59
2y

UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTONOMA DE MEXICO
Facultad de Ciencias

Introducción a la Geometrodinámica.

TESIS
Que para obtener el Título de:
Físico
Presenta:

Alejandro Corichi Rodríguez Gil

México, D.F. 1991.

INDICE

INTRODUCCION

Desde que Einstein publicara su Teoría de la Relatividad General [RG], surgió la gran interrogante de tratar de entender cual era su significado. Una de sus características más evidentes es el que generaliza a la teoría de Newton en el sentido de que ésta se recupera como un límite de la Relatividad General. Por otra parte, los postulados de los que parte ésta son totalmente diferentes a los que sustentan el modelo Newtoniano. Se le dá un caracter totalmente diferente al espacio y al tiempo: no son conceptos aislados *per se*, sino que dependen e interactuan con la energía y materia que se encuentre en ellos. En los intentos por entender a esta Teoría ha habido dos corrientes principales: una que trata de encontrar soluciones particulares a las Ecuaciones de Einstein y de esta manera contruir modelos realistas para tratar de entender el sistema físico; la otra ha tratado de hacer un estudio geométrico de una variedad en general de espacio-tiempo investigando sobre sus propiedades de simetría y su estructura tanto geométrica como topológica. Aquí queremos llamar la atención de que estas dos corrientes no han trabajado directamente con las Ecuaciones de Einstein en toda su magnitud, han tratado de comprender conceptos y propiedades generales de las soluciones que tienen las Ecuaciones de Einstein. Estos enfoques son similares al utilizado en el análisis de un sistema cuántico (por ejemplo el átomo de Hidrógeno) estudiando sus propiedades dinámicas como espectro de energía, momento angular, etc. sin considerar a la ecuacón dinámica que define al sistema, a saber, la ecuación de Schroedinger ($i\hbar\frac{d}{dt}|\Psi>=\hat{H}|\Psi>$).

Existe una tercera corriente que surgiera a finales de los 50's que se ha avocado a estudiar directamente a las Ecuaciones de Einstein en sí, por medio de una reformulación del objeto dinámico relevante, permitiendo ver a la Teoría de la Relatividad General como una teoría dinámica, con constricciones, en la que se puede definir un Hamiltoniano. A su vez, aquí ha habido dos grandes tendencias, una que ha estudiado la estructura de las ecuaciones ya como teoría dinámica de ecuaciones diferenciales y otra que basándose en esta nueva formulación postula la existencia de un Espacio de espacios, es decir un espacio donde cada punto es a su vez un espacio tridimensional. Este concepto ha recibido el nombre de Superespacio (por Wheeler), y en él las Ecuaciones de Einstein se traducen en estudiar la evolución de los tres-espacios, un concepto más llamativo y comprensible, en principio. La Relatividad General recibe con esta formulación el nombre de **Geometrodinámica**.

Esta manera de ver a las Ecuaciones de Einstein enriquece conceptualmente el contenido de la Teoría de la Relatividad General y el estudio geométrico del Superespacio debería contribuir al mejor entendimiento de ella. Sin embargo, como ya ha podido sospechar el lector, las dificultades matemáticas y conceptuales de esta reformulación han sido enormes, haciendo que en la práctica se hayan obtenido pocos éxitos, entre los que cabe mencionar el de la aplicación a modelos cosmológicos conocidos como Minisuperespacios. Pero el premio es grande: mejor comprensión de las Ecuaciones de Einstein e inclusive un camino posible para cuantizar a la teoría gravitacional, por lo que se ha mantenido el interés por parte de la comunidad de físicos en su estudio y aplicaciones que, por cierto, se ha incrementado en los últimos años.

El presente trabajo trata de presentar una visión global de la última corriente mencionada anteriormente, la Geometrodinámica, partiendo desde la formulación Hamiltoniana de la Relatividad General hasta la introducción de las geodésicas del superespacio como las soluciones a las ecuaciones de Einstein.

El trabajo consiste de tres capítulos, estando el primero de ellos dedicado a la construcción de la formulación ADM de la Relatividad General, introduciendose los conceptos geométricos necesarios para tal fin. Se construye un Hamiltoniano constricción así como otras tres constricciones, que en su conjunto aparecen como responsables de la dinámica. El capítulo dos toma como punto de partida la constricción Hamiltoniana y el tensor generalizado que involucra ésta para estudiar y explotar las propiedades geométricas de una variedad que tiene por métrica a tal tensor. Se estudian las geodésicas de dicha variedad y se sugiere que todas tocan irremediablemente la frontera de la variedad haciendo que ésta no sea geodésicamente completa. Finalmente el capítulo tres aborda la teoría de Hamilton-Jacobi que permite un mayor entendimiento de la teoría y es un puente entre la posible formulación cuántica de la Geometrodinámica, en su aproximación semiclásica a la teoría clásica. Posteriomente se define formalmente al superespacio y se muestra que se puede definir una Supermétrica (en base al tensor del capítulo dos) en él, con la propiedad de que las trayectorias de espacio-tiempo son congruencias de geodésicas para ella.

Este trabajo es una revisión de los temas tratados y tiene como uno de los objetivos presentar de manera clara e integral las ideas y desarrollos algebraicos explícitos. Se ha tratado dentro de lo posible de introducir las ideas basicas y hacer las construcciones matematicas sin presuponerse muchos conceptos asimilados de antemano, por lo que se espera que la lectura del presente trabajo sea de utilidad para el lector.

México D.F., Septiembre 1991 Alejandro Corichi Rodríguez Gil

CAPITULO 1

1.1 Introducción

La formulación de la Teoría de la Relatividad General dada por Einstein tiene como uno de sus conceptos centrales el Principio de Equivalencia: "las leyes de la Física son independientes del estado de movimiento del observador". Este principio implica que dichas leyes deben ser descritas de manera covariante, es decir, independiente del sistema de coordenadas.

La formulación covariante es natural y permite expresar a la interacción de la materia con la geometría de manera simple y elegante:

$$G^{\mu\nu} = \kappa T^{\mu\nu}, \tag{1.1.1}$$

donde $G^{\mu\nu}$ es el tensor de Einstein y $T^{\mu\nu}$ el tensor de energía momento.

Una característica de la covariancia de las Ecuaciones de Einstein, es el que algunas de estas ecuaciones representan constricciones en las variables dinámicas. Dichas constricciones están estrechamente relacionadas con las identidades de Bianchi

$$G^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0, \tag{1.1.2}$$

que además expresan que estas constricciones se preservan cuando las ecuaciones dinámicas se satisfacen.

A pesar del alto grado estético que dá la formulación covariante a las ecuaciones de Einstein en la práctica, el aislar a las ecuaciones con contenido dinámico de las que son constricciones, se ve obscurecido precísamente por esta forma covariante de expresarlas.

Una manera de desentrañar a la dinámica de la Relatividad General es tratar de ver a ésta como un problema de Cauchy, es decir analizar a la dinámica como la evolución de una hipersuperfice tridimensional donde estén definidos los campos. Esta manera de reformular a la Relatividad General fué desarrollada por R. Arnowitt, S. Deser y C. W. Misner y tomó su forma completa a principios de los años 60 [1] y se conoce como la formulacion ADM de la Relatividad General.

Este formalismo ha tenido un desarrolo continuo a lo largo de sus casi 30 años de existencia, sin embargo el interés por parte de la comunidad de físicos téoricos en la realización de investigaciones sobre aplicaciones del formalismo ADM ha sufrido altibajos. Desde mediados de los 80's, ha habido nuevamente un creciente interés tanto en el formalismo mismo, como en sus aplicaciones en diferentes áreas. Por mencionar algunos ejemplos: ha servido como base para el desarrollo de las variables de Ashtekar [2]; se ha utilizado en problemas relacionados con la cuantización de la gravedad por medio de integrales de trayectoria [3]; ha servido como medio para determinar por métodos numéricos soluciones a las Ecuaciones de Einstein [4]; ha sido la base para el desarrollo de la teoría del Espacio de espacios [5].

En este capitulo se tratará de dar una introdución, lo más accesible posible al formalismo de ADM, así como a la formulación Hamiltoniana. El presente capítulo tiene la siguiente estructura: en la sección 2 se exponen las ideas y conceptos necesarios para la construcción del formalismo ADM, con un mínimo de ecuaciones, con el objeto de ofrecer un panorama global del método. En la sección 3 se presenta el desarrollo formal, deduciendo las ecuaciones de manera explícita, y finalmente en la sección 4 se presentan algunos ejemplos de aplicación del formalismo y se mencionan algunas áreas que se han desarrollado utilizando al formalismo ADM.

1.2 Desarrollo Conceptual

En esta sección se explican a grandes rasgos los pasos a seguir para la construcción del formalismo ADM, con el propósito de tener a este nivel, sin haber entrado en detalles, una idea relativamente clara de cual será el procedimiento a seguir.

Como mencionamos en la introducción, las variables ADM muestran explícitamente el contenido dinámico de las Ecuaciones de Einstein y permiten construir un Hamiltoniano en el que todos los términos tienen una interpretación relativamente clara, a más de que una vez que se puede definir un Hamiltoniano, es posible, en principio, proceder a la cuantización de la teoría una vez que se han aislado los grados de libertad verdaderos. La obtención de las Ecuaciones de Einstein a través de la formulación ADM tiene su forma más clara, desde nuesto punto de vista, haciendo uso del principio variacional.

El principio variacional, como uno de los posibles caminos para llegar a las Ecuaciones de campo de Einstein, consiste en encontrar los extremales de un funcional de acción, en este caso, de la acción gravitacional. La funcional de acción debe ser expresada como la integral sobre el espacio-tiempo (con el elemento invariante de volumen) de una función escalar. Paralelamente a los trabajos en los que Einstein diera a conocer su formulación, Hilbert postuló el principio variacional para la teoría gravitacional expresando a la accion de la forma:

$$S = \int \mathrm{d}x^4 \sqrt{-g}\, R\,, \tag{1.2.1}$$

donde la densidad Lagrangiana está dada por $\mathcal{L} = \sqrt{-g}\, R$, g es el determinate del tensor métrico y R es el escalar de curvatura.

La integral en (1.2.1) es sobre la totalidad de la 4-variedad (espacio-tiempo). La acción es una funcional del tensor métrico $S = S\,[g_{\mu\nu}]$, por lo que el tensor métrico *aceptable* debe ser aquel para el cual la acción sea un extremal. En otras palabras, se debe *variar* a la acción respecto a las componentes del tensor $g_{\mu\nu}$ para obtener las ecuaciones de movimiento. Al efectuar tal variación (teniendo cuidado con los términos de frontera) e igualarla a cero, se llega a las Ecuaciones de Einstein en el vacío:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\, R\, g_{\mu\nu} = 0 \tag{1.2.2}$$

La construcción *clásica* de la teoría hamiltoniana a partir de este punto, implicaría la construcción de los momenta canónicamente conjugados a las variables dinámicas, i.e. a las 10 componentes del tensor métrico, tomando la derivada parcial de la densidad Lagrangiana respecto de las *velocidades*. Pero ¿ como definimos a tales velocidades ? Para hacer eso, nos damos cuenta que es necesario privilegiar a alguna de las coordenadas como el *tiempo* para poder definir velocidades. Esto rompe la covariancia, pero además está *cortando* el espacio-tiempo en rebanadas de $x_o = c$. La complicación algebraica a la que lleva tal procedimiento es enorme. Podemos darnos una idea de dicha complejidad, con el hecho de que P.A.M. Dirac dedicara más de una década en tal intento sin llegar a resultados satisfactorios.

Es relativamente claro que se necesita *separar* en el sentido de hacer diferente, a alguna de las coordenadas, o bien a una *dirección* en el espacio-tiempo, para la construcción de un Hamiltoniano. La manera que se diseñó para hacer esto fué el considerar *rebanadas* de el espacio-tiempo, de manera que cada rebanada sea una hipersuperficie de 3 dimensiones con una métrica positiva definida en ella. Si consideramos al espacio-tiempo como formado por la colección de rebanadas, donde a cada una de estas se le etiqueta por un número t (no es necesariamente el tiempo, es una etiqueta), donde pedimos que ninguna de las rebanadas se intersecte, podemos entonces pensar en la *evolución* como el cambio de estas hipersuperficies en el parámetro t y cubrir de ésta manera al espacio-tiempo completamente. Dotando a cada hipersuperficie de una métrica tridimensional γ_{ij} determinada por la forma como *cortamos* al espacio-tiempo, es posible considerar a la métrica $\gamma_{ij}(t)$ de la hipersuperficie que evoluciona con t, como la variable dinámica.

Además de las seis componentes de γ_{ij} que forman dicha variable dinámica, se deben definir otras 4 variables para tener un total de diez, que es el número de componentes de la antigua variable $g_{\mu\nu}$. Estas cuatro variables se definen de manera *natural* al considerar la foliación de hipersuperficies en el espacio-tiempo. Estas nuevas variables que se denotan por N, función **Lapse**, de intervalo, que se relaciona con la separación entre cada hipersuperficie y N^i, funciones **Shift**, de desplazamiento, que se relacionan con el movimiento de un punto al pasar a la siguiente hipersuperficie. Estas cuatro funciones describen como *pegar* las hipersuperficies para formar la foliación.

Posteriormente se procede a reescribir al elemento de linea en términos de las nuevas variables $ds^2 = ds^2 [\gamma_{ij}, N, N^i]$, relacionado así a las nuevas variables con las antiguas.

El siguiente paso consiste en reescribir la acción gravitacional en términos de las nuevas variables, es decir, necesitamos expresar al escalar de curvatura del espacio-tiempo, ${}^4R$, y al invariante de volumen, $\sqrt{-g}\, d^4x$, como función de objetos geométricos en la hipersuperficie y de las nuevas variables N, N^i. Para esto es necesario estudiar el encajamiento (embedding) de las hipersuperficies, es decir, la manera en que la hipersuperficie hereda la estructura geométrica, tanto del espacio-tiempo como del encajamiento particular realizado, *i.e.* cómo se efectuó el corte. Así mismo, es necesario estudiar la forma en que los tensores del espacio-tiempo se proyectan sobre la hipersuperficie y sobre la dirección ortogonal a ella.

En este paso, jugará un papel importante la **curvatura extrinseca** K_{ij} a la hipersuperficie: $K_{ij} = K_{ij}[N, N_{i|j}, \dot{\gamma}_{ij}]$, con "$\cdot$", la derivada con respecto al parámetro "t", y la "barra" la derivada covariante en la hipersuperficie. Con la ayuda de este objeto se logra escribir al tensor de curvatura de Riemann, y por lo tanto al escalar de curvatura R, como funciones de γ_{ij}, $\dot{\gamma}_{ij}$, N y $N_{i|j}$. Queremos enfatizar el hecho de que la nueva densidad Lagrangiana no dependerá de las derivadas respecto a t de las funciones Lapse y Shift. Se llega finalmente a expresar a la acción de la forma:

$$S[\gamma_{ij}, N, N^i] = \int \mathrm{d}t \int \mathrm{d}^3x \sqrt{\gamma}\, N\, (K^{ij}K_{ij} - K^2 + R) \tag{1.2.3}$$

donde $\sqrt{-g} = N\sqrt{\gamma}$ es el nuevo elemento invariante de volumen, con respecto a transformaciones en la hipersuperficie.

La no dependencia de la densidad Lagrangiana en las velocidades de N y N^i, nos permite entonces considerarlas como variables dinámicas no relevantes. Este hecho nos sugiere entonces que las verdaderas variables dinámicas son las seis componentes de $\gamma_{ij}(t)$.

De esta manera obtenemos la reformulación del principio variacional de la Relatividad General con un contenido dinámico más claro, que es lo que se pretendía. Podemos ir más adelante y construir la densidad Hamiltoniana, $\mathcal{H}$, a partir de la nueva densidad Lagrangiana de la manera usual, definiendo los momenta canónicamente conjugados a las γ_{ij} de la forma:

$$\pi^{ij} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\gamma}_{ij}} \tag{1.2.4}$$

y efectuando la transformación de Legendre solamente sobre las variables dinámicas relevantes y sus momenta de la forma:

$$\mathcal{H} = \pi^{ij}\dot{\gamma}_{ij} - \mathcal{L}. \tag{1.2.5}$$

Esta densidad Hamiltoniana tiene la forma

$$\mathcal{H} = N\,\mathcal{H}_0 + N^i\,\mathcal{H}_i. \tag{1.2.6}$$

Las densidades escalares $\mathcal{H}_0$ y $\mathcal{H}_i$ jugarán un papel muy importante al analizar la dinámica de la teoría.

Como se mencionó al principio de esta sección, en la Relatividad General existen constricciones entre las variables (causadas por tratarse de una teoría covariante). Ahora es clara con la introducción del formalismo ADM, la forma que tienen las constricciones y a las variables que involucran. De esta manera se tienen cuatro constricciones primarias, es decir, aquellas que son consecuencia de la forma de la densidad Lagrangiana: los momenta conjugados a las cuatro variables N y N^i. Estos momenta

$$P^\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{N}_\mu}, \tag{1.2.7}$$

son débilmente cero, pues L no depende de $\dot{N}_\mu$ (llamamos N^μ al conjunto de variables N y N^i, pero no se implica con esto que sean las componentes de un campo vectorial). Podemos con la densidad Hamiltoniana reescribir a la densidad Lagrangiana donde ahora las variables dinámicas sean tanto los γ_{ab} como los momenta π^{ab} y asi tener un principio variacional de primer orden. La acción se escribe entonces:

$$S[\gamma_{ij}, N, N^i] = \int \mathrm{d}t \int \mathrm{d}^3x\, (\pi^{ij}\dot{\gamma}_{ij} - N\,\mathcal{H}_0 + N^i\,\mathcal{H}_i). \tag{1.2.8}$$

Esta expresión para la acción está en *forma parametrizada* como consecuencia de la covariancia. Las ecuaciones de movimiento se obtienen al variar respecto a las diferentes variables. Si se varian las N^{μ}, se obtiene que los cuatro $\mathcal{H}_{\mu}$ deben ser cero.

A estas expresiones que relacionan a las variables dinámicas (γ_{ij}, π^{ij}) entre sí se les conoce como **Constricciones Hamiltonianas.**

De ésta manera hemos presentado las ideas fundamentales para la construcción del formalismo ADM así como para la formulación Hamiltoniana. En la siguiente sección presentaremos el desarrollo formal, explícito, de las ideas aquí presentadas.

1.3 Desarrollo Formal

1.3.1 Encajamiento de una Hipersuperficie en una Variedad.

Consideremos al espacio-tiempo dado por una variedad 4-dimensional $\mathbf{M}$ con una métrica definida en ella $g_{\mu\nu}$ de signatura $(-,+,+,+)$. Denotemos a las coordenadas de esta variedad por x^{λ} . Definimos ahora el encajamiento de una hipersuperficie 3-dimensional $\mathbf{m}$ de la siguiente manera:

$$x^{\mu} = X^{\mu}(\xi^{a}), \tag{1.3.1}$$

donde $\mu = 0,1,2,3$ y $a = 1,2,3$. Estas cuatro funciones son las que determinan el encajamiento. Para que se trate de un encajamiento debemos pedir que la hipersuperficie, con coordenadas intrínsecas ξ^{a} , no se intersecte a sí misma, es decir, el mapeo $X : \mathbf{m} \longmapsto \mathbf{M}$ debe ser uno a uno [6].

La métrica de $\mathbf{M}$ induce una métrica sobre $\mathbf{m}$ si consideramos al elemento de línea restringido a la variedad $\mathbf{m}$:

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu}(x^{\lambda})\, dx^{\mu}\, dx^{\nu}\big|_{\mathbf{m}} \\ &= g_{\mu\nu}(X^{\lambda})\, \frac{\partial X^{\mu}}{\partial \xi^{a}}\, d\xi^{a}\, \frac{\partial X^{\nu}}{\partial \xi^{b}}\, d\xi^{b} \\ &= \left[g_{\mu\nu}(X^{\lambda})\, \frac{\partial X^{\mu}}{\partial \xi^{a}}\, \frac{\partial X^{\nu}}{\partial \xi^{b}} \right] d\xi^{a}\, d\xi^{b} \\ &\equiv \gamma_{ab}\, d\xi^{a}\, d\xi^{b}, \end{aligned} \tag{1.3.2a}$$

donde la métrica inducida es entonces

$$\gamma_{ab} = g_{\mu\nu}\, \frac{\partial X^{\mu}}{\partial \xi^{a}}\, \frac{\partial X^{\nu}}{\partial \xi^{b}}. \tag{1.3.2b}$$

Definamos,

$$X^{\mu}_{a} \equiv \frac{\partial X^{\mu}}{\partial \xi^{a}}, \tag{1.3.3}$$

nótese que X^μ_a es la μ-ésima componente en las coordenadas x^μ del a-esimo vector de la base coordenada *natural* sobre m dada por,

$$\mathbf{e}_a \equiv \frac{\partial}{\partial \xi^a}\,, \tag{1.3.4}$$

ya que el vector debe escribirse formalmente como,

$$\begin{aligned} X^\mu_a\,\partial_\mu &= \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^a}\,\frac{\partial}{\partial X^\mu} \\ &= \frac{\partial}{\partial \xi^a}\,. \end{aligned} \tag{1.3.5}$$

Tenemos entonces que la definición de las componentes de la métrica γ_{ab} sobre m es la definición natural dada por:

$$\begin{aligned} \gamma_{ab} &= g_{\mu\nu}\,X^\mu_a\,X^\nu_b \\ &= (\mathbf{e}_a\cdot\mathbf{e}_b)\,. \end{aligned} \tag{1.3.6}$$

Para el estudio de la dinámica del espacio-tiempo, en en marco que aqui interesa, la hipersuperficie encajada debe ser de tipo espacio (spacelike), por lo que pedimos que la métrica en ella γ_{ab} sea positiva definida $(+\,+\,+)$.

Los 3 vectores $\mathbf{e}_a$ forman una base para el espacio tangente a la variedad m en el punto p denotado por $\mathbf{T}_p\mathrm{m}$. Este espacio es a su vez un subespacio del espacio tangente a $\mathbf{M}$, $\mathbf{T}_p\mathbf{M}$. Para completar la base de este espacio construimos el complemento ortogonal al $\mathbf{T}_p\mathrm{m}$ definido por la métrica $g_{\mu\nu}$. Este subespacio será generado por el vector ortogonal a los $\mathbf{e}_a$, que denotaremos por $\mathbf{n}$. Este vector de componentes η^μ en la base ∂_μ satisface

$$g_{\mu\nu}\,X^\mu_a\,\eta^\nu = 0\,, \tag{1.3.7}$$

pedimos además que esté normalizado,

$$g_{\mu\nu}\,\eta^\mu\,\eta^\nu = -1\,. \tag{1.3.8}$$

Estas dos condiciones determinan totalmente al vector $\mathbf{n}$.

Tenemos entonces que el conjunto de vectores $(\mathbf{e}_a, \mathbf{n})$ forman una base de $\mathbf{T}_p\mathbf{M}$ para cada punto p. Con ellos podemos expresar a cualquier vector del $\mathbf{T}_p\mathbf{M}$ como la combinación lineal de la base de la hipersuperficie m y el vector normal de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A})^\mu &= (\,A^a\,\mathbf{e}_a + A^\perp\mathbf{n}\,)^\mu \\ &= A^a\,X^\mu_a + A^\perp\eta^\mu\,, \end{aligned} \tag{1.3.9}$$

donde

$$A^{\perp} = -(\mathbf{A} \cdot \mathbf{n})\,. \tag{1.3.10}$$

Si el vector $\mathbf{A}$ está sobre la hipersuperficie será entonces de la forma $\mathbf{A} = A^a\,\mathbf{e}_a$. Los *escalares* A^a se comportan como escalares bajo una transformación de coordenadas del espacio-tiempo $X^\mu \longmapsto X'^\mu$, ya que ante tales cambios de coordenadas, tanto los vectores $\mathbf{e}_a$ como el vector $\mathbf{A}$ se mantienen fijos, por lo que los A^a no cambian. Sin embargo, los podemos ver como componentes contravariantes de vectores sobre $\mathbf{T}_p\mathbf{m}$, dado que se transforman como tales ante cambios de coordenadas $\xi^a \longmapsto \xi'^a$ en la hipersuperficie:

$$\begin{aligned} A^a\,\frac{\partial}{\partial\xi^a} &= A^a\,\frac{\partial\xi'^b}{\partial\xi^a}\frac{\partial}{\partial\xi'^b} \\ &= A'^a\,\mathbf{e}'_a\,, \end{aligned} \tag{1.3.11}$$

por lo que las nuevas componentes serán

$$A'^a = \frac{\partial\xi'^a}{\partial\xi^b}\,A^b\,. \tag{1.3.12}$$

Definimos la metrica contravariante en $\mathbf{m}$ como la matriz inversa a γ_{ab}, es decir, $\gamma^{ab} \equiv (\gamma_{ab})^{-1}$, de manera que podemos usar la métrica para bajar y subir índices de las componentes:

$$\begin{aligned} A_a &= \gamma_{ab}A^b \\ A^a &= \gamma^{ab}A_b\,. \end{aligned} \tag{1.3.13}$$

Las componentes contravariantes del vector las podemos reescribir de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} A^a &= \gamma^{ab}\,A_b \\ &= \gamma^{ab}\,(\mathbf{A}\cdot\mathbf{e}_b) \\ &= \gamma^{ab}\,g_{\mu\nu}\,X^\mu_b\,A^\nu \\ &= X^a_\nu\,A^\nu\,, \end{aligned} \tag{1.3.14}$$

donde estamos definiendo al objeto

$$X^a_\nu \equiv \gamma^{ab}\,g_{\mu\nu}\,X^\mu_b\,, \tag{1.3.15}$$

que nos permite ancontrar la a-ésima componente contravariante del vector $\mathbf{A}$.

Dado un vector de espacio-tiempo arbitrario $\mathbf{A}$ con componentes A^μ, sabemos ya la manera de encontrar sus proyecciones en la hipersuperficie $[A_a = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{e}_a)]$ en la base natural de $\mathbf{T}_p\mathbf{m}$. Queremos ahora encontrar una relacioń que nos exprese a esta misma proyección en componentes de la base $\partial\mu$. Para tal fín, observamos que de la igualdad

$$(\mathbf{A})^\mu = A^a X^\mu_a - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{n})\eta^\mu\,, \tag{1.3.16}$$

tenemos que la componente μ-'esima del vector proyectado sobre la hipersuperficie es

$$\begin{aligned} A^a X^\mu_a &= A^\mu + A^\nu \eta_\nu \eta^\mu \\ &= A^\nu (\delta^\mu{}_\nu + \eta_\nu \eta^\mu)\,. \end{aligned} \tag{1.3.17}$$

Por lo tanto, hemos encontrado el operador de proyección que manda a un vector de espacio-tiempo a uno sobre la hipersuperficie. A este operador lo denotaremos por:

$$h^\mu{}_\nu \equiv \delta^\mu{}_\nu + \eta^\mu \eta_\nu. \tag{1.3.18}$$

Es fácil ver que este operador satisface las siguientes propiedades haciendo uso de (1.3.7) y (1.3.8):

$$\begin{aligned} \eta^\nu h^\mu{}_\nu &= 0, \\ h^\mu{}_\nu h^\nu{}_\rho &= h^\mu{}_\rho, \\ h^\mu{}_\mu &= 3. \end{aligned} \tag{1.3.19}$$

1.3.2 Derivadas Covariantes Inducidas.

La derivada covariante, definida por la métrica $g_{\mu\nu}$, de un vector sobre $\mathbf{m}$, en la dirección de otro vector que también esté en $\mathbf{m}$ no será en general un vector tangente a la hipersuperficie. La forma natural de definir una derivada covariante en $\mathbf{m}$ sería pedir que ésta sea también un vector de $\mathbf{T}_p\mathbf{m}$ [7]. En este punto es conveniente considerar el caso en que las primeras 3 coordenadas x^μ coinciden con las ξ^a, es decir, tenemos que $x^a = \xi^a$. A estas coordenadas se les denomina **coordenadas adaptadas.** Notemos que en este caso, las vectores $\mathbf{e}_a$ coinciden con tres vectores de la base coordenada de $\mathbf{T}_p\mathbf{M}$, por lo que sus componentes son triviales: $X^\mu_a = \delta^\mu_a$. El tomar este sistema de coordenadas para $\mathbf{m}$ simplifica en general el análisis, ya que las expresiones obtenidas son más simples, sin perderse generalidad. Esto se debe a que siempre es posible tomar a las tres coordenadas intrínsecas de $\mathbf{m}$ como tres de las coordenadas del espacio tiempo. A partir de ahora, en todo el análisis se usarán coordenadas adaptadas. Tomemos un vector sobre la hipersuperficie $\mathbf{A} = A^a\,\mathbf{e}_a$. Podemos entonces considerar la derivada covariante (de espacio tiempo) en la dirección de los vectores base de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} {}^4\nabla_{\mathbf{e}_a} \mathbf{A} \equiv {}^4\nabla_a \mathbf{A} &= {}^4\nabla_a(\mathbf{e}_b A^b) \\ &= \mathbf{e}_b \frac{\partial A^b}{\partial x^a} + ({}^4\Gamma^\mu{}_{ba}\, \mathbf{e}_\mu)\, A^b, \\ &= \mathbf{e}_b \frac{\partial A^b}{\partial x^a} + ({}^4\Gamma^c{}_{ba}\, \mathbf{e}_c + {}^4\Gamma^0{}_{ba}\, \mathbf{e}_0)\, A^b\,. \end{aligned} \tag{1.3.20}$$

Como caso particular, la derivada covariante de los vectores base está dada por

$$\begin{aligned} {}^4\nabla_a \mathbf{e}_b &= {}^4\Gamma^{\mu}{}_{ba}\,\mathbf{e}_\mu \\ &= {}^4\Gamma^{c}{}_{ba}\,\mathbf{e}_c + {}^4\Gamma^{0}{}_{ba}\,\mathbf{e}_0 \,. \end{aligned} \tag{1.3.21}$$

Tanto en la ecuación (1.3.20) como en la (1.3.21), existe un término *fuera* de la hipersuperficie:

$$({}^4\Gamma^{0}{}_{ba}\,A^b)\,(\mathbf{e}_0\cdot\mathbf{n})\,, \tag{1.3.22}$$

que, en general, no se anula. Podemos deshacernos de ese término proyectando al vector sobre la hipersuperficie, a manera de tener un vector en $\mathbf{T}_p\mathbf{m}$. De este modo obtenemos la derivada covariante intrínseca a la 3-geometría de la hipersuperficie. De ahora en adelante denotaremos al operador asociado a esta derivada por ${}^3\nabla \equiv \nabla$. En términos de componentes A^a en $\mathbf{T}_p\mathbf{m}$ la componente contravariante de la derivada covariante se expresa:

$$A^c{}_{|a} \equiv {}^3\nabla_a A^c = A^c{}_{,a} + {}^3\Gamma^{c}{}_{ba}\,A^b\,, \tag{1.3.23}$$

donde

$${}^3\Gamma^{c}{}_{ba} = {}^4\Gamma^{c}{}_{ba}\,.$$

Si ahora consideramos a la c-ésima componente covariante de la derivada del vector $\mathbf{A}$ en la direccion de $\mathbf{e}_a$, ésta será de la forma:

$$({}^3\nabla_a\mathbf{A})_c = \mathbf{e}_c\cdot{}^3\nabla_{\mathbf{e}_a}\mathbf{A}\,, \tag{1.3.24}$$

que se puede también expresar como

$$\begin{aligned} A_{c|a} &\equiv \mathbf{e}_c\cdot\nabla_a\mathbf{A} \\ &= A_{c,a} - {}^3\Gamma_{bca}\,A^b. \end{aligned} \tag{1.3.25}$$

Notemos que la forma que toman las expresiones de la derivada tanto en sus componentes covariantes como contravariantes es la misma que las derivadas en el espacio-tiempo. Este hecho se debe a que la derivada covariante en la hipersuperficie está dada por la conección afín en la variedad m, como consecuencia de que la derivada covariante en la hipersuperficie del tensor métrico se anula [6]. La conección afín queda definida a partir de la métrica en la forma usual:

$${}^3\Gamma_{abc} \equiv \frac{1}{2}\left(\gamma_{ab,c} + \gamma_{ac,b} - \gamma_{bc,a}\right)\,, \tag{1.3.26}$$

y con la siguiente interpretación:

$${}^3\Gamma_{abc} \equiv \Gamma_{abc} = \mathbf{e}_a\cdot\nabla_c\mathbf{e}_b. \tag{1.3.27}$$

Con el objeto de facilitar los cálculos, notemos que la derivada covariente puede igualmente expresarse (para $A^\mu = A^b X^\mu_b$) en términos de componentes de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} A^b{}_{|c} &= (A^\mu{}_{;\nu} X^\nu_c)^b \\ &= X^b_\mu (A^\mu{}_{;\nu} X^\nu_c) \\ &= X^b_\mu X^\nu_c A^\mu{}_{;\nu} . \end{aligned} \tag{1.3.28}$$

1.3.3 Curvatura Extrínseca.

Definimos ahora la **curvatura extrínseca** a la hipersuperficie como,

$$K_{ab} \equiv -\mathbf{e}_b \cdot {}^4\nabla_a \mathbf{n} , \tag{1.3.29}$$

es decir, la componente (ab) de la curvatura extrínseca es igual a la proyección en la dirección b de la derivada covariante del vector normal en la dirección a (salvo signo). Notemos que la curvatura está bién definida sobre la hipersuperficie, ya que el vector ${}^4\nabla_a \mathbf{n}$ es un vector en $\mathbf{T}_p\mathbf{m}$:

$$0 = {}^4\nabla_a(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}) ,$$

de donde,

$$0 = {}^4\nabla_a \mathbf{n}\cdot\mathbf{n} , \tag{1.3.30}$$

por lo que K_{ab} es un objeto geométrico de la variedad $\mathbf{m}$. La noción de curvatura extrínseca no tiene sentido para una variedad en sí misma, solo toma significado cuando dicha variedad se encuentra encajada en una de dimensión mayor, ya que de la misma definición, la curvatura K_{ab} depende de la geometría de la variedad grande (a través de la derivada covariante de espacio-tiempo y del vector normal a la hipersuperficie).

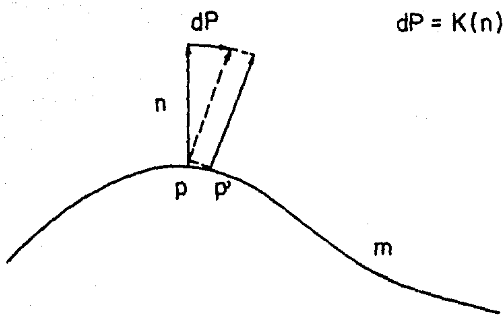
Una interpretación geométrica de la curvatura extrínseca es que dá una medida de qué tanto se *curva* la hipersuperficie respecto de la variedad $\mathbf{M}$, o en otras palabras, nos dice qué tanto los vectores normales para dos puntos cercanos en $\mathbf{m}$ se alejan de ser paralelos (ver figura I). Existe una forma de reescribir a la curvatura que se sigue de la ortogonalidad de $\mathbf{n}$ respecto de la hipersuperficie, es decir, $(\mathbf{e}_a\cdot\mathbf{n}) = 0$. Tenemos entonces que,

$$K_{ab} = \mathbf{n}\cdot {}^4\nabla_a \mathbf{e}_b . \tag{1.3.31}$$

Esta última expresión y la ecuación (1.3.27) nos dicen cómo escribir al vector ${}^4\nabla_a \mathbf{e}_b$ en terminos de sus componentes sobre la hipersuperficie y la dirección ortogonal:

$$ {}^4\nabla_a \mathbf{e}_b = -K_{ab}\mathbf{n} + {}^3\Gamma^c{}_{ba}\,\mathbf{e}_c . \tag{1.3.32}$$

Figura I. Representación esquemática de la curvatura extrínseca, la cual da una medida de la diferencia entre los vectores normales en puntos *cercanos* sobre la variedad m.



La ecuación (1.3.32) es conocida como la **ecuación de Gauss.**

El conocimiento de la derivada covariante de espacio-tiempo de los vectores base $\mathbf{e}_a$ nos permite escribir entonces a la derivada de un vector arbitrario sobre $\mathbf{T}_p\mathbf{m}$:

$$^4\nabla_a \mathbf{A} = A^b{}_{|a}\mathbf{e}_b - K_{ab}A^b\mathbf{n}. \tag{1.3.33}$$

Para finalizar esta sección escribamos a la curvatura extrínseca en componentes,

$$K_{ab} = -X^\mu_a X^\nu_b \, \eta_{\mu;\nu}, \tag{1.3.34}$$

de manera que en coordenadas adaptadas toma la forma:

$$K_{ab} = -\eta_{a;b}\,. \tag{1.3.35}$$

1.3.4 Descomposición del Espacio-Tiempo en 3 + 1.

Hasta ahora, hemos definido de manera precisa la forma de encajar una 3-geometría en el espacio-tiempo, se ha encontrado la métrica γ_{ab} sobre esta hipersuperficie, la derivada covariante sobre ella (por lo tanto la noción de transporte paralelo), así como la descomposición de un vector de espacio-tiempo en componentes proyectadas y ortogonales.

El siguiente paso consiste en afirmar que la totalidad del espacio-tiempo se puede *generar* por las hipersuperficies (cada una de ellas corresponde a un encajamiento) sin que se intersecten éstas. A la totalidad de las hipersuperficies generadoras se le denomina una **foliación**. Como ejemplo, el espacio euclidiano R^3 se puede ver como generado por esferas de radio a; cada esfera es una hipersuperficie (dim=2) encajada en R^3 (dim=3) y la totalidad de las esferas constituye una foliación de R^3.

La foliación estará dada por una función t en el espacio-tiempo de forma tal que a cada hipersuperficie le corresponda un valor contante de t, es decir, las hipersuperficies están definidas por t=cte. Recordemos que t es simplemente una etiqueta. En el ejemplo de las esferas tal función puede ser la función radio $r = r(x, y, z)$ que a cada esfera le asigna $r = a$.

Dada una hipersuperficie con etiqueta $t = t_0$, un punto p sobre ella está caracterizado por sus tres coordenadas ξ^a; este punto representa un evento. A este punto le corresponde un punto p' sobre la hipersuperficie de etiqueta $t_0 + dt$, de tal forma que los dos puntos están *identificados*. La dirección en la que esté el punto p' respecto de la hipersuperficie t_0 depende de la función t: el punto p' tendrá las mismas coordenadas intrínsecas sobre la hipersuperficie $t_0 + dt$ que las que tenía el punto p en la hipersuperficie original, pero sus coordenadas de espacio-tiempo serán diferentes según sea la función t.

Para ilustrar esta idea tomemos al punto p sobre la esfera de radio a como el polo norte (ver fig II). Este punto tendrá sobre la esfera las coordenadas ($\theta = 0$). El punto p', sobre la esfera de radio $a + dr$ que le corresponde a p no tiene porque ser también el polo norte de la esfera (visto como el punto sobre el eje z de R^3), aunque le correspondan las mismas coordenadas intrínsecas ($\theta = 0$) sobre su esfera. Habrá entonces un vector que *conecte* a los puntos p y p' basado en el punto p (estamos considerando que dt es *infinitesimal*), que no es necesariamente ortogonal a la hipersuperficie. Para las esferas, el vector será ortogonal sólo si p' es también el polo norte.

La foliación está dada analíticamente por las funciones,

$$x^\mu = X^\mu(\xi^a, t)\,, \tag{1.3.36}$$

donde el vector que *conecta* a los puntos de dos hipersuperficies está dado por ∂_t, con componentes en la base ∂_μ dadas por

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} &= \frac{dX^\mu}{dt}\,\frac{\partial}{\partial x^\mu}\\ &= t^\mu\,\frac{\partial}{\partial x^\mu}\,,\end{aligned} \tag{1.3.37}$$

sus componentes son por lo tanto $t^\mu \equiv \dfrac{dX^\mu}{dt}$.

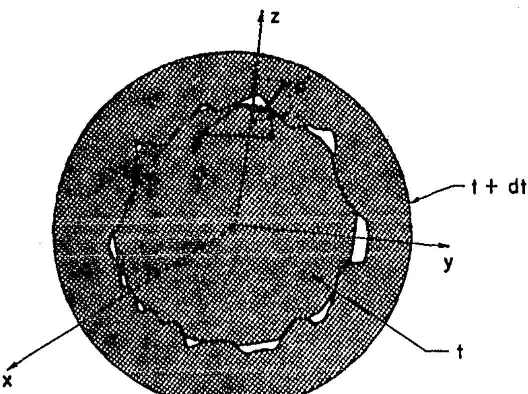


Figura II. Se representan dos esferas de la foliación de R^3 en las que los puntos p y p' están identificados. Se hace notar que el punto p' no se encuentra necesariamente sobre el polo norte de la esfera exterior.

De la sección 1.3.1, sabemos cómo descomponer a un vector en parte proyectada sobre la hipersuperficie y en parte normal (1.3.9) y (1.3.10), por lo que podemos escribir en esa forma al vector ∂_t:

$$\begin{aligned} t^\mu &= -(\mathbf{t}\cdot\mathbf{n})\,\eta^\mu + \gamma^{ab}\,(\mathbf{t}\cdot\mathbf{e}_b)\,X^\mu_a \\ &= -(\mathbf{t}\cdot\mathbf{n})\,\eta^\mu + \gamma^{ab}g_{\nu\lambda}\,X^\lambda_b\,t^\nu\,X^\mu_a \\ &= -(\mathbf{t}\cdot\mathbf{n})\,\eta^\mu + (X^a_\nu\,t^\nu)\,X^\mu_a \\ &\equiv N\,\eta^\mu + N^a\,X^\mu_a\,. \end{aligned} \tag{1.3.38}$$

Al escalar N se le denomina **función lapse**, y el vector sobre la hipersuperficie N^a se le conoce como **vector shift**. Estas, junto con la métrica γ_{ab} constituyen las llamadas variables **ADM**. Como se puede ver claramente del ejemplo de las esferas, la función Lapse representa qué tanto se *separa* la nueva esfera; la separación en este caso es la misma para cada punto de la esfera ya que todas las hipersuperficies son esferas, pero en el caso general la separación no será constante. Por otro lado, el vector shift indica que tanto *rotó* la esfera, o en otras palabras, que tanto se *deformó*. La interpretación para las hipersuperficies tipo espacio es similar y entonces toman sentido los nombres de las nuevas variables N y N^a: la función *Lapse* dá información del *lapso* de tiempo entre los eventos p y p' (para un observador sería el tiempo propio transcurrido), ya que la dirección normal a la hipersuperficie es en algún sentido la dirección temporal (recordemos que el espacio-tiempo tiene signatura $(-,+,+,+)$); el vector *Shift* representa que tanto se *desplaza* el punto p sobre la propia hipersuperficie y por lo tanto, vista ésta globalmente, qué tanto se deforma.

Es claro de la ecuación (1.3.38) que al especificar las cuatro funciones N^μ queda determinada completamente la foliación de las hipersuperficies que darán lugar al espacio-tiempo; para que éste quede totalmente determinado es necesario encontrar la métrica inducida sobre cada hipersuperficie, la cual estará dada por las ecuaciones dinámicas que se derivarán más tarde.

Veamos ahora la forma de reescribir el elemento de linea del espacio tiempo (es decir, la *distancia* entre dos eventos) en terminos de las nuevas variables, es decir, de γ_{ab} y de N, N^a. El elemento de linea entre dos eventos del espacio-tiempo $p\ (x^a,t)$ y $q\ (x^a+dx^a, t+dt)$, lo descompondremos en dos partes: el cuadrado de la distancia sobre la hipersuperficie que contiene a p menos el cuadrado del tiempo propio entre hipersuperficies:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \gamma_{ab}\,(dx^a + N^a\,dt)\,(dx^b + N^b\,dt) - (N\,dt)^2 \\ &= (N_aN^a - N^2)dt^2 + 2\,N_a\,dx^a\,dt + \gamma_{ab}\,dx^a\,dx^b \end{aligned} \tag{1.3.39}$$

donde $(dx^a + N^a\,dt)$ es el desplazamiento sobre la hipersuperficie base y $N\,dt$ el tiempo propio entre ellas (ver figura III). Esto se puede ver más claramente si notamos que en el caso en que $N^a = 0$ el elemento de linea tendrá contribuciones de:*i*) la distancia sobre la hipersuperficie base y *ii*) el tiempo propio, ya que la *evolución* de las hipersuperficies es meramente temporal (t^{μ} es en este caso normal a la hipersuperficie). De la última expresión (1.3.39) se desprende la relación entre las componentes covariantes de la metrica $g_{\mu\nu}$en coordenadas adaptadas y las variables γ_{ab},N,N^a:

$$
\begin{aligned}
g_{00} &= (N^a N_a - N^2) \\
g_{0a} &= N_a \qquad\qquad (1.3.40) \\
g_{ab} &= \gamma_{ab}
\end{aligned}
$$

Las componentes contravariantes se encuentran invirtiendo la matriz $g_{\mu\nu}$de forma que tenemos:

$$
g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{N^2} & \frac{N^b}{N^2} \\ \frac{N^a}{N^2} & \gamma^{ab} - \frac{N^a N^b}{N^2} \end{pmatrix} \qquad (1.3.41)
$$

El elemento de volumen esta dado por

$$
\sqrt{-g}\, d^4x = N \sqrt{\gamma}\, d^3x\, dt\,. \qquad (1.3.42)
$$

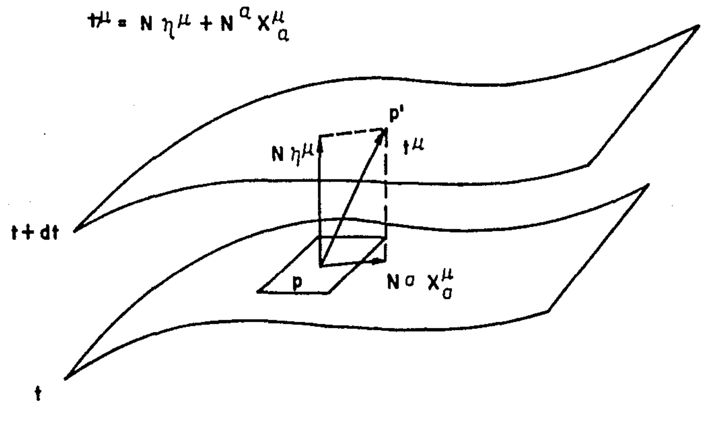


Figura III. Se muestran las proyecciones del vector ∂_t sobre la hipersuperficie t y sobre el vector normal $\mathbf{n}$, identificandose a éstas con las funciones N^a y N, respectivamente.

Las primeras dos ecuaciones de (1.3.40) nos dicen que las componentes $g_{0\mu}$ de la métrica de espacio-tiempo y las variables N^μ están relacionadas directamente, por lo que podemos reemplazar a las primeras por estas últimas. Se desprende de igual forma que las componentes $g_{0\mu}$ son variables dinámicas no relevantes, puesto que las N^μ deben ser impuestas desde *fuera* para construir la foliación.

1.3.5 Escalar de curvatura.

Habiendo introducido el nuevo conjunto de variables ADM, estamos ahora en posibilidad de reescribir al escalar de curvatura ${}^4R$ en términos de estas variables, con el objeto de reescribir el principio variacional. Como primer paso relacionaremos a la curvatura extrínseca definida en la sección 1.3.3 con las variables ADM. De la ecuación (1.3.35) podemos escribir

$$\begin{aligned} K_{ab} &= -\eta_{a;b} \\ &= -\eta_{a,b} + {}^4\Gamma^\mu{}_{ab}\,\eta_\mu \end{aligned} \tag{1.3.43}$$

en coordenadas adaptadas $\eta_\mu = -N\,(1,0,0,0)$, por lo que usando las ecuaciones (1.3.41), (1.3.26) y (1.3.25) tenemos:

$$\begin{aligned} K_{ab} &= -N\,{}^4\Gamma^0{}_{ab} \\ &= -N\left(g^{00}\,{}^4\Gamma_{0ab} + g^{0c}\,\Gamma_{cab}\right) \\ &= -N\left[-\frac{1}{2N^2}\left(N_{a,b} + N_{b,a} - \dot\gamma_{ab}\right) + \frac{1}{N^2}N^c\,\Gamma_{cab}\right] \\ &= \frac{1}{2N}\left(N_{a|b} + N_{b|a} - \dot\gamma_{ab}\right). \end{aligned} \tag{1.3.44}$$

Notemos que K_{ab} no depende de las derivadas respecto a t de N^μ.

Existe un sistema de coordenas de alguna forma privilegiado. En este sistema, se toma la elección $N = 1$, $N_a = 0$. Estas se conocen con el nombre de **Coordenadas Normales de Gauss.** Notemos que en tal caso la expresión para la curvatura extrínseca se simplifica siendo entonces igual a la derivada respecto a t del tensor métrico. En el ejemplo de las esferas, esto implicaría que el vector t^μ es normal a las esferas, de manera que si tenemos una esfera *inicial* y a la sucesión de puntos sobre todas las esferas que están identificados con el punto inicial p_0 las pegamos para formar una curva en el espacio euclideano, estas rectas serán rayos que salen del origen y cruzan por p_0.

En el caso del espacio-tiempo y las foliaciones ocurre exactamente lo mismo: En coordenadas normales de Gauss la trayectoria en el espacio-tiempo que describen todos los puntos identificados con el punto inicial sobre una hipersuperficie inicial forman una geodésica del espacio-tiempo. En otras palabras, la evolucion de cada punto a partir de su respectiva hipersuperficie es normal a ésta (recordemos que está dada por la dirección del vector t^μ). Como se mencionó en el párrafo anterior la curvatura extrínseca coincide con la derivada de la métrica por lo que podemos interpretar a aquella en cierta forma como una derivada *normal*. En efecto, se ha demostrado [26] que precisamente la curvatura extrínseca es igual a la derivada de Lie del tensor métrico sobre la variedad $\mathbf{m}$ a lo largo del vector normal.

A continuación reescribiremos al tensor de Riemann ${}^4R^\mu{}_{\nu\lambda\rho}$ restringido a la hipersuperficie, es decir, de componentes ${}^4R^a{}_{bcd}$ en terminos del tensor de Riemann intrínseco a la hipersuperficie (construido a partir de la derivada covariante intrínseca a ésta), ${}^3R^a{}_{bcd}$, así como de la curvatura extrínseca [8]. Para esto cambiaremos de base del espacio-tiempo; en vez de tomar al vector $\mathbf{e}_0 = \partial_t$ como hasta ahora, tomaremos al vector normal $\mathbf{n}$.

El tensor de Riemann está definido por

$$[\nabla_\alpha, \nabla_\beta] A^\mu = R^\mu{}_{\nu\alpha\beta} A^\nu , \tag{1.3.45}$$

por lo que si al vector $\mathbf{A}$ lo tomamos en la hipersuperficie (en particular un vector base) y las derivadas son también en la dirección de los vectores $\mathbf{e}_a$ tenemos, usando la ecuación de Gauss (1.3.32), que la segunda derivada covariante será,

$$\begin{aligned}
{}^4\nabla_{\mathbf{e}_a} {}^4\nabla_{\mathbf{e}_b} \mathbf{e}_c &= {}^4\nabla_{\mathbf{e}_a} \left[-K_{cb}\,\mathbf{n} + {}^3\Gamma^d{}_{cb}\,\mathbf{e}_d \right] \\
&= -K_{cb,a}\,\mathbf{n} - K_{cb}\,{}^4\nabla_{\mathbf{e}_a}\mathbf{n} + {}^3\Gamma^d{}_{cb,a}\,\mathbf{e}_d + {}^3\Gamma^d{}_{cb}\,\nabla_{\mathbf{e}_a}\mathbf{e}_d \\
&= -K_{cb,a}\,\mathbf{n} + K_{cb}\,K^d_a\,\mathbf{e}_d + {}^3\Gamma^d{}_{cb,a}\,\mathbf{e}_d \\
&\quad + {}^3\Gamma^d{}_{cb} \left[-K_{da}\,\mathbf{n} + {}^3\Gamma^e{}_{da}\,\mathbf{e}_e \right] .
\end{aligned} \tag{1.3.46}$$

Calculando de igual forma ${}^4\nabla_{\mathbf{e}_b} {}^4\nabla_{\mathbf{e}_a} \mathbf{e}_c$ y tomando la diferencia tenemos:

$$\begin{aligned}
{}^4[\nabla_a, \nabla_b]\mathbf{e}_c &= -\mathbf{n} \left[K_{cb,a} - K_{db}\,{}^3\Gamma^d{}_{ca} - K_{dc}\,{}^3\Gamma^d{}_{ba} - K_{ca,b} + K_{da}\,{}^3\Gamma^d{}_{cb} + K_{dc}\,{}^3\Gamma^d{}_{ab} \right] \\
&\quad + \left[K_{cb}\,K^d_a - K_{ca}\,K^d_b + {}^3R^d{}_{cab} \right] \mathbf{e}_d \\
&= \mathbf{n} \left[K_{ca|b} - K_{cb|a} \right] + \left[{}^3R^d{}_{cab} + K_{cb}\,K^d_a - K_{ca}\,K^d_b \right] \mathbf{e}_d .
\end{aligned} \tag{1.3.47}$$

De la ecuación (1.3.47)tenemos directamente las proyecciónes sobre la hipersuperficie y la normal, por lo que podemos escribir:

$${}^4R^d{}_{cab} = {}^3R^d{}_{cab} + K_{cb}\,K^d{}_a - K_{ca}\,K^d{}_b , \tag{1.3.48}$$

ecuación de Gauss - Codazzi.

$${}^4R^\perp{}_{cab} = K_{ca|b} - K_{cb|a} , \tag{1.3.49}$$

ecuación de Codazzi - Mainardi.

El escalar de curvatura ${}^4R$ está dado por,

$$ {}^4R \equiv {}^4R^{\mu\nu}{}_{\mu\nu} = {}^4R^{ab}{}_{ab} + 2\,{}^4R^{\mu\perp}{}_{\mu\perp}\,. \tag{1.3.50} $$

Conocemos ya el primer término de ésta última expresión, pero hace falta encontrar el segundo. Utilizaremos el lenguage de componentes puesto que se simplifican los cálculos.

El conmutador de las derivadas covariantes del vector normal está dado en terminos del tensor de Riemann por,

$$ [\nabla_\alpha, \nabla_\beta]\,\eta^\nu = {}^4R^\nu{}_{\rho\alpha\beta}\,\eta^\rho \equiv R^\nu{}_{\perp\alpha\beta}\,, \tag{1.3.51} $$

que en componentes se escribe:

$$ R^\perp{}_{\nu\alpha\beta} = \eta_{\nu;\alpha\beta} - \eta_{\nu;\beta\alpha}\,. \tag{1.3.52} $$

Si ahora proyectamos el tercer índice del tensor sobre la normal, y contraemos el segundo y cuarto indices obtenemos,

$$ \begin{aligned} R^{\perp\mu}{}_{\perp\mu} &\equiv \eta^\nu\, R^{\perp\mu}{}_{\nu\mu} \\ &= \eta^\nu\,(\eta^\lambda{}_{;\lambda\nu} - \eta^\lambda{}_{;\nu\lambda}) \\ &= (\eta^\nu\,\eta^\lambda{}_{;\lambda})_{;\nu} - (\eta^\nu\,\eta^\lambda{}_{;\nu})_{;\lambda} - \eta^\nu{}_{;\nu}\,\eta^\lambda{}_{;\lambda} + \eta^\nu{}_{;\mu}\,\eta^\mu{}_{;\nu} \\ &= (\eta^\lambda\,\eta^\nu{}_{;\nu} - \eta^\nu\,\eta^\lambda{}_{;\nu})_{;\lambda} - \eta^\nu{}_{;\nu}\,\eta^\mu{}_{;\mu} + \eta^\nu{}_{;\mu}\,\eta^\mu{}_{;\nu}\,, \end{aligned} \tag{1.3.53} $$

sin embargo,

$$ \begin{aligned} \eta^\mu{}_{;\mu} &= -K^a{}_a \equiv -K\,, \\ \eta^\nu{}_{;\mu}\,\eta^\mu{}_{;\nu} &= K_{ab}\,K^{ab}, \end{aligned} \tag{1.3.54} $$

con lo que podemos escribir,

$$ R^{\perp\mu}{}_{\perp\mu} = K_{ab}\,K^{ab} - K^2 + (\Delta^\lambda)_{;\lambda}\,, \tag{1.3.55} $$

con $\Delta^\lambda = \eta^\lambda\,\eta^\nu{}_{;\nu} - \eta^\nu\,\eta^\lambda{}_{;\nu}$.

Usando las ecuaciones (1.3.50),(1.3.48) y (1.3.55) expresamos entonces al escalar de curvatura como:

$$ \begin{aligned} {}^4R &= {}^3R + K^2 - K_{ab}\,K^{ab} + 2\left(K_{ab}\,K^{ab} - K^2 + (\Delta^\lambda)_{;\lambda}\right) \\ &= {}^3R + K_{ab}\,K^{ab} - K^2 + 2\,(\Delta^\lambda)_{;\lambda}\,. \end{aligned} \tag{1.3.56} $$

En esta sección hemos expresado tanto al tensor de Riemann como al escalar de curvatura en función de las nuevas variables, con lo que podemos reescribir al tensor de Einstein $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R.$, y por lo tanto a las ecuaciones de Einstein en el vacio: $G_{\mu\nu} = 0$. Este procedimiento se utiliza para resolver las ecuaciones en forma numérica (ver [4]). Nosotros no seguiremos este camino, ya que estamos más interesados en la construcción de un Hamiltoniano para lo cual se necesita considerar un principio variacional.

1.3.6 Principio Variacional.

Habiendo definido el nuevo conjunto de variables ADM y reescrito el escalar de curvatura, así como el invariante de volumen en términos de ellas, podemos entonces reformular el principio variacional que dá lugar a las ecuaciones de campo. La acción del campo gravitacional está dada por la expresión:

$$S = \int \mathrm{d}x^4 \sqrt{-g}\, R\,, \tag{1.3.57}$$

que se puede entonces reexpresar haciendo uso de los resultados de las secciones anteriores como:

$$S\,[\gamma_{ij}, N, N^i] = \int \mathrm{d}t \int \mathrm{d}^3x\, \sqrt{\gamma}\, N\, (^3R + K_{ab}K^{ab} - K^2 + (\Delta^\lambda)_{;\lambda})\,. \tag{1.3.58}$$

Es necesario hacer énfasis en el hecho de que no solamente la expresión para el lagrangiano se ha modificado con la nueva formulación, sino que también es necesario hacer una reinterpretación de la integral de acción. En la ecuación (1.3.57) la integral es sobre la variedad completa es decir, sobre la totalidad del espacio-tiempo. Esto implica que cuando se realiza la variación, los términos que están evaluados en la frontera se cancelan por el hecho de que se pide que la variación de la métrica ($\delta g_{\mu\nu}$) y de sus derivadas sean cero sobre la frontera de la variedad (o sea, que el valor de $g_{\mu\nu}$y sus derivadas están determinados sobre la frontera). En general no se tiene *a priori* una topologia para la variedad M, por lo que no está determinado de antemano si ésta tiene frontera o nó, hecho que en general complica el tratamiento de los términos de frontera.

En la expresión (1.3.58) se tiene una diferente interpretación, ya que en ésta se encuentran dos integraciones de diferente naturaleza: la primera integral es sobre la hipersuperficie m, de manera que la función Lagrangiana está dada por una integral sobre la hipersuperficie de la forma:

$$\mathrm{L} = \int \mathrm{d}^3x\, \sqrt{\gamma}\, N\, (^3R + K_{ab}K^{ab} - K^2 + (\Delta^\lambda)_{;\lambda})\,, \tag{1.3.59}$$

por lo que la acción está dada por la integral de la función Lagrángiana entre un tiempo inicial t_0 y un tiempo final t_1:

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{L}\, dt\,. \tag{1.3.60}$$

En otras palabras, se está especificando a la métrica sobre la hipersuperficie inicial (t_0) y sobre la final (t_1), por lo que la *variación* será sobre todas las posibles hipersuperficies (sus métricas) que *conecten* a las dos hipersuperficies de los extremos. La divergencia que aparece en la integral que define a la Lagrangiana se transforma en una integral sobra la frontera de la variedad m. Estos términos no aportan ninguna informacion para la dinámica del sistema, y por lo tanto pueden despreciarse.

Es conveniente precisar que ésta expresión para la acción de la gravitación está limitando la topología del espacio-tiempo, ya que ella será entonces de la forma (m $\times$ R), misma que se mantiene durante toda la evolución de las hipersuperficies. Es decir, no se permite cambios de topología de las hipersuperficies (por ejemplo, un universo será siempre cerrado o siempre abierto).

1.3.7 Formulación Hamiltoniana.

Hasta ahora hemos reescrito al funcional de acción de manera que podemos encontrar las ecuaciónes de campo en el vacío tomando la variación de la acción e igualandola a cero ($\delta S = 0$). La densidad lagrangiana $\mathcal{L}$ contiene derivadas espaciales de segundo orden de γ_{ab}, por lo que en principio, las ecuaciónes de Euler-Lagrange deberian ser de cuarto orden. El hecho de que la densidad Lagrangiana contenga los términos de segundas derivadas en forma linea hace que estos se transformen en términos sobre la frontera que en general se anulan (ver [7] y [9]), de tal forma que las ecuaciones de campo resultantes son de segundo orden (como se esperaría que fuesen las ecuaciones dinámicas).

Si se quiere reducir el orden de las ecuaciones de campo con el objeto de tener exclusivamente ecuaciones de primer orden, existen varios caminos posibles. El primero consiste en tomar la acción a la Palatini [7], que consiste en considerar tanto a las 10 componentes de $g_{\mu\nu}$como a las 40 componentes de la conección afín $\Gamma^{\mu}{}_{\nu\rho}$ como variables independientes y hacer las variaciones respecto de todas ellas. Con este procedimiento se obtienen las mismas ecuaciones de Einstein así como la relación entre la métrica y las conecciones.

El otro camino consiste en definir unas nuevas variables, los momenta, a partir de la Lagrangiana, y tratar de reescribir a la Lagrangiana en términos de las variables originales y los momenta, tomandolas como variables independientes (el número de variables independientes se duplica), donde uno de los pasos intermedios involucra la construcción de la función Hamiltoniana. Este último paso en general no se puede hacer cuando existen constricciones que ligan a las variables, por lo que se ha desarrollado toda una teoría para tratar tales sistemas, conocidos como sistemas singulares o restringidos (ver [10],[11] y [12]).

Con el formalismo que hemos desarrollado hasta ahora, la contrucción del Hamiltoniano se podrá hacer de forma directa, ya que como se ha mencionado anteriormente, la densidad Lagrangiana no depende de las derivadas temporales de las N^{μ}, haciendo que estás variables no formen parte de la dinámica del campo.

Definimos entonces a los momenta canónicamente conjugados a las seis γ_{ab} por la siguiente expresión:

$$\pi^{ab} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\gamma}_{ab}}, \qquad (1.3.61)$$

Los momenta asociados a las variables N^μ serán claramente iguales a cero:

$$P^\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{N}_\mu} = 0 . \tag{1.3.62}$$

Con el objeto de calcular los momenta de la definición (1.3.61), introducimos un objeto con 4 indices de la forma

$$G^{abcd} \equiv \sqrt{\gamma} \left[\frac{1}{2} (\gamma^{ac} \gamma^{bd} + \gamma^{ad} \gamma^{bc}) - \gamma^{ab} \gamma^{cd} \right] . \tag{1.3.63}$$

A este objeto se le denomina **Supermétrica**. Podemos entonces reescribir a la Lagrangiana de la forma

$$\mathcal{L} = N \, (G^{abcd} K_{ab} K_{cd} + \sqrt{\gamma}\, {}^3 R) . \tag{1.3.64}$$

Construimos entonces a los momenta a partir de su definición y de la expresión anterior:

$$\begin{aligned} \pi^{ab} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\gamma}_{ab}} \\ &= N \, (2 \, G^{efcd} K_{cd} \frac{\partial K_{ef}}{\partial \dot{\gamma}_{ab}}) , \end{aligned}$$

de la ecuación (1.3.44) se sigue que

$$\frac{\partial K_{ab}}{\partial \dot{\gamma}_{ef}} = -\frac{1}{2N} \, [\frac{1}{2} \, (\delta^e_a \, \delta^f_b + \delta^e_b \, \delta^f_a)] \equiv \left(-\frac{1}{2N} \right) \delta^{ef}_{ab}$$

por lo que se tiene que

$$\pi^{ab} = -G^{abcd} K_{cd} . \tag{1.3.65}$$

Como se puede ver de la definición de la supermétrica y de la última expresión, los momenta π^{ab} son densidades tensoriales de peso uno sobre la hipersuperficie.

Para realizar la transformada de Legendre de la Lagrangiana y definir el Hamiltoniano, necesitamos *despejar* a las velocidades como funciones de los momenta. Las velocidades $\dot{N}^\mu$ son funciones arbitrarias y por lo tanto no se pueden expresar en terminos de las coordenadas y momenta. Las velocidades de la métrica γ_{ab} se podrán expresar de tal forma si es posible invertir la ecuación (1.3.65), es decir, expresar a la K_{ab} en términos de los momenta. Para esto necesitamos encontrar la inversa de la supermétrica, o sea, el objeto G_{abcd} tal que al contraerlo con la supermétrica dé la identidad:

$$G_{abcd} \, G^{cdef} = \delta^{ef}_{ab} . \tag{1.3.66}$$

La forma más general que se puede pedir para la inversa es

$$G_{abcd} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \left[A \, \frac{1}{2} \, (\gamma_{ac} \gamma_{bd} + \gamma_{ad} \gamma_{bc}) + B \, \gamma_{ab} \gamma_{cd} \right] . \tag{1.3.67}$$

Insertando (1.3.67) en (1.3.66) se encuentra que los valores que deben tomar los coeficientes A y B son $A = 1$, $B = -\frac{1}{2}$. La curvatura extrínseca se podrá expresar entonces como

$$K_{ab} = -G_{abcd}\,\pi^{cd} . \tag{1.3.68}$$

De las ecuaciones (1.3.44) y (1.3.68) escribimos a las velocidades $\dot{\gamma}_{ab}$ de la forma

$$\begin{aligned}\dot{\gamma}_{ab} &= N_{a|b} + N_{b|a} - 2\,N\,K_{ab} \\ &= N_{a|b} + N_{b|a} + 2\,N\,G_{abcd}\,\pi^{cd} .\end{aligned} \tag{1.3.69}$$

Estamos entonces en posibilidad de escribir el Hamiltoniano donde la transformación de Legendre se hará solamente sobre las variables $\dot{\gamma}_{ab}$ tomando entonces el Hamiltoniano la siguiente forma:

$$\mathbf{H} = \int d^3x\,(\pi^{ab}\,\dot{\gamma}_{ab} - \mathcal{L})\,, \tag{1.3.70}$$

La densidad Hamiltoniana es entonces

$$\begin{aligned}(\pi^{ab}\,\dot{\gamma}_{ab} - \mathcal{L}) &= -G^{abcd}K_{cd}\,(N_{a|b} + N_{b|a} - 2\,N\,K_{ab}) - N\,(\,G^{abcd}\,K_{ab}\,K_{cd} + \sqrt{\gamma}\,{}^3R) \\ &= N\,\sqrt{\gamma}\,(K_{ab}\,K^{ab} - K^2 - R) - 2\,\pi^{ab}\,N_{a|b} .\end{aligned} \tag{1.3.71}$$

El segundo término se puede integrar por partes (teniendo en cuenta que se trata de densidades tensoriales) quedando el hamiltoniano de la forma

$$\begin{aligned}\mathbf{H} &= \int d^3x\,\left[N\,\sqrt{\gamma}\,(K_{ab}\,K^{ab} - K^2 - R) + N^a\,(2\pi^b_{a|b})\right] \\ &\equiv \int d^3x\,[\,N\,\mathcal{H}_0 + N^a\,\mathcal{H}_a\,] .\end{aligned} \tag{1.3.72}$$

donde

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_0 &= \sqrt{\gamma}\,(K_{ab}\,K^{ab} - K^2 - R)\,, \\ \mathcal{H}_a &= 2\pi^b_{a|b} .\end{aligned} \tag{1.3.73}$$

Podemos entonces escribir la densidad Lagrangiana de primer orden a partir de (1.3.70) y (1.3.72)

$$\mathcal{L}(\gamma_{ab}, \dot{\gamma}_{ab}, \pi^{ab}, N, N^a) = \pi^{ab}\,\dot{\gamma}_{ab} - N\,\mathcal{H}_0 + N^a\,\mathcal{H}_a . \tag{1.3.74}$$

La integral de acción a partir de esta Lagrangiana, será funcional de la métrica espacial γ_{ab} así como de los momenta π^{ab} y las funciones N^μ. De la forma de la Lagrangiana (1.3.74) son de notarse dos puntos: Las funciones N^μ juegan el papel de multiplicadores de Lagrange y la acción está escrita en forma ya parametrizada. Aclararemos estos puntos. Si variamos respecto a las funciones N^μ encontramos que tanto $\mathcal{H}_0$ como $\mathcal{H}_a$ son cero por lo que las N^{μ} al estar multiplicando a funciones que toman el valor cero tienen la función de los multiplicadores que introdujo Lagrange y son, en principio, funciones arbitrarias. Las ecuaciones de movimiento para las demás variables dinámicas estarán dadas a partir de las variaciones de la acción respecto de ellas. Las variables γ_{ab} y π^{ab} no son independientes entre ellas, ya que están ligadas por las cuatro relaciones $\mathcal{H}_{\mu} = 0$. A estas relaciones se les conoce con el nombre de **Constricciones Hamiltonianas**. A partir de las cuatro constricciones y de la densidad lagrangiana de primer orden podemos encontrar los equivalentes a las ecuaciones de Einstein. Las constricciones Hamiltonianas corresponden precisamente a las cuatro ecuaciones de Einstein iniciales en decir $G_{0\mu} = 0$. El resto de las ecuaciones de Einstein (6) son equivalentes a las ecuaciones de Hamilton para la densidad Lagıangiana (1.3.74). Seis ecuaciones están dadas por la ec.(1.3.69) y corresponden exclusivamente a la definición de los momenta a partir de la Lagrangiana, es decir, en sentido estricto no contienen información dinámica. Las seis ecuaciones restantes se obtienen a partir de la acción escrita a partir de la densidad (1.3.79) al variarla respecto a las componentes del tensor métrico espacial. Despues de usar las propias constricciones en el calculo, estas ecuaciones toman la forma:

$$\begin{aligned}\dot{\pi}^{ab} = & -N\,\gamma^{1/2}\,(R^{ab} - \frac{1}{2}\,\gamma^{ab}\,R) + \frac{1}{2}\,N\,\gamma^{-1/2}\,\gamma^{ab}(\pi^{cd}\pi_{cd} - \frac{1}{2}\,\pi^2) \\ & - 2N\gamma^{-1/2}(\pi^{ac}\pi^{b}_{c} - \frac{1}{2}\,\pi\,\pi^{ab})\gamma^{1/2}(N^{|ab} - \gamma^{ab}\,N^{c}{}_{|c}) \\ & + (\pi^{ab}\,N^{c})_{,c} - N^{a}{}_{|c}\pi^{cd} - N^{b}{}_{|c}\pi^{ca}\,. \end{aligned} \qquad (1.3.75)$$

La forma de la acción (1.3.74) está expresada en forma parametrizada ya que la Lagrangiana de primer orden no está en forma *canonica*, forma que tendría si los terminos del *Hamiltoniano* contuvieran exclusivamente variables contenidas en los términos $(\pi^{ab}, \dot{\gamma}_{ab})$. Como en este caso los términos Hamiltonianos contienen a las N^{μ}, se dice que la acción no está en forma canónica.

Para ilustrar esta distincion entre forma canónica y parametrizada, tomemos a una particula no relativista con coordenadas q^i y velocidades respecto al tiempo $q^{i\prime}$. La Acción de primer orden se escribe

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L\,dt = \int_{t_0}^{t_1} (q^{i\prime}\,p_i - H(p_i, q^i))\,dt\,. \qquad (1.3.76)$$

que está en forma canónica. Si ahora tomamos al tiempo como otra coordenada q_0, y hacemos que todas las coordenadas sean funciones de un parámetro τ, podemos identificar al Hamiltoniano H como un momento canónicamente conjugado a la coordenada q_0 de la forma:

$$p_0 = -H(q^i, p_i)\,, \qquad (1.3.77)$$

De esta igualdad se desprende que el momento p_0 no es independiente de las demás variables; la ecuación (1.3.77) es una *constricción* entre las variables. La acción (1.3.76) se puede reescribir despues de haber elevado a la categoria de coordenada al tiempo de la siguiente forma:

$$S = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \dot{q}^{\mu}\, p_{\mu}\, d\tau\,, \tag{1.3.78}$$

Sin embargo, existe la constricción (1.3.77) entre las variables, que se puede escribir como $\mathcal{H} \equiv p_0 - H(q^i, p_i) = 0$. Este término debe agragarsele al Lagrangiano junto con un multiplicador arbitrario N, para tener el Lagrangiano completo de manera que la acción ser de la forma:

$$L = \dot{q}^{\mu}\, p_{\mu} - N\, \mathcal{H}\,. \tag{1.3.79}$$

Este Lagrangiano está en forma parametrizada. Para pasar a la forma conónica, sería necesario hacer los pasos en sentido inverso. El primer paso consiste en despejar de $\mathcal{H}$ o **resolver** la constricción haciendo $p_0 = -H$. Esto hace que la acción sea

$$S = \int_{\tau_0}^{\tau_1} (\dot{q}^i\, p_i - H\, \dot{q}^0)\, d\tau\,, \tag{1.3.80}$$

que se puede reescribir de forma que desaparezca la dependencia en el parámetro τ,

$$S = \int_{t_0}^{t_1} (\frac{dq^i}{dq^0}\, p_i - H)\, dq^0\,. \tag{1.3.81}$$

Esta forma de la acción es independiente del parámetro τ (ya que no aparece en la expresión) y por lo tanto no se modificará ante un cambio de parámetro. En la práctica, lo que se hace para pasar de (1.3.80) a (1.3.81) es especificar una relación entre el parámetro y la coordenada q^0. Se puede hacer esto ya que se tiene la libertad de elegir arbitrariamente al parámetro (libertad de norma). Si se impone una **condición coordenada** de la forma $q^0 = \tau$ por ejemplo, la acción toma la forma (3.81) con el cambio de notación $q^0 \mapsto \tau$. Con este ejemplo se puede entonces afirmar que en términos generales, la manera de reducir una acción parametrizada a la forma canónica es insertar la solución de las constricciones e imponer condiciones coordenadas.

Veamos con un poco más de detalle que ocurre dentro del formalismo si la acción de la teoría está en forma parametrizada. En este caso, el formalismo Hamiltoniano no es manifiestamente invariante relativista ya que un observador se distingue por la elección de una variable de tiempo.

Consideremos dos observadores con diferentes tiempos t_1 y t_2 en la ecuación de movimiento de Hamilton

$$\frac{dA}{dt_1} = \frac{\partial A}{\partial t_1} + \{A, H\}\,. \tag{1.3.82}$$

De la relación funcional $t_2 = t_2(t_1)$ se tiene,

$$\frac{dA}{dt_1} = \frac{\partial A}{\partial t_1} + \frac{dt_2}{dt_1}\{A, H\}\,. \tag{1.3.83}$$

Solo si el paréntesis de Poisson se anula será esta ecuación compatible con (1.3.82). Esto ocurrirá únicamente si $H = 0$, lo que implica (para un número finito de grados de libertad) que

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\,\dot{q}^i - L = 0\,. \tag{1.3.84}$$

Un Hamiltoniano cero no dará dinámica a menos que se anule débilmente, es decir, que haya constricciones. Este es precisamente el caso, ya que si derivamos (1.3.84) respecto a $\dot{q}^k$ tenemos,

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i\,\partial \dot{q}^k}\,\dot{q}^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} = W_{ik}\,\dot{q}^i = 0\,. \tag{1.3.85}$$

La matriz W_{ik} es aquella cuyo rango dá información acerca del número de constricciones primarias (o sea que aparecen por la forma del Lagrangiano). Por lo tanto, de (1.3.85) se ve que la velocidad $\dot{q}^i$ es un vector propio con valor propio nulo, de manera que existe una constricción primaria U (cosa que además ya sabíamos).

El Hamiltoniano será entonces de la forma $H = \lambda U$ con λ un multiplicador arbitrario. La ecuación (1.3.84) es una condición necesaria y suficiente para que el Lagrangiano sea homogeneo de grado uno en las velocidades,

$$L(q^i, k\,\dot{q}^i) = k\,L(q^i, \dot{q}^i)\,, \tag{1.3.86}$$

que se debe al teorema de Euler. Esto implica además que la acción sea invariante ante $t \longmapsto t'$. En conclusión, solamente en las teorías invariantes ante reparametrizaciones la invariancia relativista del Hamiltoniano se vuelve manifiesta.

Estos argumentos se pueden generalizar a teorías de campo donde la acción tiene la forma general

$$S[Q_a] = \int d^4x\, \mathcal{L}(Q_A, \partial_a Q_A)\,, \tag{1.3.87}$$

Para que esta acción sea invariante ante reparametrizaciones, la siguiente condición es necesaria y suficiente:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_a Q_A)}\,\partial_b Q_A = \delta^a_b\,\mathcal{L}\,, \tag{1.3.88}$$

siempre y cuando la densidad Lagrangiana no dependa explícitamente de las coordenadas x^μ.

La condición (1.3.88), que es consecuencia inmediata de la generalización de (1.3.86):

$$\mathcal{L}(Q_A, \lambda^a_b\,\partial_b Q_A) = \det(\lambda_{ab})\,\mathcal{L}(Q_A, \partial_a Q_A)\,, \tag{1.3.89}$$

dá lugar a unas identidades generalizadas de Bianchi. Contrayendo las derivadas de Euler-Lagrange

$$L^A = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_A} - \partial_a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_a Q_A)}\,,$$

con $\partial_b Q_A$, se tiene

$$L^A\,\partial_b Q_A = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_A}\,\partial_b Q_A + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_a Q_A)}\,\partial_a\partial_b Q_a - \partial_a\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_a Q_A)}\,\partial_b Q_A\right)\,. \tag{1.3.90}$$

Insertando (1.3.88) en (1.3.90) y derivando se obtiene

$$L^A \partial_b Q_A \equiv 0\,. \tag{1.3.91}$$

Estas son cuatro identidades generalizadas de Bianchi para una acción invariante ante reparametrizaciones de la forma (1.3.87). Estas identidades señalan la existencia de cuatro constricciones primarias.

La acción de la Gravitación está expresada en la forma de la ecuación (1.3.79). Para poder hacer más menejables las ecuaciones, como primer paso habría que transformar a la forma canónica, es decir, al equivalente de la ecuación (1.3.76), o en otras palábras, resolver las constricciones e imponer condiciones coordenadas. Este procedimiento solo ha sido posible en casos muy particulares, pero en general solo se ha hecho *formalmente* [11].

1.4 Aplicaciones

En esta sección presentamos brevemente algunos de los campos que se han desarrollado utilizando al formalismo ADM.

1.4.1 Gravedad Cuántica.

Hasta hace poco tiempo, una de las principales motivaciones para la contrucción de una formulación Hamiltoniana, es decir, la identificación de un conjunto de variables canónicamente conjugadas a partir de una función Lagrangiana y la obtención del Hamiltoniano como la transformada de Legendre en las velocidades de la función Lagrangiana, consistía en la posibilidad de cuantizar la teoría. Esto es, asociar a cada variable canónica un operador sobre un espacio vectorial e imponer reglas de conmutación entre pares de variables conjugadas. El operador Hamiltoniano toma ahora el papel de generador de translaciones en el tiempo, es decir, es responsable de la dinámica del sistema.

Sin embargo, para la Relatividad General, el procedimiento de cuantización no es directo a partir del Hamiltoniano construido, ya que existen 4 contricciones (3.73) entre las variables canónicas. Para tratar de salvar esta dificultad, se han seguido dos caminos diferentes, que son a grandes rasgos: 1) Tratar de aislar los verdaderos grados de libertad de la gravitación (que, a partir de la linearización de las ecuaciones, se sabe que es de dos grados por punto), objetivo que tenian en mente ADM al comenzar su programa. Una vez aislados los grados de libertad, se procedería a su cuantización. Este procedimiento como se mencionó anteriormente solo se ha logrado realizar de manera formal. 2) Considerar a todas las variables, pero imponer condiciones sobre el vector de estado dadas por las cuatro constricciones, esto es, pedir que las constricciones (ahora como operadores) al actuar sobre el vector de estado, lo anulen. Este es el punto de vista adoptado por Dirac y De Witt.

En años recientes se ha tratado de cuantizar al campo gravitacional utilizando la idea de suma sobre trayectorias es decir, se consideran todas las posibles evoluciones de las 3-geometrías entre dos de ellas fijas dándo a cada una de aquellas un *peso* proporcional a la acción clásica evaluada a lo largo de esta trayectoria [3].

Así mismo, se han construido formulaciones canónicas de la relatividad, alternativas a la ADM, como por ejemplo el formalismo de Ashtekar [2].

1.4.2 Geometrodinámica.

Geometrodinámica es el nombre que se la ha dado a la Relatividad General cuando es vista como una teoría dinámica [13]. Como se mencionó en la introducción, la formulación covariante de la relatividad general no es la más apropiada para apreciar el carácter dinámico de esta. La introducción de nuevas variables y el considerar al espacio-tiempo formado por la evolución de métricas $\gamma_{ij}(t)$ nos sugiere entonces quién es la variable dinámica que evoluciona. Sin embargo, al analizar la expresión que se obtuvo para la acción (3.58), se observa que esta es invariante ante difeomorfismos en la hipersuperficie $\mathrm{m}(t)$ por lo que no depende del sistema de coordenadas usado en esta. Este hecho sugiere que la propiedad verdaderamente relevante para cada hipersuperficie $\mathrm{m}(t)$ no es la métrica definida en ella, sino la propia **geometría** intrínseca de la variedad, es decir el objeto $\mathbf{g}$ independiente de coordenadas.

Esta conclusión es relativamente clara si se considera el ejemplo presentado en la sección 1.3 con las esferas generando al espacio euclideo. Si se quiere ver a R^3 formado por el conjunto de esferas, no importa qué sistema de coordenadas intrínsecas se dé a cada esfera, siempre que siga siendo una esfera.

El espacio-tiempo es entonces la evolución (o el conjunto si se prefiere ver así) de 3-geometrias. El objeto que evoluciona es la geometría de una 3-variedad m y ésta es la variable dinámica de la Relatividad General, por lo que queda claro el nombre de geometrodinámica.

Si lo que evolucionan son 3-geometrías es natural preguntarse: ¿ en que espacio evolucionan las geometrias ? La respuesta es casi tonta: "En el espacio de las 3-geometrías". Este es el conjunto en el que cada *punto* es una 3-geometría y en él están todas las 3-geometrías posibles para la variedad m. A este espacio se le conoce como **Superespacio** [13] y se denota por $\mathcal{M}$.

Existe una analogía entre la evolución de uná partícula y de una geometría. La partícula *vive* en el espacio-tiempo y su evolución es una trayectoria en él. De igual forma, una 3-geometría *vive* en el Superespacio y su evolución es una trayectoria en él. Esta analogia no es, sin embargo, totalmente literal, ya que las trayectorias en el superespacio, que definen al espacio-tiempo, no son curvas unidimensionales (parametrizadas por los reales), sino que son subvariedades del superespacio. Veamos con un poco de detalle la razón por la que no son curvas unidimensionales.

Supongamos que se tiene un espacio-tiempo **conocido**. Las foliaciones que se pueden construir para tal espacio-tiempo son infinitas, ya que habrá una foliación para cada función $t(x^\mu)$ que se defina en el espacio-tiempo tal que las hipersuperficies dadas por $t =$ cte no se intersecten. Es claro que el número de funciones que se pueden definir es no numerable. Cuando se elige tal función, es decir, se escoge una foliación particular, el espacio-tiempo estará entonces formado por una *curva* de hipersuperficies parametrizadas por el valor de t. El espacio-tiempo es entonces una curva **una vez elegida la Foliación**. Resulta tambien claro del argumento expuesto que el conjunto de todas las foliaciones para tal espacio-tiempo representan una subvariedad del superespacio. A tal subvariedad se le conoce con el nombre de **Hiperespacio** [14].

2.1 Introducción.

En el capitulo anterior se presentó el formalismo Hamiltoniano de la Relatividad General, y se llegó a escribir la acción para aquel en el cual aparecian las cuatro constricciones Hamiltonianas $\mathcal{H}_\mu = 0$. La constricción $\mathcal{H}_0 = 0$, conocida dentro del lenguage de la geometrodinámica como el **Superhamiltoniano** es especialmente importante ya que es responsable no solo de reparametrizaciones en el tiempo, sino tambien de la dinámica misma de las hipersuperficies. Esta constricción puede ser escrita en términos de la supermétrica definida en el capitulo 1 de la siguiente manera:

$$\mathcal{H}_0 = G_{ijkl}\,\Pi^{ij}\Pi^{kl} + \sqrt{\gamma}\;^{(3)}R = 0\,. \tag{2.1.1}$$

La forma de esta ecuación nos sugiere fuertemente la constricción Hamiltoniana de una particula libre relativista,

$$\mathcal{H} = g_{\mu\nu}\,P^\mu P^\nu + m^2 = 0\,, \tag{2.1.2}$$

con la diferencia de que en (2.1.1) el término de *masa* ($\sqrt{\gamma}\;^{(3)}R$) no es en general una constante. Para la particula libre en un espacio tiempo con métrica $g_{\mu\nu}$, las ecuaciones de Hamilton asociadas al hamiltoniano $\mathcal{H}$ conducen precisamente a la ecuación de geodésicas de la variedad con métrica $g_{\mu\nu}$. Podemos entonces preguntarnos si ocurre algo similar con el Superhamiltoniano y la *Ecuación de Geodésicas en el Superespacio.* Primero trataremos de aclarar que sentido tiene hablar de una ecuación de geodésicas asociada a la Supermétrica G_{ijkl}.

Para comenzar, las *coordenadas* sobre las que actua no son puntos como en el caso del espacio-tiempo, sino que se trata de funciones definidas sobre la variedad m ($\gamma_{ij}(x^\lambda)$). Por el momento no tomaremos en cuenta este hecho y consideraremos que las γ_{ij} son simplemente *puntos* sobre una variedad de seis dimensiones que denotaremos por N, olvidandonos de su caracter funcional. Estudiaremos entonces las propiedades geométricas de tal variedad impuestas por la métrica G_{ijkl} definida en ella, y posteriormente retomaremos la pregunta antes formulada tomando en cuenta la estructura más complicada que tiene la variedad.

2.2 Supermétrica.

Consideremos a la variedad Riemanniana que denotaremos por N, como el espacio con coordenadas γ_{ij} y con métrica contravariante dada por

$$G_{ijkl} = \frac{1}{2}\gamma^{-1/2}\left(\gamma_{ik}\gamma_{jl} + \gamma_{il}\gamma_{jk} - \gamma_{ij}\gamma_{kl}\right). \tag{2.2.1}$$

Llamaremos contravariante cuando los indices están abajo y covariante cuando están arriba. Tomaremos en lo que resta del capítulo 2 a las entradas de la matriz γ_{ij} como *puntos* sin fijarnos que cada una de ellas son funciones sobre la variedad m. Estudiaremos a la variedad N y encontraremos algunas propiedades geométricas que poseé.

Como primer paso observemos las simetrias de la supermétrica a partir de su definición (2.2.1):

$$G_{ijkl} = G_{klij}\,, \qquad G_{ijkl} = G_{jikl} = G_{ijlk} = G_{jilk}\,. \tag{2.2.2}$$

El número de componentes linealmente independientes es entonces

$$\frac{1}{2}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]\left[\frac{n(n+1)}{2}+1\right].$$

En el caso de las hipersuperficies encajadas en el espacio tiempo $n = 3$, por lo que el número de componentes es 21. Es el mismo número que tendría un tensor $g_{\mu\nu}$ simétrico en seis dimensiones.

Con el objeto de encontrar el determinante, observemos que la supermétrica tiene la propiedad que sus variaciones son

$$G_{ijkl}\,\delta G^{ijkl} = -\gamma^{ij}\,\delta\gamma_{ij}\,. \tag{2.2.3}$$

Podemos encontrar a partir de la propiedad general para matrices $M^{\alpha\beta}$ con determinante M:

$$M^{\alpha\beta}\,\delta M_{\alpha\beta} = \frac{\delta M}{M}\,, \tag{2.2.4}$$

de donde concluimos que

$$\frac{\delta G}{G} = -\frac{\delta\gamma}{\gamma}\,, \tag{2.2.5}$$

donde $G \equiv \det G^{ijkl}$. Integrando (2.2.5) se tiene que

$$G = -a\,\gamma^{-1}\,, \tag{2.2.6}$$

con a una constante.

Enunciamos ahora algunas propiedades de G_{ijkl}:

$$G_{ijkl}\,G^{klmn} = \delta_{ij}^{mn}\,, \tag{2.2.7}$$

$$G_{ijkl}\,G^{ijkl} = 6\,, \tag{2.2.8}$$

$$G_{ijkl}\,\gamma^{kl} = -\frac{1}{2}\,\gamma^{-1/2}\,\gamma_{ij}\,, \tag{2.2.9}$$

$$G^{ijkl}\,\gamma_{kl} = -2\,\gamma^{1/2}\,\gamma^{ij}\,. \tag{2.2.10}$$

Examinaremos ahora la signatura de la supermétrica, la cual estará dada por los signos de los eigenvalores de G^{ijkl}. Estos se obtienen de resolver la ecuación de valores propios,

$$G^{ij}{}_{kl}\,M_{ij} = \lambda M_{kl}\,, \tag{2.2.11}$$

Los eigenvalores se determinan a partir de la condición

$$\det\left(G^{ij}{}_{kl} - \lambda\delta^{ij}_{kl}\right) = 0, \tag{2.2.12}$$

donde la matriz $G^{ij}{}_{kl}$ se define como

$$\begin{aligned} G^{ij}{}_{kl} &\equiv G^{ijmn}\gamma_{mk}\gamma_{nl}, \\ &= \delta^{ij}_{kl} - \gamma^{ij}\gamma_{kl}, \end{aligned} \tag{2.2.13}$$

El número de valores propios positivos y negativos es mismo que para el caso en que la métrica γ_{ij} es la más sencilla posible dentro de las positivas definidas, a saberse, la métrica cartesiana δ_{ij}. Tomando este caso particular, la ecuación de eigenvalores toma la forma,

$$\left[\frac{1}{2}\left(\delta^i_k\delta^j_l + \delta^j_k\delta^i_l\right) - \delta^{cd}\delta_{ab}\right] A_{ij} = \frac{1}{2}A_{ij} + \frac{1}{2}A_{ji} - \mathrm{tr}A\,\delta_{ij}. \tag{2.2.14}$$

Si la matriz A_{ij} es simétrica y de traza nula, se satisface la ecuación con un valor propio uno. El espacio de matrices simétricas de traza nula tiene cinco dimensiones, por lo que tenemos cinco *vectores* linealmente independientes con valores propios positivos para el caso de métricas más generales. Tomando ahora a $A_{ij} = \delta_{ij}$, se satisface la ecuación (2.2.14) con $\lambda = -2$. Por lo tanto el sexto vector propio tiene un valor propio negativo y la variedad **N** será entonces de signatura $(-++++\,++)$. Esto además nos dice que existe un único vector *temporal* que nos sugiere la posibilidad de foliar la variedad.

Es una propiedad interesante que la supermétrica tenga una signatura Lorentziana estando construida a partir de métricas positivas definidas, y se justifica en algún sentido el hacer la analogía entre las ecuaciones (2.1.1) y (2.1.2).

En vez de tomar a las seis entradas de γ_{ij} como coordenadas, definiremos nuevas coordenadas que nos ayudarán a encontrar objetos geométricos sobre **N**. La utilidad de introducir nuevas coordenadas consiste en que podremos definir los objetos geométricos usuales (conecciones, tensores de Riemann, etc) en terminos de estas variables y despues regresarnos a expresarlos con las variables originales γ_{ij}.

Definamos a la coordenada ς de la forma

$$\varsigma \equiv \left(\frac{32}{3}\right)^{1/2}\gamma^{1/4}. \tag{2.2.15}$$

Las hipersuperficies definidas por ς = cte, tienen trayectorias ortogonales a ellas, cuyos vectores tangentes son proporcionales a

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varsigma}{\partial\gamma_{ij}} &= \left(\frac{32}{3}\right)^{1/2}\frac{\partial}{\partial\gamma_{ij}}\gamma^{1/4}, \\ &= \left(\frac{32}{3}\right)^{1/2}\frac{1}{4}\gamma^{-3/4}\frac{\partial\gamma}{\partial\gamma_{ij}}, \\ &= \frac{1}{4}\varsigma\gamma^{ij}, \end{aligned} \tag{2.2.16}$$

Reescribiendola en forma contravariante:

$$
\begin{aligned}
G_{ijkl}\,\frac{\partial\varsigma}{\partial\gamma_{kl}} &= \frac{1}{4}\,\varsigma\,G_{ijkl}\gamma^{kl}\,,\\
&= \frac{1}{4}\,\varsigma\left(-\frac{1}{2}\,\gamma^{-1/2}\,\gamma_{ij}\right)\,,\\
&= -\frac{4}{3}\,\varsigma^{-1}\,\gamma_{ij}\,.
\end{aligned}
\qquad (2.2.17)
$$

Identifiquemos ahora a las trayectorias con cinco coordenadas adicionales, es decir, definimos cinco coordenadas *ortogonales* a ς, que llamaremos ς^A, $A = 1, \ldots, 5$,de tal forma que usando (2.2.16)

$$
\begin{aligned}
\gamma^{ij}\,\frac{\partial\gamma_{ij}}{\partial\varsigma^A} &= 4\,\varsigma^{-1}\,\frac{\partial\varsigma}{\partial\gamma_{ij}}\,\frac{\partial\gamma_{ij}}{\partial\varsigma^A}\,,\\
&= 4\,\varsigma^{-1}\,\frac{\partial\varsigma}{\partial\varsigma^A}\,,\\
&= 0\,.
\end{aligned}
\qquad (2.2.18)
$$

Pedimos además que el vector $\dfrac{\partial\gamma_{ij}}{\partial\varsigma}$ satisfaga la relación de ortogonalidad

$$
G^{ijkl}\,\frac{\partial\gamma_{ij}}{\partial\varsigma}\,\frac{\partial\gamma_{kl}}{\partial\varsigma^A} = 0\,. \qquad (2.2.19)
$$

De las anteriores ecuaciones se siguen las siguientes:

$$
\begin{aligned}
3 = \gamma^{ij}\gamma_{ij} &= \left[\frac{4}{\varsigma}\,\frac{\partial\varsigma}{\partial\gamma_{ij}}\right]\left[-\frac{3}{4}\,\varsigma\,G_{ijkl}\,\frac{\partial\varsigma}{\partial\gamma_{kl}}\right]\,,\\
&= -3\,G_{ijkl}\frac{\partial\varsigma}{\partial\gamma_{ij}}\,\frac{\partial\varsigma}{\partial\gamma_{kl}}\,,
\end{aligned}
$$

por lo que

$$
G_{ijkl}\frac{\partial\varsigma}{\partial\gamma_{ij}}\,\frac{\partial\varsigma}{\partial\gamma_{kl}} = -1\,. \qquad (2.2.20)
$$

El inverso será

$$
G^{ijkl}\,\frac{\partial\gamma_{ij}}{\partial\varsigma}\,\frac{\partial\gamma_{kl}}{\partial\varsigma} = \left(G_{ijkl}\frac{\partial\varsigma}{\partial\gamma_{ij}}\,\frac{\partial\varsigma}{\partial\gamma_{kl}}\right)^{-1} = -1\,, \qquad (2.2.21)
$$

donde

$$\frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial \varsigma} = -G_{ijkl}\,\frac{\partial \varsigma}{\partial \gamma_{kl}}$$

$$= \frac{4}{3}\,\varsigma^{-1}\,\gamma_{ij}\,. \qquad (2.2.22)$$

Tenemos además que con (2.2.22)

$$\gamma_{ij}\,\frac{\partial \varsigma^A}{\partial \gamma_{ij}} = \frac{3}{4}\,\varsigma\,\frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial \varsigma}\,\frac{\partial \varsigma^A}{\partial \gamma_{ij}}$$

$$= \frac{3}{4}\,\varsigma\,\frac{\partial \varsigma^A}{\partial \varsigma}$$

$$= 0\,. \qquad (2.2.23)$$

Usando (2.2.18) y la definición (2.2.1) podemos calcular:

$$G^{ijkl}\,\frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial \varsigma^A}\,\frac{\partial \gamma_{kl}}{\partial \varsigma^B} = \frac{1}{2}\,\gamma^{1/2}\,(\gamma^{ik}\,\gamma^{jl} + \gamma^{jk}\,\gamma^{il} - 2\,\gamma^{ij}\,\gamma^{kl})\,\frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial \varsigma^A}\,\frac{\partial \gamma_{kl}}{\partial \varsigma^B}$$

$$= \frac{1}{2}\,\gamma^{1/2}\,(\gamma^{ik}\,\gamma^{jl} + \gamma^{jk}\,\gamma^{il})\,\gamma_{ij,A}\,\gamma_{kl,B}$$

$$= \gamma^{1/2}\,\gamma^{ik}\,\gamma^{jl}\,\gamma_{ij,A}\,\gamma_{kl,B}$$

$$= \gamma^{1/2}\,\mathrm{tr}(\gamma^{mi}\,\gamma_{ij,A}\,\gamma^{jl}\,\gamma_{lk,B})$$

$$\equiv \gamma^{1/2}\,\mathrm{tr}(\gamma^{-1}\,\gamma_{,A}\,\gamma^{-1}\,\gamma_{,B})\,. \qquad (2.2.24)$$

donde

$$\gamma \equiv \gamma_{ij}\,.$$

Tomando a $\frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial \varsigma} \equiv \gamma_{,0}$ y $\frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial \varsigma^A} \equiv \gamma_{,A}$ como los seis vectores base de la variedad **N**, de las ecuaciones (2.2.15), (2.2.17) y (2.2.20) observamos que podemos asignar una métrica covariante a la variedad **N** de la siguiente manera:

$$G_{\Omega\Delta} \equiv \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{3}{32}\right)\varsigma^2\,\overline{G}_{AB} \end{pmatrix}, \qquad (2.2.25)$$

donde

$$\overline{G}_{AB} \equiv \mathrm{tr}(\gamma^{-1}\,\gamma_{,A}\,\gamma^{-1}\,\gamma_{,B})\,, \qquad (2.2.26)$$

Las letras mayúsculas griegas corren de cero a cinco, mientras que las mayúsculas latinas de uno a cinco.

La forma de la métrica (2.2.25) nos sugiere que la variedad N, en el lenguaje del capítulo 1, está formada por una foliación de variedades $\overline{\mathrm{N}}$ de cinco dimensiónes y cada una de ellas con la misma geometría dada por la métrica (2.2.26) y diferenciandose entre ellas por un factor de escala $\left(\frac{3}{32}\right) \varsigma^2$. Los objetos con una *barra* son objetos en la variedad $\overline{\mathrm{N}}$, mientras que objetos sin barra viven en la variedad completa N. Tomemos como analogía a la foliación de esferas descrita en el capítulo anterior en el que la métrica de R^3 en coordenadas esféricas es análoga a (2.2.25), donde cada hipersuperficie (esfera) tiene la misma geometría salvo un factor de escala que es el radio.

2.3 Variedad $\overline{\mathrm{N}}$.

Comenzaremos estudiando la geometría de la variedad $\overline{\mathrm{N}}$ para posteriormente estudiar e la variedad N. Podemos darnos cuenta a partir de el análisis de hiperbolicidad que la variedad $(\overline{\mathrm{N}},\overline{G}_{AB})$ es positiva definida, ya que el complemento ortogonal a ella, es decir, el vector $\frac{\partial}{\partial \varsigma}$ es un vector tipo tiempo.

Construiremos a continuación las conexiones en la variedad $\overline{\mathrm{N}}$, así como el tensor de curvatura de Riemann y sus constracciones para despues escribir la ecuación de geodésicas en la variedad $\overline{\mathrm{N}}$. Todo este análisis será despues de utilidad para la construcción de los respectivos objetos geométricos en la variedad completa N.

Obtengamos una serie de identidades útiles para cálculos posteriores. Por la regla de la cadena tenemos que

$$\frac{\partial \varsigma^B}{\partial \gamma_{ij}} \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial \varsigma^A} = \frac{\partial \varsigma^B}{\partial \varsigma^A} = \delta^B_A ,$$

es decir,

$$\mathrm{tr}\left(\gamma_{,A} \frac{\partial \varsigma^B}{\partial \gamma}\right) = \delta^B_A . \tag{2.3.1}$$

De la ecuación (2.2.19) tenemos que

$$\gamma_{ij} \frac{\partial \varsigma^A}{\partial \gamma_{ij}} = \mathrm{tr}\left(\gamma \frac{\partial \varsigma^A}{\partial \gamma}\right) = 0 . \tag{2.3.2}$$

De la ecuación (2.2.14),

$$\gamma^{ij} \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial \varsigma^A} = \mathrm{tr}(\gamma^{-1} \gamma_{,A}) = 0 . \tag{2.3.3}$$

Derivando (2.3.3) respecto a ς^B y haciendo uso de las propiedades de linealidad e invariancia cíclica de la traza se tiene que

$$\begin{aligned} 0 &= \mathrm{tr}[\gamma^{-1} \gamma_{,A}]_{,B} \\ &= \mathrm{tr}[\gamma^{-1}{}_{,B} \gamma_{,A} + \gamma^{-1} \gamma_{,AB}] \\ &= \mathrm{tr}\left[\gamma^{-1}(\gamma_{,AB} - \gamma_{,B} \gamma^{-1} \gamma_{,A})\right] , \end{aligned} \tag{2.3.4}$$

ya que

$$\gamma^{-1}{}_{,B} = -\gamma^{-1}\,\gamma_{,B}\,\gamma^{-1}\,. \tag{2.3.5}$$

Por la regla de la cadena,

$$\frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial \varsigma}\,\frac{\partial \varsigma}{\partial \gamma_{kl}} + \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial \varsigma^A}\,\frac{\partial \varsigma^A}{\partial \gamma_{kl}} = \delta^{kl}_{ij}\,,$$

por lo que usando (2.2.12) y (2.2.18)

$$\frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial \varsigma^A}\,\frac{\partial \varsigma^A}{\partial \gamma_{kl}} = \delta^{kl}_{ij} - \frac{1}{3}\gamma_{ij}\gamma^{kl}\,. \tag{2.3.6}$$

Buscando la métrica inversa contravariante $\overline{G}^{AB}$ tal que al contraerla con la métrica $\overline{G}_{AB}$ se tenga la identidad, es decir,

$$\overline{G}^{AB}\,\overline{G}_{BC} = \delta^A_B\,, \tag{2.3.7}$$

proponemos a $\overline{G}^{AB}$ de la forma

$$\begin{aligned}\overline{G}^{AB} &= \mathrm{tr}\left(\gamma\,\frac{\partial \varsigma^A}{\partial \gamma}\,\gamma\,\frac{\partial \varsigma^B}{\partial \gamma}\right)\\ &= \gamma_{ij}\,\frac{\partial \varsigma^A}{\partial \gamma_{jk}}\,\gamma_{kl}\,\frac{\partial \varsigma^B}{\partial \gamma_{li}}\,,\end{aligned} \tag{2.3.8}$$

Tomando el producto (2.3.7) tenemos

$$\begin{aligned}\overline{G}^{AB}\,\overline{G}_{BC} &= \left(\gamma_{ij}\,\frac{\partial \varsigma^A}{\partial \gamma_{jk}}\,\gamma_{kl}\,\frac{\partial \varsigma^B}{\partial \gamma_{li}}\right)\left(\gamma^{mn}\,\gamma_{no,B}\,\gamma^{op}\,\gamma_{pm,C}\right)\\ &= \gamma_{ij}\,\gamma_{kl}\,\gamma^{mn}\,\gamma_{op}\,\frac{\partial \varsigma^A}{\partial \gamma_{jk}}\,\frac{\partial \gamma_{pm}}{\partial \varsigma^C}\left(\delta^{li}_{no} - \frac{1}{3}\gamma_{no}\,\gamma^{li}\right)\\ &= \gamma_{jo}\,\gamma_{kn}\,\gamma^{mn}\,\gamma^{op}\,\frac{\partial \varsigma^A}{\partial \gamma_{jk}}\,\frac{\partial \gamma_{pm}}{\partial \varsigma^C} - \frac{1}{3}\gamma^{mp}\,\gamma_{kl}\,\frac{\partial \varsigma^A}{\partial \gamma_{jk}}\,\frac{\partial \gamma_{pm}}{\partial \varsigma^C}\\ &= \frac{\partial \gamma_{jk}}{\partial \varsigma^C}\,\frac{\partial \varsigma^A}{\partial \gamma_{jk}}\\ &= \delta^A_C\,.\end{aligned}$$

Por lo tanto el objeto dado por la ecuación (2.3.8) es en efecto la métrica inversa.

2.3.1 Conecciones Afines en $\overline{\mathrm{N}}$.

Calculamos ahora la conexión afín definida a partir de la siguiente expresión:

$$\overline{\Gamma}_{ABC} \equiv \frac{1}{2}\left(\overline{G}_{AB,C} + \overline{G}_{AC,B} - \overline{G}_{BC,A}\right). \tag{2.3.9}$$

El primer término es de la forma

$$\begin{aligned}\overline{G}_{AB,C} &= \left[\mathrm{tr}(\gamma^{-1}\gamma_{,A}\gamma^{-1}\gamma_{,B})\right]_{,C} \\ &= \mathrm{tr}\left(\gamma^{-1}_{,C}\gamma_{,A}\gamma^{-1}\gamma_{,B} + \gamma^{-1}\gamma_{,AC}\gamma^{-1}\gamma_{,B} + \gamma^{-1}\gamma_{,A}\gamma^{-1}_{,C}\gamma_{,B}\gamma^{-1}\gamma_{,A}\gamma^{-1}\gamma_{,BC}\right).\end{aligned}$$

Permutando índices para obtener los otros términos y haciendo la suma (2.3.9) obtenemos

$$\overline{\Gamma}_{ABC} = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left[\gamma_{,A}\gamma^{-1}\left(-\gamma_{,C}\gamma^{-1}\gamma_{,B} - \gamma_{,B}\gamma^{-1}\gamma_{,C} + 2\gamma_{,CB}\right)\gamma^{-1}\right]. \tag{2.3.10}$$

Subiendo el primer índice con la métrica inversa

$$\begin{aligned}\overline{\Gamma}^{A}{}_{BC} &\equiv \overline{G}^{AD}\,\overline{\Gamma}_{DBC} \\ &= \frac{1}{2}\left[\gamma_{ij}\frac{\partial\varsigma^A}{\partial\gamma_{jk}}\gamma_{kl}\frac{\partial\varsigma^D}{\partial\gamma_{li}}\right]\left[\gamma_{mn,D}\gamma^{no}\left(-\gamma^{op,C}\gamma^{pq}\gamma_{qr,B}\right.\right. \\ &\qquad \left.\left. -\gamma_{op,B}\gamma^{pq}\gamma_{qr,C} + 2\gamma_{or,CB}\right)\gamma^{rm}\right],\end{aligned}$$

expresión que toma la siguiente forma, haciendo uso de de (2.3.6) y (2.2.19)

$$\overline{\Gamma}^{A}{}_{BC} = \frac{1}{2}\frac{\partial\varsigma^A}{\partial\gamma_{or}}\left(2\gamma_{or,CB} - 2\gamma_{op,B}\gamma^{pq}\gamma_{qr,C}\right).$$

Por lo tanto,

$$\overline{\Gamma}^{A}{}_{BC} = \mathrm{tr}\left[\frac{\partial\varsigma^A}{\partial\gamma}\left(\gamma_{,BC} - \gamma_{,B}\gamma^{-1}\gamma_{,C}\right)\right]. \tag{2.3.11}$$

2.3.2 Tensores de Curvatura en $\overline{\mathrm{N}}$.

Encontramos ahora el tensor de curvatura de Riemann, usando la siguiente definición:

$$\overline{R}^{D}{}_{CBA} \equiv \overline{\Gamma}^{D}{}_{BC,A} - \overline{\Gamma}^{D}{}_{AC,B} + \overline{\Gamma}^{D}{}_{AE}\overline{\Gamma}^{E}{}_{BC} - \overline{\Gamma}^{D}{}_{BE}\overline{\Gamma}^{E}{}_{AC}. \tag{2.3.12}$$

El primer término es de la forma

$$\begin{aligned}\overline{\Gamma}^{D}{}_{BC,A} = \mathrm{tr}\Big[&\big(\gamma_{,BCA} - \gamma_{,BA}\gamma^{-1}\gamma_{,C} + \gamma_{,B}\gamma^{-1}\gamma_{,A}\gamma^{-1}\gamma_{,C} \\ &-\gamma_{,B}\gamma^{-1}\gamma_{,CA}\big)\frac{\partial\varsigma^D}{\partial\gamma} + \gamma_{,B}\gamma^{-1}\big)_{,C}\gamma\left(\frac{\partial\varsigma^D}{\partial\gamma}\right)_{,A}\Big],\end{aligned} \tag{2.3.13}$$

de donde

$$-\overline{\Gamma}^D{}_{AC,B} = \mathrm{tr}\left[\left(-\gamma_{,ACB} + \gamma_{,AB}\,\gamma^{-1}\,\gamma_{,C} - \gamma_{,A}\,\gamma^{-1}\,\gamma_{,B}\,\gamma^{-1}\,\gamma_{,C}\right.\right.$$
$$\left.\left.+\gamma_{,A}\,\gamma^{-1}\,\gamma_{,CB}\right)\frac{\partial\varsigma^D}{\partial\gamma} - (\gamma_{,A}\,\gamma^{-1})_{,C}\,\gamma\,(\frac{\partial\varsigma^D}{\partial\gamma})_{,B}\right]. \qquad (2.3.14)$$

Tomando la diferencia encontramos

$$\overline{\Gamma}^D{}_{BC,A} - \overline{\Gamma}^D{}_{AC,B} = \mathrm{tr}\left[(\gamma_{,B}\,\gamma^{-1}\,\gamma_{,A} - \gamma_{,A}\,\gamma^{-1}\,\gamma_{,B})\,\gamma^{-1}\,\gamma_{,C}\,\frac{\partial\varsigma^D}{\partial\gamma}\right]$$
$$+\,\mathrm{tr}\left[(\gamma_{,A}\,\gamma^{-1}\,\gamma_{,CB} - \gamma_{,B}\,\gamma^{-1}\,\gamma_{,CA})\,\frac{\partial\varsigma^D}{\partial\gamma}\right]$$
$$+\,\mathrm{tr}\left[(\gamma_{,C}\,\gamma^{-1})_{,B}\,\gamma\,(\frac{\partial\varsigma^D}{\partial\gamma})_{,A} - (\gamma_{,C}\,\gamma^{-1})_{,A}\,\gamma\,(\frac{\partial\varsigma^D}{\partial\gamma})_{,B}\right]. \qquad (2.3.15)$$

Encontramos ahora al tercer término de (2.3.12):

$$\overline{\Gamma}^D{}_{AE}\,\overline{\Gamma}^E{}_{BC} = \mathrm{tr}\left[(\gamma_{,C}\,\gamma^{-1})_{,B}\,\gamma\,\frac{\partial\varsigma^E}{\partial\gamma}\right]\,\mathrm{tr}\left[(\gamma_{,AE} - \gamma_{,A}\,\gamma^{-1}\,\gamma_{,E})\,\frac{\partial\varsigma^D}{\partial\gamma}\right]$$
$$= \mathrm{tr}\left[(\gamma_{,C}\,\gamma^{-1})_{,B}\,\gamma\,\frac{\partial\varsigma^E}{\partial\gamma}\right]\,\mathrm{tr}\left[(\gamma_{,AE}\,\frac{\partial\varsigma^D}{\partial\gamma}\right]$$
$$-\,(\gamma_{jl,C}\,\gamma^{lm})_{,B}\,\gamma_{mi}\,\gamma_{sp,A}\,\gamma_{qt,E}\,\frac{\partial\varsigma^E}{\partial\gamma_{ij}}\,\frac{\partial\varsigma^D}{\partial\gamma_{st}},$$

desarrollando y reacomodando términos se llega a

$$\overline{\Gamma}^D{}_{AE}\,\overline{\Gamma}^E{}_{BC} = \mathrm{tr}\left[(\gamma_{,C}\,\gamma^{-1})_B\,\gamma\,\frac{\partial\varsigma^E}{\partial\gamma}\right]\,\mathrm{tr}\left[\gamma_{,AE}\,\frac{\partial\varsigma^D}{\partial\gamma}\right]$$
$$-\,\mathrm{tr}\left[\gamma_{,A}\,\gamma^{-1}\,\gamma_{,CB}\,\frac{\partial\varsigma^D}{\partial\gamma}\right] + \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left[\gamma_{,A}\,\gamma^{-1}\,\gamma_{,B}\,\gamma^{-1}\,\gamma_{,C}\,\frac{\partial\varsigma^D}{\partial\gamma}\right]$$
$$+\,\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left[\gamma_{,A}\,\gamma^{-1}\,\gamma_{,C}\,\gamma^{-1}\,\gamma_{,B}\,\frac{\partial\varsigma^D}{\partial\gamma}\right]. \qquad (2.3.16)$$

Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
-\overline{\Gamma}^{D}{}_{BE}\overline{\Gamma}^{E}{}_{BC} = & -\mathrm{tr}\left[(\gamma_{,C}\,\gamma^{-1})_{A}\,\gamma\,\frac{\partial\varsigma^{E}}{\partial\gamma}\right]\,\mathrm{tr}\left[\gamma_{,BE}\,\frac{\partial\varsigma^{D}}{\partial\gamma}\right] \\
& + \mathrm{tr}\left[\gamma_{,B}\,\gamma^{-1}\,\gamma_{,CA}\,\frac{\partial\varsigma^{D}}{\partial\gamma}\right] - \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left[\gamma_{,B}\,\gamma^{-1}\,\gamma_{,A}\,\gamma^{-1}\,\gamma_{,C}\,\frac{\partial\varsigma^{D}}{\partial\gamma}\right] \\
& - \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left[\gamma_{,B}\,\gamma^{-1}\,\gamma_{,C}\,\gamma^{-1}\,\gamma_{,A}\,\frac{\partial\varsigma^{D}}{\partial\gamma}\right]. \qquad (2.3.17)
\end{aligned}
$$

Tomando la diferencia de (2.3.16) y (2.3.17):

$$
\begin{aligned}
\overline{\Gamma}^{D}{}_{AE}\overline{\Gamma}^{E}{}_{BC} - \overline{\Gamma}^{D}{}_{BE}\overline{\Gamma}^{E}{}_{BC} = & -\mathrm{tr}\left[(\gamma_{,A}\,\gamma^{-1}\,\gamma_{,CB} - \gamma_{,B}\,\gamma^{-1}\,\gamma_{,CA})\,\frac{\partial\varsigma^{D}}{\partial\gamma}\right] \\
& - \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left[(\gamma_{,B}\,\gamma^{-1}\,\gamma_{,A} - \gamma_{,A}\,\gamma^{-1}\,\gamma_{,B})\gamma^{-1}\,\gamma_{,C}\,\frac{\partial\varsigma^{D}}{\partial\gamma}\right] \\
& + \mathrm{tr}\left[(\gamma_{,C}\,\gamma^{-1})_{B}\,\gamma\,\frac{\partial\varsigma^{E}}{\partial\gamma}\right]\,\mathrm{tr}\left[\gamma_{,AE}\,\frac{\partial\varsigma^{D}}{\partial\gamma}\right] \\
& - \mathrm{tr}\left[(\gamma_{,C}\,\gamma^{-1})_{A}\,\gamma\,\frac{\partial\varsigma^{E}}{\partial\gamma}\right]\,\mathrm{tr}\left[\gamma_{,BE}\,\frac{\partial\varsigma^{D}}{\partial\gamma}\right] \\
& + \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left[\gamma_{,A}\,\gamma^{-1}\,\gamma_{,C}\,\gamma^{-1}\,\gamma_{,B}\,\frac{\partial\varsigma^{D}}{\partial\gamma}\right] \\
& - \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left[\gamma_{,B}\,\gamma^{-1}\,\gamma_{,C}\,\gamma^{-1}\,\gamma_{,A}\,\frac{\partial\varsigma^{D}}{\partial\gamma}\right]. \qquad (2.3.18)
\end{aligned}
$$

Observemos que los términos

$$
\begin{aligned}
\mathrm{tr}\left[\gamma_{,A}\,\gamma^{-1}\,\gamma_{,C}\,\gamma^{-1}\,\gamma_{,B}\,\frac{\partial\varsigma^{D}}{\partial\gamma}\right] &= \gamma_{it,B}\,\gamma^{tl}\,\gamma_{lj,C}\,\gamma^{jp}\,\gamma_{ps,A}\,\frac{\partial\varsigma^{D}}{\partial\gamma_{ji}} \\
&= \mathrm{tr}\left[\gamma_{,B}\,\gamma^{-1}\,\gamma_{,C}\,\gamma^{-1}\cdot\gamma_{,A}\,\frac{\partial\varsigma^{D}}{\partial\gamma}\right],
\end{aligned}
$$

por lo que los dos últimos términos de (2.3.18) se cancelan.

Haciendo la suma de (2.3.15) y (2.3.18) para obtener el tensór de Riemann obtenemos:

$$\overline{R}_{ABC}{}^{D} = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left[(\gamma_{,B}\,\gamma^{-1}\,\gamma_{,A} - \gamma_{,A}\,\gamma^{-1}\,\gamma_{,B})\gamma^{-1}\,\gamma_{,C}\,\frac{\partial\varsigma^{D}}{\partial\gamma}\right]$$

$$+\,\mathrm{tr}\left[(\gamma_{,C}\,\gamma^{-1})_{,B}\,\gamma\left(\frac{\partial\varsigma^{D}}{\partial\gamma}\right)_{,A} - (\gamma_{,C}\,\gamma^{-1})_{,A}\,\gamma\left(\frac{\partial\varsigma^{D}}{\partial\gamma}\right)_{,B}\right]$$

$$+\,\mathrm{tr}\left[(\gamma_{,C}\,\gamma^{-1})_{,B}\,\gamma\,\frac{\partial\varsigma^{E}}{\partial\gamma}\right]\mathrm{tr}\left[\gamma_{,AE}\,\frac{\partial\varsigma^{D}}{\partial\gamma}\right]$$

$$-\,\mathrm{tr}\left[(\gamma_{,C}\,\gamma^{-1})_{,A}\,\gamma\,\frac{\partial\varsigma^{E}}{\partial\gamma}\right]\mathrm{tr}\left[\gamma_{,BE}\,\frac{\partial\varsigma^{D}}{\partial\gamma}\right]. \qquad (2.3.19)$$

Analizemos ahora de la ecuación anterior los siguientes términos:

$$\mathrm{tr}\left[(\gamma_{,C}\,\gamma^{-1})_{,B}\,\gamma\left(\frac{\partial\varsigma^{D}}{\partial\gamma}\right)_{,A}\right] + \mathrm{tr}\left[(\gamma_{,C}\,\gamma^{-1})_{,B}\,\gamma\,\frac{\partial\varsigma^{E}}{\partial\gamma}\right]\mathrm{tr}\left[\gamma_{,AE}\,\frac{\partial\varsigma^{D}}{\partial\gamma}\right]$$

$$= \left[(\gamma_{jl,C}\,\gamma^{lm})_{,B}\,\gamma_{mi}\right]\left[\left(\frac{\partial\varsigma^{D}}{\partial\gamma_{ij}}\right)_{,A} + \frac{\partial\varsigma^{E}}{\partial\gamma_{ij}}\,\frac{\partial^{2}\gamma_{ks}}{\partial\varsigma^{E}\,\partial\varsigma^{A}}\,\frac{\partial\varsigma^{D}}{\partial\gamma_{sk}}\right]. \qquad (2.3.20)$$

Desarrollemos el segundo factor de la ecuación (2.3.20):

$$\left(\frac{\partial\varsigma^{D}}{\partial\gamma_{ij}}\right)_{,A} = \frac{\partial^{2}\varsigma^{D}}{\partial\gamma_{sk}\,\partial\gamma_{ij}}\,\frac{\partial\gamma_{sk}}{\partial\varsigma^{A}}. \qquad (2.3.21)$$

Por otra parte, tenemos

$$\frac{\partial}{\partial\gamma_{ij}}(\gamma_{ks,A}) = \gamma_{ks,A\Gamma}\,\frac{\partial\varsigma^{\Gamma}}{\partial\gamma_{ij}}$$

$$= \gamma_{ks,A0}\,\frac{\partial\varsigma}{\partial\gamma_{ij}} + \gamma_{ks,AE}\,\frac{\partial\varsigma^{E}}{\partial\gamma_{ij}}$$

$$= \gamma_{ks,0A}\left(\frac{1}{4}\,\varsigma\,\gamma^{ij}\right) + \gamma_{ks,AE}\,\frac{\partial\varsigma^{E}}{\partial\gamma_{ij}}$$

$$= \frac{1}{4}\,\varsigma\left(\frac{4}{3}\,\varsigma^{-1}\,\gamma_{ks}\right)_{,A}\gamma^{ij} + \gamma_{ks,AE}\,\frac{\partial\varsigma^{E}}{\partial\gamma_{ij}}$$

$$= \frac{1}{3}\,\gamma_{ks,A}\,\gamma^{ij} + \gamma_{ks,AE}\,\frac{\partial\varsigma^{E}}{\partial\gamma_{ij}},$$

pues $\Gamma = 0, \ldots, 5$, por lo tanto,

$$\frac{\partial \varsigma^E}{\partial \gamma_{ij}} \gamma_{ks,AE} = \frac{\partial}{\partial \gamma_{ij}} (\gamma_{ks,A}) - \frac{1}{3} \gamma_{ks,A} \gamma^{ij} . \tag{2.3.22}$$

Con estos resultados, podemos entonces escribir al segundo factor de (2.3.20) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial \varsigma^D}{\partial \gamma_{ij}} \right)_{,A} + \frac{\partial \varsigma^E}{\partial \gamma_{ij}} \gamma_{ks,AE} \frac{\partial \varsigma^D}{\partial \gamma_{sk}} &= \frac{\partial^2 \varsigma^D}{\partial \gamma_{sk} \partial \gamma_{ij}} \frac{\partial \gamma_{sk}}{\partial \varsigma^A} + \\
&\quad + \left(\frac{\partial}{\partial \gamma_{ij}} (\gamma_{ks,A}) \right) \frac{\partial \varsigma^D}{\partial \gamma_{sk}} - \frac{1}{3} \gamma_{ks,A} \gamma^{ij} \frac{\partial \varsigma^D}{\partial \gamma_{sk}} \\
&= \frac{\partial}{\partial \gamma_{ij}} \left(\frac{\partial \varsigma^D}{\partial \gamma_{ks}} \gamma_{ks,A} \right) - \frac{1}{3} \gamma^{ij} \delta^D_A \\
&= \frac{\partial}{\partial \gamma_{ij}} \delta^D_A - \frac{1}{3} \gamma^{ij} \delta^D_A \\
&= -\frac{1}{3} \gamma^{ij} \delta^D_A .
\end{aligned} \tag{2.3.23}$$

Por lo tanto, la ecuación (2.3.20) se reescribe:

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr} \left[(\gamma_{,C} \gamma^{-1})_{,B} \gamma \left(\frac{\partial \varsigma^D}{\partial \gamma} \right)_{,A} \right] + \mathrm{tr} \left[(\gamma_{,C} \gamma^{-1})_{,B} \gamma \frac{\partial \varsigma^E}{\partial \gamma} \right] \mathrm{tr} \left[\gamma_{,AE} \frac{\partial \varsigma^D}{\partial \gamma} \right] &= \\
&= \left[(\gamma_{jl,C} \gamma^{lm})_{,B} \gamma_{mi} \right] \left(-\frac{1}{3} \gamma^{ij} \delta^D_A \right) \\
&= -\frac{1}{3} (\gamma_{jl,C} \gamma^{lj})_{,B} \delta^D_A \\
&= 0 .
\end{aligned}$$

en virtud de (2.2.14).

De la misma forma se eliminan los otros dos términos de la ecuación (2.3.19), en donde están intercambiados los índices A y B, por lo que el tensor de Riemann toma la forma:

$$\begin{aligned}
\overline{R}^D{}_{CBA} &= \frac{1}{2} \mathrm{tr} \left[(\gamma_{,B} \gamma^{-1} \gamma_{,A} - \gamma_{,A} \gamma^{-1} \gamma_{,B}) \gamma^{-1} \gamma_{,C} \frac{\partial \varsigma^D}{\partial \gamma} \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[(\gamma_{jl,B} \gamma^{lm} \gamma_{mp,A} - \gamma_{jl,A} \gamma^{lm} \gamma_{mp,B}) \gamma^{ps} \gamma_{si,C} \frac{\partial \varsigma^D}{\partial \gamma_{ij}} \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\gamma_{is,C} \gamma^{sp} (\gamma_{pm,A} \gamma^{ml} \gamma_{lj,B} - \gamma_{pm,B} \gamma^{ml} \gamma_{lj,A}) \partial \varsigma^D \partial \gamma_{ij} \right] ,
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\overline{R}^{D}{}_{CBA} = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left[\gamma_{,C}\,\gamma^{-1}\,(\gamma_{,A}\,\gamma^{-1}\,\gamma_{,B} - \gamma_{,B}\,\gamma^{-1}\,\gamma_{,A})\,\frac{\partial\varsigma^{D}}{\partial\gamma}\right].$$

El Riemann con los índices abajo es entonces,

$$\begin{aligned}
\overline{R}_{DCBA} \equiv \overline{G}_{DE}\,\overline{R}^{E}{}_{CBA} = \overline{R}_{BADC} = \overline{R}_{ABCD} \\
&= \mathrm{tr}(\gamma^{-1}\,\gamma_{,E}\,\gamma^{-1}\,\gamma_{,D}\,\frac{1}{2}\mathrm{tr}\,[\gamma_{,C}\,\gamma^{-1}\,(\gamma_{,A}\,\gamma^{-1}\,\gamma_{,C}\,- \\
&\qquad - \gamma_{,B}\,\gamma^{-1}\,\gamma_{,A})\,\frac{\partial\varsigma^{E}}{\partial\gamma}\Big] \\
&= \frac{1}{2}\gamma^{ij}\,\gamma_{jk,D}\,\gamma^{kl}\,\gamma_{lm,C}\,\gamma^{mn}(\gamma_{no,A}\,\gamma^{op}\,\gamma_{pq,B}- \\
&\qquad - \gamma_{no,A}\,\gamma^{op}\,\gamma_{pq,B}) \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{tr}\,\left[\gamma^{-1}\,\gamma_{,D}\cdot\gamma^{-1}\,\gamma_{,C}\,\gamma^{-1}\,(\gamma_{,A}\,\gamma^{-1}\,\gamma_{,B} - \gamma_{,B}\,\gamma^{-1}\,\gamma_{,A})\right]. \qquad (2.3.24)
\end{aligned}$$

Definimos al tensor de Ricci de la siguiente forma:

$$\overline{R}_{BA} \equiv \overline{R}^{C}{}_{BCA} = -\overline{R}^{C}{}_{BAC}\,,$$

de manera que toma la siguiente forma a partir de (2.3.23):

$$\begin{aligned}
\overline{R}_{BA} &= -\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left[\gamma_{,B}\,\gamma^{-1}\,(\gamma_{,C}\,\gamma^{-1}\,\gamma_{,A} - \gamma_{,A}\,\gamma^{-1}\,\gamma_{,C}\;\frac{\partial\varsigma^{C}}{)}\partial\gamma\right] \\
&= -\frac{1}{2}\left[\gamma_{ij,B}\,\gamma^{jl}(\gamma_{lm,C}\,\gamma^{mn}\,\gamma_{no,A} - \gamma_{lm,A}\,\gamma^{mn}\,\gamma_{no,C})\,\frac{\partial\varsigma^{C}}{\partial\gamma_{oi}}\right] \\
&= -\frac{1}{2}\left\{\gamma_{ij,B}\,\gamma^{jl}\left[\gamma^{mn}\,\gamma_{no,A}\,(\delta^{oi}_{lm} - \frac{1}{3}\,\gamma_{lm}\,\gamma^{oi})-\right.\right. \\
&\qquad \left.\left. -\gamma_{lm,A}\,\gamma^{mn}\,(\delta^{oi}_{no} - \frac{1}{3}\,\gamma_{no}\,\gamma^{oi})\right]\right\}
\end{aligned}$$

que se puede reescribir como

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\left(\gamma_{mj,B}\,\gamma^{jo}\,\gamma^{mn}\,\gamma_{no,A}+\gamma_{lj,B}\,\gamma^{lj}\,\gamma^{on}\,\gamma_{no,A}\right)\right.\\
&\quad -\frac{1}{3}\gamma_{ij,B}\,\gamma^{jn}\,\gamma_{no,A}\,\gamma^{oi}-\frac{4}{2}\gamma_{nj,B}\,\gamma^{jl}\,\gamma_{lm,A}\,\gamma^{mn}+\\
&\quad \left.+\frac{1}{3}\gamma_{ij,B}\,\gamma^{jl}\,\gamma_{lm,A}\,\gamma^{mi}\right\}\\
&= -\frac{1}{2}\left\{-\frac{3}{2}\operatorname{tr}\left[\gamma^{-1}\,\gamma_{,A}\,\gamma^{-1}\,\gamma_{,B}\right]\right\}\\
&= \frac{3}{4}\,\overline{G}_{AB}\,. \qquad (2.3.25)
\end{aligned}
$$

Finalmente podemos encontrar al escalar de curvatura de la forma

$$
\begin{aligned}
\overline{R} &= \overline{G}^{AB}\,\overline{R}_{AB}\,,\\
&= \frac{15}{4}\,. \qquad (2.3.26)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, se trata de una variedad de cinco dimensiones con métrica positiva definida y curvatura constante. Si calculamos el tensor de Einstein para la métrica $\overline{G}_{AB}$, éste será entonces proporcional a la propia métrica: $\overline{R}_{AB} - \frac{1}{2}\,\overline{G}_{AB}\,\overline{R} = \frac{9}{8}\,\overline{G}_{AB}$.

La variedad $\overline{\mathrm{N}}$ es así un espacio de Einstein. Sin embargo, la métrica definida en la variedad $\overline{\mathrm{N}}$ no tiene porqué satisfacer unas *ecuaciones de Einstein*. En principio, la métrica $\overline{G}_{AB}$ está dada y hasta ahora hemos tratado de encontrar propiedades de la variedad definidas a partir de ella.

2.3.3 Geodésicas en $\overline{\mathrm{N}}$.

La ecuación de geodésicas en la variedad $\overline{\mathrm{N}}$ puede ser escrita en las coordenadas ς^A respecto al parámetro $\bar{s}$ de la forma usual, es decir:

$$
\frac{d^2\varsigma^A}{d\bar{s}^2}+\overline{\Gamma}^A{}_{BC}\,\frac{d\varsigma^B}{d\bar{s}}\,\frac{d\varsigma^C}{d\bar{s}}=0\,. \qquad (2.3.26)
$$

Procederemos a reescribir a la ecuación (2.3.26) en términos de las variables γ_{ij} (que en ocasiones abreviamos como γ).

$$0 = \frac{d^2\varsigma^A}{d\bar{s}^2} + \left(-\gamma_{ij,B}\,\gamma^{jl}\,\gamma_{lm,C} + \gamma_{lm,BC}\right)\frac{\partial\varsigma^A}{\partial\gamma_{mi}}\,\frac{d\varsigma^B}{d\bar{s}}\,\frac{d\varsigma^C}{d\bar{s}}$$

$$= \frac{d^2\varsigma^A}{d\bar{s}^2} + \left(-\gamma_{ij,B}\,\gamma^{jl}\,\gamma_{lm,C} + \gamma_{lm,BC}\right)\frac{\partial\varsigma^B}{\partial\gamma_{ks}}\,\frac{d\gamma_{ks}}{d\bar{s}}\,\frac{\partial\varsigma^C}{\partial\gamma_{rt}}\,\frac{d\gamma_{rt}}{d\bar{s}}\,\frac{\partial\varsigma^A}{\partial\gamma_{mi}},$$

utilizando (2.3.6) tenemos

$$0 = \frac{d^2\varsigma^A}{d\bar{s}^2} - \gamma^{jl}\left[\frac{1}{2}(\delta_i^k\delta_j^s + \delta_i^s\delta_j^k) - \frac{1}{3}\,\gamma_{ij}\gamma^{ks}\right]\left[\frac{1}{2}(\delta_l^r\delta_m^t + \delta_m^r\delta_l^t) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{3}\,\gamma_{lm}\gamma^{rt}\right]\frac{d\gamma_{ks}}{d\bar{s}}\,\frac{d\gamma_{rt}}{d\bar{s}}\,\frac{\partial\varsigma^A}{\partial\gamma_{mi}} + \gamma_{im,BC}\,\frac{\partial\varsigma^B}{\partial\gamma_{ks}}\,\frac{d\gamma_{ks}}{d\bar{s}}\,\frac{\partial\varsigma^C}{\partial\gamma_{rt}}\,\frac{d\gamma_{rt}}{d\bar{s}}\,\frac{\partial\varsigma^A}{\partial\gamma_{mi}}$$

$$= \frac{d^2\varsigma^A}{d\bar{s}^2} - \left[\gamma^{jl}\left(\frac{d\gamma_{ij}}{d\bar{s}} - \frac{1}{3}\,\gamma_{ij}\,\gamma^{ks}\,\frac{d\gamma_{ks}}{d\bar{s}}\right)\left(\frac{d\gamma_{lm}}{d\bar{s}} - \frac{1}{3}\,\gamma_{lm}\,\gamma^{rt}\,\frac{d\gamma_{rt}}{d\bar{s}}\right)\frac{\partial\varsigma^A}{\partial\gamma_{mi}}\right] +$$

$$+ \gamma_{im,BC}\,\frac{\partial\varsigma^B}{\partial\gamma_{ks}}\,\frac{d\gamma_{ks}}{d\bar{s}}\,\frac{\partial\varsigma^C}{\partial\gamma_{rt}}\,\frac{d\gamma_{rt}}{d\bar{s}}\,\frac{\partial\varsigma^A}{\partial\gamma_{mi}}$$

$$= \frac{d^2\varsigma^A}{d\bar{s}^2} - \frac{\partial\varsigma^A}{\partial\gamma_{mi}}\left[\frac{d\gamma_{ij}}{d\bar{s}}\,\gamma^{jl}\,\frac{d\gamma_{lm}}{d\bar{s}} - \frac{1}{3}\gamma^{jl}\,\gamma^{ks}\,\frac{d\gamma_{ks}}{d\bar{s}}\left(\gamma_{ij}\,\frac{d\gamma_{lm}}{d\bar{s}} + \gamma_{lm}\,\frac{d\gamma_{ij}}{d\bar{s}}\right)\right.$$

$$\left. + \frac{1}{9}\,\gamma^{jl}\,\gamma_{ij}\,\gamma_{lm}\left(\gamma_{ks}\,\frac{d\gamma_{ks}}{d\bar{s}}\right)^2\right] + \gamma_{im,BC}\,\frac{\partial\varsigma^B}{\partial\gamma_{ks}}\,\frac{d\gamma_{ks}}{d\bar{s}}\,\frac{\partial\varsigma^C}{\partial\gamma_{rt}}\,\frac{d\gamma_{rt}}{d\bar{s}}\,\frac{\partial\varsigma^A}{\partial\gamma_{mi}}. \qquad (2.3.27)$$

Ahora bien, el termino $\gamma^{ks}\,\dfrac{d\gamma_{ks}}{d\bar{s}}$ será de la forma:

$$\gamma^{ks}\,\frac{d\gamma_{ks}}{d\bar{s}} = \gamma^{ks}\left(\frac{\partial\gamma_{ks}}{\partial\varsigma^A}\,\frac{d\varsigma^A}{d\bar{s}} + \frac{\partial\gamma_{ks}}{\partial\varsigma}\,\frac{d\varsigma}{d\bar{s}}\right)$$

$$= \gamma^{ks}\,\frac{4}{3}\,\varsigma^{-1}\,\gamma_{ks}\,\frac{d\varsigma}{d\bar{s}}$$

$$= 4\,\varsigma^{-1}\,\frac{d\varsigma}{d\bar{s}}. \qquad (2.3.28)$$

Si la geodésica está sobre la variedad $\overline{\mathrm{N}}$, que es el caso que estamos considerando, la coordenada ς será una constante, ya que cada *corte* de ς =cte de la variedad grande define una hipersuperficie caracterizada por $\overline{G}_{AB}$ y por lo tanto, la expresión (2.3.28) se anula. Con esto, la ecuación (2.3.27) se simplifica un tanto.

Por otra parte, podemos desarrollar el primer término de (2.3.27) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\varsigma^A}{d\bar{s}^2} = \frac{d}{d\bar{s}}\left(\frac{d\varsigma^A}{d\bar{s}}\right) &= \frac{d}{d\bar{s}}\left(\frac{\partial\varsigma^A}{\partial\gamma_{kl}}\frac{d\gamma_{kl}}{d\bar{s}}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial\gamma_{rs}}\left(\frac{\partial\varsigma^A}{\partial\gamma_{kl}}\frac{d\gamma_{kl}}{d\bar{s}}\right)\frac{d\gamma_{rs}}{d\bar{s}} \\
&= \left[\frac{\partial\varsigma^A}{\partial\gamma_{kl}}\frac{\partial}{\partial\gamma_{rs}}\left(\frac{d\gamma_{kl}}{d\bar{s}}\right) + \frac{\partial^2\varsigma^A}{\partial\gamma_{rs}\gamma_{kl}}\frac{d\gamma_{kl}}{d\bar{s}}\right]\frac{d\gamma_{rs}}{d\bar{s}} \\
&= \frac{\partial\varsigma^A}{\partial\gamma_{kl}}\frac{d^2\gamma_{kl}}{d\bar{s}^2} + \frac{\partial^2\varsigma^A}{\partial\gamma_{rs}\gamma_{kl}}\frac{d\gamma_{kl}}{d\bar{s}}\frac{d\gamma_{rs}}{d\bar{s}}\,. \qquad (2.3.29)
\end{aligned}$$

Entonces, la expresión (2.3.27) la podemos escribir como:

$$\begin{aligned}
0 = \frac{\partial\varsigma^A}{\partial\gamma_{kl}}\frac{d^2\gamma_{kl}}{d\bar{s}} + \frac{\partial^2\varsigma^A}{\partial\gamma_{rs}\partial\gamma_{kl}}\frac{d\gamma_{rs}}{d\bar{s}}\frac{d\gamma_{kl}}{d\bar{s}} - \frac{d\gamma_{ij}}{d\bar{s}}\gamma^{il}\frac{d\gamma_{lm}}{d\bar{s}}\frac{\partial\varsigma^A}{\partial\gamma_{mi}} + \\
+ \gamma_{im,BC}\frac{\partial\varsigma^B}{\partial\gamma_{ks}}\frac{\partial\varsigma^C}{\partial\gamma_{rt}}\frac{\partial\varsigma^A}{\partial\gamma_{mi}}\frac{d\gamma_{ks}}{d\bar{s}}\frac{d\gamma_{rt}}{d\bar{s}}\,. \qquad (2.3.30)
\end{aligned}$$

La expresión $\gamma_{im,BC}\dfrac{\partial\varsigma^A}{\partial\gamma_{mi}}$ podemos encontrarla a partir de la igualdad:

$$\gamma_{im,B}\frac{\partial\varsigma^A}{\partial\gamma_{im}} = \delta^A_B\,,$$

derivando respecto a ς^C de la siguiente forma:

$$\frac{\partial}{\partial\varsigma^C}\left(\gamma_{im,B}\frac{\partial\varsigma^A}{\partial\gamma_{im}}\right) = \gamma_{im,BC}\frac{\partial\varsigma^A}{\partial\gamma_{im}} + \gamma_{im,B}\frac{\partial}{\partial\varsigma^C}\left(\frac{\partial\varsigma^A}{\partial\gamma_{im}}\right) = 0\,,$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\gamma_{im,BC}\frac{\partial\varsigma^A}{\partial\gamma_{im}} &= -\gamma_{im,B}\frac{\partial}{\partial\varsigma^C}\left(\frac{\partial\varsigma^A}{\partial\gamma_{im}}\right) \\
&= -\gamma_{im,B}\frac{\partial^2\varsigma^A}{\partial\gamma_{kl}\partial\gamma_{im}}\gamma_{kl,C}\,. \qquad (2.3.31)
\end{aligned}$$

Insertando la ecuación (2.3.31) en (2.3.30) tenemos

$$
\begin{aligned}
0 = {} & \frac{\partial \varsigma^A}{\partial \gamma_{kl}} \frac{d^2\gamma_{kl}}{d\bar{s}^2} + \frac{\partial^2 \varsigma^A}{\partial \gamma_{rs}\partial \gamma_{kl}} \frac{d\gamma_{rs}}{d\bar{s}} \frac{d\gamma_{kl}}{d\bar{s}} - \frac{\partial \varsigma^A}{\partial \gamma_{mi}} \frac{d\gamma_{ij}}{d\bar{s}} \frac{d\gamma_{lm}}{d\bar{s}} - \\
& - \frac{\partial^2 \varsigma^A}{\partial \gamma_{kl}\partial \gamma_{im}} \gamma_{im,B} \frac{\partial \varsigma^B}{\partial \gamma_{as}} \gamma_{kl,C} \frac{\partial \varsigma^C}{\partial \gamma_{rt}} \frac{d\gamma_{as}}{d\bar{s}} \frac{d\gamma_{rt}}{d\bar{s}} \\
= {} & \frac{\partial \varsigma^A}{\partial \gamma_{kl}} \left(\frac{d^2\gamma_{kl}}{d\bar{s}} - \frac{d\gamma_{kj}}{d\bar{s}} \gamma^{im} \frac{d\gamma_{ml}}{d\bar{s}} \right) + \frac{\partial^2 \varsigma^A}{\partial \gamma_{rs}\partial \gamma_{kl}} \frac{d\gamma_{rs}}{d\bar{s}} \frac{d\gamma_{kl}}{d\bar{s}} - \\
& - \frac{\partial^2 \varsigma^A}{\partial \gamma_{im}\partial \gamma_{kl}} \frac{d\gamma_{rt}}{d\bar{s}} \frac{d\gamma_{as}}{d\bar{s}} \left(\delta^{as}_{im} - \frac{1}{3} \gamma_{im} \gamma^{as} \right) \left(\delta^{rt}_{kl} - \frac{1}{3} \gamma_{kl} \gamma^{rt} \right) \\
= {} & \frac{\partial \varsigma^A}{\partial \gamma_{kl}} \left(\frac{d^2\gamma_{kl}}{d\bar{s}} - \frac{d\gamma_{kj}}{d\bar{s}} \gamma^{jm} \frac{d\gamma_{ml}}{d\bar{s}} \right) + \frac{\partial^2 \varsigma^A}{\partial \gamma_{rs}\partial \gamma_{kl}} \frac{d\gamma_{rs}}{d\bar{s}} \frac{d\gamma_{kl}}{d\bar{s}} - \\
& - \frac{\partial^2 \varsigma^A}{\partial \gamma_{im}\partial \gamma_{kl}} \left[\frac{d\gamma_{im}}{d\bar{s}} \frac{d\gamma_{kl}}{d\bar{s}} - \frac{1}{3} \frac{d\gamma_{im}}{d\bar{s}} \gamma_{kl} \gamma^{rt} \frac{d\gamma_{rt}}{d\bar{s}} - \frac{1}{3} \frac{d\gamma_{kl}}{d\bar{s}} \gamma_{im} \gamma^{as} \frac{d\gamma_{as}}{d\bar{s}} + \frac{1}{9} \frac{d\gamma_{as}}{d\bar{s}} \gamma^{as} \right] ,
\end{aligned}
\tag{2.3.32}
$$

Por lo tanto la ecuación de geodésicas se reescribe:

$$
\mathrm{tr} \left[\frac{\partial \varsigma^A}{\partial \gamma} \left(\frac{d^2\gamma}{d\bar{s}^2} - \frac{d\gamma}{d\bar{s}} \gamma^{-1} \frac{d\gamma}{d\bar{s}} \right) \right] = 0 . \tag{2.3.33}
$$

Sin embargo, notemos que ésta expresión son cinco ecuaciones pero contienen aun la dependencia en las coordenadas ς^A. Necesitamos entonces transformar a este sistema un otro cuya dependencia sea exclusivamente en las coordenadas γ_{ij}. Para esto, tomemos la ecuación (2.3.33) y multipliquémosla por el factor $\gamma_{rs,A}$. Obtenemos así la siguiente expresión:

$$
\begin{aligned}
0 = {} & \frac{\partial \varsigma^A}{\partial \gamma_{kl}} \left(\frac{d^2\gamma_{kl}}{d\bar{s}} - \frac{d\gamma_{kj}}{d\bar{s}} \gamma^{jm} \frac{d\gamma_{ml}}{d\bar{s}} \right) \gamma_{rs,A} \\
= {} & \left(\frac{d^2\gamma_{kl}}{d\bar{s}} - \frac{d\gamma_{kj}}{d\bar{s}} \gamma^{jm} \frac{d\gamma_{ml}}{d\bar{s}} \right) \left(\delta^{il}_{rs} - \frac{1}{3} \gamma_{rs} \gamma^{il} \right) \\
= {} & \frac{d^2\gamma_{rs}}{d\bar{s}} - \frac{1}{2} \left(\frac{d\gamma_{sm}}{d\bar{s}} \gamma^{mk} \frac{d\gamma_{kr}}{d\bar{s}} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{d\gamma_{rm}}{d\bar{s}} \gamma^{mk} \frac{d\gamma_{ks}}{d\bar{s}} \right) - \\
& - \frac{1}{2} \left[\gamma_{rs} \gamma^{il} \frac{d^2\gamma_{li}}{d\bar{s}} - \gamma_{rs} \gamma^{il} \frac{\gamma_{lm}}{d\bar{s}} \gamma^{mk} \frac{d\gamma_{ki}}{d\bar{s}} \right] .
\end{aligned}
\tag{2.3.34}
$$

Analizemos el último término de la expresión (2.3.34). A partir de la ecuación (2.3.28) $(\gamma^{ij}\,\frac{d^2\gamma_{ij}}{d\bar{s}^2})$, si la derivamos respecto al parámetro $\bar{s}$ obtenemos la siguiente expresión:

$$
\begin{aligned}
0 &= \gamma^{ij}\,\frac{d^2\gamma_{ij}}{d\bar{s}^2} + \frac{d\gamma_{ji}}{d\bar{s}}\,\frac{d\gamma^{ij}}{d\bar{s}} \\
&= \gamma^{ij}\,\frac{d^2\gamma_{ij}}{d\bar{s}^2} - \frac{d\gamma_{ji}}{d\bar{s}}\,\gamma^{im}\,\frac{d\gamma_{ml}}{d\bar{s}}\,\gamma^{lj}\,. \qquad (2.3.35)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, el último término de (2.3.34) se anula y la forma que toma la ecuación de geodésicas en la variedad $\overline{\mathrm{N}}$ será:

$$\frac{d^2\gamma}{d\bar{s}} - \frac{d\gamma}{d\bar{s}}\,\gamma^{-1}\,\frac{d\gamma}{d\bar{s}} = 0\,, \qquad (2.3.36a)$$

este sistema consiste de seis ecuaciones, pero sabemos que no son independientes entre ellas ya que solo se tienen cinco grados de libertad. Recordamos entonces que tenemos una restricción entre las γ_{ij} y sus derivadas dada por (2.3.28) de manera que tenemos:

$$\gamma^{ij}\,\frac{d\gamma_{ij}}{d\bar{s}} = 0\,. \qquad (2.3.36b)$$

Tratemos ahora de encontrar una solución para las ecuaciones (2.3.36). Para esto propongamos que la solución general está dada por una matriz de la forma,

$$\gamma(\bar{s}) = \widetilde{M}\,e^{N\bar{s}}\,M\,, \qquad (2.3.37)$$

donde $\widetilde{M}$ es la transpuesta de M. Estamos suponiendo que las matrices son reales. En principio tanto la matriz M como N son matrices no singulares arbitrarias.

Veamos que en efecto (2.3.37) es solución de las ecuaciones (2.3.36) e impone ciertas condiciones en la matriz N. Calculando las derivadas respecto al parámetro $\bar{s}$ de (2.2.59) tenemos,

$$\dot{\gamma} \equiv \frac{d\gamma}{d\bar{s}} = \widetilde{M}\,N\,e^{N\bar{s}}\,M\,, \qquad (2.3.38)$$

$$\ddot{\gamma} \equiv \frac{d^2\gamma}{d\bar{s}^2} = \widetilde{M}\,N^2\,e^{N\bar{s}}\,M\,, \qquad (2.3.39)$$

La inversa de la matriz $\gamma(\bar{s})$ será

$$\gamma(\bar{s})^{-1} = M^{-1}\,e^{-N\bar{s}}\,\widetilde{M}^{-1}\,,$$

Por lo que podemos escribir

$$
\begin{aligned}
\dot{\gamma}\,\gamma^{-1}\,\dot{\gamma} &= \widetilde{M}\,N\,e^{N\bar{s}}\,M\,M^{-1}\,e^{-N\bar{s}}\,\widetilde{M}^{-1}\widetilde{M}\,N\,e^{N\bar{s}}\,M\,, \\
&= \widetilde{M}\,N\,e^{N\bar{s}}\,e^{-N\bar{s}}\,N\,e^{N\bar{s}}\,M\,, \\
&= \widetilde{M}\,N^2\,e^{N\bar{s}}\,M\,, \\
&= \ddot{\gamma}\,. \qquad (2.3.40)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto se satisface la primera ecuación de (2.3.36). Debemos además imponer la condición $\mathrm{tr}(\gamma^{-1}\,\dot{\gamma}) = 0$ a la solución (2.3.38):

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(\gamma^{-1}\,\dot{\gamma}) &= \mathrm{tr}\left[M^{-1}\,e^{-N\bar{s}}\,\widetilde{M}^{-1}\,\widetilde{M}\,N\,e^{N\bar{s}}\,M\right] ,\\
&= \mathrm{tr}\left[M^{-1}\,e^{-N\bar{s}}\,N\,e^{N\bar{s}}\,M\right] ,\\
&= \mathrm{tr}\left[N\,e^{-N\bar{s}}\,e^{N\bar{s}}\right] ,\\
&= \mathrm{tr}\,N .
\end{aligned} \tag{2.3.41}$$

Por lo tanto, N debe ser una matriz de traza nula. El pedir que $\gamma(\bar{s})$ sea simétrica impone otra condición en la matriz N:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\gamma}(\bar{s}) &= \widetilde{\left(\widetilde{M}\,e^{N\bar{s}}\,M\right)} ,\\
&= \widetilde{\left(e^{N\bar{s}}\,M\right)}\,M ,\\
&= \widetilde{M}\,\widetilde{\left(e^{N\bar{s}}\right)}\,M ,
\end{aligned}$$

pero

$$\widetilde{\left(e^{N\bar{s}}\right)} = e^{\widetilde{N}\bar{s}} ,$$

por lo que la condición $\gamma(\bar{s}) = \widetilde{\gamma}(\bar{s})$ se traduce en

$$\widetilde{M}\,e^{N\bar{s}}\,M = \widetilde{M}\,e^{\widetilde{N}\bar{s}}\,M .$$

Por lo tanto,

$$N = \widetilde{N} . \tag{2.3.42}$$

El hecho que la exponencial de una matriz sea una función analítica para cualquier valor del parámetro $\bar{s}$, asegura que la variedad $\overline{\mathrm{N}}$ sea una variedad geodésicamente completa. Por lo tanto, la forma (2.3.37) para γ restringe mucho el tipo de espacio que se tiene.

Por simplicidad tomemos matrices que tengan determinante uno:

$$\mathbf{a} \equiv \gamma^{-1/3}\gamma . \tag{2.3.43}$$

En la solución de la ecuación de geodésicas (2.3.37), podemos reemplazar a la matriz γ por la matriz $\mathbf{a}$ siempre y cuando M tenga determinante uno.

Para encontrar la geodésica que conecta dos matrices $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$, hagamos $\bar{s} = 0$ en $\mathbf{a}_1$ y elijamos M de la forma:

$$M = \mathrm{d}_1^{1/2}\mathrm{O} , \tag{2.3.44}$$

donde $\mathbf{O}$ es una matriz ortogonal que diagonaliza $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{d}_1^{1/2}$ es la raíz cuadrada diagonal de la matriz diagonal resultante (es decir, $\mathbf{O}\mathbf{a}_1\widetilde{\mathbf{O}} = \mathbf{d}_1$). Si $\bar{s}_{12}$ es la distancia entre $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$ entonces la matriz N satisface:

$$\mathbf{a}_2 = \widetilde{\mathbf{O}}\mathbf{d}_1^{1/2} e^{N\bar{s}_{12}} \mathbf{d}_1^{1/2}\mathbf{O}\,, \tag{2.3.45}$$

por lo que,

$$N\bar{s}_{12} = \ln\left[\mathbf{d}_1^{-1/2}\mathbf{O}\,\mathbf{a}_2\,\widetilde{\mathbf{O}}\,\mathbf{d}_1^{-1/2}\right]\,,$$

elevando al cuadrado y tomando la traza,

$$\mathrm{tr}\left[N^2\bar{s}_{12}^2\right] = \mathrm{tr}\left[\ln\left(\mathbf{d}_1^{-1/2}\mathbf{O}\,\mathbf{a}_2\,\widetilde{\mathbf{O}}\,\mathbf{d}_1^{-1/2}\right)\right]^2\,. \tag{2.3.46}$$

Pidiendo que $\mathrm{tr}N^2 = 1$, tenemos entonces que la distancia $\bar{s}_{12}$ entre las matrices será:

$$\begin{aligned}\bar{s}_{12}^2 &= \mathrm{tr}\left[\ln\left(\mathbf{d}_1^{-1/2}\mathbf{O}\,\mathbf{a}_2\,\widetilde{\mathbf{O}}\,\mathbf{d}_1^{-1/2}\right)\right]^2\,,\\ &= \mathrm{tr}\left[\ln(\mathbf{a}_1^{-1}\mathbf{a}_2)\right]^2\,.\end{aligned} \tag{2.3.47}$$

Hasta ahora hemos estudiado a la variedad $\overline{\mathbf{N}}$ así como las geodésicas en ella. Procederemos al estudio de la varieded 6-dimensional completa $\mathbf{N}$.

2.4 Variedad N

2.4.1 Conecciones Afines en N.

Comenzaremos esta sección encontrando las conecciones afines en la variedad $\mathbf{N}$, dadas a partir de la métrica $G_{\Omega\Delta}$ de la forma usual

$$\Gamma^{\Pi}{}_{\Delta\Lambda} = \frac{1}{2}G^{\Pi\Omega}\left(G_{\Omega\Delta,\Lambda} + G_{\Omega\Lambda,\Delta} - G_{\Delta\Lambda,\Omega}\right)\,, \tag{2.4.1}$$

donde

$$\begin{aligned} G_{AB} &= \gamma^{1/2}\,\overline{G}_{AB} = \frac{3}{32}\,\varsigma^2\,\overline{G}_{AB}\,,\\ G_{0A} &= 0\,,\\ G_{00} &= -1\,.\end{aligned} \tag{2.4.2}$$

La métrica inversa la encontramos fácilmente a partir de la definición.

$$G^{\Pi\Omega}\,G_{\Omega\Delta} = \delta_{\Delta}^{\Omega}\,.$$

De la forma de $G_{\Omega\Delta}$ se concluye que

$$G^{00} = -1\,, \tag{2.4.3}$$

$$G^{A0} = 0\,, \tag{2.4.4}$$

$$G^{AB} = \frac{32}{3}\,\varsigma^{-2}\,\overline{G}^{AB}\,. \tag{2.4.5}$$

Por lo tanto,podemos calcular las conecciones afines a la métrica $G_{\Omega\Delta}$ de la forma,

i) Encontramos primero los *índices latinos* de las conecciones de la forma,

$$\begin{aligned}
\Gamma^{A}{}_{BC} &= \frac{1}{2}\,G^{A0}\,(\ldots) + \frac{1}{2}\,G^{AD}\,(G_{BD,C} + G_{CD,B} - G_{BC,D})\,, \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{32}{3}\right)\varsigma^{-2}\overline{G}^{AD}\left(\frac{3}{32}\,\varsigma^{2}\right)\left(\overline{G}_{BD,C} + \overline{G}_{CD,B} - \overline{G}_{BC,D}\right)\,, \\
&= \overline{\Gamma}^{A}{}_{BC}\,.
\end{aligned} \tag{2.4.6}$$

ii) Calculemos la derivada respecto a ς de G_{AB},

$$G_{AB,0} = \frac{3}{32}\,2\,\varsigma\,\overline{G}_{AB} + \frac{3}{32}\,\varsigma^{2}\,\overline{G}_{AB,0}\,,$$

pero,

$$\begin{aligned}
\overline{G}_{AB,0} &= \left(\gamma^{il}\,\gamma_{lm,A}\,\gamma^{mn}\,\gamma_{ni,B}\right)_{,0}\,, \\
&= \gamma^{il}{}_{,0}\,\gamma_{lm,A}\,\gamma^{mn}\,\gamma_{ni,B} + \gamma^{il}\,\gamma_{lm,A0}\,\gamma^{mn}\,\gamma_{ni,B} + \\
&\quad + \gamma^{il}\,\gamma_{lm,A}\,\gamma^{mn}{}_{,0}\,\gamma_{ni,B} + \gamma^{il}\,\gamma_{lm,A}\,\gamma^{mn}\,\gamma_{ni,B0}\,.
\end{aligned}$$

Los términos de la forma $\gamma_{jp,C0}$ los podemos reescribir:

$$\begin{aligned}
\gamma_{jp,C0} &= \gamma_{jp,0C}\,, \\
&= \left(\frac{4}{3}\,\varsigma^{-1}\,\gamma_{jp}\right)_{,C}\,, \\
&= \frac{4}{3}\,\varsigma^{-1}\,\gamma_{jp,C}\,.
\end{aligned} \tag{2.4.7}$$

Además,

$$\begin{aligned}
\gamma^{il}{}_{,0} &= -\gamma^{is}\,\gamma_{st,0}\,\gamma^{tl}\,, \\
&= -\frac{4}{3}\,\varsigma^{-1}\,\gamma^{is}\,\gamma_{st}\,\gamma^{tl}\,, \\
&= -\frac{4}{3}\,\varsigma^{-1}\,\gamma^{il}\,.
\end{aligned} \tag{2.4.8}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\overline{G}_{AB,0} &= \frac{4}{3}\varsigma^{-1}\left[-\gamma^{il}\gamma_{lm,A}\gamma^{mn}\gamma_{ni,B}+\gamma^{il}\gamma_{lm,A}\gamma^{mn}\gamma_{ni,B}-\right.\\ &\quad\left.-\gamma^{il}\gamma_{lm,A}\gamma^{mn}\gamma_{ni,B}+\gamma^{il}\gamma_{lm,A}\gamma^{mn}\gamma_{ni,B}\right],\\ &=0\,. \end{aligned} \tag{2.4.9}$$

Entonces,

$$G_{AB,0} = \frac{6}{32}\varsigma\,\overline{G}_{AB}\,. \tag{2.4.10}$$

Con este resultado, podemos construir las conexiones del tipo

$$\begin{aligned}\Gamma^0{}_{AB} &= \frac{1}{2}G^{00}\left(G_{0A,B}+G_{0B,A}-G_{AB,0}\right)+\frac{1}{2}G^{0A}\,(\ldots)\,,\\ &= -\frac{1}{2}G^{00}\,G_{AB,0}\,,\\ &= -\frac{1}{2}(-1)\,\frac{6}{32}\varsigma\,\overline{G}_{AB}\,,\\ &= \frac{3}{32}\varsigma\,\overline{G}_{AB}\,. \end{aligned} \tag{2.4.11}$$

iii)

$$\begin{aligned}\Gamma^B{}_{A0} &= \frac{1}{2}G^{B0}(\ldots))+\frac{1}{2}G^{BD}\left(G_{DA,0}+G_{D0,A}-G_{A0,D}\right),\\ &= \frac{1}{2}G^{BD}\,G_{DA,0}\,,\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{32}{3}\right)\varsigma^{-2}\,\overline{G}^{BD}\,2\left(\frac{3}{32}\right)\varsigma\,\overline{G}_{DA}\,,\\ &= \varsigma^{-1}\,\delta^B_A\,. \end{aligned} \tag{2.4.12}$$

iv)

$$\begin{aligned}\Gamma^0{}_{A0} &= \frac{1}{2}G^{00}\left(G_{0A,0}+G_{00,A}-G_{A0,0}\right)+\frac{1}{2}G^{0A}(\ldots)=0\,,\\ \Gamma^A{}_{00} &= \frac{1}{2}G^{A0}(\ldots)+\frac{1}{2}G^{AD}\left(G_{0d,0}+G_{0d,0}-G_{00,D}\right)=0\,,\\ \Gamma^0{}_{00} &= \frac{1}{2}G^{00}\left(G_{00,0}\right)=0\,. \end{aligned} \tag{2.4.13}$$

2.4.2 Tensor de Riemann en N.

Encontraremos ahora las componentes del tensor de Riemann $R^{\Delta}{}_{\Gamma\Omega\Pi}$ en la variedad N.

i) Comencemos calculando los índices latinos.

$$
\begin{aligned}
R^{D}{}_{CBA} &= \Gamma^{D}{}_{BC,A} - \Gamma^{D}{}_{AC,B} + \Gamma^{\Omega}{}_{BC}\,\Gamma^{D}{}_{B\Omega}\,, \\
&= \overline{R}^{D}{}_{CBA} + \Gamma^{0}{}_{BC}\,\Gamma^{D}{}_{A0} - \Gamma^{0}{}_{AC}\,\Gamma^{D}{}_{B0}\,, \\
&= \overline{R}^{D}{}_{CBA} + \left(\frac{3}{32}\varsigma\right)\varsigma^{-1}\left[\overline{G}_{BC}\,\delta^{D}_{A} - \overline{G}_{AC}\delta^{D}_{B}\right], \\
&= \overline{R}^{D}{}_{CBA} + \frac{3}{32}\left(\overline{G}_{BC}\,\delta^{D}_{A} - \overline{G}_{AC}\delta^{D}_{B}\right).
\end{aligned}
\tag{2.4.14}
$$

ii)

$$
\begin{aligned}
R^{0}{}_{CBA} &= \Gamma^{0}{}_{BC,A} - \Gamma^{0}{}_{AC,B} + \Gamma^{\Omega}{}_{BC}\,\Gamma^{0}{}_{A\Omega} - \Gamma^{\Omega}{}_{AC}\,\Gamma^{0}{}_{B\Omega}\,, \\
&= \left(\frac{3}{32}\varsigma\right)\left(\overline{G}_{BC,A} - \overline{G}_{AC,B}\right) + \Gamma^{0}{}_{BC}\,\Gamma^{0}{}_{A0} + \Gamma^{D}{}_{BC}\,\Gamma^{0}{}_{AD} - \\
&\quad - \Gamma^{0}{}_{AC}\,\Gamma^{0}{}_{B0} - \Gamma^{D}{}_{AC}\,\Gamma^{D}{}_{AC}\,\Gamma^{0}{}_{BD}\,, \\
&= \left(\frac{3}{32}\varsigma\right)\left[\overline{G}_{BC,A} - \overline{G}_{AC,B} + \overline{G}_{AD}\,\overline{\Gamma}^{D}{}_{BC} - \overline{G}_{BD}\,\overline{\Gamma}^{D}{}_{AC}\right], \\
&= \left(\frac{3}{32}\varsigma\right)\left[\overline{G}_{BC,A} - \overline{G}_{AC,B} + \overline{\Gamma}_{ABC} - \overline{\Gamma}_{BAC}\right], \\
&= \frac{3}{64}\varsigma\left[2\,\overline{G}_{BC,A} - 2\,\overline{G}_{AC,B} + \overline{G}_{BA,C} + \overline{G}_{CA,B} - \overline{G}_{BC,A} - \right. \\
&\quad \left. - \overline{G}_{AB,C} - \overline{G}_{CB,A} + \overline{G}_{AC,B}\right], \\
&= 0\,.
\end{aligned}
\tag{2.4.15}
$$

iii)

$$
\begin{aligned}
R^{0}{}_{0\Pi\Gamma} &= \Gamma^{0}{}_{\Pi\Gamma,0} - \Gamma^{0}{}_{0\Gamma,\Pi} + \Gamma^{\Omega}{}_{\Pi\Gamma}\,\Gamma^{0}{}_{0\Omega} - \Gamma^{\Omega}{}_{0\Gamma}\,\Gamma^{0}{}_{\Pi\Omega}\,, \\
&= \Gamma^{0}{}_{\Pi\Gamma,0} - \Gamma^{\Omega}{}_{0\Gamma}\,\Gamma^{0}{}_{\Pi\Omega}\,,
\end{aligned}
\tag{2.4.16}
$$

Veamos que pasa en la ecuación (2.4.16) para todos los valores posibles de Π. Cuando $\Pi = 0$ tenemos:

$$R^{0}{}_{0 0 \Gamma} = \Gamma^{0}{}_{0\Gamma,0} - \Gamma^{D}{}_{0\Gamma}\,\Gamma^{0}{}_{0D}\,.$$

Si $\Pi = B$ tenemos,

$$R^{0}{}_{0B0} = \Gamma^{0}{}_{B0,0} - \Gamma^{D}{}_{00}\,\Gamma^{0}{}_{BD} = 0\,,$$

y,

$$\begin{aligned} R^{0}{}_{0BC} &= \Gamma^{0}{}_{BC,0} - \Gamma^{D}{}_{0C}\,\Gamma^{0}{}_{BD}\,, \\ &= \frac{3}{32}\,\left(\varsigma\,\overline{G}_{BC}\right)_{,D} - \varsigma^{-1}\,\delta^{D}_{C}\,\frac{3}{32}\,\varsigma\,\overline{G}_{BD}\,, \\ &= \frac{3}{32}\,(\overline{G}_{BC} - \overline{G}_{BC}) = 0\,. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$R^{0}{}_{0\Pi\Gamma} = 0\,. \tag{2.4.17}$$

iv)

$$\begin{aligned} R^{0}{}_{A\Pi\Gamma} &= \Gamma^{0}{}_{\Pi\Gamma,A} - \Gamma^{0}{}_{a\Gamma,\Pi} - \Gamma^{\Omega}{}_{\Pi\Gamma}\,\Gamma^{0}{}_{A\Omega} - \Gamma^{\Omega}{}_{a\Gamma}\,\Gamma^{0}{}_{\Pi\Omega}\,, \\ &= \Gamma^{0}{}_{\Pi\Gamma,A} - \Gamma^{0}{}_{a\Gamma,\Pi} = \frac{3}{32}\,\varsigma\,\overline{G}_{AD}\,\Gamma^{D}{}_{\Pi\Gamma} - \Gamma^{D}{}_{A\Gamma}\,\Gamma^{0}{}_{\Pi D}\,. \end{aligned}$$

Tomando diferentes valores para Π tenemos,

$$R^{0}{}_{A00} = 0\,,$$

además,

$$R^{0}{}_{A0C} = -\frac{3}{32}\,\overline{G}_{AC} + \frac{3}{32}\,\varsigma\,\overline{G}_{AD}\,\varsigma^{-1}\,\delta^{D}_{C} = 0\,.$$

Por lo tanto,

$$R^{0}{}_{A0\Gamma} = 0\,.$$

Por otra parte,

$$R^{0}{}_{AB0} = \Gamma^{0}{}_{B0,A} - \Gamma^{0}{}_{A0,B} + \frac{3}{32}\,\varsigma\,\overline{G}_{AD}\,\varsigma^{-1}\delta^{D}_{B} - \frac{3}{32}\,\varsigma\,\overline{G}_{BD}\,\varsigma^{-1}\delta^{D}_{A} = 0\,.$$

Con los resultados anteriores se concluye que,

$$R^0{}_{\Lambda\Omega\Gamma} = 0\,. \tag{2.4.18}$$

$v)$

$$\begin{aligned} R^D{}_{0\Omega\Gamma} &= \Gamma^D{}_{\Omega\Gamma,0} - \Gamma^D{}_{0\Gamma,\Omega} + \Gamma^\Omega{}_{0\Gamma}\,\Gamma^D{}_{0\Omega} - \Gamma^\Omega{}_{0\Gamma}\,\Gamma^D{}_{0\Omega}\,, \\ &= 0\,. \end{aligned} \tag{2.4.19}$$

$vi)$

$$\begin{aligned} R^D{}_{0B\Gamma} &= \Gamma^D{}_{B\Gamma,0} - \Gamma^D{}_{0\Gamma,B} + \Gamma^\Omega{}_{B\Gamma}\,\Gamma^D{}_{0\Omega} - \Gamma^\Omega{}_{0\Gamma}\,\Gamma^D{}_{B\Omega}\,, \\ &= \Gamma^D{}_{B\Gamma,0} - \Gamma^D{}_{0\Gamma,B} + \Gamma^E{}_{B\Gamma}\,\Gamma^D{}_{0E} - \Gamma^E{}_{0\Gamma}\,\Gamma^D{}_{BE}\,, \end{aligned} \tag{2.4.20}$$

Tomando diferentes valores para Γ en (2.4.20) tenemos

$$\begin{aligned} R^D{}_{0B0} &= \left(\varsigma^{-1}\delta^D_B\right)_{,0} + \varsigma^{-1}\delta^E_B\,\Gamma^D{}_{0E}\,, \\ &= -\varsigma^{-2}\,\delta^D_B + \varsigma^{-2}\delta^D_B\,, \\ &= 0\,. \end{aligned} \tag{2.4.21}$$

Así mismo,

$$\begin{aligned} R_{0BC}{}^D &= \Gamma^D{}_{BC,0} - \left(\varsigma^{-1}\delta^D_C\right)_{,B} + \Gamma^E{}_{BC}\,\varsigma^{-1}\delta^D_E - \varsigma^{-1}\Gamma^D{}_{BC}\,, \\ &= \Gamma^D{}_{BC,0}\,. \end{aligned} \tag{2.4.22}$$

Desarrollemos ahora la ecuación (2.4.22) a partir de lo que se sabe de las secciones anteriores.

$$\Gamma^D{}_{BC,0} = \overline{\Gamma}^D{}_{BC,0} = (\overline{G}^{DE}\,\Gamma_{EBC})_{,0}\,.$$

Calculemos $\overline{G}^{AB}{}_{,0}$ a partir de su definición:

$$\begin{aligned} \overline{G}^{AB}{}_{,0} &= \left(\gamma_{il}\,\frac{\partial\varsigma^A}{\partial\gamma_{lm}}\,\gamma_{mn}\,\frac{\partial\varsigma^B}{\partial\gamma_{mi}}\right)_{,0}\,, \\ &= \frac{4}{3}\,\varsigma^{-1}\,\overline{G}^{AB} + \gamma_{il}\left(\frac{\partial\varsigma^A}{\partial\gamma_{lm}}\right)_{,0}\gamma_{mn}\,\frac{\partial\varsigma^B}{\partial\gamma_{ni}} + \frac{4}{3}\,\varsigma^{-1}\,\overline{G}^{AB} + \gamma_{il}\,\frac{\partial\varsigma^A}{\partial\gamma_{lm}}\,\gamma_{mn}\left(\frac{\partial\varsigma^B}{\partial\gamma_{ni}}\right)_{,0} \\ &= \frac{8}{3}\,\varsigma^{-1}\,\overline{G}^{AB} + \gamma_{il}\left(\frac{\partial\varsigma^A}{\partial\gamma_{lm}}\right)_{,0}\gamma_{mn}\,\frac{\partial\varsigma^B}{\partial\gamma_{ni}} + \gamma_{il}\,\frac{\partial\varsigma^A}{\partial\gamma_{lm}}\,\gamma_{mn}\left(\frac{\partial\varsigma^B}{\partial\gamma_{ni}}\right)_{,0}\,, \end{aligned} \tag{2.4.23}$$

Sin embargo,
$$\left(\frac{\partial \varsigma^A}{\partial \gamma_{lm}}\right)_{,0} = \frac{4}{3}\,\varsigma^{-1}\,\gamma_{sj}\,\frac{\partial^2 \varsigma^A}{\partial \gamma_{sj}\,\partial \gamma_{lm}}\,. \tag{2.4.24}$$

Con el objeto de encontrar una relación para la segunda parcial de (2.4.24), tomarenos la ecuación $\gamma_{ij}\,\dfrac{\partial \varsigma^A}{\partial \gamma_{ij}} = 0$ y la derivaremos respecto de γ_{kl} teniendo entonces la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial \gamma_{kl}}\,\frac{\partial \varsigma^A}{\partial \gamma_{ij}} + \gamma_{ij}\,\frac{\partial^2 \varsigma^A}{\partial \gamma_{ij}\,\partial \gamma_{kl}} \\ &= \frac{\partial \varsigma^A}{\partial \gamma_{kl}} + \gamma_{ij}\,\frac{\partial^2 \varsigma^A}{\partial \gamma_{ij}\,\partial \gamma_{kl}}\,. \end{aligned} \tag{2.4.25}$$

Por lo tanto,
$$\gamma_{st}\,\frac{\partial^2 \varsigma^A}{\partial \gamma_{st}\,\partial \gamma_{kl}} = -\frac{\partial \varsigma^A}{\partial \gamma_{kl}}\,. \tag{2.4.26}$$

Sustituyendo (2.4.26) en (2.4.24) obtenemos,
$$\left(\frac{\partial \varsigma^A}{\partial \gamma_{lm}}\right)_{,0} = -\frac{4}{3}\,\varsigma^{-1}\,\frac{\partial \varsigma^A}{\partial \gamma_{kl}}\,. \tag{2.4.27}$$

Insertando (2.4.27) en (2.4.23) se llega entonces a
$$\overline{G}^{AB}{}_{,0} = 0\,. \tag{2.4.28}$$

Por lo tanto,
$$\overline{\Gamma}^D{}_{BC,0} = 0\,. \tag{2.4.29}$$
y sustituyendo (2.4.29) en (2.4.22) concluimos que
$$R^D{}_{0BC} = 0\,. \tag{2.4.30}$$

vii) Finalmente encontramos:

$$\begin{aligned} R^D{}_{AB0} &= \Gamma^D{}_{B0,A} - \Gamma^D{}_{A0,B} + \Gamma^\Omega{}_{B0}\,\Gamma^D{}_{A\Omega} - \Gamma^\Omega{}_{A0}\,\Gamma^D{}_{B\Omega}\,, \\ &= \left(\varsigma^{-1}\,\delta^D_B\right)_{,A} - \left(\varsigma^{-1}\,\delta^D_A\right)_{,B} + \Gamma^E{}_{B0}\,\Gamma^D{}_{AE} - \Gamma^E{}_{A0}\,\Gamma^D{}_{BE}\,, \\ &= \varsigma^{-1}\,\delta^E_B\,\overline{\Gamma}^D{}_{AE} - \varsigma^{-1}\,\delta^E_A\,\overline{\Gamma}^D{}_{BE}\,, \\ &= \varsigma^{-1}\left(\overline{\Gamma}^D{}_{AB} - \overline{\Gamma}^D{}_{BA}\right) = 0\,. \end{aligned} \tag{2.4.31}$$

Resumamos los resultados encontrados hasta ahora para las conecciones afines y el tensor de Riemann en N:

$$\Gamma^C{}_{AB} = \overline{\Gamma}^C{}_{AB} ,$$

$$\Gamma^0{}_{AB} = \left(\frac{3}{32}\right) \varsigma \overline{G}_{AB} ,$$

$$\Gamma^B{}_{A0} = \varsigma^{-1} \delta^B_A , \tag{2.4.32}$$

$$\Gamma^0{}_{A0} = \Gamma^A{}_{00} = \Gamma^0{}_{00} = 0 ,$$

$$R_{ABC}{}^D = \overline{R}_{ABC}{}^D - \left(\frac{3}{32}\right) (\overline{G}_{AC}\delta^D_B - \overline{G}_{BC}\delta^D_A) ,$$

Los demás objetos, tanto conecciones como Riemann se anulan.

2.4.3 Tensor de Ricci y Escalar de Curvatura.

Construimos a continuación el tensor de Ricci en la variedad N definido de igual forma que en la variedad $\overline{\mathbf{N}}$.

$$\begin{aligned} R_{AB} &\equiv -R^\Gamma{}_{AB\Gamma} , \\ &= -\left(R^0{}_{AB0} + R^C{}_{ABC}\right) , \\ &= -\left(\overline{R}^C{}_{CAB} + \frac{3}{32}(\overline{G}_{AB}\delta^C_C - \overline{G}_{CB}\delta^C_A)\right) , \\ &= -\left(\overline{R}_{AB} + \frac{3}{8}\overline{G}_{AB}\right) , \\ &= \frac{3}{8}\overline{G}_{AB} . \end{aligned} \tag{2.4.33}$$

Además, las otras componentes serán de la forma,

$$\begin{aligned} R_{A0} &= -R^\Gamma{}_{0\Gamma A} , \\ &= -\left(R^0_{00A}{}^0 + R^C_{0CA}{}^A\right) , \\ &= 0 . \end{aligned} \tag{2.4.34}$$

La componente 00 también se anula:

$$
\begin{aligned}
R_{00} &= -R^{\Gamma}{}_{0\Gamma 0}\,, \\
&= -\left(R^{0}{}_{000} + R^{A}{}_{0A0}\right)\,, \\
&= 0\,.
\end{aligned}
\tag{2.4.35}
$$

Calculamos ahora el escalar de curvatura:

$$
\begin{aligned}
{}^{(6)}R &= G^{\Delta\Omega}\, R_{\Delta\Omega}\,, \\
&= G^{00}\, R_{00} + G^{AB}\, R_{AB} \\
&= \frac{32}{3}\varsigma^{-2}\,\overline{G}^{AB}\left(\frac{3}{8}\right)\overline{G}_{AB} \\
&= 20\,\varsigma^{-2}\,.
\end{aligned}
\tag{2.4.36}
$$

A diferencia de la variedad $\overline{\mathrm{N}}$, en este caso el tensor de Ricci no es proporcional al tensor métrico, por lo que no se trata de un espacio de Einstein. Sin embargo notemos que cumple una curiosa propiedad cuando se le ve como un espacio solución a las ecuaciones de Einstein. En este caso, al contruir el tensor de Einstein a partir de la métrica, obtenemos el tensor de Energía Momento, es decir, las propiedades que debe cumplir la materia para que se tenga tal geometría. Calculando la componente 00 de tal tensor observamos que es de la forma:$T_{00} = -\frac{1}{2}\, G_{00}\, R = 10\,\varsigma^{-2}$.

Esto querría decir que si interpretamos a la componente 00 del tensor $T_{\Omega\Delta}$ como una densidad de energía, ésta es inversamente proporcional al cuadrado de la coordenada ς y es ademas directamente proporcional al escalar de curvatura. Esto diría que si una *partícula* imaginaria se aproximara por una geodésica hacia la frontera de $\varsigma = 0$, cosa que sucede para toda geodésica como se verá má adelante, entonces no solo la curvatura del espacio tiende a infinito, sino que la densidad de energía del espacio también lo hace.

2.4.4 Geodésicas en N.

Analizaremos ahora las geodésicas en la variedad N. Denotaremos por s al parámetro de aquellas. Encontraremos las ecuaciones de Geodésicas y su relación con las correspondientes en la variedad $\overline{\mathrm{N}}$, con el objeto de poder escribir fácilmente la solución de la ecuación de geodésicas en la variedad N haciendo uso de las soluciones ya conocidas en $\overline{\mathrm{N}}$, y la relación entre ambas ecuaciones. Es necesario así mismo encontrar una relación funcional entre los parámetros $\bar{s}$ y s de las dos variedades.

La ecuación de geodésicas en N consiste en un sistema de seis ecuaciones diferenciales respecto de s para seis coordenadas independientes, a saber, ς^{Γ}. En este caso no tenemos restricción alguna con respecto a la coordenada ς como se tenía en el análisis hecho anteriormente para $\overline{\mathrm{N}}$.

La ecuación en general se escribe:

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{d^2\varsigma^\Gamma}{ds^2} + \Gamma^\Gamma{}_{A\Pi}\,\frac{d\varsigma^A}{ds}\,\frac{d\varsigma^\Pi}{ds}\,, \\
&= \frac{d^2\varsigma^\Gamma}{ds^2} + \Gamma^\Gamma{}_{00}\left(\frac{d\varsigma}{ds}\right) + \Gamma^\Gamma{}_{A0}\,\frac{d\varsigma}{ds}\,\frac{d\varsigma^A}{ds} + \\
&\quad + \Gamma^\Gamma{}_{A0}\,\frac{d\varsigma}{ds}\,\frac{d\varsigma^A}{ds} + \Gamma^\Gamma{}_{AB}\,\frac{d\varsigma^B}{ds}\,\frac{d\varsigma^A}{ds}\,.
\end{aligned}
$$

La ecuación para la coordenada tipo tiempo ς, es decir, cuando $\Gamma = 0$ es,

$$
0 = \frac{d^2\varsigma}{ds^2} + \left(\frac{3}{32}\right)\varsigma\,\overline{G}_{AB}\,\frac{d\varsigma^B}{ds}\,\frac{d\varsigma^A}{ds}\,. \tag{2.4.37}
$$

Con el objeto de encontrar una relación entre ambos parámetros, podemos llamar a la expresión

$$
\overline{G}_{AB}\,\frac{d\varsigma^B}{ds}\,\frac{d\varsigma^A}{ds} \equiv \left(\frac{d\overline{s}}{ds}\right)^2\,, \tag{2.4.38}
$$

que de alguna forma se puede interpretar como un elemento de línea sobre la variedad $\overline{\mathrm{N}}$ con respecto al parámetro de la variedad grande. Tenemos que (2.4.37) se puede reescribir como

$$
0 = \frac{d^2\varsigma}{ds^2} + \left(\frac{3}{32}\right)\varsigma\left(\frac{d\overline{s}}{ds}\right)^2\,.
$$

Para las demás coordenadas, $\Gamma = A$, la ecuacion de geodésicas se lee:

$$
0 = \frac{d^2\varsigma^A}{ds^2} + \overline{\Gamma}^A{}_{BC}\,\frac{d\varsigma^B}{ds}\,\frac{d\varsigma^C}{ds} + 2\,\varsigma^{-1}\,\frac{d\varsigma}{ds}\,\frac{d\varsigma^A}{ds}\,. \tag{2.4.39}
$$

Derivando (2.4.38) respecto del parámetro s, tenemos,

$$
2\,\frac{d\overline{s}}{ds}\,\frac{d^2\overline{s}}{ds^2} = \frac{d}{ds}\overline{G}_{AB}\,\frac{d\varsigma^B}{ds}\,\frac{d\varsigma^A}{ds} + \overline{G}_{AB}\left(\frac{d^2\varsigma^B}{ds^2}\,\frac{d\varsigma^A}{ds} + \frac{d\varsigma^B}{ds}\,\frac{d^2\varsigma^A}{ds^2}\right)\,. \tag{2.4.40}
$$

Multiplicando la ecuación (2.4.39) por $\overline{G}_{AB}\,\frac{d\varsigma^D}{ds}$ tenemos,

$$
0 = \overline{G}_{AB}\,\frac{d^2\varsigma^A}{ds^2}\,\frac{d\varsigma^B}{ds} + \overline{\Gamma}^a{}_{DC}\,\overline{G}_{AB}\,\frac{d\varsigma^C}{ds}\,\frac{d\varsigma^B}{ds}\,\frac{d\varsigma^D}{ds} + 2\,\varsigma^{-1}\,\frac{d\varsigma}{ds}\,\overline{G}_{AB}\,\frac{d\varsigma^A}{ds}\,\frac{d\varsigma^B}{ds}\,. \tag{2.4.41}
$$

Utilizando (2.4.40) en (2.4.41) obtenemos:

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{d\overline{s}}{ds}\,\frac{d^2\overline{s}}{ds^2} - \frac{1}{2}\,\frac{d}{ds}\overline{G}_{AB}\,\frac{d\varsigma^B}{ds}\,\frac{d\varsigma^A}{ds} + \Gamma_{DCB}\,\frac{d\varsigma^C}{ds}\,\frac{d\varsigma^B}{ds}\,\frac{d\varsigma^D}{ds} + 2\,\varsigma^{-1}\,\frac{d\varsigma}{ds}\left(\frac{d\overline{s}}{ds}\right)^2\,, \\
&= \frac{d\overline{s}}{ds}\,\frac{d^2\overline{s}}{ds^2} - \frac{1}{2}(\overline{G}_{DC,B} - \overline{G}_{DC,B})\,\frac{d\varsigma^C}{ds}\,\frac{d\varsigma^B}{ds}\,\frac{d\varsigma^D}{ds} + 2\,\varsigma^{-1}\,\frac{d\varsigma}{ds}\left(\frac{d\overline{s}}{ds}\right)^2\,,
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$\frac{d^2\bar{s}}{ds^2} = -\frac{2}{\varsigma}\frac{d\varsigma}{ds}\frac{d\bar{s}}{ds}. \tag{2.4.42}$$

Integrando (2.4.42)

$$\ln\left(\frac{d\bar{s}}{ds}\right) = -2\ln\varsigma + \ln\alpha,$$

$$\frac{d\bar{s}}{ds} = \frac{\alpha}{\varsigma^2}, \tag{2.4.43}$$

donde α es una constante de integración.

Notemos que si $\varsigma \mapsto 0$ entonces $\frac{d\bar{s}}{ds} \mapsto \infty$. Podemos entonces relacionar a las derivadas respecto al parámetro s con las derivadas respecto a $\bar{s}$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\frac{d\varsigma^A}{d\bar{s}} &= \frac{d\varsigma^A}{ds}\frac{ds}{d\bar{s}},\\ &= \frac{\varsigma^2}{\alpha}\frac{d\varsigma^A}{ds}.\end{aligned} \tag{2.4.44}$$

La segunda derivada está dada entonces por,

$$\begin{aligned}\frac{d^2\varsigma^A}{ds^2} &= \frac{d}{ds}\left(\frac{\varsigma^2}{\alpha}\frac{d\varsigma^A}{ds}\right),\\ &= -\frac{2\alpha}{\varsigma^3}\frac{d\varsigma}{ds}\frac{d\varsigma^A}{d\bar{s}} + \frac{\alpha}{\varsigma^2}\frac{d}{ds}\left(\frac{d\varsigma^A}{d\bar{s}}\right)\\ &= -\frac{2\alpha^2}{\varsigma^5}\frac{d\varsigma}{d\bar{s}}\frac{d\varsigma^A}{d\bar{s}} + \frac{\alpha^2}{\varsigma^4}\frac{d^2\varsigma^A}{d\bar{s}^2}.\end{aligned} \tag{2.4.45}$$

insertando en (2.4.39) tenemos:

$$\begin{aligned}0 &= \frac{\alpha^2}{\varsigma^4}\frac{d^2\varsigma^A}{d\bar{s}^2} - \frac{2\alpha^2}{\varsigma^5}\frac{d\varsigma}{d\bar{s}}\frac{d\varsigma^A}{d\bar{s}} + \frac{\alpha^2}{\varsigma^4}\bar{\Gamma}^A{}_{BC}\frac{d\varsigma^B}{d\bar{s}}\frac{d\varsigma^C}{d\bar{s}} - \frac{2\alpha^2}{\varsigma^5}\frac{d\varsigma}{d\bar{s}}\frac{d\varsigma^A}{d\bar{s}},\\ &= \frac{\alpha^2}{\varsigma^4}\left(\frac{d^2\varsigma^A}{d\bar{s}^2} + \bar{\Gamma}^A{}_{BC}\frac{d\varsigma^B}{d\bar{s}}\frac{d\varsigma^C}{d\bar{s}}\right).\end{aligned} \tag{2.4.46}$$

Como se ve, se recupera la ecuación de geodésicas en la variedad $\overline{\mathbf{N}}$. Esto significa que si las componentes ς^A del punto γ sobre la variedad $\mathbf{N}$ satisfacen la ecuación de geodésicas en $\overline{\mathbf{N}}$ y los parámetros están relacionados por la ecuación (2.4.43), entonces esas componentes ς^A también satisfarán la ecuación de geodésicas en $\mathbf{N}$ (2.4.39).

Veamos ahora como se ha transformado la ecuación para la componente ς despues de las relaciones que hemos encontrado. Sustituyendo (2.4.43) en (2.4.37) tenemos,

$$\frac{d^2\varsigma}{ds^2} + \left(\frac{3}{32}\right) \varsigma\, \overline{G}_{AB} \frac{d\varsigma^A}{ds} \frac{d\varsigma^B}{ds} = 0 \,,$$

$$\frac{d^2\varsigma}{ds^2} + \frac{3}{32} \frac{\alpha^2}{\varsigma^3} = 0 \,. \tag{2.4.47}$$

Esta expresión es directamnete una ecuación para la coordenada ς en la que se ha quitado toda dependencia en las demas coordenadas, por lo que procederemos a integrarla. Definiendo $k = \sqrt{\frac{3}{32}}$ se tiene,

$$\frac{d^2\varsigma}{ds^2} + \frac{k^2\,\alpha^2}{\varsigma^3} = 0 \,, \tag{2.4.48}$$

multiplicando por $\frac{d\varsigma}{ds}$ e integrando, donde denotaremos $\dot{\varsigma} \equiv \frac{d\varsigma}{ds}$,

$$\ddot{\varsigma}\,\dot{\varsigma} + k^2\,\alpha^2 \frac{\dot{\varsigma}}{\varsigma^3} = 0 \,,$$

$$\frac{1}{2}\,(\dot{\varsigma}^2) + k^2\,\alpha^2 \frac{\dot{\varsigma}}{\varsigma^3} = 0 \,,$$

$$\frac{1}{2}\dot{\varsigma}^2 - \frac{k^2\alpha^2}{2\varsigma^2} = \delta \,,$$

donde δ es una constante de integración. Por lo tanto,

$$\dot{\varsigma}^2 = \frac{k^2\alpha^2}{\varsigma^2} + 2\,\delta \,,$$

$$\dot{\varsigma} = \pm\sqrt{\frac{k^2\alpha^2}{\varsigma^2} - \beta} \,, \tag{2.4.48}$$

con β otra constante.

Si escribimos el *elemento de linea* de la forma:

$$G_{\Delta\Omega} \frac{d\varsigma^\Delta}{ds} \frac{d\varsigma^\Omega}{ds} = G_{00} \frac{d\varsigma}{ds} \frac{d\varsigma}{ds} + \overline{G}_{AB}\, k^2\varsigma^2 \frac{d\varsigma^A}{ds} \frac{d\varsigma^B}{ds}$$

$$= \dot{\varsigma}^2 + k^2\varsigma^2 \left(\frac{d\overline{s}}{ds}\right)^2 \,,$$

$$= -\frac{k^2\alpha^2}{\varsigma^2} + \beta + \frac{k^2\varsigma^2\alpha^2}{\varsigma^4} \,,$$

$$= \beta \,. \tag{2.4.49}$$

Por lo tanto, el signo de β determina el carácter de la geodésica. Si $\beta = 0$, la geodésica es nula. Si $\beta = 1$ será espacial y finalmente, si $\beta = -1$ la geodésica es temporal.

Analizamos cada uno de los casos anteriores encontrando explícitamente la coordenada ς y la relación entre los parámetros.

i) $\beta = -1$, Geodésica tipo tiempo, con condiciones de frontera dadas por $\varsigma(0) = 0$ y $\bar{s}(\infty) = 0$. En este caso, la ecuación (2.4.48) toma la forma:

$$\frac{d\varsigma}{ds} = \pm\sqrt{\frac{k^2\alpha^2}{\varsigma^2} + 1}\,,$$

por lo que,

$$ds = \frac{\varsigma\, d\varsigma}{\pm\sqrt{k^2\alpha^2 + \varsigma^2}}\,.$$

Integrando,

$$s = \sqrt{k^2\alpha^2 + \varsigma^2} - \sqrt{k^2\alpha^2}\,,$$

por lo que despejando a ς,

$$\varsigma^2 = (s + k\alpha)^2 - k^2\alpha^2\,,$$

$$\varsigma = \sqrt{s\,(s + 2\,k\,\alpha)} \tag{2.4.50}$$

Sustituyendo (2.4.50) en (2.4.42) tenemos,

$$\frac{d\bar{s}}{ds} = \frac{\alpha}{\varsigma^2}\,,$$

$$= \frac{\alpha}{s\,(s + 2\,k\,\alpha)}$$

de donde

$$d\bar{s} = \alpha\,\frac{ds}{s(s + 2\,k\,\alpha)}\,,$$

integrando,

$$\bar{s}(s) = \frac{1}{2k}\ln\left(\frac{s}{2\,k\,\alpha + s}\right)\,. \tag{2.2.51}$$

Los rangos para cada una de las variables son los siguientes,

$$0 < s < \infty\,,$$

$$-\infty \leq \bar{s} < 0\,, \tag{2.4.52}$$

$$0 < \varsigma < \infty\,.$$

De (2.4.51) podemos despejar s de la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
2k\bar{s} &= \ln\frac{s}{2k\alpha+s}, \\
\frac{s}{2k\alpha+s} &= e^{2k\bar{s}}, \\
s\left(1-e^{2k\bar{s}}\right) &= 2k\alpha e^{2k\bar{s}}, \\
s &= \alpha\,\frac{2k\,e^{2k\bar{s}}}{1-e^{2k\bar{s}}}, \\
s &= -2k\alpha\,\frac{e^{k\bar{s}}}{e^{k\bar{s}}-e^{-k\bar{s}}},
\end{aligned}
$$

por lo que,

$$
s = -\alpha k\,e^{k\bar{s}}\operatorname{csch}(k\bar{s}). \tag{2.4.53}
$$

Sustituyendo a (2.4.53) en (2.4.50) podemos encontrar $\varsigma(\bar{s})$:

$$
\begin{aligned}
\varsigma(\bar{s}) &= \left[s(\bar{s})(2k\alpha+s\bar{s})\right]^{1/2}, \\
&= \left[-\alpha k\,e^{k\bar{s}}\operatorname{csch}(k\bar{s})\left(2k\alpha-k\alpha\,e^{k\bar{s}}\operatorname{csch}(k\bar{s})\right)\right]^{1/2}, \\
&= \left[\frac{2\alpha k\,e^{2k\bar{s}}}{1-e^{2k\bar{s}}}\left(2k\alpha+\frac{2k\alpha\,e^{2k\bar{s}}}{1-e^{2k\bar{s}}}\right)\right]^{1/2}, \\
&= 2k\alpha\,\frac{e^{k\bar{s}}}{1-e^{2k\bar{s}}}, \\
&= \alpha\operatorname{csch}(k\bar{s}).
\end{aligned} \tag{2.4.54}
$$

Notemos que cuando $s = 0$, entonces $\varsigma = 0$. Esto significa que el determinante de γ_{ij} se anula y la 3-geometría deja de ser válida. El escalar de curvatura de la variedad N tiende a ∞ y por lo tanto se trata de una singularidad en tal variedad. A estos puntos se les asocia con una frontera de la variedad por lo que se sugiere de las soluciones obtenidas para la geodésica que ésta toca la frontera en $s = 0$. Cabe mencionar que esta *singularidad* puede no ser esencial y deberse únicamente a la elección particular de coordenadas, a saberse, de la coordenada *temporal* ς. Sin embargo, se conocen casos concretos dentro de las soluciones a las ecuaciones de Einstein como la solución de FRW, para la que se aplica perfectamente el formalismo equi expuesto, en la que se sabe que existe una singularidad física en el origen.

De acuerdo a la ecuación (2.3.43), la matriz γ puede ser escrita como

$$
\begin{aligned}
\gamma(s) &= \gamma^{1/3}\,\widetilde{\mathbf{M}}\,\mathrm{e}^{\mathbf{N}\bar{s}}\,\mathbf{M}\,, \\
&= (k\varsigma)^{4/3}\,\widetilde{\mathbf{M}}\,\mathrm{e}^{\mathbf{N}\bar{s}}\,\mathbf{M}\,. \qquad (2.4.55)
\end{aligned}
$$

donde se pide que M tenga determinante uno.

Por lo tanto, la geodésica en $\mathbf{N}$ puede expresarse en términos de las geodésicas en $\overline{\mathbf{N}}$ de la siguiente manera:

$$\gamma(s) = \left[-k^2\,\alpha\,\mathrm{csch}\,(k\bar{s})\right]^{4/3}\widetilde{\mathbf{M}}\,\mathrm{e}^{\mathbf{N}\bar{s}}\,\mathbf{M}\,. \qquad (2.4.56)$$

ii) $\beta = 0$ Geodésica Nula. En este caso se tiene,

$$\frac{d\varsigma}{ds} = \sqrt{\frac{k^2\alpha^2}{\varsigma^2}}\,,$$

$$\varsigma\,d\varsigma = k^2\,\alpha^2\,ds\,,$$

$$\frac{\varsigma^2}{2} = k^2\,\alpha^2\,s + a\,,$$

eligiendo $a = 0$ y $2k\alpha = 1$,

$$\varsigma = \sqrt{s}\,.$$

La relación entre los parámetros estará dada por,

$$\frac{d\bar{s}}{ds} = \frac{\alpha}{\varsigma^2}\,,$$

$$d\bar{s} = \alpha\,\frac{ds}{s}\,,$$

$$\bar{s} = \alpha\,\ln s\,,$$

$$\bar{s} = \frac{1}{2k}\,\ln s\,,$$

por lo que

$$s = e^{2k\bar{s}}\,. \qquad (2.4.57)$$

De aquí se concluye que

$$\varsigma(\bar{s}) = e^{k\bar{s}}\,. \qquad (2.4.58)$$

El rango de las variables es entonces:

$$
\begin{aligned}
0 &\leq s < \infty\,,\\
-\infty &\leq \bar{s} < \infty\,,\\
0 &< \varsigma < \infty\,.
\end{aligned}
\tag{2.4.59}
$$

La geodésica toca nuevamente la frontera en $s = 0$.

Esta tendra además la forma:

$$
\gamma(s) = (ke^{k\bar{s}})^{4/3}\,\widetilde{\mathbf{M}}\,\mathbf{e}^{\mathbf{N}\bar{s}}\,\mathbf{M}\,. \tag{2.4.60}
$$

iii) $\beta = 1$. Geodésicas tipo espacio. En este caso, deben tomarse ambas raices de la ecuación (2.4.48) y habrá un punto de retorno en $\varsigma = k\alpha$. Eligiendo como condiciones de frontera $\varsigma(0) = 0$, $\bar{s}(k\alpha) = 0$, $s \geq 0$, se tiene:

$$
\frac{d\varsigma}{ds} = \sqrt{\frac{k^2\alpha^2}{\varsigma^2} - 1}\,,
$$

$$
ds = \frac{\varsigma\, d\varsigma}{\sqrt{k^2\alpha^2 - \varsigma^2}}\,.
$$

de donde

$$
s = \mp\sqrt{k^2\alpha^2 - \varsigma^2} + k\,\alpha\,. \tag{2.4.61}
$$

Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
\varsigma^2 &= k^2\alpha^2 - (s - k\,\alpha)^2\,,\\
&= -s^2 + 2\,s\,k\,\alpha\,,\\
\varsigma &= \sqrt{s(2k\alpha - s)}\,.
\end{aligned}
\tag{2.4.62}
$$

Por lo tanto,

$$
\frac{d\bar{s}}{ds} = \frac{\alpha}{s(2k\alpha - s)}\,,
$$

$$
d\bar{s} = \frac{\alpha\, ds}{s(2k\alpha - s)}\,. \tag{2.4.63}
$$

que se integra

$$
\bar{s}(s) = \frac{1}{2k}\ln\left(\frac{s}{2k\alpha - s}\right)\,. \tag{2.4.64}
$$

despejando s de (2.4.63) y sustituyendo en (2.4.62) se llega a que

$$\varsigma(\bar{s}) = k\alpha \operatorname{sech}(k\bar{s}) . \tag{2.4.65}$$

La geodésica se escribe entonces

$$\gamma(s) = \left[k^2 \alpha \operatorname{sech}(k\bar{s})\right]^{4/3} \widetilde{\mathbf{M}} \, \mathbf{e}^{\mathbf{N}\bar{s}} \, \mathbf{M} . \tag{2.4.66}$$

El rango de las variables es entonces,

$$\begin{aligned} 0 < s \leq 2k\alpha , \\ -\infty \leq \bar{s} \leq \infty , \\ 0 < \varsigma \leq k\alpha . \end{aligned} \tag{2.4.67}$$

La geodésica toca a la frontera en ambos límites ($s = 0,\ 2k$).

Podemos ahora encontrar una expresión para la distancia geodésica entre dos matrices γ_1 y γ_2 en N. La geometría de N puede ser escrita de acuerdo a la ecuacion (2.4.49) como

$$ds^2 = -d\varsigma^2 + \varsigma^2 \, d\bar{s}^2 , \tag{2.4.68}$$

Si ahora introducimos las variables

$$\begin{aligned} t = \varsigma \cosh k\bar{s} , \\ x = \varsigma \sinh k\bar{s} , \end{aligned} \tag{2.4.69}$$

la ecuación (2.4.68) se puede escribir entonces como

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 , \tag{2.4.70}$$

que es justamente el elemento de linea de un espacio bidimensional de Minkowski. Por lo tanto la distancia será de la forma

$$\begin{aligned} \sigma(\gamma_1, \gamma_2) \equiv \frac{1}{2}(s_{12}) &= -\frac{1}{2}(t_1 - t_2)^2 + \frac{1}{2}(x_1 - x_2)^2 , \\ &= \frac{1}{2}(2\varsigma_1 \varsigma_2 \cosh k\bar{s}_{12} - \varsigma_1{}^2 - \varsigma_2{}^2) , \\ &= \left(\frac{16}{3}\right) \left\{ 2(\gamma_1 \gamma_2)^{1/4} \cosh\left[\left(\frac{3}{32}\right)^{1/2} \bar{s}_{12}\right] - \gamma_1{}^{1/2} - \gamma_2{}^{1/2} \right\} , \end{aligned} \tag{2.4.71}$$

donde $\bar{s}_{12}$ está dada por (2.3.47).

Hemos estudiado la geometría de la variedad N así como de la $\overline{\mathrm{N}}$ encontrandose que esta última es un espacio de Einstein de curvatura constante. Se encontró que $\overline{\mathrm{N}}$ es una variedad geodésicamente completa, mientras que la variedad grande parece no serlo, puesto que las geodésicas, ya sean tipo espacio, tiempo o nulas, se aproximan inevitablemente a la frontera. Este hecho se puede interpretar como una sugerencia que la evolución de una 3-geometría acabaría en una singularidad. Sin embargo, debemos recordar que ambas variedades son espacios hasta ahora de dimensión finita (5 y 6 respectivamente). Tomar en cuenta el hecho que cada γ_{ij} es en realidad una función de la variedad a los reales, trae grandas dificultades a la teoría. Como primer punto pudemos señalar el hecho que la variedad, formada por las $\gamma_{ij}(x)$ será ahora de dimensión infinita, puesto que incluso el ejemplo más simple de espacios de funciones (por ejemplo L^2), es de dimensión infinita (contable en ese caso, pero aun infinita).

Como se mencionó en el capítulo uno, al espacio donde a cada punto se le asocia una 3-geometría, se le conoce como Superespació. Es natural entonces tomar a este superespacio como la generalización de la variedad N a *dimensión infinita.* Las geodésicas en N se pueden pensar como generalizables a las geodésicas en el Superespacio y que estas correspondan precisamente a la evolución de las 3-geometrias que, como se vió en el capitulo 1, generan a un espacio-tiempo solución a las ecuaciones de Einstein. Suponer esta generalización nos permite entonces especular en torno al hecho que la evolución en general de las 3-geometrias esten destinadas a terminar en una singularidad del espacio-tiempo (al identificarse aquellas con la frontera de N).

Es necesario recordar sin embargo, la discusión del final del capítulo 1 en el sentido que la *trayectoria* generadora de un espacio tiempo en el Superespacio no es necesariamente una curva parametrizada por un real. Se demostró que en realidad de trata de una subvariedad del superespacio con dimensión infinita (el número de posibles foliaciones para el espacio-tiempo dado).

Con el objeto de aclarar la analogia entre la mecánica clasica de partículas y la dinámica de las 3-geometrias, analizaremos en el siguiente capítulo la formulación dinámica para ambos casos dentro de la teoría de Hamilton-Jacobi.

3.1 Introducción.

En los dos capítulos anteriores hemos introducido la formulación ADM para la Relatividad General, en donde se hizo mención al carácter dinámico de la teoría vista como evolución de 3-geometrias (Geometrodinámica). Se llegó a una expresión para la constricción Hamiltoniana que en forma se asemeja a la de la partícula libre relativista en un espacio curvo. En el capítulo 2 se tomó como punto de partida la forma de la métrica que aparece en el Hamiltoniano con el objeto de estudiar la geometría inducida por ésta y las geodésicas en tal espacio. Quedó abierta la pregunta de en qué forma puede pensarse que las geodésicas de la Supermétrica, generalizadas al Superespacio, se pueden relacionar con la evolución de las 3-geometrias en aquel. Es decir ¿son las soluciones de las ecuaciones de Einstein las geodésicas en el Superespacio?

Trataremos en este capítulo de presentar argumentos que hagan plausible una respuesta afirmativa a esta pregunta. Para tal cosa necesitamos en primera instancia hacer un análisis un poco más detallado del contenido dinámico de la formulación Hamiltoniana.

Posteriormente se presentará el tratamiento de la Geometrodinámica *a la* Hamilton-Jacobi. Será a traves de este formalismo, en donde la analogia con la dinámica de partículas es directa, que se hará la conección entre geodésicas y ecuaciónes de Hamilton mas clara. El formalismo de Hamilton Jacobi es además, dentro de las formulaciónes de las teorias clásicas, aquella que permite con mayor facilidad hacer el *salto* a la teoría cuantica, por lo menos en lo que a su aproximación semiclásica se refiere. Se hara mención entonces de la versión cuántica de la Geometrodinámica y del paso de ésta de regreso a la teoría clásica.

Finalmente concluiremos el capítulo con una exposición formal del Superespacio y su estructura matemática con el objeto de redondear el estudio de éste desde varios puntos de vista diferentes.

3.2 Dinámica de Partículas y Geometrodinámica

En el estudio de la mecánica de partículas, la entidad dinámica relevante es precisamente la partícula. La propiedad de ésta que es objeto de estudio es su posición en el espacio-tiempo. La descripción de la posición de la partícula se hace con la especificación de cuatro coordenadas en el espacio-tiempo $x^\lambda(\tau)$. Dar un valor numérico a las cuatro coordenadas significa marcar un *evento* y reciprocamente, a cada evento le corresponden cuatro coordenadas (distintas para diferentes eventos). Dado que existe esta correspondencia entre coordenadas (en una 4-variedad) y eventos en el espacio-tiempo (para un sistema de referencia), se puede afirmar que la particula *vive* en la 4-variedad con coordenadas x^λ. La historia de la partícula en el espacio-tiempo, está dada por la curva en la 4-variedad $x^\lambda(\tau)$. Esta puede verse como una sucesión de eventos *pegados* que forman a la historia.

Para la Geometrodinámica podemos hacer una descripción similar. En este caso la entidad dinámica es el espacio (3-dimensional). La propiedad que interesa conocer de éste es su geometría, por lo que a cada geometría del espacio se le asocia una 3-variedad Riemanniana con metrica positiva definida (en realidad se le asocia todas aquellas variedades (m, γ_{ij}) que describan la misma geometría). A todas estas variedades con la misma geometría es a lo que se denomina 3-geometría ${}^3\mathcal{G}$. Este es el equivalente de un evento para una partícula. El espacio en el que vive este evento (3-geometría) es el Superespacio. La historia de las 3-geometrias es una 4-geometría, es decir, el espacio-tiempo. Este es entonces, al igual que la historia de una partícula, la sucesión de 3-geometrias pegadas entre ellas.

En el caso de una partícula, las propiedades geométricas de la 4-variedad en la que vive determinan en gran parte el comportamiento dinámico de aquella, determinando la trayectoria (geodésica) que seguirá sobre la variedad. Para la geometrodinámica surgen dos preguntas inmediatas: ¿Que estructura tiene el Superespacio? , es decir, ¿es una variedad?, y ¿determina la estructura del superespacio a la dinámica de las 3-geometrias? Dejaremos estas preguntas para el final del capítulo.

Seguiremos ahora para la dinámica de partículas las ideas que conectan las diferentes formulaciones, a saber, la Lagrangiana, Hamiltoniana y la de Hamilton-Jacobi. El camino más directo (o desde el punto de vista estético, más agradable) para llegar a la formulación Lagrangiana consiste en postular un principio variacional. Este procedimiento consiste en afirmar que las trayectorias de las partículas en el espacio-tiempo (o bien de las *coordenadas generalizadas* en el espacio de configuraciones) son aquellas que hacen que la Acción a lo largo de ellas sea un extremal.

La acción es por lo general la integral de camino de una función escalar a lo largo de la trayectoria. La función escalar o función Lagrangiana puede depender de las coordenadas q^μ (coordenadas sobre la variedad de configuración donde se puede incluir al tiempo como otra coordenada más [15]) y de las velocidades respecto a un parámetro ajeno. La acción es una funcional pues depende de la trayectoria en el espacio de configuraciones; a cada trayectoria la asigna un número real. Pedir que dicha integral sea un extremal implica que a lo largo de la trayectoria se cumplan ciertas relaciones entre las derivadas de la función Lagrangiana, es decir, implica un sistema de n (el entero n es la dimensión de la variedad de configuración) ecuaciones diferenciales para las funciones $q^\mu(r)$ de segundo orden en el parámetro r. El que sean de segundo orden es una necesidad si se quiere que la formulación coincida con la dinámica de Newton en la que se sabe, como postulado, que la dinámica de las partículas está totalmente determinada por relaciones de a lo más segundo orden en las derivadas (es decir, no entran terceras derivadas).

Este sistema de ecuaciones diferenciales, conocidas como de Euler-Lagrange, determina totalmente la evolución dinámica del sistema. Las ecuaciones de Euler-Lagrange tienen propiedades interesantes, como la invariancia de forma ante cambio de coordenadas [16]. En particular, se pueden reescribir en la llamada Forma Canonica, para lo cual se intruducen n nuevas variables (los momenta) y se realiza una transformación de Legendre entre las velocidades y los momenta, definiendose así una nueva función escalar que juega un papel similar a la Lagrangiana para definir las ecuaciones de movimiento. La nueva función llamada Hamiltoniana es una función escalar pero está definida sobre otro espacio diferente al de configuraciones. Este nuevo espacio tiene el doble de dimensiones que el de configuraciónes (es una variedad de dim=2n) y tiene como coordenadas tanto a las coordenadas originales q^μ como a los momenta conjugados p_ν. Las ecuaciones de Euler se reescriben en este espacio de fases como un sistema de 2n ecuaciones de primer orden en las derivadas respecto al parámetro. Estas ecuaciones, llamadas de Hamilton, son totalmente equivalentes a las de Euler-Lagrange y son además derivables de un principio variacional. Este principio es similar al original en el sentido de que las trayectorias *reales* son tambien extremales de una integral de Acción, pero ahora la función Lagrangiana está definida en el espacio fase y la trayectoria extremal está igualmente en dicho espacio. Las ecuaciones de Euler-Lagrange para tal Lagrangiana son precisamente las ecuaciones de Hamilton.

Veamos ahora la conección con la teoría de Hamilton-Jacobi. Existen varias formas de introducir tal teoría, pero la más conveninete para nuestros propósitos de ejemplificar la conección con las demás formulaciones es introducir la idea de **Función Distancia Geodésica.**

Supongamos que tenemos una solución a las ecuaciones de Euler-Lagrange donde la solución particular depende de la posición inicial q_0^μ y de las velocidades iniciales $\dot{q}_0^\nu$. Supongamos además que la solución pasa por el punto P_f con coordenadas q_f^μ. La integral de acción a la largo de la trayectoria extremal,

$$S = \int_{P_i}^{P_f} L(q^\mu, \dot{q}^\mu)\, d\tau\,, \tag{3.2.1}$$

será función de los dos puntos extremos. Tomando al punto inicial como fijo, la integral (3.2.1) es función unicamente del punto final $S = S(P_f)$. Nótese que ya no se trata de una funcional, puesto que ya se conoce (en principio) la trayectoria sobre la que se está integrando, a saber, sobre la solución a las ecuaciones de Euler. A esta función se la conoce con el nombre de Función Distancia Geodésica. Consideremos ahora el valor de la función para puntos extremos cercanos al punto P_f. Denotaremos por (t_0, x_0) las coordenadas del punto P_i y por (t, x) las de P_f (tomaremos el caso unidimensional y $\tau = t$ para ilustrar la idea básica). La variación de la distancia geodésica o fase geométrica toma la siguiente forma al hacerse una traslación de (x,t) a $(x + \Delta x, t + \Delta t)$:

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int_{x_0,t_0}^{x+\Delta x, t+\Delta t} L(x,\dot{x},t)\, dt - \int_{x_0,t_0}^{x,t} L(x,\dot{x},t)\, dt\,, \\
&= L\,\delta t + \int_{x_0,t_0}^{x+\Delta x, t} \delta L(x,\dot{x},t)\, dt\,, \\
&= L\,\delta t + \int_{x_0,t_0}^{x+\Delta x, t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\, \delta \dot{x} + \frac{\partial L}{\partial x}\, \delta x \right) dt\,, \\
&= L\delta t + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\, \Delta x + \int_{x_0,t_0}^{x+\Delta x, t} \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \delta x\, dt\,.
\end{aligned}$$

El término entre paréntesis se anula por tratarse de trayectorias extremales, y el factor Δx tiene la forma $\Delta x = \delta x - \dot{x}\,\delta t$. Por lo tanto la variación de la fase geométrica será,

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\,\delta x - \left(\dot{x}\,\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - L\right)\delta t\,,$$

$$= p\,\delta x - E\,\delta t\,. \tag{3.2.2}$$

con lo que podemos concluir que las variables dinámicas momento y energía están relacionadas con la distancia geodésica a través de las relaciones:

$$\frac{\delta S}{\delta x} = p\,,$$

$$\frac{\delta S}{\delta t} = -E\,. \tag{3.2.3}$$

Este resultado se puede generalizar cuando se toman incrementos infinitesimales de manera que se tenga,

$$\frac{\partial S}{\partial x} = p \quad \text{y} \quad \frac{\partial S}{\partial t} = -E\,. \tag{3.2.3}$$

En conclusión, los momenta canónicamente conjugados a las coordenadas generalizadas corresponden a las derivadas parciales de S respecto a las coordenadas, incluso en el caso en que el tiempo sea una coordenada más puesto que, como se vio en el capítulo 1, el momento conjugado correspondiente a t es igual a $-E$.

Asociado al sistema dinámico en estudio existe una función Hamiltoniana H, o su equivalente en el caso en que la teoría tenga constricciones. Dicha función relaciona en terminos generales a las coordenadas y momenta: $H = H(q^{\mu}, p_{\mu})$. Si reemplazamos a los momenta por las parciales correspondientes según la ecuacion (3.2.3) obtenemos una ecuacion diferencial parcial para la función S de la forma:

$$H\left(q^{\mu}, \frac{\partial S}{\partial q^{\mu}}\right) = 0\,. \tag{3.2.4}$$

Esta es la ecuación de **Hamilton-Jacobi**.

Hemos visto hasta ahora que asociado a un problema dinámico que puede ser expresado a través de un principio variacional existe una función de todas las coordenadas que satisface una ecuación diferencial parcial de primer orden en las derivadas (pero que en general es no-lineal). La ecuación de Hamilton-Jacobi se relaciona por su parte directamente con las ecuaciones de Hamilton a través de la teoría de ecuaciones parciales de primer orden [17] que afirma que cada ecuacion del tipo de (3.2.4) tiene asociada un sistema de ecuaciones ordinarias que en el caso de la función geodésica coinciden precisamente con las ecuaciones de Hamilton.

La trayectoria solución del problema $q^{\mu}(\tau)$ se puede encontrar a partir de una solución completa de la ecuación de Hamilton-Jacobi resolviendo para las coordenadas y momenta 2n ecuaciones algebraicas del tipo,

$$p_{\mu} = \frac{\partial S(q^{\nu}, \alpha_{\nu})}{\partial q^{\mu}} \quad \text{y} \quad \beta^{\mu} = \frac{\partial S(q^{\nu}, \alpha_{\nu})}{\partial \alpha_{\mu}}\,, \tag{3.2.5}$$

donde β^{μ} y α_{μ} son 2n constantes de integración. De esta forma se *cierra el ciclo* por decirlo así, y se llega a las trayectorias soluciones de las ecuaciones dinámicas.

Este análisis de las diversas formas de formular la dinámica de partículas puede ser practicamente calcado a la geometrodinámica teniendo cierto cuidado. Como se discutío en el capítulo 1, la formulación lagrangiana a partir de un principio variacional es justamente la forma convencional de derivar las ecuaciones de Einstein a partir de la acción (1.2.1) y las ecuaciones de Euler-Lagrange son las ecuaciones de Einstein. La transición a la formulación Hamiltoniana fué objeto de estudio en el capítulo 1, y se llegó a las ecuaciones de Hamilton (1.3.69) y (1.3.75) para 6 grados de libertad y el resto de las ecuaciones de Einstein, las llamadas *ecuaciones de valores iniciales*, corresponden a las cuatro contricciones Hamiltonianas (1.3.73).

Podemos suponer que tenemos una 3-geometría inicial ${}^{3}\mathcal{G}_{i}$ a la que se le asigna un valor del parámetro t igual a t_i. podemos *integrar hacia adelante en el tiempo* la expresión para la integral de acción (1.3.58) hasta una una hipersuperficie final ${}^{3}\mathcal{G}_{f}$ a lo largo de las soluciones a las ecuaciones de movimiento. Si consideramos nuevamente a la 3-geometría inicial como fija, la integral de acción será entonces una función de la 3-geometría final. Es decir, a cada hipersuperficie final (cercana a la que es solución a las ecuaciones de movimiento) le asocia un numero real. Escribimos entonces $S = S[{}^{3}\mathcal{G}]$, para decir que la función distancia geodésica S asignará a cada punto del superespacio (${}^{3}\mathcal{G} \in \mathcal{M}(\mathrm{m})$) un número real.

En el caso de partículas la función S, definida sobre el espacio de configuración M, asigna un real a cada punto, es decir, es una función de la variedad a los reales: S_{part} : M $\longrightarrow$ R. Para la geometrodinámica ocurre lo mismo en el sentido de que la función geodésica asigna a un punto del espacio de configuración a los reales, $S_{\mathrm{geom}} : \mathcal{M}(\mathrm{m}) \longrightarrow \mathrm{R}$. Sin embargo, un punto en el superespacio puede verse, si se distingue a un sistema de coordenadas sobre m, como seis funciones $\gamma_{ij}(x)$ de la variedad a los reales. En resumen, la función distancia geodésica de la geometrodinámica es en realidad una funcional.

La funcional distancia geodésica satisface tambien unas relaciones del mismo tipo que (3.2.5) en donde las derivadas parciales se sustituyen por derivadas funcionales de la siguiente forma:

$$\pi^{ij} = \frac{\delta S}{\delta\gamma_{ij}}, \tag{3.2.6}$$

donde la derivada funcional $\dfrac{\delta S}{\delta\gamma_{ij}}$ está definida a partir de,

$$\delta S = \int \frac{\delta S}{\delta\gamma_{ij}}\,\delta\gamma_{ij}\,d^3x. \tag{3.2.7}$$

La relación entre las derivadas funcionales (3.2.6) que nos lleva a una ecuación de Hamilton Jacobi están dadas por las constricciones Hamiltonianas de la formulación ADM, a saber,

$$\begin{gathered} {}^{3}R + \gamma^{-1}\left[\frac{1}{2}\left(\gamma_{ik}\gamma_{jl} + \gamma_{il}\gamma_{jk}\right) - \frac{1}{2}\gamma_{ij}\gamma_{kl}\right]\pi^{ij}\pi^{kl} = 0, \\ \pi^{ij}{}_{|j} = 0. \end{gathered} \tag{3.2.8}$$

Al sustituir (3.2.6) en (3.2.8) obtenemos las ecuaciones de **Einstein-Hamilton-Jacobi**,

$$
\begin{aligned}
{}^3R + \gamma^{-1}\left[\frac{1}{2}\left(\gamma_{ik}\gamma_{jl} + \gamma_{il}\gamma_{jk}\right) - \frac{1}{2}\,\gamma_{ij}\gamma_{kl}\right]\left(\frac{\delta S}{\delta\gamma_{ij}}\right)\left(\frac{\delta S}{\delta\gamma_{kl}}\right) &= 0\,, \\
\left(\frac{\delta S}{\delta\gamma_{ij}}\right)_{|j} &= 0\,.
\end{aligned}
\tag{3.2.9}
$$

Aparentemente la introducción que hemos hecho hasta ahora de la ecuación de Hamilton Jacobi es totalmente innecesaria, es decir ¿Para qué sirve la ecuación de Hamilton-Jacobi? Dentro de la teoría de la Geometrodinámica Clásica no es especialmente útil desde un punto de vista operacional, ya que la ecuación de E-H-J no es de ninguna manera más simple de resolver que las ecuaciones de Hamilton (Einstein). Un primer obstáculo está en el hecho que se trata de una ecuación diferencial parcial *Funcional*, es decir, que la solución no es una función sino una funcional.

Dentro de la dinámica de partículas la ecuación de Hamilton Jacobi es importante por varias razones, pero enfatizaremos dos principalmente: 1) A pesar de tratarse de una ecuación parcial, que no necesariamente se resuelve más fácilmente que el sistema de Euler-Lagrange, si se cumplen ciertas condiciones sobre la forma de la ecuación, entonces está garantizada la existencia de la solución a partir de la solución de un sistema de ecuaciones de primer orden (ecuaciones de Hamilton) [16]. Operacionalmente no se gana mucho, pero sí conceptualmente, ya que la teoría permite además la generalización dentro del calculo variacional a la teoría de campos (de extremales). 2) La ecuación de H-J es precisamente el puente entre la mecánica cuántica y la mecánica clásica. Si adoptamos el punto de vista de Wheeler, que toma como punto de partida el hecho que el mundo es cuántico, es de suma importancia demostrar que la teoría clásica es un límite de su contraparte cuántica. De esta forma, se justifica la *veracidad* de la mecánica de Newton. La ecuación de Hamilton-Jacobi es equella que satisface la fáse geométrica de la función de onda cuando se considera la aproximación semiclasica de la mecánica cuántica (sistemas para los que la acción es grande comparada con el cuanto fundamental de acción $\hbar$). En esta aproximación se considera que la función de onda es de la forma,

$$\Psi(x,t) = Ae^{\frac{i}{\hbar}S(x,t)}\,, \tag{3.2.10}$$

donde $A(x,t)$ es una función que varía lentamente, mientras que la exponencial varía muy rápidamente porque $S \gg \hbar$. Pidiendo que (3.2.10) satisfaga la ecuación de Schroedinger y tomando $\hbar \longrightarrow 0$ se llega a la ecuación de H-J para $S(x,t)$,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial S}{\partial t} &= H\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}\right) \\
&= \left(\frac{1}{2m}\right)\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right) + V(x)\,,
\end{aligned}
\tag{3.2.11}
$$

para un sistema en un potencial $V(x)$.

En la teoría cuántica no existe tal cosa como la trayectoria para una partícula; la amplitud de probabilidad $\Psi(x,t)$ está definida en todo el espacio-tiempo, y es fuente de información de las propiedades dinámicas de la partícula. Solamente en el límite semiclásico es que se empieza a recuperar la noción de trayectoria. Se necesitan dos postulados para recuperar totalmente la trayectoria clásica: La fase $S(x,t)$ satisface la ecuación de H-J y se cumple el principio de **Interferencia Constructiva** [18].

Aclaremos en que consiste tal principio. En mecánica ondulatoria, un *paquete de ondas localizado* que se interpreta comunmente con una partícula, se obtiene de superponer ondas espaciales con diferentes frecuencias. Sabemos que la frecuencia de la función de ondas está intimamente ligada a la energía que se la asocia a la partícula. Por otra parte, la solución completa de la ecuación de Hamilton-Jacobi, que para la ecuación (3.2.11) es

$$S(x,t) = -Et + \int^{x} [2m(E - V(x))]^{1/2}\, dx + \delta_E\,, \tag{3.2.12}$$

depende de dos constantes de integración (que denotamos anteriormente por α y β). En (3.2.12) la única constante relevante es la energía E, que sabemos que es la cantidad que nos ayuda en la teoría clásica a encontrar la trayectoria clásica $x(t)$ a traves de (3.2.5), es decir de la ecuación $\alpha = \frac{\partial S(x,E)}{\partial E}$. Dentro de la mecánica cuantica la ecuación anterior se leé de la forma:*la trayectoria clásica está dada por los puntos (x,t) en donde la función de onda interfiere constructivamente.* Estos puntos corrsponden a la *cresta* del paquete de ondas formado por la superposición de todas las ondas de diferentes frecuencias (soluciones a la ecuacion H-J para todos los valores de la constante E).

La teoría cuántica de la Geometrodinámica se llama **Geometrodinamica Cuántica** y la denotaremos por GMDC. Es la generalización al superespácio de la teoría cuántica para partículas. Primeramente en la GMDC se pierde la noción de trayectoria en el Superespacio, lo que implica la desaparición del espacio-tiempo como tal; no existe dinámica de 3-geometrias. Lo único que queda es una función Ψ definida en el superespacio para caracterizar al *estado cuántico*:

$$\Psi = \Psi(^3\mathcal{G})\,. \tag{3.2.13}$$

La noción de espacio-tiempo (trayectoria en el superespacio) aparece solamente en la aproximación semiclásica, en la cual se pide que Ψ sea de la forma,

$$\Psi(^3\mathcal{G}) = A \exp\left(\frac{iS(^3\mathcal{G})}{\hbar}\right)\,. \tag{3.2.14}$$

donde A varia lentamente.

En la GMDC caben perfectamente los cambios de topologías de la variedad $\mathbf{m}$, es decir, que las amplitudes que interfieren para formar el *paquete de ondas* están evaluadas sobre *puntos* que pueden bien tener distintas topologias (por ejemplo E^3 o S^3). Esta riqueza en la estructura del superespacio debida a las posibles fluctuaciones topológicas llevó incluso a Wheeler a proponer que las partículas y las interacciónes podián verse como fluctuaciones cuánticas de la geometría [18]. Al tomarse el límite de la Geometrodinámica clásica en la que la topología está fija, se tendría que imponer de manera externa a las partículas y campos.

La trayectoria clásica se recupera a partir de los mismos dos postulados que para las partículas, a saber: *i*) Ecuación de E-H-J en donde el funcional S_{geom} sea funcional exclusivamente de la 3-geometría $\mathcal{G}$; *ii*) Principio de Interferencia Constructiva. Se pide además que la variedad (m,γ) sea cerrada o asintóticamente plana [19].

La afirmación que hemos venido haciendo en el sentido que el funcional distancia geométrica depende solamente de la 3-geometría es equivalente a las tres últimas ecuaciones de H-J (3.2.9), como mostraremos a continuación.

Demostraremos que se cumplen las tres identidades,

$$\left(\frac{\delta S}{\delta\gamma_{ij}(x)}\right)_{|j} = 0\,, \tag{3.2.15}$$

suponiendo que,

$$S = S[^3\mathcal{G}]\,. \tag{3.2.16}$$

Tomemos a $^3\mathcal{G}$ expresada en un sistema de coordenadas por el tensor métrico $\gamma_{ij}(x)$, y hagamos una transformación infinitesimal de coordenadas,

$$x'^i = x^i + \epsilon\xi^i(x)\,, \tag{3.2.17}$$

que inducen un nuevo tensor métrico para la misma geometría,

$$\gamma_{ij}'(x) = \gamma_{ij}(x) + \delta\gamma_{ij}\,,$$

donde

$$\delta\gamma_{ij} = -\epsilon(\xi_{i|j} + \xi_{j|i})\,. \tag{3.2.18}$$

La variación de la fase geométrica está dada por la ecuación (3.2.7), de manera que tenemos,

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int \frac{\delta S}{\delta\gamma_{ij}(x)}\,\delta\gamma_{ij}(x)\,d^3x\,,\\
&= -2\epsilon\int \frac{\delta S}{\delta\gamma_{ij}(x)}\,\xi_{i|j}\,d^3x\,,\\
&= 2\epsilon\int \left(\frac{\delta S}{\delta\gamma_{ij}(x)}\right)_{|j}\xi_i\,d^3x\,.
\end{aligned} \tag{3.2.19}$$

Sin embargo, la 3-geometría $^3\mathcal{G}$ no ha cambiado para nada. Concluimos entonces que $\delta S = 0$ para $\xi(x)$ arbitraria y por lo tanto se sigue (3.3.6).

Tomando las hipótesis que hemos mencinado, Gerlach [19] demostró que:

1) existen cuatro funciones N y N_i que junto con γ_{ij} dan lugar a una métrica de espacio-tiempo,

$$\begin{aligned}
ds^2 &= \gamma_{ij}(N^i dx^0 + dx^i)(N^j dx^0 + dx^j) - N^2(dx^0)2\,,\\
&= \gamma_{ij}dx^i dx^j + 2N_i dx^i dx^0 + (N_jN^j - N^2)(dx^0)^2\,,
\end{aligned} \tag{3.2.20}$$

que satisface las ecuaciones de Einstein.

2) Las ecuaciones de la Geometrodinámica manifiestamente covariantes,

$$\frac{\delta\gamma_{ij}(x)}{\delta\sigma}=\frac{\delta H}{\delta\pi^{ij}(x)}\,,\quad \frac{\pi^{ij}(x)}{\delta\sigma}=-\frac{\delta H}{\delta\gamma_{ij}(x)}\,, \tag{3.2.21}$$

son consecuencia de la aproximación semiclásica de GMDC. En (3.2.21) H es un funcional de γ_{ij} y π^{ij} está dada por (3.2.6). El parámetro σ es el parámetro *many-time* de Tomonaga-Schwinger.

Analizemos ahora como se puede introducir el concepto de Paréntesis de Poisson dentro de la teoría. Sabemos que en una teoría de campos, el poder definir un Hamiltoniano para el campo permite escribir a la evolución temporal del campo y su momento conjugado en términos de los paréntesis de Poisson con el Hamiltoniano, obteniendose una expresión que se asemeja mucho a las ecuaciones de movimiento para partículas. La construcción de los paréntesis de Poisson entre las variables dinámicas permite además pasar a un *postulado de cuantización* en el que los paréntesis se convienten en conmutadores entre los operadores a los que se han elevado las variables dinámicas.

En geometrodinámica tenemos un Hamiltoniano nulo y cuatro constricciones Hamiltonianas. Sería interesante que a tales constricciones se les pudiera dar una interpretación como generadores de algún tipo de traslaciones. Justo es el caso, puesto que las tres constricciones $\mathcal{H}_i$ son generadoras de *estiramientos* de las 3-geometrias, mientras que la constricción $\mathcal{H}_0$ es la responsable de las deformaciónes puras.

Definiendo a los paréntesis de Poisson entre dos variable dinámicas como,

$$\{A(x),B(x')\}\equiv\int d^3y\left\{\frac{\delta A(x)}{\delta\gamma_{ij}}\frac{\delta B(x')}{\delta\pi^{ij}}-\frac{\delta A(x)}{\delta\pi^{ij}}\frac{\delta B(x')}{\delta\gamma_{ij}}\right\}\,, \tag{3.2.22}$$

se encuentra que las variables dinámicas cumplen con la relación que se esperaría [5],

$$\{\gamma_{ij}(x),\pi^{lm}(x')\}=\delta_{ij}^{lm}\,\delta(x,x')\,. \tag{3.2.23}$$

La evolución temporal de las variables está dada por

$$\dot{A}[\gamma_{ij},\pi^{kl},t]=\{A,H\}+\partial_t A\,. \tag{3.2.24}$$

Se han calculado a su vez los paréntesis entre las constricciones encontrandose las siguientes expresiones [5]:

$$\begin{aligned}\{\mathcal{H}_0(x),\mathcal{H}_0(x')\}&=\mathcal{H}^i(x)\delta_{|i}(x,x')-\mathcal{H}^i(x')\delta_{|i}(x',x)\,,\\ \{\mathcal{H}_i(x),\mathcal{H}_0(x')\}&=\mathcal{H}_0(x)\delta_{|i}(x,x')\\ \{\mathcal{H}_i(x),\mathcal{H}_j(x')\}&=\mathcal{H}_i(x')\delta_{|j}(x,x')+\mathcal{H}_j(x)\delta_{|j}(x,x')\,.\end{aligned} \tag{3.2.25}$$

Estas relaciones de conmutación son importantes, ya que son las mismas relaciones que satisfacen los generadores de estiramientos y deformaciones puras de las 3-geometrias.

Se ha incluso demostrado que si no se conoce la forma funcional de las constricciones pero se parte de las relaciones (3.2.25) y se exige que las constricciones sean tales que generen deformaciones y estiramientos, se llega de manera única a las conocidas constricciones Hamiltonianas (esto representsa otro camino posible para llegar a las ecuaciones de Einstein en donde se está partiendo de suponer la existencia de los generadores) [24].

3.3 Superespacio y Geodésicas

Así como la geometría del espacio-tiempo es el espacio de configuración natural para hacer el análisis del comportamiento de la materia y energía, el Superespacio es el espacio de configuración natural en el que las geometrias espaciales evolucionan. Es el espacio de todas las posibles geometrias; un punto en el superespacio es una configuración instantanea del espacio mismo.

De las ecuaciones de Einstein sabemos que materia-energía y geometría se encuentran relacionadas de manera correspondida: la geometría dice a la materia como moverse y esta dice a su vez a la geometría como curvarse. De igual forma, la geometría del superespacio actua sobre la configuración instantanea del espacio, diciendole a la geometría del espacio cómo moverse. ¿podra pasar lo inverso?, es decir, ¿Podrán las geometrias reaccionar y actuar sobre la geometría del superespacio? Cual es el objeto básico, ¿La geometría del espacio-tiempo o la geometría del superespacio? Procedamos a continuación a estudiar la estructura del superespacio mismo.

Uno de los principales problemas con los que se enfrenta el estudio del superespacio es que éste, a pesar de ser un espacio topológico no tiene una estructura de variedad. Algunas 3-geometrias son más simétricas que otras. Tales geometrias no tienen vecindades homeomorfas a vecindades de geometrias con menos simetrias. Por lo tanto, las geometrias simétricas son puntos singulares del superespacio. Su presencia impide que el superespacio sea el espacio de configuración para un análisis dinámico. Esta dificultad se supera sin embargo, al mostrarse que a pesar de no ser una variedad, el superespacio posee una partición en variedades de geometrias, o estratos, que se pegan en forma totalmente regular. Las geometrias con grán simetría están completamente contenidas en la frontera de geometrias con menos simetrias. Por lo tanto, el limite de una geometría de un tipo en particular debe ser del mismo tipo o más simétrica [20].

Veamos como se relaciona el superespacio con el problema de la indeterminación de un sistema de coordenadas en el laboratorio en Relatividad General. Sea $\gamma_{ij}(x^k)$ una métrica espacial cualquiera. Esta métrica es el resultado de un experimento relativo al sistema de coordenadas (x^i) y le llamaremos la métrica de laboratorio relativa al sistema de coordenadas x^i. Para otro sistema de coordenadas $x^k = x^k(x^i)$, la métrica asociada será

$$\overline{\gamma}_{mn}(x^k) = \frac{\partial x^i(\overline{x}^k)}{\partial \overline{x}^m} \frac{\partial x^j(\overline{x}^k)}{\partial \overline{x}^n} \gamma_{ij}(x^l(\overline{x}^k)) . \tag{3.3.1}$$

Los nuevos coeficientes serán diferentes funciones de las nuevas variables, pero describirán las mismas propiedades físicas del espacio. Si consideramos todas las posibles transformaciones de coordenadas de (x^k) aplicadas a la métrica $\gamma_{ij}(x^k)$ generaremos una *cadena de metricas de laboratorio:*

$$\left\{ \overline{\gamma}_{mn}/x^l = x^l(\overline{x}^k) \text{ y } \overline{\gamma}_{mn}(x^k) = \frac{\partial x^i(x^k)}{\partial \overline{x}^m} \frac{\partial x^j(\overline{x}^k)}{\partial \overline{x}^n} \gamma_{ij}(x^l(\overline{x}^k)) \right\} . \tag{3.3.2}$$

Como cada métrica de laboratorio en la cadena describe las mismas propiedades intrínsecas del espacio (no se pueden diferenciar por métodos físicos), la cadena es identificada como un solo estado físico. Considerando todas las posible cadenas generadas por todas las posibles métricas de laboratorio, una métrica arbitraria $\gamma'_{mn}(x^c)$ debe caer en por lo menos una cadena (la que ella misma genera) y no puede estar en más de una.

Como cada cadena representa un único estado físico, identificamos a todas las métricas de laboratorio de una cadena en un único punto, en algún espacio de geometrias. El espacio resultante es el conjunto de todos los estados físicos distinguibles, conocido como superespacio $\mathcal{M}(L)$ del laboratorio L. Como las coordenadas han sido ya eliminadas, la física en $\mathcal{M}(L)$ es automaticamente invariante ante cambios de coordenadas.

En apariencia la Física se haría más sencilla introduciendo $\mathcal{M}(L)$ como el espacio de configuraciones en vez del conjunto de métricas de laboratorio, sin embargo, $\mathcal{M}(L)$ es más complicado que el espacio de métricas. Los campos $\{\gamma_{ij}(x^k)\}$ forman un conjunto abierto en un espacio de Banach (en la topología C^r) y por lo tanto tienen una estructura diferenciable, hecho que los vuelve ideales para un análisis dinámico. Por otra parte, $\mathcal{M}(L)$, siendo un espacio de identificaciones, comparte pocas de las propiedades de la variedad $\{\gamma_{ij}(x^k)\}$. La mayor desventaja consiste en que no es una variedad, de manera que la física (ecuaciones diferenciales) no puede hacerse sobre ella.

Veamos ahora la razón por la cual $\mathcal{M}(L)$ poseé puntos singulares. Supongamos que una métrica γ_{ij} posee un vector de Killing, es decir, al hacerse una transformación infinitesimal de coordenadas a la largo de tal vector, la metrica nueva (vista como seis funciones de las coordenadas) γ'_{mn} tendrá justo la misma dependencia funcional. Por lo tanto la métrica se queda *fija* bajo la transformación y ambas métricas se encuentran en correspondencia isométrica. Puede incluso darse el caso que las transformaciones de coordenadas que dejan la métrica invariante dependan de varios parámetros continuos, de manera que la correspondiente geometría asociada a la cadena de métricas exhiba una simetría continua. Dentro de la cadena de métricas se identificarán entonces a todas aquellas que tengan la misma forma como si fueran la misma métrica, por lo que la correspondiente cadena será *más corta* que las cadenas asociadas a geometrias con menos simetrias. Cuando la cadena más corta esta asociada a un punto de $\mathcal{M}(L)$, una vecindad de este punto es diferente (no homeomorfo) a vecindades de otros puntos. Estas geometrias simétricas son los puntos singulares de $\mathcal{M}(L)$.

Presentaremos ahora al espacio de geometrias para una variedad 3-dimensional fija. Este espacio de geometrias es el superespacio, $\mathcal{M}(\mathrm{m})$, de la variedad m, que será una generalización del superespacio de laboratorios. El análisis de un espacio de geometrias para una unica 3-topología es de interés, como se ha visto en los capítulos anteriores, para la geometrodinámica clásica donde no se permiten cambios de topología. El superespacio se construye como un *espacio de órbitas* (o identificaciones), cuyos puntos son *clases de equivalencia de métricas Riemannianas isométricas.* El superespacio coincide con el conjunto de estados que són físicamente distinguibles.

Enunciemos algunas definiciones:

DEFINICION. *Se dice que* $\mathbf{m}$ *es Superespacial si es una variedad de 3 dimensiones sin frontera, suave* (c^∞), *compacta, conexa, orientable y Hausdorff.*

DEFINICION. *Si* γ *es una métrica Riemanniana* C^∞ *en una variedad superespacial* $\mathbf{m}$, *entonces a* $(\mathbf{m},\gamma)$ *también se le denomina Superespacial.*

Las condiciones de cerradura y orientabilidad tienen fundamentos meramente subjetivos (llamesele Fé, Filosofía, etc.). Si la variedad $\mathbf{m}$ es superespacial, entonces *denotaremos por* **Riem** ($\mathbf{m}$) *al espacio de métricas Riemannianas* C^∞, *y como* **Diff** ($\mathbf{m}$) *al grupo de difeomorfismos* C^∞ *de la variedad* $\mathbf{m}$ *que preservan la orientación.*

Diff ($\mathbf{m}$) actua como un grupo de transformaciones en **Riem** ($\mathbf{m}$) por la acción de *pullback* de métricas en **Riem** ($\mathbf{m}$),

$$\mathbf{Diff}\ (\mathbf{m}) \times \mathbf{Riem}\ (\mathbf{m}) \longrightarrow \mathbf{Riem}\ (\mathbf{m})\ ,$$

donde la acción manda $(f,\gamma) \rightarrow f^*\gamma$, $f \in \mathbf{Diff}\ (\mathbf{m})$, $\gamma \in \mathbf{Riem}\ (\mathbf{m})$.

El grupo **Diff** ($\mathbf{m}$) será el análogo del grupo de transformaciones de coordenadas, **Riem** ($\mathbf{m}$) el espacio de métricas de laboratorio y la acción del grupo corresponde a la transformación de métricas de laboratorio bajo transformaciones de coordenadas.

Para una γ fija en **Riem** ($\mathbf{m}$), la acción encaja **Diff** ($\mathbf{m}$) en **Riem** ($\mathbf{m}$) mediante el mapeo de órbita

$$_\gamma : \mathbf{Diff}\ (\mathbf{m}) \longrightarrow \mathbf{Riem}\ (\mathbf{m})\ ,$$

$_\gamma(f) = f^*\gamma$ y la imagen de **Diff** ($\mathbf{m}$) bajo la acción es *la órbita por* γ,

$$\mathcal{O}_{(\gamma)} = \{f^*\gamma / f \in \mathbf{Diff}\ (\mathbf{m})\}\ .$$

Si dos métricas γ y $\overline{\gamma}$ están es la misma órbita entonces existe un diffeomorfismo f de $\mathbf{m}$ en sí mismo tal que $\overline{\gamma} = f^*\gamma$. Esta es la condición para que dos métricas sean isometricas, por lo que *dos métricas son isometricas si y solo si están en la misma órbita.*

La acción de **Diff** ($\mathbf{m}$) introduce una relación de equivalencia en **Riem** ($\mathbf{m}$) y más aun, para cada γ puede haber algunos difeomorfismos que dejen γ fija, es decir, $f^*\gamma = \gamma$. Estos difeomorfismos forman un subgrupo cerrado de **Diff** ($\mathbf{m}$), *el grupo de isotropía de la acción,*

$$\mathrm{I}_\gamma(\mathbf{m}) = \{f / f \in \mathbf{Diff}\ (\mathbf{m}),\ f^*\gamma = \gamma\}\ .$$

El espacio de órbitas de la acción, denotado por

$$\mathcal{M}(\mathbf{m}) = \frac{\mathbf{Riem}\ (\mathbf{m})}{\mathbf{Diff}\ (\mathbf{m})}\ ,$$

se obtiene al identificar (o colapsar) cada órbita en **Riem** ($\mathbf{m}$) a un solo punto en $\mathcal{M}(\mathbf{m})$. Definimos la *proyección de orbita,*

$$\Pi : \mathbf{Riem}\ (\mathbf{m}) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{m})$$

como aquella que identifica a todas las métricas Riemannianas isométricas en una sola clase de equivalencia.

La imagen de $\gamma \in \mathbf{Riem}\ (\mathbf{m})$ bajo Π, $\gamma^* = \Pi(\gamma)$, es *la geometría de* $\mathbf{m}$ *asociada con* γ, *y* γ *representa a la geometría* γ^*.

DEFINICION. *$\mathcal{M}(\mathbf{m})$ es el conjunto de geometrías de* **M**, *o el Superespacio de* **m**.

Como un físico puede determinar solamente propiedades métricas del espacio, las métricas isométricas (sic) deben estar identificades con el mismo estado físico, o dicho en otras palábras, los puntos del superespacio son aquellos estados físicos distinguibles.

Una vez definido el Superespacio podemos preguntarnos si la acción del grupo de alguna forma induce una forma de *separar* a **Riem** (**m**)de manera burda en una *base* y un espacio ortogonal. En tal caso se dice que se tiene un *corte*. Más precisamente, un corte en m es un subespacio *ortogonal* a la orbita que pasa por m, con la propiedad de que junto con la vecindad de la órbita llena completamente una vecindad de m.

Si tomamos a espacios como **Riem** (**m**) en los que el grupo que actua es no compacto y es de dimensión infinita, y además tratamos de verlos como generalizaciones de un haz fibrado principal [21], entonces un corte sería el análogo a una sección local (la analogía no es completa ya que G no actua libremente).

Tenemos el siguiente teorema que asegura la existencia de tales cortes [20].

TEOREMA. *Para cada* $\gamma \in$ **Riem** (**m**), *existe una subvariedad contractil* S *de* **Riem** (**m**) *conteniendo a* γ *tal que,*

(1) $f \in I_\gamma(\mathrm{M}) \Longrightarrow f^*S = S$

(2) $f \notin I_\gamma(\mathrm{M}) \Longrightarrow f^*S \cap S = \emptyset$

(3) *Existe un subconjunto abierto* Q *de la orbita que pasa por* γ, l_γ, *conteniendo a* γ, *y una sección local* $\Gamma : Q \longrightarrow$ **Diff** (**m**) *tal que* $F(q,s) = (\Gamma(q))^* s$ *sea un difeomorfismo de* $Q \times S$ *en una vecindad abierta* U_γ *de* γ.

Nos proponemos ahora a dar argumentos que sugieren que el superespacio puede ser extendido de tal manera que sea una variedad Riemanniana.

Una 3-geometría dada pude identificarse si se hace explícito el tensor métrico covariante $\gamma_{ij}(x)$ en un sistema de coordenadas particular. De igual forma se puede especificar dando el correspondiente tensor contravariante $\gamma^{ij}(x)$ en el mismo sistema de coordenadas.

Podemos considerar a **Riem** (**m**) como una especie de variedad *diferenciable funcional* con una dimensión que denotaremos despues de un abuso de notación como dim(**Riem** (**m**))$= 6 \times \infty^3$. La especificación de un punto en **Riem** (**m**) dando las seis funciones $\gamma_{ij}(x)$ corresponde a la adopción de un sistema particular de coordenadas en **Riem** (**m**). Siguiendo este punto de vista, la acción de **Diff** (**m**) en **Riem** (**m**) se puede ver como difeomorfismos funcionales de **Riem** (**m**).

¿Se podrá dotar a **Riem** (**m**) con una métrica Riemanniana de forma que sea una variedad Riemaniana? Para responder a la pregunta, tomemos una variación infinitesimal C^∞ de una 3-métrica $\gamma_{ij}(x)$ en **m**, que denotaremos por $\delta\gamma_{ij}(x)$.

Escribimos una expresión para la *longitud de arco* δS entre los puntos γ_{ij} y $\gamma_{ij} + \delta\gamma_{ij}$ en **Riem** (**m**) de la forma,

$$\delta S^2 = \int d^3x \int d^3x' \, \mathcal{G}^{ijk'l'} \, \delta\gamma_{ij} \, \delta\gamma_{k'l'} \, , \tag{3.3.3}$$

donde

$$\delta\gamma_{ij} = \delta\gamma_{ij}(x) \quad , \quad \delta\gamma_{k'l'} = \delta\gamma_{kl}(x') \,, \tag{3.3.4}$$

y $\mathcal{G}^{ijk'l'}$ son un conjunto de distribuciones en **M** x **M**, construidas a partir de las funciones $\gamma_{ij}(x)$, sujetas a la restricción de que sean invertibles, es decir, existe $\mathcal{G}_{ijk'l'}$ que satisface,

$$\int \mathcal{G}_{ijm''n''}\, \mathcal{G}^{m''n''k'l'}\, d^3x'' = \delta^{kl}_{ij}\, \delta(x,x') \,. \tag{3.3.5}$$

El siguiente punto que hay que superar es el encontrar una métrica $\mathcal{G}^{ijk'l'}$ para **Riem** (m) que sea por proyección sobre $\mathcal{M}$(m) una métrica aceptable en el superespacio. Tomemos dos desplazamientos infinitesimales donde el punto γ_{ij} en **Riem** (m), uno de ellos sobre la órbita que pasa por γ_{ij}, que denotaremos por $\delta_{\|}\gamma_{ij}$, y otro desplazamiento que sea perpendicular a la órbita, $\delta_{\perp}\gamma_{ij}$. Tenemos entonces que,

$$\delta_{\|}\gamma_{ij} = \xi_{i|j} + \xi_{j|i} \,, \tag{3.3.6}$$

para algunas funciones infinitesimales ξ_i. Ademas de el hecho que los desplazamientos sean ortogonales tenemos,

$$\begin{aligned} 0 &= \int d^3x \int d^3x' \mathcal{G}^{ijk'l'}\, \xi_{i|j}\, \delta_{\perp}\gamma_{k'l'} \,, \\ &= -\int d^3x\, \xi_i \left\{ \int d^3x'\, \mathcal{G}^{ijk'l'}{}_{|j}\, \delta_{\perp}\gamma_{k'l'} \right\} \,, \end{aligned}$$

para ξ_i arbitraria, y por lo tanto,

$$\int \mathcal{G}^{ijk'l'}{}_{|j}\, \delta_{\perp}\gamma_{k'l'}\, d^3x' = 0 \,. \tag{3.3.7}$$

Tomando a ξ_i como las componentes de un vector covariante y a los índices no primados de la métrica $\mathcal{G}^{ijk'l'}$ como aquellos de una densidad tensorial de peso 1 [22].

Los puntos γ_{ij} y $\gamma_{ij} + \delta_{\|}\gamma_{ij}$ están sobre la misma órbita, mientras que los puntos γ_{ij} y $\delta_{\perp}\gamma_{ij}$ están en dos órbitas distintas. El cuadrado de la *distancia perpendicular* en el punto γ_{ij} entre las dos órbitas anteriores será,

$$\delta_{\perp}S^2 = \int d^3x \int d^3x'\, \mathcal{G}^{ijk'l'}\, \delta_{\perp}\gamma_{ij}\, \delta_{\perp}\gamma_{k'l'} \,. \tag{3.3.8}$$

Si fuera posible elegir a $\mathcal{G}^{ijk'l'}$ de forma que la distancia perpendicular (3.4.8) permaneciera constante al moverse a otras posiciones sobre las dos órbitas, tendriamos entonces una estructura Riemanniana definida naturalmente en $\mathcal{M}$(m). La distancia entre dos 3-geometrias infinitesimalmente cercanas en $\mathcal{M}$(m) quedaría definida como la distancia perpendicular (constante) entre las correspondientes órbitas en **Riem** (m).

La constancia de $\delta_\perp S^2$ queda garantizada gracias al siguiente argumento: tómese un elemento de **Diff** (m), f. La acción de f sobre los puntos γ_{ij} y $\gamma_{ij}+\delta_\perp\gamma_{ij}$ consiste en trasladarlos a otros puntos sobre ambas órbitas, a saber, a los puntos $f^*\gamma_{ij}$ y $f^*\delta_\perp\gamma_{ij}$ respectivamente. El nuevo desplazamiento $f^*\delta_\perp\gamma_{ij}$ induce una nueva distancia perpendicular dada por,

$$(f^*\delta_\perp S)^2 = \int d^3x \int d^3x' \left(f^*\mathcal{G}^{ijk'l'}\right)(f^*\delta_\perp\gamma_{ij})(f^*\delta_\perp\gamma_{k'l'}). \tag{3.3.9}$$

Si $\mathcal{G}^{ijk'l'}$ pudiera ser elegida de manera que la acción de **Diff** (m) fuera isometria de **Riem** (m), entonces esta distancia perpendicular, y por lo tanto todas las longitudes de arco, permanecerían invariantes bajo la acción de **Diff** (m).

La condición necesaria y suficiente sobre $\mathcal{G}^{ijk'l'}$ *para que las acciones de* **Diff** (m) *sean isométrias de* **Riem** (m) *es que la longitud de arco (3.4.3) sea invariante ante transformaciones de coordenadas.* Como $\delta\gamma_{ij}$ se transforma como un tensor covariante se sigue que $\mathcal{G}^{ijk'l'}$ *debe transformarse, bajo la acción de* **Diff** (m), *como una densidad bi-tensorial de peso uno tanto en* x *como en* x'.

Cuando se cumple la condición anterior $\mathcal{M}$(m) queda dotada de una estructura Riemanniana. Sin embargo, $\mathcal{M}$(m) no se convierte en una variedad Riemanniana por el problema que ya se mencionó anteriormente en el sentido de que $\mathcal{M}$(m) no es una variedad. Afortunadamente el superespacio puede ser estratificado, es decir, que a pesar de no ser por sí mismo una variedad, se descompone en variedades de geometrias que poseén el mismo tipo de simetrias. Estas geometrias tienen vecindades homeomorfas y por lo tanto estructura de variedad. Las geometrias de grán simetría están completamente contenidas en la frontera de aquellas geometrias con menos simetrias, por lo que una sucesión de geometrias con una cieta simetía convergen a geometrias con las mismas ó más simetrias.

Analizamos ahora la relación entre las soluciones de las ecuaciones (3.2.9), las soluciones a las ecuaciones de Einstein y los grados de libertad del campo gravitacional. En esta discusión haremos frecuente abuso de notación con el objeto de tratar de entender las conecciones entes mencionadas. Las ecuaciones (3.2.9) representan un conjunto de $4\times\infty^3$ ecuaciones diferenciales funcionales de primer orden, simultaneas en las $6\times\infty^3$ variables independientes $\gamma_{ij}(x)$. Su solución general involucra $2\times\infty^3+1$ constantes de integración. Una es símplemente una constante aditiva. Por lo tanto, las ecuaciones de Hamilton-Jacobi poseen $2\times\infty^3$ famílias paramétricas de soluciones diferentes.

Supongamos que tenemos una de esas soluciones y que además, elegimos un sistema de coordenadas tal que fija N y las funciones N_i son ciertas funciones de las γ_{ij}, tales que se transforman bajo la acción de **Diff** (m) como un escalar y un tensor covariante respectivamente.

Cada punto de **Riem** (m) define una curva unidimensional en **Riem** (m), que se obtiene comenzando del punto en cuestión e integrando las ecuaciones de Hamilton. Como todos los puntos de cada una de estas curvas define a la misma curva, se sigue que la solución de las ecuaciones de H-J (junto con las condiciones coordenadas) define una congruencia de curvas en **Riem** (m) dependientes de $6\times\infty^3-1$ parámetros. Las ecuaciones de Hamilton (Einstein) son invariantes ante la acción de **Diff** (m), por lo que la congruencia se proyecta sobre $\mathcal{M}$(m) en una congruencia de curvas dependiente de $3\times\infty^3-1$ parámetros.

Cada curva de esta última congruencia representa tanto un espacio-tiempo solución a las ecuaciones de Einstein como una foliación particular de tal espacio tiempo.

Elegimos una curva de tal congruencia y denotamos por Ω al espacio-tiempo que genera. Sea U el subconjunto de $\mathcal{M}(\mathfrak{m})$ que consiste de todas las posibles *rebanadas* 3-dimensionales del espacio-tiempo Ω. Entonces cada curva en la congruencia que intersecte a U generará igualmente a Ω y estará por lo tanto en U. Esto se debe a la completa arbitrariedad de N y N_i en la derivación de las ecuaciones de Einstein a partir de las de H-J, y del hecho que cada *sucesión de rebanadas* de un espacio-tiempo dado se puede obtener por elecciones apropiadas de los Lapse y Shift. Claramente, una vez elegidos éstos, se fija la congruencia, y se restringe la clase de sucesiones de rebanadas a que las curvas dan lugar. Sin embargo, cada rebanada de un espacio-tiempo se puede encontrar en por lo menos una de esas curvas que genera a ese espacio-tiempo.

Este razonamiento sugiere la idea de descomponer a las congruencias dadas en *haces o manojos*. Cada haz consiste de todas las curvas que generan el espacio-tiempo dado. Por ejemplo, todas las curvas que intersectan al subconjunto U conforman un solo haz.

La dimensionalidad de U es ∞^3 ya que es el número de funciones escalares N en $\mathfrak{m}$ y por lo tanto el número de cortes rebanadas posibles.

Como cada curva que intersecta a U está contenida en éste, el conjunto U contiene $\infty^3 - 1$ famílias paramétricas de curvas. Cualquier otro haz contiene similarmente $\infty^3 - 1$ familias paramétricas.

Como cada haz en la congruencia corresponde a un espacio-tiempo distinto y como la congruencia en sí una familia con $3 \times \infty^3 - 1$ parámetros, se sigue que cada solución a las ecuaciones de H-J poseé una familia de $2 \times \infty^3$ paramétros de espacios tiempos diferentes. Finalmente, como las ecuacionas de H-J poseén $2 \times \infty^3$ soluciones diferentes, vemos que las ecuaciones de Einstein poseén una familia de soluciones diferentes con $4 \times \infty^3$ parámetros, que corresponde a los $2 \times \infty^3$ grados de libertad que poseé el campo gravitacional (2 por punto).

Existe un número infinito de densidades bitensoriales $\mathcal{G}^{ijk'l'}$ entre las que se podría en principio elegir alguna para $\mathcal{M}(\mathfrak{m})$. De la formulación Hamiltoniana presentada en el capítulo uno tenemos un objeto, la Supermétrica (1.3.63) con la que podremos definir una *Supermétrica en el Superespacio.*

Esta métrica debe ser escogida de manera que la congruencia de curvas in $\mathcal{M}(\mathfrak{m})$, definida a partir de una función distancia S dada y una elección particular de de N y N_i, sea una congruencia de geodésicas en $\mathcal{M}(\mathfrak{m})$.

Eligiremos sin pérdida de generalidad a las funciones Shift que se anulen,

$$N_i = 0\,, \tag{3.3.10}$$

ya que esta elección corresponde a una elección de coordenadas (normales de Gauss). Más aun, podemos imponer una condición de tipo global sobre la función N, puesto que un cambio de ésta simplemente significa un cambio en el parámetro t. Eligiendo la siguiente normalización,

$$2\int N\sqrt{\gamma}\,{}^3R\,d^3x = \pm 1\,. \tag{3.3.11}$$

Podemos multiplicar a la ecuación

$$G_{ijkl}\,\frac{\delta S}{\delta\gamma_{ij}}\,\frac{\delta S}{\gamma_{kl}} = \sqrt{\gamma}\,{}^3R\,,$$

por $2N$ e integrar sobre la variedad para obtener,

$$2\int N\,G_{ijkl}\,\frac{\delta S}{\delta\gamma_{ij}}\,\frac{\delta S}{\gamma_{kl}}\,d^3x = 2\int N\,\sqrt{\gamma}\,{}^3R\,d^3x = \pm 1\,. \tag{3.3.12}$$

es decir,

$$\int d^3x \int d^3x'\,\mathcal{G}_{ijk'l'}\,\frac{\delta S}{\delta\gamma_{ij}}\,\frac{\delta S}{\gamma_{k'l'}} = \pm 1\,. \tag{3.3.13}$$

Donde

$$\mathcal{G}_{ijk'l'} \equiv 2\,N\,G_{ijkl}\,\delta(x,x')\,. \tag{3.3.14}$$

Si elegimos a $\mathcal{G}$ como la métrica de Riem (m) entonces la ecuación (3.3.13) se convierte en la **Ecuación Eiconal para Riem (m)**. Esta elección de la métrica *garantiza que el campo gradiente de S defina una congruencia de geodésicas* en Riem (m).

La tangente a una geodésica por cualquier punto está dada por

$$\begin{aligned}\frac{d\gamma_{ij}}{d\sigma} &= \int \mathcal{G}_{ijk'l'}\,\frac{\delta S}{\delta\gamma_{k'l'}}\,d^3x'\,,\\ &= 2\,N\,G_{ijkl}\,\frac{\delta S}{\delta\gamma_{kl}}\,.\end{aligned} \tag{3.3.15}$$

Podemos observar que la última expresión se puede reescribir como,

$$\begin{aligned}\frac{d\gamma_{ij}}{d\sigma} &= 2\,N\,G_{ijkl}\,\pi^{kl}\,,\\ &= 2\,N\,K_{ij}\,.\end{aligned} \tag{3.3.16}$$

Expresión que es consistente con la interpretación que se hizo en el capítulo 1 sobre la curvatura extrínseca como una *velocidad normal*. Para el sistema de coordenadas utilizado, la curvatura coincide con la velocidad de la métrica, por lo que al parámetro σ lo podemos identificar con t.

Tomemos ahora las tres últimas ecuacionas de Hamilton-Jacobi y reinterpretemoslas en términos de lo que hemos visto. Tenemos

$$\left(\frac{\delta S}{\delta\gamma_{ij}}\right)_{|j} = 0\,, \tag{3.3.17}$$

de la expresión,

$$\frac{d\gamma_{ij}}{d\sigma} = 2\,N\,G_{ijkl}\,\frac{\delta S}{\delta\gamma_{kl}}\,,$$

podemos despejar al *momento* de la siguiente manera,

$$\frac{\delta S}{\delta \gamma_{ij}} = \frac{1}{2N} G^{ijkl} \frac{d\gamma_{kl}}{d\sigma},$$

$$= \int \mathcal{G}^{ijk'l'} \frac{d\gamma_{k'l'}}{d\sigma} d^3x' . \tag{3.3.18}$$

Por lo tanto, la ecuación (3.3.17) se escribe como,

$$\int \mathcal{G}^{ijk'l'}{}_{|j} \frac{d\gamma_{k'l'}}{d\sigma} d^3x' = 0 . \tag{3.3.19}$$

En virtud de la ecuación (3.3.7) tenemos que $\frac{d\gamma_{k'l'}}{d\sigma}$ *es ortogonal a la orbita que pasa por cada punto de* Riem (m), *por lo que la Geodésica está constreñida a cruzar ortogonalmente a todos las órbitas, de manera que el campo gradiente de S define en realidad una congruencia de geodésicas en* $\mathcal{M}(\mathrm{m})$.

Con este argumento se completa el *circulo lógico* del presente trabajo, puesto que hemos visto que de una formulación Lagrangiana se puede pasar a una formulación Hamiltoniana donde en el Hamiltoniano aparece una métrica que da lugar a una ecuación de Hamilton-Jacobi que como se vio, es equivalente a las dos formulaciones anteriores, y además es el generador de campos gradientes que se relacionan con las Eiconales o Geodésicas en el espacio donde está definida la Supermétrica, mismas que minimizan la acción expresada a través de tal Supermétrica.

REFERENCIAS

1. R. Arnowitt, S. Deser, and C. W. Misner, ed. L. Witten, **Gravitation: An Introduction to Current Research,** Wiley, New York, (1962), 227-265.

2. A. Ashtekar, **SILARG VII, Proccedings** ed. World Scientific, Singapur, por aparecer.

3. J. Guven, M. P. Ryan Jr., preprint.

4. R. Matzner, **SILARG VII, Proccedings** ed. World Scientific, Singapur, por aparecer; H. Harleston, Ph. D. Thesis, Austin, (1990).

5. B. S. De Witt,**Quantum Gravity I** , Phys. Rev., **160** (1967), 1113-1148.

6. Para una presentación completa sobre encajamientos, ver M. Spivak, **A Comprehensive Introduction to Diferential Geometry,** Publish or Perish Inc. Boston, (1970).

7. C. Misner, K. Thorne, J.A. Wheeler: **Gravitation,** W.H. Freeman and Co., New York, (1973).

8. Para un tratamiento más general en el que la variedad encajada no es necesariamente una hipersuperficie ver: C. Soto, **Tesis** , FCUNAM, (1990).

9. L. D. Landau, E. M. Lifshitz **Teoría Clásica de Campos** V.2 Curso de Física Téorica, ed. Reverté, Barcelona, (1973).

10. P. A. M. Dirac: **Lectures on Quantum Mechanics,** Belfer Graduate School of Science, New York, (1964).

11. K. Sundermayer, **Constrained Dynamics** , ed. Springer Verlag, Heidelberg, (1982).

12. A. Hanson, T. Regge, C. Teitelboim, **Constrained Hamiltonian Systems,** Accademia Nazionale dei Lincei, Roma, (1976).

13. J. A. Wheeler, **Superspace** en *Analytic methods in Mathematical Physics* ed. Gilbert, Newton, (1970), 335-378.

14. K. Kuchař, J. Math. Phys.,**17** , 5, (1976), 777-791.

15. R. Mazter, L. Shepley, **Classical Mechanics** , Prentice Hall, (1991).

16. J. Ize, **Calculo de Variaciones** , Cinvestav (1989).

17. R. Courant, D. Hilbert. **Methods in Mathematical Physics** , Vol. II., Wiley-Intercience, (1988)

18. J. A. Wheeler, **Superspace and tha Nature of Quantum Geometrodynamics** , en *Quantum Cosmology* , ed. E. F. Ruffini, (1989).

19. U. H. Gerlach,**Derivation of the Ten Einstein Equations from the Semiclassical Approximation to Quantum Geometrodynamics** , Phys. Rev.,177 , 1929 (1969).

20. A. E. Fischer, **The Theory of Superspace** , en *Relativity*, eds. M. Carmelli, S. Fickler y L. Witten, Plenum Press, New York. (1970).

21. M. Socolovsky, **Introduction to the Theory of Fiber Bundles and Connections I**, Rev. Mex. de Fis., Vol 36, Sup 1, (1990)

22. B. S. DeWitt, **Spacetime as a Sheaf of Geodesics in Superspace** , en *Relativity*, eds. M. Carmelli, S. Fickler y L. Witten, Plenum Press, New York. (1970).

23. M. P. Ryan Jr., **Hamiltonian Cosmology** , en Lecture Notes in Physics, ed. Springer Verlag, Berlín, (1972).

24. S. Hojman, K. Kuchař, C. Teitelboim ,**Geometrodynamics Regained** , Annls. of Phys., **96** , 88-135 (1976).
25. C. W. Misner, **Minisuperspace** en Magic without Magic: J. A. Wheeler, ed. J. R. Klauder, (1972), 441-473.

26. R. Wald, **General Relativity,** Chicago University Press, (1984).