UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

FACULTAD DE INGENIERIA

DEPFI

TEORIA DE CARTERA, APLICADA A LA SELECCION DE BONOS

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

MAESTRIA EN INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

PRESENTA:

MARTIN ROMERO CASTILLO

Mexico, D.F. Octubre 1991

CONTENIDO

RESUMEN

El objetivo de este trabajo es estudiar el problema de seleccion de cartera dado un conjunto de activos financieros, tales como acciones, valores, bonos, cetes etc.. En particular, nos enfocaremos al estudio de la seleccion de la cartera de bonos, tomando en cuenta el rendimiento y el riesgo de estos instrumentos de inversion. Para el logro de este objetivo se reunio la informacion existente en la literatura (vease la bibliografia presentada al final de este trabajo), obteniendose un resumen en donde se describen los conceptos basicos, asi como el desarrollo y solucion al problema de cartera aplicada a la seleccion de bonos.

En la actualidad, existe un gran incremento en los modelos usados para resolver el problema de cartera. Esto se debe al avance de la teconologia de computacion y la investigacion en tecnicas de modelacion cada vez mas apegadas a situaciones problematicas del mundo real, permitiendo con ello un mayor desarrollo de las tecnicas en la Investigacion de Operaciones.

En este trabajo se discuten los principios basicos relacionados con el problema de seleccion de cartera. La cartera esta formada por un conjunto de activos, los cuales pueden ser activos reales como un carro y una casa, o activos financieros como valores y bonos. En particular, se analizan algunos modelos para la seleccion de cartera utilizando criterios deterministicos y de riesgo para activos financieros. Asi mismo, se presenta el modelo de Markowitz que estudia el problema de "cartera eficiente", usando los elementos de la media y la varianza. Por otro lado, se introducen los conceptos de las tasas de interes y los precios de bonos, los que son fundamentales para el estudio de la seleccion de carteras de bonos. Se desarrollan y solucionan dos modelos, uno de Programacion Lineal (PL) y otro de Programacion por Metas (PM) que ya han sido propuestos; y finalmente se prueban con un ejemplo de aplicacion. Estos dos modelos son lineales, por lo que se resuelven con un paquete de Programacion Lineal (Lindo).

INTRODUCCION

El proposito de este trabajo es estudiar el problema de cartera enfocado a la seleccion de bonos, tomando en cuenta el rendimiento y el riesgo de estos activos. Para lograr este objetivo se presentan los siguientes conceptos básicos.

Una inversión es la dedicación de los principales recursos de una empresa con la esperanza de obtener beneficios durante un periodo largo en el futuro. Ejemplo de estas son: inversiones de capital, expansion o contracción de una empresa, compra o venta de instrumentos financieros, en investigacion y desarrollo, publicidad, etc.

En cada una de las situaciones anteriores, el principal factor del problema de inversion es la toma de decisiones adecuada para la asignacion de los principales recursos, de tal forma de poder obtener el mayor rendimiento o beneficio a mediano o a largo plazo.

En la actualidad, el uso de tecnicas matemáticas permiten que el inversionista cuente con tecnicas seguras para obtener un beneficio dado un cierto riesgo que puede ser considerado en terminos matematicos, y con ello se garantiza un mayor rendimiento en sus negocios.

Una herramienta importante en la toma de decisiones para el problema de inversion es la Investigación de Operaciones. Los primeros intentos que se conocen de modelos provienen de 1959, cuando A. Charnes, W. W. Cooper y M. H. Miller utilizaron la programacion lineal aplicada a la determinación del costo de oportunidad y racionamiento de capital de una empresa. Análogamente, H. Martín Weingartner en 1963, propuso y resolvió dos modelos para la solucion del problema. El primer modelo es de Programacion Lineal y el otro de Programacion Entera[15].

En 1952, Harry Markowitz publicó su artículo "Seleccion de Carteras", donde propone y resuelve un problema de cartera (portafolio) de inversión, que incluye de manera explicita las características de riesgo de los instrumentos en consideración[9]. Por su importancia y contribucion al área de la Economía y al mercado de las Finanzas, Markowitz recibió el Premio Nobel en Economía en 1990.

En 1963, Chambers y Charnes aplican la cartera de inversión a un banco privado, introduciendo las características dinámicas que operan en dicho manejo de activos, las restricciones legales a que está sometido un banco privado y la incorporación de criterios de seguridad proporcionados por la Reserva Federal[6].

En la actualidad hay una gran proliferación de estos modelos. Ello se debe al avance de la tecnología de la computación, con que es posible elaborar modelos cada vez más ajustados a la realidad y adaptados al caso particular que requiere la empresa[3].

En el primer capitulo se discutirán los principios básicos relacionados con el problema de cartera. Se presenta un análisis del problema de cartera determinista (con certeza), dejando el caso de incertidumbre para los siguientes capitulos.

La segunda parte, introduce el concepto de bonos (obligaciones). La motivacion, es que los bonos son más faciles de valorar que un activo, ya que la emisoras ya han acordado un cierto pago corriente (cupones y principal) y el bono tiene una vida maxima (vencimiento). Además, el manejo de estos conceptos son fundamentales para comprender el manejo de la cartera de bonos a tratarse en los dos ultimos capitulos.

En el tercer capitulo se muestran dos modelos para la solución del problema de cartera, primero el modelo de H. Markowitz, y segundo los modelos de cartera aplicados a la selección de bonos.

En el último capitulo proponemos y solucionamos una aplicación, utilizando los dos modelos de carteras de bonos presentados en el capitulo 3, y se da un análisis de los resultados obtenidos, concluyendo que en ambos modelos se llega al mismo resultado.

CAPITULO 1

TEORIA DE CARTERA

1.1 INTRODUCCION

Una cartera es un conjunto formado por alternativas de inversiòn, que en un momento dado del tiempo, tiene un inversionista la oportunidad para asignar una cantidad especìfica de efectivo a cada una de ellas, con el fin de obtener un beneficio en un futuro pròximo.

A principios de la dècada de los años cincuenta y fines de los sesenta aparecen las primeras tècnicas para resolver el problema de cartera. La primera fuè iniciada por Harry M. Markowitz[*] en 1952, èsta se refiere a la cartera de una empresa que puede incluir instrumentos del mercado de valores y toma en cuenta en forma explìcita las caracterìsticas de riesgo de dichos valores. El trabajo de Markowitz representò uno de los mayores avances en la teorìa moderna financiera. Debido a esto, se le llama a Markowitz el padre de la Teorìa de Cartera.

En la actualidad hay una gran proliferaciòn de modelos. Esto se debe al avanze de la computaciòn y la investigacion en tècnicas de modelaciòn, haciendo posible hacer modelos cada vez màs apegados a la realidad y adaptados al caso particular que requiere la empresa.

En este capìtulo discutiremos los principios bàsicos del problema de cartera. Asì mismo, se establece el problema de cartera para los casos determinìstico y con incertidumbre. Posteriormente, se trata el problema de cartera determinìsta donde se analizan los elementos comunes al problema. Dejando el tratamiento con incertidumbre para los pròximos capìtulos.

[*] Harry M. Markovitz nacio en Chicago (USA) en 1927. El es Profesor Distinguido de Finanzas y Economia del Colegio de Baruc, Universidad de la Ciudad de Nueva York. El fue presidente de la Asociacion de Finanzas Americanas en 1982.

1.2 EL PROBLEMA DE CARTERA

El problema de cartera de inversion se presenta cuando se desea formar una cartera con instrumentos del mercado de valores y la información que se tiene de los rendimientos de los instrumentos es probabilística.

Para resolver el problema de selección de cartera se tienen los siguientes supuestos:

a) Los criterios de seleccion que dan origen a funciones de preferencias son económicos y son de tipo racional, lo que permite una caracterización matematica explícita.

b) El inversionista esta limitado en sus posibilidades de eleccion por restricciones que se pueden representar matematicamente.

c) El problema de cartera es un problema de optimización que se puede formular matemáticamente en forma explícita, y para el cual existen tecnicas de solución eficientes.

Debido a su naturaleza probabilística el problema de selección de cartera no está exenta de incertidumbre a pesar de su caracter económico y practico. La incertidumbre puede deberse a apreciaciones subjetivas (gustos, intuición, etc.); una segunda fuente proviene del medio dentro del cual se debe realizar la elección, debido a que en él operan gran cantidad de fuerzas fuera de control del sujeto que debe hacer la elección. Así, las fluctuaciones en las tasas de interés y precios de activos es una fuente de incertidumbre que obligan a una diversificación de la cartera. Ademas, la incertidumbre presenta problemas de riesgo en una inversión creando problemas tecnicamente difíciles de resolver.

El problema de seleccion de cartera es un problema de incertidumbre. Sin embargo, el problema de selección de cartera se puede resolver en forma determinista, esto es, con supuesto de certeza, si se plantea el problema de seleccion de cartera como un problema de optimización. Es decir, se pueden tomar en forma explícita todos los elementos que intervienen en el problema de selección de cartera, pero suponiendo que se saben con certeza.

El Problema de Cartera Determinista[illegible]

En esta seccion analizaremos el problema de seleccion de cartera con el supuesto de certeza. Es decir, se tomaran en cuenta en forma explicita todos los elementos que intervienen en el problema, pero suponiendo que se saben con certeza.

Para el estudio de la cartera utilizaremos un modelo dinamico que toma en cuenta, tanto las condiciones presentes como el futuro en oportunidades de inversion que se pudieran presentar, como en restricciones que pudieran cambiar respecto al presente. Los modelos dinamicos deciden acerca de la mejor inversion en el periodo presente y plantean relaciones para varios periodos en el futuro.

Ademas, suponemos que el numero de periodos hacia el futuro que pueden ser relevantes para determinar la composicion optima de la cartera actual es finito. Asi, se tendran modelos dinamicos, que con el supuesto de certeza proporcionaran la cartera optima en cada periodo que se considere. Sin embargo, debido a que el futuro es incierto, la unica solucion que es util para tomar una decision es la del primer periodo, ya que es la unica que requiere una decision inmediata. Ademas, esta es una de las caracteristicas deseables del modelo, ya que refleja el hecho de que no hay que tomar hoy compromisos para inversiones en el futuro.

Los elementos principales del modelo se refieren al tipo de restricciones que en el modelo operan, junto con los criterios de decision que se utilizan. Para el modelo deterministico se utiliza alguno de rendimiento esperado. Asi, se puede pensar en maximizar alguno o varios de los siguientes criterios:

i) El rendimiento total esperado de cartera durante el horizonte de planeacion.

ii) El rendimiento esperado de cartera en algun periodo especifico (el primero, el ultimo, etc).

iii) El valor presente del rendimiento total esperado de cartera en el horizonte de planeacion.

1.3.a Un Modelo de Programacion Lineal Determinista

1.3.a Un Modelo de Programacion Lineal Determinista

En este modelo se tienen sólo restricciones de liquidez aparte de las restricciones que surgen en el modelo. Se supone además, que debido a que hay certidumbre total acerca del requisito de liquidez en cada periodo, y los rendimientos que proporciona cada instrumento es imposible vender un activo de inversión antes de su vencimiento. Además, el numero I de activos con los que es posible formar la cartera es finito, así como los plazos J a que se puede comprar cada uno de ellos. Por último, se supone que el plazo máximo J a que se puede invertir es cuando mucho igual al total de periodos T que se considera en el horizonte de planeacion, es decir $J \leq T$.

Para construir el modelo se definen las siguientes variables

X_{ijt} = la cantidad de dinero que se invierte en el activo i a plazo j durante el periodo t.
$i=1,2,\ldots,I$; $j=1,2,\ldots,J$; $t=1,2,\ldots,T$

r_{ijt} = el rendimiento que produce el activo tipo i, a plazo j, comprado en el periodo t.

L_t° = el requisito bruto de liquidez para el periodo t.

P_t = presupuesto de inversión para el periodo t.

Para los datos de inicio del modelo se conoce la composición de la cartera y el presupuesto que se tiene para el periodo inicial $t = 0$. De esta manera, tenemos:

X_{ijt}° = La inversión actual en activos de tipo i a plazo j comprados comprados en un periodo anterior t, pero que vencen dentro del horizonte de planeación.
$i=1,2,\ldots,I$; $j=1,2,\ldots,J$; $t=0,-1,-2,\ldots$

P_1 = Presupuesto disponible en el periodo actual.

El problema consiste en determinar las cantidades X_{ijt} que se deben invertir en los diversos activos a los distintos plazos y en cada periodo en forma tal que se maximize el rendimiento que se obtenga durante el horizonte de planeacion y se respeten los requisitos de liquidez.

Vencimiento

Un activo *i* comprado en el periodo k a plazo j vence en el periodo t=k+j. Por tanto, para que un instrumento a plazo j venza en el periodo t tiene que haber sido comprado en un periodo anterior k = t-j.

Liquidez neta

Debido a que existe una cartera vigente en el momento de decidir futuras inversiones, habra ciertos activos que venzan en algún periodo dentro del horizonte de planeacion. Esto implica recursos disponibles en dichos periodos que se deben tomar en cuenta y que pueden calcularse antes de armar el modelo. Para un periodo t dado, el monto de estos recursos es igual a la suma de activos de cartera vigente que vencen en el periodo t, mas el rendimiento que se obtenga de ellos.

Este rendimiento se puede calcular como

$$R_t = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} (1 + r_{ij,t-j})\, X^{\circ}_{ij,t-j} \qquad (1.1)$$

Las sumas se hacen en todos los posibles instrumentos, a todos los plazos posibles, que se compraron antes del periodo actual t=0.

Dado que existen estos recursos ya liquidos de antemano, el requisito de liquidez real del periodo es inferior a L°_t precisamente en R_t. Por tanto, el requisito neto de liquidez es dado por

$$L_t = L^{\circ}_t - R_t \qquad (1.2)$$

Restricciones entre periodos

Este conjunto de restricciones se refiere al presupuesto P_t disponible para inversión en cada periodo t, ya que éste depende de decisiones en periodos anteriores. El presupuesto para un periodo t es la diferencia entre el requisito de liquidez y los activos que vencen durante el periodo más el rendimiento que de ellos se obtiene.

Los recursos disponibles en el periodo t, provenientes de inversiones hechas en un periodo anterior dentro del horizonte de planeación, se representan por la expresión (1.1).

El presupuesto de inversión para el periodo t es dado por:

$$P_t = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{t-1} (1+r_{ij,t-j}) X_{ij,t-j} - L_t, & t = 2,3,\ldots,J \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} (1+r_{ij,t-j}) X_{ij,t-j} - L_t, & t = J+1,\ldots,T \end{cases} \quad (1.3)$$

Estas restricciones empiezan solo a partir del segundo periodo, ya que en el primero el presupuesto P_1 está determinado por la cartera vigente.

Restricciones intraperiodos

Para este caso, se tienen dos conjuntos de restricciones

i) Que las inversiones que se hagan en cada periodo no excedan al presupuesto disponible en el periodo respectivo. Expresado matemáticamente

$$\sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} X_{ijt} \le P_t, \qquad t = 1,2,\ldots,T \qquad (1.4)$$

ii) Que el requisito de liquidez se satisfaga en cada periodo. Es decir, que los activos que vencen en cada periodo sean capaces de cubrir los requisitos de liquidez de los periodos.

$$P_t \ge 0, \qquad t = 2,3,\ldots,T \qquad (1.5)$$

Finalmente, se exige que $X_{ijt} \ge 0$ para todos los tipos de activos, plazos y periodos.

Para el criterio de decisión o función objetivo, se desea maximizar la suma de los rendimientos de todas las inversiones que se hagan dentro del horizonte de planeacion. En forma matematica,

$$\text{Maximizar} \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} \sum_{t=1}^{T} \gamma_{ijt} X_{ijt} \qquad (2.6)$$

El modelo queda como un programa lineal en la forma siguiente:

$$\text{Maximizar} \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} \sum_{t=1}^{T} \gamma_{ijt} X_{ijt}$$

Sujeto a:

$$\sum_{i=1}^{L} \sum_{j=1}^{t-1} (1 + \gamma_{ij,t-j}) X_{ij,t-j} - L_t = P_t, \qquad t=2,\ldots,J$$

$$\sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} (1 + \gamma_{ij,t-j}) X_{ij,t-j} - L_t = P_t, \qquad t=J+1,\ldots,T$$

$$\sum_{i=1}^{L} \sum_{j=1}^{J} X_{ijt} \leq P_t, \qquad t=1,2,\ldots,T$$

$$P_t \geq 0, \qquad t=1,2,\ldots,T$$

$$X_{ijt} \geq 0, \qquad j=1,2,\ldots,J$$
$$i=1,2,\ldots,I$$

1.3.b Simplificación del modelo

Se considera que todas las inversiones se hacen al inicio de cada periodo t dentro del horizonte de planeacion. Si se selecciona sólo un activo para cada plazo y cada periodo, las variables de decisión del modelo y los rendimientos son:

X_{jt} = la cantidad que se invierta a plazo j durante el periodo t.

γ_{jt} = rendimiento que se obtenga por invertir a plazo j durante el periodo t.

por lo que el problema lineal anterior se simplifica, quedando

$$\text{Maximizar} \sum_{j=1}^{J} \sum_{t=1}^{T} r_{jt} X_{jt}$$

Sujeto a:

$$\sum_{j=1}^{J} (1 + r_{j,t-j}) X_{j,t-j} - L_t = P_t, \qquad t=2,\ldots,J$$

$$\sum_{j=1}^{J} (1 + r_{j,t-j}) X_{j,t-j} - L_t = P_t, \qquad t=J+1,\ldots,T$$

$$\sum_{j=1}^{J} X_{jt} \le P_t, \qquad t=1,2,\ldots,T$$

$$P_t \ge 0,$$

$$X_{jt} \ge 0,$$

para todos los periodos t y todos los plazos j.

1.4 EJEMPLO

Supongamos que se invierte solo en activos a tres plazos distintos (1, 2 y 3 meses), y se quiere plantear la cartera para un horizonte de cuatro meses. La cartera actual tiene las caracteristicas que aparecen en la tabla 1.1. Las expectativas de rendimientos para los proximos cuatro meses se muestran en la tabla 1.2.

TABLA 1.1

ACTIVO	1	2	3	4	5
Rendimiento	2.4%	2.16%	2.4%	1.92%	2.4%
MONTO	600 000	300 000	900 000	300 000	1200 000
COMPRADO EN EL PERIODO	-2	-1	-1	0	0
PLAZO en meses	3	2	3	1	3

El requisito bruto de liquidez para los meses 2, 3 y 4 se muestra en la tabla 1.3, y el presupuesto para el periodo actual es de $600 000, ademas de lo recursos disponibles por activos que vencen al inicio de este periodo, menos el requisito de liquidez.

TABLA 1.2

$r_{jt} \equiv$

PERIODO	1	2	3	4
PLAZO				
1	0.56%	0.4%	0.48%	0.64%
2	1.28%	0.96%	1.12%	1.44%
3	2.16%	1.68%	1.92%	2.4%

TABLA 1.3

$t_t \equiv$

PERIODO	1	2	3	4
MONTO	480 000	1200 000	1 380 000	600 000

a) Presupuesto inicial

De la tabla 1.1 se ve que al comienzo del periodo inicial vencen los activos 1, 2 y 4, y los recursos disponibles por este concepto ascienden a:

$$R_1 = (1.024)600 + (1.0216)300 + (1.0192)300 = \$1{,}226{,}640$$

A esto se debe agregar \$600,000 y restar \$480,000 que es el requisito de liquidez para el periodo, de acuerdo con la tabla 1.3, entonces,

$$P_1 = 1{,}226{,}640 + 600{,}000 - 480{,}000 = \$1{,}346{,}640$$

b) Los recursos disponibles en periodos posteriores

Calcularemos los recursos líquidos que se harán disponibles en periodos dentro del horizonte de planeación y que proviene de la cartera vigente.

Periodo 2. En este periodo vence el activo 3 de cartera por:

$$R_2 = (1.024)900{,}000 = \$921{,}600$$

Periodo 3. En este periodo vence el activo 5:

$$R_3 = (1.024)1,200,000 = \$1,228,800$$

c) El requisito de liquidez neto

Como el requisito de liquidez del primer periodo queda incluido en el cálculo del presupuesto para ese periodo, sólo se debe calcular para los periodos 2, 3 y 4. Sólo hay recursos provenientes de cartera vigente disponibles dentro del horizonte de planeacion en los periodos 2 y 3; por lo tanto, restando las cantidades que se obtengan en el punto anterior de las correspondientes de la tabla 1.3 se obtiene la liquidez neta como:

TABLA 1.4

$L_t \equiv$

PERIODO	2	3	4
MONTO (pesos)	278 400	151 200	600 000

Con los calculos anteriores ya es posible montar el modelo. En este caso el modelo en formato estandar queda:

$$\text{Maximizar} \sum_{j=1}^{3} \sum_{t=1}^{4} \gamma_{jt} X_{jt}$$

Sujeto a:

$$\sum_{j=1}^{t-1} (1 + \gamma_{j,t-j}) X_{j,t-j} - P_t = L_t, \qquad t = 2,3$$

$$\sum_{j=1}^{3} (1 + \gamma_{j,t-j}) X_{j,t-j} - P_t = L_t, \qquad t = 4$$

$$\sum_{j=1}^{3} X_{jt} - P_t \le 0, \qquad t = 2,3,4$$

$$\sum_{j=1}^{3} X_{j1} \le P_1,$$

$$P_t \ge 0, \qquad t = 2,3,4$$

$$X_{jt} \ge 0, \qquad j=1,2,3; \quad t=2,3,4$$

La matriz de restricciones para el ejemplo se muestra en la tabla 1.5. El problema se resuelve utilizando el paquete LINDO y la solución se presenta en las tablas 1.6a y 1.6b.

TABLA 1.5

VARIABLE	X11	X21	X31	X12	X22	X32	P2	X13
Función Objetivo	.0056	.0128	.0216	.004	.0096	.0168	0	.0048
Periodo 1	1	1	1					
2	1.0056						−1	
				1	1	1	−1	
3		1.0128		1.004				
								1
4			1.0216		1.0096			1.0048

Tabla 1.5

VARIABLE	X23	X33	P3	X14	X24	X34	P4	b
Funcion Objetivo	.0112	.019	0	.0064	.0144	.024	0	
Periodo 1								≤ 1,346,640
2								= 278,400
								≤ 0
3			−1					= 151,200
	1	1	−1					≤ 0
4							−1	= 600,000
				1	1	1	−1	≤ 0

TABLA 1.6a

$X_{jt} \equiv$

periodo	1	2	3	4
plazo				
1	276849	0	0	0
2	149362	0	0	0
3	920427	0	0	340308

TABLA 1.6b

$P_t \equiv$

Periodo	3	3	4
Presupuesto	0	0	340306

La solucion optima indica que en el primer periodo se debe invertir a los tres plazos, y que la cantidad mayor se invierta al plazo mas largo. Asi, las inversiones a plazo mas corto se utilizan para aprovechar el mayor rendimiento que ofrecen estas inversiones. Podemos observar como en el ultimo periodo del horizonte de planeacion se invierte todo a largo plazo ya que no se advierten requisitos de liquidez posteriores.

Estos resultados muestran el caracter deterministico del modelo al escoger las inversiones de mayor rendimiento cubriendo los requisitos de liquidez con las inversiones menos redituables.

```
MAX 0.0056X11+0.0128X21+0.0216X31+0.004X12+0.0096X22+0.0168X32
    +0.0048X13+0.0112X23+0.0192X33+0.0064X14+0.0144X24+0.024X34
ST
X11+X21+X31<1346640
1.0056X11-P2=278400
X12+X22+X32-P2<0
1.0128X21+1.004X12-P3=151200
X13+X23+X33-P3<0
1.0216X31+1.0096X22+1.0048X13-P4=600000
X14+X24+X34-P4<0
END
```

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP        9

        OBJECTIVE FUNCTION VALUE

        1)      31513.3000

 VARIABLE         VALUE           REDUCED COST
      X11     276849.700000           .000000
      X21     149289.100000           .000000
      X31     920501.300000           .000000
      X12           .000000           .000000
      X22           .000000           .003199
      X32           .000000           .020229
      X13           .000000           .000000
      X23           .000000           .017715
      X33           .000000           .009715
      X14           .000000           .017600
      X24           .000000           .009600
      X34     340384.100000           .000000
       P2           .000000           .003264
       P3           .000000           .003982
       P4     340384.100000           .000000

--MORE--

      ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
       2)           .000000          .046118
       3)           .000000         -.040293
       4)           .000000          .037029
       5)           .000000         -.032897
       6)           .000000          .028915
       7)           .000000         -.024000
       8)           .000000          .024000

NO. ITERATIONS=         9

DO RANGE(SENSITIVITY) ANALYSIS?
?
:
:
:
:
```

CAPITULO 2

TEORIA DE BONOS Y TASAS DE INTERES

2.1 INTRODUCCION

En este capitulo discutiremos las tasas de interes y las caracteristicas de los bonos que afectan su valor y rendimiento. Estos conceptos son necesarios para la construccion de la teoría de cartera aplicada al área de los bonos, que es el objetivo principal de este trabajo.

Las necesidades de financiamiento a largo plazo en organizaciones tanto del sector publico como del sector privado, las han llevado a buscar fondos en los mercados de capitales.

Las sumas que se requieren llegan a ser de una magnitud tal que dificilmente pueden encontrar un solo inversionista que las pueda reunir o que este dispuesto a arriesgar su capital entregándolo a un solo prestatario. Es necesario, por tanto, la concurrencia de multiples inversionistas. Para agilizar estas operaciones se crean los bonos (obligaciones), documentos de credito mediante las cuales gobiernos y empresas recolectan dinero de una gran cantidad de pequeños inversionistas obligandose a pagarles un interes periódico y a reintegrarles su capital al cabo de un tiempo determinado.

Los inversionistas, a su vez, se convierten en acreedores de estas organizaciones por la fraccion del credito especificado en los documentos mencionados, y cuando estos se cotizan en el mercado de valores pueden negociarlos en fechas distintas a la de su colocación o vencimiento, de acuerdo con las condiciones de interes, oferta y demanda vigentes.

Un bono es un documento de crédito emitido por el gobierno o una empresa privada, por el cual el emisor (prestatario) se obliga a cubrir al inversionista (prestamista) un capital en un plazo determinado, asi como intereses sobre el, pagaderos en periodos regulares.

Los bonos pueden ser comprados y vendidos en cualquier tiempo a través del mercado de valores, de acuerdo con el precio de mercado. El precio de mercado así fijado podrá ser a la par, cuando sea igual al valor nominal del mismo, con premio, si se paga un sobreprecio por él, o con descuento, si se paga una cantidad menor a la expresada por dicho valor nominal.

2.2 TASAS DE INTERES Y PRECIOS DE BONOS

Las altas tasas de inflación que ha venido experimentando la economía mexicana desde principios de los 70, las cuales se aceleraron aún mas durante 1982 y 1983, le han impreso una volatilidad muy grande a los precios de los bonos en el mercado. Para compensar este gran problema, se introdujo a nuestro país, en 1980, el concepto de bonos con tasas de interes revisables periodicamente (trimestral, mensual, etc.).

Este incremento de oscilaciones en el mercado de valores fue visto como un riesgo y como una oportunidad, dada la variabilidad de los rendimientos de los bonos pudo considerarse una teoría de cartera de bonos. De hecho, este es el objetivo en este trabajo como podrá verse en los proximos capitulos 3 y 4. Pero antes de intentar construir una cartera de bonos, entenderemos las tasas de interes y los precios de bonos.

2.2.a Tasas de interes

La tasa de interes es la tasa con la cual el emisor pagara intereses sobre el capital del bono, en periodos regulares de tiempo y hasta la fecha de vencimiento.

En la mayoria de los bonos, los pagos de intereses se efectuan contra la presentacion de cupones; estos cupones están impresos en serie y unidos al mismo bono y cada uno tiene impresa la fecha de su pago. En el caso de los bonos registrados, los cupones no son necesarios ya que los intereses se pagan, directamente, a la persona registrada como tenedor del bono.

2.2.b Precios de bonos

El precio de los bonos en el mercado de valores se fija por acuerdo entre el comprador y el vendedor; este valor depende básicamente de los siguientes factores: (1) tasa de interés e intervalo de los cupones; (3) tasa de interés local para las inversiones; (3) tiempo que debe transcurrir hasta el vencimiento; (4) precio de vencimiento; (5) las condiciones económicas imperantes; (6) confiabilidad en las garantías del emisor. Los bonos pueden venderse a la par, con premio o con descuento, según que el precio de venta sea igual, mayor o menor que el valor nominal.

Al comprar un bono en una fecha de pago de intereses, el inversionista adquiere el derecho de recibir el pago futuro de los intereses en cada período de pago y el valor del bono en la fecha de vencimiento. El precio que el inversionista pague por el bono será, por tanto, igual al valor actual de los intereses más el valor actual del capital. Designando por:

F = valor nominal del bono.
V = precio de vencimiento del bono.
r = tasa de interés, por período de pago del cupón.
i = tasa de interés sobre la inversión, por período de cupón.
n = número de períodos de interés (o número de cupones), hasta la fecha de vencimiento.

El precio de compra P está dado por

$$P = V(1 + i)^{-n} + Fr\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Por ejemplo, un inversionista que compró el 1o. de enero de 1960 un bono de \$1000, 5%, EJ, con vencimiento a la par el 1o. de julio de 1988 recibirá: (a) \$1000 el 1o. de julio de 1988 y (b) 57 pagos semestrales de \$25 cada uno, el primero con vencimiento el 1o. de julio de 1960.

2.2.c Teoría de premio de liquidez

La teoría de premio de liquidez se basa en inversiones que analizan los rendimientos por poseer bonos de variación del vencimiento. La teoría de premio de liquidez supone que las inversiones pueden ofrecer un mayor rendimiento esperado por tener un bono con un horizonte diferente de su horizonte preferido. Además, se supone que hay escazes de inversiones a largo plazo por lo que se puede ofrecer un rendimiento extra en bonos a largo plazo para inducir a tener las inversiones.

La suposición es que hay un exceso de inversiones con horizontes a corto plazo. Estas inversiones tienen la eleccion de poseer un bono a un año o de poseer un bono a dos años y venderlo a un año. La inversión en el bono a dos años involucra un riesgo para la inversion a un año. Para inducir algunas inversiones a un año a poseer bonos a dos años se ofrece un premio. Asi, el rendimiento por tener un bono a dos años estaria arriba del rendimiento esperado de tener dos bonos a un año.

Para una inversion con un horizonte a un año, un bono con un vencimiento mayor de dos años tiene más riesgo que un bono a dos años. Por lo que se requiere de un premio mayor en bonos a tres y cuatro años. Si el mercado es dominado por inversiones a corto plazo, entonces los bonos a largo plazo requeriran de premios más grandes. Esta es la idea basica de la teoria de premio de liquidez.

En la tabla 2.1 se muestran los rendimientos y se agregan los premios de liquidez para cada uno. Por ejemplo, para el periodo 3 el rendimiento de vencimiento fue calculado resolviendo para i_{o3} donde

$$(1 + i_{o3})^3 = (1.10)(1.11 + 0.002)(1.12 + 0.004)$$

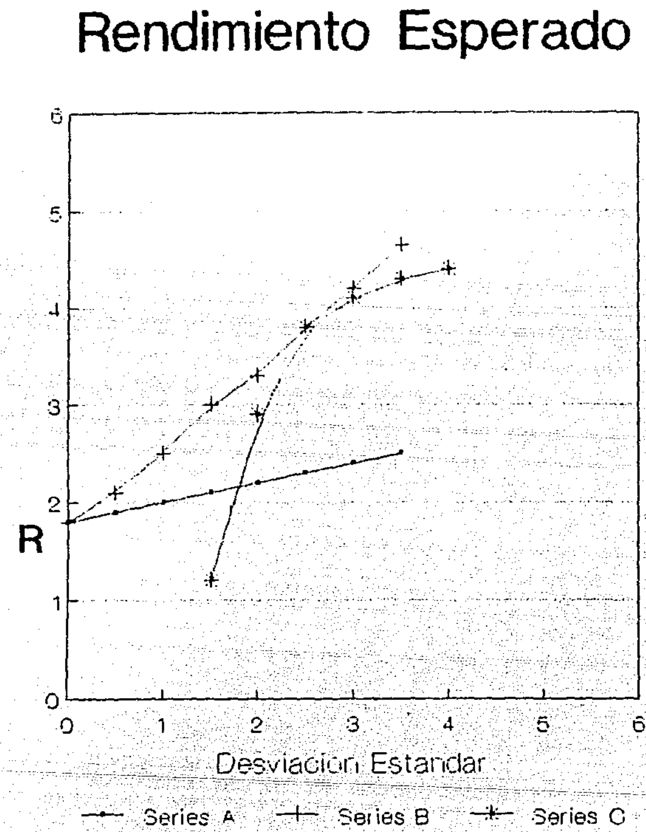
o,

$$i_{o3} = 11.2\%$$

En la figura 2.1 se muestra la curva de rendimiento y el premio de liquidez asociado.

2.2.d Riesgo por incumplimiento

A diferencia de los bonos del gobierno, para los bonos de las corporaciones hay un riesgo que el cupon o principal pagarian si no se conociera. Para estos bonos es necesario hacer una distincion entre el rendimiento prometido y el rendimiento esperado. Un bono podria prometer un rendimiento de 17%, pero si hay alguna probabilidad de que el principal o cupón no pudiera ser



Rendimiento Esperado
R
0
1
2
3
4
5
6
0
1
2
3
4
5
6
Desviacion Estandar
Series A
Series B
Series C

Figura 3.1

pagado, su rendimiento esperado puede ser 15%. De hecho, ya que

Tabla 2.1 Curva de Rendimiento con un Premio de Liquidez

	Pendiente ascendente de la curva de rendimiento			Pendiente descendente de la curva de rendimiento		
Per.	Tasa a un periodo	Premio Liquidez	Rendim. Vencim.	Tasa a un periodo	Premio Liquidez	Rendim. Vencim.
1	10	0	10.0	10	0	10.00
2	11	0.2	10.60	9	0.2	9.60
3	12	0.4	11.20	8	0.4	9.20
4	13	0.6	11.79	7	0.6	8.80
5	14	0.8	12.39	6	0.8	8.39
6	15	1.0	12.98	5	1.0	7.99
7	16	1.2	13.57	5	1.2	7.73
8	16	1.4	14.05	5	1.6	7.59
9	16	1.6	14.44	5	2.0	7.53
10	16	1.8	14.77	5	2.4	7.51

hay un riesgo asociado con estos bonos, las inversiones requeriran que el rendimiento esperado sea mas grande que el rendimiento en un bono similar que esta libre de incumplimiento. Estos conceptos se ilustran en la tabla 2.2.

Tabla 2.2 Componentes de Tasas de Interés en Bonos Corporativos

2%	Premio por incumplimiento	17% de Rendimiento total
1%	Premio por Riesgo	
14%	Rendimiento en bonos libres de incumplimientos	

La diferencia entre el rendimiento prometido y el rendimiento esperado es el premio por incumpliento. La inversion requiere este rendimiento extra debido al cambio que un bono particular sufre debido a un incumplimiento, resultando en un rendimiento muy pobre.

Hay tres grandes organizaciones de inversión que estiman la probabilidad por incumplimiento para la mayor parte de bonos corporativos: la Moody, la Standard & Poor, y la Fitch. La tabla 2.3 muestra las clasificaciones de los bonos dada por la organización Moody.

TABLA 2.3 Claves Moody para Estimaciones de Bonos Corporativos

Aaa	Los bonos estimados Aaa se consideran de la máxima calidad. Estos llevan el riesgo mas pequeño en la inversión y generalmente son referidos por un "borde dorado". Los pagos de interes son protegidos por un margen estable excepcional y el capital es seguro.
Aa	Los bonos estimados Aa se consideran de la mas alta calidad. Aunque estos tienen una tasa más baja que los bonos Aaa, ya que los margenes de protección no son mayores que en los seguros Aaa y presentan otros elementos de riesgo a largo plazo.
A	Los bonos estimados A poseen muchos atributos de inversión favorable y se consideran como las obligaciones de grado medio superior. Los factores que dan seguridad al capital y al interés se consideran adecuados, pero los elementos son suceptibles de empeorar algunas veces en el futuro.
Baa	Los bonos estimados Baa se consideran como obligaciones de grado medio. Los pagos de interes y seguro de capital son adecuados, pero ciertos elementos protectivos carecen de un periodo grande de tiempo. Tales bonos carecen de caracteristicas de inversión sobresalientesy de hecho también tienen caracteristicas especulativas.
Ba	Los bonos estimados Ba se consideran que tienen elementos especulativos; su futuro no se puede considerar muy seguro. A menudo la protección de pagos de intereses y de capital es moderada y así mismo, no dan una garantia en el futuro. La incertidumbre es caracteristica en estos bonos.
B	Los bonos estimados B carecen de caracteristicas de la inversión deseable. La seguridad de los pagos de interes y de capital o de mantener los otros terminos del contrato

sobre cualquier periodo largo de tiempo es muy pequeña.

Caa Los bonos estimados Caa son de pobre colocación. Tales activos pueden no cumplirse o puede haber elementos presentes de peligro con respecto al capital o interés.

Ca Los bonos estimados Ca representan obligaciones que son especulativas en un alto grado. Tales activos a menudo no se cumplen o tienen otras fallas del mercado.

C Los bonos estimados C son la clase más baja de la estimación de bonos y activos, por lo que se considera que tienen prospectos extremadamente pobres de cualquier inversión establecida.

En la tabla 2.4 se muestra el rendimiento a vencimiento de bonos de 1973 a 1980. Los datos son dados para Enero de cada año. En cada año, el rendimiento prometido fué regulado por estimacion. Esto es de esperarse cuando el riesgo por incumplimiento se incrementa con una estimacion baja.

Tabla 2.4 Determinación por Moody del Rendimiento a Vencimiento de 1973 a 1980

	Estimación			
	AAA	AA	A	BAA
Año	Rendimientos			
1973	7.15	7.37	7.53	7.90
1974	7.83	8.00	8.17	8.48
1975	8.83	9.13	9.81	10.81
1976	8.60	9.13	9.54	10.41
1977	7.96	8.16	8.45	9.08
1978	8.41	8.59	8.76	9.17
1979	9.25	9.48	9.72	10.13
1980	11.09	11.56	11.88	12.42

Las caracteristicas de las empresas son utilizadas para explicar la calidad de las estimaciones asignadas por las organizaciones Moody y la Estandar y Poor, y para explicar las diferencias entre el rendimiento a vencimiento para el cual los diferentes bonos corporativos fueron vendidos.

2.3 DURACION

La duración es una medición de la sensibilidad del precio de un bono a los cambios en la tasa de interés en el cual el bono es descontado.

Considere un bono con pagos de C(t), donde t = 1,...,N. Comúmmente, los primeros N-1 de los pagos serán los pagos de intereses, y C(N) será la suma del pago del capital principal y el último pago de interés.

Ahora, consideremos el valor presente neto del promedio ponderado de los pagos del bono:

Tabla 2.5

Tiempo	Pago	Tiempo x Pago	VPN
1	C(1)	C(1)	$C(1)/(1+r)$
2	C(2)	2 C(2)	$2C(2)/(1+r)^2$
3	C(3)	3 C(3)	$3C(3)/(1+r)^3$
⋮	⋮	⋮	⋮
N	C(N)	N C(N)	$NC(N)/(1+r)^N$

El precio del bono se escribe como

$$\sum_{t=1}^{N} \frac{C(t)}{(1+r)^t}$$

El tiempo promedio ponderado de los pagos de los bonos es

$$\sum_{t=1}^{N} \frac{t\,C(t)}{(1+r)^t}$$

La duración se define como el tiempo promedio ponderado de los pagos de los bonos, como un porcentaje del precio del bono:

$$D = \frac{1}{P} \sum_{t=1}^{N} \frac{t\,C(t)}{(1+r)^t}$$

Por ejemplo, consideremos dos bonos. El bono A ha sido emitido el dia de hoy, con un valor de $1000, con una tasa de interés del mercado es de 7%, y con vencimiento a 10 años. El bono B fué emitido hace 5 años, cuando las tasas de interés eran altas. Este bono tiene un valor de $1000 y una tasa por cupón de 13%.

Cuando se emitió este bono tenía 15 años de vencimiento, por lo que el resto a vencer es de 10 años. Puesto que la tasa interes del mercado es 7%, el precio en el mercado del bono B es dado por

$$\$1,421.41 = \sum \frac{\$130}{(1.07)^{t}} + \frac{\$1,000}{(1.07)^{10}}$$

En la tabla 2.6 se calcula la duracion de cada bono. Como se puede observar, la duración del Bono A es mayor que la del bono B. También podemos ver que, el valor presente neto del bono A para el primer año pagado ($70) representa 6.54% del precio del bono, mientras que el valor presente neto del bono B para el primer año pagado ($130) es 8.55% de su precio.

2.3 PROTECCION DE NUEVOS CAMBIOS EN LA ESTRUCTURA DEL PLAZO

Los cambios en la estructura del plazo son vistos por los administradores como la mayor fuente de riesgo para la cartera de bonos. En el momento que la estructura del plazo cambia en el mercado afecta todos lo precios de los bonos.

Se han desarrollado dos tecnicas para evitar los cambios en la estructura del plazo de la cartera. estas técnicas se conocen como valor a la par y inmunización.

2.3.a Valor a la par

El valor a la par consiste en encontrar el menor costo de la cartera que produce el flujo de pagos igualando exactamente la salida de flujos que son financiados por la inversión. Por ejemplo, suponga que es necesario encontrar flujos de $100, $1000 y $2000 durante los próximos tres años. Este flujo de pagos puede necesitarse para encontrar los pagos de las pensiones. La cartera de bonos es la inversión utilizada para encontrar estas obligaciones. Un programa de valor a la par podría determinar una cartera de bonos a uno, dos, y tres años por lo que los cupones más el capital igualan exactamente los tres flujos mencionados.

Una de las formas de reducir la sensibilidad a los cambios en las tasas de interes es el valor a la par. El valor a la par es un

TABLA 2.6

Año	C(t,A)	$\frac{tC(t,A)}{1000*(1.07)^t}$	C(t,B)	$\frac{tC(t,B)}{1421*(1.07)^t}$
1	70	0.0654205607	130	0.0854993783
2	70	0.122281422	130	0.1598125567
3	70	0.1714225541	130	0.224036715
4	70	0.2136106594	130	0.2791734766
5	70	0.2495451628	130	0.326137239
6	70	0.279863734	130	0.3657611596
7	70	0.3051473735	130	0.3988052534
8	70	0.3259250986	130	0.4259602173
9	70	0.3426782578	130	0.4478553586
10	1070	5.4393374258	1130	4.0424673611
Duración		7.5152322466		6.7555103756

intento de encontrar la cartera de costo mínimo tal que los flujos de pagos en cada periodo sean suficientes para cubrir todas las obligaciones.

2.3.b Inmunización

La segunda técnica para proteger los nuevos cambios en las tasas de interés son programas de inmunización. Al principio se introdujo la duración como una medida de la sensibilidad de un bono o una cartera de bonos a los cambios en las tasas de interes. La teoria de inmunización intenta eliminar la sensibilidad a cambios en la estructura del plazo por igualacion de la duración de los activos a la duración de las obligaciones. De esta manera, si la duracion es verdaderamente una medicion de la sensibilidad a los cambios en las tasas de interes, un cambio en la estructura del plazo tendrá el mismo impacto en el valor presente de ambos activos y obligaciones y no dejara sin cambios la capacidad del programa para encontrar cualquier obligacion. Si las tasas de interes suben, el valor presente de los activos y obligaciones caerán por la misma cantidad. Similarmente, si las tasas de interés caen, entonces el valor de los activos y obligaciones subirán por la misma cantidad.

Para ser más claro, considere una sola obligacion de $100 a 5 años. La meta del programa de inversión es encontrar esa obligación. Si un bono es comprado con un vencimiento a 5 años, la inversión tiene certeza sobre el valor del bono para el horizonte, pero tiene incertidumbre sobre la tasa para el cual los pagos en cupones serán invertidos. Si las tasas de interes suben, las obligaciones serán conocidas ya que los pagos en cupones se invertirán para los tasas que fueron más altas de lo anticipado.

Sin embargo, si las tasas de interes caen, la obligacion no se conocerá porque los pagos en cupones se invertirán para tasas por debajo de lo anticipado. Si la inversión compra un bono a un vencimiento de más de 5 años, la inversión tendra incertidumbre sobre el valor del bono a 5 años. Considere una elevacion en las tasas de interes. Con una elevación en las tasas de interes el valor agregado de los cupones para el horizonte será mayor de lo anticipado puesto que los pagos en cupones serán invertidos en tasas mas favorables. Sin embargo, ya que las tasas de interes subieron, el valor del bono en el horizonte será menor. Si el bono es seleccionado apropiadamente, estos efectos podrán ser equilibrados. Similarmente, considere una disminución en las tasas de interes. Con una disminucion, los pagos en cupones se invertiran en tasas menores a lo anticipado. El valor agregado de los pagos de interés en el horizonte será menor. Sin embargo, si la tasa de interes disminuye, el valor del bono sube. Una vez más es posible elegir un vencimiento para que estas influencias sean compensadas una a otra.

La tabla 2.7 ilustra estas ideas, suponga que las tasas de interes son de 11% para todos los vencimientos. Ademas, supongamos que el bono paga intereses anuales de 13.52% y tiene un vencimiento de cinco años. Estos son los flujos mostrados en la primera columna de la tabla 2.7. La duración de este bono es a cuatro años. El valor de este bono para el periodo 4 si la tasa de interes permanece constante al 11% es 165.946.

Tabla 2.7 Valor de un Bono con Cambios en las Tasas de Interes

Tiempo	Flujo de Pagos	Valor para el Periodo 4 11%	10%	12%
1	13.52	$13.52(1.11)^{3}$	$13.52(1.1)^{3}$	$13.52(1.12)^{3}$
2	13.52	$13.52(1.11)^{2}$	$13.52(1.1)^{2}$	$13.52(1.12)^{2}$
3	13.52	$13.52(1.11)^{1}$	$13.52(1.1)^{1}$	$13.52(1.12)^{1}$
4	13.52	13.52	13.52	13.52
5	113.52	$113.52(1.11)^{-1}$	$113.52(1.1)^{-1}$	$113.52(1.12)^{-1}$
		165.946	165.946	165.946

Si las tasas de interés disminuyen en un 10% el valor para el periodo 4 es 165.946. El valor no cambia porque la disminucion en el valor de los pagos de interés de 0.930 es compensada por un incremento en el valor para el periodo 4 por un pago de 113.52 en el periodo 5. Este incremento es 0.930. Si la tasa de interes se eleva a 12%, el valor de los pagos en cupones para el periodo 4 se incrementa mientras el valor disminuye para el periodo 4 al recibir 113.52 en el periodo 5. Este ejemplo ilustra la idea de inmunización. Si tenemos una obligación a un periodo 4, podemos comprar una cantidad suficiente de bonos para conocer la deuda justa. Por ejemplo, una obligación de $995 puede encontrarse con seis bonos. Mientras que si las tasas de interés disminuyen o aumentan, podría encontrarse la misma obligacion.

El cupón para el bono de la tabla 2.7 se seleccionó para que el bono tuviera una duración de 4 años.

Las estrategias de inmunizacion son usadas para mitigar el efecto de los cambios en las tasas de interes. La duracion en una cartera de bonos es un promedio ponderado de la duración de los activos individuales que comprenden la cartera. Sea X_i la proporcion del bono i en la cartera, D_i la duración del activo i, y D_p la duración de la cartera con N bonos.

$$D_p = \sum_{i=1}^{n} X_i D_i$$

Hay obviamente un enorme número de formas para construir una cartera de una duracion particular. Por ejemplo, suponga que se requiere una cartera de bonos con una duración de 10 años. Además suponga que cuatro bonos han sido considerados con una duración de 6, 8, 10, y 12 años. Con la simple posesion del bono con una duración de 10 años se podria conocer la restriccion. Alternativamente una sexta parte del dinero puede ser invertida en el bono con seis años de duracion, una cuarta en el bono con 8 años de duración, y el resto siete doceavos en el bono a 12 años. Esto resulta en una duración de 10 años ya que

$$(1/6)6 + (1/4)8 + (7/12)12 = 10$$

Se han explorado dos estrategias diferentes: una estrategia abierta y una estrategia enfocada. La estrategia enfocada encuentra una cartera de bonos donde cada bono tiene una duración cercana a la duracion de la obligacion. Por ejemplo, si la deuda es a 10 años, entonces los bonos pueden tener una duración entre 9 y 11 años. La cartera del bono es enfocado hacia la duracion de la obligación. La estrategia abierta usa bonos con diferentes duraciones, por ejemplo, a 5 y 15 años. Los duración a 10 años puede conocerse por 1/2 en los bonos de duración a 5 años y 1/2 en los bonos de duracion a 15 años. La ventaja de la estrategia abierta es que no hay necesidad de construir carteras de bonos individuales para encontrar cada obligación. Así mismo, las obligaciones de diferentes duraciones pueden conocerse por la selección de diferentes mezclas de las carteras de duración a 5 y 10 años.

En esta sección, presentamos las tecnicas para protección de nuevos cambios en la tasa de interés cuando el patrón de pagos de flujos sobre el horizonte completo es importante.

En el proximo capitulo, discutiremos las caracteristicas de los bonos en el contexto de la teoria de cartera de. Estas caracteristicas anteriores son importantes en el tratamiento de la cartera de bonos, ya que las variaciones en las tasas de interés y los precios alteran el rendimiento optimo de la cartera. Así mismo, los cambios en el plazo de posesion del bono invertido, afectan el valor de la cartera de bonos.

CAPITULO 3
MODELOS DE SELECCION DE CARTERA

3.1 INTRODUCCION

En el capitulo anterior se dio una breve introducción al concepto de bonos y las tasas de interés, mencionando los riesgos a que se enfrenta el inversionista. Estos conceptos son fundamentales para el entendimiento del manejo de carteras de bonos.

En este capitulo se analizan algunos modelos e ideas que se han propuesto para la selección de cartera usando criterios de riesgo dados por medio de tecnicas matemáticas, como lo son el análisis de Markowitz, y el modelo de cartera para la selección de bonos.

Una cartera es un conjunto formado por alternativas de inversion, que en un momento dado del tiempo tiene un inversionista la oportunidad para asignar una cantidad especifica de efectivo a cada una de ellas, con el fin de obtener un beneficio en un futuro proximo [13]. La forma como se determinen estas cantidades estara sujeta a condiciones: limitacion de fondos por invertir y el criterio de seleccion que maximiza (minimiza) los ingresos o beneficios bajo riesgo.

El capitulo se divide en cuatro partes. Primero se presenta el modelo de Markowitz para la selección de cartera, discutiendo primero la estimacion del rendimiento esperado, y en consecuencia de la varianza y la covarianza. En la segunda parte se manejan los conceptos de los bonos para construir la cartera de bonos. En la siguiente parte se utiliza el modelo de programación lineal para inmunizar la cartera de bonos utilizando los conceptos de duracion y de variacion en las tasas de interes. Finalmente, se discutira el modelo por metas para inmunizar la cartera de bonos.

3.2 EL MODELO DE MARKOWITZ

En esta seccion se muestra el modelo de Markowitz para resolver el problema de selección de cartera. Se analiza el concepto de "cartera eficiente" y el tipo de problemas de optimización a que conduce dicho concepto.

Para resolver el problema de cartera es necesario utilizar algunos conceptos de estadística. Esto se debe a la naturaleza probabilística que poseen los rendimientos de los instrumentos de inversión.

3.2.a Variables aleatorias, Esperanza matemática y Varianza

Una variable aleatoria X es una variable cuyo valor lo determina el azar. Sea X el conjunto de valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ donde $0 \leq x_i \leq 1$, entonces la probabilidad de que la variable X tome el valor x_i es:

$$P_i = P_r\{X = x_i\} \geq 0, \qquad i = 1,2,\ldots,n$$

Además

$$\sum_{i=1}^{n} P_i = 1.$$

El valor esperado E(X) de la variable aleatoria X se define como

$$\mu_x = E(X) = \sum_{i=1}^{n} P_i \, x_i ,$$

es decir, es el promedio ponderado de los valores posibles de X, donde los ponderadores son las probabilidades de ocurrencia p_i.

La variancia V(X) se define como el promedio de las diferencias entre los valores posibles de x_i y su valor esperado elevadas al cuadrado. Esto es,

$$\sigma_x^2 = V(X)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P_i \, [x_i - E(X)]^2 ,$$

La varianza es una medida de la dispersion de los posibles valores de X alrededor de su media. Otras medidas de dispersion relacionadas con la varianza son, la desviacion estandar:

$$\sigma_x = \sqrt{V(X)}$$

y el coeficiente de variación que se define como

$$\text{Coef. de variación} = \frac{\sigma_x}{\mu_x}$$

También se define la covariancia como

$$\sigma_{ij} = \text{Cov}(x_i, x_j)$$

$$= E\,\{[x_i - E(x_i)][x_j - E(x_j)]\}$$

donde $\sigma_{ij} = \sigma_i^2$ si $i = j$.

El coeficiente de correlación ρ_{ij} entre la variable x_i y la variable x_j, se puede escribir como:

$$\sigma_{ij} = \rho_{ij}\,\sigma_i\,\sigma_j$$

donde σ_i y σ_j son las desviaciones estandar de x_i y x_j, respectivamente.

3.2.b El concepto de cartera eficiente

Consideremos una inversión con n tipos de activos, y que las variables de decisión x_i son las proporciones a ser invertidas en cada tipo de activo *i*. De esta menera, estas variables x_i están bajo el control del inversionista y que proporcionan la composición de la cartera.

Se debe cumplir que:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1;$$

y, $x_i \geq 0$, para $i = 1,2,\ldots,n$

Por otro lado, para cada activo *i* se conoce su rendimiento esperado μ_i, la varianza de sus rendimientos σ_i^2, y la covarianza entre los rendimientos de cada pareja de de activos σ_{ij}.

Entonces, el rendimiento esperado de la cartera se expresa:

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i$$

y su variancia será:

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i \, x_j \, \sigma_{ij}$$

El modelo de Markowitz consiste en encontrar la cartera que nos da la mínima varianza entre todas las posibles carteras que tienen el mismo rendimiento esperado. En forma matemática, se tiene

$$\text{Minimizar} \quad \sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j \, \sigma_{ij}$$

Sujeto a

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i \, x_i = \mu$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \tag{3.1}$$

$$x_i \geq 0, \qquad i = 1,2,\ldots,n$$

a este modelo se le llama también "cartera eficiente".

Alternativamente, el modelo de Markowitz sería encontrar la cartera que tiene el máximo rendimiento esperado de todas las carteras que tienen la misma varianza. Matemáticamente, se tiene:

$$\text{Maximizar} \quad \mu = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i$$

Sujeto a

$$\sum_{i=1}^{n} x_i x_j \, \sigma_{ij} = \sigma^2 \tag{3.2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

$$x_i \geq 0, \qquad i = 1,2,\ldots,n$$

La frontera eficiente es el conjunto de todas las carteras eficientes. La frontera eficiente es el lugar geométrico de todas las combinaciones convexas de dos carteras eficientes[11]. Esto significa que si $X(1) = [x_{11},\ldots,x_{1n}]$ y $X(2) = [x_{21},\ldots,x_{2n}]$ son las carteras eficientes, entonces para cualquier combinación se tiene

$$\gamma X(1) + (1-\gamma)X(2) = [\gamma x_{11} + (1-\gamma)x_{21}, \ldots, \gamma x_{1n} + (1-\gamma)x_{2n}]$$

Así, encontramos que toda frontera eficiente se puede encontrar a partir de dos carteras eficientes cualesquiera.

Tecnicas para Calcular la Frontera Eficiente

La existencia de riesgo implica que hay una sola cartera de activos de riesgo que es preferido a todas las otras carteras. En la figura 3.1 la cartera en el rayo μ_F – B es preferida a todas los otras carteras de activos con riesgo. La frontera eficiente es la longitud completa del rayo extendido de μ_F y B. Los diferentes puntos a lo largo del rayo μ_F–B representan diferentes cantidades de los préstamos y deudas en combinación con la cartera optima.

Podemos ver que la recta μ_F– B es la linea con mayor pendiente. Consideraremos que la pendiente de la linea que conecta un activo con minimo riesgo y la cartera es el rendimiento esperado en la cartera menos la razon libre de riesgo dividida entre la desviacion estandar, y ademas satisface la restricción de que la suma de las proporciones invertidas en activos es igual a:

maximizar la funcion objetivo

$$\text{Maximizar } \theta(X) = \frac{\bar{\mu} - \mu_F}{\sigma_P}$$

Sujeto a la restricción

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 1 \qquad (3.3)$$

$$X_i \geq 0, \qquad \text{para } i = 1,2,\ldots,n$$

Algunas tecnicas de solucion para resolver este problema, es el método de los multiplicadores de Lagrange, y el metodo de las Condiciones de Kuhn-Tucker. Otra tecnica alternativa seria la siguiente: se sustituye la restriccion en la función objetivo y entonces se maximiza como un problema sin restricciones. Utilizando este procedimiento tenemos que

$$\mu_F = 1\mu_F = \left[\sum_{i=1}^{n} X_i \right] \mu_F = \sum_{i=1}^{n} X_i \ \mu_F$$

Sustituyendo esta expresión en la función objetivo y poniendo el rendimiento esperado y la desviación estandar del rendimiento en la forma general, se tiene

$$\theta(X) = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i(\overline{\mu_i} - \mu_F)}{\left[\sum_{i=1}^{n} X_i \ \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n} X_i \ \sum_{i=1}^{n} X_i X_j \sigma_{ij} \right]^{1/2}}$$

Este es un problema de maximización simple y como tal se resuelve utilizando los métodos del cálculo básico. En cálculo se muestra que para encontrar el máximo de una función se toma la derivada con respecto de cada variable y se igualan a cero. De esta manera, la solucion para maximizar el problema consiste en encontrar el siguiente sistema de ecuaciones simultáneas:

1. $\dfrac{d\theta}{dX_1} = 0$

2. $\dfrac{d\theta}{dX_2} = 0$

3. $\dfrac{d\theta}{dX_3} = 0$

$\vdots$

N. $\dfrac{d\theta}{dX_N} = 0$

Se puede ver que la derivada de θ con respecto de X_i en términos de las varianzas y de las covarianzas es:

$$\frac{d\theta}{dX_i} = -(\lambda X_1 \sigma_{1i} + \lambda X_2 \sigma_{2i} + \dots + \lambda X_i \sigma_i^2 + \dots + \lambda X_N \sigma_{Ni}) + \overline{\mu}_i - \mu_F = 0$$

donde λ es una constante. Si hacemos $Z_k = \lambda \ X_k$, donde las X_k son las fracciones a invertir en cada activo y las Z_k son proporcionales a esta fraccion. Sustituyendo Z_k por $\lambda \ X_k$ y moviendo los términos de varianzas y covarianzas del lado derecho de la igualdad queda

$$\bar{\mu}_i - \mu_F = Z_1\sigma_{1i} + Z_2\sigma_{2i} + \dots + Z_i\sigma_i^2 + \dots + Z_N\sigma_{Ni}$$

Tenemos una ecuación para cada valor *i*. Así, la solución consiste en resolver el siguiente sistema de ecuaciones simultaneas.

$$\begin{aligned}
\mu_1-\mu_F &= Z_1\sigma_1^2 + Z_2\sigma_{12} + Z_3\sigma_{31} + \dots + Z_N\sigma_{N1} \\
\mu_2-\mu_F &= Z_1\sigma_{12} + Z_2\sigma_2^2 + Z_3\sigma_{32} + \dots + Z_N\sigma_{N2} \\
\mu_3-\mu_F &= Z_1\sigma_{13} + Z_2\sigma_{23} + Z_3\sigma_3^2 + \dots + Z_N\sigma_{N3} \\
&\vdots \\
\mu_N-\mu_F &= Z_1\sigma_{1N} + Z_2\sigma_{2N} + Z_3\sigma_{3N} + \dots + Z_N\sigma_N^2
\end{aligned} \qquad (3.4)$$

Las Z's son proporcionales a la cantidad óptima a invertir en cada titulo. Para determinar la cantidad óptima a invertir, se resuelve el sistema (3.4) para las Z's. Entonces, la proporcion óptima a invertir en cada activo k es X_k, donde

$$X_k = Z_k \Big/ \sum_{i=1}^{N} Z_i$$

En el apendice A se muestra un ejemplo numerico de solución de cartera eficiente. Enseguida se muestran dos modelos para resolver el problema de cartera aplicado a la seleccion de bonos.

3.3 PROGRAMACION LINEAL PARA INMUNIZAR LA CARTERA DE BONOS[1]

El concepto de inmunizacion de bonos surgió de los intentos para diseñar la cartera de bonos que llevan cupones que amparan al inversionista de riesgo en las tasas de interés. Estos intentos han sido unidos al concepto de duracion (ver capítulo 2).

Un inversionista que desea tener una cartera de inmunizacion, desearia ver entre las diversas carteras candidatas. Esto ocurre si los bonos considerados en la inversion, algunos tienen duraciones mayores que el periodo de planeacion de la inversion, y otros tienen duraciones menores que el periodo de planeacion de la inversión.

Los estudios de inmunización, se han enfocado en bonos del Gobierno libre de incumplimiento. Ampliando este conjunto, se introducirán bonos de las Corporaciones con un nuevo elemento dentro del proceso de formación de cartera el "riesgo por incumplimiento". Podemos controlar el riesgo por incumplimiento mediante una construccion apropiada de las restricciones para la inmunización de cartera, como se verá en la siguiente sección.

3.3a Inmunización en la presencia de riesgo por incumplimiento

Considerese una situación donde un inversionista desea inmunizar una cartera con riesgo en las tasas de interes y esta dispuesto a incluir bonos con riesgo por inclumplimiento en la cartera. Supongamos una cartera con N bonos corporativos con diferentes clases de riesgo, se puede expresar la siguiente ecuación de inmunización[1]

$$\sum_{i=1}^{n} x_i D_i^* = m \qquad (3.5)$$

donde D_i^* es la duración que posee un bono i, x_i denota la proporción del presupuesto invertido en el bono i, y m es el tiempo en el cual es invertido el bono i.

Para el caso de un conjunto de bonos del gobierno estos son libres de incumplimiento, es decir, si todos los bonos son de la misma clase de riesgo, la ecuación (3.5) puede verse como un caso especial

$$\sum_{i=1}^{n} x_i D_i = m \qquad (3.6)$$

3.3b Control del riesgo por incumplimiento

Una cartera que inmuniza nuevos riesgos en la tasas de interes pero incluye bonos de las corporaciones con grado de incumplimiento, expondrá la inversion todavia a un riesgo por inclumplimiento. El inversionista puede controlar el riesgo por

Una alternativa para la segunda diversificación de la restricción indicada en la desigualdad (3.9) consiste en asignar arbitrariamente a cada bono una clase de riesgo por inclumplimiento, asignando un número índice para cada bono basado en su clase de riesgo, y entonces se restringirá el promedio ponderado de los números índices. Por ejemplo, los bonos pueden asignarse a una clase de riesgo basados en las estimaciones Moody (ver el capítulo 2). Entonces los bonos del gobierno se les asigna un valor índice de 0, los bonos estimados Aaa se les asigna un valor de 1, los bonos estimados Aa se les asigna un valor de 2, y así sucesivamemte. Sea f_i el número índice asignado al bono i, la restricción se puede expresar como

$$\sum_{i=1}^{N} x_i f_i \leq F \tag{3.10}$$

donde F es el valor índice máximo tolerable.

3.3.c Uso de programación lineal para inmunización

La programación lineal (PL) es aplicable a la inmunizacion puesto que ambas la función objetivo y las restricciones son lineales. La función objetivo es dada por la siguiente expresión

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \mu_i' \tag{3.11}$$

donde $\mu_i' = (1 + \mu_i)^m$ es el rendimiento obtenido por poseer el bono i en el tiempo m. Las restricciones son representadas por las expresiones (3.5), (3.7), (3.8), y o (3.9) o (3.10). Estas involucran inmunización, cantidades mínimas de inversión, cantidades maximas de inversión, y o un premio de riesgo por incumplimiento o un valor índice en la restriccion, respectivamente.

Para la inmunización de una cartera de bonos se elegirá la cartera bala. Una cartera bala consiste de bonos que tienen muy poca dispersión en términos de sus duraciones. De acuerdo a esto, es apropiado considerar una restricción que requiera la cartera de bonos para tener la apariencia de una cartera bala [5].

La especificacion de la restriccion de una cartera bala es inclumplimiento en la cartera imponiendo cierta diversificación de restricciones. Una forma de estas restricciones supone la especificación de proporciones máximas y mínimas para los diversos grupos de bonos[1]. Sea Γ_j^{min} el j-ésimo grupo de restricciones de bonos para una proporción de inversión mínima de γ_j^{min}, y sea Γ_j^{max} el j-ésimo grupo de restricciones de bonos para una proporción de inversión máxima de γ_j^{max}. Suponiendo que hay un total de grupos mínimos con restricciones mínimas estas restricciones toman la forma de

$$\sum_{i\in\Gamma_j^{min}} x_i \geq \gamma_j^{min}, \qquad j= 1,\dots,min, \qquad (3.7)$$

y grupos máximos con restricciones máximas,

$$\sum_{i\in\Gamma_j^{max}} x_i \leq \gamma_j^{max}, \qquad j= 1,\dots,max. \qquad (3.8)$$

Así, hay un total de mín + máx de esta diversificación de restricciones impuestas por el inversionista.

Un segundo tipo de diversificación de restricciones consiste en agregar un premio de riesgo por incumplimiento en la cartera. Esta puede alcanzarse calculando el premio de riesgo por incumplimiento para cada bono (restando el rendimiento en seguros del gobierno y el rendimiento en los bonos de las corporaciones), y entonces el promedio ponderado de los premios de riesgo por incumplimiento es restringido a ser menor o igual a un cierto nivel de tolerancia máximo Δ[*]. Suponiendo que δ_i denota el premio de riesgo por inclumplimiento del bono i, esta restricción toma la forma de

$$\sum_{i=1}^{N} x_i\delta_i \leq \Delta \qquad (3.9)$$

[*] Ya que el modelo se basa teoricamente en las curvas de rendimiento para bonos de diversas clases de riesgo, y es constante para todos los plazos a vencer. De esta manera, δ_i se calcula como $y_i - y_G$ donde y_G es el rendimiento de un bono del gobierno con un plazo de vencimiento igual al plazo del bono i.

es apropiado considerar una restricción que requiera la cartera de bonos para tener la apariencia de una cartera bala [5].

La especificación de la restricción de una cartera bala es alcanzada primero dividiendo los N bonos en dos grupos. El grupo N_A consiste de todos los bonos que tienen duración D_i menor que la periodo de posesión m, y el grupo N_B consiste de todos los bonos que tienen una duracion mayor que el periodo de posesion m. Segundo, note la Desviación Media Absoluta (MAD) pondera las diferencias entre las duraciones de los bonos y el periodo de posesion, que pueden calcularse como

$$MAD = \sum_{i \in N_A} x_i (m - D_i) + \sum_{i \in N_B} x_i (D_i - m), \qquad (3.12.a)$$

o en forma compacta

$$MAD = \sum_{i=1}^{N} x_i \left| D_i - m \right|. \qquad (3.12.b)$$

La restricción de la cartera bala es alcanzada por la especificación de que MAD puede ser menor o igual a una cantidad arbitraria β. Esta cantidad arbitraria podria ser, por ejemplo, un 1/2 de la diferencia entre el valor más pequeño de D_i donde $i \in N_B$ y el valor más grande de D_i donde $i \in N_A$ [1].

La formulacion del PL para el problema de inmunización de bonos se establece como sigue:

$$\text{maximizar} \quad \sum_{i=1}^{N} x_i \mu_i'$$

sujeto a

$$\sum_{i=1}^{N} x_i D_i^* = m$$

$$\sum_{i \in \Gamma_j^{min}} x_i \geq \gamma_j^{min}, \qquad j=1,\ldots,min,$$

$$\sum_{i \in \Gamma_j^{max}} x_i \leq \gamma_j^{max}, \qquad j=1,\ldots,máx,$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i \delta_i \leq \Delta \quad \text{o} \quad \sum_{i=1}^{N} x_i f_i \leq F,$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i |D_i - m| \leq \beta,$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = 1,$$

$$x_i \geq 0 \qquad\qquad \text{para toda } i.$$

En el próximo capítulo 4 se presenta la aplicación de este modelo de PL para la inmunización de una cartera de bonos.

3.4 PROGRAMACION POR METAS PARA INMUNIZAR LA CARTERA DE BONOS

La programacion por metas (PM) difiere de PL en que esta considera objetivos múltiples. El tomador de decisiones primero ordena estos objetivos de acuerdo a su prioridad y entonces establece un nivel satisfactorio de alcanze (es decir, una meta) para cada uno. Las restricciones lineales tambien pueden ser impuestas. Para resolver el problema de PM, la meta prioritaria mas alta se encuentra (si es posible) antes de que el algoritmo proceda a considerar la proxima meta prioritaria mas alta. Si no es posible encontrar una meta dada, entonces el algoritmo determina el conjunto de soluciones más proximos a ella (sin violar las restricciones). En efecto, se agrega sucesivamente una nueva restricción al modelo que requiere la solucion optima para escogerla de este conjunto antes de que el algoritmo proceda a considerar la proxima meta prioritaria mas alta.

En la programación por metas (PM) cada objetivo se expresa como una restriccion de meta utilizando al menos un par de variables desviacionales, denotadas por d_j^- y d_j^+, estas restricciones son positivas. Por consiguiente, d_j^- es interpreta como una cantidad que cae debajo de la solución de la j-esima meta y d_j^+ se interpreta como una cantidad que excede la solucion de la j-esima meta. En la PM la funcion objetivo se establece en terminos de estas variables desviacionales y minimiza al menos alguna de estas variables por restricción de metas. Así, se designa que al menos una de cada par de variables desviacionales sea igual a cero en la solución.

Para inmunizar los bonos la meta prioritaria más alta asegura que el rendimiento de la cartera es al menos igual a una cantidad dada. Sea α_1 el rendimiento deseado, esta restricción de meta se puede expresar como

$$\sum_{i=1}^{N} x_i y_i' + d_1^- - d_1^+ = \alpha_1 \qquad (3.13)$$

Esta meta aparece en la función objetivo como

$$\text{minimizar } \phi_1 d_1^- \qquad (3.14)$$

donde ϕ_1 se usa para denotar que se tiene el tope prioritario.Note que d_1^+ no aparece en la ecuación (3.14), ya que la meta es tener el rendimiento de la cartera siendo al menos igual a α_1, las soluciones que exceden α_1 son por lo tanto permitidas en esta formulación.

La especificación de la segunda y tercera metas prioritarias es a discreción del inversionista. Estas dos metas involucran la emisión de riesgo por inclumplimiento y la formación de una cartera bala. Suponiendo que el control de riesgo por incumplimiento es estimado como una meta prioritaria más alta que la formación de una cartera bala, el inversionista puede agregar

$$\phi_2\left(\sum_{j=1}^{min} d_{j+1}^- + \sum_{j=1}^{max} d_{j+1+min}^+ + d_{2+min+max}^+\right) + \phi_3 d_{3+mim+max}^+$$

a la función objetivo en (3.14), donde las variables desviacionales surgen de las siguientes restricciones modificadas

$$\sum_{i\in\Gamma_j^{min}} x_i + d_{j+1}^- - d_{j+1}^+ = \gamma_j^{min} \qquad \text{para } j=1,\dots,min \qquad (3.15)$$

$$\sum_{i\in\Gamma_j^{max}} x_i + d_{j+1+min}^+ - d_{j+1+min}^+ = \gamma_j^{max} \qquad \text{para } j=1,\dots,máx \qquad (3.16)$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i \delta_i + d_{2+min+max}^- - d_{2+min+max}^+ = \Delta \qquad (3.17a)$$

o

$$\sum_{i=1}^{N} x_i \tau_i + d_{2+min+max}^+ - d_{2+min+max}^+ = F \qquad (3.17b)$$

y

$$\sum_{i=1}^{N} x_i |D_i - m| + d^-_{3+min+max} - d^+_{3+min+max} = \beta \quad (3.18)$$

En la ecuación (3.15) las variables desviacionales d^+_{j+1} son omitidas de la función objetivo puesto que el inversionista no se inquieta si son excedidas las restricciones mínimas. También, las variables desviacionales $d^-_{j+1+min}$ en la ecuación (3.16) son omitidas de la función objetivo puesto que el inversionista no se inquieta por cuánto las ponderaciones en la solución están abajo del máximo. Por razones similares $d^-_{2+min+max}$ y $d^+_{3+min+max}$ en las cuaciones (3.17a) o (3.17b) y (3.18) respectivamente, son omitidas de la funcion objetivo.

La cuarta meta prioritaria más alta se basa en las tres metas anteriores. En esta etapa puede haber más de una solucion que alcanzan las otras tres metas, es decir, las soluciones tendrán

$$d^+_1 = \sum_{j=1}^{min} d^-_{j+1} = \sum_{j=1}^{max} d^+_{j+1+min} = d^+_{2+min+max} = d^+_{3+min+max} = 0.$$

Dada la posibilidad de soluciones múltiples, el inversionista preferirá aquella con rendimiento de la cartera más alto. Esto puede alcanzarse agregando la restricción de la cuarta meta siguiente

$$\sum_{i=1}^{N} x_i \mu'_i + d^-_{4+min+max} = \alpha_2 \quad (3.19)$$

donde α_2 es dada en un valor artificial alto, es decir, un valor igual al valor más grande en el conjunto $\{\mu'_i\}$. Para esta restricción, la cuarta meta involucra agregar el término $\phi_4 d^-_{4+min+max}$ a la función objetivo. Note que $d^+_{4+min+max}$ no aparece en la formulacion del problema, puesto que el valor de α_2 es tal que $d^+_{4+min+max}$ siempre será igual a cero.

En resumen, la formulación del problema de programacion por metas PM se expresa como

$$\text{minimizar } \phi_1 d^-_1 + \phi_2\left(\sum_{j=1}^{min} d^-_{j+1} + \sum_{j=1}^{max} d^+_{j+1+min} + d^+_{2+min+max}\right) + \phi_3 d^+_{3+min+max}$$

$$+ \phi_4 d^-_{4+min+max}$$

sujeto a

$$\sum_{i=1}^{N} x_i \mu'_i + d^-_1 - d^+_1 = \alpha_1,$$

$$\sum_{i \in \Gamma_j^{min}} x_i + d^-_{j+1} - d^+_{j+1} = \gamma_j^{min} \qquad j=1,\ldots,min,$$

$$\sum_{i \in \Gamma_j^{max}} x_i + d^-_{j+1+min} - d^+_{j+1+min} = \gamma_j^{max} \qquad j=1,\ldots,max,$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i \delta_i + d^-_{2+min+max} - d^+_{2+min+max} = \Delta.$$

o

$$\sum_{i=1}^{N} x_i f_i + d^-_{2+min+max} - d^+_{2+min+max} = F,$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i |D_i - m| + d^-_{3+min+max} - d^+_{3+min+max} = \beta,$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i y_i + d_{4+min+max} = \alpha_2.$$

$$\sum_{i=1}^{N} \mu_i D_i^* = m,$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = 1,$$

$$x_i,\ d^-_j,\ d^+_j \geq 0, \qquad \text{para toda } i,j.$$

En el próximo capitulo se presenta una aplicación para este modelo de PM, y se compara con el resultado obtenido del modelo de PL, encontrandose soluciones iguales para ambos modelos.

Comparando las formulaciones de PL y PM, se puede observar que las restricciones PL tienen una contraparte exacta en el conjunto de restricciones y metas de PM (es decir, β tiene el mismo valor en ambas formulaciones). La solucion de PL maximiza el rendimiento sin violar el conjunto de restricciones. La solución de PM acompaña el mismo resultado para no violar cualquiera de las restricciones y para alcanzar todas las metas, excepto para la primera y la cuarta meta, donde ambas máximizan el rendimiento. Para alcanzar la segunda y la tercera metas y no violar las restricciones, la solución de PM es equivalente a no violar cualquiera de las restricciones correspondientes de PL, mientras simultáneamente maximiza el rendimiento de la cartera. Así, cuando las formulaciones de PL y PM son estructuralmente equivalentes y existe una solucion factible de PL, las soluciones óptimas de PL y PM serán idénticas. Si la solución factible de PL no existe, aun puede existir una solución óptima de PM, y el inversionista puede observar como al alcanzar las metas se aproxima a la cartera óptima.

CAPITULO 4

APLICACION

4.1 USO DE PL PARA RESOLVER UNA CARTERA DE BONOS

En la aplicación, utilizaremos el modelo de programación lineal (PL) para resolver la cartera de bonos. Para construir una cartera de bonos inmunizada se utilizara el método de la restricción de premio de riesgo por incumplimiento y el método de la restriccion de índice de riesgo.

En la tabla 4.1 se presenta una descripción de 30 bonos usados para construir la cartera inmunizada.

Tabla 4.1 Universo de Bonos Usados en los ejemplos de PL y PG

Bono	Descripción	tasas Cupón	estim. Moody	fecha de vencimien.	Anual yi
1	CETES	6 1/8	n.a.	11-15-86	0.1428
2	CETES	10 3/4	n.a.	11-15-89	0.1477
3	CETES	10 1/2	n.a	11-15-92	0.1478
4	CETES	11 1/2	n.a.	11-15-95	0.1498
5	CETES	11 5/8	n.a.	11-15-02	0.1507
6	CETES	10 3/8	n.a.	11-15-09	0.1475
7	TELMEX	2 3/8	Aaa	05-15-86	0.1466
8	CEFE	8 3/10	Aaa	05-15-88	0.1510
9	PEMEX	5 7/10	Aaa	05-15-92	0.1518
10	ACEMEX	8 1/2	Aaa	11-15-95	0.1510
11	BANAMEX	8	Aaa	11-15-95	0.1556
12	BANCOMER	9	Aaa	11-01-12	0.1709
13	SERFIN	4 1/4	Aa	05-01-87	0.1805
14	BANCO INTERNACIONAL	5	Aa	11-15-90	0.1760
15	BANCO SOMEX	8	Aa	05-01-93	0.1551
16	BANCO COMERMEX	4 5/8	Aa	05-15-95	0.1800
17	BOLSA DE VALORES	8 45/100	Aa	11-15-04	0.1546
18	BANCO PROMEX	8 1/4	Aa	11-01-93	0.1744
19	BANCREMI	6 3/4	A	05-01-87	0.1407
20	BANCO DE MEXICO	5 1/8	A	05-01-89	0.1851
21	AEROMEXICO	4 1/2	A	05-01-92	0.1779
22	MEXICANA DE AVIACIÓN	6 3/4	A	11-01-97	0.1829
23	SUBURBIA	8 1/4	A	11-01-03	0.1838
24	AURRERA	6 1/2	A	05-01-11	0.1740
25	LIVERPOOL	4 3/8	Baa	05-01-86	0.1470
26	GIGANTE	4 1/8	Baa	05-01-88	0.1430
27	SAMBORS	4 5/8	Baa	05-01-91	0.1540
28	SUMESA	5 1/2	Baa	05-01-96	0.1557
29	Comp. PAPELERA	7 5/8	Baa	05-01-02	0.1536
30	NESTLE, S.A.	9 1/4	Baa	11-01-07	0.1595

Podemos observar que estos bonos varian en terminos del riesgo por incumplimiento y la fecha de vencimiento. Se seleccionaron seis bonos para cada una de las cinco clases de riesgo: los seguros del gobierno (n.a.) y las cuatro categorias de bonos estimados por la corporacion Moody (Aaa, Aa, A, Baa).

La tabla 4.2 presenta en forma matricial los parametros calculados para cada bono que son necesarios para formular el problema de PL. El premio de riesgo por incumplimiento (δ_i) se estable en términos de "bases de puntos" que se calculan para cada bono, siendo esta la diferencia entre su rendimiento a vencimiento anualizado (ver tabla 4.1) y el rendimiento correspondiente de los bonos del gobierno de el rango a vencimiento equivalente,

Tabl2 4.2 Matriz de datos para el bono universal

Bono	$y'_i=(1+y_i)^m$	D_i	D^*_i	δ_i	f_i	$\lvert\delta_i-m\rvert$
1	2.6005	42.48	0.96	0.0	0.0	41.52
2	2.6851	60.84	36.16	0.0	0.0	23.16
3	2.6905	76.46	68.42	0.0	0.0	7.54
4	2.7243	85.62	87.40	0.0	0.0	1.62
5	2.7397	100.28	118.31	0.0	0.0	16.28
6	2.6818	111.06	139.84	0.0	0.0	27.03
7	2.6667	39.69	-6.89	38.0	1.0	44.31
8	2.7448	53.14	18.83	33.0	1.0	30.86
9	2.7585	83.22	82.35	40.0	1.0	0.76
10	2.7448	90.83	98.41	12.0	1.0	6.83
11	2.8295	105.52	130.82	49.0	1.0	21.52
12	3.1092	104.71	130.62	134.0	1.0	20.71
13	3.3082	47.96	-2.42	277.0	2.0	36.04
14	3.2131	74.82	62.62	183.0	2.0	9.18
15	3.0000	81.78	79.19	73.0	2.0	2.22
16	3.2981	97.45	116.13	202.0	2.0	13.45
17	2.7750	105.95	131.44	39.0	2.0	21.95
18	3.1818	102.29	126.15	169.0	2.0	18.29
19	3.5322	45.63	-14.28	379.0	3.0	38.37
20	3.4080	63.45	33.24	274.0	3.0	20.55
21	3.2560	85.78	88.20	201.0	3.0	1.78
22	3.3626	94.16	108.75	231.0	3.0	10.16
23	3.3754	95.72	112.69	231.0	3.0	11.72
24	3.1740	106.35	135.37	165.0	3.0	22.35
25	3.5527	38.05	-38.58	442.0	4.0	45.95
26	3.7105	56.89	13.52	353.0	4.0	27.11
27	3.3796	78.09	69.50	262.0	4.0	5.91
28	3.4205	94.85	110.90	259.0	4.0	10.85
29	2.3352	96.27	114.04	231.0	4.0	12.27
30	3.5005	92.42	105.40	320.0	4.0	8.42

multiplicado por 10,000. Por ejemplo, para el bono 14, δ_{14} = (0.1556 - 0.1507)(10,000) = 49 bases de puntos. El índice por incumplimiento (f_i) para cada bono se determinó arbitrariamente siendo 0 para los bonos del gobierno, 1 para los bonos estimados Aaa, 2 para Aa, 3 para A y 4 para bonos de las corporaciones Baa. El horizonte de inversión m fue colocado para 84 meses, o siete años. En la tabla 4.2, D_i, D_i^* y $|D_i-m|$ se establecen en meses.

Se supone que cada inmunización de cartera tiene las siguientes características:

(1) Al menos 30% de los fondos pueden ser invertidos en bonos del gobierno, es decir, γ_1^{min} = 0.30 y Γ_1^{min} =(1,2,...,6),

(2) no más del 30% de los fondos pueden ser invertidos en cualquier bono corporativo emitido, es decir, γ_j^{max} = 0.30, y Γ_j^{max}= (j+6) para j=1,...,24,

(3) no más del 40% de los fondos pueden ser invertidos en las dos clases de riesgo corporativos de mas bajo grado (A,Baa), es decir, γ_{25}^{max}= 0.40 para Γ_{25}^{max}= (19,20,...,30),

(4a) el premio de riesgo por incumplimiento esta de acuerdo con el numero de base en puntos de riesgo por incumplimiento asociado con un bono que tiene una estimación Moody de Aa y un plazo a vencimiento aproximadamente igual al horizonte de inversión m, es decir, Δ= δ_{14}= (0.1556-0.1507)(10,000) =49,

o

(4b) el índice de riesgo por incumplimiento esta de acuerdo con un bono que tiene una estimacion Moody de Aaa, es decir, F =1.0,

y

(5) una cartera que tiene una desviación media absoluta no más grande que la que podría obtenerse por construcción y igualando la ponderacion de cartera de dos bonos con una estimacion Moody de Aaa que tiene duraciones más cercanamente al horizonte de inversion, es decir, β = ($|d_{10}$-m$|$ + $|D_9$ -m$|$)/2 = (D_{10}-D_9)/2 = (90.83-83.22)/2 = 3.805.

Dando estas características, el ejemplo del PL se expresa ahora como

$$\text{maximizar} \sum_{i=1}^{30} x_i \mu_i'$$

sujeto a

$$\sum_{i=1}^{30} x_i D_i^* = 84,$$

$$\sum_{i=1}^{6} x_i \geq 0.30$$

$$x_i \leq 0.30, \qquad i=7,\dots,30$$

$$\sum_{i=1}^{30} x_i \leq 0.40,$$

$$\sum_{i=1}^{30} x_i \delta_i \leq 49 \qquad \text{o} \qquad \sum_{i=1}^{30} x_i f_i \leq 2.0$$

$$\sum_{i=1}^{30} x_i |D_i - m| \leq 3.805,$$

$$\sum_{i=1}^{30} x_i = 1.0,$$

$$x_i \geq 0 \quad \text{para toda } i.$$

El problema anterior es un problema de programación lineal y se puede resolver con algoritmos estandar (paquete Lindo).

En la tabla 4.3 se presenta el resultado del problema.

Tabla 4.3
Resumen de ejemplos de inmunización de PL

Bonos	Δ	F
3	0.0	0.0
4	0.582806	0.581365
5	0.014623	0.0
14	0.0	0.203370
15	0.300000	0.0
16	0.060315	0.052535
21	0.0	0.162730
26	0.042256	0.0

En todos los casos la solución factible satisface todas las restricciones del PL. Hay un total de ocho soluciones para los bonos emitidos del universo de 30. Se puede observar que tanto para la restriccion de premio de riesgo por incumplimiento (Δ) como para la restriccion de indice de riesgo por incumplimiento (F) las soluciones indican que el inversionista debe invertir una mayor cantidad para el bono 4, siendo de un 58% para ambas restricciones, y el resto se invierte en los otros siete bonos mostrados en la tabla 4.3.

4.2 USO DE PM PARA INMUNIZAR DE UNA CARTERA DE BONOS

Para resolver el problema por metas utilizaremos los datos dados en las tablas 4.1 y 4.2 de la seccion anterior.

Es necesario primero establecer las metas de rendimiento de la cartera, α_1 y α_2. El valor de la restriccion de meta escogido para α_1 es 2.3521, que es una cantidad equivalente a $(1+\mu_i)^m$ valorado por el bono 14. Este bono tiene un plazo a vencimiento aproximadamente igual al horizonte de inversion de 84 meses y tambien tiene una estimacion Moody de Aa, que es el indice de grado del riesgo por incumplimiento de la cartera. Puesto que el proposito de la restriccion de meta α_2 es obtener un rendimiento de la cartera tan grande como sea posible despues de que las otras metas han sido satisfechas, α_2 nunca debe ser mayor que $(1+\mu_i)^m$ cuyo valor es 2.6691, el cual esta asociado con el bono 25. De acuerdo a esto, α_2 es igual a esta cantidad.

Dando estas caracteristicas, el ejemplo de PM se puede escribir como

$$\text{Minimizar } \phi_1 d_1^- + \phi_2\left(d_2^- + \sum_{j=1}^{25} d_{j+2}^- + d_{28}^+\right) + \phi_3 d_{29}^+ + \phi_4 d_{30}^-$$

sujeto a:

$$\sum_{i=1}^{30} x_i \mu_i' + d_1^- - d_1^+ = 2.3521,$$

$$\sum_{i=1}^{6} x_i + d_2^- - d_2^+ = 0.30,$$

$$x_i + d_{i-4}^- - d_{i-4}^+ = 0.30, \qquad i=7,\dots,30$$

$$\sum_{i=1}^{30} x_i + d_{27}^- - d_{27}^+ = 0.40,$$

$$\sum_{i=1}^{30} x_i \delta_i + d_{28}^- - d_{28}^+ = 49, \qquad o \qquad \sum_{i=1}^{30} x_i f_i + d_{28}^- - d_{28}^+ = 2.0,$$

$$\sum_{i=1}^{30} x_i |D_i - m| + d_{29}^- - d_{29}^+ = 3.805,$$

$$\sum_{i=1}^{30} x_i y'_i + d_{30}^- = 2.6991,$$

$$\sum_{i=1}^{30} x_i D_i^* = 84,$$

$$\sum_{i=1}^{30} x_i = 1.0,$$

$$x_i,\ d_j^-,\ d_j^+ \geq 0 \qquad \text{para toda } i,j.$$

La tabla 4.4 presenta las soluciones del problema.

Tabla 4.4
Resumen de ejemplos de inmunización de PM

Bonos	Δ	F
4	0.823494	0.699115
19	0.0	0.040735
21	0.0	0.162804
23	0.060303	0.0
26	0.050822	0.0
27	0.065381	0.0
30	0.0	0.097346

Podemos ver que la solución factible satisface todas las restricciones y metas. Nuevamente, se observa que las soluciones indican que el inversionista debe invertir una mayor cantidad para el bono 4, siendo de un 82.3% para la restricción (Δ), y de un 69.9% para la restricción (F), y el resto se invierte en menor proporción en los otros siete bonos. De esta manera, se puede concluir que para las restricciones de premio de riesgo por incumplimiento (Δ), y del índice de riesgo por incumplimiento (F),los modelos PL y PM dieron soluciones equivalentes (al menos en el porcentaje de inversión en los diferentes tipos de bonos). Estos resultados eran de esperarse puesto que el conjunto de restricciones de PL tiene la misma estructura que el conjunto de restricciones de metas PM (por ejemplo, los valores β, δ_i, y f_i son las mismas en ambas formulaciones).

PL utilizando $\delta_1 = 49$

```
MAX 2.6005X1+2.6651X2+2.6905X3+2.7243X4+2.7397X5+2.6618X6+2.6667X7
+2.7448X8+2.7585X9+2.7446X10+2.6295X11+3.1092X12+3.3082X13
+3.2131X14+3.0000X15+3.2981X16+2.7750X17+3.1818X18+3.5322X19
+3.4080X20+3.2560X21+3.3626X22+3.3754X23+3.1740X24+3.5527X25
+3.7105X26+3.3796X27+3.4205X28+2.3352X29+3.5005X30
ST
.96X1+36.16X2+68.42X3+87.40X4+118.31X5+139.84X6-6.89X7+18.83X8
+82.35X9+98.41X10+130.82X11+130.62X12-2.42X13+62.62X14+79.19X15
+116.13X16+131.44X17+126.15X18-42.28X19+33.24X2+88.20X21+106.75X22
+112.69X23+135.37X24-38.58X25+13.52X26+69.50X27+110.9X28+114.04X29
+105.4X30=84
X1+X2+X3+X4+X5+X6>0.30
X7<0.30
X8<0.30
X9<0.30
X10<0.30
X11<0.30
X12<0.30
X13<0.30
X14<0.30
X15<0.30
X16<0.30
X17<0.30
X18<0.30
X19<0.30
X20<0.30
X21<0.30
X22<0.30
X23<0.30
X24<0.30
X25<0.30
X26<0.30
X27<0.30
X28<0.30
X29<0.30
X30<0.30
X19+X20+X21+X22+X23+X24+X25+X26+X27+X28+X29+X30<0.40
38X7+33X8+40X9+12X10+49X11+134X12+277X13+183X14+73X15+202X16+39X17
+169X18+379X19+274X20+201X21+231X22+231X23+165X24+442X25+353X26
+262X27+259X28+231X29+320X30<49
41.52X1+23.16X2+7.54X3+1.62X4+16.28X5+27.06X6+44.31X7+30.86X8
+.78X9+6.83X10+21.52X11+20.71X12+36.04X13+9.18X14+2.22X15+13.45X16
+21.95X17+18.29X18+38.37X19+20.55X20+1.78X21+10.16X22+11.72X23
+23.35X24+49.95X25+27.11X26+5.91X27+10.85X28+12.27X29
+8.42X30<3.805
X1+X2+X3+X4+X5+X6+X7+X8+X9+X10+X11+X12+X13+X14+X15+X16+X17+X18+X19
+X20+X21+X22+X23+X24+X25+X26+X27+X28+X29+X30=1.0
END
```

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 19

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 2.88351700

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	.000000	.138282
X2	.000000	.051628
X3	.000000	[illegible]
X4	.582806	.000000
X5	.014623	.000000
X6	.000000	.069031
X7	.000000	.178295
X8	.000000	.080883
X9	.000000	.075432
X10	.000000	.018290
X11	.000000	.051966
X12	.000000	.007623
X13	.000000	.195109
X14	.000000	.020612
X15	.300000	.000000
X16	.060315	.000000
X17	.000000	.079111

--MORE--

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X18	.000000	.029745
X19	.000000	.249514
X20	.000000	.076350
X21	.000000	.026530
X22	.000000	.012478
X23	.000000	.001422
X24	.000000	.031523
X25	.000000	.412738
X26	.042256	.000000
X27	.000000	.072201
X28	.000000	.033145
X29	.000000	1.042230
X30	.000000	.119871

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	.000000	.000161
3)	.297429	.000000
4)	.300000	.000000
5)	.300000	.000000
6)	.300000	.000000
7)	.300000	.000000
8)	.300000	.000000
9)	.300000	.000000

--MORE--

10)	.300000	.000000
11)	.300000	.000000
12)	.000000	.073941
13)	.239685	.000000
14)	.300000	.000000
15)	.300000	.000000
16)	.300000	.000000
17)	.300000	.000000
18)	.300000	.000000
19)	.300000	.000000
20)	.300000	.000000
21)	.300000	.000000
22)	.300000	.000000
23)	.257744	.000000
24)	.300000	.000000
25)	.300000	.000000
26)	.300000	.000000
27)	.300000	.000000
28)	.357744	.000000
29)	.000000	.002776
30)	.000000	.000711
31)	.000000	2.709091

NO. ITERATIONS= 19
--MORE--

.PL utilizando $f_{\lambda} = 1.0$

```
MAX 2.6005X1+2.6851X2+2.6905X3+2.7243X4+2.7397X5+2.8815X6+2.6667X7
+2.7448X8+2.7585X9+2.7448X10+2.8295X11+3.1092X12+3.3082X13
+3.2131X14+3.0000X15+3.2981X16+2.7750X17+3.1818X18+3.5322X19
+3.4080X20+3.2560X21+3.3626X22+3.3754X23+3.1740X24+3.5527X25
+3.7105X26+3.3796X27+3.4205X28+2.3352X29+3.5005X30
ST
.96X1+36.16X2+68.42X3+87.40X4+118.31X5+139.84X6-6.89X7+18.83X8
+82.35X9+98.41X10+130.82X11+130.62X12-2.42X13+82.62X14-79.19X15
+116.13X16+131.44X17+126.15X18-42.28X19+33.24X2+88.20X21+108.75X22
+112.69X23+135.37X24-38.59X25+13.52X26+69.50X27+110.9X28+114.04X29
+105.4X30=84
X1+X2+X3+X4+X5+X6>0.30
X7<0.30
X8<0.30
X9<0.30
X10<0.30
X11<0.30
X12<0.30
X13<0.30
X14<0.30
X15<0.30
X16<0.30
X17<0.30
X18<0.30
X19<0.30
X20<0.30
X21<0.30
X22<0.30
X23<0.30
X24<0.30
X25<0.30
X26<0.30
X27<0.30
X28<0.30
X29<0.30
X30<0.30
X19+X20+X21+X22+X23+X24+X25+X26+X27+X28+X29+X30<0.40
X7+X8+X9+X10+X11+X12+2X13+2X14+2X15+2X16+2X17+2X18+3X19+3X20+3X21
+3X22+3X23+3X24+4X25+4X26+4X27+4X28+4X29+4X30<1.0
41.52X1+23.16X2+7.54X3+1.62X4+16.28X5+27.08X6+44.31X7+30.86X8
+.78X9+6.83X10+21.52X11+20.71X12+36.04X13+9.18X14+2.22X15+13.45X16
+21.95X17+18.29X18+38.37X19+20.55X20+1.78X21+10.16X22+11.72X23
+23.35X24+49.95X25+27.11X26+5.91X27+10.85X28+12.27X29
+8.42X30<3.805
X1+X2+X3+X4+X5+X6+X7+X8+X9+X10+X11+X12+X13+X14+X15+X16+X17+X18+X19
+X20+X21+X22+X23+X24+X25+X26+X27+X28+X29+X30=1.0
END
```

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      21

        OBJECTIVE FUNCTION VALUE

        1)     2.94037500

  VARIABLE          VALUE            REDUCED COST
        X1          .000000              .848729
        X2          .000000              .433942
        X3          .000000              .140631
        X4          .581365              .000000
        X5          .000000              .258362
        X6          .000000              .517426
        X7          .000000             1.009225
        X8          .000000              .686353
        X9          .000000              .125945
       X10          .000000              .253014
       X11          .000000              .442806
       X12          .000000              .148158
       X13          .000000              .392100
       X14          .203370              .000000
       X15          .000000              .066823
       X16          .052535              .000000
       X17          .000000              .681521
--MORE--

       X18          .000000              .205661
       X19          .000000              .382536
       X20          .000000              .163406
       X21          .162730              .000000
       X22          .000000              .050229
       X23          .000000              .066638
       X24          .000000              .485000
       X25          .000000              .752052
       X26          .000000              .179590
       X27          .000000              .126503
       X28          .000000              .181516
       X29          .000000             1.293350
       X30          .000000              .056094


       ROW   SLACK OR SURPLUS      DUAL PRICES
        2)          .000000              .000118
        3)          .281365              .000000
        4)          .300000              .000000
        5)          .300000              .000000
        6)          .300000              .000000
        7)          .300000              .000000
        8)          .300000              .000000
        9)          .300000              .000000
--MORE--
```

10)	.300000	.000000
11)	.096630	.000000
12)	.300000	.000000
13)	.247465	.000000
14)	.300000	.000000
15)	.300000	.000000
16)	.300000	.000000
17)	.300000	.000000
18)	.137270	.000000
19)	.300000	.000000
20)	.300000	.000000
21)	.300000	.000000
22)	.300000	.000000
23)	.300000	.000000
24)	.300000	.000000
25)	.300000	.000000
26)	.300000	.000000
27)	.300000	.000000
28)	.237270	.000000
29)	.000000	.176219
30)	.000000	.018425
31)	.000000	2.684119

NO. ITERATIONS= 21
--MORE--

PM utilizando $\delta_i = 49$

MIN 2.1963d1n+49d2n+49d3p+49d4p+49d4p+49d5p+49d6p+49d7p+49d8p+
49d9p+49d10p+49d11p+49d12p+49d13p+49d14p+49d15p +49d16p+49d17p+
49d18p+49d19p+49d20p+49d21p+49d22p+49d23p+49d24p+49d25p+49d26p+
49d27p+49d28p+7.835d29p+2.8991d30n

ST

2.6005X1+2.6851X2+2.6905X3+2.7243X4+2.7397X5+2.6815X6+2.5667X7
+2.7448X8+2.7585X9+2.7448X10+2.8295X11+3.1092X12+3.3082X13+
3.2131X14+3.0000X15+3.2981X16+2.7750X17+3.1818X18+3.5322X19+
3.4060X20+3.2560X21+3.3626X22+3.3754X23+3.1740X24+3.5527X25+
3.7105X26+3.3796X27+3.4205X28+2.3352X29+3.5005X30+d1n-d1p=2.1963

X1+X2+X3+X4+X5+X6+d2n-d2p=0.30

X7+d3n-d3p=0.30

X8+d4n-d4p=0.30

X9+d5n-d5p=0.30

X10+d6n-d6p=0.30

X11-d7n-d7p=0.30

X12+d8n-d8p=0.30

X13+d9n-d9p=0.30

X14+d10n-d10p=0.30

X15+d11n-d11p=0.30

X16+d12n-d12p=0.30

X17+d13n-d13p=0.30

X18+d14n-d14p=0.30

X19+d15n-d15p=0.30

X20+d16n-d16p=0.30

X21+d17n-d17p=0.30

X22+d18n-d18p=0.30

X23+d19n-d19p=0.30

X24+d20n-d20p=0.30

X25+d21n-d21p=0.30

X26+d22n-d22p=0.30

X27+d23n-d23p=0.30

X28+d24n-d24p=0.30

X29+d25n-d25p=0.30

X30+d26n-d26p=0.30

X19+X20+X21+X22+X23+X24+X25+X26+X27+X28+X29+X30+d27n-d27p=0.40

38X7+33X8+40X9+12X10+49X11+134X12+277X13-185X14+73X15+202X16+39X17

```
+169X18+379X19+274X20+201X21+231X22+231X23+165X24+442X25+353X26
+262X27+259X28+231X29+320X30+d28n-d28p=49
41.52X1+23.16X2+7.54X3+1.62X4+16.28X5+27.06X6+44.31X7+30.86X8
+.78X9+6.83X10+21.52X11+20.71X12+36.04X13+9.18X14+2.22X15+13.45X16
+21.95X17+18.29X18+36.37X19+20.55X20+1.76X21+10.16X22+11.72X23
+23.35X24+49.95X25+27.11X26+5.91X27+10.85X28+12.27X29+8.42X30
+d29n-d29p=3.505
2.0165X1+2.0633X2+2.0857X3+2.1133X4+2.126X5+2.0814X6+2.0689X7
+2.1309X8+2.1416X9+2.1299X10+2.1963X11+2.2737X12+2.4232X13
+2.1963X14+2.1894X15+2.4147X16+2.182X17+2.3275X18+2.5906X19
+2.4971X20+2.3816X21+2.4621X22+2.4752X23+2.321X24+2.6991X25
+2.6298X26+2.4766X27+2.5069X28+2.4752X29+2.5701X30+d30n=3.7105
.96X1+36.16X2+68.42X3+87.4X4+115.31X5+139.84X6-6.89X7+18.83X8
+82.35X9+98.41X10+130.82X11+130.62X12-2.42X13+62.62X14+79.19X15
+116.13X16+131.44X17+126.15X18-42.28X19+38.24X20+89.2X21+106.75X22
+112.69X23+135.37X24-38.58X25+18.52X26+69.5X27+110.9X28+114.04X29
+105.4X30=84
X1+X2+X3+X4+X5+X6+X7+X8+X9+X10+X11+X12+X13+X14+X15+X16+X17+X18+X19
+X20+X21+X22+X23+X24+X25-X26+X27+X28+X29+X30=1.0
END
```

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 52

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 4.11676400

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
D1N	.000000	2.196300
D2N	.000000	49.000000
D3P	.000000	49.000000
D4P	.000000	98.000000
D5P	.000000	49.000000
D6P	.000000	49.000000
D7P	.000000	49.000000
D8P	.000000	49.000000
D9P	.000000	49.000000
D10P	.000000	49.000000
D11P	.000000	49.000000
D12P	.000000	49.000000
D13P	.000000	49.000000
D14P	.000000	49.000000
D15P	.000000	49.000000
D16P	.000000	49.000000
D17P	.000000	49.000000

--MORE--

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
D18P	.000000	49.000000
D19P	.000000	49.000000
D20P	.000000	49.000000
D21P	.000000	49.000000
D22P	.000000	49.000000
D23P	.000000	49.000000
D24P	.000000	49.000000
D25P	.000000	49.000000
D26P	.000000	49.000000
D27P	.000000	49.000000
D28P	.000000	46.996250
D29P	.000000	7.827842
D30N	1.525243	.000000
X1	.000000	.415936
X2	.000000	.157477
X3	.000000	.088097
X4	.823494	.000000
X5	.000000	.117516
X6	.000000	.347697
X7	.000000	.424960
X8	.000000	.161564
X9	.000000	.059983
X10	.000000	.054174
X11	.000000	.167974

--MORE--

X12	.000000	.271683
X13	.000000	.312417
X14	.000000	.479710
X15	.000000	.060172
X16	.000000	.072154
X17	.000000	.173093
X18	.000000	.233611
X19	.000000	.199305
X20	.000000	.044687
X21	.000000	.031330
X22	.000000	.018219
X23	.060303	.000000
X24	.000000	.286353
X25	.000000	.231179
X26	.050822	.000000
X27	.065381	.000000
X28	.000000	.010488
X29	.000000	.005984
X30	.000000	.042902
D1P	.660228	.000000
D2P	.523494	.000000
D3N	.300000	.000000
D4N	.300000	.000000
D5N	.300000	.000000

--MORE--

D6N	.300000	.000000
D7N	.300000	.000000
D8N	.300000	.000000
D9N	.300000	.000000
D10N	.300000	.000000
D11N	.300000	.000000
D12N	.300000	.000000
D13N	.300000	.000000
D14N	.300000	.000000
D15N	.300000	.000000
D16N	.300000	.000000
D17N	.300000	.000000
D18N	.300000	.000000
D19N	.239697	.000000
D20N	.300000	.000000
D21N	.300000	.000000
D22N	.249178	.000000
D23N	.234619	.000000
D24N	.300000	.000000
D25N	.300000	.000000
D26N	.300000	.000000
D27N	.223494	.000000
D28N	.000000	.003750
D29N	.000000	.007153

--MORE--

```
     ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
      2)        .000000            .000000
      3)        .000000            .000000
      4)        .000000            .000000
      5)        .000000            .000000
      6)        .000000            .000000
      7)        .000000            .000000
      8)        .000000            .000000
      9)        .000000            .000000
     10)        .000000            .000000
     11)        .000000            .000000
     12)        .000000            .000000
     13)        .000000            .000000
     14)        .000000            .000000
     15)        .000000            .000000
     16)        .000000            .000000
     17)        .000000            .000000
     18)        .000000            .000000
     19)        .000000            .000000
     20)        .000000            .000000
     21)        .000000            .000000
     22)        .000000            .000000
 --MORE--
     23)        .000000            .000000
     24)        .000000            .000000
     25)        .000000            .000000
     26)        .000000            .000000
     27)        .000000            .000000
     28)        .000000            .000000
     29)        .000000            .003750
     30)        .000000            .007158
     31)        .000000          -2.599100
     32)        .000000            .001516
     33)        .000000           5.559917

 NO. ITERATIONS=       52

 DO RANGE(SENSITIVITY) ANALYSIS?
 ?
 :
 :
```

PM utilizando $f_1 = 1.0$

MIN 2.1963d1n+49d2n+49d3p+49d4p+49d4p+49d5p+49d6p+49d7p+49d8p+
49d9p+49d10p+49d11p+49d12p+49d13p+49d14p+49d15p +49d16p+49d17p+
49d18p+49d19p+49d20p+49d21p+49d22p+49d23p+49d24p+49d25p+49d26p+
49d27p+49d28p+7.835d29p+2.6991d30n
ST
2.6005X1+2.6851X2+2.6905X3+2.7243X4+2.7397X5+2.6818X6+2.5667X7
+2.7448X8+2.7585X9+2.7448X10+2.8295X11+3.1092X12+3.3082X13+
3.2131X14+3.0000X15+3.2981X16+2.7750X17+3.1818X18+3.5322X19+
3.4080X20+3.2560X21+3.3626X22+3.3754X23+3.1740X24+3.5527X25+
3.7105X26+3.3796X27+3.4205X28+2.3352X29+3.5005X30+d1n-d1p=2.1963
X1+X2+X3+X4+X5+X6+d2n-d2p=0.30
X7+d3n-d3p=0.30
X8+d4n-d4p=0.30
X9+d5n-d5p=0.30
X10+d6n-d6p=0.30
X11+d7n-d7p=0.30
X12+d8n-d8p=0.30
X13+d9n-d9p=0.30
X14+d10n-d10p=0.30
X15+d11n-d11p=0.30
X16+d12n-d12p=0.30
X17+d13n-d13p=0.30
X18+d14n-d14p=0.30
X19+d15n-d15p=0.30
X20+d16n-d16p=0.30
X21+d17n-d17p=0.30
X22+d18n-d18p=0.30
X23+d19n-d19p=0.30
X24+d20n-d20p=0.30
X25+d21n-d21p=0.30
X26+d22n-d22p=0.30
X27+d23n-d23p=0.30
X28+d24n-d24p=0.30
X29+d25n-d25p=0.30
X30+d26n-d26p=0.30
X19+X20+X21+X22+X23+X24+X25+X26+X27+X28+X29+X30+d27n-d27p=0.40
X7+X8+X9+X10+X11+X12+2X13+2X14+2X15+2X16+2X17+2X18+3X19+3X20+3X21

```
+3X22+3X23+3X24+4X25+4X26+4X27+4X28+4X29+4X30+d28n-d28p=1.0
41.52X1+23.16X2+7.54X3+1.62X4+16.28X5+27.06X6+44.31X7+30.86X8
+.75X9+6.83X10+21.52X11+20.71X12+36.04X13+9.18X14+2.22X15+13.45X16
+21.95X17+18.29X18+38.37X19+20.55X20+1.78X21+10.16X22+11.72X23
+23.35X24+49.95X25+27.11X26+5.91X27+10.85X28+12.27X29+8.42X30
+d29n-d29p=3.605
2.0165X1+2.0833X2+2.0857X3+2.1133X4+2.126X5+2.0814X6+2.0689X7
+2.1309X8+2.1416X9+2.1299X10+2.1963X11+2.2737X12+2.4232X13
+2.1963X14+2.1894X15+2.4147X16+2.182X17+2.3275X18+2.5906X19
+2.4971X20+2.3818X21+2.4621X22+2.4752X23+2.321X24+2.6991X25
+2.6296X26+2.4786X27+2.5069X28+2.4752X29+2.5701X30+d30n=3.7105
.96X1+36.16X2+68.42X3+87.4X4+118.31X5+139.84X6-8.89X7+18.83X8
+82.35X9+98.41X10+130.82X11+130.62X12-2.42X13-62.62X14+79.19X15
+116.13X16+131.44X17+126.15X18-42.28X19+33.24X20+58.2X21+108.75X22
+112.69X23+135.37X24-38.58X25+13.52X26+69.5X27+110.9X28+114.04X29
+105.4X30=54
X1+X2+X3+X4+X5+X6+X7+X8+X9+X10+X11+X12+X13+X14+X15+X16+X17+X18+X19
+X20+X21+X22+X23+X24+X25+X26+X27+X28+X29+X30=1.0
END
```

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 68

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 4.02051700

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
D1N	.000000	2.196300
D2N	.000000	49.000000
D3P	.000000	49.000000
D4P	.000000	98.000000
D5P	.000000	49.000000
D6P	.000000	49.000000
D7P	.000000	49.000000
D8P	.000000	49.000000
D9P	.000000	49.000000
D10P	.000000	49.000000
D11P	.000000	49.000000
D12P	.000000	49.000000
D13P	.000000	49.000000
D14P	.000000	49.000000
D15P	.000000	49.000000
D16P	.000000	49.000000
D17P	.000000	49.000000

--MORE--

D18P	.000000	49.000000
D19P	.000000	49.000000
D20P	.000000	49.000000
D21P	.000000	49.000000
D22P	.000000	49.000000
D23P	.000000	49.000000
D24P	.000000	49.000000
D25P	.000000	49.000000
D26P	.000000	49.000000
D27P	.000000	49.000000
D28P	.000000	48.761120
D29P	.000000	7.805022
D30N	1.489577	.000000
X1	.000000	1.104064
X2	.000000	.517282
X3	.000000	.174386
X4	.699115	.000000
X5	.000000	.531546
X6	.000000	1.063095
X7	.000000	1.253095
X8	.000000	.737663
X9	.000000	.116673
X10	.000000	.395265
X11	.000000	.788900

--MORE--

X12	.000000	.554889
X13	.000000	.306028
X14	.000000	.279084
X15	.000000	.256788
X16	.000000	.136828
X17	.000000	1.081803
X18	.000000	.557741
X19	.040735	.000000
X20	.000000	.026838
X21	.162804	.000000
X22	.000000	.118477
X23	.000000	.145990
X24	.000000	1.003541
X25	.000000	.305300
X26	.000000	.023601
X27	.000000	.024982
X28	.000000	.265911
X29	.000000	.406877
X30	.097346	.000000
D1P	.723032	.000000
D2P	.399115	.000000
D3N	.300000	.000000
D4N	.300000	.000000
D5N	.300000	.000000

--MORE--

D6N	.300000	.000000
D7N	.300000	.000000
D8N	.300000	.000000
D9N	.300000	.000000
D10N	.300000	.000000
D11N	.300000	.000000
D12N	.300000	.000000
D13N	.300000	.000000
D14N	.300000	.000000
D15N	.259265	.000000
D16N	.300000	.000000
D17N	.137196	.000000
D18N	.300000	.000000
D19N	.300000	.000000
D20N	.300000	.000000
D21N	.300000	.000000
D22N	.300000	.000000
D23N	.300000	.000000
D24N	.300000	.000000
D25N	.300000	.000000
D26N	.202654	.000000
D27N	.099115	.000000
D28N	.000000	.238861
D29N	.000000	.029978

--MORE--

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	.000000	.000000
3)	.000000	.000000
4)	.000000	.000000
5)	.000000	.000000
6)	.000000	.000000
7)	.000000	.000000
8)	.000000	.000000
9)	.000000	.000000
10)	.000000	.000000
11)	.000000	.000000
12)	.000000	.000000
13)	.000000	.000000
14)	.000000	.000000
15)	.000000	.000000
16)	.000000	.000000
17)	.000000	.000000
18)	.000000	.000000
19)	.000000	.000000
20)	.000000	.000000
21)	.000000	.000000
22)	.000000	.000000

--MORE--

23)	.000000	.000000
24)	.000000	.000000
25)	.000000	.000000
26)	.000000	.000000
27)	.000000	.000000
28)	.000000	.000000
29)	.000000	.238881
30)	.000000	.029978
31)	.000000	-2.699100
32)	.000000	.004087
33)	.000000	5.298199

NO. ITERATIONS= 68

DO RANGE(SENSITIVITY) ANALYSIS?
?
:
:

CONCLUSION

En el desarrollo de este trabajo, hemos observado que la teoria de cartera esta orientada a la distribución de los activos financieros de las empresas. Se concluye que el problema de cartera puede optimizar los recursos invertidos considerando las diferencias en su rendimiento esperado y el riesgo.

Para resolver este problema se cuenta con una gran variedad de modelos y técnicas, en particular, este trabajo nos ha llevado a conocer y desarrollar algunos de ellos, como es el caso del modelo de Markowitz.

Otros modelos que se presentaron aqui son los modelos de programacion lineal (PL) y por metas (PM), que permitieron resolver el problema aplicado a la selección de bonos inmunizados de riesgo debido a la variación en los precios y las tasas de interés. La aplicacion nos mostró que el uso de estos modelos matematicos logra cuantificar un objetivo trazado por el inversionista, es decir, maximizar su rendimiento.

Puesto que los modelos utilizados para resolver el problema de cartera de bonos son lineales, el uso de técnicas de solución se simplifica utilizando paquetes de programación lineal, en nuestro caso utilizamos el paquete de programacion lineal "LINDO". Encontramos que los datos tratados en el ejemplo considerado generan un programa factible, encontrandose la misma solución en ambas formulaciones de PL y PM.

Estos resultados eran de esperarse, puesto que si comparamos las formulaciones de PL y PM, notaremos que en ambos casos cada restriccion de PL tiene una contraparte exacta en el conjunto de restricciones de PM (esto es, β tiene el mismo valor en ambas formulaciones).

De aqui podemos concluir que los dos modelos de PL y PM nos permite tener un parametro de comparación, que nos garantize obtener una solución mas eficiente y segura. De tal manera que el inversionista pueda elegir cuales son las mejores alternativas del conjunto de bonos contenidos en la cartera de inversión. Con esto se alcanza el objetivo trazado al inicio de este trabajo, al menos para los datos utilizados en la aplicación dados en forma aleatoria.

Una forma de completar este objetivo sería la aplicación real de los modelos tratados aquí en las empresas. Para lograr esto se propone como un trabajo posterior investigar cuales son las técnicas de solución que emplean los Bancos y las empresas para seleccionar las diferentes alternativas de inversión, y junto con los modelos teóricos ya analizados, proponer modelos que se adapten y se apliquen a las características especiales de las empresas.

Con este trabajo, deseamos motivar al estudiante a introducirse al estudio de la teoría de cartera, y mediante su experiencia profesional pueda aplicar los modelos utilizados en este trabajo dentro de la industria, garantizando que éstas obtengan mayores beneficios y rendimientos a mediano y a largo plazo.

APENDICE A

EJEMPLO DE CARTERA EFICIENTE [13].

El propósito de este apéndice es mostrar un breve análisis de solución al problema de cartera eficiente, cuyo tema ya se discutió en forma amplia en el tercer capítulo.

Suponga que un inversionista tiene la opción de invertir en Certificados de Tesorería (CETES), depósitos a plazo en un banco (Tarjetas de Credito) y acciones de una empresa (Seguros América). Las características aleatorias de estos instrumentos se resumen en la tabla A.1.

TABLA A.1

Rendimiento esperado μ_i	Coeficiente de correlación ρ_{ij}	Desviación estandar σ_i
$\mu_{CT} = 9\%$	$\rho_{CT,CD} = 0.80$	$\sigma_{CT} = 0.5\%$
$\mu_{CD} = 10\%$	$\rho_{CD,AC} = -0.10$	$\sigma_{CD} = 1.5\%$
$\mu_{AC} = 14\%$	$\rho_{CT,AC} = -0.20$	$\sigma_{AC} = 6\%$

Los coeficientes de correlación y las desviaciones estandar se obtienen de la matriz de variancia-covariancia V, utilizando la relacion $\sigma_{ij} = \rho_{ij}\,\sigma_i \sigma_j$

$$V = \begin{array}{c} \\ CT \\ CD \\ AC \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} CT & CD & AC \end{array} \\ \begin{bmatrix} 25 & 60 & -60 \\ 60 & 225 & -90 \\ -60 & -90 & 360 \end{bmatrix} \end{array} \times 10^{-6}$$

Entonces, el rendimiento esperado de cartera es:

$$\mu = 0.09\,X_{CT} + 0.10\,X_{CD} + 0.14\,X_{AC}$$

donde

$$X_{CT} + X_{CD} + X_{AC} = 1$$

Supóngase que el rendimiento esperado que quiere obtener el inversionista es 11%. Debido a que hay dos ecuaciones con tres incógnitas, el sistema tiene un número infinito de soluciones del sistema de ecuaciones[1].

$$0.09\ X_{CT} + 0.10\ X_{CD} + 0.14\ X_{AC} = 0.11$$

$$X_{CT} + X_{CD} + X_{AC} = 1$$

$$X_{CT},\ X_{CD},\ X_{AC} \geq 0$$

están dadas por:

$$\begin{bmatrix} X_{CT} \\ X_{CD} \\ X_{AC} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3/4 \\ 1/4 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -5/4 \\ 1/4 \end{bmatrix} \qquad \text{para} \quad 0 \leq \alpha \leq 3/4$$

Es decir,

$$X_{CT} = \alpha$$

$$X_{CD} = 3/4 - 5/4\ \alpha = 1/4(3 - 5\alpha)$$

$$X_{AC} = 1/4(1 + \alpha)$$

para cualquier α entre 0 y 3/5.

Podemos ver que

1) $X_{CT} + X_{CD} + X_{AC} = \alpha + 1/4(3-5\alpha) + 1/4(1+\alpha)$

$$= (1-5/4 + 1/4) + 3/4 + 1/4$$

$$= 1 \qquad \text{para toda } \alpha.$$

2) $9X_{CT} + 10X_{CD} + X_{AC} = 9\alpha + 10/4(3-5\alpha) + 14/4(1+\alpha)$

$$= \alpha(9-50/4 + 14/4) + 30/4 + 14/4$$

$$= 44/4 = 11 \qquad \text{para toda } \alpha.$$

3) Si $\alpha = 0$, $X_{CT} = 0$; $X_{CD} = 3/4$; $X_{AC} = 1/4$

Si $\alpha = 3/4$; $X_{CT} = 3/5$; $X_{CD} = 0$; $X_{AC} = 2/5$

Si $\alpha < 0$ entonces $X_{CT} < 0$; Si $\alpha > 3/5$ entonces $X_{CD} < 0$

La mínima varianza se obtiene hasta alcanzar el valor máximo de $\alpha = 3/5$. Considérese $\alpha = 0, 1/5, 2/5, 3/5$, las soluciones para la variancia se muestran en la tabla A.2.

TABLA A.2

$X \backslash \alpha$	0	1/5	2/5	3/5
CT	0	1/5	2/5	3/5
CD	3/4	1/2	1/4	0
AC	1/4	3/10	7/20	0
σ	115.3×10^{-6}	67.45×10^{-6}	41.6×10^{-6}	37.8×10^{-6}

En este ejemplo se muestra como es posible obtener un número infinito de carteras con el mismo rendimiento esperado. Sin embargo, no todas tendrán la misma variancia. Si se desea formar una cartera que proporcione cierto rendimiento esperado, también será deseable que tenga la menor variancia posible.

Una cartera con rendimiento esperado μ es eficiente, si la varianza asociada a ella es la mínima entre todos los posibles carteras que proporcionan el mismo rendimiento esperado. De manera alternativa, una cartera con variancia σ^2 es eficiente si el rendimiento esperado μ es el máximo entre todos los posibles carteras que proporcionan la misma variancia.

Ejemplo A.2 Siguiendo el caso del ejemplo anterior, se tiene que

$X_{CT} = X_1 = \alpha; \quad X_{CD} = X_2 = 1/4(3-5\alpha); \quad X_{AC} = X_3 = 1/4(1+\alpha)$

y la varianza es dada por

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} X_i X_j \sigma_{ij} \qquad (1)$$

la matriz de varianza y covarianzas es

$$\sigma_{ij} = V = \begin{bmatrix} 25 & 60 & -60 \\ 60 & 225 & -90 \\ -60 & -90 & 360 \end{bmatrix} \times10^{-6}$$

Desarrollando (1), y utilizando los datos obtenidos, se obtiene:

$$\sigma^2(\alpha) = 115.3125 - 294.3750\alpha + 275.3125\alpha^2 \tag{2}$$

Derivando (2) con respecto a α e igualando a cero se tiene:

$$\frac{d\ \sigma^2}{d\ \alpha} = -294.375 + 2(275.3125)\alpha = 0$$

resolviendo

$$\alpha^* = 0.53462$$

Entonces la varianza mínima posible con una cartera de rendimiento esperado de 11% es:

$$\sigma^2(\alpha^*) = 36.623 \times 10^{-\sigma}$$

y se tiene que:

$$X^*_{CT} = 0.5346;$$

$$X^*_{CD} = 0.0817.$$

$$X^*_{AC} = 0.3837$$

es la única cartera eficiente asociada a un rendimiento esperado de 11%. En la figura A.1 se muestra el comportamiento de $\sigma^2(\alpha)$ en el rango de variación de α.

Lo ideal sería conocer todas las carteras eficientes para que fuera posible tener un panorama completo de las posibilidades de inversión. Entonces se tendría que resolver el problema siguiente para todos los valores posibles de μ:

$$\text{Minimizar } \sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} X_i X_j \sigma_{ij}$$

Sujeto a

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i X_i = \mu \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 1,$$

Comportamiento de la Varianza

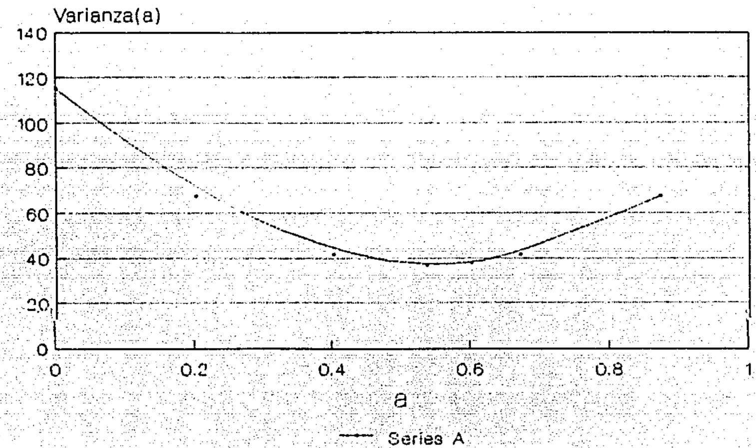


FIGURA A.1

$X_i \geq 0,$ $\qquad i = 1,2,\ldots,n$

Alternativamente, se podria resolver el problema asi

$$\text{Maximizar } \mu = \sum_{i=1}^{n} \mu_i X_i$$

Sujeto a

$$\sum_{i=1}^{n} X_i X_j \sigma_{ij} = \sigma^2 \qquad (4)$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 1$$

$$X_i \geq 0, \qquad i = 1,2,\ldots,n$$

para todos los valores de σ^2.

Ejemplo A.3 Se tiene que $\sum_{i=1}^{n} \mu_i X_i$ es una combinacion convexa de los rendimientos esperados μ_i. Entonces el rango de variacion μ esta entre el minimo y el maximo rendimiento esperado de los activos que se consideran: es decir, $9\% \leq \mu \leq 14\%$

En la tabla A.3 se muestran las carteras eficientes para distintos valores de μ, y en la Figura A.2 se muestra graficamente la frontera de carteras eficientes para el problema.

TABLA A.3

μ(%)	9	10	11	12	13	14
$\sigma^2 x10^{-6}$	2.5	11.20	36.623	101.25	182.81	360
X^*_{CT}	1	0.5	0.53	0.36	0	0
X^*_{CD}	0	0	0.081	0.04	0.25	0
X^*_{AC}	0	0.20	0.30	0.59	0.75	1

De aqui, tenemos que las carteras eficientes contienen la informacion más importante en el sentido de que nos da una medida exacta de la incertidumbre que se tiene que aceptar para cualquier nivel de rendimiento esperado.

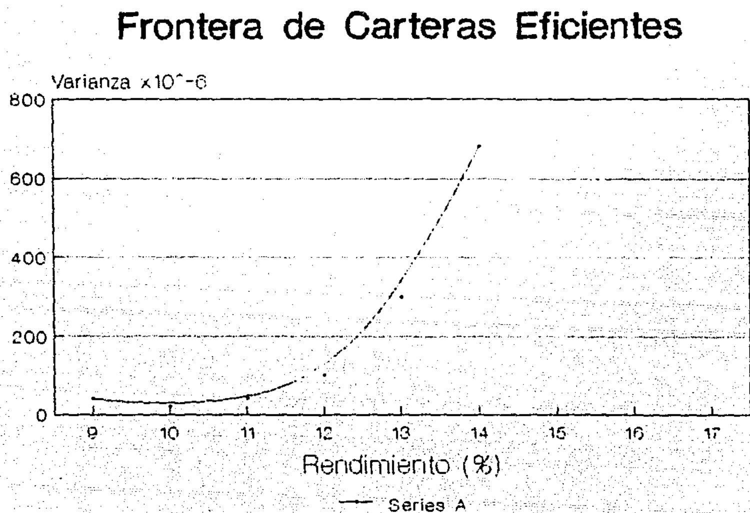

Frontera de Carteras Eficientes
Varianza x10^-6
800
600
400
200
0
9
10
11
12
13
14
15
16
17
Rendimiento (%)
Series A

FIGURA A.2

CARTERAS DE BONOS

a) Pogramas de Valor a la Par

Uno de los caminos para reducir la sensibilidad a los cambios en las tasas de interes es el valor a la par. El valor a la par es un intento para encontrar la cartera de costo minimo tal que los flujos de pagos en cada periodo sean suficientes para cubrir todas las deudas. Se definen los siguientes elementos.

L(t) = las obligaciones en el tiempo t.
C(t,i) = el flujo de pagos en el periodo t de un bono de tipo i.
P(i) = el precio del bono i.
N(i) = el numero de bonos de tipo i comprados.

El costo de la cartera de bonos es el numero de bonos de tipo *i* comprados por el precio por bono sumado sobre todos los bonos o $\sum_i N(i)\ P(i)$. Esta cantidad debe ser minimizada. El flujo de pagos agregados a todos los bonos en el tiempo t es $\sum_i C(t,i)N(i)$. Notese que algunos de estos flujos de pagos son pagos en cupones y otros son pagos de capital. La restricción para los flujos de pagos es suficiente para encontrar las obligaciones:

$$\sum_i N(i)\ C(t,i) \geq L(t) \qquad \text{para toda } t$$

La restricción final consiste en que el inversionista no puede emitir los bonos. Este requisito se establece como $N(i) \geq 0$. Resumiendo, el problema de valor a la par es

$$\text{Minimizar} \sum_i N(i)\ P(i)$$

sujeto a

$$\sum_i N(i)\ C(t,i) \geq L(t) \qquad \text{para toda } t$$

$N(i) \geq 0$ para toda i.

Notese que las obligaciones serán encontradas por pagos en cupones o bonos a vencimiento. Los bonos no serán vendidos para encontrar los flujos de pagos. Asi el riesgo solo es un riesgo por incumplimiento. Inversamente los cambios en las tasas de interés no afectan la capacidad para encontrar las obligaciones. Estos programas de igualación no necesitan cambios en una cartera con cambios en las tasas de interés. El problema anterior es un problema de programación lineal y se puede resolver con algoritmos estandar.

La mayor variación en este problema es permitir pagos adelantados. Si los pagos son adelantados entonces hay dos posibles fuentes de fondos que pueden usarse para encontrar las obligaciones: los flujos de pagos del bono invertido y los pagos realizados desde el primer periodo.

Supongamos que S_t representa la cantidad de inversión a corto plazo y r es la tasa de interes en un periodo. Entonces en el tiempo t el rendimiento de la inversión a corto plazo es la inversión en el primer periodo S_{t-1} más el interés en la inversión o $S_{t-1}(1+r)$. En cada periodo las fuentes de fondos (pago de la cartera y las inversiones a corto plazo) serán igual a el uso de fondos (obligaciones mas pagos adelantados).

Fuentes de Fondos = Uso de los Fondos

$$\begin{bmatrix}\text{de la}\\ \text{cartera}\\ \text{de bonos}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\text{de la primera}\\ \text{inversion a}\\ \text{corto plazo}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\text{Obligaciones}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\text{Inversion}\\ \text{nueva a un}\\ \text{periodo}\end{bmatrix}$$

Es decir,

$$\sum_i N(i)C(t,i) + S_{t-1}(1+r) = L(t) + S_t$$

Con la suma de los pagos adelantados el problema quedaria:

$$\text{Minimizar} \quad \sum_i N(i)\, P(i)$$

sujeto a:

$$\sum_i N(i)\ C(t,i) + S_{t-1}(1+r) \geq L(t) + St \qquad \text{para toda } t$$

$$N(i) \geq 0 \qquad \text{para toda } i$$

$$S_t \geq 0 \qquad \text{, para toda } t$$

$$S_{-1} = 0.$$

Una vez más, las obligaciones se encuentran fuera de los pagos de interés y los pagos de capital por lo que los bonos no serán vendidos. Así los flujos de pagos de la cartera de bonos dependen del curso futuro de las tasas de interés. No obstante, r es una tasa de interés futura. Si r es colocada suficientemente baja, habrá muy poco cambio en las tasas de interés futuras siendo más bajas y con poco riesgo por lo que los flujos de pagos serán insuficientes para encontrar las obligaciones.

Las empresas que ofrecen este tipo de productos por lo general encuentran que las presiones competitivas fuerzan a r a aproximarse a una expectativa común sobre el futuro de las tasas a corto plazo. En este caso el programa de igualación de bonos sería de mayor riesgo y otra vez su factibilidad depende en el transcurso de las tasas de interés futuras.

A.b Tecnicas de Intercambio de Bonos

Un procedimiento alternativo es intentar encontrar los bonos adicionales que pueden ser cambiados por la existencia de los bonos que mantienen el patrón del flujo de pagos futuros y aún las ganancias inmediatas de los beneficios del intercambio. Para especificar, definimos los siguientes elementos.

$P_B(i)$ es el costo de comprar el bono i.
$P_S(i)$ es el pago recibido de la venta del bono i.
$C(i,t)$ es el flujo de pagos del bono i en el periodo t.
$N_B(i)$ es el número de bonos de tipo i comprados.
$N_S(i)$ es el número de bonos del tipo i vendidos.

Con estas definiciones el costo de los bonos comprados es

$$\sum_{i} N_B(i)\, P_B(i)$$

El beneficio es la diferencia entre la venta y el costo de la compra o

$$\sum_{i} N_S(i)P_S(i) \;-\; \sum_{i} N_B(i)P_B(i)$$

El objeto del programa de intercambio de bonos es maximizar esta diferencia sujeta al flujo de pagos no reducidos. Si el intercambio resulta en flujos de pagos reducidos, la cartera de bonos no podrá cumplirse para cualquier obligación. Expresando esta restricción:

$$\sum_{i} N_B(i)C(i,t) \geq \sum_{i} N_S(i)C(i,t) \qquad \text{para toda } t$$

Por lo que, el modelo de intercambio de bonos es

$$\text{Maximizar} \;\; \sum_{i} N_S(i)P_S(i) - \sum_{i} N_B(i)\, P_B(i)$$

sujeto a

$$\sum_{i} N_B(i)C(i,t) \geq \sum_{i} N_S(i)C(i,t) \qquad \text{para toda } t.$$

$$N_B(i),\; N_S(i) \geq 0 \qquad \text{para toda } i.$$

La capacidad para llevar fondos adelantados del primer al ultimo periodo podria agregarse al problema de intercambio de bonos. Esto incrementa el riesgo puesto que las tasas de interés futuras son desconocidas. Sin embargo, se incrementa el numero de oportunidades de intercambio. Agregando la capacidad para llevar los fondos adelantados se puede desarrollar como sigue.

1. S_t es la inversión a corto plazo en el periodo t.
2. r es la tasa de interés a un periodo.

El valor de pagos adelantados llevados desde el periodo t-1 es $S_{t-1}(1+r)$. La inversión en el pago a corto plazo en el periodo t es S_t. Si no se permiten las cantidades adeudadas a corto plazo, entonces S_t será distinto de cero. El problema de intercambio de bonos estandar es

$$\text{maximizar} \quad \sum_i N_S(i)P_S(i) - \sum_i N_B(i)P_B(i)$$

sujeto a

$$\sum_i N_B(i)C(i,t) + S_{T-1}(1+r) \geq \sum_i N_S(i)C(i,t) + S_t, \qquad t = 1,2,\ldots,T$$

$$N_B(i),\ N_S(i) \geq 0 \qquad \text{para toda } i$$

$$S_t \geq 0 \qquad \text{para toda } t$$

$$S_{-1} = 0.$$

BIBLIOGRAFIA

1. ALEXANDER, GORDON J. y RESNICK, BRUCE G., "Using Linear and Goal Programming to Inmunize Bond Portfolios", Journal of Banking and Finance, Vol 9, pag. 35-54, (1985).

2. BREALEY, RICHARD A., "Harry M. Markowitz's Contributions to Financial Economics", The Scandinavian Journal of Economics, Vol 93, No. 1, pag. 7-17, (1991).

3. BENNINGA, SIMON, "Numerical Techniques in Finance", Editorial The MIT Press, USA (1989).

4. ELTON, EDWIN J. y GRUBER, MARTIN J., "Modern Portfolio Theory and Investment Analysis", Ed. John Wiley & Sons, 3a. Edicion, USA (1987).

5. CLARK, JACK FRANCIS, "Management of Investments", Ed. McGraw-Hill International, U.S.A (1988).

6. CHAMBERS D. y CHARNES A., "International Analisis and Optimization of Bank Portfolios", Management Science, Vol. 7, No. 4, julio de 1961, pag. 393-410.

7. JONES, CHARLES P., "Investments: Analysis and Management", Ed. WIE-WILEY, 1ª Edicion, USA (1988).

8. LEE, SANG M. y LERRO A.J., "Optimizing the Portafolio Selection for Mutual Funds", Journal of Finance, Vol. 28, Dic. de 1973, pag. 1087-1101.

9. MARKOWITZ, HARRY M., "Normative Portfolio Analisis: Past, Present, and Future", Journal of Economics and Business, Vol 42, pag. 99-103, (1990).

10. MARTIN, JOHN D., COX, S. H. y MacMINN, R. D., "The Theory of Finance and Applications", Ed. The Dryden Press, USA (1988).

Finance and Applications", Ed. The Oryden Press, USA (1988).

11. MARMOLEJO, MARTIN G., "Inversiones: Práctica, Metodología, Estrategia y Filosofía", Instituto Mexicano de Ejecutivos de Finanzas, A.C., México (1985).

12. MOORE, BASIL J., "And Introduction to the Theory of Finance", Editorial The Free Press, 1ª Edición, USA (1969).

13. MARQUEZ, JAVIER D-C, "Carteras de Inversión, Fundamentos Teóricos y Modelos de Selección Optima", Editorial Limusa, 1ª Edición, México (1981).

14. OC H OA, FELIPE R., "Investigación de Operaciones en la Programacion de Inversiones", Bibl. Conjunta de la DEPFI, UNAM México (1978).

15. RICO, ELOY R., "Modelos Matemáticos de Inversiones", Tésis de Maestria en Investigación de Operaciones, Bibl. Conjunta de la DEPFI, UNAM México, Noviembre de 1989.

16. SHARPE, WILLIAM F., "Portfolio Theory and Capital Markets", Editorial McGraw-Hill, 1a. Edicion, (1970).

17. SPRECHER, RONALD C., "Essentials of Investmens", Editorial Houghton-Mifflin Co., 1a. Edición, USA (1978).

18. TIMOTHY, JOHNSTON E., "Investmens Principles", Editorial Prentice-Hall, 1a. Edición, USA (1978)

19. ZIEMBA W.T. y VICKSON R.G. "Stochastic Optimization Models in Finance, Editorial Academic Press, 1a. Edición, USA (1975).

20. WESTON, FRED J. y BRIGHAM, E. F., "Managerial Finance", Ed. The Dryden Press, 6a. Edición , USA (1978).