4

2 g

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ANALISIS DE FUNCIONES DE R^2 EN R

TESIS

Que para obtener el Titulo de:

MATEMATICO

Presenta:

MARIA ARACELI BERNABE ROCHA

Mexico, D. F. 1991

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

I N T R O D U C C I O N

El presente trabajo está dedicado al análisis de funciones de R^2 en R. Dentro de este análisis, estudiamos principalmente el comportamiento de una función, con el fin de establecer si existe un punto en el dominio de la función en el cual alcance su máximo o mínimo valor. Es de gran importancia este concepto, conocido como la Teoría de máximos y mínimos, dado que muchos problemas teóricos y prácticos requieren de su conocimiento para determinar la solución de un problema específico.

En la primera parte denominada " Puntos críticos, máximos y mínimos " se desarrolla la teoria para establecer:

a. Condiciones necesarias

b. Condiciones suficientes

para poder decir que en un punto la función alcanza su máximo o mínimo valor.

Estas condiciones necesarias y suficientes nos permitirán establecer un teorema, con criterios claros y precisos para determinar la naturaleza de un punto crítico.

Después de la teoría desarrollada se presenta una serie de problemas, con diferente grado de dificultad, resueltos de formas diversas y los cuales muestran que en muchas ocasiones no son aplicables los criterios establecidos, por no existir condiciones suficientes.

La segunda parte de este trabajo consiste en analizar el comportamiento de las funciones, pero ahora no en todo su dominio sino en un dominio restringido G, integrado por los puntos que satisfagan la relación $g(x,y) = 0$.

Si se trata de localizar los valores máximos y mínimos para

$$f : G \longrightarrow R ,$$

el problema es distinto al anterior, dado que f no siempre alcanza su valor máximo o mínimo en los mismos puntos en su dominio natural que en un dominio restringido. Sin embargo, existe una forma de relacionar la teoría desarrollada en la primera parte con este nuevo problema, y esto es, mediante la Regla de los Multiplicadores de Lagrange, la cual nos proporciona mediante una función auxiliar

$$h(x,y) = f(x,y) - \quad g(x,y)$$

un punto (x,y), el cual cumple las condiciones necesarias establecidas en el apartado a. Mediante un análisis de la función f restringida al conjunto G se puede llegar a determinar si este punto determina un valor extremo.

En este trabajo aparece la demostración de la Regla de los Multiplicadores de Lagrange para funciones definidas en R^n, después de la demostración se enuncia la versión para funciones definidas en R^2. Cabe mencionar que la demostración que aquí presentamos no utiliza los teoremas de la función inversa e implícita como suele suceder en los textos. Esta sección, como la anterior, es acompañada con algunos ejemplos, tanto en R^2 como en R^n.

PUNTOS CRITICOS, MAXIMOS Y MINIMOS

Para las funciones de varias variables, como para las funciones de una sola variable, una de las aplicaciones más importantes de la derivación es la teoría de los máximos y mínimos.

Sea $U \subset R^2$ y

$f: U \longrightarrow R$ una función

si consideramos la gráfica de f, obtendremos una superficie, la representación de f en R^3 que en ocasiones denotamos por $z=f(x,y)$.

Definición. Un punto p_0 es un máximo local de la superficie que es la gráfica de $z = f(x,y)$ si existe algún disco D con centro p_0 tal que $f(p_0) \geq f(p)$ para todo $p \in D$; el punto p_0 es un mínimo local si $f(p_0) \leq f(p)$ para todo $p \in D$. Los puntos máximos y mínimos se llaman extremos.

En muchos problemas prácticos, puede determinarse la naturaleza del punto "crítico" a partir de la naturaleza específica del problema, lo que nos llevará a decidir si se trata de un máximo o de un mínimo. Sin embargo, es importante tener condiciones generales necesarias y suficientes para determinar la ocurrencia de extremos.

A. CONDICIONES NECESARIAS

Efectuando un razonamiento geométrico en el caso de dos dimensiones, la existencia de un punto extremo significa que en el punto $p_\bullet$, el plano tangente a la superficie $z = f(x,y)$ es paralelo al plano-xy.

Así el vector normal

$$n = \frac{\partial f}{\partial x}(p_\bullet)\ \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(p_\bullet)\ \hat{j} - \hat{k}$$

es paralelo al vector $\hat{k}$. Es decir, $n=\tau\hat{k}$ para algún escalar τ lo que implica que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(p_\bullet)\ \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(p_\bullet)\ \hat{j} - \hat{k} = \tau\hat{k}$$

y por lo tanto

$$\frac{\partial f}{\partial x}(p_\bullet) = \frac{\partial f}{\partial y}(p_\bullet) = 0$$

o, en otras palabras, que

$$\nabla f\ (p_\bullet) = 0$$

Se dice que $p_{\bullet}$ es un crítico de $f(x,y)$ si $f(p_{\bullet})=0$. Como consecuencia tenemos que el primer paso para localizar extremos, es resolver el sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$$

No es fácil determinar si un punto crítico es un extremo. Es más, un punto crítico no necesariamente tiene que ser un punto máximo o mínimo.

Consideremos los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1. Consideremos la función

$$f(x,y) = x^2 y + y^2 x$$

Obtengamos los puntos críticos.

$$\frac{f}{x}(x,y) = 2xy + y^2$$

$$\frac{f}{y}(x,y) = 2yx + x^2$$

Por lo tanto, para localizar los puntos críticos es necesario resolver el siguiente sistema de ecuaciones

$$2xy + y^2 = 0 \qquad (1)$$

$$2yx + x^2 = 0 \qquad (2)$$

restando (1) y (2), obtenemos que

$$x^2 = y^2$$

es decir

$$y = x \quad ó \quad y = -x$$

y si sustituimos $y = x$ en (1) tenemos que

$$2y^2 + y^2 = 3y^2 = 0$$

lo cual implica que

$$y = 0 \quad , \; x = 0$$

De forma análoga si $y = -x$

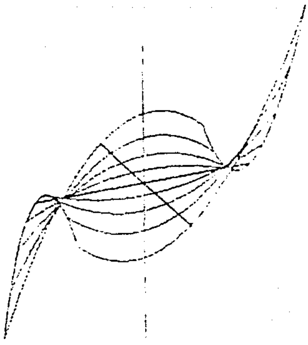
$$-2y^2 + y^2 = -y^2 = 0$$

implicando que

$$y = 0 \quad , \; x = 0$$

Lo que significa que el único punto crítico es el (0,0).

Si se conoce el problema que originó dicha ecuación o la superficie correspondiente, puede ser relativamente sencillo determinar si un punto crítico es un máximo local, mínimo local o ninguno de estos casos, de otra manera, si se carece de criterios, el problema puede ser muy complicado.



Ejemplo 2. Consideremos la superficie generada por la función

$$f(x,y) = x^3$$

en este caso

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$$

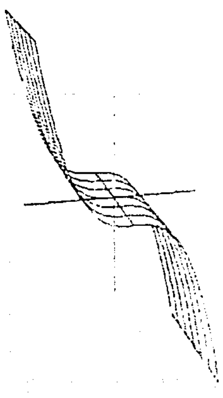
los puntos críticos serán los puntos que satisfacen la ecuación

$$3x^2 = 0$$

es decir

$$x = 0$$

por lo tanto, los puntos críticos son todos los puntos sobre el eje-y. Sin embargo, es evidente de la figura, que ninguno de estos puntos es un máximo o un mínimo local.



Ejemplo 3. Considérese la función

$$f(x,y) = xy$$

sus derivadas parciales de primer orden son:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y$$

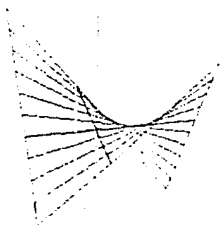
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x$$

por lo tanto para obtener los puntos críticos debemos resolver el sistema

$$x = 0$$

$$y = 0$$

es decir, el único punto crítico es el (0,0). Sin embargo, para todo disco D con centro en (0,0), la función puede tomar tanto valores positivos como valores negativos, dependiendo del cuadrante que contenga a (x,y). Por lo tanto, la función no tiene extremo en este punto. Geométricamente, la superficie que representa a la función $f(x,y) = xy$ es un paraboloide hiperbólico que no tiene punto máximo ni mínimo sino lo que se conoce como un punto silla de montar (o simplemente, punto silla) en el origen.



B. CONDICIONES SUFICIENTES PARA LOS VALORES EXTREMOS

Si se considera un punto $p_{\bullet}$ en el cual ambas derivadas parciales de la función se anulan, ocurre un valor extremo si y solo si la expresión

$$f(x,y) - f(a,b) \qquad \text{donde} \qquad p_{\bullet} = (a,b)$$

tiene el mismo signo para todos los valores (x,y) en un disco D con centro en (a,b).

Para motivar la condición general para determinar si un punto crítico $p_{\bullet}$ de una función $f : R^2 \longrightarrow R$ es un máximo local, un mínimo local o un punto silla, desarrollaremos la expresión

$$f(x,y) - f(a,b)$$

por medio de la fórmula de Taylor de segundo orden para $f(x,y)$.

$$\begin{aligned} f(x,y) = {} & f(a,b) + (x-a)\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + (y-b)\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \\ & + \tfrac{1}{2}\left[(x-a)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) + 2(x-a)(y-b)\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(a,b) \right. \\ & \left. + (y-b)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) \right] + R_2(a,b,x-a,y-b) \end{aligned}$$

Donde $\dfrac{R_2(a,b,x-a,y-b)}{\|(x-a,y-b)\|} \longrightarrow 0$ cuando $\begin{matrix} x \longrightarrow a \\ y \longrightarrow b \end{matrix}$

Aplicando las ecuaciones

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$$

se obtiene

$$f(x,y) = f(a,b) + \tfrac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\, x_{\bullet}^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(a,b)\, x_{\bullet}\, y_{\bullet}$$

$$+ \tfrac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)\, y_{\bullet}^2 + R_2(a,b,x_{\bullet},y_{\bullet}) \qquad (\text{ F1 })$$

donde $x_{\bullet} = x-a$, $y_{\bullet} = y-b$.

Asi la fórmula (F1) puede ser escrita como

$$f(x,y) = A\, x_{\bullet}^2 + B\, x_{\bullet} y_{\bullet} + C\, y_{\bullet}^2 + K + \varepsilon \qquad (\text{ F2 })$$

donde $\varepsilon \longrightarrow 0$ cuando $(x_{\bullet}, y_{\bullet}) \longrightarrow (0,0)$

$$A = \tfrac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) \qquad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(a,b) \qquad C = \tfrac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)$$

$$K = f(a,b)$$

Para iniciar el análisis, consideremos primero las funciones de la forma

$$f(x,y) = A\,x^2 + C\,y^2 + K \qquad A \neq 0 \;,\; C \neq 0$$

entonces

$$\nabla f(x,y) = 2Ax\,\hat{\imath} + 2Cy\,\hat{\jmath}$$

y $\nabla f(x,y) = 0$ implica que

$$(x,y) = (0,0)$$

es decir, $(0,0)$ es el único punto crítico.

Analicemos la función f

CASO 1. Si $A < 0$ y $C < 0$, $(0,0)$ es un máximo local.

Demostración

$$f(x,y) = A\,x^2 + C\,y^2 + K \qquad (x,y) \neq (0,0)$$

en particular

$$f(0,0) = K$$

y como $A < 0$ y $C < 0$ tenemos que

$$A\,x^2 \leq 0 \quad , \quad C\,y^2 \leq 0$$

por lo tanto

$$A\,x^2 + C\,y^2 \leq 0$$

$$A\,x^2 + C\,y^2 + K \leq K$$

es decir

$$f(x,y) \leq f(0,0)$$

demostrando así que $(0,0)$ es un máximo local.

CASO 2. Si $A > 0$ y $C > 0$, $(0,0)$ es un mínimo local.

Demostración

$$f(x,y) = A\,x^2 + C\,y^2 + K \qquad (x,y) \neq (0,0)$$

dado que

$$f(0,0) = K$$

y como $A < 0$ y $C < 0$ tenemos que

$$A\,x^2 \geq 0 \quad y \quad C\,y^2 \geq 0$$

por lo cual

$$A\,x^2 + C\,y^2 \geq 0$$

$$A\,x^2 + C\,y^2 + K \geq K$$

y por lo tanto

$$f(x,y) \geq f(0,0)$$

con lo que queda demostrado que (0,0) es un mínimo local.

CASO 3. Si $A < 0$ y $C > 0$, (0,0) es un punto silla.

Demostración

Tomemos una trayectoria para acercarnos al origen, sea esta trayectoria la representada por la ecuación $x = 0$, los puntos de esta trayectoria tienen la forma $(0,y)$, para ellos

$$f(0,y) = C\,y^2$$

y como $C > 0$, $C\,y^2 \geq 0$, tenemos

$$C\,y^2 + K \geq K$$

lo cual implica que

$$f(0,y) \geq f(0,0)$$

es decir, para estos puntos (0,0) representa un mínimo.

Sin embargo analicemos que pasa con la trayectoria ortogonal a la anterior, $y = 0$, los puntos que forman esta trayectoria son de la forma $(x,0)$ y para ellos

$$f(x,0) = A\,x^2$$

y dado que $A < 0$, $A\,x^2 \leq 0$, y obtenemos

$$A\,x^2 + K \leq K$$

lo cual implica que

$$f(x,0) \leq f(0,0)$$

es decir, para estos puntos (0,0) representa un máximo

De lo anterior podemos concluir que (0,0), en este caso, no es ni máximo ni mínimo, sino lo que se conoce como un punto silla.

CASO 4. Si $A > 0$ y $C < 0$, $(0,0)$ es un punto silla.

Demostración

Al igual que en el caso anterior, consideremos una trayectoria para acercarnos al origen, sea esta trayectoria la representada por la ecuación $x = 0$, los puntos de esta trayectoria son de la forma $(0,y)$, para ellos

$$\mathcal{f}(0,y) = C\, y^2$$

y como $C < 0$, $C\, y^2 \leq 0$, tenemos

$$C\, y^2 + K \leq K$$

lo cual implica que

$$\mathcal{f}(0,y) \leq \mathcal{f}(0,0)$$

es decir, para estos puntos $(0,0)$ representa un máximo.

Sin embargo analicemos que pasa con la trayectoria ortogonal a la anterior, $y = 0$, los puntos que forman esta trayectoria son de la forma $(x,0)$ y para ellos

$$\mathcal{f}(x,0) = A\, x^2$$

y como $A > 0$, $A\, x^2 \geq 0$, tenemos

$$A\, x^2 + K \geq K$$

lo cual implica que

$$\mathcal{f}(x,0) \geq \mathcal{f}(0,0)$$

es decir, para estos puntos $(0,0)$ representa un mínimo.

Para este caso al igual que para el anterior $\mathcal{f}$ tiene un punto silla en $(0,0)$.

CASO 5. Si $A = 0$ o bien $C = 0$,

¿ Qué tipo de punto crítico tendremos ?

Supongamos s.p.g. que $C = 0$, si $A = 0$ haciendo una rotación de la superficie la podemos llevar al caso $C = 0$.

Si $C = 0$ y $A \neq 0$

$$f(x,y) = A\,x^2 + K$$

tenemos dos casos

α) Si $A > 0$, $f(x,y)$ tiene un mínimo local en (0,0)

Demostración

Como $A > 0$, $A\,x^2 \geq 0$ y por lo tanto

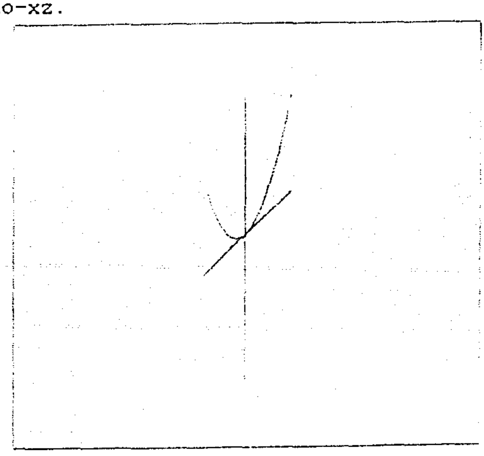
$$A\,x^2 + K \geq K$$

es decir

$$f(x,y) \geq f(0,0)$$

por lo cual f tiene un mínimo local en (0,0).

Graficamente se tiene una parábola que abre hacia arriba, en el plano-xz.



β) Si $A < 0$, $f(x,y)$ tiene un máximo local en $(0,0)$

Demostración

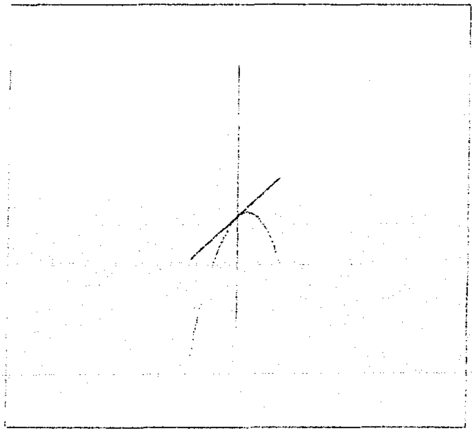
Como $A < 0$, $A\,x^2 \leq 0$ y por lo tanto

$$A\,x^2 + K \leq K$$

es decir

$$f(x,y) \leq f(0,0)$$

por lo cual f tiene un máximo local en $(0,0)$. Gráficamente se tiene una parábola que abre hacia abajo, en el plano-xz.



Con el fin de generalizar los resultados anteriores, consideremos las funciones de la forma

$$f(x,y) = A\,x^2 + B\,xy + C\,y^2 + K$$

donde, por supuesto, $B \neq 0$. Determinemos los puntos críticos de f

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2\,A\,x + B\,y = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2\,C\,y + B\,x = 0 \qquad (2)$$

Despejando a y de (1) y sustituyendo su valor en (2)

$$y = -\frac{2\,A\,x}{B}$$

$$B\,x - \frac{2\,C\,(2\,A\,x)}{B} = B^2\,x - 4\,A\,C\,x$$
$$= (B^2 - 4\,A\,C)\,x = 0$$

y despejando a x de (2) y sustituyendo su valor en (1)

$$x = -\frac{2\,C\,x}{B}$$

$$B\,y - \frac{2\,A\,(2\,C\,y)}{B} = B^2\,y - 4\,A\,C\,y$$
$$= (B^2 - 4\,A\,C)\,y = 0$$

obteniendo las ecuaciones

$$(B^2 - 4\,A\,C)\,x = 0$$

$$(B^2 - 4\,A\,C)\,y = 0$$

de donde concluimos que si $(B^2 - 4\,A\,C) \neq 0$, el único punto crítico es $(0,0)$. El caso $(B^2 - 4\,A\,C) = 0$ será tratado posteriormente.

C A S O $(B^2 - 4AC) \neq 0$

Analicemos primeramente el caso $(B^2 - 4AC) \neq 0$ con $A \neq 0$ y $C \neq 0$.

Observemos que en la función $f(x,y) = A x^2 + B xy + C y^2 + K$, K no toma parte en la determinación de los puntos críticos, ya que solo produce un corrimiento de la superficie hacia arriba o hacia abajo, por este motivo podemos ignorar el término K y escribir a f como

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= A x^2 + B xy + C y^2 \\
&= A \left[x^2 + \frac{B}{A} xy \right] + C y^2 \\
&= A \left[x + \frac{B}{2A} y \right]^2 + \left[C - \frac{B^2}{4A} \right] y^2 \\
&= A \left[x + \frac{B}{2A} y \right]^2 + \left[\frac{4AC - B^2}{4A} \right] y^2 \\
&= A x'^2 + C'y^2 \qquad \qquad (F3)
\end{aligned}
$$

donde

$$x' = \left[x + \frac{B}{2A} y \right] \quad , \quad C' = \left[\frac{4AC - B^2}{4A} \right] y^2$$

Con esta transformación de $f(x,y)$ al modelo de funciones tratadas anteriormente, podemos analizar la naturaleza del punto crítico (0,0) recurriendo a los casos anteriores.

CASO 1'. Si $4AC > B^2$ y $A < 0$, entonces $C' < 0$.

Aplicando el Caso 1, $(0,0)$ determina un máximo local.

CASO 2'. Si $4AC < B^2$ y $A > 0$, entonces $C' > 0$.

Aplicando el Caso 2, $(0,0)$ determina un mínimo local.

CASO 3'. Si $4AC < B^2$ y $A < 0$, entonces $C' > 0$.

Aplicando el Caso 3, $(0,0)$ es un punto silla.

CASO 4'. Si $4AC < B^2$ y $A > 0$, entonces $C' < 0$.

Aplicando el Caso 4, $(0,0)$ es un punto silla.

Recordemos que al inicio de este análisis supusimos que $(B^2 - 4AC) \neq 0$ y $A \neq 0$, $C \neq 0$. Para completar el análisis es necesario considerar la posibilidad de que $4AC = 0$, es decir que A ó C sean cero, pero bajo la hipótesis $(B^2 - 4AC) \neq 0$ o lo que es lo mismo $B \neq 0$.

CASO 5'. Si $4AC=0$, $B^2 - 4AC > 0$ y $(0,0)$ es un punto silla.

Demostración

Supongamos primero que $C = 0$ y $A \neq 0$: para poder escribir a $f(x,y)$ en la forma (F3).

$$f(x,y) = A x'^2 + C'y^2$$

donde

$$C' = -\frac{B^2}{4A}$$

α) Si $A < 0$, $C' > 0$, utilizando el caso 3, ya que por hipótesis $B^2 - 4AC > 0$, podemos asegurar que $(0,0)$ es un punto silla.

β) Si $A > 0$, $C' < 0$. utilizando el caso 4 aseguramos que $(0,0)$ es un punto silla.

En el caso en que $A = 0$ no podemos esribir a f en la forma (F3), sin embargo, podemos escribir a f como

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= B\,xy + C\,y^2 \\
&= C\left[\frac{B}{C}\,xy + y^2\right] \\
&= C\left[\frac{B^2}{4C^2}\,x^2 + \frac{B}{C}\,xy + y^2\right] - \frac{B^2}{4C}\,x^2 \\
&= C\left[y + \frac{B}{2C}\,x\right]^2 - \frac{B^2}{4C}\,x^2 \\
&= A'x^2 + C\,y'^2
\end{aligned}
$$

donde

$$
A' = -\frac{B^2}{4C}\ , \qquad y' = y + \frac{B}{2C}\,x
$$

con esta nueva transformación de f, podemos emplear el análisis hecho anteriormente para asegurar que $f(x,y)$ en $(0,0)$ tiene un punto silla.

CASO 6'. El único caso que resta por tratar bajo la hipótesis $(B^2 - 4\,A\,C) \neq 0$, es $A = 0$ y $C = 0$ en cuyo caso

$$
f(x,y) = B\,xy
$$

$$
f(0,0) = 0
$$

y $(0,0)$ será un punto silla.

Demostración

Supongamos $B > 0$

Tomemos una trayectoria para acercarnos al origen, sea esta trayectoria la representada por la ecuación $y = x$, los puntos de esta trayectoria tienen la forma (x,x), para ellos

$$f(x,x) = B\ x^2$$

y como $B > 0$, $B\ x^2 \geq 0$, tenemos

$$f(x,x) \geq f(0,0)$$

es decir, para estos puntos $(0,0)$ representa un mínimo.

Sin embargo analicemos que pasa con la trayectoria ortogonal a la anterior, $y = -x$, los puntos que forman esta trayectoria son de la forma $(x,-x)$ y para ellos

$$f(x,-x) = -\ B\ x^2$$

y como $B > 0$, $-\ B\ x^2 \leq 0$, tenemos

$$f(x,-x) \leq f(0,0)$$

es decir, para estos puntos $(0,0)$ representa un máximo.

Por lo tanto $(0,0)$ es un punto silla.

El análisis del caso $B < 0$ es análogo al anterior.

Con esto terminamos de analizar el caso $(B^2 - 4\ A\ C) \neq 0$.

Utilizando los resultados obtenidos y recordando que

$$f: U \subset R^2 \longrightarrow R$$

puede ser escrita en una vecindad del punto crítico $p_\bullet = (a,b)$, con (F2), como

$$f(x,y) = A\, x_\bullet^2 + B\, x_\bullet\, y_\bullet + C\, y_\bullet^2 + K + \varepsilon$$

donde $x_\bullet = x-a$, $y_\bullet = y-b$ y $\varepsilon \longrightarrow 0$ cuando $(x_\bullet, y_\bullet) \longrightarrow 0$.
Además

$$A = \tfrac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) \qquad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(a,b) \qquad C = \tfrac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)$$

$$K = f(a,b)$$

Esto sugiere que en una vecindad lo suficientemente pequeña del punto crítico la función es "casi" cuadrática, lo cual nos permite utilizar los resultados obtenidos con anterioridad.

La relación entre A,B,C, definidas anteriormente, nos proporcionan suficiente información para determinar la naturaleza del punto crítico (a,b), en el caso $(B^2 - 4\,A\,C) \neq 0$. Es decir tenemos condiciones suficientes para determinar si un punto crítico es máximo local, mínimo local o punto silla.

CASO 1". Si $(B^2 - 4\,A\,C) < 0$, $A < 0$ o, en forma equivalente, si

$$D = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(a,b)\right]^2 - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\right]\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)\right] < 0$$

y

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) < 0\ ,$$

entonces podemos afirmar que (a,b) es un punto crítico que determina un máximo local. En este caso D se llama la discriminante de f en el punto (a,b).

CASO 2". Si $(B^2 - 4AC) < 0$, $A > 0$ o, en forma equivalente, si

$$D = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)\right]^2 - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\right]\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)\right] < 0$$

y

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) > 0 \ ,$$

entonces (a,b) es un punto crítico que determina un mínimo local.

CASO 3". Si D, definida como en los casos anteriores, es mayor que cero, entonces (a,b) es un punto silla.

Ahora , ya estamos en posibilidades de enunciar el siguiente teorema, en el cual se reunen las condiciones necesarias para localizar puntos críticos y criterios para determinar la naturaleza de los mismos.

TEOREMA. Sea $f(x,y)$ de clase C^2 en un conjunto abierto U en R^2. Un punto (a,b) es un mínimo local de f siempre y cuando se cumplan las tres condiciones siguientes.

α) $$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$$

β) $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) > 0 \ ,$$

Γ) $$D = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)\right]^2 - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\right]\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)\right] < 0$$

Si en β) tenemos < 0 en lugar de > 0 y mantenemos la condición Γ), entonces tendremos un máximo local.

Si en el Teorema anterior, se tuviera $D > 0$ entonces tendríamos un punto silla. En el caso $D = 0$, para conocer la naturaleza del punto crítico se requiere de un análisis mayor.

CASO $(B^2 - 4AC) = 0$

Como hipótesis general en los casos anteriores $(B^2 - 4AC) \neq 0$, y únicamente existía un punto crítico. Para el caso $(B^2 - 4AC)=0$, el análisis no es sencillo, sin embargo trataremos de mostrar con ejemplos los posibles comportamientos de la función $f(x,y)$.

Ejemplo 1. Considérese la función cuadrática

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^2 - 2xy + y^2 \\ &= (x - y)^2 \end{aligned}$$

en este caso

$$\begin{aligned} B^2 - 4AC &= 4(1)(1) - (-2)^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

sus derivadas parciales de primer orden son:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x - 2y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y - 2x$$

por lo tanto para obtener los puntos críticos debemos resolver el sistema

$$\begin{aligned} 2x - 2y &= 0 \\ 2y - 2x &= 0 \end{aligned}$$

lo cual implica que

$$\begin{aligned} 2x - 2y &= 0 \\ 2x &= 2y \\ x &= y \end{aligned}$$

es decir, nuestros puntos críticos son todos los puntos sobre la recta $y = x$, en otras palabras, todos los puntos de la forma (x,x) con $x \in R$. Analicemos la naturaleza de estos puntos.

Para los puntos (x,x),

$$f(x,x) = 0$$

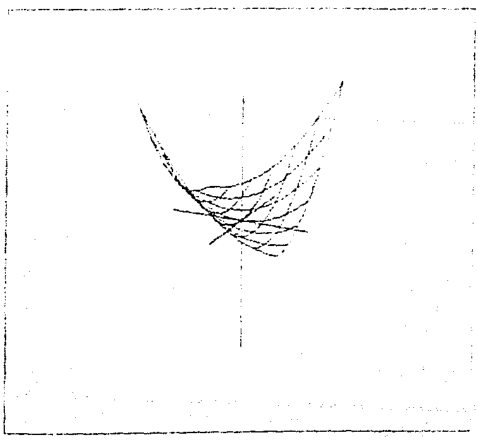
y como

$$f(x,y) = (x - y)^2 \geq 0 \qquad \forall (x,y) \in R^2$$

podemos concluir que

$$f(x,y) \geq f(0,0) \qquad \forall (x,y) \in R^2$$

por lo tanto, todos los puntos de la forma (x,x) determinan puntos mínimos locales de f.



Ejemplo 2. Tomemos un función cuadrática similar a la anterior.

$$f(x,y) = -x^2 + 2xy - y^2$$
$$= -(x-y)^2$$

en este caso

$$B^2 - 4AC = (2)^2 - 4(-1)(-1)$$
$$= 0$$

sus derivadas parciales de primer orden son:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2x + 2y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x - 2y$$

por lo tanto para obtener los puntos críticos debemos resolver el sistema

$$\begin{aligned} -2x + 2y &= 0 \\ 2x - 2y &= 0 \end{aligned}$$

igualando las ecuaciones obtenemos

$$\begin{aligned} -2x + 2y &= 0 \\ -2x &= -2y \\ x &= y \end{aligned}$$

por lo tanto los puntos críticos, al igual que en el ejemplo anterior son los puntos sobre la recta $y = x$. Analicemos su naturaleza.

Para los puntos (x,x),

$$f(x,x) = 0$$

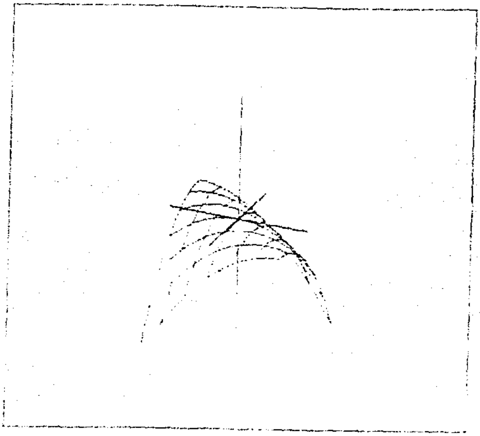
y como

$$f(x,y) = -(x-y)^2 \leq 0 \qquad \forall (x,y) \in R^2$$

podemos concluir que

$$f(x,y) \leq f(0,0) \qquad \forall (x,y) \in R^2$$

por lo tanto, todos los puntos de la forma (x,x) determinan puntos máximos locales de f.



Ejemplo 3. Sea f definida de la siguiente manera

$$f(x,y) = x^3 + 3xy^2$$
$$= x\,(x^2 + 3y^2)$$

notese que f no es una funcion cuadrática, como en el Ejemplo 1 y 2, sin embargo podemos calcular $D = B^2 - 4AC$, el discriminante de f, utilizando las derivadas parciales de segundo orden.

Las derivadas parciales de primer orden son:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 + 3y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 6xy$$

por lo tanto, los puntos críticos son los que satisfacen el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 3\ (x^2 + y^2) &= 0 \\ 6\ y &= 0 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad x = 0 \ , \ y = 0$$

es decir, el único punto crítico es el (0,0), determinemos la naturaleza de este punto. Las derivadas parciales de segundo orden son

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 6x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(x,y) = 6y$$

por lo tanto $D = B^2 - 4AC$ evaluada en (0,0) es cero.

En este ejemplo, aseguramos que (0,0) es un punto silla.

Demostración

$$f(0,0) = 0$$

Si nos acercamos al origen por la siguiente trayectoria $y=0$ y $x < 0$

$$f(x,0) = x^3 < 0 \qquad \text{ya que} \qquad x < 0$$

por lo tanto para estos puntos

$$f(x,0) < f(0,0)$$

es decir (0,0) tiene apariencia de máximo. No obstante si nos acercamos al origen por la trayectoria $y=0$ y $x > 0$

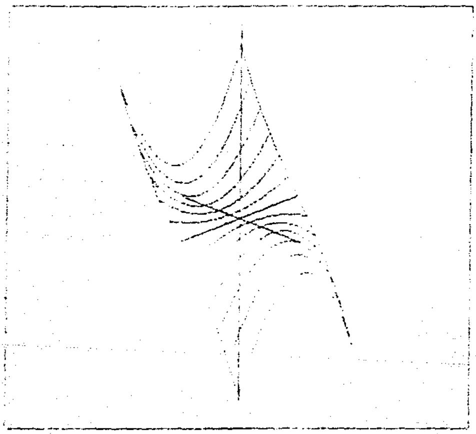
$$f(x,0) = x^3 > 0 \qquad \text{ya que} \qquad x > 0$$

por lo tanto para estos puntos

$$f(0,0) > f(0,0)$$

es decir (0,0) tiene apariencia de mínimo. Por lo tanto el origen representa un punto silla.

Concluyendo podemos decir que si $(B^2 - 4AC) = 0$, no podemos asegurar que exista un número finito de puntos críticos, y lo que es más importante, no podemos conocer la naturaleza de estos puntos.



EJEMPLOS

Encontrar los puntos críticos de las siguientes funciones y determinar la naturaleza de estos puntos.

1) $f(x,y) = x^2 + 4xy$

Para localizar los puntos críticos de la función es necesario calcular

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + 4y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4x$$

Dado que la condición necesaria para la existencia de extremos, es que ambas parciales se anulen en el punto, procederemos a resolver el sistema

$$2x + 4y = 0$$
$$4x = 0$$

de donde obtenemos, que el único punto donde se anulan las derivadas parciales, y por lo tanto el único punto crítico, es (0,0).

Veremos ahora si el punto (0.0) corresponde a un máximo, un mínimo o un punto silla, para lo que necesitamos calcular las derivadas parciales de segundo orden.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(x,y) = 4$$

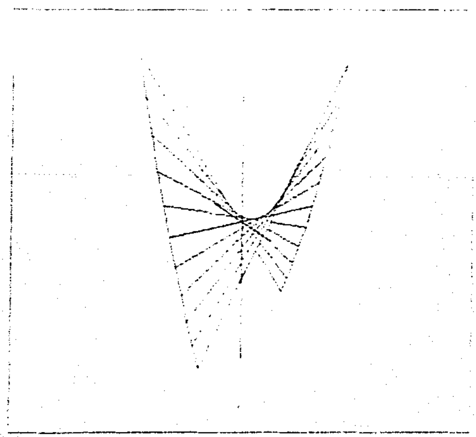
Dado que las parciales de segundo orden existen y son continuas podemos hacer uso de los criterios que nos porporciona el teorema anterior para determinar la naturaleza del punto (0,0). Por lo tanto calculando

$$D = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(0,0)\right]^2 - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)\right]\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)\right]$$

$$= (4)^2 - (2)\ (0) = 16$$

y como $D > 0$ entonces (0,0) es un punto silla.

Así la función $f(x)$ tiene un punto silla en (0,0).



2) $f(x,y) = x^4 + 2y^4 + 32x - y + 17$

Para localizar los puntos críticos de la función es necesario calcular

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 + 32$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 8y^3 - 1$$

Igualando a cero las derivadas parciales para obtener los puntos críticos, entonces

$$\begin{array}{l} 4x^3 + 32 = 0 \\ 8y^3 - 1 = 0 \end{array} \Longrightarrow \quad x = -2 \quad , \; y = ½$$

por lo tanto el único punto crítico es $(-2, ½)$.

Calcularemos ahora las derivadas parciales de segundo orden para determinar la naturaleza del punto crítico.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12x^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 24y^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(x,y) = 0$$

Las derivadas parciales de segundo orden existen y son continuas, de acuerdo a los criterios establecidos, y como

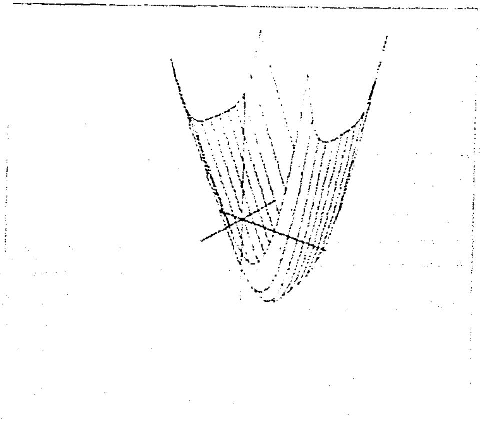
$$D = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(-2, ½)\right]^2 - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-2, ½)\right]\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-2, ½)\right]$$

$$D = 0 - (48)(6) = -288$$

es decir, $D < 0$ y

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-2,\tfrac{1}{2}) = 48$$

concluímos que f en $(-2,\tfrac{1}{2})$ tiene un mínimo.



3) $f(x,y) = x^2 + 4y^3 - 12y^2 - 36y$

Las derivadas parciales de primer orden son

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 12y^2 - 24y - 36$$

Igualamos a cero las primeras parciales para obtener los puntos críticos, obtenemos

$$\begin{aligned} 2x &= 0 \\ 12y^2 - 24y - 36 &= 0 \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ (y+1)\ (y+3) &= 0 \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

$$x = 0 \quad , \quad y = -1 \quad ó \quad y = 3$$

Por lo que tenemos 2 puntos críticos (0,-1) y (0,3).

Para determinar su naturaleza, calculemos las derivadas parciales de segundo orden

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 24y - 24$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x,y) = 0$$

Las derivadas parciales de segundo orden existen y son continuas. Utilizando los criterios para determinar la naturaleza de los puntos obtenemos que

Para el punto (0,-1)

$$D = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(0,-1)\right]^2 - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,-1)\right]\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,-1)\right]$$

$$D = 0 - (2)(-48) = 96$$

es decir, $D > 0$ y por lo tanto (0,-1) es un punto silla.

Para el punto (0,3)

$$D = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(0,3)\right]^2 - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,3)\right]\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,3)\right]$$

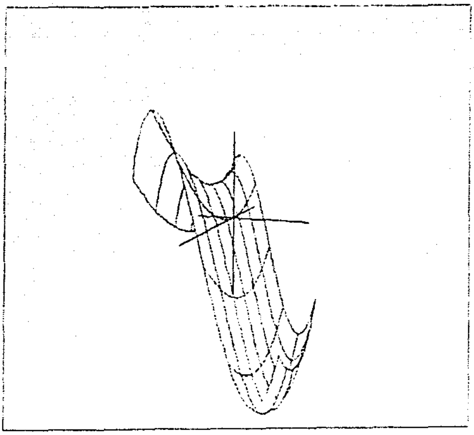
$$D = 0 - (2)(48) = 96$$

como $D < 0$ y

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,3) = 2$$

concluímos que f en (0,3) tiene un mínimo local.

Así f tiene un punto silla en (0,-1) y un mínimo relativo en (0,3).



4) $f(x,y) = x^2 + 4xy + 2y^2 - 2y$

Las derivadas parciales de primer orden son

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + 4y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4x + 4y - 2$$

Lo que nos lleva a resolver el siguiente sistema de ecuaciones, para determinar los puntos críticos

$$2x + 4y = 0 \quad \ldots\ldots \quad (1)$$
$$4x + 4y - 2 = 0 \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

resolviendo por sustitución

de (1)

$$x = -2y$$

sustituyendo x en (2)

$$-8y + 4y - 2 = 0$$
$$-4y - 2 = 0$$
$$y = -\tfrac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow \quad x = 1$$

Por lo tanto el único punto crítico es el $(1,-\tfrac{1}{2})$.

Las derivadas parciales de segundo orden son

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 4$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x,y) = 4$$

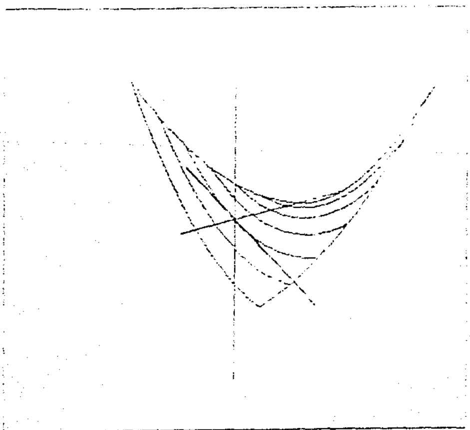
Dado que son continuas, podemos calcular

$$D = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(1,-\tfrac{1}{2})\right]^2 - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,-\tfrac{1}{2})\right]\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,-\tfrac{1}{2})\right]$$

$$D = (4)^2 - (2)(4) = 16 - 8 = 8$$

es decir, $D > 0$ y por lo tanto $(1,-\tfrac{1}{2})$ es un punto silla.

Así la función en $(1,-\tfrac{1}{2})$ tiene un punto silla.



5) $f(x,y) = x^2 + 3y^4 - 4y^3 - 12y^2$

Calcularemos las parciales de primer orden para localizar los puntos críticos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 12y^3 - 12y^2 - 24y$$

Igualando a cero las parciales y resolviendo el sistema

$$\begin{array}{r} 2x = 0 \\ 12y^3 - 12y^2 - 24y = 0 \end{array} \implies \begin{array}{r} x = 0 \\ 12y\,(y^2 - y - 2) = 0 \end{array}$$

$$\implies \begin{array}{r} x = 0 \\ 12y\,(y+1)(y-2) = 0 \end{array}$$

$$\implies x = 0 \;,\; y = 0 \;\text{ ó }\; y = -1 \;\text{ ó }\; y = 2$$

Por lo tanto los puntos críticos son (0,0), (0,-1), (0.2). Determinemos cuales puntos son extremos relativos y cuales puntos silla.

Las derivadas parciales de segundo orden son

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) - 36y^2 - 24y - 24$$

y

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x,y) = 0$$

Dado que son continuas, podemos calcular D en cada uno de los puntos.

Para el (0,0)

$$D = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(0,0)\right]^2 - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)\right]\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)\right]$$

$$D = (0)^2 - (2)(-24) = 48$$

Como $D > 0$, tenemos el caso en que el origen representa para f un punto silla.

Para el punto (0,-1)

$$D = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(0,-1)\right]^2 - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,-1)\right]\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,-1)\right]$$

$$D = (0)^2 - (2)(36) = -72$$

es decir, $D < 0$ y

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2$$

y por lo tanto en (0,-1) f tiene un valor mínimo.

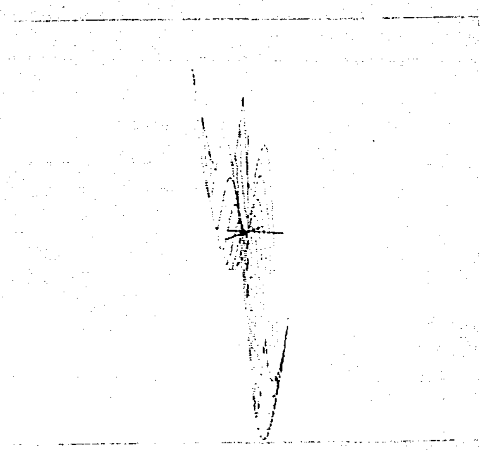
Por último en (0,2)

$$D = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(0,2)\right]^2 - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,2)\right]\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,2)\right]$$

$$D = (0)^2 - (2)(72) = -144$$

como en el caso anterior $D < 0$ y la segunda derivada parcial de f con respecto a x es positiva, por lo que (0,2) es un mínimo.

Así f tiene en (0,0) un punto silla y en (0,-1) y (0,2) mínimos.



6) $f(x,y) = (x-1)^2 - (y+5)^3$

Para localizar los puntos críticos calculamos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2(x-1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -3(y+5)^2$$

igualándolas a cero obtenemos

$$\begin{array}{l} 2(x-1) = 0 \\ -3(y+5)^2 = 0 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad x = 1 \quad ó \quad y = -5$$

es decir, las parciales de primer orden se anulan cuando $(x,y) = (1,-5)$, y el único punto crítico es este.

Ahora calculando las derivadas parciales de segundo orden y verificando que podemos utilizar los criterios para determinar la naturaleza del punto, obtenemos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -6(y+5)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x,y) = 0$$

Aunque las derivadas parciales de segundo orden son continuas para todos los puntos en R^2.

$$D = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(1,-5)\right]^2 - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,-5)\right]\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,-5)\right] = 0$$

es decir, las condiciones no son suficientes para determinar si (1,-5) es un extremo.

No obstante, analizando la función podemos decir que (1,-5) es un punto silla.

Demostración

Acerquémonos al punto por la trayectoria $y = -5$, para los puntos de esta trayectoria

$$f(x,-5) = (x-1)^2 \geq f(1,-5) = 0$$

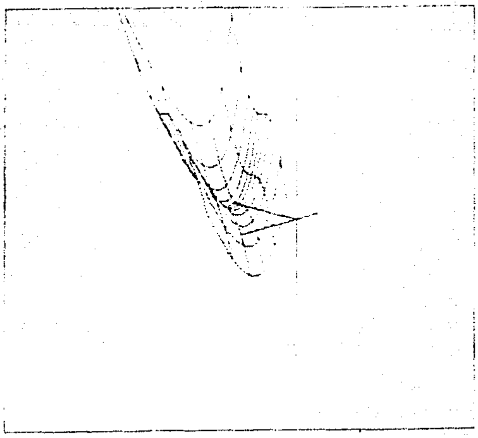
por lo que el punto sobre esta trayectoria, tiene apariencia de mínimo.

Por otro lado, si nos acercamos al (1,-5) por la trayectoria $x = 1$ y $y \geq -5$

$$f(1,y) = -(y-5)^3 \leq f(1,-5)$$

y por lo tanto, en este caso, el (1,-5) tiene apariencia de máximo.

Por lo tanto el (1,-5) es un punto silla.



7) $f(x,y) = (x-11)^4 + (y-7)^4$

Las derivadas parciales de primer orden son

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4(x-11)^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4(y-7)^3$$

e igualando las parciales a cero

$$\begin{array}{l} 4(x-11)^3 = 0 \\ 4(y-7)^3 = 0 \end{array} \implies x = 11 \quad , \quad y = 7$$

obtenemos que el (11,7) es el único punto crítico.

Para determinar la naturaleza del punto recurriremos al análisis de la función, dado que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12(x-11)^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 12(y-7)^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x,y) = 0$$

y en el (11,7)

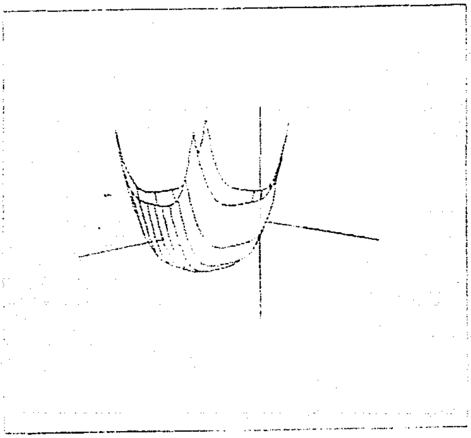
$$D = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(11,7)\right]^2 - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(11,7)\right]\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(11,7)\right] = 0$$

Analicemos la función. $f(x,y) = (x-11)^2 + (y-7)^2$ es positiva para todos los puntos en R^2, ya que cada uno de los términos son positivos, e igual a cero si $(x,y) = (11,7)$, por lo tanto

$$f(x,y) \geq f(11,7) \qquad \forall (x,y) \in R^2$$

en otras palabras, (11,7) es un mínimo.

Así f en (11,7) tiene un mínimo local.



8) $f(x,y) = -x^2y^2$

Para localizar los puntos críticos de f, calculemos las primeras derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2xy^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2x^2y$$

igualándolas a cero obtenemos

$$\begin{aligned} -2xy^2 &= 0 \\ -2x^2y &= 0 \\ \Longleftrightarrow \qquad x = 0 \quad &ó \quad y = 0 \end{aligned}$$

es decir, los puntos críticos son todos aquellos puntos que se encuentran sobre el eje-x o el eje-y, además del origen.

Tratemos de utilizar los criterios establecidos para determinar si estos puntos son extremos o no. Observemos qué ocurre

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -2y^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -2x^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x,y) = -4xy$$

y

$$D = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x,y)\right]^2 - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\right]\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\right]$$

$$= 16x^2y^2 - 4x^2y^2 = 12x^2y^2$$

e igual a cero para todos los puntos críticos, $(x,0)$, $(y,0)$ y $(0,0)$

Ya que las condiciones no son suficientes para determinar la naturaleza de los puntos, por que $D=0$, tendremos que analizar la función para determinarla.

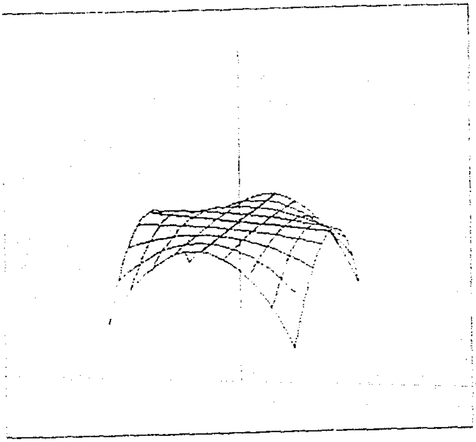
Si $(x,y)=(x,0)$	$f(x,0) = 0$	$x \in R$
Si $(x,y)=(0,y)$	$f(0,y) = 0$	$y \in R$
Si $(x,y)=(0,0)$	$f(0,0) = 0$	

y dado que $f(x,y) = -x^2y^2$ es negativa para todos los puntos $(x,y) \in R^2$, tales que $x \neq 0$ y $y \neq 0$, e igual a cero para los puntos restantes, los puntos críticos, concluimos que

$$f(x,y) = -x^2y^2 \leq f(0,0)$$
$$f(x,y) = -x^2y^2 \leq f(x,0)$$
$$f(x,y) = -x^2y^2 \leq f(0,y)$$

es decir, los puntos críticos son puntos máximos.

Así f tiene un máximo en el origen o en cualquier punto sobre el eje-x o eje-y.



9) $f(x,y) = x^2y + y^2x$

Hallamos las derivadas parciales y formamos el sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy + y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 + 2xy$$

igualándolas a cero obtenemos

$$\begin{aligned} 2xy + y^2 &= 0 \\ x^2 + 2xy &= 0 \end{aligned}$$

en forma equivalente

$$\begin{aligned} y\,(2x + y) &= 0 \quad \Longrightarrow \quad y=0 \quad \text{o} \quad y= -2x \\ x\,(x + 2y) &= 0 \quad \Longrightarrow \quad x=0 \quad \text{o} \quad y= -\tfrac{1}{2}x \end{aligned}$$

obteniendo así que el único punto crítico es el (0,0).

Hallamos las derivadas de segundo orden

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x,y) = 2x + 2y$$

y formando el discriminante para el origen tenemos

$$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(0,0)\right]^2 \quad \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)\right]\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)\right] = 0$$

Por lo que tenemos que continuar con el análisis de la función si deseamos determinar la naturaleza del origen.

Analizando el signo de la función obtenemos

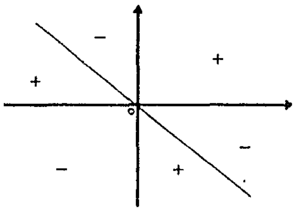
$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^2 y + y^2 x \\ &= xy\,(x + y) \end{aligned}$$

de donde obtenemos que f es positiva, si y sólo si

$$\begin{array}{llll} & x > 0 \;,\; y > 0 & & \\ \text{ó} & x < 0 \;,\; y > 0 & \text{y} & y < -x \\ \text{ó} & x > 0 \;,\; y < 0 & \text{y} & y < -x \end{array}$$

e igual a cero para el origen y todos aquellos puntos sobre las rectas $y=0$, $x=0$ e $y=-x$.

Analizando gráficamente estos resultados obtenemos



es decir, se tienen 3 regiones donde la función es negativa y por consiguiente en las cuales se tienen depresiones. A este tipo de superficies se les llama "silla de mono", por que una silla de mono debería tener 3 depresiones, en 2 de las cuales se apoyarían las patas y en la tercera la cola.

Demostremos, ahora, que el origen es un punto silla.

Acercándonos al origen por medio de la trayectoria

$y = \frac{1}{2}x \qquad \text{con} \qquad x < 0$

$$f(x, \tfrac{1}{2}x) = \tfrac{1}{2}x^3 + \tfrac{1}{4}x^3 = \tfrac{3}{4}x^3 < 0$$

es decir

$$f(x, \tfrac{1}{2}x) < f(0,0)$$

por lo tanto, para estos puntos el origen tiene apariencia de máximo.

Sin embargo, si nos acercamos al origen por la trayectoria ortogonal a la anterior

$y = -2x \qquad \text{con} \qquad x > 0$

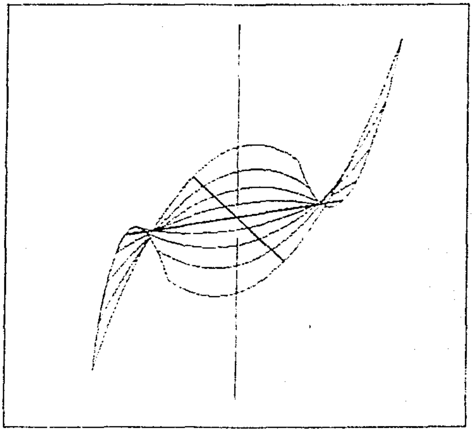
$$f(x,-2x) = -2x^3 + 4x^3 = 2x^3 > 0$$

es decir

$$f(x,-2x) > f(0,0)$$

teniendo el origen apariencia de mínimo para los puntos sobre esta trayectoria.

Por lo tanto f en (0,0) tiene un punto silla.



10) $f(x,y) = x^3$

Las derivadas parciales de primer orden son

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$$

y se anulan cuando $x=0$. Obteniendo así, que los puntos críticos se encuentran sobre el eje-y.

Hallamos las derivadas de segundo orden

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6x$$

$$\frac{\partial^2 f}{y^2}(x,y) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(x,y) = 0$$

y el discriminante para los puntos sobre el eje-y es

$$D = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(0,y)\right]^2 - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,y)\right]\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,y)\right] = 0$$

Dado que las condiciones de la función no son suficientes para determinar si estos puntos son puntos extremos o no, recurriremos al análisis de la función.

Podemos afirmar que los puntos sobre el eje-y son puntos silla, demostrémoslo.

Demostraremos que dado $(0,c)$, un punto sobre el eje-y, este punto es un punto silla.

$$f(0,c) = 0$$

Tomemos la trayectoria $y = x-c$ con $x > 0$, para acercarnos al punto $(0,c)$,

$$f(x,x-c) = x > 0$$

es decir

$$f(x,x-c) > f(0,c)$$

con lo que demostramos que para los puntos sobre esta trayectoria el punto $(0,c)$ tiene apariencia de mínimo.

Sin embargo, si tomamos la trayectoria $y = x-c$ con $x < 0$,

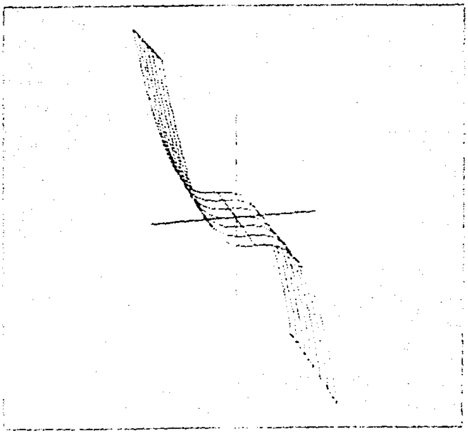
$$f(x,x-c) = x < 0$$

y por lo tanto

$$f(x,x-c) < f(0,c)$$

con lo que demostramos que para los puntos sobre esta trayectoria el punto $(0,c)$ tiene apariencia de máximo.

Y podemos decir que f en todos los puntos sobre el eje-y tiene puntos silla.



11) $f(x,y) = xy$

Las derivadas parciales de primer orden son

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x$$

Igualamos a cero las primeras parciales para obtener los puntos criticos ,obtenemos

$$x = 0$$
$$y = 0$$

Por lo que tenemos un único punto crítico, el origen.

Para determinar su naturaleza, calculemos las derivadas parciales de segundo orden

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$$

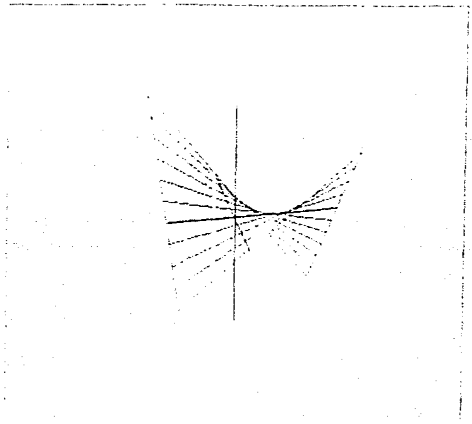
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x,y) = 1$$

formando el discriminante para el origen

$$D = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(0,0)\right]^2 - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)\right]\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)\right]$$

$$D = 1 - 0 = 1$$

como D es positiva, podemos decir que el origen es un punto silla, de acuerdo a los criterios establecidos.



12) $f(x,y) = (x+\frac{3}{2})^3(y+\frac{1}{2}) - (x+\frac{3}{2})(y+\frac{1}{2})^3$

Tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3(x+\tfrac{3}{2})^2(y+\tfrac{1}{2}) - (y+\tfrac{1}{2})^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (x+\tfrac{3}{2})^3 - 3(x+\tfrac{3}{2})(y+\tfrac{1}{2})^2$$

Las condiciones necesarias proporcionan el sistema

$$\begin{aligned} 3(x+\tfrac{3}{2})^2(y+\tfrac{1}{2}) - (y+\tfrac{1}{2})^3 &= 0 \\ (x+\tfrac{3}{2})^3 - 3(x+\tfrac{3}{2})(y+\tfrac{1}{2})^2 &= 0 \end{aligned}$$

en forma equivalente

$$\begin{aligned} (y+\tfrac{1}{2})[3(x+\tfrac{3}{2})^2 - (y+\tfrac{1}{2})^2] = 0 \quad &\Longrightarrow \quad y=-\tfrac{1}{2} \quad o \quad (y+\tfrac{1}{2})^2 = 3(x+\tfrac{3}{2})^2 \\ (x+\tfrac{3}{2})[(x+\tfrac{3}{2})^2 - 3(y+\tfrac{1}{2})^2] = 0 \quad &\Longrightarrow \quad x=-\tfrac{3}{2} \quad o \quad (x+\tfrac{3}{2})^2 = 3(y+\tfrac{1}{2})^2 \end{aligned}$$

obteniendo así que el único punto crítico es el $(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2})$.

Hallamos las derivadas de segundo grado

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6(x+7/2)(y+1/2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -6(x+7/2)(y+1/2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x,y) = 3(x+7/2)^2 - 3(y+1/2)^2$$

las cuales se anulan en $(-7/2,-1/2)$ y por consiguiente

$$D = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(-7/2,-1/2)\right]^2 - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-7/2,-1/2)\right]\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-7/2,-1/2)\right]$$

$$= 0$$

Continuemos con el análisis de la función para determinar si el $(-7/2,-1/2)$ es un extremo.

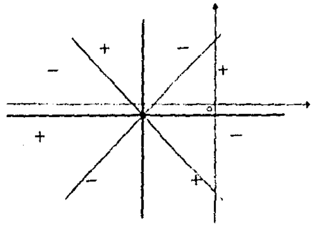
Analizando el signo de la función obtenemos

$$\begin{aligned} f(x,y) &= (x+7/2)^3(y+1/2) - (x+7/2)(y+1/2)^3 \\ &= (x+7/2)(y+1/2)\left[(x+7/2)^2 - (y+1/2)^2\right] \end{aligned}$$

de donde obtenemos que f es positiva, si y solo si

$$\begin{array}{lllll} & x > -7/2, & y > -1/2 & y & x > y-3 \\ \text{ó} & x > -7/2, & y < -1/2 & y & -x > y+4 \\ \text{ó} & x < -7/2, & y > -1/2 & y & y+4 > -x \\ \text{ó} & x < -7/2, & y < -1/2 & y & y-3 > x \end{array}$$

e igual a cero para el $(-7/2,-1/2)$ y todos aquellos puntos sobre las rectas $x=-7/2$, $y=-1/2$, $y=-x-4$ y $y=x+3$. Analizando gráficamente estos resultados obtenemos



es decir, existen 4 regiones donde la función es negativa y por consiguiente en las cuales se tienen depresiones.

Demostremos, ahora, que el $(-\frac{7}{2},-\frac{1}{2})$ no es un extremo.

Acercándonos al punto por medio de la trayectoria

$y = \frac{1}{2}\,(x+\frac{7}{2})$

$$\begin{aligned} f(x,y) &= (x+\tfrac{7}{2})^2\,[\tfrac{1}{2}(x+\tfrac{7}{2})] - (x+\tfrac{7}{2})\,[\tfrac{1}{2}(x+\tfrac{7}{2})]^2 \\ &= \tfrac{1}{2}\,(x+\tfrac{7}{2})^4 - \tfrac{1}{4}(x+\tfrac{7}{2})^4 \\ &= \tfrac{1}{4}\,(x+\tfrac{7}{2})^4 > 0 \end{aligned}$$

es decir

$$f(x,\tfrac{1}{2}(x+\tfrac{7}{2})) > f(-\tfrac{7}{2},-\tfrac{1}{2})$$

por lo tanto, para estos puntos el $(-\frac{7}{2},-\frac{1}{2})$ tiene apariencia de mínimo. Sin embargo, si nos acercamos al $(-\frac{7}{2},-\frac{1}{2})$ por la trayectoria

$y = \frac{1}{2}(3x+\frac{19}{2})$

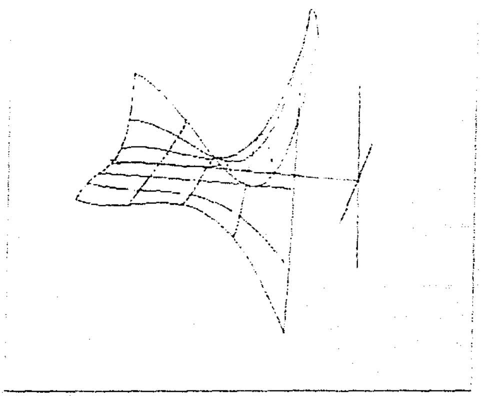
$$\begin{aligned} f(x,y) &= (x+\tfrac{7}{2})^2\,[\tfrac{1}{2}(3x+\tfrac{21}{2})] - (x+\tfrac{7}{2})\,[\tfrac{1}{2}(3x+\tfrac{21}{2})]^2 \\ &= \tfrac{3}{2}\,(x+\tfrac{7}{2})^4 - \tfrac{9}{4}(x+\tfrac{7}{2})^4 \\ &= -\tfrac{3}{4}(x+\tfrac{7}{2}) < 0 \end{aligned}$$

es decir

$$f(x,\tfrac{1}{2}(3x+\tfrac{21}{2})) < f(-\tfrac{7}{2},-\tfrac{1}{2})$$

teniendo el $(-\frac{7}{2},-\frac{1}{2})$ apariencia de máximo para los puntos sobre esta trayectoria.

Así f en $(-\frac{7}{2},-\frac{1}{2})$ no tiene ni máximo ni mínimo.



13) $f(x,y) = (y - 3x^2)(y - x^2)$

Hallamos los puntos críticos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -6x\,(y - x^2) - 2x\,(y - 3x^2)$$
$$= 12x^3 - 8xy$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (y - x^2) + (y - 3x^2)$$
$$= -4x^2 + 2y$$

lo que implica que

$$12x^3 - 8xy = 0 \quad \ldots\ldots \quad (1)$$
$$-4x^2 + 2y = 0 \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

si despejamos a y de (2) y sustituimos su valor en (1)

$$y = 2x^2$$

$$\Longrightarrow \quad 12x^3 - 8x(2x^2) = 12x^3 - 16x$$
$$= -4x^3 = 0$$

$$\Longrightarrow \quad x = 0 \quad , \quad y = 0$$

obteniendo así que el único punto crítico es el (0,0).

Hallamos las derivadas de segundo orden

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -8y + 36x^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x,y) = -8x$$

y por consiguiente

$$D = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(0,0)\right]^2 - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)\right]\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)\right]$$

$$= 0 - (0)(2) = 0$$

Condiciones que no son suficientes para determinar si el ori- es un extremo.

Analizando el signo de la función obtenemos

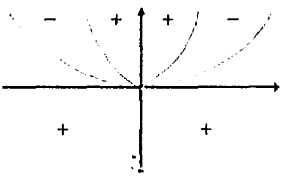
$$f(x,y) = (y - 3x^2)(y - x^2) > 0$$

$\Longleftrightarrow$

$(y-3x^2) > 0\ ,\ (y-x^2) > 0$ ó $(y-3x^2) < 0\ ,\ (y-x^2) < 0$

$\Longrightarrow\ y > 3x^2$ $\Longrightarrow\ y < x^2$

e igual a cero para el origen y todos aquellos puntos sobre las parábolas $y=3x^2$ e $y=x^2$. Estos resultados son mostrados gráficamente en el siguiente esquema



es decir, existen 2 regiones donde la función es negativa.
Demostremos, ahora, que el origen no es un extremo.

Acercándonos al origen por medio de la trayectoria $y = 2x^2$

$$f(x,2x^2) = (2x^2 - 3x^2)(2x^2 - x^2) = -x^4 < 0$$

es decir

$$f(x,2x^2) < f(0,0)$$

por lo tanto, para estos puntos el origen tiene apariencia de máximo.

Sin embargo, si nos acercamos al origen por la trayectoria $y = -x^2$

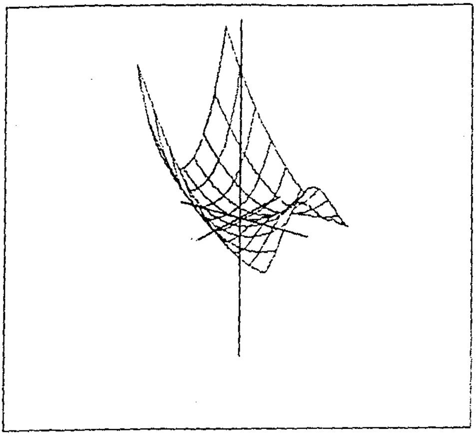
$$f(x,-x^2) = (-x^2 - 3x^2)(-x^2 - x^2) = 8x^4 > 0$$

es decir

$$f(x,-x^2) > f(0,0)$$

teniendo el origen apariencia de mínimo para los puntos sobre esta trayectoria.

Así f en (0,0) no tiene ni máximo ni mínimo.



14) $f(x,y) = x^3 - 3xy^2$

Con derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 3y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -6xy$$

Las condiciones necesarias proporcionan el sistema

$$\begin{aligned} 3x^2 - 3y^2 &= 0 \\ -6xy &= 0 \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \qquad x = 0 \quad , \; y = 0$$

obteniendo así que el único punto crítico es el (0,0).

Las derivadas de segundo orden son

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -6x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x,y) = -6y$$

tenemos que el discriminante para el origen es

$$D = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(0,0)\right]^2 - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)\right]\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)\right] = 0$$

Por lo que necesitamos continuar con el análisis de la función para determinar la naturaleza del origen.

Demostremos que el origen es un punto silla.

Acercándonos al origen por medio de la trayectoria

$y = x$ con $x > 0$

$$f(x,x) = x^3 - 3x^3 = -2x^3 < 0$$

es decir

$$f(x,x) < f(0,0)$$

por lo tanto, para estos puntos el origen tiene apariencia de máximo. Sin embargo, veamos qué sucede si nos acercamos al origen por la trayectoria ortogonal a la anterior

$y = -x$ con $x < 0$

$$f(x,-x) = x^3 - 3x^3 = -2x^3 > 0$$

es decir

$$f(x,-x) > f(0,0)$$

teniendo el origen apariencia de mínimo para los puntos sobre esta trayectoria.

Por lo tanto f en $(0,0)$ tiene un punto silla.

Realicemos el análisis de la función utilizando coordenadas polares

$$x = r\cos\theta \quad , \; y = r\,\mathrm{sen}\theta$$

$$f(r,\theta) = r^3\,(\cos^3\theta - 3\cos\theta\,\mathrm{sen}^2\theta)$$

recordando que $\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\,\mathrm{sen}^2\theta$

$$f(r,\theta) = r^3\cos 3\theta$$

de donde obtenemos que $f(r,\theta) = 0$

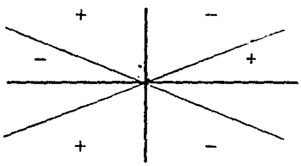
$$\text{si} \quad \theta = \tfrac{1}{6}\pi \quad , \quad \theta = \tfrac{1}{2}\pi \quad , \quad \theta = \tfrac{5}{6}\pi$$

estas 3 líneas, dividen al plano en 6 regiones.

Analicemos el signo de f para estas regiones.

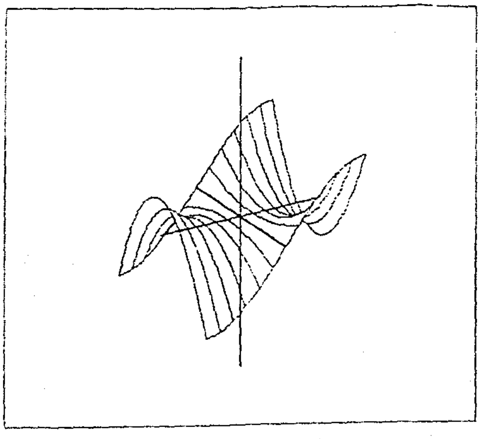
θ	$f(r,\theta) = r^3 \cos 3\theta$
$\frac{1}{6}\pi < \theta < \frac{1}{2}\pi$	negativa
$\frac{1}{2}\pi < \theta < \frac{5}{6}\pi$	positiva
$\frac{5}{6}\pi < \theta < \frac{7}{6}\pi$	negativa
$\frac{7}{6}\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$	positiva
$\frac{3}{2}\pi < \theta < \frac{11}{6}\pi$	negativa
$\frac{11}{6}\pi < \theta < \frac{1}{6}\pi$	positiva

Gráficamente



nuevamente se tienen 3 regiones donde la función es negativa y como en el ejemplo 10), la gráfica de esta superficie corresponde a un silla de mono.

Así f en el origen tiene un punto silla.



15) Considérese la función cuyo dominio es R^2 y tiene la siguiente regla de correspondencia

$$\mathcal{f}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

La función $\mathcal{f}$ es continua en todo punto $(x,y) \neq (0,0)$, porque sus valores están dados por una función racional de x e y, donde el denominador no se anula. Sin embargo, en (0,0) $\mathcal{f}$ no es continua, ya que aunque el valor de $\mathcal{f}$ está definido, no existe el límite de $\mathcal{f}$ cuando $(x,y) \longrightarrow (0,0)$. La razón es que diferentes vías de aproximación al origen pueden proporcionar límites diferentes.

Pues si nos acercamos por la recta y=mx, con $x \neq 0$

$$\mathcal{f}(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{x(mx)}{x^2 + m^2 x^2} = \frac{m}{1 + m^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \mathcal{f}(x,x) = \frac{m}{1 + m^2}$$

es decir, el valor del límite dependerá del valor de m, por lo tanto la función no es continua.

Dado que $\mathcal{f}$ no es continua en (0,0), determinemos mediante el análisis de la función, si es un extremo.

Si nos acercamos al origen por medio de la trayectoria y=x, con $x \neq 0$, tenemos que

$$\mathcal{f}(x,x) = \frac{x^2}{2x^2} = \tfrac{1}{2} > 0$$

es decir,

$$\mathcal{f}(x,x) > \mathcal{f}(0,0) = 0$$

por lo tanto, para estos puntos, el origen tiene apariencia de mínimo.

Sucede lo contrario, si nos acercamos al origen usando la trayectoria $y = -x$.

$$f(x,-x) = \frac{-x^2}{2x^2} = -½ < 0$$

es decir,

$$f(x,-x) < f(0,0) = 0$$

teniendo el (0,0) apariencia de máximo para estos puntos. Concluyendo decimos que el origen no es ni máximo ni mínimo.

Después de haber estudiado al único punto de discontinuidad, analicemos a la función $f(x,y)$, en el dominio $R^2-(0,0)$, y con regla de correspondencia

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

Dado que esta función es continua en su dominio, determinemos los puntos críticos.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y\ (x^2 + y^2) - xy\ (2x)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2y + y^3 - 2x^2y}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$= \frac{y^3 - x^2y}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x\ (x^2 + y^2) - xy\ (2y)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^3 + xy^2 - 2xy^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$= \frac{x^3 - xy^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

Las condiciones necesarias nos proporcionan el sistema

$$\begin{aligned} y - x^2y &= 0 \\ x - xy^2 &= 0 \end{aligned}$$

en forma equivalente

$$\begin{matrix} y\ (y^2 - x^2) = 0 \\ x\ (x^2 - y^2) = 0 \end{matrix} \implies x=0,\ y=0 \quad ó \quad y=x \quad ó \ y=-x$$

como el (0,0) no está en el dominio de la función, concluimos que los puntos críticos, son aquellos que satisfacen

$$y = x \quad ó \quad y = -x$$

Verifiquemos si f es de clase C^2.

Las parciales de segundo orden son

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(x,y) = \frac{(3y^2 - x^2)(x^2 + y^2)^2 - 4y\ (x^2 + y^2)(y^3 - x^2 y)}{(x^2 + y^2)^4}$$

$$= \frac{3x^2 y^2 - x^4 + 3y^4 - x^2 y^2 - 4y^4 + 4x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^3}$$

$$= \frac{-x^4 + 6x^2 y^2 - y^4}{(x^2 + y^2)^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(x,y) = \frac{(3x^2 - y^2)(x^2 + y^2)^2 - 4x\ (x^2 + y^2)(x^3 - xy^2)}{(x^2 + y^2)^4}$$

$$= \frac{3x^4 - x^2 y^2 + 3x^2 y^2 - y^4 - 4x^4 + 4x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^3}$$

$$= \frac{-x^4 + 6x^2 y^2 - y^4}{(x^2 + y^2)^3}$$

Como las derivadas parciales cruzadas son iguales calculamos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{(-2xy)(x^2 + y^2)^2 - 4x\ (x^2 + y^2)(y^3 - x^2 y)}{(x^2 + y^2)^4}$$

$$= \frac{-2x^3 y - 2xy^3 - 4xy^3 + 4x^3 y}{(x^2 + y^2)^3}$$

$$= \frac{2x^3y - 6xy^3}{(x^2 + y^2)^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{(-2xy)(x^2 + y^2)^2 - 4y\,(x^2 + y^2)(x^3 - xy^2)}{(x^2 + y^2)^4}$$

$$= \frac{-2x^3y - 2xy^3 - 4x^3y + 4xy^3}{(x^2 + y^2)^3}$$

$$= \frac{2xy^3 - 6x^3y}{(x^2 + y^2)^9}$$

Como las derivadas parciales de segundo orden son continuas, f es de clase C^2 y podemos formar el discriminante para los puntos críticos

Para los puntos (x,x), $x \neq 0$.

$$D = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x,x)\right]^2 - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,x)\right]\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,x)\right]$$

$$= \left[\frac{4x^4}{8x^6}\right]^2 - \left[\frac{2x^4 - 6x^4}{8x^6}\right]\left[\frac{2x^4 - 6x^4}{8x^6}\right]$$

$$= \left[\frac{4x^4}{8x^6}\right]^2 - \left[\frac{-4x^4}{8x^6}\right]^2 = 0$$

por lo que no podemos concluir nada acerca de la naturaleza de los puntos y necesitamos continuar con el análisis de la función.

Para los puntos sobre la recta $y = x$, $x \neq 0$

$$f(x,x) = \frac{x^2}{x^2 + x^2} = \frac{x^2}{2x^2} = \tfrac{1}{2}$$

y por consiguiente

$$f(x,y) \leq f(x,x)$$

dado que

$$0 \leq (x - y)^2$$

$$0 \leq x^2 - 2xy + y^2$$

$$2xy \leq x^2 + y^2$$

y por consiguiente

$$\frac{xy}{x^2 + y^2} \leq \tfrac{1}{2}$$

Por lo que podemos concluir que los puntos sobre la recta y=x son extremos máximos de f.

Continuando con el análisis, para los puntos (x,-x), $x \neq 0$.

$$D = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(x,-x)\right]^2 - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,-x)\right]\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,-x)\right]$$

$$= \left[\frac{4x^4}{8x^6}\right]^2 - \left[\frac{-2x^4 + 6x^4}{8x^6}\right]\left[\frac{-2x^4 + 6x^4}{8x^6}\right]$$

$$= \left[\frac{4x^4}{8x^6}\right]^2 - \left[\frac{4x^4}{8x^6}\right]^2 = 0$$

nuevamente las condiciones son insuficientes para determinar si los puntos son extremos o no, por consiguiente realicemos un análisis semejante al anterior.

Para los puntos sobre la recta $y = -x$, $x \neq 0$

$$f(x,x) = \frac{-x^2}{x^2 + x^2} = \frac{-x^2}{2x^2} = -\tfrac{1}{2}$$

y por consiguiente

$$f(x,y) \geq f(x,x)$$

dado que

$$0 \le (x + y)^2$$

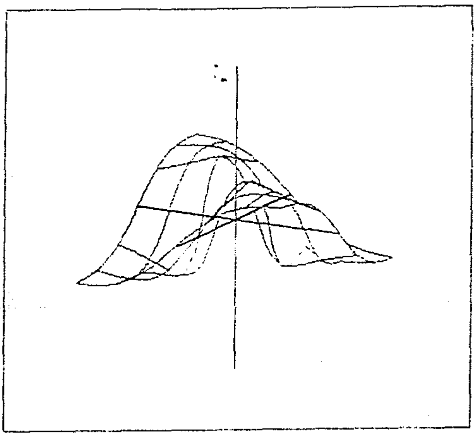
$$0 \le x^2 + 2xy + y^2$$

$$-2xy \le x^2 + y^2$$

$$\frac{xy}{x^2 + y^2} \ge -\tfrac{1}{2}$$

Concluyendo que los puntos sobre la recta y=-x mínimos de f.

Así f tiene extremos máximos en los puntos sobre la recta y=x y extremos mínimos en los puntos sobre la recta y=-x.



16) Considérese la función

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

La función definida en $R^2-(0,0)$ es continua, sin embargo no se puede extender a todo R^2, de tal forma que sea continua, dado que

Acercándonos por $y = mx$

$$f(x,mx) = \frac{mx^3}{x^4 + m^2x^2} = \frac{mx}{x^2 + m^2} \longrightarrow 0$$

cuando $x \longrightarrow 0$

Acercándonos por $y = x^2$

$$f(x,x^2) = \frac{x^2x^2}{x^4 + x^4} = \frac{x^4}{2x^4} = ½ \longrightarrow ½$$

cuando $x \longrightarrow 0$

por lo tanto la función no se puede definir en el (0,0) para que sea continua.

Dado que esta función es continua en su dominio, determinemos los puntos críticos.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy\ (x^4 + y^2) - x^2y\ (4x^3)}{(x^4 + y^2)^2} = \frac{2x^5y + 2xy^3 - 4x^5y}{(x^4 + y^2)^2}$$

$$= \frac{2xy^3 - 2x^5y}{(x^4 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^2\ (x^4 + y^2) - x^2y\ (2y)}{(x^4 + y^2)^2} = \frac{x^6 + x^2y^2 - 2x^2y^2}{(x^4 + y^2)^2}$$

$$= \frac{x^6 - x^2y^2}{(x^4 + y^2)^2}$$

Las condiciones necesarias nos proporcionan el sistema

$$\begin{aligned} 2xy^3 - 2x^5y &= 0 \\ x^6 - x^2y^2 &= 0 \end{aligned}$$

en forma equivalente

$$\begin{aligned} 2xy\ (y^2 - x^4) &= 0 \\ x^2\ (x^4 - y^2) &= 0 \end{aligned} \Longrightarrow \begin{aligned} &x=0 \text{ ó } y=0 \text{ ó } y=x^2 \text{ ó } y=-x^2 \\ &x=0 \text{ ó } y=x^2 \text{ ó } y=-x^2 \end{aligned}$$

obteniendo así que los puntos críticos se encuentran en las curvas

$$x = 0 \quad , \quad y = x^2 \quad y \quad y = -x^2$$

estas curvas, sin contener al (0,0).

Verifiquemos si f es de clase C^2.

Las parciales de segundo orden son

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x,y) = \frac{(6xy^2-2x^5)(x^4+y^2)^2 - 4y\,(x^4+y^2)(2xy^3-2x^5y)}{(x^4+y^2)^4}$$

$$= \frac{6x^5y^2 - 2x^9 + 6xy^4 - 2x^5y^2 - 8xy^4 + 8x^5y^2}{(x^4+y^2)^3}$$

$$= \frac{12x^5y^2 - 2xy^4 - 2x^9}{(x^4+y^2)^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x,y) = \frac{(6x^5-2xy^2)(x^4+y^2)^2 - 8x^3\,(x^4+y^2)(x^6-x^2y^2)}{(x^4+y^2)^4}$$

$$= \frac{6x^9 - 2x^5y^2 + 6x^5y^2 - 2xy^4 - 8x^9 + 8x^5y^2}{(x^4+y^2)^3}$$

$$= \frac{12x^5y^2 - 2xy^4 - 2x^9}{(x^4+y^2)^3}$$

Como las derivadas parciales cruzadas son iguales calculamos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{(2y^3-10x^4y)(x^4+y^2)^2 - 8x^3\,(x^4+y^2)(2xy^3-2x^5y)}{(x^4+y^2)^4}$$

$$= \frac{2x^4y^3 - 10x^8y + 2y^5 - 10x^4y^3 - 16x^4y^3 + 16x^8y}{(x^4+y^2)^3}$$

$$= \frac{2y^5 - 24x^4y^3 + 6x^8y}{(x^4+y^2)^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{(-2x^2y)(x^4+y^2)^2 - 4y\ (x^4+y^2)(x^6-x^2y^2)}{(x^4+y^2)^4}$$

$$= \frac{-2x^6y - 2x^2y^3 - 4x^6y + 4x^2y^3}{(x^4+y^2)^4}$$

$$= \frac{-6x^6y + 2x^2y^3}{(x^4+y^2)^3}$$

Como las derivadas parciales de segundo orden son continuas, f es de clase C^2 y podemos formar el discriminante para los puntos críticos

Para los puntos $(0,y)$, $y\neq 0$.

$$D = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(0,y)\right]^2 - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,y)\right]\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,y)\right]$$

$$= (0)^2 - \left[\frac{2y^5}{y^6}\right](0) = 0$$

Para los puntos (x,x^2) , $x\neq 0$

$$D = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x,x^2)\right]^2 - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,x^2)\right]\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,x^2)\right]$$

$$= \left[\frac{1}{x^3}\right]^2 - \left[\frac{-2}{x^2}\right]\left[\frac{-1}{2x^4}\right]$$

$$= \left[\frac{1}{x^6}\right] - \left[\frac{1}{x^6}\right] = 0$$

Para los puntos $(x,-x^2)$, $x\neq 0$

$$D = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x,-x^2)\right]^2 - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,-x^2)\right]\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,-x^2)\right]$$

$$= \left[\frac{1}{x^3}\right]^2 - \left[\frac{2}{x^2}\right]\left[\frac{1}{2x^4}\right]$$

$$= \left[\frac{1}{x^6}\right] - \left[\frac{1}{x^6}\right] = 0$$

en todos los casos D=0, y los criterios para determinar la naturaleza de los puntos no son aplicables. Continuemos con el análisis de la función para determinar si los puntos críticos son extremos o no.

$$f(0,y) = 0$$

$$f(x,x^2) = \frac{x^4}{x^4 + x^4} = \frac{x^4}{2x^4} = ½$$

$$f(x,-x^2) = \frac{-x^4}{x^4 + x^4} = \frac{-x^4}{2x^4} = -½$$

Para los puntos (0,y), tomemos 2 casos.

Si $y > 0$

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} > 0$$

es decir

$$f(x,y) > f(0,y)$$

y para el eje-y positivo, la función f tiene un mínimo.

Si $y < 0$

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} < 0$$

es decir

$$f(x,y) < f(0,y)$$

y para el eje-y negativo, la función f tiene un máximo.

Afirmamos que f en los puntos sobre la curva $y = x^2$ tiene un máximo.

Demostraremos que

$$f(x,y) < f(x,x^2)$$

pero esto sucede, dado que

$$0 \le (x^2 - y)^2$$

$$0 \le x^4 - 2x^2y + y^2$$

$$2x^2y \le x^4 + y^2$$

$$\frac{x^2y}{x^4 + y^2} \le \tfrac{1}{2}$$

Por lo que podemos concluir que los puntos sobre la curva $y=x^2$ son máximos de f.

Para el caso $y = -x^2$, afirmamos que f en estos puntos tiene un mínimo.

Demostraremos que

$$f(x,y) > f(x,x^2)$$

pero esto sucede, dado que

$$0 \le (x^2 + y)^2 .$$

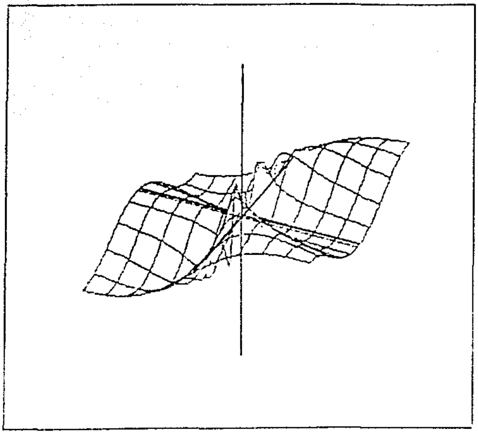
$$0 \le x^4 + 2x^2y + y^2$$

$$-2x^2y \le x^4 + y^2$$

$$\frac{x^2y}{x^4 + y^2} \ge -\tfrac{1}{2}$$

Por lo que podemos concluir que los puntos sobre la curva $y = -x^2$ son máximos de f.

Así f en el eje-y positivo y en la parábola $y = x^2$ tiene mínimos y en el eje-y negativo y la parábola $y = -x^2$ tiene máximos.



17) Considérese la función cuyo dominio es R^2 y tiene la siguiente regla de correspondencia

$$f(x,y) = \frac{x + y}{x^2 + y^2 + 1}$$

La función así definida, es continua en todo su dominio. Calculemos sus derivadas parciales de primer orden

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{(x^2+y^2+1) - (2x)(x+y)}{(x^2+y^2+1)^2} = \frac{x^2+y^2+1-2x^2-2xy}{(x^2+y^2+1)^2}$$

$$= \frac{-x^2-2xy+y^2+1}{(x^2+y^2+1)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{(x^2+y^2+1) - (2y)(x+y)}{(x^2+y^2+1)^2} = \frac{x^2+y^2+1-2xy-2y^2}{(x^2+y^2+1)^2}$$

$$= \frac{x^2-2xy-y^2+1}{(x^2+y^2+1)^2}$$

Las condiciones necesarias nos proporcionan el sistema

$$-x^2-2xy+y^2+1 = 0 \quad . \; . \; . \quad (1)$$

$$x^2-2xy-y^2+1 = 0 \quad . \; . \; . \quad (2)$$

sumando (1) y (2)

$$-4xy + 2 = 0$$
$$xy - \tfrac{1}{2} = 0$$
$$xy = \tfrac{1}{2}$$

$$y = 1/2x \qquad . \; . \; . \; (3)$$

sustituyendo el valor de y en (1)

$$x^2 - 2x(1/2x) + (1/4x^2) + 1 = 0$$
$$-x^2 + (1/4x^2) = 0$$
$$-4x^4 + 1 = 0$$
$$x^4 = \tfrac{1}{4}$$

$$x = \pm\, 1/\sqrt{2}$$

sustituyendo el valor de x en (3)

$$y = \pm\, 1/\sqrt{2}$$

obteniendo así los puntos críticos

$$(1/\sqrt{2},\ 1/\sqrt{2}) \ \text{y} \ (-1/\sqrt{2},\ -1/\sqrt{2})$$

Verifiquemos si f es de clase C^2.

Las parciales de segundo orden son

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x,y) = \frac{(-2x+2y)(x^2+y^2+1)^2 - 4y(x^2+y^2+1)(-x^2-2xy+y^2+1)}{(x^2+y^2+1)^4}$$

$$= \frac{-2x^3-2xy^2-2x+2x^2y+2y^3+2y+4x^2y+8xy^2-4y^3-4y}{(x^2+y^2+1)^3}$$

$$= \frac{-2x^3+6xy^2-2x+6x^2y-2y^3-2y}{(x^2+y^2+1)^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x,y) = \frac{(2x-2y)(x^2+y^2+1)^2 - 4x(x^2+y^2+1)(x^2-2xy-y^2+1)}{(x^2+y^2+1)^4}$$

$$= \frac{2x^3+2xy^2+2x-2x^2y-2y^3-2y-4x^3+8x^2y+4xy^2-4x}{(x^2+y^2+1)^3}$$

$$= \frac{-2x^3+6xy^2-2x+6x^2y-2y^3-2y}{(x^2+y^2+1)^3}$$

Como las derivadas parciales cruzadas son iguales calculamos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{(-2x-2y)(x^2+y^2+1)^2 - 4x(x^2+y^2+1)(-x^2-2xy+y^2+1)}{(x^2+y^2+1)^4}$$

$$= \frac{-2x^3-2x^2y-2xy^2-2y^3-2x-2y+4x^3+8x^2y-4xy^2-4x}{(x^2+y^2+1)^3}$$

$$= \frac{2x^3+6x^2y-6xy^2-6x-2y-2y^3}{(x^2+y^2+1)^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{(-2x-2y)(x^2+y^2+1)^2 - 4y(x^2+y^2+1)(x^2-2xy-y^2+1)}{(x^2+y^2+1)^4}$$

$$= \frac{-2x^3-2x^2y-2xy^2-2y^3-2x-2y-4x^2y+8xy^2+4y^3-4y}{(x^2+y^2+1)^3}$$

$$= \frac{-2x^3-6x^2y+6xy^2-6y-2x+2y^3}{(x^2+y^2+1)^3}$$

Dado que las derivadas parciales de segundo orden son continuas, f es de clase C^2 y podemos formar el discriminante para los puntos críticos

Para $(1/\sqrt{2},\ 1/\sqrt{2})$

$$D = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(\sqrt{½},\sqrt{½})\right]^2 - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\sqrt{½},\sqrt{½})\right]\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\sqrt{½},\sqrt{½})\right]$$

$$= \left[\frac{8/2^{3/2} - 4/\sqrt{2}}{8}\right]^2 - \left[\frac{-8/\sqrt{2}}{8}\right]\left[\frac{-8/\sqrt{2}}{8}\right]$$

$$= \left[\frac{8 - 16 + 8 - 32}{64}\right] = \frac{-32}{64} = -½$$

y dado que $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

concluímos que f en $(1/\sqrt{2},\ 1/\sqrt{2})$ tiene un máximo local.

Para $(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$

$$D = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(-\sqrt{½}, -\sqrt{½})\right]^2 - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-\sqrt{½}, -\sqrt{½})\right]\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-\sqrt{½}, -\sqrt{½})\right]$$

$$= \left[\frac{8/2^{3/2} + 4/\sqrt{2}}{8}\right]^2 - \left[\frac{8/\sqrt{2}}{8}\right]\left[\frac{8/\sqrt{2}}{8}\right]$$

$$= \left[\frac{8 + 16 + 8 - 32}{64}\right] = 0$$

y por consiguiente, no podemos determinar la naturaleza del punto crítico. Sin embargo, obsérvese que la función es simétrica con respecto al origen, es decir

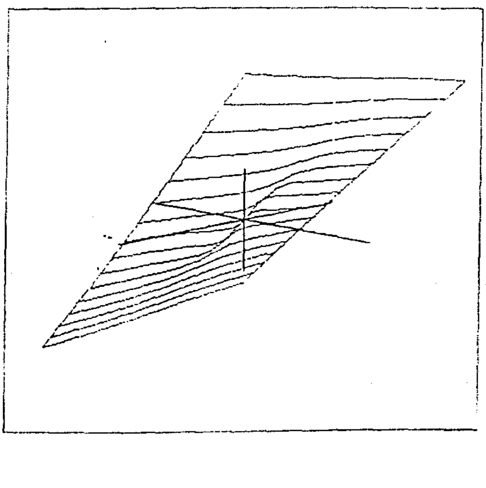
$$f(-x,-y) = -f(x,y)$$

ya que

$$f(-x,-y) = \frac{-x - y}{x^2 + y^2 + 1} = \frac{-(x + y)}{x^2 + y^2 + 1} = -f(x,y)$$

por lo tanto, dado que f tiene un máximo en $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, concluímos que f tiene un mínimo en $(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$.

Así f en $(-1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2})$ tiene un mínimo local y en $(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$ un máximo local.



18) Sea f la función con regla de correspondencia

$$f(x,y) = \tfrac{1}{2}\,(\,||x| - |y|| - |x| - |y|\,)$$

Es una función negativa para todo $(x,y) \in R^2-\{(x,y)|\ x\neq 0 \text{ o } y\neq 0\}$ e igual a cero para el origen y todo punto (x,y) que se encuentre sobre alguno de los ejes x o y; esto lo podemos demostrar recordando la desigualdad del triángulo

$$|a + b| \leq |a| + |b| \qquad \text{para todo } a,b \in R$$

obteniendo así que,

$$||x| - |y|| \leq |x| + |y|$$

y por consiguiente

$$||x| - |y|| - |x| - |y| \leq 0$$

por lo tanto

$$f(x,y) = \tfrac{1}{2}\,(\,||x| - |y|| - |x| - |y|\,) \leq 0$$

dándose la igualdad cuando x=0 o y=0.

Nótese además que la función es simétrica con respecto al plano y=0, dado que

$$\begin{aligned} f(x,-y) &= \tfrac{1}{2}\,(\,||x| - |-y|| - |x| - |-y|\,) \\ &= \tfrac{1}{2}\,(\,||x| - |y|| - |x| - |y|\,) \\ &= f(x,y) \end{aligned}$$

asimismo, f es simétrica con respecto al plano x=0

$$\begin{aligned} f(-x,y) &= \tfrac{1}{2}\,(\,||-x| - |y|| - |-x| - |y|\,) \\ &= \tfrac{1}{2}\,(\,||x| - |y|| - |x| - |y|\,) \\ &= f(x,y) \end{aligned}$$

y por consiguiente simétrica con respecto al origen

$$f(-x,-y) = f(x,-y) = f(x,y)$$

además de ser simétrica con respecto al plano $y = x$ y $y = -x$ por que

$$\begin{aligned} f(y,x) &= \tfrac{1}{2}\,(\,\big||y| - |x|\big| - |y| - |x|\,) \\ &= \tfrac{1}{2}\,(\,\big|-(|x| - |y|)\big| - |x| - |y|\,) \\ &= \tfrac{1}{2}\,(\,\big||x| - |y|\big| - |x| - |y|\,) \\ &= f(x,y) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} f(-y,x) &= \tfrac{1}{2}\,(\,\big||-y| - |x|\big| - |-y| - |x|\,) \\ &= \tfrac{1}{2}\,(\,\big||y| - |x|\big| - |y| - |x|\,) \\ &= f(y,x) \\ &= f(x,y) \end{aligned}$$

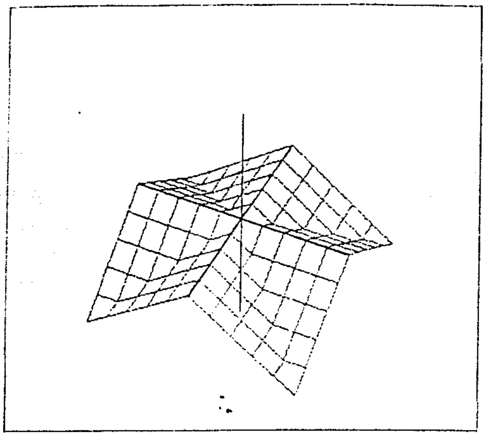
Observando que f es una función definida por intervalos, puede ser escrita de la siguiente forma

$$f(x,y) = \begin{cases} -y & \text{si } 0 \le y \le x \\ -x & \text{si } 0 \le x < y \\ y & \text{si } 0 < -y \le x \\ -x & \text{si } 0 < x \le -y \\ -y & \text{si } 0 < y \le -x \\ x & \text{si } 0 < -x \le y \\ y & \text{si } 0 < -y \le -x \\ x & \text{si } 0 < -x \le -y \end{cases}$$

Dado que la función cumple con las simétrias descritas , el análisis se realizará solo para valores (x,y) en el primer cuadrante, en el cual

$$f(x,y) = \begin{cases} -y & \text{si } 0 \le y \le x \\ -x & \text{si } 0 \le x < y \end{cases}$$

Gráficamente, son 2 planos colocados a lo largo de los ejes x e y, que se cortan en la recta $y=x$ y por consiguiente coinciden en el origen.



Es decir, la función describe una superficie "con pliegues" que consta de 4 depresiones que se unen a lo largo de los ejes x e y.

La función $f(x,y)$ es continua, dado que f es continua en cada uno de los intervalos de definición, demostremos que también lo es en los extremos de estos intervalos.

Para el primer cuadrante, los extremos de estos intervalos son: el eje-x, el eje-y, la recta $y=x$ y el origen.

Para el eje-x (positivo), demostremos

$\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta>0$ tal que si $0 < \|(x,y)-(x_\bullet,0)\| < \delta$ entonces $|f(x,y)-f(x_\bullet,0)| < \varepsilon$ donde $x_\bullet \in R^+$.

De la definición de la función

$$|f(x,y)-f(x_0,0)| = |y| \qquad \text{si } 0<-y<x$$

$$|f(x,y)-f(x_0,0)| = |-y| \qquad \text{si } 0\le y<x$$

en ambos casos

$$|f(x,y)-f(x_0,0)| = |y| < \|(x,y)-(x_0,0)\| < \varepsilon$$

si

$$0 < \|(x,y)-(x_0,0)\| < \delta \qquad y \qquad \delta \le \varepsilon$$

por lo tanto la función es continua en el eje-x positivo.

Para el eje-y (positivo), la demostración es análoga.

Para la recta y=x, x>0, demostraremos

$\forall\, \varepsilon>0,\ \exists\, \delta>0$ tal que si $0 < \|(x,y)-(x_0,x_0)\| < \delta$ entonces $|f(x,y)-f(x_0,xy_0)|<\varepsilon$ donde $x_0 \in R^+$.

De la definición

$$|f(x,y)-f(x_0,x_0)| = |-y+x_0| \qquad \text{si } 0\le y<x$$

$$|f(x,y)-f(x_0,x_0)| = |-x+x_0| \qquad \text{si } 0\le x<y$$

y por consiguiente

$$|f(x,y)-f(x_0,x_0)| \le \|(x,y)-(x_0,x_0)\| < \varepsilon$$

si

$$0 < \|(x,y)-(x_0,x_0)\| < \delta \qquad y \qquad \delta \le \varepsilon$$

por lo tanto, la función es continua para los puntos sobre la recta y=x.

Para el caso del origen

Sea $\varepsilon>0$

$$\begin{aligned} |f(x,y)-f(0,0)| &= |\tfrac{1}{2}\,(\,||x|-|y||-|x|-|y|)| \\ &\le \tfrac{1}{2}\,(\,||x|-|y||+|x|+|y|) \\ &\le \tfrac{1}{2}\,(|x|+|y|+|x|+|y|) \end{aligned}$$

$$\leq |x| + |y|$$
$$\leq 2\,\|(x,y)-(0,0)\| < \varepsilon$$

si

$$0 < \|(x,y)-(0,0)\| < \delta \qquad y \qquad \delta \leq \tfrac{1}{2}\varepsilon$$

por lo tanto, la función es continua en el origen y por consiguiente en R^2.

Aunque se ha demostrado que la función es continua en R^2, no sucede lo mismo con sus derivadas parciales, dado que no existen para los puntos sobre el eje-x, el eje-y, la recta y=x y en el origen.

En efecto, para el eje x (positivo).

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,0) - f(x,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

Sin embargo, para el eje x (positivo), la parcial con respecto a y no existe.

En efecto, por definición se tiene que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x,h) - f(x,0)}{h}$$

si el límite existe.

Calculando los límites laterales obtenemos que son distintos y por consiguente la parcial con respecto a y en el eje x positivo no existe

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x,h) - f(x,0)}{h} = \frac{-h}{h} = -1$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x,h) - f(x,0)}{h} = \frac{h}{h} = 1$$

en ambos casos, y dado que se toma el límite cuando $h \longrightarrow 0$, se considera $|h|<x$ para obtener el valor de $f(x,h)$.

En el caso del eje y (positivo) la parcial con respecto a x no existe.
Por definición

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(h,y) - f(0,y)}{h}$$

si el límite existe.

Sin embargo, los límites laterales son exactamente iguales a los del caso anterior y por consiguiente distintos, por lo cual la parcial con respecto a x no existe para el eje y positivo.

La parcial con respecto a y para el eje y (positivo) es

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,y) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(0,y+h) - f(0,y)}{h} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

En el caso de la recta $y=x$, $x>0$, no existen ambas parciales dado que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,x) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x+h,x) - f(x,x)}{h} \quad , \qquad \text{no existe.}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,x) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x,x+h) - f(x,x)}{h} \quad , \qquad \text{no existe.}$$

Lo anterior se deduce de observar que los límites laterales son distintos.

Para la parcial con respecto a x

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h,x) - f(x,x)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{-x + x}{h} = 0$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x+h,x) - f(x,x)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-x - h + x}{h} = -1$$

Para la parcial con respecto a y los límites laterales son exactamente igual a los anteriores.

En el origen

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \le y < x \\ -1 & \text{si} \quad 0 < x < y \\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad 0 < y < x \\ 0 & \text{si} \quad 0 \le x < y \\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

Como se demostró la función no es de clase C^2 y por lo tanto el análisis no se puede hacer en todo el dominio.

Analizando la función en los distintos intervalos de definición, observamos que no existen puntos, distintos del origen, para los cuales ambas parciales se anulen, por lo tanto no existen puntos críticos. Por consiguiente, únicamente nos resta analizar los puntos para los cuales no existen las parciales, $(x,0)$, $(0,y)$, (x,x) y el origen, para el cual no existen condiciones suficientes para determinar su naturaleza.

Demostremos que todo punto sobre los ejes x e y, determinan máximos de f, al igual que el origen.

Recordemos que

$$f(x,y) < 0 \qquad \therefore \; (x,y) \in R^2 - \{(x,y) \mid x \neq 0 \text{ o } y \neq 0\}$$

y

$$f(x,y) = 0 \qquad (x,y) \text{ tal que } x=0 \text{ o } y=0$$

es decir, f toma su máximo valor en el origen y en todo punto sobre los ejes x o y. Así, estos puntos determinan valores máximos de f.

Demostremos que f no tiene extremos en los puntos sobre la recta $y = x$, $x > 0$.

Tomemos un punto (x_0, x_0) sobre esta recta y sea $V(\varepsilon)$ una vecindad alrededor del punto, con $\varepsilon < x_0$.

$$f(x_0, x_0) = -x_0$$

consideremos los puntos $(x_0-h,\ x_0-h)$ y $(x_0+h,\ x_0+h)$ contenidos en $V(\varepsilon)$, es decir $h < \varepsilon$.

Para estos puntos

$$f(x_0-h,\ x_0-h) = -(x_0-h)$$

$$f(x_0+h,\ x_0+h) = -(x_0+h)$$

y así, por un lado

$$\mathcal{f}(x_{\bullet}-h,\ x_{\bullet}-h) > \mathcal{f}(x_{\bullet},x_{\bullet})$$

y por otro

$$\mathcal{f}(x_{\bullet}+h,\ x_{\bullet}+h) < \mathcal{f}(x_{\bullet},x_{\bullet})$$

es decir, el punto $(x_{\bullet},x_{\bullet})$ no representa un extremo para $\mathcal{f}$ y por lo tanto $\mathcal{f}$ no tiene extremos en la recta $y = x$.

Extendiendo los resultados obtenidos para todo R^2 y recordando las simetrías de la función, concluímos que:

La función $\mathcal{f}(x,y)$, tiene un máximo en el origen y en todo punto (x,y) que se encuentre sobre los ejes x o y.

$\therefore$

REGLA DE LOS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

Para la demostración de este teorema usaremos solo conocimientos de cálculo elemental, el Teorema de Bolzano-Weierstrass el cual afirma que de una sucesión acotada de puntos en R^n siempre podemos extraer una subsucesión convergente, y el Teorema que asegura que una función definida y continua en una bola cerrada $\{x \in R^n : |x-a| \leq r\}$ en R^n alcanza su mínimo y su máximo en algún punto de esta bola.

Las coordenadas de un punto $x \in R^n$ serán denotadas por $x_1, \ldots, x_n$. Si f está definida en un subconjunto G de R^n y $a \in G$ la derivada parcial en a de $(f(x) : x \in G)$ con respecto a la coordenada j-ésima será denotada por $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ si existe. Además, como es usual,

$$f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)$$

y

$$f^{+}(x) = \max\ (\ f(x),\ 0\ )$$

TEOREMA. Sean f, $g_1, \dots, g_k$, $h_1, \dots, h_s$ funciones definidas y continuas al igual que sus derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ $\frac{\partial g_1}{\partial x_j}, \dots, \frac{\partial g_k}{\partial x_j}, \frac{\partial h_1}{\partial x_j}, \dots, \frac{\partial h_s}{\partial x_j}$, $(j = 1, \dots, n)$, en un conjunto $G \subset R^n$.

Sea x_* un punto interior de G el cual cumple las condiciones

$$\begin{aligned} g_i(x) &= 0 \qquad (i = 1, \dots, k) \\ h_r(x) &\leq 0 \qquad (r = 1, \dots, s) \end{aligned} \qquad (1)$$

y supóngase además que

$$f(x_*) \leq f(x)$$

para cualquier $x \in G$ que satisfaga las condiciones (1).

Entonces existen reales $\lambda_*, \lambda_1, \dots, \lambda_k$, $\mu_1, \dots, \mu_s$, no todos cero tal que

$$\lambda_* \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_*) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x_*) + \sum_{r=1}^{s} \mu_r \frac{\partial h_r}{\partial x_j}(x_*) = 0 \qquad (2)$$

$$(j = 1, \dots, n)$$

Además,

i) $\lambda_* \geq 0$ y $\mu_r \geq 0$ $(r = 1, \dots, s)$

ii) para cada r tal que $h_r(x_*) < 0$, $\mu_r = 0$

iii) si g_i y h_r satisfacen que el gradiente en x_* de g y aquella h_r para el cual $h_r(x_*)=0$ son vectores linealmente independientes, es posible escoger $\lambda_*=1$

DEMOSTRACIÓN

Sin pérdida de generalidad podemos considerar que

$$x_{\bullet} = (0,\dots,0), \qquad f(x_{\bullet}) = 0;$$

Esto se puede lograr haciendo una traslación de la función de manera que el punto $x_{\bullet}$ coincida con el origen. Si después de la traslación, $f(x_{\bullet}) \neq 0$ construimos una nueva función

$$f^{*}(x) = f(x) - f(x_{\bullet})$$

la cual cumple que $f^{*}(x_{\bullet}) = 0$.

Dado que $x_{\bullet}$ cumple con las condiciones (1) tendremos por ejemplo

$$h_1(x_{\bullet}) = h_3(x_{\bullet}) = h_8(x_{\bullet}), \dots, = h_m(x_{\bullet}) = 0$$

mediante un renombramiento de las funciones h's, podemos decir que las primeras son las que se anulan en el punto $x_{\bullet}$ y las restantes son negativas. Por lo cual, además se puede considerar que

$$h_1(x_{\bullet}) = \dots = h_z(x_{\bullet}) = 0$$

$$h_r(x_{\bullet}) < 0 \qquad\qquad (r = z+1, \dots, s)$$

Escojamos un valor positivo ε_1, tal que la bola cerrada $B(\varepsilon_1) = \{ x \in R^n : |x| \leq \varepsilon_1 \}$ esté contenida en G y que $h_{z+1}(x), \dots, h_s(x)$ sean negativas en $B(\varepsilon_1)$.

Lo anterior es posible ya que h_r, $r = 1, \dots, s$; es continua, y como $h_r(x_{\bullet}) < 0$, $r = z+1, \dots, s$; existe una bola de radio ε_r con centro en $x_{\bullet}$ tal que

$$h_r(x) < 0 \qquad\qquad x \in B(\varepsilon_r)$$

$$(r = z+1, \dots, s)$$

dado que $x = 0$. Si tomamos a $\varepsilon_1 \leq \min\{\varepsilon_r\}$, y tal que esté contenida en G, podemos encontrar la bola requerida para la demostración.

- Primero probaremos que

A cada ε tal que $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ le corresponde una N tal que

$$f(x) + |x|^2 + N \left(\sum_{i=1}^{k} g_i(x)^2 + \sum_{r=1}^{z} [h_r^+(x)]^2\right) > 0 \qquad (3)$$

para todo x tal que $|x| = \varepsilon$

En efecto

Supongamos que es falso. Entonces existe una sucesión de números positivos $N_1, N_2, \ldots$, tales que $\lim_{m \to \infty} N_m = \infty$, y puntos $x_1, x_2, \ldots$ con $|x_m| = \varepsilon$ tal que para todo m

$$f(x_m) + |x_m|^2 \leq - N_m \left(\sum_{i=1}^{k} g_i(x_m)^2 + \sum_{r=1}^{z} [h_r^+(x_m)]^2\right) \qquad (4)$$

$\therefore$

Por el Teorema de Bolzano-Weierstrass de la sucesión (x_m) puede extraerse una subsucesión convergente. Sin pérdida de generalidad llamemos (x_m) a tal subsucesión y sea x^* el punto al cual converge. Entonces

$$|x^*| = \lim_{m \to \infty} |x_m| = \varepsilon$$

y

$$f(x_m) \longrightarrow f(x^*)$$

Dividiendo ambos miembros de (4) entre $- N_m$ y haciendo $m \longrightarrow \infty$ obtenemos

$$\frac{f(x_m) + |x_m|^2}{- N_m} \geq \frac{- N_m \left(\sum_{i=1}^{k} g_i(x_m)^2 + \sum_{r=1}^{z} [h_r^+(x_m)]^2\right)}{- N_m}$$

y cuando $m \longrightarrow \infty$

$$\sum_{i=1}^{k} g_i(x^*)^2 + \sum_{r=1}^{z} [h_r^+(x^*)]^2 = 0$$

y por lo tanto

$$g_i(x^*) = 0 \qquad (\ i = 1,\ldots,k\ )$$

$$h_r(x^*) = 0 \qquad (\ r = 1,\ldots,z+1\ )$$

Es decir x^* satisface (1), así

$$\lim f(x_m) = f(x^*) \geq f(x_\bullet) = 0$$

pero por (4)

$$f(x_m) + |x_m|^2 \leq -N_m \{\sum_{i=1}^{k} g_i(x_m)^2 + \sum_{r=1}^{z} [h_r^+(x_m)]^2\} \leq 0$$

$$\Longrightarrow \quad f(x_m) \leq -|x_m|^2 \qquad \text{como} \qquad |x_m| = \varepsilon$$

$$\Longrightarrow \quad f(x_m) \leq -\varepsilon^2 \qquad \text{y como} \qquad 0 < \varepsilon$$

$$f(x_m) < 0$$

esto es una contradicción. Por lo que queda establecido (3).

$\therefore$

- Ahora probaremos que

A cada ε tal que $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$ le corresponde un punto $\bar{x}$ y un vector unitario $(\lambda_\bullet, \lambda_1, \ldots, \lambda_k, \mu_1, \ldots, \mu_z)$ con $\lambda_\bullet, \mu_1, \ldots, \mu_z$ no negativos tal que $|\bar{x}| < \varepsilon$ y

$$\lambda_\bullet \left[\frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{x}) + 2\,x_j \right] + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\bar{x}) + \sum_{r=1}^{z} \mu_r \frac{\partial h_r}{\partial x_j}(\bar{x}) = 0 \qquad (\ 5\ )$$

$$(\ j = 1,\ldots,n\ )$$

En efecto, sea $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$. Consideremos la N correspondiente a ε, que se obtiene de (3), definimos a F en G por

$$F(x) = f(x) + |x|^2 + N\{\sum_{i=1}^{k} g_i(x)^2 + \sum_{r=1}^{z} h_r^+(x)^2\}$$

La función F es una función continua, por ser suma de funciones continuas, está definida en una bola cerrada por lo tanto existe un punto $\bar{x}$ en la bola cerrada $B(\varepsilon)$ en la cual F alcanza su mínimo valor en $B(\varepsilon)$; entonces $F(\bar{x}) \leq F(0) = 0$, así por (3) $|\bar{x}| \neq \varepsilon$, ya que si $|\bar{x}| = \varepsilon$, $F(\bar{x})$ sería mayor que 0. Por lo tanto $\bar{x}$ está en el interior de $B(\varepsilon)$, y puesto que $\bar{x}$ es un punto donde la función alcanza su mínimo valor las derivadas de primer orden deben anularse en $\bar{x}$.

En $\bar{x}$ la función $[\overset{+}{h}_r]^2$ tiene derivadas

$$2\overset{+}{h}_r(\bar{x}) \ \frac{\partial h_r}{\partial x_j}(\bar{x})$$

si $\overset{+}{h}_r(\bar{x}) > 0$, por que si $\overset{+}{h}_r(\bar{x}) = 0$ entonces su derivada es igual a cero. Así para $j = 1,\ldots,n$ tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{x}) + 2\bar{x}_j + \sum_{i=1}^{k} 2N\, g_i(\bar{x}) \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\bar{x}) + \sum_{r=1}^{z} 2N\, \overset{+}{h}_r(\bar{x}) \frac{\partial h_r}{\partial x_j}(\bar{x}) = 0 \qquad (6)$$

Definamos

$$L = \left(1 + \sum_{i=1}^{k} [2N\, g_i(\bar{x})]^2 + \sum_{r=1}^{z} [2N\, \overset{+}{h}_r(\bar{x})]^2 \right)^{1/2}$$

si dividimos ambos miembros de (6) entre L obtenemos

$$\frac{\left[\frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{x}) + 2\bar{x}_j \right]}{L} + \sum_{i=1}^{k} \frac{2N\, g_i(\bar{x})}{L} \frac{\partial g_i}{\partial x}(\bar{x}) + \sum_{r=1}^{z} \frac{2N\, \overset{+}{h}_r(\bar{x})}{L} \frac{\partial h_r}{\partial x_j}(\bar{x}) = 0$$

Definiendo

$$\lambda_{\bullet} = 1 / L$$

$$\lambda_i = 2N\ g_i(x) / L \qquad (i = 1,\ldots,k)$$

$$\mu_r = 2N\ h_r^{+}(x) / L \qquad (r = 1,\ldots,z)$$

$$\mu_r = 0 \qquad (r = z+1,\ldots,s)$$

obtenemos la ecuación (5) y el vector unitario

$$(\lambda_{\bullet}, \lambda_1, \ldots, \lambda_k, \mu_1, \ldots, \mu_s)$$

La Norma del vector es

$$\{ \lambda_{\bullet}^2 + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^2 + \sum_{r=1}^{z} \mu_r + \sum_{r=z+1}^{s} \mu_r \}^{1/2} =$$

$$= \left[\frac{1}{L^2} + \sum_{i=1}^{k} \frac{[2N\ g_i(\bar{x})]^2}{L^2} + \sum_{r=1}^{z} \frac{[2N\ h_r^{+}(\bar{x})]^2}{L^2} + 0 \right]^{1/2}$$

$$= \left[\frac{1 + \sum_{i=1}^{k} [2N\ g_i(\bar{x})]^2 + \sum_{r=1}^{z} [2N\ h_r^{+}(\bar{x})]^2}{L^2} \right]^{1/2} = \left[\frac{L^2}{L^2} \right]^{1/2} = 1$$

donde $\lambda_{\bullet}$ y las μ_r son no negativas, demostrando así lo que queríamos.

Ahora, escogiendo números positivos $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3 > \ldots$ tales que $\lim_{m \to \infty} \varepsilon_m = 0$. Para $m = 1,2,\ldots$ escogemos un punto $\bar{x}_m$ con $|\bar{x}_m| < \varepsilon_m$ y un vector unitario $(\lambda_{\bullet,m}, \lambda_{1,m}, \ldots, \lambda_{k,m}, \mu_{1,m}, \ldots, \mu_{z,m}, 0, \ldots, 0)$ con $\lambda_{\bullet,m}$ y $\mu_{r,m}$ tales que la ecuación (5) se cumpla (con los cambios obvios de notación), esto es posible por (5). Escogemos una subsucesión para la cual el vector unitario converja a un límite

$$(\lambda_{\bullet}, \lambda_1, \ldots, \lambda_k, \mu_1, \ldots, \mu_s)$$

Cuando $\bar{x}_m \longrightarrow \bar{x}_{\bullet}$, la ecuación (5) se cumple con este vector límite y con $\bar{x}_{\bullet}$ en lugar de $\bar{x}$. El teorema está establecido excepto por la conclusión iii).

Si la condición iii) se cumple entonces λ_0 no puede ser igual a 0, ya que si $\lambda_0 = 0$ la condición (2) contradiría la independencia lineal de $\nabla g_1(x_0), \ldots, \nabla g_k(x_0), \nabla h_1(x_0), \ldots, \nabla h_z(x_0)$. Así $\lambda_0 > 0$, y los multiplicadores $(1, \lambda_1/\lambda_0, \ldots, \lambda_k/\lambda_0, \mu_1/\lambda_0, \ldots, \mu_s/\lambda_0)$ satisfacen todos los requerimientos.

En particular, si se desarrolla el Teorema para funciones en R^2, se obtiene el siguiente Teorema.

TEOREMA. Sea f y g funciones definidas y continuas, al igual que sus derivadas parciales, en un conjunto $G \subset R^2$.

Sea $v_0 = (x_0, y_0)$ un punto interior de G el cual satisface

$$g(x_0, y_0) = 0$$

y supóngase además que

$$f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$$

para cualquier $(x,y) \in G$ que satisface la condición $g(x,y) = 0$

Entonces $\exists\, \lambda_1$ tal que

$$\frac{\partial f}{x}(x_0, y_0) + \lambda_1 \frac{g}{x}(x_0, y_0) = 0$$

$$\frac{\partial f}{y}(x_0, y_0) + \lambda_1 \frac{g}{y}(x_0, y_0) = 0$$

o en forma equivalente

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$$

con $\lambda = \lambda_1$.

EJEMPLOS

1) Entre todos los polígonos de n lados, con un perímetro fijo dado, encontrar el que tenga mayor área.

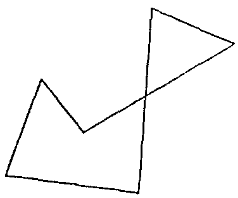
Sean las coordenadas de los n vértices tomados en un orden definido

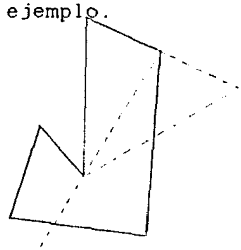
$$(x_1, y_1);\quad (x_2, y_2);\quad \ldots;\quad (x_n, y_n)$$

de tal manera que (x_j, y_j), (x_{j+1}, y_{j+1}) sean adyacentes, es decir que el segmento determinado por los puntos (x_j, y_j), (x_{j+1}, y_{j+1}) sea un lado del polígono.

($j = 1, \ldots n$ y $n+1=1$)

Para el polígono podemos suponer que ningún par de lados se cortan. Esta hipótesis es justificable, dado que si 2 lados se cortan, podemos construir a partir de éste, otro polígono de n lados con el mismo perímetro, sin que sus lados se corten y con mayor área. Como se muestra en el siguiente ejemplo.





Con el fin de construir la función que expresa el área del polígono, tomemos un punto en el interior del polígono, llamémoslo $O=(x_0, y_0)$.

El área del polígono es igual a la suma de las áreas de los triángulos que tienen como vértices

$$(x_0, y_0),\ (x_1, y_1),\ (x_2, y_2)$$
$$(x_0, y_0),\ (x_2, y_2),\ (x_3, y_3)$$
$$\vdots$$
$$(x_0, y_0),\ (x_j, y_j),\ (x_{j+1}, y_{j+1})$$

$$j = 1, \ldots, n-1$$

donde $(x_{n+1}, y_{n+1}) = (x_1, y_1)$

Calculemos el área A_j del triángulo con vértices

$$(x_0, y_0),\ (x_j, y_j),\ (x_{j+1}, y_{j+1})$$

$$A_j = \tfrac{1}{2} \left\| (x_j - x_0, y_j - y_0) \times (x_{j+1} - x_0, y_{j+1} - y_0) \right\|$$

$$= \tfrac{1}{2} \left\| \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ x_j - x_0 & y_j - y_0 & 0 \\ x_{j+1} - x_0 & y_{j+1} - y_0 & 0 \end{vmatrix} \right\|$$

$$= \tfrac{1}{2} \left\| \hat{k}\, (x_j - x_0, y_{j+1} - y_0) - (x_{j+1} - x_0, y_j - y_0) \right\|$$

$$= \tfrac{1}{2} \left| (x_j - x_0, y_{j+1} - y_0) - (x_{j+1} - x_0, y_j - y_0) \right|$$

Así, el doble del área del polígono está dada por la función

$$2A = \sum_{j=1}^{n} 2A_j = \pm \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_0, y_{j+1} - y_0) - (x_{j+1} - x_0, y_j - y_0)$$

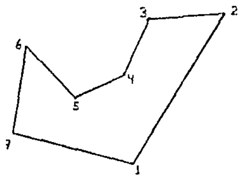
$$= \pm [\ (x_1 - x_0, y_2 - y_0) - (x_2 - x_0, y_1 - y_0)$$
$$+ (x_2 - x_0, y_3 - y_0) - (x_3 - x_0, y_2 - y_0)$$
$$+ \ldots$$
$$+ (x_{n-1} - x_0, y_n - y_0) - (x_n - x_0, y_{n-1} - y_0)$$
$$+ (x_n - x_0, y_1 - y_0) - (x_1 - x_0, y_n - y_0)\ ]$$

o

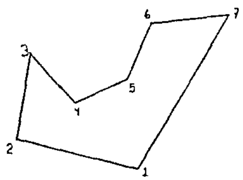
$$2A = \pm [\, x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_2 y_3 - x_3 y_2 + \ . \ . \ . + x_n y_1 - x_1 y_n \,]$$

donde el signo positivo o negativo de la función $2A$, dependerá de si el polígono ha sido descrito en dirección positiva o negativa, de acuerdo a la siguiente definición.

Diremos que un polígono ha sido descrito en dirección positiva si al recorrer su perímetro en la dirección determinada por el orden de sus vértices, lo hacemos en sentido contrario al de las manecillas del reloj. En el caso contrario, se dice que el polígono ha sido descrito en dirección negativa. Como se muestra en las siguientes gráficas.



Polígono descrito en dirección positiva.



Polígono descrito en dirección negativa.

Sin embargo, podemos reinvertir el orden de los puntos para lograr que la función $2A$ sea siempre positiva. Supongamos que esto ha sido hecho. La función $2A$ tendrá un máximo bajo la condición de que el perímetro tiene un valor definido P.

Podemos escribir

$$P = p_{1,2} + p_{2,3} + \ . \ . \ . + p_{n-1,n} + p_{n,1}$$

donde

$$p_{j-1,j} = \sqrt{(x_j - x_{j-1})^2 - (y_j - y_{j-1})^2}$$

es decir, $p_{j-1,j}$ es la longitud del lado determinado por los vértices $j-1$, j.

Construimos las funciones

$$g = p_{1,2} + p_{2,3} + \ldots + p_{n-1,\,n} + p_{n,1} - P = 0 \qquad (1)$$

y

$$G = 2A + \lambda(p_{1,2} + p_{2,3} + \ldots + p_{n-1,\,n} + p_{n,1} - P)$$

obteniendo las derivadas parciales de G e igualándolas a 0, tenemos

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial x_j} &= y_{j+1} - y_{j-1} + \left[\frac{x_j - x_{j+1}}{p_{j+1,j}} + \frac{x_j - x_{j-1}}{p_{j-1,j}} \right] = 0 \\ \frac{\partial G}{\partial y_j} &= -x_{j+1} + x_j + \left[\frac{y_j - y_{j-1}}{p_{j+1,j}} + \frac{y_j - y_{j-1}}{p_{j-1,j}} \right] = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

($j = 1,2,\ldots n$; para $j=n$ escribimos $j+1=1$).

Tomando las ecuaciones anteriores y la ecuación (1), se tienen $2n + 1$ ecuaciones para determinar las $2n + 1$ variables

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \; y_1, y_2, \ldots, y_n, \lambda,$$

Para obtener el resultado de las ecuaciones, procedamos de la siguiente forma:

Si escribimos

$$z_j = (x_j - x_{j-1}) + i\,(y_j - y_{j-1}) \qquad (3)$$

entonces z_j, geométricamente representa la distancia del punto $j-1$ al punto j en valor y dirección.

Sea

$$z_j' = (x_j - x_{j-1}) - i\,(y_j - y_{j-1})$$

el conjugado de z_j, entonces

$$z_j \cdot z_j' = p^2_{j-1,j} \qquad (4)$$

ya que

$$
\begin{array}{rl}
z_j \times z_j^{\prime} = & (x_j - x_{j-1}) + i(y_j - y_{j-1}) \\
& (x_j - x_{j-1}) - i(y_j - y_{j-1}) \\
\hline
& (x_j - x_{j-1})^2 + i(x_j - x_{j-1})(y_j - y_{j-1}) \\
& \qquad - i(x_j - x_{j-1})(y_j - y_{j-1}) - i^2(y_j - y_{j-1})^2 \\
\hline
& (x_j - x_{j-1})^2 - i^2(y_j - y_{j-1})^2 \\
\hline
& (x_j - x_{j-1})^2 + (y_j - y_{j-1})^2 = p^2_{j-1,j}
\end{array}
$$

(Recordar que $i^2 = -1$)

Multiplicando la primera de las ecuaciones (2) por i y restando de el resultado la segunda, obtenemos

$$
\begin{array}{rl}
& i\,(y_{j+1} - y_{j-1}) + \lambda \left[\dfrac{i(x_j - x_{j+1})}{p_{j+1,j}} + \dfrac{i(x_j - x_{j-1})}{p_{j-1,j}} \right] = 0 \\
- & (-x_{j+1} + x_{j-1}) + \lambda \left[\dfrac{(y_j - y_{j+1})}{p_{j+1,j}} + \dfrac{(y_j - y_{j-1})}{p_{j-1,j}} \right] = 0 \\
\hline
& i\,(y_{j+1} - y_{j-1}) + (x_{j+1} - x_{j-1}) + \lambda \left[\dfrac{i(x_j - x_{j+1}) - (y_j - y_{j+1})}{p_{j+1,j}} \right] \\
& \qquad + \lambda \left[\dfrac{i(x_j - x_{j-1}) - (y_j - y_{j-1})}{p_{j-1,j}} \right] = 0
\end{array}
$$

$$
i\,(y_{j+1} - y_j + y_j - y_{j-1}) + (x_{j+1} - x_j + x_j - x_{j-1})
$$

$$
+ \lambda \left[\frac{i(x_j - x_{j+1}) + i(y_j - y_{j+1})}{p_{j+1,j}} \right] + \lambda \left[\frac{i(x_j - x_{j-1}) - (y_j - y_j)}{p_{j-1,j}} \right] = 0
$$

$$
(x_{j+1} - x_j) + i\,(y_{j+1} - y_j) + (x_j - x_{j-1}) + i\,(y_j - y_{j-1})
$$

$$
- \lambda i \left[\frac{(x_{j+1} - x_j) + (y_{j+1} - y_j)}{p_{j+1,j}} \right] + \lambda i \left[\frac{(x_j - x_{j-1}) + i(y_j - y_{j-1})}{p_{j-1,j}} \right] = 0
$$

utilizando (3) podemos escribir

$$z_j + z_{j+1} + \lambda i\left[\frac{z_j}{p_{j-1,j}} - \frac{z_{j+1}}{p_{j,j+1}}\right] = 0$$

o

$$\left.\begin{aligned} z_j\left[1 + \frac{\lambda i}{p_{j-1,j}}\right] &= -z_{j+1}\left[1 - \frac{\lambda i}{p_{j,j+1}}\right] \\ z'_j\left[1 - \frac{\lambda i}{p_{j-1,j}}\right] &= -z'_{j+1}\left[1 + \frac{i}{p_{j,j+1}}\right] \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Ahora, multiplicando las últimas dos ecuaciones, y utilizando (4) tenemos

$$p^2_{j-1,j}\left[1 + \frac{\lambda^2}{p^2_{j-1,j}}\right] = p^2_{j,j+1}\left[1 + \frac{\lambda^2}{p^2_{j,j+1}}\right]$$

y por lo tanto

$$p^2_{j-1,j} = p^2_{j,j+1}$$

Como $p_{j-1,j}$, es una cantidad positiva, se sigue que

$$p_{j-1,j} = p_{j,j+1}$$

y consecuentemente los lados del polígono son todos iguales. Por consiguiente cada lado es igual a P/n, y tenemos de (5)

$$z_j\left[1 + \frac{\lambda in}{P}\right] = -z_{j+1}\left[1 - \frac{\lambda in}{P}\right]$$

$$z_j(\lambda in + P) = z_{j+1}(\lambda in - P)$$

$$\frac{z_{j+1}}{z_j} = \frac{\lambda in + P}{\lambda in - P} = \text{constante}$$

Si escribimos

$$z_j = \frac{P}{n} e^{\emptyset_j i} \,.$$

donde $\emptyset_j$ denota el ángulo formado por el segmento que une los vértices j-1, j con el eje-x, entonces

$$e^{(\emptyset_{j+1} - \emptyset_j)i} = \text{constante}$$

o

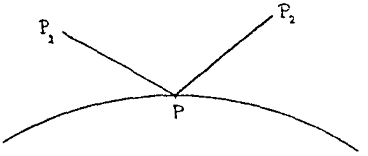
$$(\emptyset_{j+1} - \emptyset_j) = \text{constante}$$

esto es, todos los ángulos del polígono son iguales, y consecuentemente el polígono es regular.

De esta manera vemos que las condiciones obtenidas al igualar las primeras derivadas a cero son satisfechas sólo por un polígono regular, esto es , si hay un polígono el cual, con un perímetro fijo y un número de lados dado, tiene mayor área, este polígono es necesariamente regular.

Las condiciones hechas, sin embargo, no demuestran que el máximo realmente exista.

2) Reflexión en la superficie $F(x,y,z) = 0$. Un rayo pasa de un punto P_1 a un punto P en una superficie dada y es reflejado a un punto P_2. Encontrar el punto P, tal que minimiza la distancia $d(P_1,P) + d(P,P_2)$.



Sea P, P_1 y P_2 los puntos con coordenadas

$$P=(x,y) \quad , \quad P_1=(x_1,y_1) \quad , \quad P_2=(x_2,y_2)$$

y sea

d_i = La distancia del punto P al punto P_i

de modo que

$$d_i = \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2} \qquad (i = 1,2)$$

Por consiguiente, necesitamos encontrar un punto extremo para la función

$$d_1 + d_2$$

Sujeta a la condición de que el punto se encuentre en la superficie, dada por la ecuación

$$F(x,y,z) = 0 \qquad (1)$$

Utilizando la regla de los multiplicadores de Lagrange, necesitamos encontrar los extremos de la función

$$G(x,y,z) = d_1 + d_2 + \lambda F(x,y,z)$$

Las condiciones necesarias para un extremo son

$$\frac{\partial G}{\partial x}(x,y,z) = -\frac{(x_1 - x)}{d_1} - \frac{(x_2 - x)}{d_2} + \lambda F = 0$$

$$\frac{\partial G}{\partial y}(x,y,z) = -\frac{(y_1 - y)}{d_1} - \frac{(y_2 - y)}{d_2} + \lambda F = 0$$

$$\frac{\partial G}{\partial z}(x,y,z) = -\frac{(z_1 - z)}{d_1} - \frac{(z_2 - z)}{d_2} + \lambda F = 0$$

donde

$$F_x = \frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) \quad , \quad F_y = \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) \quad , \quad F_z = \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)$$

de donde se obtienen las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} \frac{x_1 - x}{d_1} + \frac{x_2 - x}{d_2} &= \lambda F_x \\ \frac{y_1 - y}{d_1} + \frac{y_2 - y}{d_2} &= \lambda F_y \\ \frac{z_1 - z}{d_1} + \frac{z_2 - z}{d_2} &= \lambda F_z \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Sean los cosenos directores de las líneas PP_1 y PP_2, l_1, m_1, n_1, y l_2, m_2, n_2, respectivamente, y sean l, m, n, los cosenos directores de la normal a la superficie $F(x,y,z)=0$ en el punto P.

Como F_x, F_y, F_z son proporcionales a los cosenos directores de la normal podemos escribir

$$\lambda F_x = kl \ , \quad \lambda F_y = km \ , \quad \lambda F_z = kn$$

Recordando la definición de los cosenos directores

$$l_1 = \frac{x_1 - x}{d_1} \qquad m_1 = \frac{y_1 - y}{d_1} \qquad n_1 = \frac{z_1 - z}{d_1}$$

$$l_2 = \frac{x_2 - x}{d_2} \qquad m_2 = \frac{y_2 - y}{d_2} \qquad n_2 = \frac{z_2 - z}{d_2}$$

podemos escribir las ecuaciones (2) de la siguiente forma

$$\left.\begin{aligned} l_1 + l_2 &= kl \\ m_1 + m_2 &= km \\ n_1 + n_2 &= kn \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Denotemos al ángulo entre PP_1 y PP_2 por (1,2); entre PP_1 y la normal por (1,n), y entre PP_2 y la normal por (2,n).

Recordando que el coseno del ángulo θ formado entre 2 vectores u,v está dado por

$$\cos\theta = \frac{u \cdot v}{\|u\| \; \|v\|}$$

Obtenemos

$$\cos(1,2) = \frac{(x_1 - x,\ y_1 - y,\ z_1 - z) \cdot (x_2 - x,\ y_2 - y,\ z_2 - z)}{(d_1)\ (d_2)}$$

$$= \frac{(x_1 - x)(x_2 - x) + (y_1 - y)(y_2 - y) + (z_1 - z)(z_2 - z)}{(d_1)\ (d_2)}$$

$$= \frac{(x_1 - x)(x_2 - x)}{d_1\ d_2} + \frac{(y_1 - y)(y_2 - y)}{d_1\ d_2} + \frac{(z_1 - z)(z_2 - z)}{d_1\ d_2}$$

$$= l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2$$

Así

$$\cos(1,2) = l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2$$

de manera similar se obtienen las siguientes igualdades

$$\cos(1,n) = l_1 l + m_1 m + n_1 n$$

$$\cos(2,n) = l_2 l + m_2 m + n_2 n$$

De igual forma, si se multiplican las ecuaciones (3) por l , m , n respectivamente y se suman obtenemos

$$l_1^2 + l_1 l_2 = k\ l_1 l$$

$$m_1^2 + m_1 m_2 = k\ m_1 m$$

$$n_1^2 + n_1 n_2 = k\ n_1 n$$

$$\overline{\hspace{6cm}}$$

$$l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 + l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = k\ (l_1 l + m_1 m + n_1 n)$$

y dado que la suma de los cuadrados de los cosenos directores es 1, se obtiene

$$1 + l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = k\ (l_1 l + m_1 m + n_1 n)$$

$$1 + \cos(1,2) = k \cos(1,n) \qquad (\ 4\ )$$

Asi mismo, multiplicando las ecuaciones (3) por l_2, m_2, n_2, respectivamente y sumandolas, se obtiene

$$\begin{aligned} l_1 l_2 + l_2^2 &= k\ l\ l_2 \\ m_1 m_2 + m_2^2 &= k\ m\ m_2 \\ n_1 n_2 + n_2^2 &= k\ n\ n_2 \end{aligned}$$

$$l_2^2 + m_2^2 + n_2^2 + l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = k\ (l_2 l + m_2 m + n_2 n)$$

en forma equivalente

$$1 + l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = k\ (l_2 l + m_2 m + n_2 n)$$

$$1 + \cos(1,2) = k \cos(2,n) \qquad (\ 5\ )$$

De (4) y (5) tenemos

$$\cos(1,n) = \cos(2,n)$$

o

$$(1,n) = (2,n) \qquad (\ 6\ )$$

Aún más, si multiplicamos las ecuaciones (3) por l, m, n, respectivamente y las sumamos, obtenemos

$$\begin{aligned} l_1 l + l_2 l &= k\ l^2 \\ m_1 m + m_2 m &= k\ m^2 \\ n_1 n + n_2 n &= k\ n^2 \end{aligned}$$

$$l_1 l + m_1 m + n_1 n + l_2 l + m_2 m + n_2 n = k\ (l^2 + m^2 + n^2)$$

de donde se obtiene

$$\cos(1,n) + \cos(2,n) = k$$

o de (6)

$$2\cos(1,n) = k$$

Sustituyendo este valor de k en (4), tenemos

$$1 + \cos(1,2) = 2\cos^2(1,n)$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}\cos(1,2) &= 2\cos^2(1,n) - 1\\ &= 2\cos^2(1,n) - \operatorname{sen}^2(1,n) - \cos^2(1,n)\\ &= \cos^2(1,n) - \operatorname{sen}^2(1,n)\\ &= \cos 2(1,n)\\ &= \cos 2(2,n)\end{aligned}$$

Obteniendo así que

$$(1,2) = 2(1,n) = 2(2,n)$$

y que las lineas PP_1, PP_2, la normal están en el mismo plano, y aún más que la normal bisecta al ángulo entre PP_1 y PP_2.

Todo lo anterior, nos ha llevado a establecer una condición conocida como una Ley Optica:

El rayo incidente y el reflejado están en el plano normal, y el ángulo de incidencia debe ser igual al ángulo reflejado.

El resultado anterior es solamente una condición necesaria para un extremo; para determinar si realmente existe un extremo, y si existe, si es máximo o mínimo, escojamos al plano normal a la superficie en P como el plano-xy.

Si la curva determinada por el corte de la superficie por el plano normal tiene la ecuación

$$y = f(x), \qquad (7)$$

podemos cambiar nuestro problema al de determinar la naturaleza de el punto P para una función $g(x)$, de una variable, donde

$$g(x) = d_1 + d_2 = \sqrt{(x_1-x)^2 + (y_1-f(x))^2} + \sqrt{(x_2-x)^2 + (y_2-f(x))^2};$$

y cuya derivada es

$$g'(x) = \frac{-2(x_1-x) - 2(y_1-f(x))\ f'(x)}{2\ d_1} + \frac{-2(x_2-x) - 2(y_2-f(x))\ f'(x)}{2\ d_2}$$

$$= \frac{(x-x_1) + (f(x)-y_1)\ f'(x)}{d_1} + \frac{(x-x_2) + (f(x)-y_2)\ f'(x)}{d_2}$$

y la cual se anula en x, por ser P=(x,y) punto crítico.

Recordando que $f'(x)$, geométricamente, representa la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto x, y está dada por

$$f'(x) = \frac{(y^*-f(x))}{(x^*-x)}$$

por lo tanto, la pendiente de la recta normal a la curva $y=f(x)$ en el punto x es

$$f'(x) = -\frac{(x^*-x)}{(y^*-f(x))} = -\frac{(x-x^*)}{(f(x)-y^*)}$$

y por consiguiente la ecuación de la recta normal en el punto x está dada por

$$(x-x^*) + (f(x)-y^*)\ f'(x) = 0,$$

$$-x^* - y^*f'(P) + x + f(x)f'(x) = 0,$$

y la distancia de un punto (x_i, y_i) a esta normal está dada por

$$h_i = \frac{(x-x_i) + (f(x)-y_i)\ f'(x)}{\sqrt{(-1)^2 + (-f'(x))^2}}$$

o

$$h_i = \frac{(x-x_i) + (f(x)-y_i)\ f'(x)}{\sqrt{1 + f'^2(x)}}$$

Además, tomemos al origen como el punto P y a la tangente a la superficie en el punto P en el plano normal como el eje-x, lo cual podemos lograr haciendo una traslación y una rotación de la superficie.

Entonces $g'(x) = 0$, es decir

$$\frac{(x-x_1) + (f(x)-y_1)\ f'(x)}{d_1} + \frac{(x-x_2) + (f(x)-y_2)\ f'(x)}{d_2} = 0$$

$$\frac{(x-x_1) + (f(x)-y_1)\ f'(x)}{d_1 \quad 1 + f'^2(P)} + \frac{(x-x_2) + (f(x)-y_2)\ f'(x)}{d_2 \quad 1 + f'^2(P)} = 0$$

por lo tanto

$$\frac{h_1}{d_1} + \frac{h_2}{d_2} = 0$$

h_1 y h_2 tienen signos contrarios, además P_1 y P_2 se encuentran en lados opuestos de la normal.

$$\text{sen}(1,n) = \text{sen}(2,n),$$

o

$$(1,n) = (2,n),$$

como se estableció anteriormente en (6).

Si calculamos la segunda derivada de g(x), obtenemos

$$g''(x) = \frac{d_1[1+f'^2(x)+(y-y_1)f''(x)] - (1/d_1)[(x-x_1)+(y-y_1)f'(x)]^2}{d_1^2}$$

$$+ \frac{d_2[1+f'^2(x)+(y-y_2)f''(x)] - (1/d_2)[(x-x_2)+(y-y_2)f'(x)]^2}{d_2^2}$$

dado que el P=(0,0), es un punto crítico y $f'(0)=0$

$$g''(0) = \frac{d_1(1-y_1 f''(0)) - \dfrac{x_1^2}{d_1}}{d_1^2} + \frac{d_2(1-y_2 f''(0)]^2}{d_2^2}$$

Si escribimos $\theta = (1,n) = (2,n)$,

notamos que

$$\frac{y_1}{d_1} = \frac{y_2}{d_2} = \cos\theta$$

$$-\frac{x_1}{d_1} = \frac{x_2}{d_2} = \operatorname{sen}\theta$$

así que

$$g''(0) = \left[\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2}\right]\cos^2\theta - 2f''(0)\cos\theta$$

De esto obtenemos que $g''(0) \geq 0$ ó $g''(0) \leq 0$ dependiendo de si

$$f''(0) \geq \tfrac{1}{2}\left[\frac{1}{d} + \frac{1}{d_2}\right]\cos\theta$$

o

$$f''(0) \leq \tfrac{1}{2}\left[\frac{1}{d} + \frac{1}{d_2}\right]\cos\theta$$

Como $f'(0)=0$, y recordando que la curvatura de una curva $y=f(x)$ está dada por

$$\frac{1}{\rho} = \frac{f''(x)}{(1 + f'^2(x))^{3/2}}$$

obtenemos que $f''(0)= 1/\rho$ donde es el radio de curvatura. Así, cuando

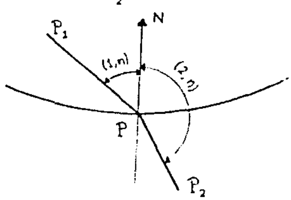
$$\frac{1}{\rho} < \tfrac{1}{2}\left[\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2}\right] \cos\theta$$

$g''(0) > 0$, y el punto es un mínimo, y cuando

$$\frac{1}{\rho} > \tfrac{1}{2}\left[\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2}\right] \cos\theta$$

$g''(0) < 0$, y el punto es un máximo.

3) Refracción en la superficie $F(x,y,z)=0$. Un rayo de luz viaja del punto P_1 al punto P_2, cruzando una frontera entre dos medios en el punto P. En el primer medio su velocidad es v, y en el segundo es v_2. Encontrar el punto P tal que minimiza el tiempo de pasar de P_1 a P_2.



Usando la notación del ejercicio anterior, el tiempo utilizado en pasar del punto P_1 al P_2 está dado por la función

$$T = \frac{d_1}{v_1} + \frac{d_2}{v_2}$$

y por lo tanto, la función auxiliar proporcionada por el Método de Lagrange

$$G(x,y,z) = \frac{d_1}{v_1} + \frac{d_2}{v_2} + \lambda F(x,y,z)$$

establece las ecuaciones siguientes como condiciones necesarias

$$\frac{x_1 - x}{v_1 \; d_1} + \frac{x_2 - x}{v_2 \; d_2} = \lambda F_x$$

$$\frac{y_1 - y}{v_1 \; d_1} + \frac{y_2 - y}{v_2 \; d_2} = \lambda F_y$$

$$\frac{z_1 - z}{v_1 \; d_1} + \frac{z_2 - z}{v_2 \; d_2} = \lambda F_z$$

Nuevamente utilizando los cosenos directores, las ecuaciones anteriores pueden escribirse como

$$\left.\begin{aligned} \frac{l_1}{v_1} + \frac{l_2}{v_2} &= kl \\ \frac{m_1}{v_1} + \frac{m_2}{v_2} &= km \\ \frac{n_1}{v_1} + \frac{n_2}{v_2} &= kn \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

donde l_1, m_1, n_1 son los cosenos directores de la línea PP_1, l_2, m_2, n_2 los de la línea PP_2 y l, m, n los de la normal a la superficie.

Multiplicando las ecuaciones (1) por l_1, m_1, n_1 y sumandolas se obtiene

$$\frac{1}{v_1} + \frac{\cos(1,2)}{v_2} = k \cos(1,n) \qquad (2)$$

Similarmente, si se multiplican las ecuaciones (1) por l_2, m_2, n_2 respectivamente y sumándolas, se obtiene

$$\frac{\cos(1,2)}{v_1} + \frac{1}{v_2} = k\cos(2,n) \qquad (3)$$

Aún más, si se multiplican por l, m, n y se suman, se obtiene

$$\frac{\cos(1,n)}{v_1} + \frac{\cos(2,n)}{v_2} = k \qquad (4)$$

Multiplicando (2) por $1/v_1$ y (3) por $1/v_2$, y restandolas, se tiene

$$\begin{array}{r} \dfrac{1}{v_1^2} + \dfrac{\cos(1,2)}{v_1 v_2} = \dfrac{k\cos(1,n)}{v_1} \\ -\quad \dfrac{\cos(1,2)}{v_1 v_2} + \dfrac{1}{v_2^2} = \dfrac{k\cos(2,n)}{v_2} \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{1}{v_1^2} - \frac{1}{v_2^2} = k\left[\frac{\cos(1,n)}{v_1} - \frac{\cos(2,n)}{v_2}\right]$$

Sustituyendo de (4) el valor de K, se ve que

$$\frac{1}{v_1^2} - \frac{1}{v_2^2} = \left[\frac{\cos(1,n)}{v_1} + \frac{\cos(2,n)}{v_2}\right]\left[\frac{\cos(1,n)}{v_1} - \frac{\cos(2,n)}{v_2}\right]$$

$$\frac{1}{v_1^2} - \frac{1}{v_2^2} = \frac{\cos^2(1,n)}{v_1^2} - \frac{\cos^2(2,n)}{v_2^2}$$

o

$$\frac{1}{v_1^2} - \frac{1}{v_2^2} = \frac{1-\operatorname{sen}^2(1,n)}{v_1^2} - \frac{1-\operatorname{sen}^2(2,n)}{v_2^2}$$

y por lo tanto

$$\frac{\operatorname{sen}^2(1,n)}{v_1^2} = \frac{\operatorname{sen}^2(2,n)}{v_2^2}$$

de esto se sigue que

$$\frac{\operatorname{sen}(1,n)}{v_1} = \frac{\operatorname{sen}(2,n)}{v_2}$$

Ahora, si se sustituye el valor de k en (2), se ve que

$$\frac{1}{v_1} + \frac{\cos(1,2)}{v_2} = \left[\frac{\cos(1,n)}{v_1} + \frac{\cos(2,n)}{v_2}\right] \cos(1,n)$$

$$\frac{1}{v_1} + \frac{\cos(1,2)}{v_2} = \frac{\cos^2(1,n)}{v_1} + \frac{\cos(1,n)\cos(2,n)}{v_2}$$

o

$$\frac{1}{v_1} + \frac{\cos(1,2)}{v_2} = \frac{1-\operatorname{sen}^2(1,n)}{v_1} + \frac{\cos(1,n)\cos(2,n)}{v_2}$$

de donde se obtiene

$$\frac{\operatorname{sen}^2(1,n)}{v_1} = \frac{\cos(1,n)\cos(2,n) - \cos(1,2)}{v_2}$$

Dividiendo esta ecuación por (5) y multiplicando el resultado por sen(2,n) encontramos

$$\frac{v_1 \operatorname{sen}^2(1,n)}{v_1 \operatorname{sen}(1,n)} = \frac{v_2 \{\cos(1,n)\cos(2,n) - \cos(1,2)\}}{v_2 \operatorname{sen}(2,n)}$$

$$\operatorname{sen}(1,n)\operatorname{sen}(2,n) = \cos(1,n)\cos(2,n) - \cos(1,2)$$

o

$$\cos(1,2) = \cos(1,n)\cos(2,n) - \operatorname{sen}(1,n)\operatorname{sen}(2,n)$$

$$\cos(1,2) = \cos[(1,n) + (2,n)]$$

por lo tanto

$$(1,2) = (1,n) + (2,n)$$

así que el rayo incidente y el reflejado se encuentran en el plano normal.

La ecuación (5) puede ser escrita en la forma

$$\frac{\text{sen}(1,n)}{\text{sen}(2,n)} = \frac{v_1}{v_2} = c$$

donde c es el índice de refracción de el segundo medio con respecto a el primer medio.

4) Si $P = (x ,y ,z)$, $P_2 = (x_2 ,y_2 ,z_2)$, $P = (x ,y ,z)$, son las coordenadas rectangulares de 3 puntos, tales que $\|P\|=d$ con d fija. Encontrar los puntos P , P_2 , P tales que el volumen formado por las 3 lineas OP , OP_2 , OP sea máximo.

El volumen formado en las 3 lineas OP_1 , OP_2 , OP_3 es

$$V = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Desarrollando el determinante con respecto al i-ésimo renglón

$$V = x_i A_1 + y_i A_2 + z_i A_3 \qquad 1)$$

$$(i = 1,2,3)$$

asi por ejemplo, si desarrollamos con respecto al primer renglón

$$V = x_1 \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

y

$$A_1 = \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} \qquad A_2 = -\begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} \qquad A_3 = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

Entonces, tenemos que encontrar el máximo de la función V de las 3 variables, x_i, y_i, z_i las cuales están relacionadas por la ecuación

$$d_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 \qquad 2)$$

Por la regla de Lagrange se necesita encontrar los puntos críticos para la función

$$G(x_i, y_i, z_i) = x_i A_1 + y_i A_2 + z_i A_3 - \lambda(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 - d_i^2)$$

obteniendo así que

$$\frac{\partial G}{\partial x_i} = A_1 - 2\lambda x = 0$$

$$\frac{\partial G}{\partial y_i} = A_2 - 2\lambda y = 0$$

$$\frac{\partial G}{\partial z_i} = A_3 - 2\lambda z = 0$$

y por lo tanto

$$\frac{x_i}{A_1} = \frac{y_i}{A_2} = \frac{z_i}{A_3} \qquad 3)$$

Si x_k, y_k, z_k son los elementos de otro renglón de el determinante, tenemos

$$x_k A_1 + y_k A_2 + z_k A_3 = 0 \qquad 4)$$

dado que es el determinante de una matriz que tiene el renglón i igual al renglón k.

Si multiplicamos 4) por $\frac{x_i}{A_i}$ obtenemos

$$x_k \frac{x_i}{A_1} A_1 + y_k \frac{x_i}{A_1} A_2 + z_k \frac{x_i}{A_1} A_3 = 0$$

$$x_k x_i + y_k \frac{x_i}{A_1} A_2 + z_k \frac{x_i}{A_1} A_3 = 0$$

utilizando 3)

$$x_k x_i + y_k \frac{y_i}{A_2} A_2 + z_k \frac{z_i}{A_3} A_3 = 0$$

$$x_k x_i + y_k y_i + z_k z_i = 0$$

es decir

$$(x_k, y_k, z_k) \cdot (x_i, y_i, z_i) = 0$$

donde $i \neq k$.

De esto concluímos que la función solo puede tener un extremo cuando los vectores son ortogonales.

Utilizando este hecho,

$$V^2 = \left| \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix} \right|$$

$$= \begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 & x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 & x_1 x_3 + y_1 y_3 + z_1 z_3 \\ x_2 x_1 + y_2 y_1 + z_2 z_1 & x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 & x_2 x_3 + y_2 y_3 + z_2 z_3 \\ x_3 x_1 + y_3 y_1 + z_3 z_1 & x_3 x_2 + y_3 y_2 + z_3 z_2 & x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} d_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & d_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3^2 \end{vmatrix} = d_1^2 \cdot d_2^2 \cdot d_3^2$$

es decir, el volumen maximo es

$$V = d_1 \cdot d_2 \cdot d_3$$

La extension de este problema para n variables se encuentra en el libro "Theory of Maxima and Minima" Núm. [10] de la Bibliografía.

B I B L I O G R A F I A

1. An Introduction to Applied Mathematics

   H. P. Greenspan, D. I. Benney
   Ed. Mc Graw-Hill, Kogakusha Ltd.

2. A treatise on the Analytic Geometry of Three Dimensions.

   Salmon, 4a. edicion.

3. Cálculo

   Kenneth McAloon y Anthony Thomba
   Ed. Publicaciones Cultural, S. A.
   México, D. F., 1978.

4. Calculus and Analytic Geometry

   Sherman K. Stein
   Mc Graw-Hill Book Company

5. Cálculo con Geometría Analítica.

   George B. Thomas, Jr. y Ross L. Finney
   6a. ed., Ed. Addison-Wesley Iberoamericana,
   México, D. F.

6. Cálculo Vectorial.

   Jerrold E. Marsden y Anthony J. Thomba.
   3a. ed., Ed. Addison-Wesley Iberoamericana,
   México, D. F.

7. Introducción al Análisis Matemático.

   Robert G. Bartle.
   Ed. Limusa, México, D. F.

8. Introduccion al Calculo y al Analisis Matematico. Vol. 2

Richart Courant y Fritz John.
Ed. Limusa, Mexico, D. F.

9. The American Mathematical Monthly, Vol.80
Papers in the fundations of mathematics.
June-July 1973. No. 6

College Division.
Ed. Addison-Wesley, Publishing Company.

10. Theory of Maxima and Minimal,

Harris Hancock.
Coleccion Sotero Prieto, Libro 125.
Ed. The Athenoeum Bress, Ginn and Company Propietors,
Boston, U.S.A.

11. The Theory of Functions of Real Variable. Vol. 1

Pierpont.