

68  
2ej

# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS



TRATAMIENTO NUMERICO PARA LA  
CONSOLIDACION DE SUELOS BLANDOS

T E S I S  
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE  
F I S I C O  
P R E S E N T A  
NORBERTO VERA GUZMAN

MEXICO, D. F.

1991

FALLA DE ORIGEN



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## CONTENIDO

Introducción	1
CAPITULO 1: Descripción del fenómeno físico	4
CAPITULO 2: Deducción de las ecuaciones básicas	7
Ley de Darcy	7
El potencial de Hubbert	7
Ley de Darcy en tres dimensiones	10
Descripción del movimiento	12
Algunos resultados de cálculo	14
Propiedades extensivas y su evolución	17
Ley general de balance	18
Balance de masa	20
Conservación de la masa	20
Fluidos en medios porosos	21
<i>Parámetros no lineales</i>	
Almacenamiento específico	25
Conductividad hidráulica	28
CAPITULO 3: Discretización de las ecuaciones básicas	29
Aplicación del método de celdas para la discretización de la ecuación diferencial que describe el flujo en el acuitardo	29
Consistencia, convergencia y estabilidad	35
Algoritmo de Thomas	36
Proceso iterativo	38
CAPITULO 4: Programa de cómputo	40
Proceso de simulación	46
Explicación del funcionamiento del programa de cómputo	47
CAPITULO 5: Resultados y Conclusiones	53
Referencias	55

## INTRODUCCION

El Análisis del flujo de agua subterránea y la consolidación de estratos de baja permeabilidad ,también llamados acuitardo, tienen un interes relevante en la actualidad, principalmente cuando se aplican a sistemas en donde la explotación de los mantos acuíferos es alta.

Para entender la mecánica del flujo de agua subterránea en acuíferos semiconfinados por acuitardos, es importante primero entender el comportamiento del acuitardo semiconfinante.

Generalmente consideramos un acuitardo como una acumulación de estratos de baja permeabilidad que pueden ser muy compresibles o poco compresibles, esto dependiendo de su naturaleza, pero en los que la permeabilidad puede cambiar según el comportamiento que exhiban estos estratos.

Si se logra tener un amplio conocimiento del funcionamiento del acuitardo contaremos con una sólida base para describir el flujo de agua subterránea en acuíferos semiconfinados. El conocimiento que tengamos del funcionamiento de este tipo de sistemas no solo es importante a nivel científico y cultural, sino que también tiene importancia a nivel social, dado que este tipo de conocimientos nos coloca en posición de planear la forma más racional del uso de nuestros recursos naturales como son los mantos acuíferos.

También es importante este tipo de estudios en la planeación de obras civiles, protección de infraestructura como el drenaje y redes de distribución, dado que el hundimiento del suelo por un sobrepeso o reacomodo de sus constituyentes es predecible basandose en este tipo de trabajos.

Una forma de estudiar este tipo de fenómenos es a través de obtener información geológica y geofísica de observaciones de campo,

## *Introducción*

procesarla y analizarla con el fin de generar modelos físico-matemáticos de tal manera que, al aplicar estos modelos a fenómenos físicos reales, reproduzcan el comportamiento de estos lo más fielmente posible.

La complejidad o sencillez de estos modelos depende fundamentalmente del número de aspectos que queremos incluir en estos modelos, dado que mientras más completo sea un modelo, más aspectos se tienen que considerar.

Se llega así al punto en donde ya no es fácil encontrar soluciones analíticas sencillas que describan completamente un modelo dado, y se tiene la necesidad entonces de emplear técnicas numéricas para obtener soluciones aproximadas en la resolución de problemas de aplicación, en donde se sustituyen las ecuaciones diferenciales por sistemas de ecuaciones lineales y se emplea algún método de resolución de matrices para obtener valores de la solución en algunos puntos del dominio.

Esta técnica nos conduce a los métodos computacionales en donde a través de algoritmos lógicos se resuelven sistemas de ecuaciones lineales y nuevamente se obtienen valores de la solución en puntos discretos del dominio.

En este trabajo emplearemos la técnica numérica y computacional de una manera extensiva, con el fin de encontrar una solución aproximada de la ecuación que describe el flujo en el acuitardo. El orden que se seguirá es el siguiente:

Se formulan las leyes generales que gobiernan los procesos locales y se utilizan los principios globales de conservación (como la conservación de la masa), para obtener las ecuaciones diferenciales parciales que se satisfacen en cada punto y se dan

### *Introducción*

condiciones iniciales y de frontera con el fin de asegurar la unicidad de la solución.

Se utiliza un método numérico, el Método de Celdas, para discretizar las ecuaciones diferenciales y se obtiene un sistema equivalente de ecuaciones lineales.

Se formula un programa de cómputo (utilizando para ello el Lenguaje de Programación FORTRAN 77), que resuelve el sistema de ecuaciones lineales resultante utilizando para ello el Algoritmo de Thomas.

Se realizan corridas de prueba utilizando datos de la ciudad de México como son:

Nivel Piezométrico  $h$ , Relación de Vacíos "e", Conductividad hidráulica  $K$ , Almacenamiento Específico  $S_s$ , Presión Efectiva  $\sigma_e$ , Presión de Poro  $\sigma_p$  y Presión Total  $\sigma_t$ .

# CAPITULO 1

## DESCRIPCION DEL FENOMENO FISICO

El estudio de la mecánica del flujo de agua subterránea tiene gran importancia práctica por cuanto permite conocer y predecir el comportamiento de algunos sistemas físicos.

Un sistema físico de gran interés práctico es el constituido por un acuífero superior (libre), un acuitardo y un acuífero inferior, en el cuál, el acuífero inferior está siendo bombeado, fig.(1).

El comportamiento del acuífero bombeado depende en gran medida de las características físicas de los estratos de baja permeabilidad que constituyen el acuitardo, por lo que se hace necesario caracterizar al acuitardo en términos hidrogeológicos con parámetros hidráulicos tales como: la conductividad hidráulica  $K(L/T)$  y el coeficiente de almacenamiento específico  $Ss(1/L)$ . Las características de estos parámetros determinan el comportamiento del acuitardo, lo que a su vez permite conocer el funcionamiento del sistema físico en conjunto.

El problema en esencia se plantea de la siguiente manera. Consideremos dos acuíferos independientes separados por un acuitardo en donde se está extrayendo agua del acuífero que se encuentra por debajo del acuitardo através de un pozo de bombeo, y consideremos la siguiente pregunta.

¿Cuál es el comportamiento hidráulico del acuitardo de acuerdo a la extracción de agua del acuífero inferior?

Contestar esta pregunta implica hacer ciertas suposiciones acerca del sistema que estamos considerando, entre las cuales se encuentran las siguientes.

Generalmente se considera que cuando la conductividad hidráulica en el acuífero es mucho mayor que la conductividad hidráulica en el acuitardo, el flujo es esencialmente vertical en el acuitardo y horizontal en el acuífero.

También vamos a considerar que una muestra del acuitardo que se tome en algún punto de éste tiene las mismas características que otra tomada en cualquier otro punto del acuitardo, además de que las

## Capítulo 1: Descripción del fenómeno físico

características de cada muestra no cambian por el hecho de que las tomemos en forma radial o a lo largo de la vertical o en cualquier otra dirección, por lo que vamos a suponer que el acuitardo es un medio poroso homogéneo e isotrópico. Cabe aclarar que cuando a un material homogéneo se le somete a esfuerzos que no son uniformes en el espacio, las propiedades hidráulicas del material dependen de la posición.

Como estamos considerando que el acuitardo es un medio poroso, también vamos a suponer que los poros de éste medio están completamente llenos de agua, y que si se toman dos muestras de éste en dos puntos cualesquiera, la cantidad de agua en cada una de éstas es la misma, por lo que consideraremos al acuitardo completamente saturado de agua en forma homogénea.

Muchas de las partículas que constituyen el acuitardo pueden reacomodarse durante el proceso de flujo a través del acuitardo, pero las partículas mismas no cambian su volumen durante este proceso, de manera que la parte sólida del acuitardo puede experimentar deformaciones como un todo pero sus constituyentes primarios permanecen sin cambio.

El reacomodo de partículas dentro del acuitardo puede ocurrir en cualquier dirección pero la dirección predominante para este movimiento será la dirección del flujo, por lo que consideraremos que el acuitardo solo se consolida en la dirección  $z$  que es la de flujo.

Las fuerzas que conservan la estructura del medio poroso son esencialmente eléctricas, sin embargo hemos de diferenciar las fuerzas que se dan únicamente entre partículas del medio poroso y las fuerzas que tienen lugar entre moléculas de agua y partículas. Como no podemos hablar en éste medio únicamente de fuerzas, hablaremos de presiones entre grupos de partículas y presiones entre volúmenes de agua y grupos de partículas, o con mayor generalidad,

## Capítulo 1: Descripción del fenómeno físico

hablaremos de esfuerzos. En particular consideraremos que el esfuerzo total es la suma de la tensión efectiva y la presión de poro y que éste permanece constante durante la extracción. La tensión efectiva tiene su origen en las fuerzas partícula-partícula; la presión de poro se asocia con la fuerza entre moléculas de agua y partículas

Si el esfuerzo total a que está sometido el suelo es fijo, se tiene:

$$\sigma_t = \sigma_e + p_p = \text{cte.}$$

Basándose en los conceptos y supuestos anteriores, se construirá un modelo físico-matemático con el fin de simular el comportamiento del acuitardo, cuando en el acuífero inferior se mantiene un régimen de bombeo de agua a través de un pozo en forma permanente. En la figura 1 se muestra la forma como está constituido el sistema.

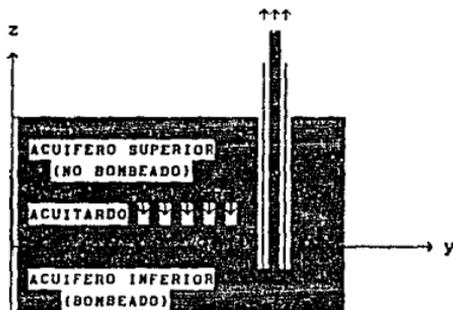


Fig. (1) Diagrama esquemático del sistema físico constituido por dos acuíferos independientes limitados por un acuitardo. El flujo en el acuitardo es solamente en la dirección vertical.

## CAPITULO 2

### DEDUCCION DE LAS ECUACIONES BASICAS

#### Ley de Darcy

Una forma de describir el movimiento del agua subterránea a través de un medio poroso es usando la ley experimental de Darcy. Esta ley establece que el flujo de agua subterránea  $Q$ , es directamente proporcional a la diferencia en el nivel piezométrico  $h_2 - h_1$  y al área de la sección transversal  $A$  que atraviesa, pero inversamente proporcional a la longitud del medio poroso  $l_2 - l_1$ , donde  $l_2$  y  $l_1$  corresponden a los puntos en donde se mide  $h_2$  y  $h_1$  respectivamente, y su expresión es la siguiente.

$$Q = - KA \frac{h_2 - h_1}{l_2 - l_1} \quad (1)$$

donde la constante de proporcionalidad  $K$  es la conductividad hidráulica. El signo negativo significa que el agua fluye en la dirección en que  $h$  disminuye.

#### El Potencial de Hubbert

Sabemos que el agua fluye en respuesta a diferencias en la energía potencial.

La energía total del agua en un punto dado es la energía requerida para transportar la unidad de masa de agua desde el estado de referencia estándar al punto en cuestión, y el agua se mueve de altos potenciales a bajos potenciales.

Para derivar el potencial del agua vamos a considerar dos fuerzas potenciales por separado, la presión y la elevación, que actúan sobre una unidad de masa de agua.

El término correspondiente a la energía cinética en este caso es despreciable, dado que las velocidades a las que se mueve el fluido en un medio poroso son muy pequeñas.

## Capítulo 2: Deducción de las ecuaciones básicas

Supongamos que tenemos un tubo lleno de arena saturada con agua, y que la presión es  $P$  a la altura  $z$ .

La energía potencial por unidad de masa de agua está definida como el trabajo requerido para elevar la unidad de masa de agua desde la posición de referencia  $z_{ref}$  a su posición actual  $z$ .

Si consideramos la presión en la posición de referencia como cero, el trabajo requerido para elevar la unidad de masa de agua a la presión  $P$  está dada por:

$$W = \frac{1}{m} \int_0^P V dP \quad (2)$$

donde  $m$  es la masa de agua y  $V$  su volumen. El volumen  $V$  es  $m/\rho_w$ , donde  $\rho_w$  es la densidad del agua. Si suponemos que el agua es incompresible, esto es, la densidad es la misma para todas las presiones, el trabajo por unidad de masa para elevar la presión del agua a  $P$  será:

$$W = P/\rho_w \quad (3)$$

La segunda componente de la energía potencial es el trabajo requerido para elevar la unidad de masa a la altura  $z$  y está dado por  $g(z-z_{ref})$ , donde  $g$  es la aceleración de la gravedad. Por lo tanto, el potencial total del agua es:

$$\phi = \frac{P}{\rho_w} + g(z-z_{ref}) \quad (4)$$

Con esto hemos expresado el potencial para la unidad de masa de agua en términos físicos fundamentales.

## Capítulo 2: Dedución de las ecuaciones básicas

¿Cómo está relacionado el potencial  $\phi$  con el nivel piezométrico  $h$  de la ley de Darcy? Esto es, como relacionar la ecuación (4) con las cantidades físicas medidas en el experimento de Darcy.

Refiriendonos a la Fig. 2, la presión  $P$  del agua a la elevación  $z$  es:

$$P = \rho_w g(h - z) \quad (5)$$

Si (5) es sustituida en (4) y  $z_{ref} = 0$ , encontramos que:

$$\phi = \frac{P}{\rho_w} + g(z - z_{ref}) = \frac{\rho_w g(h - z)}{\rho_w} + gz = gh \quad (6)$$

Teniendo en mente que  $\phi$  y  $h$  son funciones de la elevación  $z$ .

La ecuación (6) nos da el potencial  $\phi$  derivado básicamente de la mecánica de fluidos, el cual es directamente proporcional al nivel piezométrico  $h$  experimental de la ley de Darcy. En efecto, el nivel piezométrico  $h$  puede ser considerado como un potencial expresado en términos de energía por unidad de peso del agua, cuando el potencial de Hubbert  $\phi$ , es expresado en términos de energía por unidad de masa.

También se puede pensar en términos separados como la carga de presión y la carga de elevación que tienen unidades de energía por unidad de peso.

$$h = \frac{\phi}{g} = \frac{P}{\rho_w g} + z \quad (7)$$

donde  $h$  es el nivel piezométrico total,  $P/\rho_w g$  es la carga de presión y  $z$  es la carga de elevación.

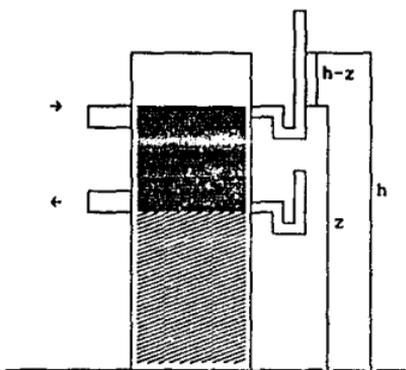


Fig.2 Nivel piezométrico total  $h$  como la suma del nivel piezométrico de presión ( $h-z$ ) y el nivel piezométrico de elevación ( $z$ ).

El abatimiento de nivel piezométrico en la ley de Darcy es proporcional a la energía perdida por unidad de peso que resulta de la fricción del fluido al moverse a través de los canales porosos. La Ley de Darcy es una expresión del movimiento de agua en la dirección de disminución de la energía, o lo que es lo mismo, de mayor a menor nivel piezométrico.

#### Ley de Darcy en Tres Dimensiones

Para la generalización de la ley de Darcy a todo el espacio, haremos algunos supuestos acerca del medio poroso. Vamos a considerar un medio poroso isotrópico y también vamos a suponer que la razón de descarga  $Q$  es independiente del tiempo.

Definamos  $q = Q/A$  como el flujo de descarga por unidad de área.

## Capítulo 2: Deducción de las ecuaciones básicas

En el límite cuando  $t_2 - t_1 \rightarrow 0$ , la Ley de Darcy se puede expresar en forma diferencial como:

$$q = -K \frac{dh}{dl} \quad (8)$$

La descarga específica  $q$  tiene unidades de velocidad y es conocida también como la velocidad de Darcy.

El promedio lineal o velocidad de poro es  $u = q/\eta$ , donde  $\eta$  es la porosidad.

La porosidad de un material es una medida de la abundancia de huecos o intersticios y está dada por la razón del volúmen de intersticios al volúmen total. Si  $V_v$  representa el volúmen de intersticios y  $V_t$  representa el volúmen total, la porosidad  $\eta$  está dada por

$$\eta = V_v/V_t$$

Hay ocasiones en que se usa el concepto de porosidad efectiva  $\eta_e$  en la cual solo se toma en cuenta el volúmen de los poros que están interconectados y no se consideran aquellos poros que están semicerrados o cerrados y en donde el fluido está confinado y sin ningún movimiento.

La generalización a tres dimensiones de la ley de Darcy requiere que (8) sea válida en cada una de las direcciones  $x, y, z$ , con lo que se puede escribir:

$$q_x = -K \frac{\partial h}{\partial x} \quad , \quad q_y = -K \frac{\partial h}{\partial y} \quad , \quad q_z = -K \frac{\partial h}{\partial z} \quad (9)$$

que también se puede escribir en forma vectorial como:

$$\vec{q} = -K \text{grad}(h) \quad (10)$$

Descripción del Movimiento.

Fundamentalmente a los elementos de un sistema macroscópico (llamado también continuo) se les denomina partículas. Aquí solo consideraremos conjuntos de partículas que poseen características especiales a los cuales llamaremos cuerpos. Sea B un cuerpo; en cualquier tiempo cada partícula  $\underline{X}$  de B ocupa una posición en el espacio físico  $R^3$ . Como consecuencia de esto, para cada tiempo t se puede definir una función  $p(t)$

$$p(t): B \rightarrow R^n \quad (11)$$

donde n puede ser 1, 2 ó 3

que da la posición de cada partícula  $\underline{X}$  de B.

Las coordenadas  $\underline{x}$  de la partícula  $\underline{X}$  están dadas en el tiempo t por:

$$\underline{x} = p(\underline{X}, t) \quad (12)$$

Por lo general se consideran dos clases de propiedades en los sistemas macroscópicos, las propiedades intensivas y las extensivas. Una propiedad intensiva  $\Pi$ , está definida para cada tiempo y para cada partícula, esto es, no depende del tamaño del sistema, y puede ser escalar (como la densidad, la presión, la temperatura, etc.) o vectorial (como la velocidad).

Las propiedades extensivas son aquellas que sí dependen del tamaño del sistema (como por ejemplo la masa, el volumen, la carga eléctrica, la cantidad de calor, etc.)

Las propiedades intensivas admiten descripciones tanto en términos Lagrangianos como en términos Eulerianos.

Consideremos una propiedad  $\Pi$ , y sea  $\phi(\underline{X}, t)$  el valor de la propiedad  $\Pi$  en la partícula  $\underline{X}$  y en el tiempo t. Entonces la función  $\phi(\underline{X}, t)$  es la descripción Lagrangiana de la propiedad  $\Pi$ , que puede ser escalar o vectorial.

Similarmente, sean  $\underline{x}$  las coordenadas de un conjunto en el espacio

## Capítulo 2: Deducción de las ecuaciones básicas

físico y sea  $\psi(\underline{x}, t)$  el valor de la propiedad  $\Pi$  en el punto  $\underline{x}$  y en el tiempo  $t$ . Entonces la función  $\psi(\underline{x}, t)$  es la descripción Euleriana de la propiedad  $\Pi$ .

Debido a estas dos definiciones, las descripciones Lagrangiana y Euleriana se pueden relacionar por medio de la ecuación:

$$\phi(\underline{X}, t) = \psi(\underline{p}(\underline{X}, t), t) \quad (13)$$

Un concepto esencial en la descripción del movimiento es la velocidad. Para el caso de la descripción Lagrangiana, la velocidad se define por medio de la ecuación.

$$\underline{v}(\underline{X}, t) = \underline{p}_t(\underline{X}, t) \quad (14)$$

Si consideramos que  $\underline{v}(\underline{x}, t)$  es la descripción Euleriana de la velocidad, de (13) tenemos que:

$$\underline{v}(\underline{X}, t) = \underline{v}(\underline{p}(\underline{X}, t), t) \quad (15)$$

La derivada Lagrangiana o material de una propiedad se define por  $\phi_t(\underline{X}, t)$  y la Euleriana por  $\psi_t(\underline{x}, t)$ . Es decir para obtener la derivada material se mantiene la partícula fija, mientras que la Euleriana se obtiene manteniendo el punto fijo del espacio físico. Si derivamos (13) como una función de funciones obtenemos:

$$\phi_t(\underline{X}, t) = \psi_t(\underline{p}(\underline{X}, t), t) + \underline{p}_t(\underline{X}, t) \cdot \nabla \psi(\underline{p}(\underline{X}, t), t) \quad (16)$$

Si denotamos por  $D\psi/Dt$  la descripción Euleriana de la derivada material, de (16) tenemos que:

$$\frac{D\psi}{Dt} = \psi_t + \underline{v} \cdot \nabla \psi \quad (17)$$

Algunos Resultados de Cálculo.

**Teorema de Green.**

Sea  $u(x_1, \dots, x_n)$  una función de  $n$ -variables, y consideremos una región  $\Omega$  del espacio Euclideo  $n$ -dimensional, entonces

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u(\underline{x})}{\partial x_1} d\underline{x} = \int_{\partial\Omega} u(\underline{x}) n_1 d\underline{x} \quad (18)$$

donde  $\underline{n} = (n_1, \dots, n_n)$  es el vector normal unitario que apunta hacia afuera de  $\Omega$ , y  $\partial\Omega$  es la frontera de  $\Omega$ .

**Teorema de la Divergencia.**

Sea  $\underline{u}(x_1, \dots, x_n)$  una función vectorial en el espacio  $n$ -dimensional. Su divergencia se define como:

$$\nabla \cdot \underline{u} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \quad (19)$$

Por lo que de (18) encontramos que:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \underline{u} d\underline{x} = \int_{\partial\Omega} \underline{u} \cdot \underline{n} d\underline{x} \quad (20)$$

Otro resultado de interés para nosotros es el cálculo de derivadas de integrales, cuando la región de integración  $\Omega(t)$  depende de un parámetro  $t$ .

Consideremos la integral

$$I(t) = \int_{\Omega(t)} f(\underline{x}, t) d\underline{x} \quad (21)$$

Capítulo 2: Deducción de las ecuaciones básicas

Sea  $\Gamma(t) = \partial\Omega(t)$  la frontera de  $\Omega$  y,  $\underline{v}_\Gamma$  la velocidad con que se desplazan los puntos de  $\Gamma$ . Se tiene entonces que.

$$\dot{I}'(t) = \int_{\Omega(t)} f_t(\underline{x}, t) d\underline{x} + \int_{\Gamma(t)} f(\underline{x}, t) \underline{v}_\Gamma \cdot \underline{n} d\underline{x} \quad (22)$$

La relación (22) es válida cuando  $f(\underline{x}, t)$  y su derivada son continuas, en el caso de que  $f(\underline{x}, t)$  y su derivada sean discontinuas en una superficie  $\Sigma$  se utiliza [Herrera y Allen, 1986]:

$$\dot{I}'(t) = \int_{\Omega(t)} f_t(\underline{x}, t) d\underline{x} + \int_{\partial\Omega(t)} f(\underline{x}, t) \underline{v}_\Gamma \cdot \underline{n} d\underline{x} - \int_{\Sigma(t)} [f] \underline{v}_\Sigma \cdot \underline{n} d\underline{x} \quad (23)$$

donde  $[f] = f_+ - f_-$  es el salto de  $f$  y  $f_+$  y  $f_-$  son el límite de  $f$  en uno y otro lado de  $\Sigma$  respectivamente y,  $\underline{v}_\Sigma$  es la velocidad de los puntos de la superficie de discontinuidad

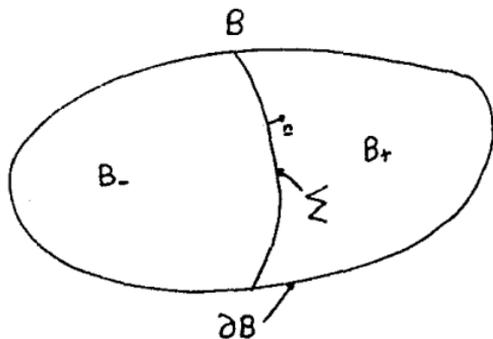


Fig. 3 Diagrama esquemático del espacio físico ocupado por el cuerpo B, su frontera  $\partial B$  y una superficie de discontinuidad  $\Sigma$ .

Un último resultado del Cálculo es el Lemma de Dubois-Reymond que establece que si  $f(x)$  es una función continua en la región  $\Omega$  y además

$$\int_R f(x) dx = 0 \quad (24)$$

en toda subregión  $R$  de  $\Omega$ , entonces

$$f(x) = 0 \quad \text{para toda } x \text{ en } \Omega \quad (25)$$

Un corolario del Lemma de Dubois-Reymond, es que si  $f(x)$  y  $g(x)$  son funciones continuas en  $\Omega$  tales que

$$\int_R f(x) dx = \int_R g(x) dx \quad (26)$$

en toda subregión  $R$  de  $\Omega$ , entonces

$$f(x) = g(x) \quad \text{para toda } x \text{ en } \Omega \quad (27)$$

Una extensión del Lemma de Dubois-Reymond es que si  $f(x)$  es continua en  $\Omega$ , excepto en alguna superficie  $\Sigma$  a través de la cual  $f$  puede tener discontinuidades de salto, y además

$$\int_R f(x) dx + \int_{\Sigma(R)} [f] d\Sigma = 0 \quad (28)$$

para toda subregión  $R$  de  $\Omega$  (donde  $\Sigma(R)$  es la parte de  $\Sigma$  contenida en  $R$ ), entonces

$$f(x) = 0 \quad \text{para toda } x \text{ en } \Omega \quad (29)$$

y

$$[f] = 0 \quad \text{para toda } x \text{ en } \Sigma \quad (30)$$

**Propiedades Extensivas y su evolución.**

Dada cualquier propiedad intensiva  $\Pi$ , se puede definir una propiedad extensiva  $E(t)$  asociada a  $\Pi$  por medio de:

$$E(t) = \int_{B(t)} \psi(\underline{x}, t) d\underline{x} \quad (31)$$

donde  $\psi(\underline{x}, t)$  es la descripción Euleriana de  $\Pi$ , y  $B(t)$  es la región del espacio físico ocupada por el cuerpo  $B$  en el tiempo  $t$ .

La rapidez de cambio de las propiedades extensivas se puede derivar haciendo uso de la ecuación (22). De (31) y (22) se tiene que:

$$E'(t) = \int_{B(t)} \psi_t(\underline{x}, t) d\underline{x} + \int_{\partial B(t)} \psi(\underline{x}, t) \underline{v}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n} d\underline{x} \quad (32)$$

y si hacemos uso del Teorema de la Divergencia, la ec. (32) queda de la siguiente manera

$$E'(t) = \int_{B(t)} \{ \psi_t + \nabla \cdot (\psi \underline{v}) \} d\underline{x} \quad (33)$$

Alternativamente, haciendo uso de la ecuación (17), la ecuación (33) se puede expresar como

$$E'(t) = \int_{B(t)} \left\{ \frac{D\psi}{Dt} + \psi \nabla \cdot \underline{v} \right\} d\underline{x} \quad (33')$$

dado que  $\nabla \cdot (\psi \underline{v}) = \psi \nabla \cdot \underline{v} + \underline{v} \cdot \nabla \psi$

Las ecuaciones (33) y (33') tienen una limitación muy importante, ellas suponen que la representación  $\psi$  de la propiedad intensiva  $\Pi$  y su derivada son continuas.

## Capítulo 2: Deducción de las ecuaciones básicas

Esto generalmente tiene sus limitaciones, ya que las representaciones Lagranginas y Eulerianas de algunas propiedades intensivas pueden ser discontinuas, de aquí que sea necesario derivar relaciones que puedan aplicarse aún cuando esas funciones y sus derivadas puedan tener discontinuidades.

Una expresión equivalente a (33) que toma en cuenta el hecho de posibles discontinuidades de salto en las funciones que describen las propiedades intensivas es [Herrera y Allen, 1986]:

$$E'(t) = \int_{B(t)} \{\psi_t + \nabla \cdot (\psi \underline{v})\} d\underline{x} + \int_{\Sigma} [\psi(\underline{v} - \underline{v}_{\Sigma})] \cdot \underline{n} d\underline{x} \quad (34)$$

donde  $\Sigma(t)$  es una superficie de discontinuidad de  $\psi(\underline{x}, t)$  en el interior de  $B(t)$ , y  $\underline{v}_{\Sigma}$  es la velocidad de los puntos de la superficie de discontinuidad.

Una expresión equivalente a (34) utilizando la cc. (17) es:

$$E'(t) = \int_{B(t)} \left\{ \frac{D\psi}{Dt} + \psi \nabla \cdot \underline{v} \right\} d\underline{x} + \int_{\Sigma} [\psi(\underline{v} - \underline{v}_{\Sigma})] \cdot \underline{n} d\underline{x} \quad (35)$$

### Ley General de Balance.

Las leyes que gobiernan los sistemas macroscópicos se expresan por medio de balances globales, y su forma general para una propiedad intensiva  $\Pi$  con representación Euleriana  $\psi(\underline{x}, t)$  está dada por [Herrera y Allen, 1986]:

$$E'(t) = \frac{d}{dt} \int_{B(t)} \psi \, d\mathbf{x} = \int_{\partial B} \underline{\tau} \cdot \underline{n} \, d\mathbf{x} + \int_{B(t)} g \, d\mathbf{x} \quad (36)$$

donde  $E(t)$  es la propiedad extensiva asociada a  $\Pi$ ,  $B(t)$  es la región del espacio físico ocupada por el cuerpo  $B$  en el tiempo  $t$  y  $\partial B$  la frontera de  $B$ .

A la función  $\underline{\tau}$  se le denomina "Flujo de  $\psi$ " a través de la superficie del cuerpo y la función  $g$  representa el "suministro desde el exterior" de  $\psi$ .

De (34) y (36) se tiene que:

$$\int_{B(t)} (\psi_t + \nabla \cdot (\psi \underline{v})) \, d\mathbf{x} + \int_{\Sigma} [\psi(\underline{v} - \underline{v}_{\Sigma})] \cdot \underline{n} \, d\mathbf{x} - \int_{\partial B} \underline{\tau} \cdot \underline{n} \, d\mathbf{x} - \int_{B(t)} g \, d\mathbf{x} = 0 \quad (37)$$

Si en este punto aplicamos el teorema de la Divergencia en su forma generalizada obtenemos que la ecuación (37) se puede expresar como:

$$\int_{B(t)} \{ \psi_t + \nabla \cdot (\psi \underline{v}) - \nabla \cdot \underline{\tau} - g \} \, d\mathbf{x} + \int_{\Sigma} [\psi(\underline{v} - \underline{v}_{\Sigma}) - \underline{\tau}] \cdot \underline{n} \, d\mathbf{x} = 0 \quad (38)$$

Aplicando el Lemma de Dubois-Reymond (ecs. (28), (29) y (30)) a la ecuación (38) encontramos que:

$$\psi_t + \nabla \cdot (\psi \underline{v}) - \nabla \cdot \underline{\tau} - g = 0 \quad (39a)$$

y

$$[\psi(\underline{v} - \underline{v}_{\Sigma}) - \underline{\tau}] \cdot \underline{n} = 0 \quad (39b)$$

## Capítulo 2: Dedución de las ecuaciones básicas

Las ecuaciones (39a) y (39b) representan la forma diferencial o local de la "Ley General de Balance" y la "Condición general de salto" respectivamente.

### Balance de Masa.

Consideremos un cuerpo B que ocupa la región  $B(t)$  al tiempo  $t$ .

La masa total del cuerpo B está dada por:

$$M(t) = \int_{B(t)} \rho(\underline{x}, t) d\underline{x} \quad (40)$$

donde la función  $\rho(\underline{x}, t)$  es la densidad de masa.

De la ecuación (39) obtenemos que el balance global de masa en su forma diferencial y la condición de salto son:

$$\rho_t + \nabla(\rho \underline{v}) - \nabla \cdot \underline{\tau} - \underline{g} = 0 \quad \text{en } B(t) \quad (41a)$$

y

$$[\rho(\underline{v} - \underline{v}_\Sigma) - \underline{\tau}] \cdot \underline{n} = 0 \quad \text{en } \Sigma(t) \quad (41b)$$

### Conservación de la Masa.

Un caso de particular interés es aquel en el cual la masa se conserva, es decir, no hay flujo de masa a través de la frontera de B y tampoco hay generación de masa en B, esto es,  $\underline{\tau} = 0$  y  $\underline{g} = 0$ .

Si este es el caso, las ecuaciones (41) se reducen a:

$$\rho_t + \nabla \cdot (\rho \underline{v}) = 0 \quad \text{en } B(t) \quad (42a)$$

y

$$[\rho(\underline{v} - \underline{v}_\Sigma)] \cdot \underline{n} = 0 \quad \text{en } \Sigma(t) \quad (42b)$$

## Capítulo 2: Deducción de las ecuaciones básicas

Dado que en este trabajo estamos interesados en el fluido del agua en un medio poroso (el acuitardo), las ecuaciones que consideraremos serán las correspondientes a este medio.

### Fluidos en Medios Porosos.

La masa de un fluido en un medio poroso esta dado por:

$$M(t) = \int_{B(t)} \eta \rho \, d\mathbf{x} \quad (43)$$

donde  $\eta = \eta(\mathbf{x}, t)$  es la porosidad (volumen de poros/volumen total)  
 $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$  es la densidad del fluido.

Suponiendo que la masa se conserva, el balance global de masa en su forma diferencial y la condición de salto de acuerdo con las ecs. (42a) y (42b) se expresa como:

$$(\eta\rho)_t + \nabla \cdot (\eta\rho\mathbf{v}) = 0 \quad (44a)$$

y

$$[\eta\rho(\mathbf{v} - \mathbf{v}_\Sigma)] \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (44b)$$

El producto  $\eta\mathbf{v}$  es la velocidad de Darcy, que se denotará por  $\mathbf{V}$  y representa el gasto volumétrico por unidad de área.

En términos de la velocidad de Darcy, las ecuaciones (44a) y (44b) quedan en la forma

$$(\eta\rho)_t + \nabla \cdot (\rho\mathbf{V}) = 0 \quad (45a)$$

y

$$[\rho(\mathbf{V} - \eta\mathbf{v}_\Sigma)] \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (45b)$$

## Capítulo 2: Dedución de las ecuaciones básicas

Las ecuaciones (45a) y (45b) son la base del modelo que describe el flujo de un fluido en un medio poroso.

A continuación describimos el modelo que se obtiene cuando se imponen dos hipótesis bastante generales:

1.- La porosidad  $\eta$  y la densidad  $\rho$  del fluido, son funciones de la presión únicamente.

2.- La velocidad  $V_i$  está dada por la ley de Darcy

$$V_i = -\frac{k_{ij}}{\mu} \left[ \frac{\partial P}{\partial x_j} + \rho g \frac{\partial z}{\partial x_j} \right] \quad (46)$$

donde  $\mu$  es la viscosidad del fluido,  $\rho$  la densidad,  $P$  la presión y  $g$  la aceleración de la gravedad.

Considerando estas hipótesis, encontramos que:

$$\frac{\partial \eta \rho}{\partial t} = \left[ \rho \frac{\partial \eta}{\partial t} + \eta \frac{\partial \rho}{\partial t} \right] = \left[ \rho \frac{d\eta}{dP} + \eta \frac{d\rho}{dP} \right] \frac{\partial P}{\partial t} \quad (47)$$

$$\text{definiendo } \alpha = \frac{d\eta}{dP} \quad (48)$$

y

$$\beta = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dP} \quad (49)$$

la ecuación (47) se puede expresar como:

$$\frac{\partial \eta \rho}{\partial t} = \rho(\alpha + \eta\beta) \frac{\partial P}{\partial t} \quad (50)$$

## Capítulo 2: Deducción de las ecuaciones básicas

Aquí  $\alpha$  y  $\beta$ , representan la compresibilidad de la matriz rocosa y del fluido respectivamente. La primera corresponde a la variación de masa del fluido producida por la compactación del medio poroso (ésta se refleja por el cambio en su porosidad), mientras que la segunda corresponde a la variación de masa del fluido producida por una expansión de éste y debido a un cambio en su densidad.

Sustituyendo (50) en (45a) y multiplicando por  $g$  obtenemos:

$$\rho g(\alpha + \eta\beta) \frac{\partial P}{\partial t} + g\nabla \cdot (\rho \underline{v}) = 0 \quad (51)$$

el término  $\rho g(\alpha + \eta\beta)$  se le llama "almacenamiento específico" y se le designa por  $S_e$ , luego

$$S_e = \rho g(\alpha + \eta\beta) \quad (52)$$

donde  $\rho$  es la densidad del fluido [ $M/L^3$ ]

$g$  es la aceleración debida a la gravedad [ $L/T^2$ ]

$\alpha$  y  $\beta$  son las compresibilidades del medio poroso y el fluido respectivamente [ $LT^2/M$ ]

$\eta$  es la porosidad.

Sustituyendo (52) en (51) llegamos a que:

$$S_e \frac{\partial P}{\partial t} + g\nabla \cdot (\rho \underline{v}) = 0 \quad (53)$$

El almacenamiento específico  $S_e$ , es el volumen de fluido producido por la variación en la densidad  $\rho$  y en la porosidad  $\eta$  debido a un cambio en la carga hidráulica o nivel piezométrico  $h$ , cuando este desciende una unidad.

En el caso de fluidos homogéneos, el nivel piezométrico  $h$  se define como:

$$h = \frac{1}{g} \int_{P_0}^P \frac{d\xi}{\rho(\xi)} + z \quad (54)$$

Usando esta definición de  $h$  y recordando que la conductividad hidráulica en un medio anisotrópico está dada por  $K_{ij} = \rho g k_{ij} / \mu$  la velocidad  $V_i$  toma la forma

$$V_i = -K_{ij} \frac{\partial h}{\partial x_j} \quad (55)$$

La expresión  $g \nabla \cdot (\rho \underline{V})$  considerando la ec. (55) se puede expresar de la siguiente manera:

$$g \nabla \cdot (\rho \underline{V}) = g \nabla \cdot (K_{ij} \frac{\partial h}{\partial x_j}) + (K_{ij} \frac{\partial h}{\partial x_j}) \nabla \rho$$

pero

$$\frac{1}{\rho} \nabla \rho = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_i} = \nabla \log(\rho)$$

además

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \rho g \frac{\partial h}{\partial t} \quad (56)$$

sustituyendo las ecuaciones (55) y (56) en (53) obtenemos:

$$S_s \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ K_{ij} \frac{\partial h}{\partial x_j} \right] - K_{ij} \frac{\partial h}{\partial x_j} \frac{\partial (\log \rho)}{\partial x_i} = 0 \quad (57)$$

Si consideramos un fluido incompresible, el tercer término puede despreciarse quedando:

## Capítulo 2: Deducción de las ecuaciones básicas

$$S_s \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ K_{ij} \frac{\partial h}{\partial x_j} \right] = 0 \quad (58)$$

La ecuación (58) es la ecuación que gobierna el flujo transitorio de un fluido a través de un medio poroso, saturado y anisotrópico.

Cuando el sistema es isotrópico y homogéneo, la ecuación de flujo toma la forma

$$S_s \frac{\partial h}{\partial t} - \nabla \cdot (K \nabla h) = 0 \quad (59)$$

**Parámetros no Lineales.**

**Almacenamiento específico.**

El almacenamiento específico  $S_s$ , es el volumen de agua liberado desde el almacenamiento por unidad de área del acuífero y por unidad de declive del nivel piezométrico hidráulico perpendicular a la superficie, y puede ser expresado como [Freeze y Cherry 1979 ].

$$S_s = \rho g (\alpha + \eta \beta) \quad (60)$$

Un análisis comparativo entre las compresibilidades del medio poroso y del fluido indican que la compresibilidad del fluido respecto a la del medio poroso es despreciable [Domenico y Mifflin 1965 ], por lo que el almacenamiento específico se puede expresar como:

$$S_s = \rho g \alpha \quad (61)$$

La relación de vacíos "e" está definida por:

$$e = \frac{V_v}{V_s} \quad (62)$$

donde  $V_v$  es el volumen de vacíos, y  
 $V_s$  el volumen de sólido

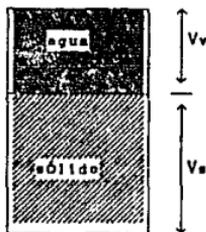


Fig. 4 Diagrama de un medio poroso saturado, mostrando los volúmenes de vacío y sólido

La porosidad  $\eta$  expresada en términos de "e" está dada por:

$$\eta = \frac{e}{1+e} \quad (63)$$

La compresibilidad del medio poroso  $\alpha$  se puede expresar como:  
[Huyakorn y Pinder, 1983]

$$\alpha = \frac{d\phi}{dP} \quad (64)$$

siendo  $P$  la presión de poro.

Derivando (63) respecto a  $P$  utilizando la regla de la cadena obtenemos:

Capítulo 2: Deducción de las ecuaciones básicas

$$\alpha = \frac{1}{(1+e)^2} \frac{de}{dP} \quad (65)$$

Si en este punto utilizamos la ecuación de Terzaghi para la consolidación en una dimensión [Roscoe y Burland, 1968]:

$$e = e_0 - \lambda \log \left( \frac{\sigma_T - P}{\sigma_T - P_0} \right) \quad (66)$$

donde  $e$ ,  $\sigma_T$  y  $P$  son valores de relación de vacíos, presión total y presión de poro al tiempo  $t$ .

$e_0$  y  $P_0$  son valores de la relación de vacíos y presión de poro en un tiempo  $t - \Delta t$ .

$\lambda$  es el índice de compresibilidad.

Derivando (66) respecto a  $P$ , y considerando  $\sigma_T = \text{cte.}$  obtenemos:

$$\frac{de}{dP} = \frac{d}{dP} \left( e_0 - \lambda \log \left( \frac{\sigma_T - P}{\sigma_T - P_0} \right) \right)$$

$$= \frac{-\lambda(\sigma_T - P_0)}{\sigma_T - P} \left( \frac{\sigma_T - P_0}{(\sigma_T - P)^2} \right) (-1)$$

$$\frac{de}{dP} = \frac{\lambda}{\sigma_T - P} = \frac{\lambda}{\sigma_0} \quad (67)$$

donde  $\sigma_0 = \sigma_T - P$  es la presión efectiva en el medio poroso y se puede interpretar como la componente normal de la presión total transmitida a través de las partículas del medio poroso.

Sustituyendo (67) en (65) se tiene:

$$\alpha = \frac{1}{(1+e)^2} \frac{\lambda}{\sigma_0} \quad (68)$$

## Capítulo 2: Dedución de las ecuaciones básicas

sustituyendo (68) en (61) obtenemos una expresión para el almacenamiento específico:

$$S_s = \rho g \frac{1}{(1+e)^2} \frac{\lambda}{\sigma_v} \quad (69)$$

### Conductividad hidráulica

La conductividad hidráulica en un medio poroso saturado está relacionada tanto con las propiedades conductivas del medio poroso como con la naturaleza física del fluido que se mueve a través del medio. Lambe y Whitman [1969] presentan datos en los cuales se pone de manifiesto una relación lineal entre la relación de vacíos y  $\log(k)$ , donde  $k$  es la permeabilidad.

Si las propiedades del fluido se suponen constantes, la relación entre la conductividad hidráulica y la relación de vacíos se puede expresar como:

$$K_2 = K_1 \left[ 10^{\frac{(e_2 - e_1)}{m}} \right] \quad (70)$$

donde  $K_1$  y  $e_1$  son los valores iniciales de conductividad hidráulica y relación de vacíos, y  $K_2$  y  $e_2$  son los valores finales, y  $m$  es la pendiente de la gráfica de  $e$  vs  $\log(k)$ .

En términos de las ecuaciones (69) y (70), la ecuación (59) es una ecuación diferencial parcial no lineal que describe el flujo de agua en el acuífero.

## CAPITULO 3

### DISCRETIZACION DE LAS ECUACIONES BASICAS

Aplicación del método de Celdas para la discretización de la ecuación diferencial que describe el flujo en el acultardo.

Aún cuando existen varios métodos para poder discretizar una ecuación diferencial, se adoptó éste método por su sencillez en la aplicación y su eficiencia en problemas no lineales.

Consideremos el intervalo  $[0, \ell]$  como el espesor del acultardo, y dividamos éste en  $E$  segmentos de la misma longitud Fig. 4. Tomemos como nodos los centros de cada segmento y etiquetémoslos como  $1, 2, 3, \dots, E$  empezando en el extremo izquierdo. También etiquetemos las fronteras comunes de cada segmento como  $1/2, 3/2, \dots, E+1/2$  como se muestra:

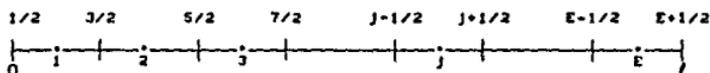


Fig. 5. Discretización del intervalo  $[0, \ell]$  en  $E$  segmentos de la misma longitud, y etiquetado de los nodos que identifican a cada segmento.

Consideremos ahora la ecuación diferencial que describe el flujo en el acultardo ec. (71) y las condiciones de frontera e inicial

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( K \frac{\partial h}{\partial z} \right) = S_s \frac{\partial h}{\partial t} \quad (71)$$

condiciones de frontera

$$\left. \begin{aligned} h_{1/2} &= h(x, y, 0, t) = h_1(x, y, t) \\ h_{E+1/2} &= h(x, y, \ell, t) = h_2(x, y, \ell, t) \end{aligned} \right\} \quad (72)$$

Capítulo 3: Discretización de las ecuaciones básicas

condición inicial

$$h(x, y, z, 0) = h_j(x, y, z) \quad (73)$$

La aplicación del método de celdas al miembro izquierdo de (71) tomando como referencia el nodo  $j$  nos da:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( K \frac{\partial h}{\partial z} \right)_j = \frac{\left( K \frac{\partial h}{\partial z} \right)_{j+1/2} - \left( K \frac{\partial h}{\partial z} \right)_{j-1/2}}{\Delta z} \quad (74)$$

A su vez, la aplicación del mismo método a cada miembro de (74) nos da:

$$\left. \begin{aligned} \left( K \frac{\partial h}{\partial z} \right)_{j+1/2} &= K_{j+1/2} \left( \frac{h_{j+1} - h_j}{\Delta z} \right) \\ \left( K \frac{\partial h}{\partial z} \right)_{j-1/2} &= K_{j-1/2} \left( \frac{h_j - h_{j-1}}{\Delta z} \right) \end{aligned} \right\} \quad (75)$$

Sustituyendo (75) en (74) obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( K \frac{\partial h}{\partial z} \right)_j = \frac{K_{j+1/2} (h_{j+1} - h_j) - K_{j-1/2} (h_j - h_{j-1})}{(\Delta z)^2} \quad (76)$$

Reordenando (76) obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( K \frac{\partial h}{\partial z} \right)_j = \frac{K_{j-1/2} h_{j-1} - \left( K_{j+1/2} + K_{j-1/2} \right) h_j + K_{j+1/2} h_{j+1}}{(\Delta z)^2} \quad (77)$$

La aplicación del método de celdas al término derecho de (71) tomando también como referencia el nodo  $j$  nos da:

$$\left( Ss \frac{\partial h}{\partial t} \right)_j = Ss_j \frac{(h_j^{n+1} - h_j^n)}{\Delta t} \quad (78)$$

Con las ecuaciones (77) y (78), podemos expresar (71) referida al nodo  $j$  de la siguiente manera:

$$\frac{K_{j-1/2} h_{j-1}^{n+1} - (K_{j+1/2} + K_{j-1/2}) h_j^{n+1} + K_{j+1/2} h_{j+1}^{n+1}}{(\Delta z)^2} = Ss_j \frac{(h_j^{n+1} - h_j^n)}{\Delta t} \quad (79)$$

Los valores de  $h$  en el miembro izquierdo de (79) serán los calculados en el tiempo  $n+1$  dado que utilizamos la forma implícita para discretizar la ecuación (71), por lo que (79) deberá escribirse como:

$$\frac{K_{j-1/2} h_{j-1}^{n+1} - (K_{j+1/2} + K_{j-1/2}) h_j^{n+1} + K_{j+1/2} h_{j+1}^{n+1}}{(\Delta z)^2} = Ss_j \frac{(h_j^{n+1} - h_j^n)}{\Delta t} \quad (80)$$

Entonces, la discretización de la ecuación (71) por medio del método de celdas conduce al sistema:

$$\begin{aligned} K_{j-1/2} h_{j-1}^{n+1} - \left\{ K_{j+1/2} + K_{j-1/2} + \frac{Ss_j (\Delta z)^2}{\Delta t} \right\} h_j^{n+1} + K_{j+1/2} h_{j+1}^{n+1} \\ = \frac{Ss_j (\Delta z)^2 h_j^n}{\Delta t} \end{aligned} \quad (81)$$

Este sistema como puede verse, sólo es válido para valores de  $j$  que sean  $\geq 2$  y  $\leq E-1$  o sea  $j=2, 3, 4, \dots, E-1$ .

Dado esto tenemos un sistema de E-2 ecuaciones con E incógnitas. Las dos ecuaciones faltantes se pueden obtener de las condiciones de frontera en donde  $h_{1/2} = h_1(x, y, t)$  y  $h_{E+1/2} = h_2(x, y, t)$  de la siguiente manera:

$$h_1 = \frac{h_{1/2} + h_{3/2}}{2}; \quad (82)$$

a su vez

$$h_{3/2} = \frac{h_1 + h_2}{2} \quad (83)$$

entonces sustituyendo (83) en (82) obtenemos:

$$h_1 = \frac{h_{1/2} + \frac{h_1 + h_2}{2}}{2} = \frac{h_{1/2}}{2} + \frac{h_1}{4} + \frac{h_2}{4} \quad (84)$$

con lo que obtenemos:

$$\frac{3}{4} h_1 - \frac{1}{4} h_2 = \frac{1}{2} h_{1/2} \quad (85)$$

Siguiendo el mismo razonamiento encontramos que

$$h_E = \frac{h_{E-1/2} + h_{E+1/2}}{2} \quad (86)$$

y de la misma forma

$$h_{E-1/2} = \frac{h_{E-1} + h_E}{2} \quad (87)$$

sustituyendo (87) en (86) obtenemos:

$$h_E = \frac{h_{E-1}}{4} + \frac{h_E}{4} + \frac{h_{E+1/2}}{2}$$

y reordenando llegamos a que:

$$\frac{3}{4} h_E - \frac{1}{4} h_{E-1} = \frac{1}{2} h_{E+1/2} \quad (88)$$

Las ecuaciones (85) y (88) son válidas para todo tiempo por lo que se pueden expresar como:

$$\left. \begin{aligned} \frac{3}{4} h_1^{n+1} - \frac{1}{4} h_2^{n+1} &= \frac{1}{2} h_{1/2}^{n+1} \\ \frac{1}{4} h_{E-1}^{n+1} + \frac{3}{4} h_E^{n+1} &= \frac{1}{2} h_{E+1/2}^{n+1} \end{aligned} \right\} \quad (89)$$

Las ecuaciones (81) y (89) representan la forma discreta de la ecuación (71) junto con sus condiciones de frontera, por lo que resolver la ecuación (71) será equivalente a resolver el sistema de ecuaciones dado por (81) y (89) con la condición inicial  $h(x, y, z, 0) = h_3(x, y, z)$ .

Como una forma de tener clara esta equivalencia escribiremos nuevamente la ecuación que describe el flujo en el acuitardo junto con sus condiciones auxiliares y en seguida pondremos la misma ecuación en forma discreta, obtenida de la aplicación del método de celdas.

Ecuación diferencial que describe el flujo en el acuitardo y sus condiciones auxiliares:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( K \frac{\partial h}{\partial z} \right) = S_s \frac{\partial h}{\partial t} \quad (71)$$

condiciones de frontera

$$\left. \begin{aligned} h_{1/2} &= h(x, y, 0, t) \\ h_{E+1/2} &= h(x, y, \ell, t) \end{aligned} \right\} \quad (72)$$

Capítulo 3: Discretización de las ecuaciones básicas

condición inicial

$$h(x, y, z, 0) = h_{t=0}(x, y, z) \quad (73)$$

La discretización de (71) por medio del método de celdas conduce al sistema:

$$\begin{aligned} K_{j-1/2} h_{j-1}^{n+1} - \left( K_{j+1/2} + K_{j-1/2} + \frac{Ss_j (\Delta z)^2}{\Delta t} \right) h_j^{n+1} + K_{j+1/2} h_{j+1}^{n+1} \\ = -Ss_j \frac{(\Delta z)^2}{\Delta t} h_j^n \end{aligned} \quad (81)$$

para  $j = 2, 3, \dots, E-1$

$$\left. \begin{array}{l} \text{para } j=1 \text{ se tiene} \\ \frac{3}{4} h_1^{n+1} - \frac{1}{4} h_2^{n+1} = \frac{1}{2} h_{1/2}^n \\ \text{para } j=E \text{ se tiene} \\ \frac{1}{4} h_{E-1}^{n+1} + \frac{3}{4} h_E^{n+1} = \frac{1}{2} h_{E+1/2}^n \end{array} \right\} \quad (89)$$

El sistema constituido por las ecuaciones (81) y (89) expresado en forma matricial quedaría de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} B_1 & C_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_2 & B_2 & C_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_3 & B_3 & C_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{E-1} & B_{E-1} & C_{E-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_E & B_E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ \vdots \\ h_{E-1} \\ h_E \end{bmatrix}^{n+1} = \begin{bmatrix} D_1 h_1 \\ D_2 h_2 \\ D_3 h_3 \\ \vdots \\ D_{E-1} h_{E-1} \\ D_E h_E \end{bmatrix}^n \quad (90)$$

donde:

$$\left\{ \begin{array}{l} B_1 = \frac{3}{4} \quad , \quad C_1 = -\frac{1}{4} \\ A_j = K_{j-1/2} \quad \text{para } j = 2, 3, \dots, E-1 \\ B_j = - \left( K_{j+1/2} + K_{j-1/2} + Ss_j \frac{(\Delta z)^2}{\Delta t} \right) \quad \text{para } j = 2, 3, \dots, E-1 \\ C_j = K_{j+1/2} \quad \text{para } j = 2, 3, \dots, E-1 \\ A_E = -\frac{1}{4} \quad , \quad B_E = \frac{3}{4} \\ D_j = -Ss_j \frac{(\Delta z)^2}{\Delta t} \quad \quad j = 2, 3, \dots, E-1 \\ D_1 = \frac{1}{2} \quad , \quad D_E = \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

Como se puede ver en (90), la matriz es una matriz tridiagonal.

#### Consistencia Convergencia y Estabilidad

Todo Método Numérico necesariamente debe poseer los siguientes atributos; consistencia, convergencia y estabilidad.

La consistencia es la condición necesaria para que las ecuaciones numéricas se reduzcan a las ecuaciones continuas, cuando todos los intervalos finitos tiendan a cero.

La convergencia es la condición requerida para que las soluciones numéricas se aproximen a la exacta, cuando todos los intervalos finitos tiendan a cero. Esto generalmente no es posible hacerlo en todos los casos, pero usualmente basta saber si el procedimiento numérico converge para algunos tipos especiales de soluciones.

La condición de Estabilidad requiere que los errores de redondeo (errores que aparecen inevitablemente al realizar operaciones aritméticas en computadora) no se incrementen (en magnitud) con el paso del tiempo.

En el procedimiento implícito seguido aquí, la condición de estabilidad es incondicional, dado que las aproximaciones de las

### Capítulo 3: Discretización de las ecuaciones básicas

derivadas espaciales se definieron al final del paso de tiempo.

Un análisis completo de la condición de estabilidad puede hacerse utilizando el criterio de Von Neumann. Este criterio se basa en el análisis de Fourier y se demuestra que la amplitud de cualquier componente de la serie se decreta con el tiempo. [Allen, Herrera y Pinder, 1988].

Una forma de resolver un sistema que involucra una matriz tridiagonal, es el Algoritmo de Thomas. Este algoritmo se presenta a continuación:

#### Algoritmo de Thomas

Consideremos el siguiente sistema que involucra una matriz tridiagonal:

$$\left. \begin{aligned} b_1 x_1 + c_1 x_2 &= f_1 \\ a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3 &= f_2 \\ a_3 x_2 + b_3 x_3 + c_3 x_4 &= f_3 \\ a_4 x_3 + b_4 x_4 &= f_4 \end{aligned} \right\} \quad (91)$$

Como puede verse en la ecuación (91)

$a_i$  son los coeficientes de la diagonal abajo de la principal

$b_i$  son los coeficientes de la diagonal principal

$c_i$  son los coeficientes de la diagonal arriba de la principal

el índice  $i$  indica el número de renglón.

Lo que se intenta es expresar el sistema (91) en la siguiente forma:

**ESTA TESIS NO DEBE  
SALIR DE LA BIBLIOTECA**

$$\left. \begin{aligned} x_1 + \beta_1 x_2 &= y_1 \\ x_2 + \beta_2 x_3 &= y_2 \\ x_3 + \beta_3 x_4 &= y_3 \\ x_4 &= y_4 \end{aligned} \right\} \quad (92)$$

Obtenemos el primer renglón de (92) dividiendo el primer renglón de (91) por  $b_1$ , de modo que:

$$\beta_1 = \frac{c_1}{b_1} \quad (93)$$

$$y_1 = \frac{f_1}{b_1} \quad (94)$$

El segundo renglón de (92) se obtiene eliminando  $x_1$ , entre el primer renglón de (92) y el segundo renglón de (91):

$$\begin{array}{r} a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3 = f_2 \\ -a_2 x_1 - a_2 \beta_1 x_2 = -a_2 y_1 \\ \hline (b_2 - a_2 \beta_1) x_2 + c_2 x_3 = f_2 - a_2 y_1 \end{array} \quad (95)$$

designando:

$$\alpha_2 = (b_2 - a_2 \beta_1) \quad (96)$$

(95) queda como:

$$\alpha_2 x_2 + c_2 x_3 = f_2 - a_2 y_1 \quad (97)$$

si ahora dividimos entre  $\alpha_2$  obtenemos:

$$x_2 + \frac{c_2}{\alpha_2} x_3 = \frac{f_2 - a_2 y_1}{\alpha_2} \quad (98)$$

designando:

$$\beta_2 = \frac{c_2}{\alpha_2} \quad (99)$$

Capítulo 3: Discretización de las ecuaciones básicas

$$y_2 = \frac{f_2 - a_2 y_1}{\alpha_2} \quad (100)$$

Con esto hemos obtenido el segundo renglón de (92) y además podemos obtener una regla general para  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$ ,  $y_i$  de la siguiente manera, (ecuaciones (93) a la (100))

$$\left. \begin{aligned} \alpha_i &= b_i - a_i \beta_{i-1} \\ \beta_i &= c_i / \alpha_i \\ y_i &= \frac{f_i - a_i y_{i-1}}{\alpha_i} \end{aligned} \right\} \quad (101)$$

Las relaciones (101) se cumplen también para  $i=1$  si se define  $\beta_0=0$  y  $y_0=0$ .

Una vez que se cuenta con estas relaciones (101), el sistema se resuelve por sustitución hacia atrás partiendo de

$$x_n = y_n \quad (102)$$

y para  $i < n$

$$x_i = y_i - \beta_i x_{i+1} \quad (103)$$

El esquema que se seguirá para la resolución de (71) representada por el sistema (90) es el siguiente:

**Proceso Iterativo**

Dadas las condiciones iniciales para  $K$ ,  $S_s$  y  $h$  en el tiempo 0 se calculan las entradas de la matriz tridimensional y los coeficientes  $D_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, E$ .

### Capítulo 3: Discretización de las ecuaciones básicas

Al resolver el sistema, se obtienen los valores de  $h$  en el tiempo  $n+1$ , se recalculan las entradas de la matriz tridiagonal y los coeficientes  $D_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, E$ , los valores de  $h$  en el tiempo  $n+1$  pasan a ser considerados como si fueran los del tiempo  $n$ , y se vuelve a resolver el sistema.

Este proceso se continúa hasta que la diferencia máxima entre  $h_j^{n+1}$  y  $h_j^n$  sea menor que un valor  $(\epsilon)$  previamente determinado.

El valor de  $\epsilon$  depende de la aproximación que queramos hacer a la solución de (71), mientras más pequeño sea  $\epsilon$ , mejor será la aproximación a la solución de (71) e inversamente, mientras mayor sea  $\epsilon$  tendremos una aproximación más burda a la solución de (71).

## CAPITULO 4

### PROGRAMA DE COMPUTO

Listado del Programa que se utilizó para simular el comportamiento del acuitardo.

**\$DEBUG**

```

PROGRAM CONSOLIDACION
REAL*8 AN(50000)

OPEN(UNIT=1, FILE='HI. DAT' )
OPEN(UNIT=2, FILE='SIGMA. DAT' )
WRITE(*, *)'DAME NUMERO DE NODOS "N" Y NUMERO DE ITERACIONES "NI" '
READ(*, *)N, NI
n1=1
nZE=n1
nZH=nZE+n
nH=nZH+n
nHOE=nH+n
nHOM=nHOE+n
nHM=nHOM+n
nPOE=nHM+n
nPOH=nPOE+n
nPE=nPOH+n
nPH=nPE+n
nSIGMA=nPH+n
nSIGMAM=nSIGMA+n
nEE=nSIGMAM+n
nEM=nEE+n
nSS=nEM+n
nKJ=nSS+n
nA=nKJ+n
nB=nA+n
nC=nB+n
nD=nC+n
nF=nD+n
nALFA=nF+n
nBETA=nALFA+n
nY=nBETA+n
naux=nY+n
nSGE=naux+n*30
nSGEO=nSGE+n
nSGM=nSGEO+n
nSGMO=nSGM+n
nq=nSGMO+n
n1=nq+NI
CALL PASO(AN(nZE), AN(nZH), AN(nH), AN(nHOE), AN(nHOM), AN(nHM),
1 AN(nPOE), AN(nPOH), AN(nPE), AN(nPH), AN(nSIGMA), AN(nSIGMAM), AN(nEE),
2 AN(nEM), AN(nSS), AN(nKJ), AN(nA), AN(nB), AN(nC), AN(nD), AN(nF),
3 AN(nALFA), AN(nBETA), AN(nY), AN(naux), N, AN(nSGE), AN(nSGEO),
4 AN(nSGM), AN(nSGMO), AN(nq), NI)

```

C

Capítulo 4: Programa de cómputo

CLOSE(UNIT=1)

CLOSE(UNIT=2)

STOP

END

SUBROUTINE PASO(ZE, ZH, H, HOE, HOM, HM, POE, POM, PE, PH, SIGMA, SIGMAN,

1 EE, EM, SS, KJ, A, B, C, D, F, ALFA, BETA, Y, aux, N, SGE, SGE0, SGM, SGM0,  
2 Q, NI)

REAL\*8 ZE(N), ZH(N), H(N), HOE(N), HOM(N), HM(N), POE(N), POM(N)

REAL\*8 PE(N), PH(N), SIGMA(N), SIGMAN(N), EE(N), EM(N), SS(N), Y(N)

REAL\*8 KJ(N), A(N), B(N), C(N), D(N), F(N), h0, h1, ALFA(N), BETA(N), Q(NI)

REAL\*8 DELT, DELZ, PI, aux(n, 30), LAMDA, SGE(N), SGE0(N), SGM(N), SGM0(N)

C

DELT=7884000.0

LAMDA=5.9

DELZ=15.00/N

PI=3.1415900

C

C1----LEEMOS LA PIEZOMETRIA INICIAL HI y LA PRESION TOTAL SIGMA

DO I=1, N

READ(1, \*)H(I)

READ(2, \*)SIGMA(I)

ENDDO

READ(1, \*)h0, h1

C

C-----CALCULO DE CONSTANTES ZE, ZH, HOE, HOM, POE, POM, SIGMA

CALL CTES(ZE, ZH, H, HOE, HOM, POE, POM, SIGMA, SIGMAN, DELZ, N)

C

L=0

500 L=L+1

C2----CALCULAMOS SS EN LOS ENTEROS

CALL SSJS(PE, H, ZE, SIGMA, POE, EE, SS, N, LAMDA, L, SGE, SGE0)

C3----CALCULAMOS KJ EN LOS MEDIOS

CALL KJS(HM, H, PH, ZH, SIGMAN, POM, EM, KJ, N, LAMDA, L, SGM, SGM0)

C

IF(L.EQ.1.OR.L.EQ.2.OR.L.EQ.3.OR.L.EQ.4.OR.L.EQ.5)THEN

IF(L.EQ.1.OR.L.EQ.6.OR.L.EQ.32.OR.L.EQ.110.OR.L.EQ.800)THEN

11=11+1

do i=1, n

aux(i, 11)=h(i)

aux(i, 11+5)=sge(i)

aux(i, 11+10)=ee(i)

aux(i, 11+15)=kj(i)

aux(i, 11+20)=ss(i)

enddo

ENDIF

C

C4----CONSTRUIMOS LA MATRIZ DIAGONAL Y EL VECTOR DE LA DERECHA

CALL DIAGO(A, B, C, KJ, SS, DELZ, DELT, N, D, F, H, h0, h1)

C

C6----CALCULAMOS H EN EL TIEMPO (N+1) POR MEDIO DE ALG. DE THOMAS

CALL TRIDIA(A, B, C, H, F, BETA, ALFA, Y, N)

Capítulo 4: Programa de cómputo

```

C
C-----CALCULAMOS EL FLUJO EN LA PARTE INFERIOR DEL ACUITARDO
Q(L)=-KJ(1)*(HO-H(1))/DELZ
C7-----CONTINUAMOS CON EL SIGUIENTE PASO DE TIEMPO
IF(L.LT.NI)GOTO 500
C-----
      do i=n,1,-1
      write(*,3)(aux(1,j),j=6,25)
      enddo
      write(*,*)' '
      do i=1,n
      write(*,4)(aux(1,j),j=1.5)
      enddo
      write(*,*)' '
      do i=1,NI
      write(*,*)i,Q(i)
      enddo
3      format(20E9.3)
4      format(5E9.3)
C-----
C
      RETURN
      END

C-----ESTA SUBROUTINA CALCULA LOS VALORES DE LOS SIGUIENTES
PARAMETROS.
C-----"Z" EN LOS NODOS ENTEROS..... (ZE)
C-----"Z" EN LOS NODOS MEDIOS..... (ZM)
C-----"H" EN LOS NODOS ENTEROS AL TIEMPO T=0 ..... (HOE)
C-----"H" EN LOS NODOS MEDIOS AL TIEMPO T=0 ..... (HOM)
C-----"P" EN LOS NODOS ENTEROS AL TIEMPO T=0 ..... (POE)
C-----"P" EN LOS NODOS MEDIOS AL TIEMPO T=0 ..... (POM)
C-----"SIGMA" EN LOS NODOS MEDIOS AL TIEMPO T=0 ..... (SIGMAH)

      SUBROUTINE CTES(ZE, ZM, H, HOE, HOM, POE, POM, SIGMA, SIGMAH, DELZ, N)
      REAL*8 ZE(N), ZM(N), H(N), HOE(N), HOM(N), POE(N), POM(N)
      REAL*8 SIGMA(N), SIGMAH(N), ESP, RO, G, DELZ
      ESP=15.DO
      RO=1000.DO
      G= 9.8DO

C-----CALCULO DE "Z" EN LOS ENTEROS DESDE I=1,2,3,...,N-1
      DO 10 I=1,N
      ZE(I)=(I-(1.0/2.0))*DELZ
10      CONTINUE

C-----CALCULO DE "Z" EN LOS MEDIOS DESDE I=1,2,3,...,N-1
C-----ZH(1)=Z EN 3/2
      DO 20 I=1,N
      ZH(I)=I*DELZ
20      CONTINUE

```

C-----CALCULO DE "H" EN LOS ENTEROS AL TIEMPO T=0

```
DO 30 I=1,N
30 HOE(I)=H(I)
```

C-----CALCULO DE "H" EN LOS MEDIOS AL TIEMPO T=0

```
DO 40 I=1,N-1
40 HOM(I)=(H(I+1)+H(I))/2
```

C-----CALCULO DE "P" EN LOS ENTEROS AL TIEMPO T=0

```
DO 50 I=1,N
50 POE(I)=45000.0-(45000.0/15.0)*ZE(I)
```

C

C-----CALCULO DE "P" EN LOS MEDIOS AL TIEMPO T=0

```
DO 60 I=1,N-1
60 POM(I)=45000.0-(45000.0/15)*ZM(I)
```

C-----CALCULO DE "SIGMA" EN LOS MEDIOS

```
DO 70 I=1,N-1
70 SIGMAM(I)=(SIGMA(I+1)+SIGMA(I))/2
```

```
RETURN
END
```

SUBROUTINE SSJS(PE, H, ZE, SIGMA, POE, EE, SS, N, LAMDA, L, SGE, SGEO)

```
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
DIMENSION PE(N), H(N), ZE(N), SIGMA(N), POE(N), EE(N), SS(N)
REAL*8 LAMDA, SGE(N), SGEO(N)
```

C

```
RO=1000.DO
G=9.8DO
GAMA=RO*G
```

C-----CALCULO DE LAS PRESIONES EN LOS ENTEROS

```
DO 10 I=1,N-1
10 PE(I)=GAMA*H(I)+POE(I)
```

C-----CALCULO DE "e" y "Ss" EN LOS ENTEROS

```
IF(L.GT.1)GO TO 100
DO 30 I=1,N-1
SGE(I)=SIGMA(I)-PE(I)
IF(SGE(I).LT.15000.0)THEN
    EE(I)=10.0
    SS(I)=0.015
ELSE
    EE(I)=9.1+(156.0/725.0)*ZE(I)
    SS(I)=0.12+(26.0/3625.0)*ZE(I)
```

ENDIF

```
30 CONTINUE
```

```
RETURN
```

```
100 DO 40 I=1,N-1
SGEO(I)=SGE(I)
```

Capítulo 4: Programa de cómputo

```

SGE(I)=SIGMA(I)-PE(I)
IF(SGE(I).LT.15000.0)THEN
  EE(I)=10.0
  SS(I)=0.015
ELSE
  VAR1=(1.0+EE(I))*(SGE(I)-SGE0(I))
  EE(I)=EE(I)-LAMDA*LOG10(SGE(I)/SGE0(I))
  SS(I)=(GAMA*LAMDA*LOG10(2-(SGE0(I)/SGE(I))))/VAR1
ENDIF
40 CONTINUE
C-----SSJ(J) CONTIENE LOS VALORES DE LOS COEFICIENTES BUSCADOS
C
  RETURN
END

SUBROUTINE KJS(HM, H, PH, ZM, SIGMAH, POM, EM, KJ, N, LAMDA, L, SGM, SGM0)
  IMPLICIT REAL*8 (A-H, O-Z)
  REAL*8 LAMDA, KJ
  DIMENSION HM(N), H(N), PM(N), ZM(N), SIGMAH(N), POM(N), EM(N), KJ(N)
  DIMENSION SGM(N), SGM0(N)
  INTEGER E

C
  E=N
  RO=1000.00
  G=9.800
  GAMA=RO*G

C
C-----CALCULAMOS H y SIGMA EN LOS MEDIOS
  DO 10 I=1, N-1
10  HM(I)=(H(I+1)+H(I))/2

C
C-----CALCULAMOS LAS PRESIONES EN LOS MEDIOS
  DO 20 I=1, N-1
20  PM(I)=GAMA*HM(I)+POM(I)

C
C-----AHORA CALCULAMOS LAS E's EN LOS MEDIOS y KJ(I)
  IF(L.GT.1)GO TO 100
  DO 30 I=1, N-1
  SGM(I)=(SIGMAH(I)-PM(I))
  IF(SGM(I).LT.15000.0)THEY
    EM(I)=10.0
    KJ(I)=5.0E-9
  ELSE
    EM(I)=9.1+(156.0/725.0)*ZM(I)
    KJ(I)=(2.3+(468.0/725.0)*ZM(I))*(1.0E-9)
  ENDIF
30  CONTINUE
  RETURN
100 DO 40 I=1, N-1
  SGM0(I)=SGM(I)
  SGM(I)=(SIGMAH(I)-PM(I))
  IF(SGM(I).LT.15000.0)THEN

```

```

      EM(I)=10.0
      KJ(I)=5.0E-9
      ELSE
        EMO=EM(I)
        EM(I)=EM(I)-LAMDA*LOG10(SGH(I)/SGMO(I))
        s1=(EM(I)-EMO)/2.5
        KJ(I)=KJ(I)*(10**s1)
      ENDIF
40  CONTINUE
C-----ESTE ULTIMO CALCULO CONTIENE LAS KJ'S EN LOS MEDIOS
C
      RETURN
      END

SUBROUTINE DIAGO(A, B, C, KJ, SS, DELZ, DELT, N, D, F, H, h0, h1)
      REAL*8 A(N), B(N), C(N), KJ(N), SS(N), D(N), F(N), H(N), h0, h1
      REAL*8 DELZ, DELT

C
C
C-----EMPEZAMOS CON LA DIAGONAL A, A(J), J=2, E
      A(1)=0.0
      A(N)=1./4.
      DO 10 J=1, N-2
10  A(J+1)=KJ(J)
C
C-----SEGUIMOS CON LA DIAGONAL B, B(J), J=1, E
      B(1)=3./4.
      B(N)=3./4.
      DO 20 J=1, N-2
20  B(J+1)=-((KJ(J)+KJ(J+1))+((DELZ**2)/DELT)*SS(J+1))
C
C-----CONTINUAMOS CON LA DIAGONAL C, C(J), J=1, E-1
      C(1)=-1./4.
      DO 30 J=2, N-1
30  C(J)=KJ(J)
C
C-----FINALIZAMOS CON LA COLUMNA D, D(J), J=1, E
      DO 40 J=2, N-1
40  D(J)=-((DELZ**2)*SS(J))/DELT
C5-----CALCULAMOS EL VECTOR F (VECTOR DE LA DERECHA)
      F(1)=(0.5)*h0
      F(N)=(0.5)*h1
      DO 250 J=2, N-1
250 F(J)=D(J)*H(J)
C6-----CON ESTO HEMOS CONSTRUIDO LAS DIAGONALES
C-----A(J), J=2, N-1
C-----B(J), J=1, N
C-----C(J), J=1, N-1
C-----F(J), J=1, N
      RETURN
      END

```

```

SUBROUTINE TRIDIA(A,B,C,H,F,BETA,ALFA,Y,N)
REAL*8 A(N),B(N),C(N),H(N),F(N),BETA(N),ALFA(N),Y(N)
C
C-----EMPEZAMOS EL CALCULO DE PARAMETROS
BETA(1) = C(1)/B(1)
Y(1) = F(1)/B(1)
DO 200 I = 2,N
  alfa(i)=b(i)-a(i)*beta(i-1)
  beta(i)=c(i)/alfa(i)
200  y(i)=(f(i)-a(i)*y(i-1))/alfa(i)
C EMPEZAMOS LA SUSTITUCION HACIA ATRAS APARTIR DEL ULTIMO RENGLON
h(n)=y(n)
DO 210 I=n-1,1,-1
  210  h(i)=y(i)-beta(i)*h(i+1)

RETURN
END
    
```

#### PROCESO DE SIMULACION

Las condiciones iniciales que se tomarán en la simulación son las siguientes fig. 5

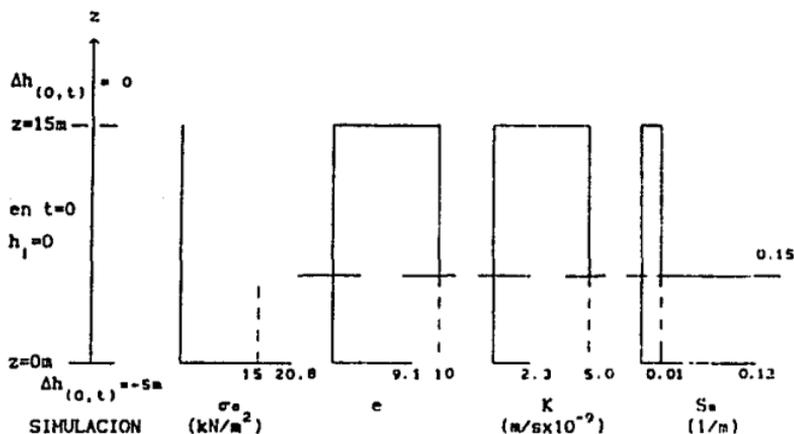


Fig.6 Condiciones iniciales para la simulación.

La conductividad hidráulica estará expresada por:

$$K^{t+1} = K^t \left[ 10^{\left( \frac{e^{t+1} - e^t}{2.5} \right)} \right]$$

Utilizaremos una aproximación para el almacenamiento específico, que originalmente tiene la forma

$$S_e = \frac{\rho g}{(1+e)^2} \frac{\lambda}{\sigma_e}$$

Haremos las aproximaciones siguientes

$$\frac{1}{\sigma_e} = \frac{d \log(\sigma_e)}{d\sigma_e} \approx \frac{\log(\sigma_e) - \log(\sigma_{e0})}{\sigma_e - \sigma_{e0}} = \frac{\log(\sigma_e/\sigma_{e0})}{\sigma_e - \sigma_{e0}}$$

$$\frac{\lambda}{(1+e)} \approx \text{cte} = C_c$$

Con estas aproximaciones el Almacenamiento Específico queda expresado de la siguiente manera

$$S_e = \frac{\rho g}{(1+e)} C_c \left[ \frac{\log \left( \frac{\sigma_e + \Delta\sigma_e}{\sigma_e} \right)}{\Delta\sigma_e} \right]$$

El valor de la constante  $C_c$  se tomará como 5.9.

Utilizaremos un intervalo espacial de  $\Delta z = (15/100)$ mts y un intervalo temporal  $\Delta t = 7884000$  seg, que es equivalente a noventa días.

#### EXPLICACION DEL FUNCIONAMIENTO DEL PROGRAMA DE COMPUTO.

Este Programa está escrito en el Lenguaje de Programación FORTRAN 77 El Programa Principal, llamado CONSOLIDACION, es un programa interactivo que en su primera parte solicita los datos necesarios para poder hacer una simulación del comportamiento del acuífero

#### Capítulo 4: Programa de cómputo

cuando un flujo de agua se mueve através de él.

Los datos solicitados por el programa son:

El número de nodos "N" en que se va a dividir el acuitardo.

El número de iteraciones en el tiempo "NF", que se va a realizar.

El valor del intervalo de tiempo que se va a utilizar en esta simulación, es de tres meses y está dado en segundos, variable "DELTA". El periodo de tiempo a simularse es de 200 años y el espesor del acuitardo es de 15 mts.

Dados estos datos se determina el espacio necesario requerido por cada una de las variables utilizadas en el programa, y se asignan en un vector unidimensional que puede tener como máximo 30 000 entradas.

Una vez hecho esto, se llama a la subrutina PASO, que tiene como objetivo el de hacer iteraciones en el tiempo, variable "L", y llamar a otras subrutinas con el fin de calcular lo siguiente.

Constantes utilizadas en el programa.

Dar la piezometría inicial que se va a utilizar en cada nodo.

Dar la presión total con que se trabajará en cada nodo.

Hacer el cálculo del Almacenamiento Específico en cada nodo.

Hacer el cálculo de la Conductividad Hidráulica en los nodos llamados "medios".

Construir las entradas de la matriz tridiagonal.

Resolver la matriz tridiagonal por medio del Algoritmo de Thomas.

Calcular el Flujo de agua en la frontera inferior del acuitardo.

Escribir en pantalla los valores de piezometría, presión efectiva, relación de vacíos, conductividad hidráulica y almacenamiento específico para los intervalos de tiempo 1.5 años, 8 años, 27 años, y 200 años.

Con el fin de que el programa sea un poco mas explicito daremos una descripción de cada una de las subrutinas que lo componen.

#### Capítulo 4: Programa de cómputo

##### Subrutina CTES.

Esta subrutina calcula los valores de "z" que corresponden con los nodos "enteros", 1,2,3,...,E y los almacena en la variable ZE(N).

Calcula los valores de "z" que corresponden con los nodos "medios", 3/2, 5/2, ...,  $z+1/2$  y los almacena en la variable ZH(N).

Asigna los valores iniciales de h en los nodos "enteros", en la variable HOF(N).

Calcula através de un promedio, los valores iniciales de h en los nodos "medios" y los asigna a la variable HOM(N).

Calcula los valores de la presión de poro en los nodos "enteros" al tiempo T=0, y los asigna en la variable POE(N).

Calcula los valores de la presión de poro en los nodos "medios" al tiempo T=0, y los asigna en la variable POM(N).

Calcula los valores de la presión total SIGMA en los nodos "medios" y los asigna en la variable SIGHAM(N).

##### Subrutina SSJS.

Se calcula la presión de poro inicial en los enteros "enteros" y se asigna en la variable PE(N).

Se calcula la presión efectiva inicial en los en los nodos "enteros" y se asigna en la variable SGE(N).

También se calculan valores iniciales de la relación de vacíos "e" y almacenamiento específico "Ss", considerando que si la presión efectiva es menor de 15000, la relación de vacíos y el almacenamiento específico tienen un valor de 10.0 y 0.015 respectivamente, y en caso contrario, la relación de vación es una recta con pendiente (156/725) y ordenada al origen 9.1, y el almacenamiento específico es también una recta con pendiente (26/3625) y ordenada al origen 0.12.

Los valores de presión efectiva, relación de vacíos y almacenamiento específico para tiempos posteriores se calculan de la siguiente manera.

La presión efectiva se obtiene como una diferencia entre la presión total y la presión de poro.

La relación de vacíos tiene un valor de 10.0 si la presión efectiva

es menor de 15000, y en caso contrario se aplica la relación

$$e^{t+1} = e^t - \lambda \log \left[ \frac{\sigma_e}{\sigma_{e_0}} \right] \quad \text{y se asigna en la variable EE(N)}$$

donde  $\lambda$  es el índice de compresión,  $\sigma_e$  es la presión efectiva en el tiempo  $n+1$  y  $\sigma_{e_0}$  es la presión efectiva en el tiempo  $t$

El almacenamiento específico tiene un valor de 0.015 si la presión efectiva es menor de 15000, y en caso contrario se obtiene através de la relación

$$S_s = \frac{\gamma \lambda \log \left[ 2 - \frac{\sigma_e}{\sigma_n} \right]}{(1+e)(\sigma_e - \sigma_{e_0})}$$

donde  $\gamma$  es el resultado del producto de la densidad del agua por la aceleración de la gravedad  $\gamma = \rho g$ .

Subrutina KJS.

Calcula los valores del nivel piezométrico  $h$  y presiones de poro en los nodos llamados "medios" para tiempos posteriores al inicial y se asignan en las variables HM(N) y PM(N) respectivamente.

Enseguida calcula los valores de la presión efectiva, relación de vacíos y conductividad hidráulica en los nodos "medios" de acuerdo a lo siguiente.

La presión en el primer intervalo de tiempo se obtiene de una diferencia entre la presión total y la presión de poro. Si la presión efectiva en el primer intervalo de tiempo en los nodos "medios" es menor de 15000, la relación de vacíos y la conductividad hidráulica al primer intervalo de tiempo tienen un valor constante de 10.0 y  $5.0 \times 10^{-9}$  respectivamente. En caso contrario, la relación de vacíos es una recta con pendiente (156/725) y ordenada al origen 9.1, y la conductividad hidráulica es una recta con pendiente  $(468/725) \times 10^{-9}$  y ordenada al origen  $2.3 \times 10^{-9}$ .

#### Capítulo 4: Programa de cómputo

Para tiempos posteriores la presión efectiva se sigue obteniendo como una diferencia entre la presión total y la presión de poro. Si la presión efectiva es menor de 15000 la relación de vacíos y la conductividad hidráulica tienen un valor de 10.0 y  $5.0 \times 10^{-9}$  respectivamente y en caso contrario, la relación de vacíos está dada por la relación

$$e^{t+1} = e^t - \lambda \log(\sigma_e / \sigma_{e0})$$

y se asigna en la variable EM(N).

donde  $\sigma_e$  es el valor de la presión efectiva al tiempo  $t+1$  y  $\sigma_{e0}$  es el valor de la presión efectiva al tiempo  $t$ .

La conductividad hidráulica en el caso de que la presión efectiva fuese mayor de 15000 se obtiene de la expresión.

$$K^{t+1} = K^t \left[ 10^{(e^{t+1} - e^t) / 2.5} \right]$$

y se asigna en la variable KJ(N)

#### Subrutina DIAGO.

Esta subrutina calcula los valores de las entradas de la matriz tridiagonal basandose en los resultados obtenidos del Almacenamiento Especifico y Conductividad Hidráulica.

Nombraremos las diagonales de la matriz tridiagonal de la siguiente manera. La diagonal principal estará constituida por el vector B, la diagonal abajo de la principal estará constituida por el vector A y la diagonal arriba de la principal estará constituida por el vector C y los coeficientes del vector de la derecha lo constituyen los valores del vector D de acuerdo a lo siguiente

Capítulo 4: Programa de cómputo

$$\left[ \begin{array}{l}
 B_1 = \frac{3}{4} \quad , \quad C_1 = -\frac{1}{4} \\
 A_j = K_{j-1/2} \quad \text{para } j = 2, 3, \dots, E-1 \\
 B_j = - \left[ K_{j+1/2} + K_{j-1/2} + Ss_j \frac{(\Delta z)^2}{\Delta t} \right] \quad \text{para } j = 2, 3, \dots, E-1 \\
 C_j = K_{j+1/2} \quad \text{para } j = 2, 3, \dots, E-1 \\
 A_E = -\frac{1}{4} \quad , \quad B_E = \frac{3}{4} \\
 D_j = -Ss_j \frac{(\Delta z)^2}{\Delta t} \quad \quad j = 2, 3, \dots, E-1 \\
 D_1 = \frac{1}{2} \quad , \quad D_E = \frac{1}{2}
 \end{array} \right.$$

Subrutina TRIDIA

Esta subrutina tiene como objetivo la resolución de una matriz tridiagonal usando para ello el algoritmo de THOMAS. Los valores del vector solución quedan en la variable H(N).

## CAPITULO 5

### RESULTADOS Y CONCLUSIONES

El análisis del comportamiento del acuitardo que se ha realizado en este trabajo, indica la forma en que pueden cambiar las propiedades hidráulicas de los estratos que constituyen el acuitardo. Cuando estos tipos de sedimentos se someten a una despresurización por bombeo en el acuífero inferior, se puede dar el fenómeno de compactación como resultado del proceso de consolidación. La compactación puede alterar significativamente las propiedades físicas del acuitardo y causar cambios bruscos en los parámetros  $K$  y  $S_s$ , trayendo como consecuencia que la recarga en un sistema como el acuífero se vea disminuida.

El análisis numérico realizado aquí indica que  $K$  y  $S_s$  decrecen progresivamente conforme decrece la presión de poro, pero los cambios más significativos en estos parámetros ocurren cuando la presión efectiva es mayor que  $15000 \text{ N/m}^2$  que es el punto en donde comienza el comportamiento no lineal.

Se ha desarrollado un programa de cómputo con el fin de poder simular el comportamiento del acuitardo en lo que se refiere a flujo de agua en la frontera inferior, y las variaciones en los parámetros físicos que lo describen como son: nivel piezométrico, relación de vacíos, presión efectiva, conductividad hidráulica y almacenamiento específico. Este programa será incorporado como una subrutina en el modelo tridimensional de la Cuenca de México, en la parte de simulación del comportamiento del acuitardo que tiene la misma Cuenca y en cuya elaboración del modelo se trabaja en el Instituto de Geofísica.

Una de las principales implicaciones que se puede ver en este trabajo es que los recursos potenciales del acuífero disminuyen

## Capítulo 5: Resultados y conclusiones

cuando se presenta el fenómeno de consolidación, dado que la capacidad del acuitardo para transmitir agua hacia el acuífero bombeado decrece en forma progresiva. Este hecho resulta muy importante para la evaluación del comportamiento del acuífero a largo plazo, dado que si este no recibe una recarga sustancial eventualmente se agotará.

Otra implicación importante que se deriva de este análisis es que, dado que la relación de vacíos disminuye a medida que aumenta la presión efectiva, cualquier infraestructura que se localice en el acuitardo puede resultar dañada debido a que los esfuerzos cambian de una manera no uniforme, y se puede presentar infiltración de sedimentos en el caso de drenaje, fracturas en el caso de redes de distribución y hundimientos de manera no uniforme en el caso de obras civiles.

Los resultados en los que se basan estas conclusiones y recomendaciones se muestran a continuación en las figuras 7 a la 12.

## NIVEL PIEZOMETRICO

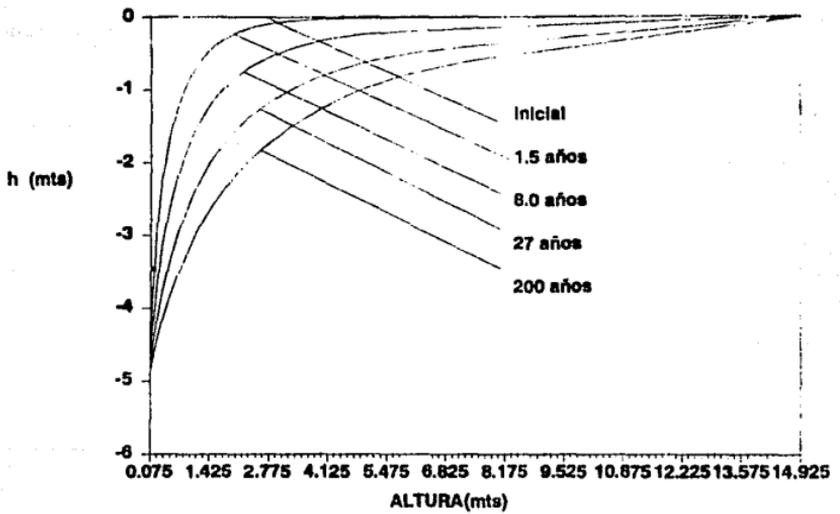


Fig. 7 Distribución para el nivel piezométrico en función del tiempo.

## PRESION EFECTIVA

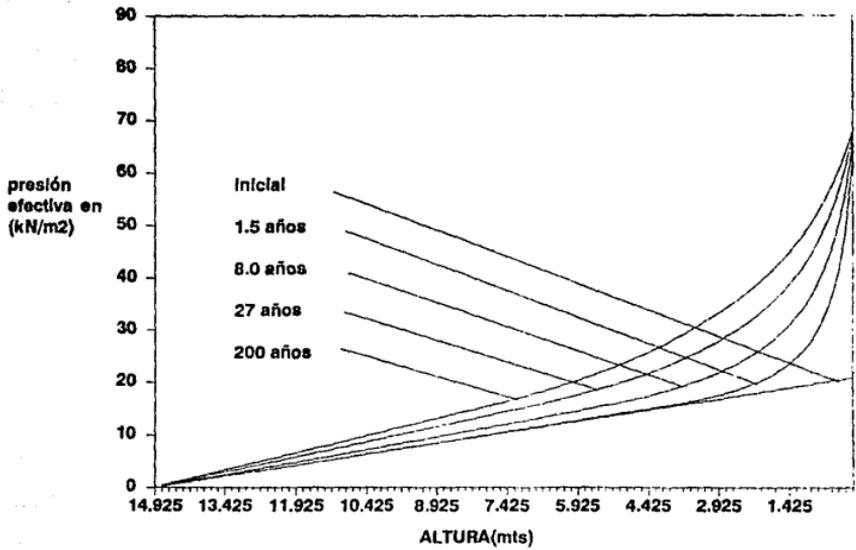


Fig. 8 Variación de la presión efectiva en función del tiempo.

## RELACION DE VACIOS

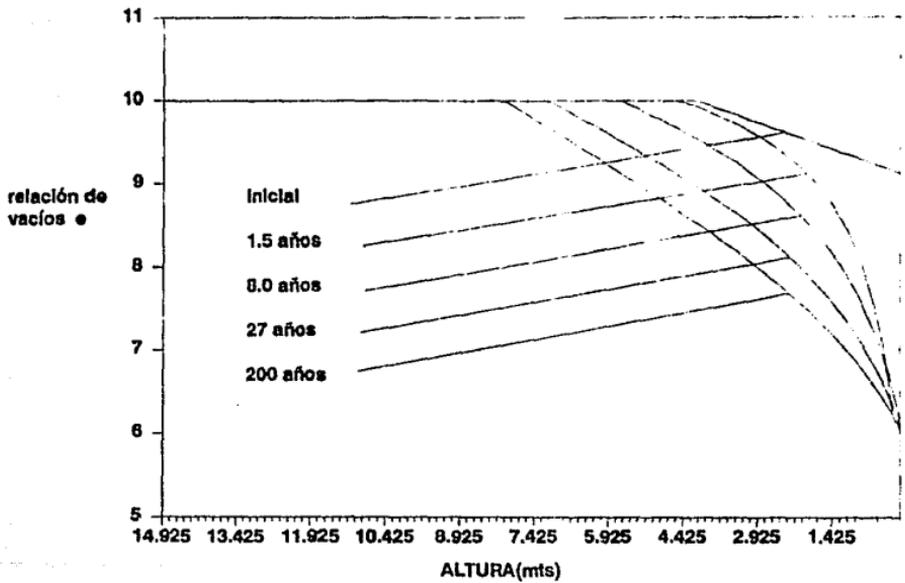


Fig. 9 Distribución para la relación de vacíos en función del tiempo.

## CONDUCTIVIDAD HIDRAULICA

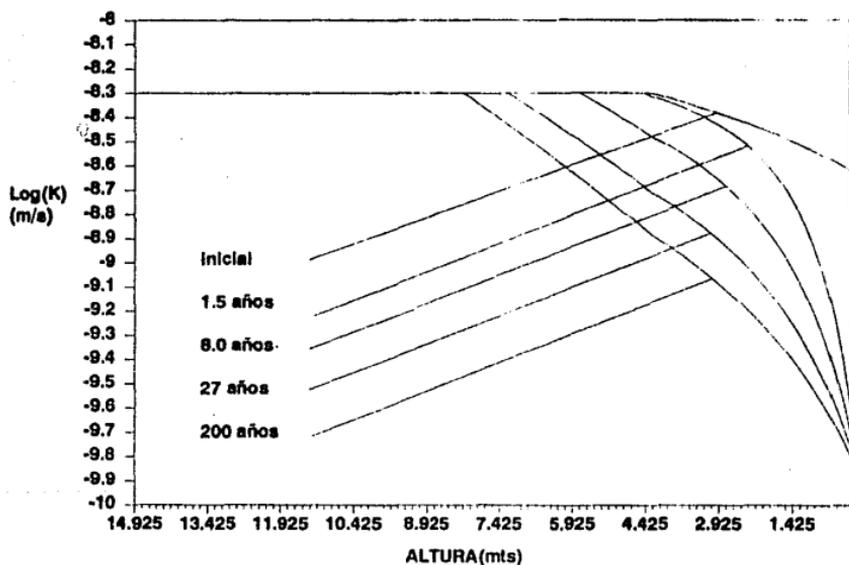


Fig. 10 Variación de la conductividad hidráulica con el tiempo.

## ALMACENAMIENTO ESPECIFICO

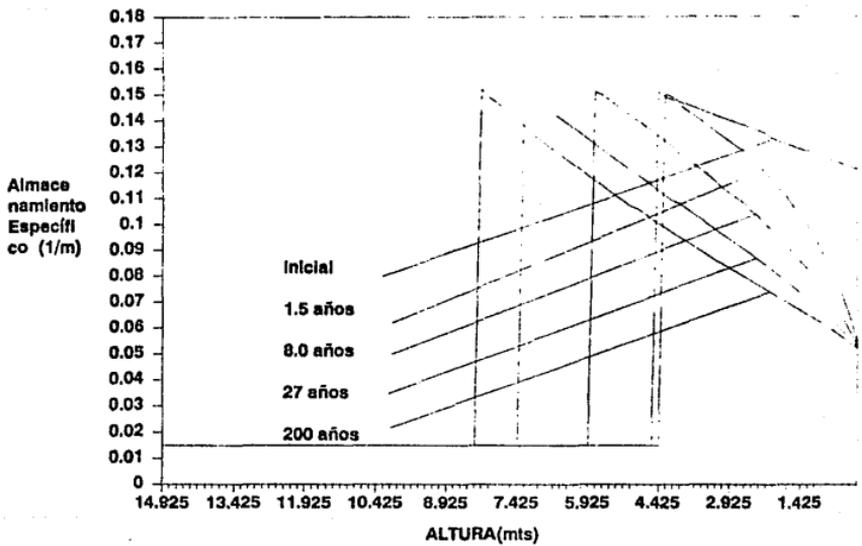


Fig. 11 Distribución del almacenamiento específico en el tiempo.

## FLUJO EN EL ACUITARDO EN Z=0

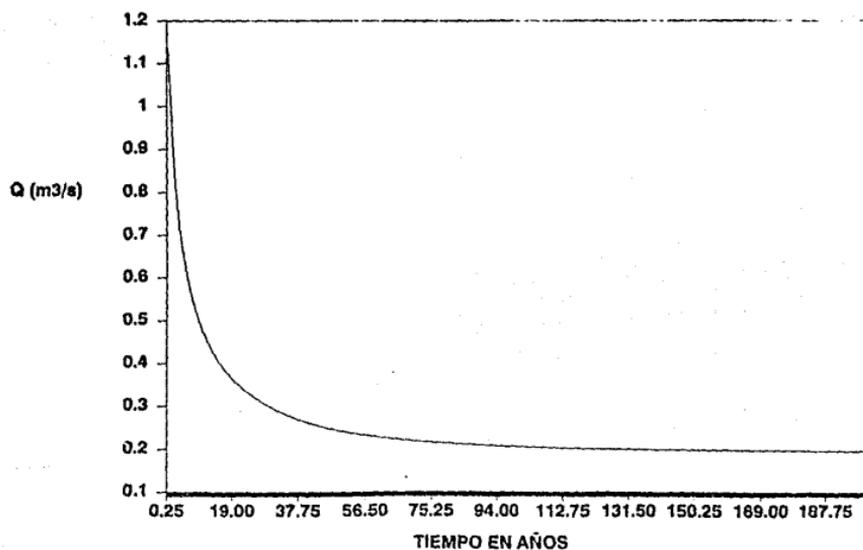


Fig. 12 Flujo en la frontera inferior como función del tiempo.

## REFERENCIAS

Enzo Levi 1977

Elementos de Mecánica del Medio Continuo

E. Juárez Badillo 1987.

Mechanical Characterization of México City Clay.

International Symposium in Geotechnical Engineering of soft Soils,  
México D. F., 1987, pp 65 - 69.

E. Juárez Badillo 1983.

General Permeability Change Equation for Soils

International Conference in Constitutive Laws for Engineering  
Materials, University of Arizona, Tucson 1983 pp 205 - 209

Freeze R. A. and J. A. Cherry, *Groundwater*, 604pp., Prentice-Hall,  
Englewood Cliffs, N. J., 1979.

Herbert F. Wang and Mary P. Anderson 1981

Introduction to Groundwater Modeling

Hantush, M. S., y C. E. Jacob, Nonsteady Green's functions for an  
infinite strip of leaky aquifer, *Eos Trans. AGU*, 36(1), 101-112,  
1955.

Hantush, M. S., y C. E. Jacob Non-steady Radial Flow in an  
infinite leaky aquifer, *Eos Trans. AGU*, 36(1), 95-100, 1955.

K. H. Roscoe and J. B. Burland 1968

On the Generalized Stress-Strain Behaviour of "wet" clay

## **Referencias**

**I. Herrera 1976**

**Ecuaciones Constitutivas de los Suelos  
Instituto de Ingeniería, UNAM, 370, 1976.**

**I. Herrera y M. Allen 1986**

**Modelación Computacional de Sistemas en Ciencias e Ingeniería  
Instituto de Geofísica, UNAM 1986.**

**Lambe T. W., y R. V. Whitman, Soil Mechanics, John Wiley, New  
York, 1969.**

**L. Chargoy y I. Herrera 1987**

**Modelación Macroscópica Aplicada a Sistemas Geohidrológicos.  
Instituto de Geofísica, UNAM 1987.**

**Myron B. Allen III, Ismaél Herrera, George F. Pinder 1988**

**Numerical Modeling in Science and Engineering**

**Peter S. Huyakorn and George F. Pinder 1983**

**Computational Methods in Subsurface Flow**