad K > 1 \quad (5.25)$$

En esta ecuación aparecen dos parámetros : la longitud h_0 del primer incremento $\Delta\bar{y}$ en \bar{y} y K , la razón de dos incrementos sucesivos. Ambos son parámetros que se fijan según el tipo de problema ; en el capítulo siguiente se asignan valores específicos a estos parámetros. Complementariamente, el número de puntos J se calcula de acuerdo a la fórmula siguiente :

$$J = \frac{\text{Ln} [1 + (K-1) (\bar{y}_e / h_0)]}{\text{Ln} K} \quad (5.26)$$

donde \bar{y}_e representa el valor de \bar{y} para el cual se alcanza el borde

externo de la capa inferior. De manera correspondiente, también con el mismo esquema puede construirse una malla no uniforme para la variable longitudinal \bar{x} y los valores numéricos asignados a todos los parámetros incluidos son presentados en el próximo capítulo.

5.4. Discretización de la Ley de Interacción

(Integral de Hilbert).

Finalmente es indispensable tratar la aproximación discreta de la ley de interacción dada por la ecuación (3.74) que establece la relación entre la presión y el espesor de desplazamiento. La forma en que se lleva a cabo tal procedimiento consiste en la formulación que para ello ha sido proporcionada por Veldman y Dijkstra (op.cit.) y reteniendo el uso de la variable $z^3 = \bar{x}$. Inicialmente el método de Veldman propone discretizar la integral como una suma finita de términos, esto es :

$$\tilde{p}_1 = \frac{1}{\Pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{A}'(z_1) dz_1}{z^3 - z_1^3} = \frac{1}{\Pi} \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\tilde{A}'_{j+1/2}}{z_1^3 - (z_j + h/2)^3} h \quad (5.27)$$

y utilizando diferencias finitas para la derivada del espesor de desplazamiento puede demostrarse después de ciertas manipulaciones que la ecuación (5.27) puede reescribirse como :

$$\tilde{p}_i = R_i + \sum_{j=2}^N C_{ij} A_j \quad (5.28)$$

donde

$$C_{ij} = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{1}{z_i^3 - (z_{j-1/2} + h/2)^3} - \frac{1}{z_i^3 - (z_j + h/2)^3} \right\} \quad (5.29)$$

y

$$R_i = \frac{1}{\pi} \left\{ - \frac{A_1}{z_i^3 - (z_1 + h/2)^3} + \frac{A_N}{z_i^3 - (z_n + h/2)^3} \right\} \quad (5.30)$$

en consecuencia la relación (5.28) acepta una representación similar a la desarrollada por Veldman y toma la forma :

$$\Delta \beta_i + C_{i1} \Delta A_1 = \tilde{p}_{i-1} - \beta_i - C_{i1} A_1 - \sum_{j=2}^{i-1} C_{ij} A_j - \sum_{j=i+1}^N C_{ij} A_j^{(n-1)} - R_i^{(n-1)} \quad (5.31)$$

donde $\beta_i = \tilde{p}_{i-1} - \tilde{p}_i$. La relación anterior es justamente la combinación lineal de la presión con el espesor de desplazamiento la cual debe ser utilizada simultáneamente para calcular las

ecuaciones de la capa inferior para cada estación i .

Las figuras 7,8,9,10,11 y 12 del capítulo siguiente muestran los resultados de los correspondientes cálculos numéricos, así como también la correspondiente comparación con la solución lineal del capítulo previo, específicamente para la presión y el esfuerzo cortante.

CAPITULO VI

RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Antes de destacar las conclusiones mas relevantes que se originan del análisis de la separación de la capa límite debido a un escalón de temperatura uniforme; conviene hacer previamente un balance general que notifique el carácter físico de los principales resultados , así como el impacto que estos tienen sobre la teoría clásica de la capa límite.

Siguiendo la estructura presentada a lo largo del presente trabajo, conviene entonces dirigir la atención inicialmente a los resultados que se originan con ayuda de la teoría lineal. De las figs. 2 a la 5 se pueden apreciar estos resultados para el caso de la presión , esfuerzo cortante , espesor de desplazamiento y el número de Nusselt, respectivamente. Es importante señalar que estas propiedades físicas han sido normalizadas en función del parámetro de perturbación θ_w . De estas gáficas se desprenden los comentarios siguientes : en la fig.2 se puede apreciar claramente como el proceso de expansión en la capa inferior ocasiona inicialmente un incremento en el valor de la presión y es justamente esta fuerza de presión magnificada a través del gradiente de la presión la cual tiene una gran influencia en regiones próximas a la pared de la placa plana, donde la presencia de los términos convectivos se hacen mas pequeños. Como puede

también apreciarse en la región central de esta figura, aparece un salto en el gradiente de la presión pero no en la presión misma y esto es indicativo de la teoría de las tres capas donde solamente se alcanza a corregir la discontinuidad del gradiente del espesor de desplazamiento . Siguiendo el rango de las \bar{x} positivas puede notarse que abruptamente la presión disminuye alcanzando valores menores que la presión del medio ambiente , y subsecuentemente se inicia un incremento que alcanza asintóticamente el valor de la presión del medio ambiente para valores grandes de \bar{x} . Es significativo señalar que tanto aguas arriba de la región central salto como aguas abajo de esta misma región, la distribución inicia y termina justamente en la soluciones que predice la teoría clásica que para el caso particular se reduce a la solución de Blasius. Paralelamente, la fig.3 muestra el esfuerzo cortante evaluado en la pared . Para valores negativos de \bar{x} , el impacto del gradiente de presión desfavorable tiene un profundo efecto sobre el esfuerzo cortante, esto es, la presencia de fuertes gradientes de presión ocasionan que los términos convectivos disminuyan ocasionando que el esfuerzo cortante sea alterado considerablemente, al grado de ser desviado de su valor que tiene asignado con la teoría clásica. Esta disminución del esfuerzo cortante señala de manera muy destacada el papel que juega la presencia de los gradientes de presión ocasionados por la expansión térmica del gas, sobre la dinámica del gas.

Por los comentarios anteriores puede decirse sin pérdida de generalidad , que la teoría lineal permite responder a la interrogante central del presente trabajo : la existencia del fenómeno de la separación de la capa límite. Para ello basta

considerar que $\bar{\tau} = 0$, lo que con ayuda de la ecuación (4.29) conduce a que el fenómeno de la separación se produce para un valor de $\theta_w = 2.391$ para $Pr = 0.71$; que en términos del parámetro T_w puede escribirse en general para cualquier valor de Prandtl como $T_w = 1 + 2.68025 Pr^{1/3}$. De esto, puede concluirse que el fenómeno de la separación de la capa límite, es cada vez más difícil de obtener si el número de Prandtl aumenta. Sin embargo, es importante aquilatar que estos resultados se mantienen solamente válidos para pequeñas perturbaciones, esto es, cuando el escalón de temperatura apenas se desvía del valor de la temperatura uniforme de la corriente. Para valores positivos de \bar{x} el esfuerzo cortante salta de manera discontinua a valores positivos y alcanzando también de manera asintótica la evolución obtenida por la teoría clásica.

Posteriormente la fig. 4 destaca el comportamiento del espesor de desplazamiento. Como puede apreciarse, la curva muestra que aun para valores negativos de \bar{x} , el efecto de la expansión térmica comienza débilmente a hacerse presente. Lo anterior sirve para descubrir que el efecto del escalón de temperatura perturba aun aguas arriba la fluidodinámica del gas; lo cual confirma la naturaleza elíptica de las ecuaciones . En las regiones donde \bar{x} es positiva, el espesor de desplazamiento crece continuamente reproduciendo la alteración que tiene el proceso de expansión térmica sobre el gas, conduciendo este crecimiento al valor proporcionado por la teoría clásica. De manera muy particular, conviene destacar que la presente teoría lineal permite eliminar la singularidad en la pendiente del espesor de desplazamiento justo en el origen ; como se ha comentado en capítulos anteriores, el valor negativo de la pendiente del

espesor de desplazamiento es justamente la velocidad transversal corregida al flujo principal y el hecho de que esta no sea singular en el origen y aun menos en todo el dominio de la \bar{x} , convalida el uso de la teoría de las tres capas para el problema del escalón de temperatura; aun mediante el uso de la teoría linealizada.

Finalmente dentro de los cálculos previstos en la teoría lineal, la fig.5 muestra la comparación del presente análisis para el número de Nusselt con la solución asintótica proporcionada por Lighthill (op.cit.) . Claramente cuando $Nu^* = 0$ se obtiene la solución de Lighthill y además la presente corrección verifica la singularidad en el origen debida a la interacción libre con el flujo no viscoso. En particular, las correcciones se hacen más notorias para valores pequeños de la variable \bar{x} .

Los comentarios anteriores provistos por la teoría clásica, sirven como antecedentes para la presentación de los cálculos numéricos. Sin embargo y de manera anticipada, conviene hacer las siguientes observaciones en cuanto a los parámetros que intervienen en los calculos numéricos. En particular todos los cálculos para el presente algoritmo fueron llevados a cabo en un sistema IBM/4381. Las operaciones llevadas a cabo se escogieron en base a una malla no uniforme donde los límites de la variable longitudinal se fijó en los extremos ± 5 y el borde externo de la capa inferior se eligió en $\bar{y}_e = 8$. Debido a que la malla no era uniforme, las etapas iniciales para los incrementos en \bar{x} e \bar{y} fueron $\Delta\bar{x} = \Delta\bar{y} = 0.05$, similarmente la razón de dos intervalos adyacentes se tomó respectivamente como 1.04 y 1.02. Además se

eligieron 57 nodos para la dirección transversal lo cual es mas que suficiente para cálculos que involucran flujos laminares (ver Cebeci y Bradshaw, op.cit.) y correspondientemente para la coordenada longitudinal fueron tomados 80 estaciones. Cabe señalar que la elección de todos estos parámetros, estuvo ligado directamente a diferentes corridas del programa, de tal forma que con ayuda de la experiencia previa de otros autores y los ensayos propuestos, fue posible optimizar los valores de todos los parámetros involucrados de la red no uniforme. Adicionalmente y dado que el problema depende del número de Prandtl, se eligió como base de cálculo un valor de $Pr = 0.71$ junto con la relación de Chapman-Rubesin, $\mu \rho = 1$. Ciertas dificultades iniciales se encontraron para obtener una convergencia global dentro de la exactitud tolerada. Para corregir tales problemas se utilizó relajación para el espesor de desplazamiento y en particular, se eligió un valor de $B = 0.85$ para el parámetro de relajación (ver capítulo 5 para la definición de este parámetro). De esta manera, para valores por debajo de este valor el tiempo de convergencia se iba ampliando y para valores por encima de este no se obtenían cambios significativos. Justamente el hecho fundamental que condujo al uso de la relajación, fue el resultado de que para valores de $B = 0.5$ la presencia de fuertes oscilaciones principalmente en el esfuerzo cortante y el flujo de calor ocasionaba divergencia en la solución. También conviene destacar de manera secundaria, que en la discretización de las ecuaciones de movimiento y de la energía para la capa inferior el uso de los promedios longitudinales fue también afectado por un factor de relajación para acelerar la convergencia local. Pero de manera global, fueron necesarios de 80 a 100 ciclos globales de

iteración para garantizar la convergencia absoluta dentro de la tolerancia aceptada. Con estos comentarios, los resultados del análisis numérico aparecen en las figuras de la 7 a la 12.

En la fig. 7 puede apreciarse la evolución de la distribución de la presión para diferentes valores del parámetro de temperatura T_w . Como puede verse a medida que el parámetro se va incrementando, el proceso de expansión térmica del gas va gradualmente modificando el valor de la presión hasta alcanzar un valor de $T_w \approx 3.0$, donde el incremento desfavorable de la presión ocasiona una disminución tan drástica en el valor del esfuerzo cortante en la pared, como para producir valores del esfuerzo cortante idénticos con cero, indicando la presencia del fenómeno de la separación de la capa límite. Esta evolución del esfuerzo cortante para diferentes valores del parámetro T_w se puede apreciar en la fig.8. Para valores del parámetro T_w mayores a este valor crítico el esfuerzo cortante se hace cero y el análisis presente deja de ser válido, especialmente para estudiar esta nueva estructura donde zonas de recirculación y eventualmente zonas de readherencia pueden estar presentes. En particular, los cálculos numéricos mostraban fuertes oscilaciones para valores del parámetro T_w mayores a 3 y las dificultades asociadas a estas nuevas regiones que exigen un replanteamiento de las ecuaciones básicas, permiten entrever que a posteriori será necesario emplear técnicas numéricas más sofisticadas que las utilizadas en el presente trabajo. De manera similar como fue señalado para la distribución de presión, el esfuerzo cortante alcanza asintóticamente la solución de Blasius y la modificada de Blasius para regiones tanto aguas arriba como aguas abajo del origen. En

la fig. 9 aparece la evolución del espesor de desplazamiento para diferentes valores del parámetro T_w . Al igual que la teoría lineal las presentes predicciones señalan un notable incremento del espesor de desplazamiento y aun de mayor magnitud que la proporcionada por la teoría lineal. De igual forma los cálculos numéricos confirman la validez de la teoría de las tres capas al retirar la singularidad de la velocidad normal en el origen. Desde el punto de vista físico, el valor de la pendiente del espesor de desplazamiento que se relaciona con la velocidad normal tiene justamente un valor máximo en el origen lo cual es una respuesta esperada, debido a la presencia de los gradientes longitudinales de presión que atenúan los términos convectivos en regiones próximas a la superficie de la placa plana.

Por otro lado la fig. 10 muestra el flujo de calor adimensional definido como $q = \partial T / \partial \bar{y}$ y evaluado en la superficie de la placa. Lo más característico de la curva presente, radica en que a medida que el parámetro T_w se va incrementando a su vez también el valor del flujo de calor se incrementa de manera notable y muy particularmente en regiones próximas al origen. De manera particular en $\bar{x} = 0$ el flujo de calor se vuelve singular en mutuo acuerdo con la teoría lineal debido a la condición discontinua en la temperatura y la interacción con la zona externa. Finalmente las figs. 11 y 12 muestran respectivamente las comparaciones de la presión y del esfuerzo cortante en la pared con ayuda de ambos análisis. En particular, el análisis lineal sobreestima los valores de la presión referidos al análisis no lineal, así como también para el esfuerzo cortante. De hecho el valor crítico necesario de T_w para alcanzar la separación, con

ayuda de la teoría lineal produce un valor de $\theta_w = 2.391$ para un número de Prandtl de $Pr = 0.71$, mientras que los cálculos numéricos predice un valor cercano al 2. Esto claramente permite concluir que la presencia de los términos no lineales en las ecuaciones fundamentales de la capa inferior son de tal magnitud que anticipan el fenómeno de la separación; lo cual es un resultado esperado dado que la presencia de gradientes de presión mas fuertes que las predichos por la teoría lineal deben conducir mas facilmente a la separación ocasionada por el escalón de temperatura.

Por los comentarios arriba señalados podría añadirse resumidamente las anotaciones siguientes : el proceso de expansión térmica para un cambio discontinuo en la temperatura de la pared fue analizado a la luz de una nueva teoría interactiva que mantiene como principal característica, la de inducir una región de interacción entre zonas internas y de flujo potencial. Se encontró que el gradiente de presión es desfavorable en regiones aguas arriba del escalón de temperatura y una vez que se inicia el salto, abruptamente el gradiente se vuelve favorable hasta alcanzar asintóticamente la solución de presión uniforme. Como contraparte a esta situación , el esfuerzo cortante se ve sujeto a una disminución en su valor, llegando a una situación crítica para $T_w = 3$, donde la separación se hace presente. Este valor de T_w crítico no es de ninguna manera universal ya que los resultados presentes se mantiene estrictamente válidos para $Pr = 0.71$. Sin embargo, se puede concluir con la teoría lineal que el fenómeno de la separación se irá atenuando a medida que el número de Prandtl se vaya incrementando. Para valores superiores al valor crítico de

$T_w \approx 3$, la existencia de zonas de recirculación y posiblemente de zonas de readherencia invalidan los resultados del presente trabajo; lo cual dirige la atención en un futuro inmediato a establecer nuevos esquemas tanto del planteamiento de modelos matemáticos como de algoritmos numéricos si no mas sofisticados si mas eficientes. Se puede prever que cuando la separación se lleve a cabo, el gas aguas arriba eventualmente llegará a calentarse lo cual puede conducir hipoteticamente a un proceso de enfriamiento para poder mantener la temperatura de la placa aguas arriba del escalón de temperatura, con un valor uniforme. Sin embargo, si una condición adiabática se aplicase a esta porción de la placa aguas arriba del escalón, entonces antes de que la separación tome lugar la porción de la placa sujeta a la condición adiabática podría eventualmente entrar a un proceso de acumulación de calor lo que ocasionaría un calentamiento gradual para esta parte de la placa y conduciría a una hipotética reducción de la intensidad de la singularidad; siendo posible la desaparición de la separación. Este fenómeno pudiera conducir a un comportamiento oscilatorio; sin embargo, elucidar estos aspectos esta mas allá de las posibilidades del presente trabajo.

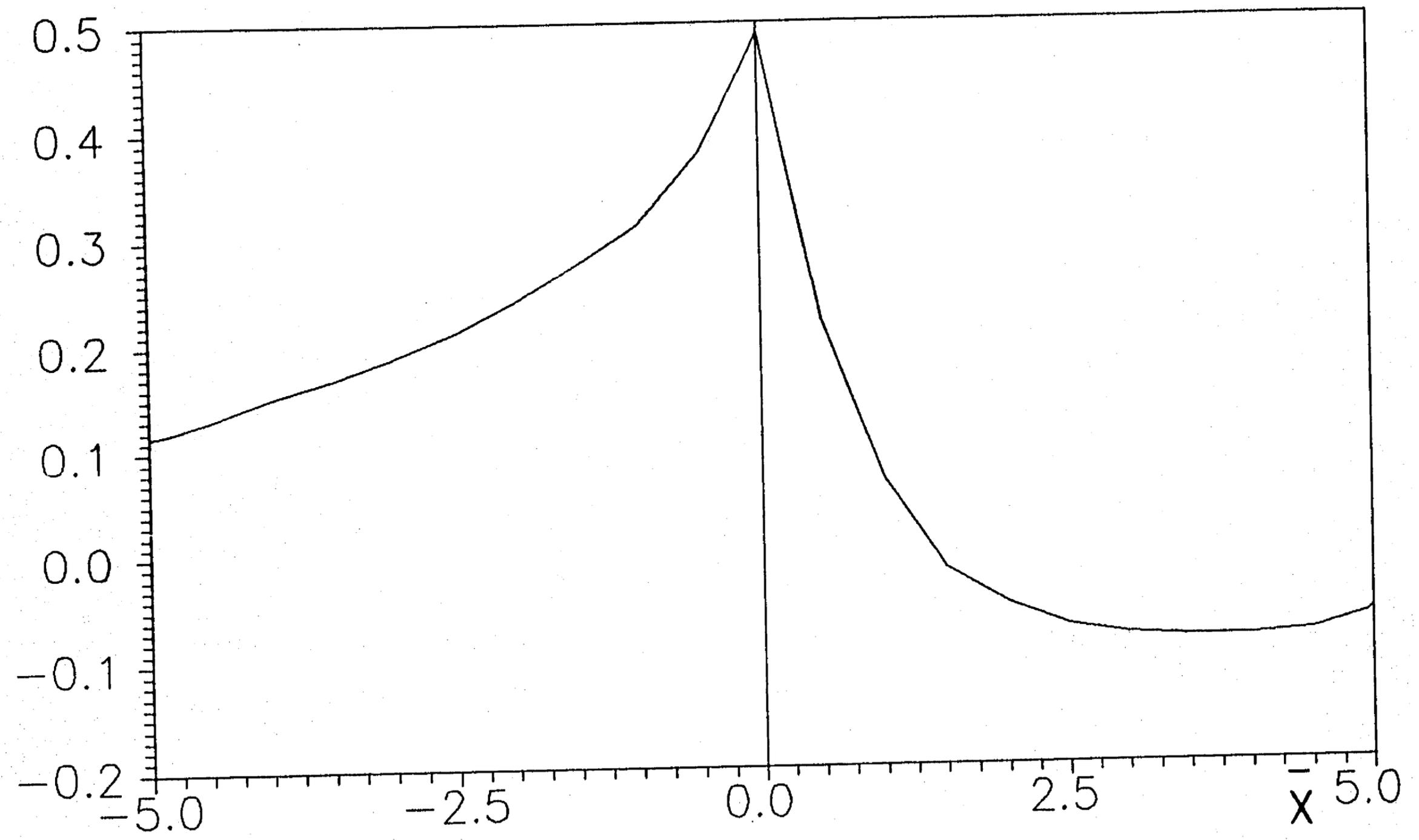
Para finalizar es interesante comentar la influencia que pueden tener los resultados del presente trabajo en el contexto de interrelación que puede originarse con ramas afines. En particular se había mencionado en el resúmen inicial que en múltiples ocasiones los avances básicos en una área específica pueden ser de gran utilidad en otras disciplinas. Estos comentarios finales vienen a relucir específicamente dada la relación existente entre la predicción de números de Nusselt y la teoría de la combustión

en flujos de capa límite. En el pasado y muy recientemente grandes avances se han hecho en la comprensión de los principales parámetros físicos que intervienen en la combustión que se lleva a cabo con quemadores catalíticos estables; para un excelente repaso sobre lo que acontece a este respecto se sugiere consultar el trabajo de Pfefferle y Pfefferle [50], donde ha sido minuciosamente presentado el estado del arte de la combustión catalítica. Dentro de este contexto los trabajos de Mihail y Teodorescu [51], Ahluwalia y Chung [52], Liñán y Williams [53], Liñán y Treviño [54] ayudan a entender mas particularmente los mecanismos de ignición y extinción de reacciones catalíticas sobre geometrías específicas y en este sentido, la modelación matemática del fenómeno físico en la mayoría de los casos hace uso de la aproximación de Lighthill para la transferencia de calor entre la superficie catalítica y el gas oxidante. Por ello, los cálculos para la transferencia de calor evaluados en el presente trabajo se pueden convertir en una excelente metodología que sustituya anteriores aproximaciones, en el entendido de mejorar modelos ya existentes. De igual forma y muy ligado al problema de la ignición en capa límite, han aparecido en la literatura una diversidad de trabajos que han utilizado frecuentemente la aproximación de Lighthill; en particular los trabajos de Treviño y Méndez [55], Méndez et. al. [56] pueden ser utilizados como referencias básicas para corregir tiempos y distancias de ignición desde la perspectiva de los resultados obtenidos en el presente trabajo. En este sentido muy recientemente el trabajo de Treviño, Stüttgen y Peters [57] analiza con la teoría de la capa límite de orden superior, los gradientes de presión generados por la expansión en la capa límite ocasionada por la combustión de un

combustible sólido. Aun cuando en este trabajo no se llega a emplear el formulismo de la teoría de las tres capas, los resultados ahí desarrollados sirven como punto de partida para establecer un análisis riguroso con la teoría interactiva.

Fig.2.

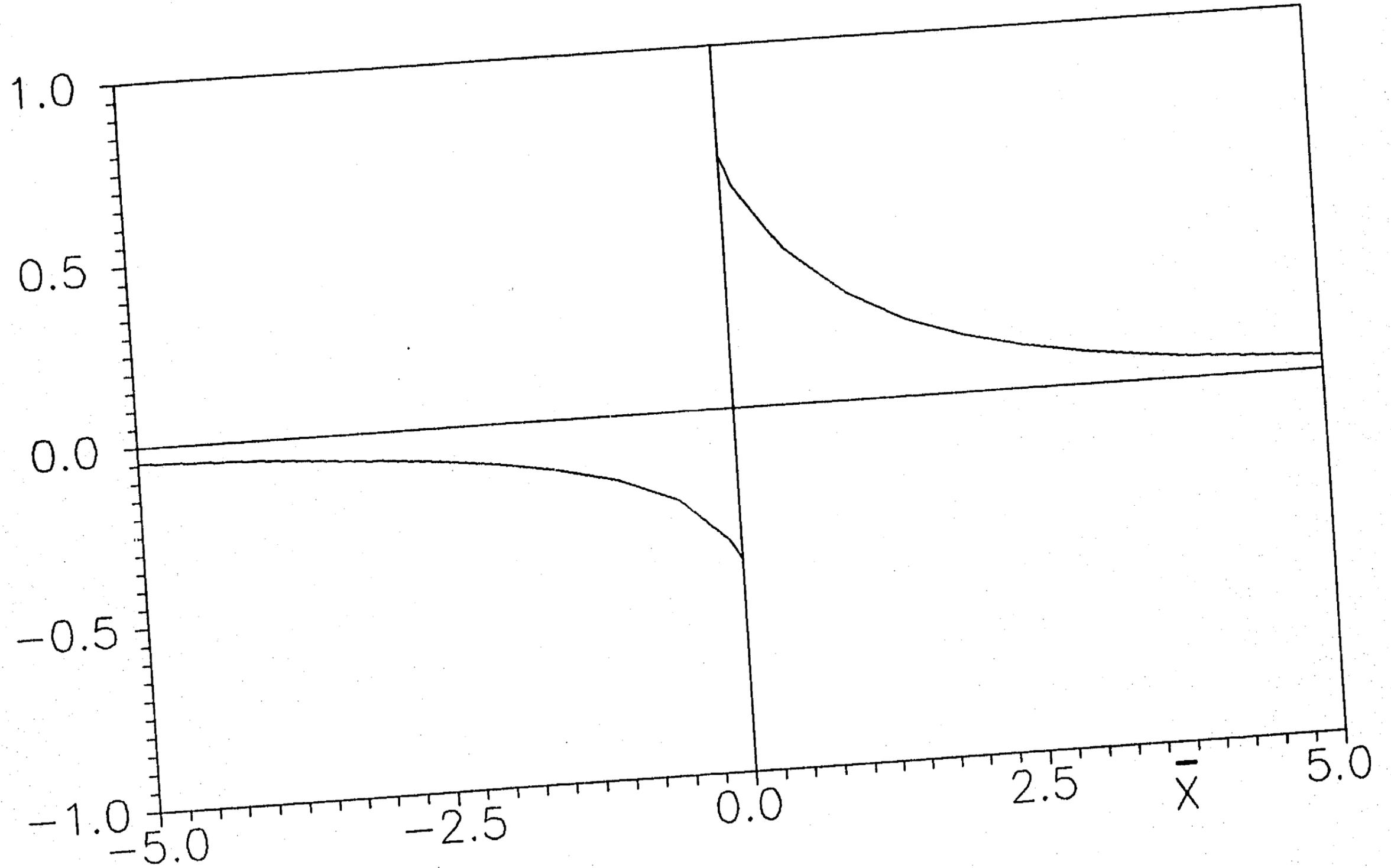
P/θ_w



$$(\tau - 1)/\theta_w$$

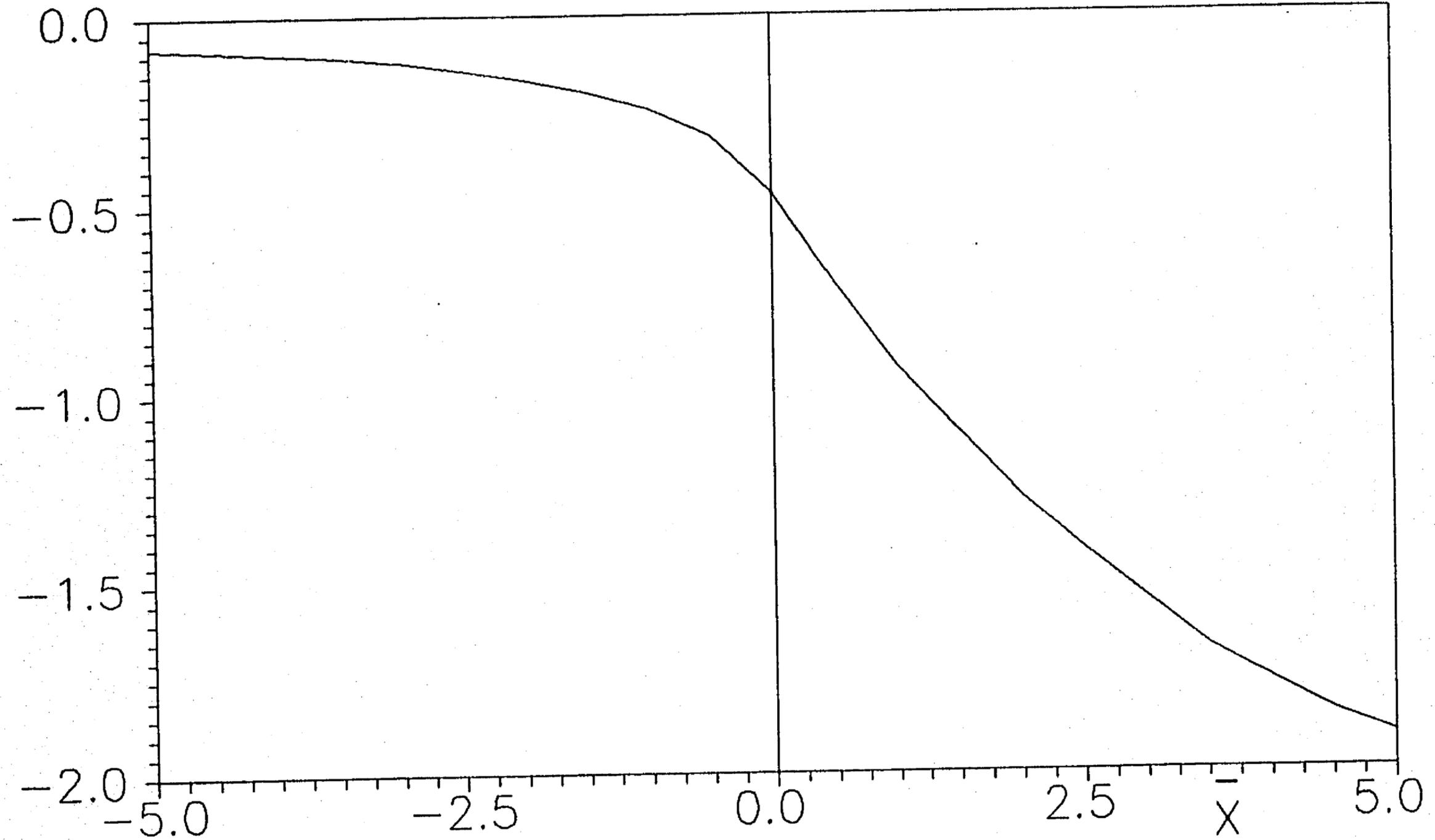
Fig.3.

105



A/θ_w

Fig.4.



*
Nu

Fig.5.

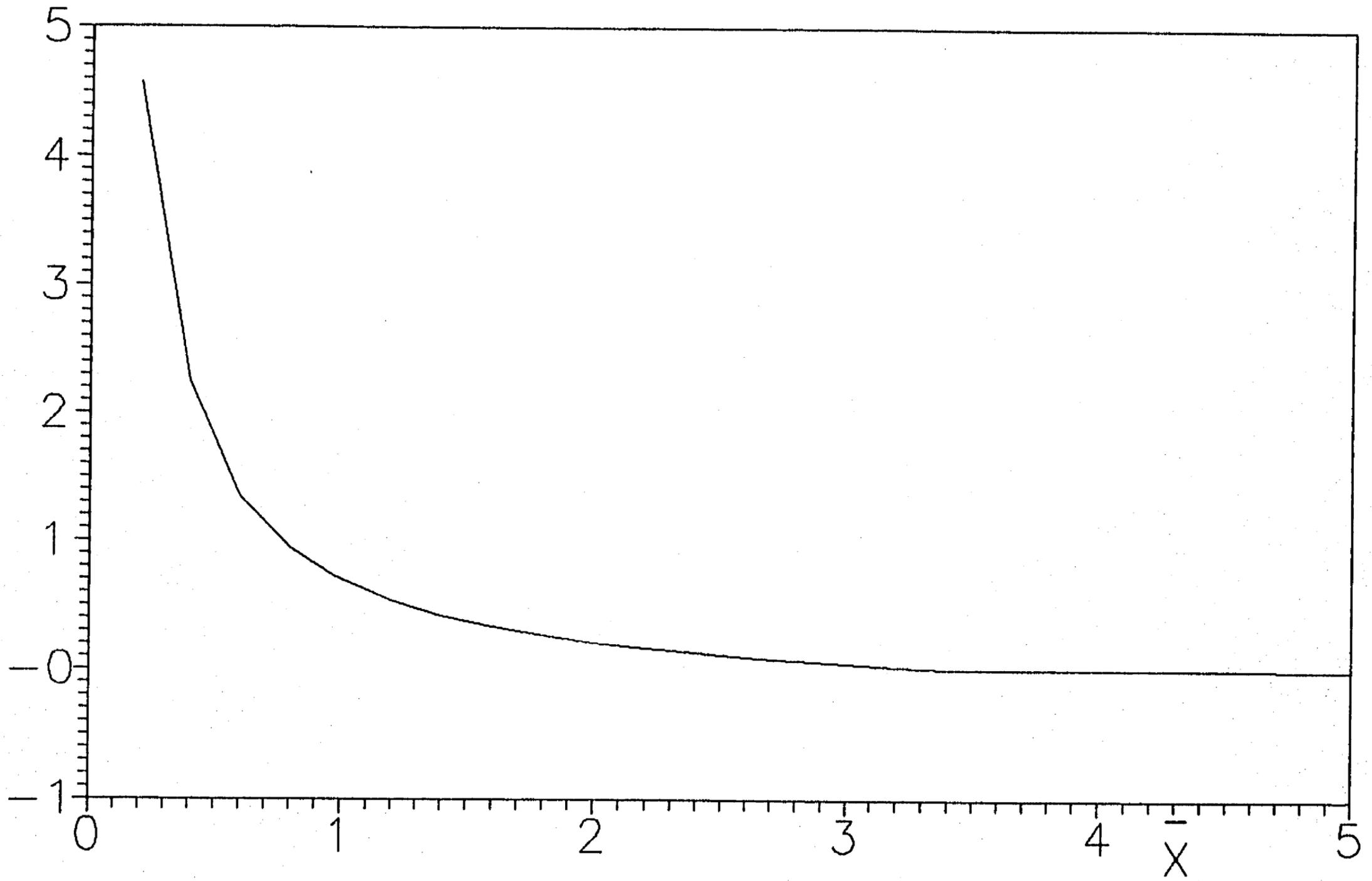


Fig.7.

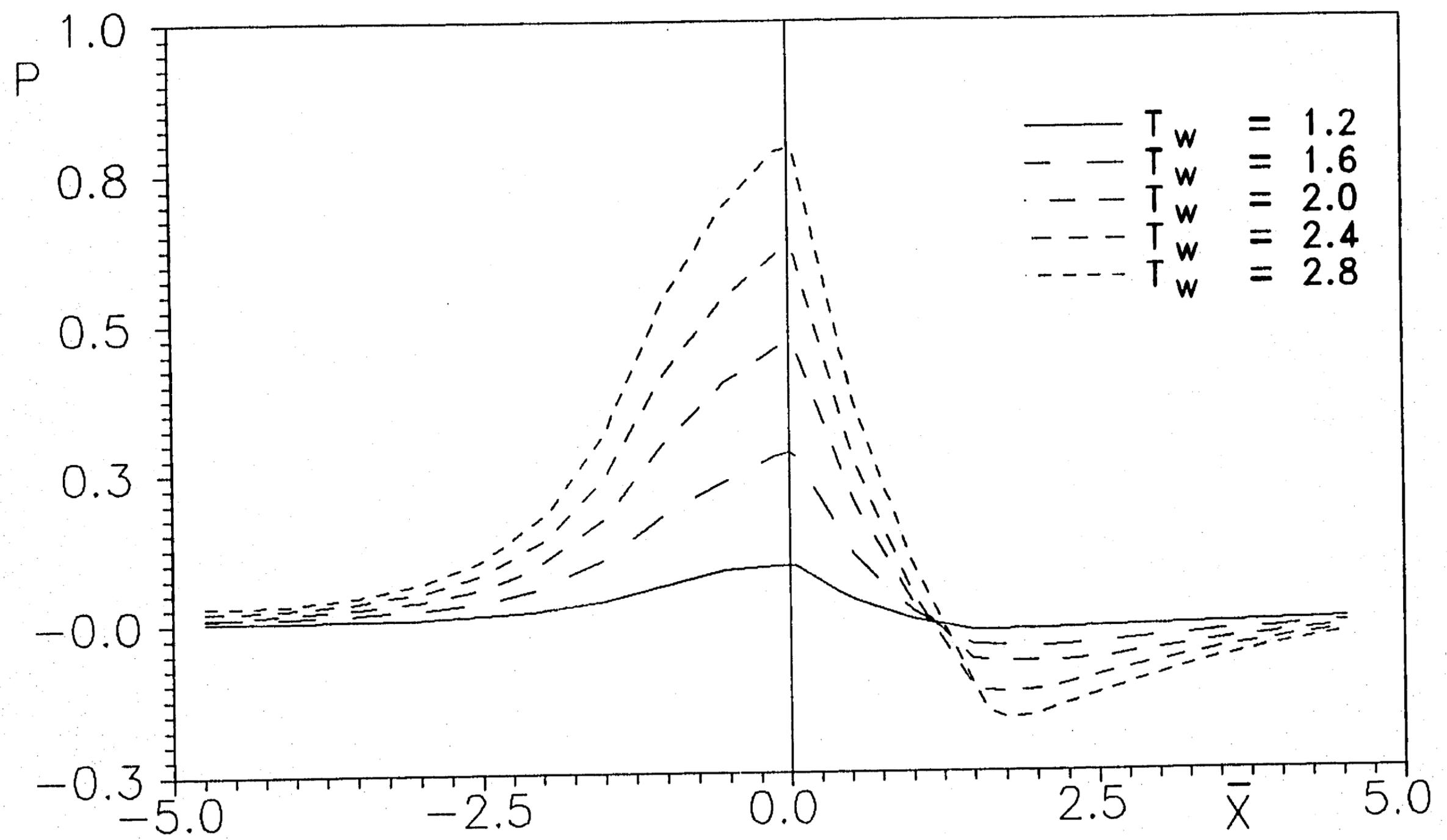


Fig.8.

τ

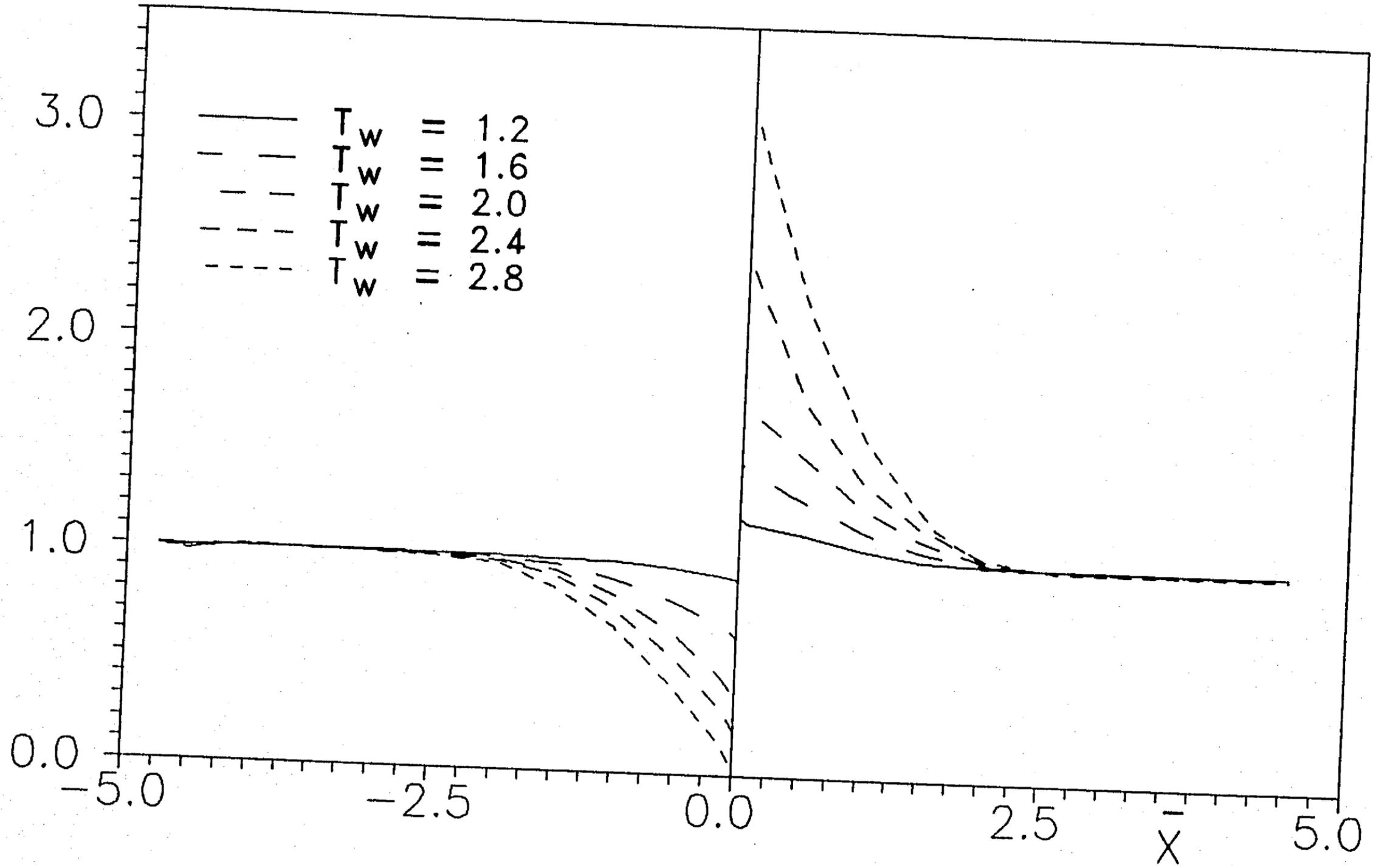


Fig.9.

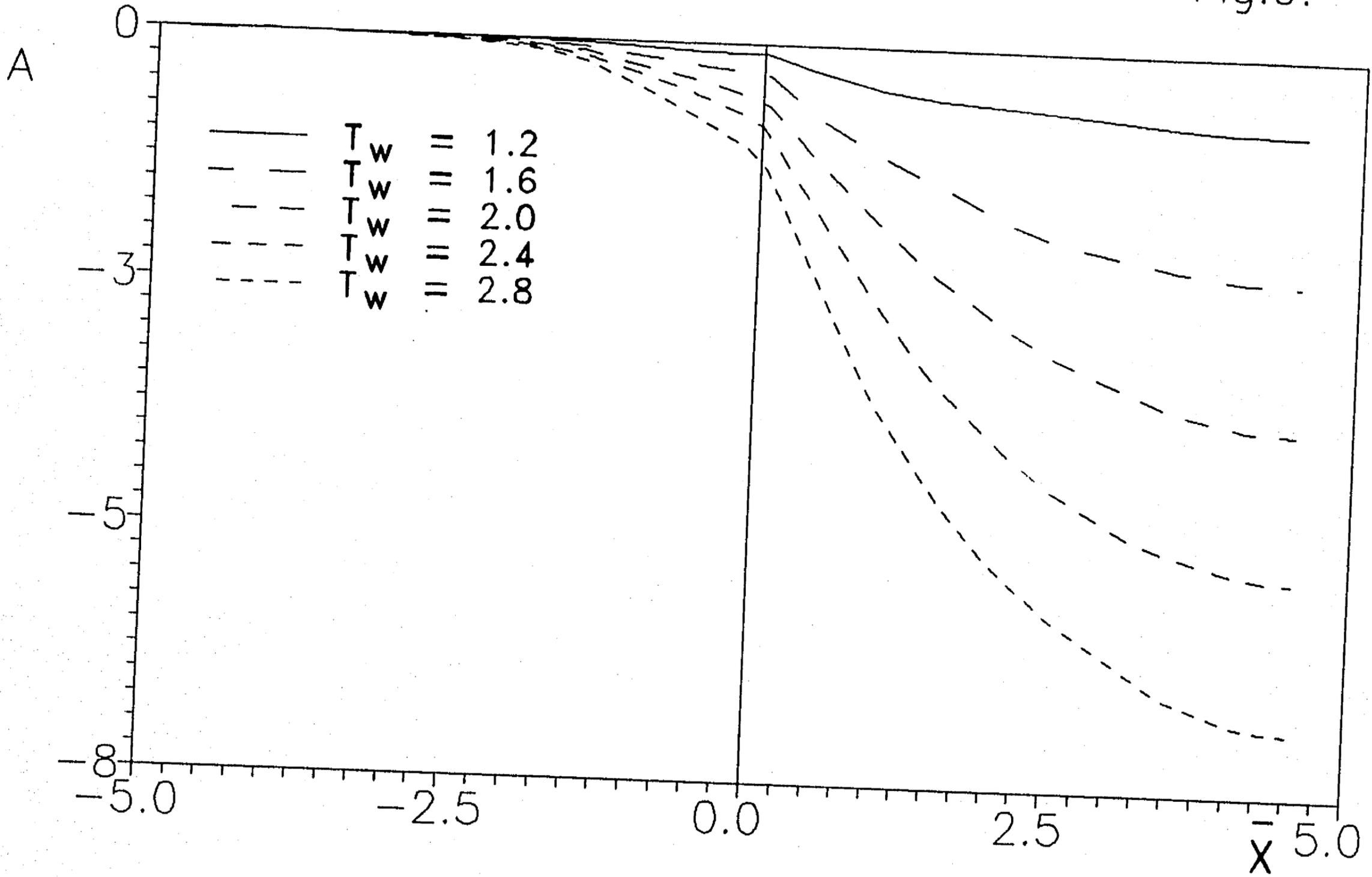


Fig.10.

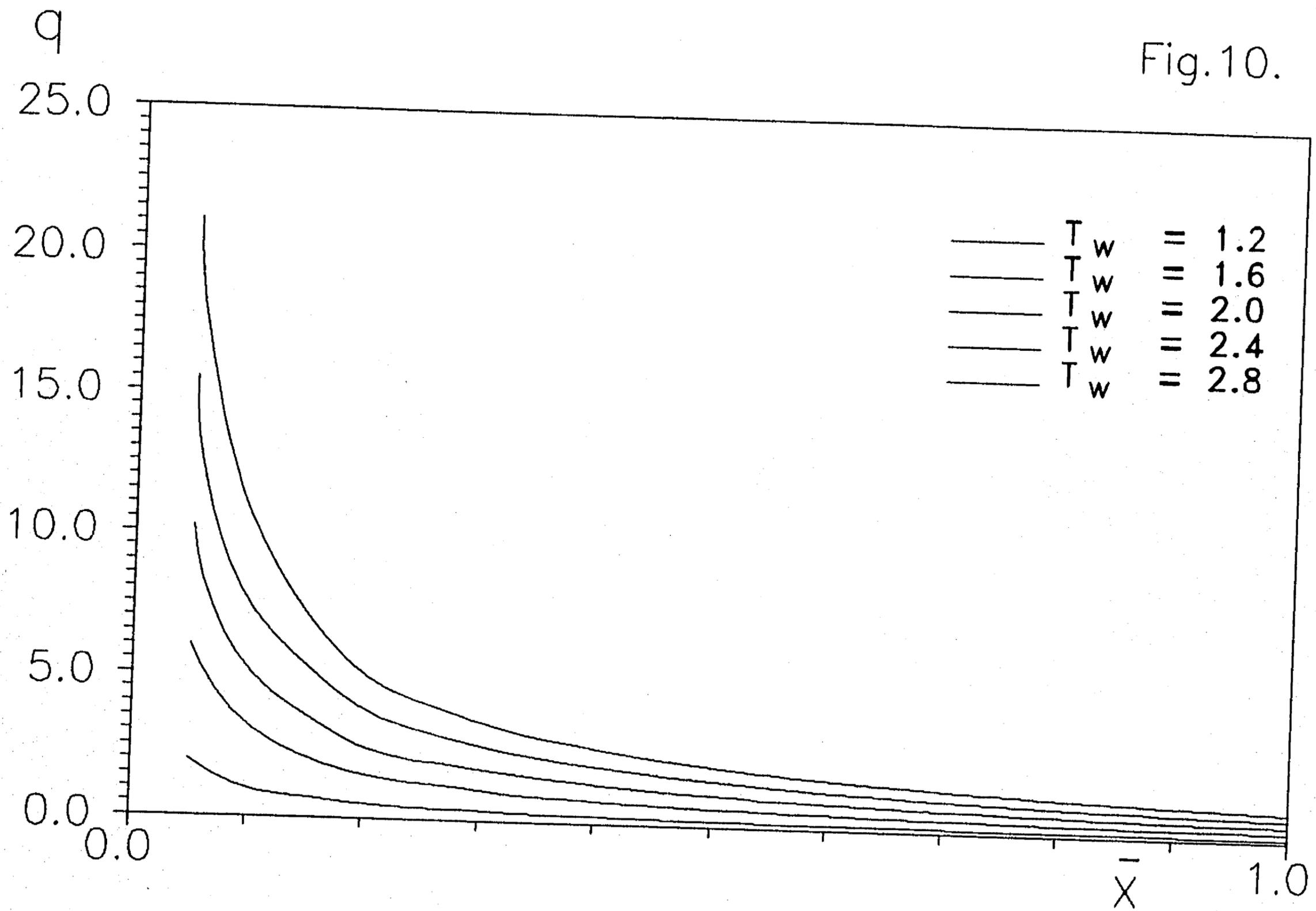
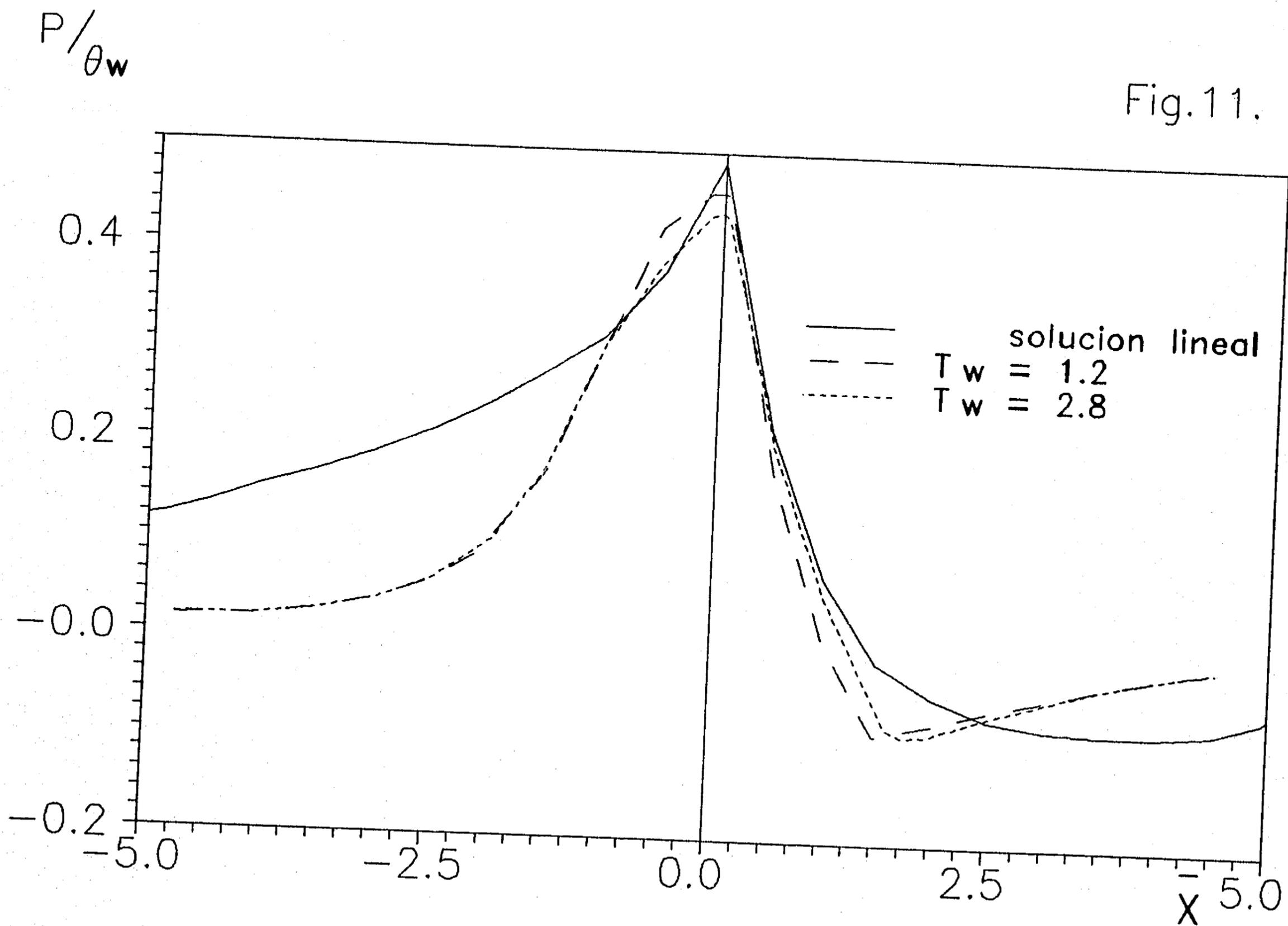
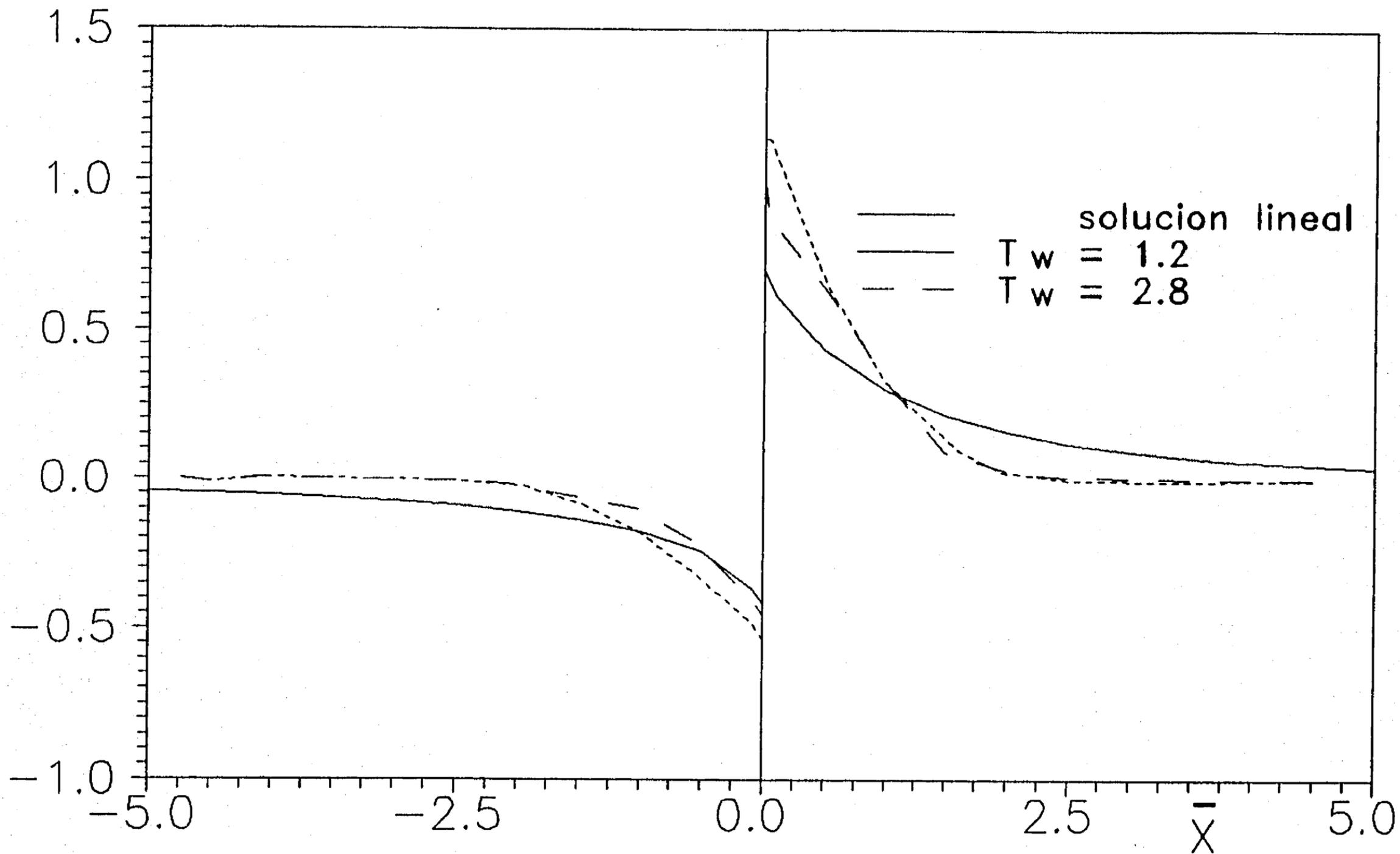


Fig. 11.



$$(\tau - 1)/\theta_w$$

Fig.12.



REFERENCIAS

1. Prandtl, L. (1904); *Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung*, Verh. III. Int. Math. Kongr., Heidelberg, 484-491, Teubner, Leipzig.
2. Blasius, H. (1908); *Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung*, Z. Math. Phys. 56, 1-37.
3. Goldstein, S. (1930); *Concerning some solutions of the boundary-layer equations in hydrodynamics*. Proc. Camb. Phil. Soc. 26, 1-30.
4. Goldstein, S. (1948); *On laminar boundary layer flow near a point of separation*. Q. J. Mech. Appl. Math. 1, 43-69.
5. Stewartson, K. (1970a); *Is the singularity at separation removable?* J. Fluid Mech. 44, 3477-364.
6. Stewartson, K. y Williams, P. G. (1969); *Self-induced separation*. Proc. R. Soc. A312, 181-206.
7. Neiland, V. Ya. (1969); *Towards a Theory of separation of the laminar boundary layer in supersonic stream*. Izv. Akad. Nauk. SSSR, Mekh. Zhid. Gaza. no. 4.
8. Messiter, A. F. (1975); *Boundary layer flow near the trailing edge of a flat plate*. SIAM J. Appl. Math. 18, 241-257.
9. Stewartson, K. (1969); *On the flow near the trailing edge of a flat plate - II*. Mathematika 16, 106-121.
10. Veldman, A. E. P. y Van de Vooren, A. I. (1976); *Drag of a finite flat plate*. Proc. 4th Int. Conf. Num. Meths. in Fluid Dyn., Lecture Notes in Physics 35, 422. Berlin: Springer Verlag.
11. Jobe, C. E. y Burggraf, O. R. (1974); *The numerical solution*

- of trailing edge. flow. Proc. R. Soc. A340 , 91-111.
12. Van Dyke, M. (1975); Perturbation Methods in Fluid Mechanics. Parabolic Press , Stanford.
 13. Smith, F. T. (1973); Laminar flow over a small hump on a flat plate. J Fluid Mech. 57 , 803-824.
 14. Napolitano, M. , Werle, M. J. y Dvis, R. T. (1978); Numerical solutions of the triple-deck equations for supersonic and subsonic flow past a hump. AIAA, 17 , no. 7.
 15. Burggraf, O. R. y Duck, P. W. (1981); Spectral computations of triple-deck flows. Proc. Symp. Phys. Num. Aspects Aerodyn. Flows. California State University, Long Beach.
 16. Canuto, C., Hussaini, M. Y., Quarteroni, A. y Zang, T. A. (1988); Spectral methods in Fluid Dynamics. Springer-Verlag.
 17. Flugge-Lotz, I. y Reyhner, T. A. (1968); Int. J. Non-linear Mech. 3 , 173-199.
 18. Treviño, C., Méndez, F. y Liñan, A. ; Spectral solution for a continuous thermal hump in a free-interaction problem. En preparación para publicación.
 19. Stewartson, K. (1970b); On laminar boundary layers near corners. Q. J. Mech. Appl. Math. 23 , 137-152.
 20. Napolitano, M. y Messick, R. E. (1980); On strong slot-injection into a subsonic laminar boundary layer. Comput. Fluids 8 , 199-212.
 21. Werle, M. J. y Verdon, J.M. (1980); Solutions for laminar subsonic trailing edge flows at asymptotically large Reynolds number. Int. Conf. Boundary & Interior Layers, Trinity College. Dublin, Ireland.
 22. Stewartson, K. y Williams, P. G. (1973); Self-induced

separation II. *Mathematika* 20 , 98-108.

23. Smith, F. T. y Stewartson, K. (1973a); On slot-injection into a separated supersonic boundary layer. *Proc. R. Soc.* A332 , 1-22.
24. Smith, F. T. (1982); On the high Reynolds number theory of laminar flows. *IMA J. Appl. Math.* 28 , 207-281.
25. Messiter, A. F. y Liñán, A. (1976); The vertical flat plate in laminar free convection : effects of leading and trailing edges and discontinuous temperature. *Z. Angew. Math. Phys.* 27 , 633-651.
26. Higuera, F. (1991); Viscous-Inviscid interaction due to the freezing of a liquid flowing on a flat plate. Comunicación privada.
27. Zeytounian, R. Kh. (1987); *Les Modèles Asymptotiques de la Mécanique des Fluides II. Lecture Notes in Physics 276* , Springer Verlag.
28. Friedrichs, K. O. (1953); *Special Topics in Fluid Dynamics*, pp. 120-130. New York Univ.
29. Friedrichs, K. O. (1954); *Special Topics in Analysis*. New York Univ.
30. Bretherton, F. P. (1962); Slow viscous motion round a cylinder in a simple shear. *J. Fluid Mech.* 12 , 591-613.
31. Kaplun, S. (1954); The role of coordinate systems in boundary-layer theory. *Z. Angew. Math. Phys.* 5 , 111-135.
32. Schlichting, H. (1968); *Boundary-Layer Theory*, 6th English ed. McGraw-Hill, New York.
33. Van Driest, E. R. (1952); Investigation of laminar boundary layer in compressible fluids using the Crocco-Method. NACA TN

2597.

34. Chapman, D. R. y Rubesin, M. W. (1949); Temperature and velocity profiles in the compressible, laminar boundary layer with arbitrary distribution of surface temperature. JAS 16 , 547-565.
35. Klein, J. y Tribus, M. (1952); Forced convection from non-isothermal surfaces. Heat Transfer Symposium, Engineering Research Institute, Univ. of Michigan.
36. Donoughe, P. L. y Livingood, J. N. B. (1955); Exact solutions of laminar boundary layer equations with constant property values for porous wall with variable temperature. NACA Rep. 1229.
37. Spalding, D. B. (1958); Heat transfer from surfaces of non-uniform temperature. J. Fluid. Mech. 4 , 22-32.
38. Eckert, E. R. G., Hartnett, J. P. y Birkeback, R. (1957); simplified equations for calculating local and total heat flux to non-isothermal surface. JAS 24 , 549-551.
39. Lighthill, M. J. (1950); Contributions of the theory of heat transfer through a laminar boundary layer. Proc. Roy. Soc. London A 202 , 359-377.
40. Levèque, M. A. (1928); Les lois de la transmission de chaleur par convection. Ann. Mines 13 , 201- 239.
41. Howarth, P. L. (1948); Concerning the effect of compressibility on laminar boundary layers and their separation. Proc. Roy. Soc. London A 194 , 16-42.
42. Dorodnitsyn, A. (1942); Laminar boundary layers in compressible fluids. C. R. Akad. Nauk. U.S.S.R. , 34 , 213-219.

43. Stewartson, K. (1981a); D'Alambert Paradox. SIAM Rev. 23 , 308-343.
44. Messiter, A. F. (1975); Laminar separation -a local asymptotic flow description for constant pressure downstream, AGARD paper 168 on flow separation.
45. Liepmann, H. W. y Roskko, A. (1957); Elements of Gas Dynamics. Wiley, New York.
46. Abramowitz, M. y Stegun, I. A. (1970); Handbook of Mathematical Functions. Dover Publications, Inc., New York.
47. Carrier, G. F., Krook, M. y Pearson, C. E. (1966); Functions of a Complex Variable. McGraw-Hill Book Company, Inc., New York.
48. Cebeci, T y Bradshaw, P. (1984); Physical and Computational Aspects of Convective Heat Transfer. Springer Verlag, Inc., New York.
49. Veldman, A. E. y Dijkstra, D. (1980); A fast method to solve incompressible boundary-layer interaction problems. Proc. 7th. Int. Conf. Num. Meth. Fluid Dyn. Stanford, USA.
50. Pfefferle y Pfefferle (1987); Catalysis in combustion. Catal. Rev. Sci. Eng. 29 , 219-267.
51. Mihail, R. y Teodorescu, C. (1975); Laminar boundary layer with non-isothermal surface catalyzed reactions. Chem. Engng. Sci. 30 , 993.
52. Ahluwalia, R. K. y Chung, P. M. (1980); Extract and approximate solutions of a chemically reacting non-equilibrium flow problem. Int. J. Heat Mass Transfer 23 , 627.
53. Liñán, A. y Williams, F. A. (1978); Ignition of a reactive solid exposed to a step in surface temperature. SIAM J. Appl.

Math. 40 , no.2 , 261-265.

54. Liñán, A y Treviño, C. (1984); Ignition and extinction of catalytic reactions on a flat plate. Combust. Sci. Tech. 38 , 113-128.
55. Treviño, C. y Méndez, F. (1991); Asymptotic Analysis of the ignition of Hydrogen by a Hot Plate in a Boundary Layer. Comb. Sci.Tech. 78, 189.
56. Méndez, F., Treviño, C. y Liñán, A.(1986); Premixed combustion in boundary layers for moderate values of the Zeldovich numbers. Combust. Sci. Tech. 48 , 129-149.
57. Treviño, C., Stüttgen, W. y Peters, N (1990); Pressure gradients due to gas expansion in the boundary layer combustion of a condensed fuel. Wärme und Stoffübertragung 25 309-319.

APENDICE

En este apéndice se presentan los coeficientes que aparecen en las ecuaciones (5.19)-(5.23) junto con el diagrama de flujo y el correspondiente listado del programa numérico.

Con relación a los coeficientes estos se definen mediante las siguientes expresiones:

$$(S1)_j = \mu \rho h_j^{-1} + \frac{\alpha_{n-1}}{2} \psi_j - \frac{\alpha_{n-1}}{2} \psi_{j-1/2}$$

$$(S2)_j = \mu \rho h_j^{-1} + \frac{\alpha_{n-1}}{2} \psi_{j-1} - \frac{\alpha_{n-1}}{2} \psi_{j-1/2}$$

$$(S3)_j = \frac{\alpha_{n-1}}{2} V_j + \frac{\alpha_{n-1}}{2} V_{j-1/2}$$

$$(S4)_j = \frac{\alpha_{n-1}}{2} V_{j-1} + \frac{\alpha_{n-1}}{2} V_{j-1/2}$$

$$(S5)_j = -\alpha_n U_j$$

$$(S6)_j = \alpha_n U_{j-1}$$

$$(S7)_j = \frac{\alpha_n}{2} (\tilde{p}^n - \tilde{p}^{n-1})$$

$$(S8)_j = \frac{\alpha_n}{2} (\tilde{p}^n - \tilde{p}^{n-1})$$

$$(\beta_1)_j = \frac{\mu \rho^{-1}}{\text{Pr}} h_j + \frac{\alpha_{n-1}}{2} (\psi_j - \psi_{j-1/2})$$

$$(\beta_2)_j = -\frac{\mu \rho^{-1}}{\text{Pr}} h_j + \frac{\alpha_{n-1}}{2} (\psi_{j-1} - \psi_{j-1/2})$$

$$(\beta_3)_j = \frac{\alpha_{n-1}}{2} (T_j + T_{j-1/2})$$

$$(\beta_4)_j = \frac{\alpha_{n-1}}{2} (T_{j-1} + T_{j-1/2})$$

$$(\beta_5)_j = -\frac{\alpha_{n-1}}{2} (T_j - T_{j-1/2})$$

$$(\beta_6)_j = -\frac{\alpha_{n-1}}{2} (T_{j-1} - T_{j-1/2})$$

$$(\beta_7)_j = -\frac{\alpha_{n-1}}{2} (U_j + U_{j-1/2})$$

$$(\beta_8)_j = -\frac{\alpha_{n-1}}{2} (U_{j-1} + U_{j-1/2})$$

$$(\beta_9)_j = (\beta_{10})_j = 0$$

$$\text{donde } \alpha_n = \left[3k_n(z^2)^{n-1/2} \right]^{-1}$$

$$(r_1)_j = \psi_{j-1} - \psi_j + h_j V_{j-1/2}$$

$$(r_4)_j = U_{j-1} - U_j + h_j V_{j-1/2}$$

$$(r_5)_j = T_{j-1} - T_j + h_j T_{j-1/2}$$

$$\begin{aligned}
(r_2)_J &= R_{J-1/2}^{n-1} - \left[\mu \rho h_J^{-1} (V_J^1 - V_{J-1}^1) + \right. \\
&\quad \left. \alpha_n \left\{ (\psi V)_{J-1/2}^1 - (U^2)_{J-1/2}^1 - (\tilde{p}^n - \tilde{p}^{n-1}) T_{J-1/2}^1 \right\} \right] \\
&\quad - \alpha_n \left[V_{J-1/2}^{n-1} \psi_{J-1/2}^1 - \psi_{J-1/2}^{n-1} V_{J-1/2}^1 \right]
\end{aligned}$$

$$R_{J-1/2}^{n-1} = \mu \rho \left\{ h_J^{-1} (V_J^1 + \delta V_J - V_{J-1}^1 \delta V_{J-1}) \right\} +$$

$$\alpha_n \left\{ (\psi V)_{J-1/2}^1 + \psi_{J-1/2}^1 \delta V_{J-1/2} + V_{J-1/2}^1 \delta \psi_{J-1/2} \right.$$

$$\left. - \left[(U^2)_{J-1/2}^1 + 2U_{J-1/2}^1 \delta U_{J-1/2} \right] - (\tilde{p}^n - \tilde{p}^{n-1}) T_{J-1/2}^1 - (\tilde{p}^n - \tilde{p}^{n-1}) \delta T_{J-1/2} \right\}$$

$$+ \alpha_n \left\{ V_{J-1/2}^{n-1} \psi_{J-1/2}^1 + V_{J-1/2}^{n-1} \delta \psi_{J-1/2} - \psi_{J-1/2}^{n-1} V_{J-1/2}^1 - \psi_{J-1/2}^{n-1} \delta V_{J-1/2} \right\}$$

$$(r_3)_J = T_{J-1/2}^{n-1} - \left\{ h_J^{-1} (T_J^1 - T_{J-1}^1) + \alpha_n (\psi T)_{J-1/2}^1 \right.$$

$$\left. - \alpha_n \left[(U T)_{J-1/2}^1 + U_{J-1/2}^{n-1} T_{J-1/2}^1 - T_{J-1/2}^{n-1} U_{J-1/2}^1 \right. \right.$$

$$\left. \left. + \psi_{J-1/2}^{n-1} T_{J-1/2}^1 - T_{J-1/2}^{n-1} \psi_{J-1/2}^1 \right] \right\}$$

$$T_{j-1/2}^{n-1} = \frac{\mu\rho}{Pr} h_j^{-1} (T_j^i + \delta T_j - T_{j-1}^i - \delta T_{j-1}) +$$

$$\alpha_n \left[(\psi T)_{j-1/2}^i + \frac{1}{2} (\psi_j^i \delta T_j + \psi_{j-1}^i \delta T_{j-1} + T_j^i \delta \psi_j + T_{j-1}^i \delta \psi_{j-1}) \right]$$

$$- \alpha_n \left\{ (U T)_{j-1/2}^i + U_{j-1/2}^i \delta T_{j-1/2} + T_{j-1/2}^i \delta U_{j-1/2} + U_{j-1/2}^{n-1} T_{j-1/2}^i + \right.$$

$$U_{j-1/2}^{n-1} \delta T_{j-1/2} - T_{j-1/2}^{n-1} U_{j-1/2}^i - T_{j-1/2}^{n-1} \delta U_{j-1/2} +$$

$$\left. \psi_{j-1/2}^{n-1} T_{j-1/2}^i + \psi_{j-1/2}^{n-1} \delta T_{j-1/2} - T_{j-1/2}^{n-1} \psi_{j-1/2}^i - T_{j-1/2}^{n-1} \delta \psi_{j-1/2} \right\}$$

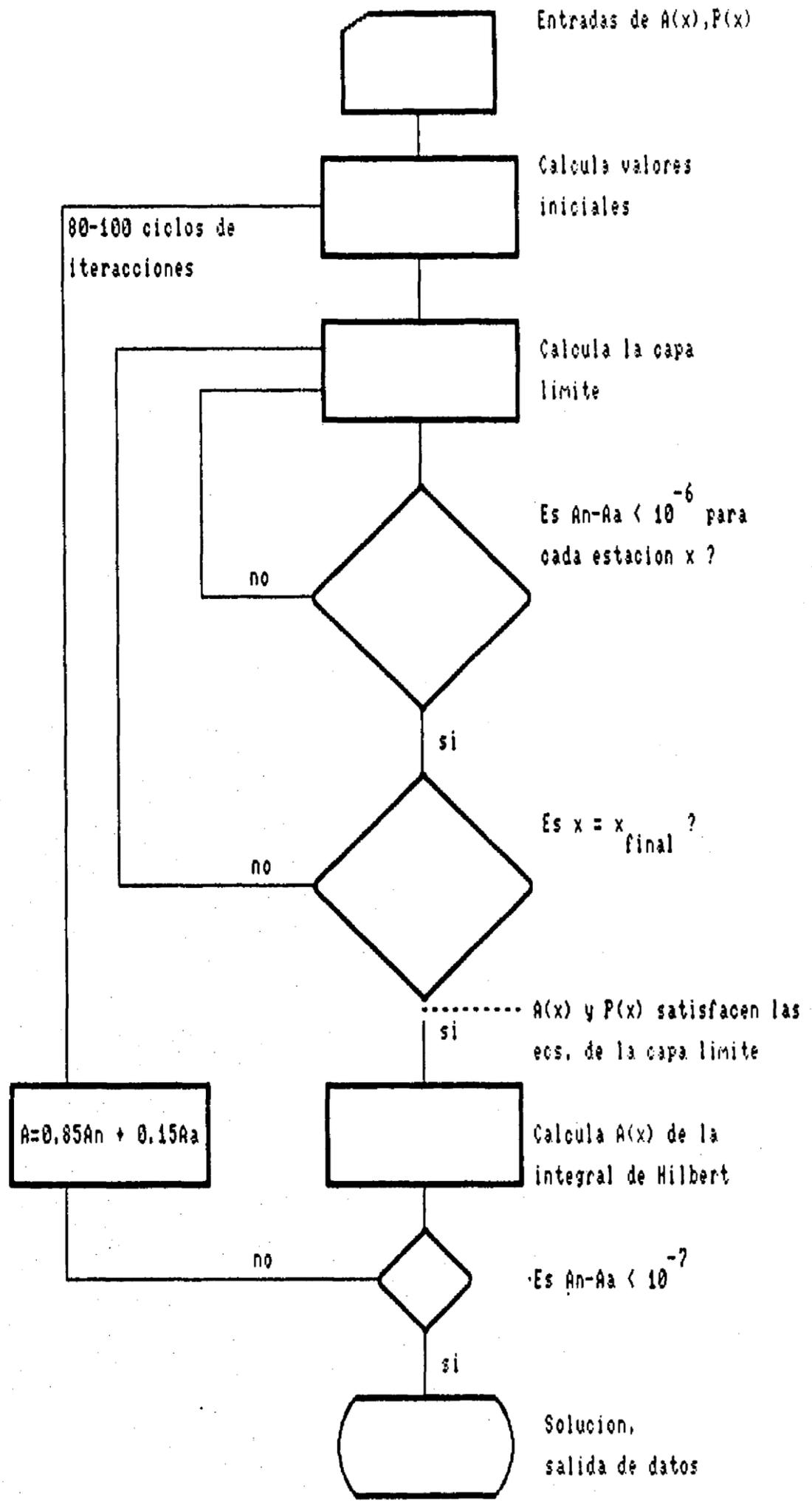


DIAGRAMA DE FLUJO

LISTADO DEL PROGRAMA DE COMPUTO

PROGRAM INTERACCION LIBRE PARA EL ESCALON DE TEMPERATURA

C ESTE PROGRAMA RESUELVE EL CONJUNTO DE ECUACIONES
 C (3.67)-(3.74) QUE DESCRIBEN EL COMPORTAMIENTO DEL PROCESO DE
 C EXPANSION TERMICA DEL GAS COMO CONSECUENCIA DEL ESCALON
 C DE TEMPERATURA EN LA SUPERFICIE DE LA PLACA PLANA TOMADO A
 C PARTIR DE UNA DISTANCIA FINITA DEL BORDE PRINCIPAL .

```

  IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
  COMMON /BLO0/ TW,PR,D3,AAA,NP,NX,NXI,NO,NXT
  COMMON /BLO1/ X1,X2,X3,X4,P1,P2,P3,P4,AA1,AA2,AA3,AA4
  COMMON /BLO2/ ETA(301),F(301,4),U(301,4),W(301,4),
  1 T(301,4),G(301,4)
  COMMON /BLO3/ X(1001),AA(1001,2),P(1001,2)
  COMMON /BLO4/ ABD(28,1505),D(1505,2)
  DIMENSION ITEST(1001)
  DIMENSION ETAS(301),FS(301),US(301),WS(301),TS(301),GS(301)
  NX=1
  ITMAX=15
  IBAR=1
  PR=.71D0
  WRITE(6,*) 'TW ? '
  READ (5,*) TW
  WRITE(9,*) 'TW= ',TW,' PR=',PR
  
```

C -----
 C DEFINICION DE LAS REDES
 C -----

C DEFINICION DE LA RED TRANSVERSAL
 CALL REDT(NP)

C DEFINICION DE LA RED LONGITUDINAL
 CALL REDL(X1)

C HISTORIETAS DE PRESENTACION DE RESULTADOS

```

  NS=10
  NSD=0
  NSP=10
  WRITE(6,*) ' NS,NSD,NSP '
  READ (5,*) NS,NSD,NSP
  WRITE(9,*) ' NS,NSD,NSP '
  WRITE(9,*) NS,NSD,NSP
  DO 10 I=1,NXT
  ITEST(I)=0
  10 CONTINUE
  I=0
  IAUX=0
  20 WRITE(6,*) ' I,ITEST(I) '
  READ (5,*) I,IAUX
  IF( I .EQ. 0 ) GO TO 30
  ITEST(I)=IAUX
  GO TO 20
  
```

C -----
 C CALCULO DE LOS VALORES INICIALES
 C -----

```

  30 X2=X(2)
  CALL IVPL
  P(1,2)=P1
  BETA=P1-P2
  
```

```

C
C VALORES INICIALES DEL DESPLAZAMIENTO
  C1=5.D0
  C2=3.D0
  C3=.5D0
  AU1=1.3541179394D0/2.6789385347D0
  ALFA=(TW-1.D0)*AU1*(3.D0**(2.D0/3.D0))/PR**(1.D0/3.D0)
  DO 35 K=1,NXT+1
  AA(K,2)=AAA*(C1-X(K)**3)/(C2+X(K)**6)
C IF( K .LE. NXI+5 ) AA(K,2)=-AAA/X(K)**3
  IF( X(K) .GT. 0.D0 ) AA(K,2)=AA(K,2)-ALFA*X(K)**5/(C3+X(K)**4)
  AA(K,1)=AA(K,2)
35 CONTINUE
C
  OPEN (UNIT=8)
  DO 37 K=1,NXT-NXI+1
  READ(8,*) AUX1,AA(NXI+K,2),AUX2
C WRITE(8,*) AUX1,AA(NXI+K,2),AUX2
  AA(NXI+K,1)=AA(NXI+K,2)
37 CONTINUE
  CLOSE (UNIT=8)
C
  IT=0
  GO TO 70
C -----
C RESOLUCION DE LAS ECUACIONES
C -----
40 IT=0
  IF( NX .GT. NXI ) CALL HILVE(RR2,CHI)
C
50 IT=IT+1
  IF( IT .GT. ITMAX ) GO TO 80
  CALL COEF(BETA)
  CALL COR(RR2,CHI,DBETA,DAA2)
C
C VALORES CORREGIDOS Y PRESENTACION (OPCIONAL)
  BETA=BETA+DBETA
  P2=P(NX-1,2)-BETA
  AA2=AA2+DAA2
C
  DO 60 J=1,NP
  J5=5*J
  IF( NSD .NE. 0 ) THEN
    IF( MOD(J,NSD) .EQ. 0 .OR. J .EQ. 1 ) THEN
      WRITE(6,*) ' J=',J
      WRITE(6,*) ' F,U,V',F(J,2),U(J,2),W(J,2)
      WRITE(6,*) ' T,G',T(J,2),G(J,2)
    END IF
  END IF
  F(J,2)=F(J,2)+D(J5-4,1)+DBETA*D(J5-4,2)
  U(J,2)=U(J,2)+D(J5-3,1)+DBETA*D(J5-3,2)
  W(J,2)=W(J,2)+D(J5-2,1)+DBETA*D(J5-2,2)
  T(J,2)=T(J,2)+D(J5-1,1)+DBETA*D(J5-1,2)
  G(J,2)=G(J,2)+D(J5,1)+DBETA*D(J5,2)
  IF( NSD .NE. 0 ) THEN
    IF( MOD(J,NSD) .EQ. 0 .OR. J .EQ. 1 ) THEN
      WRITE(6,*) ' F,U,V',F(J,2),U(J,2),W(J,2)
      WRITE(6,*) ' T,G',T(J,2),G(J,2)
      WRITE(6,*) ' D=',D(J5-4,1),D(J5-3,1),D(J5-2,1)
      WRITE(6,*) ' D=',D(J5-1,1),D(J5,1)
    END IF
  END IF

```

```

        END IF
        END IF
60      CONTINUE
        ERW1=(D(3,1)+DBETA*D(3,2))/W(1,2)
C
C      CONDICIONES PARA ACABAR DE ITERAR
        IF( DABS(DBETA/BETA) .GT. 1.D-6 ) GO TO 50
        IF( DABS(ERW1) .GT. 1.D-6 ) GO TO 50
        IF( DABS(DAA2/AA2) .GT. 1.D-6 ) GO TO 50
C
        P(NX,1)=P(NX,2)
        P(NX,2)=P2
        AA(NX,1)=AA(NX,2)
        AA(NX,2)=AA2
        IF( NX .EQ. NXI ) THEN
            DO 65 J=1, NP
                ETAS(J)=ETA(J)
                FS(J)=F(J,2)
                US(J)=U(J,2)
                WS(J)=W(J,2)
                TS(J)=T(J,2)
                GS(J)=G(J,2)
65      CONTINUE
            END IF
            GO TO 80
C -----
C      PRESENTACION DE LOS RESULTADOS
C -----
70      WRITE(6,1010)
        WRITE(9,1010)
80      WRITE(6,1020) IT,X(NX),P(NX,2),W(1,2),AA(NX,2)
        IF( MOD(NX,NSP) .EQ. 0 ) THEN
            WRITE(9,1020) IT,X(NX),P(NX,2),W(1,2),AA(NX,2)
        END IF
        IF( ITEST(NX) .GE. 1 ) THEN
            WRITE(6,*)
            WRITE(6,1030) (J,ETA(J),F(J,2),U(J,2),W(J,2),J=1, NP, NS)
            WRITE(6,1030) NP,ETA(NP),F(NP,2),U(NP,2),W(NP,2)
            WRITE(6,*)
            WRITE(6,1010)
            WRITE(9,*)
            WRITE(9,1030) (J,ETA(J),F(J,2),U(J,2),W(J,2),J=1, NP, NS)
            WRITE(7,1031) (J,ETA(J),T(J,2),G(J,2),J=1, NP, NS)
            WRITE(9,1030) NP,ETA(NP),F(NP,2),U(NP,2),W(NP,2)
            WRITE(7,1031) NP,ETA(NP),T(NP,2),G(NP,2)
            WRITE(9,*)
            WRITE(9,1010)
        END IF
1010   FORMAT(' IT',7X,'X',14X,'P',14X,'WP',13X,'DESPL. ')
1020   FORMAT( I4,4G15.7)
1030   FORMAT( I4,' ETA=',G13.4,' F=',G13.6,' U=',G13.6,' W=',G13.6)
1031   FORMAT( I4,' ETA=',G13.4,' T=',G13.6,' G=',G13.6)
C -----
C      CONDICIONES INICIALES PARA EL PASO SIGUIENTE
C -----
90      NX=NX+1
C
        IF( NX .EQ. 2 ) THEN
            X2=X(2)
            HK=X2-X1

```

```
AA2=AA(2,2)
BETA=P1-P2
GO TO 40
END IF
IF( NX .GT. NXT ) GO TO 110
```

```
C
C DESPLAZAMIENTO DE LOS PERFILES
```

```
DO 100 J=1,NP
F(J,4)=F(J,3)
U(J,4)=U(J,3)
W(J,4)=W(J,3)
T(J,4)=T(J,3)
G(J,4)=G(J,3)
F(J,3)=F(J,1)
U(J,3)=U(J,1)
W(J,3)=W(J,1)
T(J,3)=T(J,1)
G(J,3)=G(J,1)
F(J,1)=F(J,2)
U(J,1)=U(J,2)
W(J,1)=W(J,2)
T(J,1)=T(J,2)
G(J,1)=G(J,2)
```

```
100 CONTINUE
```

```
P4=P3
P3=P1
P1=P2
AA4=AA3
AA3=AA1
AA1=AA2
X4=X3
X3=X1
X1=X2
```

```
C
```

```
X2=X(NX)
HK=X(NX)-X(NX-1)
IF( NX.EQ.(NO+1) .AND. W(1,2).GT.0.DO ) THEN
CALL ROTT
IT=0
GO TO 80
ELSE
CALL NWSTEP
END IF
BETA=P1-P2
GO TO 40
```

```
C
```

```
110 AA(NXT+1,1)=AA(NXT+1,2)
AUX=(X(NXT+1)-X(NXT-1))/(X(NXT)-X(NXT-1))
AA(NXT+1,2)=AA(NXT,2)+(AA(NXT,2)-AA(NXT-1,2))*AUX
```

```
C
```

```
C -----
C COMPARACION CON EL BARRIDO ANTERIOR
C -----
```

```
C
```

```
OPEN(UNIT=8)
WRITE(8,*) IBAR, ', ', NXT-NXI
IPRU=0
DO 120 J=NXI+1,NXT+1
WRITE(8,1100) X(J),AA(J,2),P(J,2)
IF( DABS(AA(J,2)-AA(J,1)) .GE. 1.D-4 ) IPRU=1
```

```
120 CONTINUE
```

```

CLOSE(UNIT=8)
1100 FORMAT( G13.6, ',', G13.6, ',', G13.6 )
IF( IPRU .EQ. 0 ) STOP
IBAR=IBAR+1
WRITE(6,*)
WRITE(6,*) '*****'
WRITE(6,*) '          BARRIDO NO.', IBAR
WRITE(6,*) '*****'
WRITE(6,*)
NX=NXI
X2=X(NX)
P2=P(NX,2)
AA2=AA(NX,2)
DO 130 J=1, NP
  ETA(J)=ETAS(J)
  F(J,2)=FS(J)
  U(J,2)=US(J)
  W(J,2)=WS(J)
  T(J,2)=TS(J)
  G(J,2)=GS(J)
130 CONTINUE
IT=0
GO TO 70
END

```

BLOCK DATA

```

IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
COMMON /BLO1/ X1,X2,X3,X4,P1,P2,P3,P4,AA1,AA2,AA3,AA4
COMMON /BLO2/ ETA(301),F(301,4),U(301,4),W(301,4),
1 T(301,4),G(301,4)
COMMON /BLO3/ X(1001),AA(1001,2),P(1001,2)

```

```

C
DATA X1,X2,X3,X4,P1,P2,P3,P4,AA1,AA2,AA3,AA4 /
1 0.0D0,0.0D0,0.0D0,0.0D0,0.0D0,0.0D0,0.0D0,0.0D0,
2 0.0D0,0.0D0,0.0D0,0.0D0 /
DATA F,U,W,T,G / 1204*0.D0,1204*0.D0,1204*0.D0
1 ,1204*0.0D0,1204*0.0D0 /
DATA AA,P / 2002*0.0D0,2002*0.0D0 /
END

```

SUBROUTINE HILVE(RR2,CHI)

```

IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
COMMON /BLO0/ TW,PR,D3,AAA,NP,NX,NXI,NO,NXT
COMMON /BLO1/ X1,X2,X3,X4,P1,P2,P3,P4,AA1,AA2,AA3,AA4
COMMON /BLO3/ X(1001),AA(1001,2),P(1001,2)
DIMENSION CH(1000)

```

```

C
PI=4.D0*DATAN(1.D0)
I=NX-NXI
Z3=X(NX)**3

```

```

C
DO 10 J=1,NXT-NXI+1
  ZP3=(.5D0*(X(NXI+J+1)+X(NXI+J)))**3
  ZM3=(.5D0*(X(NXI+J)+X(NXI+J-1)))**3
  CH(J)=(ZM3-ZP3)/(PI*(Z3-ZM3)*(Z3-ZP3))

```

```

10 CONTINUE
CHI=CH(I)

```

```

C
COLAP=0.D0
C
IF( NX .EQ. NO ) GO TO 15

```

```

C      COLAP=DATAN( (2.D0*X(NXT+1)+X(NX)) / (DSQRT(3.D0)*X(NX)) )
C      COLAP=DSQRT(3.D0) * (COLAP-PI*DSIGN(1.D0,X(NX)) / 2.D0)
C      AUX=X(NXT+1)-X(NX)
C      AUX=AUX/DSQRT(DABS(X(NXT+1)**2+X(NXT+1)*X(NX)+X(NX)**2))
C      COLAP=(COLAP-DLOG(DABS(AUX))) / (3.D0**(2.D0/3.D0)*PI*B0*X(NX)**2)
C15   CONTINUE
C
      Z03=(.5D0*(X(NXI)+X(NXI+1)))**3
      ZN3=(.5D0*(X(NXT+1)+X(NXT+2)))**3
      RR2=-(-AA(NXI,1)/(Z3-Z03)+AA(NXT+1,2)/(Z3-ZN3))/PI-COLAP
      CH(I)=0.D0
      DO 20 J=1,NXT-NXI+1
        RR2=RR2-CH(J)*AA(NXI+J,2)
20   CONTINUE
      RETURN
      END

      SUBROUTINE COR(RR2,CHI,DBETA,DAA2)
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      COMMON /BLO0/ TW,PR,D3,AAA,NP,NX,NXI,NO,NXT
      COMMON /BLO1/ X1,X2,X3,X4,P1,P2,P3,P4,AA1,AA2,AA3,AA4
      COMMON /BLO2/ ETA(301),F(301,4),U(301,4),W(301,4),
1      T(301,4),G(301,4)
      COMMON /BLO3/ X(1001),AA(1001,2),P(1001,2)
      COMMON /BLO4/ ABD(28,1505),D(1505,2)

      XITE =0.D0
      DITE1=0.D0
      DITE2=0.D0
      DO 10 I=2,NP
        AUX=.5D0*(ETA(I)-ETA(I-1))
        XITE=XITE+AUX*(T(I,2)+T(I-1,2)-2.D0)
        DITE1=DITE1+AUX*(D(5*I-1,1)+D(5*I-6,1))
        DITE2=DITE2+AUX*(D(5*I-1,2)+D(5*I-6,2))
10   CONTINUE

      A11=D(5*NP-3,2)-DITE2
      A12=-1.D0
      R1=ETA(NP)+AA2+D3/ETA(NP)**3+XITE+DITE1-U(NP,2)-D(5*NP-3,1)

      IF( NX .LE. NXI ) THEN
        DBETA=R1/A11
        DAA2=0.D0
        RETURN
      END IF

      IF( NX .EQ. NXI+1 ) THEN
        R1=R1-AA2
        AA2=-AAA/X2**3
        R1=R1+AA2
        DBETA=R1/A11
        P2=DBETA-RR2+CHI*AA2
        P(NX-1,2)=P2+BETA+DBETA
        DAA2=0.D0
        RETURN
      END IF

      A21=1.D0
      A22=CHI
      R2=RR2-CHI*AA2+P2

```

C

```

DET=A11*A22-A12*A21
DBETA=(R1*A22-A12*R2)/DET
DAA2=(A11*R2-R1*A21)/DET

```

C

```

RETURN
END

```

SUBROUTINE NWSTEP

IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)

COMMON /BLOO/ TW,PR,D3,AAA,NP,NX,NXI,NO,NXT

COMMON /BLO1/ X1,X2,X3,X4,P1,P2,P3,P4,AA1,AA2,AA3,AA4

COMMON /BLO2/ ETA(301),F(301,4),U(301,4),W(301,4),

1 T(301,4),G(301,4)

COMMON /BLO3/ X(1001),AA(1001,2),P(1001,2)

IF((NX-NXI).LT.4 .OR. ((NX-NO).LT.5 .AND. NX.GT.NO)) THEN

DO 100 J=1,NP

F(J,2)=F(J,1)

U(J,2)=U(J,1)

W(J,2)=W(J,1)

T(J,2)=T(J,1)

G(J,2)=G(J,1)

100 CONTINUE

P2=P1

AA2=AA1

IF((NX-NXI) .LT. 3) AA2=AA(NX,2)

ELSE

A1=(X2-X3)*(X2-X4)/((X1-X3)*(X1-X4))

A3=(X2-X1)*(X2-X4)/((X3-X1)*(X3-X4))

A4=(X2-X1)*(X2-X3)/((X4-X1)*(X4-X3))

DO 200 J=1,NP

F(J,2)=A1*F(J,1)+A3*F(J,3)+A4*F(J,4)

U(J,2)=A1*U(J,1)+A3*U(J,3)+A4*U(J,4)

W(J,2)=A1*W(J,1)+A3*W(J,3)+A4*W(J,4)

T(J,2)=A1*T(J,1)+A3*T(J,3)+A4*T(J,4)

G(J,2)=A1*G(J,1)+A3*G(J,3)+A4*G(J,4)

200 CONTINUE

P2=A1*P1+A3*P3+A4*P4

AA2=A1*AA1+A3*AA3+A4*AA4

END IF

RETURN

END

SUBROUTINE IVPL

PROGRAM IVPL

IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)

COMMON /BLOO/ TW,PR,D3,AAA,NP,NX,NXI,NO,NXT

COMMON /BLO1/ X1,X2,X3,X4,P1,P2,P3,P4,AA1,AA2,AA3,AA4

COMMON /BLO2/ ETA(301),F(301,4),U(301,4),W(301,4),

1 T(301,4),G(301,4)

DIMENSION Y(3)

C

CMAX=1.0D-7

IFAR=0

XH=-.1D0

XMIN=5.D0

X=-ETA(NP)/X1

IF(X .LT. XMIN) THEN

IFAR=1

XF=X

```

      N=INT( (XMIN-XF) / (-XH) ) + 1
      X=XF+ (-XH) *DBLE(N)
END IF
      B1=1.D0
      XA=1.D0/(X*X)
      Y(1)=B1*XA
      Y(2)=-2.D0*Y(1)/X
      Y(3)=-3.D0*Y(2)/X
      J=1
100    XJ=DBLE(J)
      B2=- (9.D0*XJ*XJ-1.D0) / (XJ+1.D0) *B1
      XA=XA/(X*X*X)
      AD=B2*XA
      Y(1)=Y(1)+AD
      Y(2)=Y(2)- (3.D0*XJ+2.D0) *AD/X
      Y(3)=Y(3)+3.D0*(XJ+1.D0) * (3.D0*XJ+2.D0) *AD/X/X
      IF( DABS(AD) .LT. CMAX ) GO TO 200
      B1=B2
      J=J+1
      GO TO 100
200    IF( IFAR .EQ. 1 ) THEN
      DO 250 J=1,N
      CALL RUNGE(XH,X,Y)
250    CONTINUE
END IF
      F(NP,1)=Y(1)
      U(NP,1)=Y(2)
      W(NP,1)=Y(3)
      DO 300 J=1,NP-1
      XH=- (ETA(NP-J)-ETA(NP-J+1)) /X1
      CALL RUNGE(XH,X,Y)
      F(NP-J,1)=Y(1)
      U(NP-J,1)=Y(2)
      W(NP-J,1)=Y(3)
300    CONTINUE
      B1=-1.5D0/F(1,1)
      B2=-B1*U(1,1)
      AU1=1.3541179394D0/2.6789385347D0
      AUX=4.D0*(TW-1.D0) *AU1/ (3.D0** (11.D0/6.D0) * (PR** (1.D0/3.D0)))
      D3=-2.D0*AUX*B1
      AAA=AUX*B2
      DO 400 J=1,NP
      F(J,1)=(B1*F(J,1)+B2*ETA(J)+1.5D0) *AUX/X1/X1+ETA(J) *ETA(J) /2.D0
      U(J,1)=(B1*U(J,1)+B2) *AUX/ ((-X1)*X1**2)+ETA(J)
      W(J,1)=B1*W(J,1) *AUX/ (X1*X1*X1*X1)+1.D0
      T(J,1)=1.D0
      G(J,1)=0.D0
      F(J,2)=F(J,1)
      U(J,2)=U(J,1)
      W(J,2)=W(J,1)
      T(J,2)=T(J,1)
      G(J,2)=G(J,1)
400    CONTINUE
      P1=1.5D0*AUX/X1/X1
      P2=1.5D0*AUX/X2/X2
      X2=X1
      RETURN
      END

SUBROUTINE RUNGE(XH,X,Y)

```

```

IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
DIMENSION Y(3),D(3),P(3),E(3),G(3),F(3)
X1=X
N=3
DO 10 I1=1,N
P(I1)=Y(I1)
Y(I1)=P(I1)+XH*D(I1)/2.DO
E(I1)=D(I1)
10 CONTINUE
X=X1+XH/2.DO
CALL SEGUN(X,Y,D)
DO 20 I1=1,N
Y(I1)=P(I1)+XH*D(I1)/2.DO
F(I1)=D(I1)
20 CONTINUE
CALL SEGUN(X,Y,D)
DO 30 I1=1,N
Y(I1)=P(I1)+XH*D(I1)
G(I1)=D(I1)
30 CONTINUE
X=X1+XH
CALL SEGUN(X,Y,D)
DO 40 I1=1,N
Y(I1)=P(I1)+XH*(E(I1)+2.DO*(F(I1)+G(I1))+D(I1))/6.DO
40 CONTINUE
CALL SEGUN(X,Y,D)
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE SEGUN(X,Y,D)
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
DIMENSION Y(3),D(3)
D(1)=Y(2)
D(2)=Y(3)
D(3)=(X*X*Y(3)+2.DO*X*Y(2)-2.DO*Y(1))/3.DO+1.DO
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE COEF(BETA)
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
COMMON /BLOO/ TW,PR,D3,AAA,NP,NX,NXI,NO,NXT
COMMON /BLO1/ X1,X2,X3,X4,P1,P2,P3,P4,AA1,AA2,AA3,AA4
COMMON /BLO2/ ETA(301),F(301,4),U(301,4),W(301,4),
1 T(301,4),G(301,4)
COMMON /BLO4/ ABD(28,1505),D(1505,2)
HK=X2-X1
XL=0.5DO*(X2+X1)
X2L=XL**2

```

```

C
DO 10 K1=10,28
DO 10 K2=1,5*NP
ABD(K1,K2)=0.DO
10 CONTINUE

```

```

C
DO 100 J=2,NP
THETA=1.DO
J2=J
J1=J-1
J5=5*J
HJ=ETA(J2)-ETA(J1)

```

```

C   MEDIAS TRANSVERSALES
C   MEDIAS TRANSVERSALES SECCION ACTUAL
      FT2=0.5D0*(F(J2,2)+F(J1,2))
      UT2=0.5D0*(U(J2,2)+U(J1,2))
      WT2=0.5D0*(W(J2,2)+W(J1,2))
      TT2=0.5D0*(T(J2,2)+T(J1,2))
      GT2=0.5D0*(G(J2,2)+G(J1,2))
C   MEDIAS TRANSVERSALES SECCION ANTERIOR
      FT1=0.5D0*(F(J2,1)+F(J1,1))
      UT1=0.5D0*(U(J2,1)+U(J1,1))
      WT1=0.5D0*(W(J2,1)+W(J1,1))
      TT1=0.5D0*(T(J2,1)+T(J1,1))
      GT1=0.5D0*(G(J2,1)+G(J1,1))
C   MEDIAS LONGITUDINALES
      FL2=0.5D0*(F(J2,2)+F(J2,1))
      FL1=0.5D0*(F(J1,2)+F(J1,1))
      UL2=0.5D0*(U(J2,2)+U(J2,1))
      UL1=0.5D0*(U(J1,2)+U(J1,1))
      WL2=0.5D0*(W(J2,2)+W(J2,1))
      WL1=0.5D0*(W(J1,2)+W(J1,1))
      TL2=0.5D0*(T(J2,2)+T(J2,1))
      TL1=0.5D0*(T(J1,2)+T(J1,1))
      GL2=0.5D0*(G(J2,2)+G(J2,1))
      GL1=0.5D0*(G(J1,2)+G(J1,1))
C   MEDIAS CENTRADAS
      FTL=0.5D0*(FT2+FT1)
      UTL=0.5D0*(UT2+UT1)
      IF( UTL .LT. 0.D0 ) THETA=0.D0
      WTL=0.5D0*(WT2+WT1)
      TTL=0.5D0*(TT2+TT1)
      GTL=0.5D0*(GT2+GT1)
C   DERIVADAS LONGITUDINALES CENTRADAS
      DFLT=FT2-FT1
      DULT=UT2-UT1
      DTLT=TT2-TT1
      DGLT=GT2-GT1
C   DERIVADAS TRANSVERSALES CENTRADAS
      DFTL=FL2-FL1
      DUTL=UL2-UL1
      DWTL=WL2-WL1
      DTTL=TL2-TL1
      DGTL=GL2-GL1
C   COEFICIENTES TERCERA ECUACION
      ABD(19,J5-4)= 2.D0
      ABD(18,J5-3)=-HJ
      ABD(24,J5-9)=-2.D0
      ABD(23,J5-8)=-HJ
C   COEFICIENTES CUARTA ECUACION
      AUX=HK*3.D0*X2L
      ABD(20,J5-4)= HJ*WTL
      ABD(19,J5-3)=-HJ*UT2*THETA
      ABD(18,J5-2)= 0.5D0*HJ*DFLT+AUX
      ABD(17,J5-1)= 0.5D0*HJ*BETA
      ABD(25,J5-9)= ABD(20,J5-4)
      ABD(24,J5-8)= ABD(19,J5-3)
      ABD(23,J5-7)= ABD(18,J5-2)-2.D0*AUX
      ABD(22,J5-6)= ABD(17,J5-1)
C   COEFICIENTES PARA LA QUINTA ECUACION
      ABD(21,J5-4)= GTL*HJ
      ABD(20,J5-3)=-0.5D0*HJ*DTLT*THETA

```

```

ABD(18,J5-1)=-UTL*HJ*THETA
ABD(17,J5 )= 0.5D0*DFLT*HJ+AUX/PR
ABD(26,J5-9)= ABD(21,J5-4)
ABD(25,J5-8)= ABD(20,J5-3)
ABD(24,J5-7)= ABD(19,J5-2)
ABD(23,J5-6)= ABD(18,J5-1)
ABD(22,J5-5)= ABD(17,J5 )-2.D0*AUX/PR
C   COEFICIENTES PRIMERA ECUACION
    ABD(16,J5-3)= 2.D0
    ABD(15,J5-2)=-HJ
    ABD(21,J5-8)=-2.D0
    ABD(20,J5-7)=-HJ
C   COEFICIENTES PARA LA SEGUNDA ECUACION
    ABD(15,J5-1)= 2.D0
    ABD(14,J5 )=-HJ
    ABD(20,J5-6)=-2.D0
    ABD(19,J5-5)=-HJ
C   ECUACIONES
    D(J5-6,1)=2.D0*(WT2*HJ+U(J1,2)-U(J2,2))
    D(J5-5,1)=2.D0*(GT2*HJ+T(J1,2)-T(J2,2))
    D(J5-4,1)=2.D0*(UT2*HJ+F(J1,2)-F(J2,2))
    D(J5-3,1)=2.D0*((THETA*UTL*DULT-TTL*BETA-WTL*DFLT)*HJ-AUX*DWTL)
    D(J5-2,1)=2.D0*((THETA*UTL*DTLT-GTL*DFLT)*HJ-AUX*DGTL/PR)
C   ECUACIONES DERIVADAS RESPECTO A BETA
    D(J5-6,2)= 0.D0
    D(J5-5,2)= 0.D0
    D(J5-4,2)=0.D0
    D(J5-3,2)=-2.D0*TTL*HJ
    D(J5-2,2)=0.D0
100  CONTINUE
C   CONDICIONES DE CONTORNO
    ABD(19, 1)=1.D0
    ABD(19, 2)=1.D0
    ABD(18, 4)=1.D0
C
    ABD(20,5*NP-2)=1.D0
    ABD(20,5*NP-1)=1.D0
C
    D(1,1)=-F(1,2)
    D(2,1)=-U(1,2)
    IF( NX .LE. NO ) THEN
      D(3,1)=1.D0-T(1,2)
    ELSE
      D(3,1)=TW-T(1,2)
    END IF
    D(5*NP-1,1)=1.D0-W(NP,2)
    D(5*NP,1)=1.D0-T(NP,2)
C   CONDICIONES PARA BETA
    D(1,2)=0.0D0
    D(2,2)=0.0D0
    D(3,2)=0.D0
    D(5*NP-1,2)=0.D0
    D(5*NP,2)=0.D0
    CALL SOLVER(NP)
    RETURN
    END

```

```

SUBROUTINE SOLVER(NE)
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
COMMON /BLO4/ ABD(28,1505),D(1505,2)

```

```

COMMON /BLIN/ IPVT(1505)
C
N = 5*NE
ML = 9
MU = 9
LDA = 28
M = ML + MU + 1
INFO = 0
C
JO = MU + 2
J1 = MINO(N,M) - 1
IF( J1 .LT. JO ) GO TO 30
DO 20 JZ=JO,J1
    IO = M + 1 - JZ
    DO 10 I = IO,ML
        ABD(I,JZ) = 0.0D0
10    CONTINUE
20    CONTINUE
30    CONTINUE
    JZ = J1
    JU = 0
C
NM1 = N - 1
IF( NM1 .LT. 1 ) GO TO 130
DO 120 K = 1, NM1
    KP1 = K + 1
C
    JZ = JZ + 1
    IF( JZ .GT. N ) GO TO 50
    IF( ML .LT. 1 ) GO TO 50
    DO 40 I = 1,ML
        ABD(I,JZ) = 0.0D0
40    CONTINUE
50    CONTINUE
C
    LM = MINO(ML,N-K)
    L = ISAMAX(LM+1,ABD(M,K),1) + M - 1
    IPVT(K) = L + K - M
C
    IF( ABD(L,K) .EQ. 0.0D0 ) GO TO 100
    IF( L .EQ. M ) GO TO 60
    T = ABD(L,K)
    ABD(L,K) = ABD(M,K)
    ABD(M,K) = T
60    CONTINUE
C
    T = -1.0D0/ABD(M,K)
    CALL SSCAL(LM,T,ABD(M+1,K),1)
C
    JU = MINO(MAXO(JU,MU+IPVT(K)),N)
    MM = M
    IF( JU .LT. KP1 ) GO TO 90
    DO 80 J = KP1,JU
        L = L - 1
        MM = MM - 1
        T = ABD(L,J)
        IF( L .EQ. MM ) GO TO 70
        ABD(L,J) = ABD(MM,J)
        ABD(MM,J) = T
70    CONTINUE

```

```

      CALL SAXPY(LM,T,ABD(M+1,K),1,ABD(MM+1,J),1)
80  CONTINUE
90  CONTINUE
    GO TO 110

100  CONTINUE
      INFO = K
110  CONTINUE
120  CONTINUE
130  CONTINUE
      IPVT(N) = N
      IF( ABD(M,N) .EQ. 0.0D0 ) INFO = N
      CALL SGBSL(NE)
      RETURN
      END
      SUBROUTINE SGBSL(NE)
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      COMMON /BLO4/ ABD(28,1505),D(1505,2)
      COMMON /BLIN/ IPVT(1505)

C
      LDA = 28
      N = 5*NE
      ML = 9
      MU = 9
      M = MU + ML + 1
      NM1 = N - 1
      DO 110 I2=1,2
C RESOLVE AX=D
      IF( ML .EQ. 0 ) GO TO 30
      IF( NM1 .LT. 1 ) GO TO 30
      DO 20 K = 1,NM1
          LM = MIN0(ML,N-K)
          L = IPVT(K)
          T = D(L,I2)
          IF( L .EQ. K ) GO TO 10
          D(L,I2) = D(K,I2)
          D(K,I2) = T
10  CONTINUE
      CALL SAXPY(LM,T,ABD(M+1,K),1,D(K+1,I2),1)
20  CONTINUE
30  CONTINUE
      DO 40 KB = 1,N
          K = N + 1 - KB
          D(K,I2) = D(K,I2)/ABD(M,K)
          LM = MIN0(K,M) - 1
          LA = M - LM
          LB = K - LM
          T = -D(K,I2)
          CALL SAXPY(LM,T,ABD(LA,K),1,D(LB,I2),1)
40  CONTINUE
110 CONTINUE
      RETURN
      END
      INTEGER FUNCTION ISAMAX(N,SX,INCX)
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      REAL*8 SX(1)
      ISAMAX = 0
      IF( N .LT. 1 ) RETURN
      ISAMAX = 1
      IF( N .EQ. 1 ) RETURN

```

```

IF( INCX .EQ. 1 ) GO TO 20
IX = 1
SMAX = DABS(SX(1))
IX = IX + INCX
DO 10 I=2,N
  IF( DABS(SX(IX)) .LE. SMAX) GO TO 5
  ISAMAX = I
  SMAX = DABS(SX(IX))
5 IX = IX + INCX
10 CONTINUE
RETURN

C
20 SMAX = DABS(SX(1))
DO 30 I = 2,N
  IF( DABS(SX(I)) .LE. SMAX ) GO TO 30
  ISAMAX = I
  SMAX = DABS(SX(I))
30 CONTINUE
RETURN
END
SUBROUTINE SAXPY(N,SA,SX,INCX,SY,INCY)
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
REAL*8 SX(1),SY(1),SA
IF( N .LE. 0 ) RETURN
IF( SA .EQ. 0.DO ) RETURN
IF( INCX.EQ.1 .AND. INCY.EQ.1 ) GO TO 20
IX = 1
IY = 1
IF( INCX .LT. 0 ) IX = (-N+1)*INCX + 1
IF( INCY .LT. 0 ) IY = (-N+1)*INCY + 1
DO 10 I =1,N
  SY(IY) = SY(IY) + SA*SX(IX)
  IX = IX + INCX
  IY = IY + INCY
10 CONTINUE
RETURN

C
20 M = MOD(N,4)
IF( M .EQ. 0 ) GO TO 40
DO 30 I = 1,M
  SY(I) = SY(I) + SA*SX(I)
30 CONTINUE
IF( N .LT. 4 ) RETURN
40 MP1 = M + 1
DO 50 I = MP1,N,4
  SY(I) = SY(I) + SA*SX(I)
  SY(I + 1) = SY(I + 1) + SA*SX(I + 1)
  SY(I + 2) = SY(I + 2) + SA*SX(I + 2)
  SY(I + 3) = SY(I + 3) + SA*SX(I + 3)
50 CONTINUE
RETURN
END
FUNCTION SDOT(N,SX,INCX,SY,INCY)
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
REAL*8 SX(1),SY(1),STEMP
STEMP = 0.0D0
SDOT = 0.0D0
IF( N .LE. 0 ) RETURN
IF( INCX.EQ.1 .AND. INCY.EQ.1 ) GO TO 20
IX = 1

```

```

IY = 1
IF( INCX .LT. 0 ) IX = (-N+1)*INCX + 1
IF( INCY .LT. 0 ) IY = (-N+1)*INCY + 1
DO 10 I = 1,N
    STEMP = STEMP + SX(IX)*SY(IY)
    IX = IX + INCX
    IY = IY + INCY
10 CONTINUE
SDOT = STEMP
RETURN

```

C

```

20 M = MOD(N,5)
IF( M .EQ. 0 ) GO TO 40
DO 30 I = 1,M
    STEMP = STEMP + SX(I)*SY(I)
30 CONTINUE
IF( N .LT. 5 ) GO TO 60
40 MP1 = M + 1
DO 50 I = MP1,N,5
    STEMP=STEMP+SX(I)*SY(I)+SX(I+1)*SY(I+1)+SX(I+2)*SY(I+2)+
* SX(I+3)*SY(I+3)+SX(I+4)*SY(I+4)
50 CONTINUE
60 SDOT = STEMP
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE SSCAL(N,SA,SX,INCX)
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
REAL*8 SA,SX(1)
IF( N .LE. 0 ) RETURN
IF( INCX .EQ. 1 ) GO TO 20
NINCX = N*INCX
DO 10 I = 1,NINCX,INCX
    SX(I) = SA*SX(I)
10 CONTINUE
RETURN

```

C

```

20 M = MOD(N,5)
IF( M .EQ. 0 ) GO TO 40
DO 30 I = 1,M
    SX(I) = SA*SX(I)
30 CONTINUE
IF( N .LT. 5 ) RETURN
40 MP1 = M + 1
DO 50 I = MP1,N,5
    SX(I) = SA*SX(I)
    SX(I + 1) = SA*SX(I + 1)
    SX(I + 2) = SA*SX(I + 2)
    SX(I + 3) = SA*SX(I + 3)
    SX(I + 4) = SA*SX(I + 4)
50 CONTINUE
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE ROTT
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
COMMON /BLO0/ TW,PR,D3,AAA,NP,NX,NXI,NO,NXT
COMMON /BLO1/ X1,X2,X3,X4,P1,P2,P3,P4,AA1,AA2,AA3,AA4
COMMON /BLO2/ ETA(301),F(301,4),U(301,4),W(301,4),
1 T(301,4),G(301,4)
COMMON /BLO3/ X(1001),AA(1001,2),P(1001,2)
COMMON /BLO4/ ABD(28,1505),D(1505,2)

```

```

COMMON /BLOR/ ETAR(301),FR(301),UR(301),WR(301),TR(301),GR(301)
HJ=.05D0
NPR=101
TAU=W(1,2)
C RED Y PERFILES INICIALES
CTE=-(TW-1.D0)*(3.D0*PR*TAU)**(1.D0/3.D0)/2.6789385347D0
ETAR(1)=0.D0
WR(1)=W(1,2)
UR(1)=0.D0
FR(1)=0.D0
TR(1)=TW
GR(1)=CTE
DO 10 J=2,NPR
ETAR(J)=HJ*DBLE(J-1)
WR(J)=W(1,2)
UR(J)=W(1,2)*ETAR(J)
FR(J)=.5D0*W(1,2)*ETAR(J)**2
GR(J)=CTE*DEXP(-PR*TAU*ETAR(J)**3/9.D0)
TR(J)=TR(J-1)+.5D0*(ETAR(J)-ETAR(J-1))*(GR(J)+GR(J-1))
10 CONTINUE
BP=0.D0
C RESOLUCION DE LAS ECUACIONES
ITR=0
20 ITR=ITR+1
CALL COEFIC(TAU,BP,NPR)
DINT1=0.D0
DINT2=0.D0
XINT=0.D0
DO 15 J=2,NPR
AUX=.5*(ETAR(J)-ETAR(J-1))
DINT1=DINT1+AUX*(D(5*J-1,1)+D(5*J-6,1))
DINT2=DINT2+AUX*(D(5*J-1,2)+D(5*J-6,2))
XINT=XINT+AUX*(TR(J)+TR(J-1)-2.D0)
15 CONTINUE
DBP=TAU*ETAR(NPR)+XINT-UR(NPR)+DINT1-D(5*NPR-3,1)
DBP=DBP/(D(5*NPR-3,2)-DINT2)
BP=BP+DBP
DO 30 J=1,NPR
J5=5*J
FR(J)=FR(J)+D(J5-4,1)+DBP*D(J5-4,2)
UR(J)=UR(J)+D(J5-3,1)+DBP*D(J5-3,2)
WR(J)=WR(J)+D(J5-2,1)+DBP*D(J5-2,2)
TR(J)=TR(J)+D(J5-1,1)+DBP*D(J5-1,2)
GR(J)=GR(J)+D(J5,1)+DBP*D(J5,2)
30 CONTINUE
IF( DABS(DBP/BP) .GT. 1.D-7 ) GO TO 20
DWP=D(3,1)+DBP*D(3,2)
IF( DABS(DWP/WR(1)) .GT. 1.D-7 ) GO TO 20
W0=W(1,2)
DO 40 I=1,NPR
ETAR(I)=ETAR(I)*X2
FR(I)=FR(I)*X2*X2
UR(I)=UR(I)*X2
WR(I)=WR(I)
TR(I)=TR(I)
GR(I)=GR(I)/X2
40 CONTINUE
JMAX=1
50 JMAX=JMAX+1
IF( ETA(JMAX) .LT. ETAR(NPR) ) GO TO 50

```

```

JMAX=JMAX-1
NPCHG=JMAX
W(1,2)=WR(1)
G(1,2)=GR(1)
J=1
DO 70 I=2,JMAX
60 J=J+1
IF( ETAR(J) .LT. ETA(I) ) GO TO 60
FACTOR=(ETA(I)-ETAR(J-1))/(ETAR(J)-ETAR(J-1))
W(I,2)=W(I,2)+WR(J-1)+(WR(J)-WR(J-1))*FACTOR-WO
G(I,2)=GR(J-1)+(GR(J)-GR(J-1))*FACTOR
J=J-1
70 CONTINUE
U(1,2)=0.DO
F(1,2)=0.DO
T(1,2)=TW
DO 90 I=2,NP
AUX=(ETA(I)-ETA(I-1))*(W(I,2)+W(I-1,2))/2.DO
U(I,2)=U(I-1,2)+AUX
AUX=(ETA(I)-ETA(I-1))*(U(I,2)+U(I-1,2))/2.DO
F(I,2)=F(I-1,2)+AUX
AUX=(ETA(I)-ETA(I-1))*(G(I,2)+G(I-1,2))/2.DO
T(I,2)=T(I-1,2)+AUX
90 CONTINUE
P2=P1+BP*X2*X2
P(NX,1)=P(NX,2)
P(NX,2)=P2
AA(NX,1)=AA(NX,2)
AUX=((X(NX)-X(NX-1))/(X(NX-1)-X(NX-2)))**3
AA(NX,2)=AA(NX-1,2)+AUX*(AA(NX-1,2)-AA(NX-2,2))
AA2=AA(NX,2)
RETURN
END
SUBROUTINE COEFIC(TAU,BP,NPR)
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
COMMON /BLOO/ TW,PR,D3,AAA,NP,NX,NXI,NO,NXT
COMMON /BLO4/ ABD(28,1505),D(1505,2)
COMMON /BLOR/ ETAR(301),FR(301),UR(301),WR(301),TR(301),GR(301)
DO 10 K1=10,28
DO 10 K2=1,5*NPR
ABD(K1,K2)=0.DO
10 CONTINUE
DO 100 J=2,NPR
J2=J
J1=J-1
J5=5*J
HJ=ETAR(J2)-ETAR(J1)
C MEDIAS TRANSVERSALES
FT=0.5D0*(FR(J2)+FR(J1))
UT=0.5D0*(UR(J2)+UR(J1))
WT=0.5D0*(WR(J2)+WR(J1))
TT=0.5D0*(TR(J2)+TR(J1))
GT=0.5D0*(GR(J2)+GR(J1))
C DERIVADAS
DF=FR(J2)-FR(J1)
DU=UR(J2)-UR(J1)
DW=WR(J2)-WR(J1)
DT=TR(J2)-TR(J1)
DG=GR(J2)-GR(J1)
C COEFICIENTES TERCERA ECUACION

```

$$ABD(19, J5-4) = 2.D0$$

$$ABD(18, J5-3) = -HJ$$

$$ABD(24, J5-9) = -2.D0$$

$$ABD(23, J5-8) = -HJ$$

C COEFICIENTES CUARTA ECUACION

$$ABD(20, J5-4) = HJ*WT$$

$$ABD(19, J5-3) = -HJ*UT$$

$$ABD(18, J5-2) = HJ*FT+3.D0$$

$$ABD(17, J5-1) = -HJ*BP$$

$$ABD(25, J5-9) = ABD(20, J5-4)$$

$$ABD(24, J5-8) = ABD(19, J5-3)$$

$$ABD(23, J5-7) = ABD(18, J5-2) - 6.D0$$

$$ABD(22, J5-6) = ABD(17, J5-1)$$

C COEFICIENTES PARA LA QUINTA ECUACION

$$ABD(21, J5-4) = GT*HJ$$

$$ABD(20, J5-3) = 0.D0$$

$$ABD(18, J5-1) = 0.D0$$

$$ABD(17, J5) = FT*HJ+3.D0/PR$$

$$ABD(26, J5-9) = ABD(21, J5-4)$$

$$ABD(25, J5-8) = ABD(20, J5-3)$$

$$ABD(24, J5-7) = ABD(19, J5-2)$$

$$ABD(23, J5-6) = ABD(18, J5-1)$$

$$ABD(22, J5-5) = ABD(17, J5) - 6.D0/PR$$

C COEFICIENTES PRIMERA ECUACION

$$ABD(16, J5-3) = 2.D0$$

$$ABD(15, J5-2) = -HJ$$

$$ABD(21, J5-8) = -2.D0$$

$$ABD(20, J5-7) = -HJ$$

C COEFICIENTES PARA LA SEGUNDA ECUACION

$$ABD(15, J5-1) = 2.D0$$

$$ABD(14, J5) = -HJ$$

$$ABD(20, J5-6) = -2.D0$$

$$ABD(19, J5-5) = -HJ$$

C ECUACIONES

$$D(J5-6, 1) = 2.D0*(HJ*WT-DU)$$

$$D(J5-5, 1) = 2.D0*(HJ*GT-DT)$$

$$D(J5-4, 1) = 2.D0*(HJ*UT-DF)$$

$$D(J5-3, 1) = HJ*(2.D0*BP*TT-2.D0*FT*WT+UT**2) - 3.D0*DW$$

$$D(J5-2, 1) = -2.D0*HJ*FT*GT-3.D0*DG/PR$$

C ECUACIONES DERIVADAS RESPECTO A BP

$$D(J5-6, 2) = 0.D0$$

$$D(J5-5, 2) = 0.D0$$

$$D(J5-4, 2) = 0.D0$$

$$D(J5-3, 2) = 2.D0*HJ*TT$$

$$D(J5-2, 2) = 0.D0$$

100 CONTINUE

C CONDICIONES DE CONTORNO

$$ABD(19, 1) = 1.D0$$

$$ABD(19, 2) = 1.D0$$

$$ABD(18, 4) = 1.D0$$

$$ABD(20, 5*NPR-2) = 1.D0$$

$$ABD(20, 5*NPR-1) = 1.D0$$

$$D(1, 1) = -FR(1)$$

$$D(2, 1) = -UR(1)$$

$$D(3, 1) = TW-TR(1)$$

$$D(5*NPR-1, 1) = TAU-WR(NPR)$$

$$D(5*NPR, 1) = 1.D0-TR(NPR)$$

C CONDICIONES PARA BP

$$D(1, 2) = 0.0D0$$

$$D(2, 2) = 0.0D0$$

```

D(3,2)=0.DO
D(5*NPR-1,2)=0.DO
D(5*NPR,2)=0.DO
CALL SOLVER(NPR)
RETURN
END
SUBROUTINE REDL(X1)
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
COMMON /BLO0/ TW,PR,D3,AAA,NP,NX,NXI,NO,NXT
COMMON /BLO3/ X(1001),AA(1001,2),P(1001,2)
WRITE(6,*) ' XINIC, XCAMBIO, XMAX, HO, RAZON DE LA PROGRESION '
READ (5,*) X1, XC, XM, HO, RP
IF( RP .LE. 0.DO ) THEN
C RED LONGITUDINAL UNIFORME
NXI=INT((-X1-XM)/HO)+1
NO=NXI+INT(XM/HO)
NXT=NO+INT(XM/HO)
X1=-HO*DBLE(NO-1)
WRITE(6,*) ' X1,NO,NXI,NXT '
WRITE(6,*) X1,NO,NXI,NXT
WRITE(9,*) ' X1,HO,NO,NXI,NXT '
WRITE(9,*) X1,HO,NO,NXI,NXT
DO 5 K=1,NXT+2
X(K)=X1+DBLE(K-1)*HO
5 CONTINUE
RETURN
END IF
C RED LONGITUDINAL EN PROGRESION GEOMETRICA
NXC=INT(XC/HO)
XC=HO*DBLE(NXC)
NXR=INT(LOG(1.0DO+(XM-XC)/HO*(RP-1.0DO))/LOG(RP))
XM=XC+HO*(RP**NXR-1.DO)/(RP-1.DO)
XM1=XC+HO*(RP**(NXR-1)-1.DO)/(RP-1.DO)
HF=XM-XM1
NXI=INT((-X1-XM)/HF)+1
NO=NXI+NXC+NXR
NXT=NO+NXC+NXR
WRITE(6,*) ' NO,NXI,NXT '
WRITE(6,*) NO,NXI,NXT
X(NO)=0.DO
DO 10 K=1,NXC
X(NO+K)=DBLE(K)*HO
10 CONTINUE
DO 20 K=1,NXR
X(NO+NXC+K)=XC+HO*(RP**K-1.DO)/(RP-1.DO)
20 CONTINUE
X(NXT+1)=X(NXT)+HF
X(NXT+2)=X(NXT+1)+HF
DO 30 K=1,NXC+NXR
X(NO-K)=-X(NO+K)
30 CONTINUE
DO 40 K=1,NXI-1
X(NO-NXC-NXR-K)=-XM-DBLE(K)*HF
40 CONTINUE
X1=X(1)
WRITE(9,*) ' X1,HO,NO,NXI,NXT '
WRITE(9,*) X1,HO,NO,NXI,NXT
RETURN
END
SUBROUTINE REDT(NP)

```

```

IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
COMMON /BLO2/ ETA(301),F(301,4),U(301,4),W(301,4)
ETAC=0.D0
ETAM=20.D0
H0=5.D-2
RP=1.02D0
WRITE(6,*) ' YCAMBIO, YMAX,HPARED, RAZON DE LA PROGRESION '
READ (5,*) ETAC,ETAM,H0,RP
IF( RP .EQ. 1.D0 ) THEN
NP=1+INT(ETAM/H0+0.5D0)
HC=ETAM/DBLE(NP-1)
DO 10 J=1,NP
ETA(J)=HC*DBLE(J-1)
10 CONTINUE
WRITE(6,*) ' NP=',NP
WRITE(9,*) ' RED TRANSVERSAL UNIFORME '
WRITE(9,*) ' NP=',NP,' HJ=',HC
RETURN
END IF
NPC=INT(ETAC/H0)
ETAC=H0*DBLE(NPC)
NPR=INT( LOG(1.0D0+(ETAM-ETAC)/H0*(RP-1.0D0)) / LOG(RP) )
NP=NPR+NPC
ETA(1)=0.0D0
DO 20 J=2,NPC
ETA(J)=H0*DBLE(J-1)
20 CONTINUE
DO 30 J=1,NPR
ETA(NPC+J)=H0*(RP**(J-1)-1.0D0)/(RP-1.0D0)+ETAC
30 CONTINUE
WRITE(6,*) ' NP=',NP
WRITE(9,*) ' H0,NPC,RP,NPR '
WRITE(9,*) ' H0,NPC,RP,NPR
RETURN
END

```