8
2 ¼

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

PROYECCIONES DE CONJUNTOS PLANOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A:

JORGE ESCAMILLA ACOSTA

México, D. F. 1991.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

I N D I C E

INTRODUCCION

En el artículo " Sur les distances des points des ensembles de mesure positive . Fund. Math.1 (1920).pp. 93-104 " , Steinhaus probó que el conjunto $A - B = \{ a - b \mid a \in A , b \in B \}$ contiene un intervalo siempre que A y B sean subconjuntos medibles de la recta real $\mathbb{R}$, con medida de Lebesgue positiva .

En el presente trabajo , basado en un artículo de R.Anantharaman y J.P.Lee . [1] , estableceremos las condiciones bajo las cuales las proyecciones de algunos conjuntos planos contienen ó no un intervalo .

En la primera sección establecemos las definiciones y propiedades elementales de las proyecciones de conjuntos planos , en las cuales se basa el presente trabajo .

En la segunda parte probaremos que la proyección (proyección medible) de un conjunto compacto en $\mathbb{R}^2$, es compacta (respectivamente un conjunto F_σ) en $\mathbb{R}$. Utilizando convoluciones , en la prueba del Teorema de Steinhaus , mostraremos que la proyección medible de $E = A \times B$ es abierta , en la proyección , siempre que A y B sean conjuntos medibles con medida de Lebesgue finita .

Mediante ejemplos adecuados se muestra que los enunciados análogos no son verdaderos , cuando A y B tienen ambos la propiedad de Baire o , son conjuntos de la segunda categoría .Sin embargo , si suponemos que los conjuntos A y B poseen , ambos , las propiedades anteriores , entonces la proyección categórica de E tiene interior no vacio .

Finalmente,en la tercera sección se demostrará que existe un conjunto residual $E \subset \mathbb{R}^2$, con medida completa , tal que su proyección tiene interior vacio para cada función lineal f , en un conjunto denso . Como un Corolario importante , se sigue que tal conjunto no contiene algún rectángulo $A \times B$ con A y B satisfaciendo a alguna de las siguientes propiedades :

a) G_δ denso .

b) medida positiva ,

c) propiedad de Baire y de la segunda categoría .

I

GLOSARIO DE CONCEPTOS

Conjunto denso en ninguna parte : Un conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ se llama denso en ninguna parte si $\bar{S} \cap U \neq U$ para cualquier conjunto abierto no vacío U.

Conjunto de la primera categoria : Es aquel que se puede representar como la unión contable de conjuntos densos en ninguna parte . (por ejemplo $\mathbb{Q}$).

Conjunto de la segunda categoria : Es aquel que no se puede expresar como una unión contable de conjuntos densos en ninguna parte. (por ejemplo $\mathbb{R}$, (BAIRE)).

Conjunto de medida cero : Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, (no necesariamente acotado), se dice que tiene medida cero , si para cada $\varepsilon > 0$ existe un cubrimiento de A , digamos, $S_1, S_2, S_3, \ldots$, por un número contable de rectángulos , tales que el volúmen total : $\sum_{i=1}^{\infty} V(S_i) < \varepsilon$. Recordemos que $S_1, S_2, S_3, \ldots$, se dice que cubren A , cuando $\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i \supset A$.

Conjunto F_σ : Es la unión contable de conjuntos CERRADOS .

Conjunto G_δ : Es la intersección contable de conjuntos ABIERTOS .

Conjunto residual : Es aquel que és o contiene un conjunto G_δ - denso . (por ejemplo los irracionales) .

Propiedad de Baire : Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ se dice que tiene la propiedad de Baire , si se puede expresar en la forma : $A = G \Delta P$, donde G es un conjunto abierto y P es un conjunto de la primera categoria .

Convolución de funciones : Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones integrables en toda la recta . Entonces la función :

$$h(x) = (f * g) (x) = \int f (x - y) g (y) dy ,$$

se llama la CONVOLUCION de las funciones f y g .

Función caracteristica : Sean X un espacio medible y $E \subset X$,entonces :

$$\chi_E (x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E \\ 0 & \text{si } x \notin E \end{cases} ,$$

es una función medible y se le llama función caracteristica del conjunto E .

Espacio L^2 : Es el espacio de las funciones de cuadrado integrable en un espacio medible X , esto es , funciones f en X tales que :

$$\int f^2 (x) d \lambda < \infty .$$

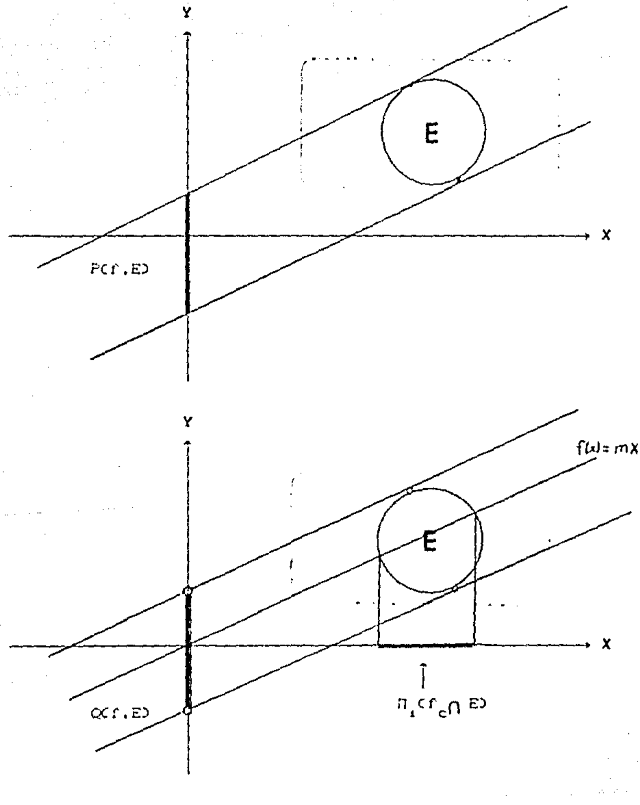

FIGURA 1

En general, el conjunto $R(f, E)$ no lo podemos visualizar, geométricamente, de manera <u>simple</u>.

1. Propiedades :

a) $Q(f, E) \subset P(f, E)$,

b) $R(f, E) \subset P(f, E)$.

Demostración :

a) Supongamos que $c \in Q(f, E)$, entonces, por definición :

$\lambda_1(\Pi_1(f_c \cap E)) > 0$, de donde $\Pi_1(f_c \cap E) \neq \phi$
$\Rightarrow f_c \cap E \neq \phi$.

$$\therefore \; c \in P(f, E).$$

$$\therefore \; Q(f, E) \subset P(f, E).$$

b) Ahora supongamos que $c \in R(f, E)$, entonces, por definición, tenemos que $\Pi_1(f_c \cap E)$ es de la segunda categoría en $\mathbb{R}$.

$$\therefore \; \Pi_1(f_c \cap E) \neq \phi \text{ y así } f_c \cap E \neq \phi.$$

$$\therefore \; c \in P(f, E).$$

$$\therefore \; R(f, E) \subset P(f, E). \quad \blacksquare$$

Ejemplo 1 . Sean $A = \mathbb{Q}$, $B = \{3\}$ y $f(x) = x$ (la identidad), entonces tenemos que :

$$E = A \times B = \{ (x, 3) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{Q} \} \text{ y } f_c(x) = x + c \ .$$

Por otra parte , $f_c \cap E$ esta dado por :

$$x + c = 3 \Rightarrow c = (3 - x) \in \mathbb{Q} \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{Q} ,$$

$$\text{y así} \quad f_c \cap E \neq \phi \quad \text{si} \quad c \in \mathbb{Q} \ .$$

Por consiguiente , tenemos que :

$P(f,E) = \mathbb{Q}$, $Q(f,E) = \phi$ y $R(f,E) = \phi$, de donde

$Q(f,E) \subsetneq P(f,E)$ y $R(f,E) \subsetneq P(f,E)$.

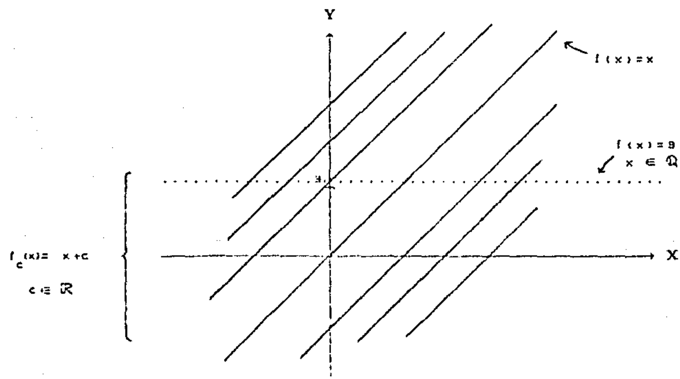

FIGURA 2

Ejemplo 2 . Sean $f(x) = x$, la función identidad , y

$$E = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + (y-2)^2 \leq 1 \} \cup$$

$$\cup \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -x + 4 \, , \, 2 \leq x \leq 4 \} .$$

Entonces tenemos que :

$$Q(f,E) = R(f,E) = (1-\sqrt{2}\,,\, 1+\sqrt{2}\,) \subsetneq [-4,\, 1+\sqrt{2}\,] = P(f,E) ,$$

como podemos observar en la siguiente gráfica :

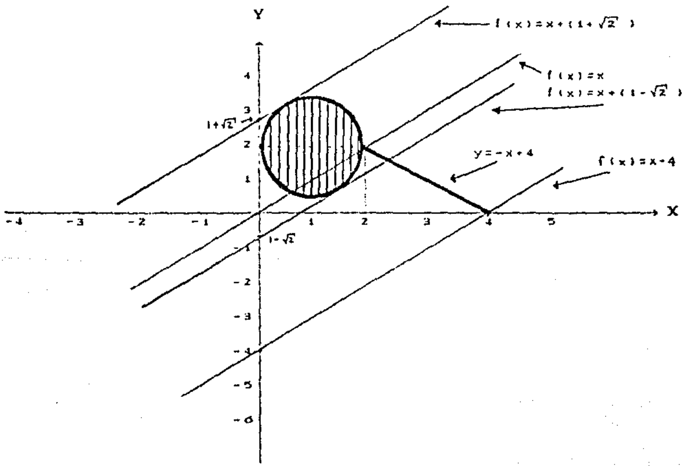

FIGURA 3

OBSERVACIONES :

a) Q (f,E) puede ser un subconjunto propio de P (f,E) .

b) R (f,E) puede ser un subconjunto propio de P (f,E) .

Se podría pensar , como lo hace CEDER en [2], página 207 , que Q(f,E) "llena" casi todo P (f,E) , en el sentido de medida (*) , siempre que $\lambda_2 (E) > 0$. Sin embargo , esto no es cierto , como lo hizo ver ANANTHARAMAN en [1] con el siguiente ejemplo :

Sean $E = [1, 3] \times [-1, 0] \cup [1, 3] \times [4, 5] \cup$

$$\cup \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 2 \text{ y } 0 \leq y \leq 4 \}$$

y $f (x) = x$, la función identidad en $\mathbb{R}$.

Entonces resulta que $\lambda_2 (E) = 4 > 0$ y , además , se tiene que :

$P (f,E) = [-4, 4]$ mientras que $Q (f,E) = (-4,-1) \cup (1, 4)$,

y éste no "llena" casi todo P(f,E), en el sentido de medida, ya que :

(*) : Significa que $\lambda_1 (P(f,E) - Q(f,E)) = 0$.

$$\lambda_1 \left(P(f,E) - Q(f,E) \right) = \lambda_1 \left\{ [-4,4] - ((-4,-1) \cup (1,4)) \right\} =$$

$$= \lambda_1 \left(\{-4\} \cup [-1,1] \cup \{4\} \right) =$$

$$= 2 \neq 0 .$$

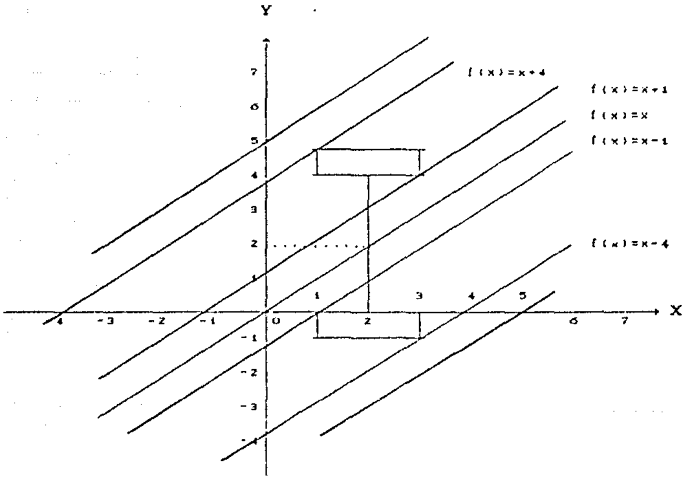

FIGURA 4

¿ Qué propiedades de E nos garantizan que Q(f,E) "llene" casi todo P(f,E) ? .

El autor ANANTHARAMAN , en [1] , afirma que una condición necesaria es que E sea de *medida* completa , usando el hecho de que λ_2 es INVARIANTE bajo rotaciones y el Teorema de Fubini , como se probará en la siguiente proposición :

PROPOSICION 1.0 : Si $E \subset \mathbb{R}^2$ tiene medida completa , entonces $Q(f,E)$ "llena" casi todo $P(f,E)$, en el sentido de medida .

P.D. $\lambda_1 (P (f, E) - Q (f, E)) = 0$.

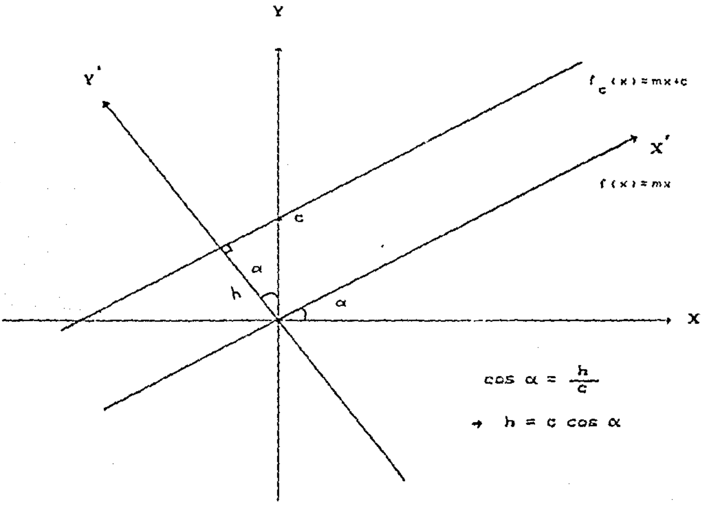

FIGURA 5

Demostración : Como E tiene medida completa , entonces E^c tiene medi CERO . Por el Teorema de Fubini sabemos que E^c_x tiene medida CERO para toda x , excepto , tal vez , por un conjunto A lineal, tal que $\lambda_1 (A) = 0$.

Al girar el plano cartesiano un ángulo α = Arctan (m) , tenemos que

E^c se transforma en el conjunto E^c_h ,

E^c_x se transforma en el conjunto $E^c_{x_h}$ y $E^c_{x_h}$ coincide con $P(f,E^c_h)$, de donde $E^c_{x_h} \supset Q(f,E^c_h)$.

Como la medida de Lebesgue es invariante bajo rotaciones , entonces tenemos que : $\lambda_2 (E^c) = \lambda_2 (E^c_h) = 0$.

Aplicando nuevamente el Teorema de Fubini resulta que :

$\lambda_1 (E^c_{x_h}) = 0$ y así $\lambda_1 (Q(f,E^c_h)) = 0$, para todo x_h , excepto tal vez , por un conjunto lineal A_h de medida CERO .

$\therefore$ $Q(f,E_h)$ tiene medida completa en $\mathbb{R}$ y , por la linealidad de la transformación , Q (f,E) tiene también medida completa en $\mathbb{R}$.

Puesto que $Q(f,E) \subset P(f,E)$, entonces , en particular , Q (f,E) tiene medida completa en P (f,E) y así :

$$\lambda_1 (P(f,E) - Q(f,E)) = 0 .$$ ∎

La siguiente proposición establece propiedades que nos serán de utilidad :

PROPOSICION 1.1 : Sean A y B subconjuntos de $\mathbb{R}$, E el rectángulo $A \times B$ y $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función lineal contínua .

Entonces :

a) $P(f,E) = B - f(A)$,

b) $P(f,E)' = \{ c \in \mathbb{R} \mid c + f(A) \subset B' \}$ e

c) $Q(f,E) = \{ c \in \mathbb{R} \mid \lambda_1 (A \cap f_c^{-1}(B)) > 0 \}$.

donde A y B son conjuntos medibles .

Prueba de a) :

Supongamos que $c \in P(f,E)$, entonces $f_c \cap E \neq \phi$,de donde se sigue que $\exists (x,y) \in f_c \cap E$, esto es , $(x,y) \in f_c$ y $(x,y) \in E$.

Como $(x,y) \in f_c$, entonces $y = f(x) + c \rightarrow c = y - f(x)$.

Por otra parte , $(x,y) \in E = A \times B \rightarrow x \in A$ y $y \in B$, y así resulta que $c = y - f(x) \in B - f(A)$.

$$\therefore P(f,E) \subset B - f(A) .$$

Ahora supongamos que $c \in B - f(A)$, entonces c es de la forma :

$y - f(x)$, donde $y \in B$ y $x \in A$; esto es , $(x,y) \in E = A \times B$.

pero $c = y - f(x) \Rightarrow y = f(x) + c$, de donde $(x,y) \in f_c$.

$\therefore$ $(x,y) \in f_c \cap E$ y así $f_c \cap E \neq \phi$.

$\therefore$ $c \in P\,(f,E)$ y , por consiguiente , $B - f(A) \subset P\,(f,E)$.

$\therefore$ $P\,(f,E) = B - f(A)$.

Prueba de b) :

Tenemos que : $P\,(f,E)' = \{ c \in \mathbb{R} \mid f_c \cap E = \phi \}$.

Sea $c \in P\,(f,E)'$, entonces se sigue que $\exists\,(x,y) \in f_c$ tal que $(x,y) \notin E = A \times B$.

Como $(x,y) \in f_c$, entonces $y = f(x) + c$ y así , para cada $x \in A$, tenemos que $y \notin B$ (pues en caso contrario $(x,y) \in E$) , esto es , $y \in B'$.

$\therefore$ Para cada $x \in A$ tenemos que $y = f(x) + c \in B'$,

y , por consiguiente , $f(A) + c \subset B'$.

$\therefore$ $c \in \{ c \in \mathbb{R} \mid c + f(A) \subset B' \}$.

$\therefore$ $P\,(f,E)' \subset \{ c \in \mathbb{R} \mid c + f(A) \subset B' \}$.

Inversamente , supongamos que $c \in \{ c \in \mathbb{R} \mid c + f(A) \subset B' \}$, entonces para cada $x \in A$, tenemos que $y = c + f(x) \in B'$.

$$\therefore \quad (x,y) \in f_c \quad .$$

Puesto que para cada $y \in B'$, tenemos que $y \notin B$, entonces resulta que $(x,y) \notin E = A \times B$.

$$\therefore \quad c \text{ es tal que } f_c \cap E = \phi \quad .$$

$$\therefore \quad c \in P(f,E)' \text{ y así } \{ c \in \mathbb{R} \mid c + f(A) \subset B' \} \subset P(f,E)'$$

$$\therefore \quad P(f,E)' = \{ c \in \mathbb{R} \mid c + f(A) \subset B' \} \quad .$$

Prueba de c) :

Como por definición $Q(f,E) = \{ c \in \mathbb{R} \mid \lambda_1(\Pi_1(f_c \cap E)) > 0 \}$, entonces basta probar que $\Pi_1(f_c \cap E) = A \cap f_c^{-1}(B)$.

Supongamos que $x \in \Pi_1(f_c \cap E)$, entonces $f_c \cap E \neq \phi$ de donde se sigue que $\exists\, (x,y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $(x,y) \in f_c \cap E$, esto es , $(x,y) \in f_c$ y $(x,y) \in E = A \times B$.

Como $(x,y) \in f_c$, entonces $y = f_c(x) = f(x) + c$.

Como $(x,y) \in E = A \times B$, entonces $\underline{x \in A}$ y $y \in B$.

Pero $y = f_c(x) \in B \rightarrow f_c^{-1}(f_c(x)) \in f_c^{-1}(B) \rightarrow \underline{x \in f_c^{-1}(B)}$.

$\therefore\ x \in A \cap f_c^{-1}(B)$ y así $\Pi_1(f_c \cap E) \subset A \cap f_c^{-1}(B)$.

Ahora supongamos que $x \in A \cap f_c^{-1}(B)$, entonces $x \in A$ y $x \subset f_c^{-1}(B)$.

Pero $x \in f_c^{-1}(B) \rightarrow f_c(x) \in f_c(f_c^{-1}(B)) \rightarrow f_c(x) \in B \rightarrow$

$\rightarrow y = f_c(x) \in B \rightarrow y = f(x) + c \in B$.

$\therefore\ (x,y) \in f_c$ y $(x,y) \in E = A \times B$.

$\therefore\ (x,y) \in f_c \cap E$ y así $x \in \Pi_1(f_c \cap E)$.

$\therefore\ A \cap f_c^{-1}(B) \subset \Pi_1(f_c \cap E)$.

$\therefore\ \Pi_1(f_c \cap E) = A \cap f_c^{-1}(B)$. ■

COROLARIO 1.2 : Sean A de segunda categoría , B residual y $E = A \times B$.

Entonces $P(f,E) = \mathbb{R}$ para cada función lineal <u>continua</u> f , no idénticamente cero .

Prueba :

Como f es lineal , entonces f preserva a los conjuntos de segunda categoría ,en particular, siendo A un conjunto de segunda categoría , f(A) es de <u>segunda</u> <u>categoría</u> y así lo es también la traslación dada por $c + f(A)$.

Como B es un conjunto residual , entonces su complemento , B' , es de la primera categoria .

Por el inciso b) de la Proposición 1.1 sabemos que :

$$P\,(f,E)' = \{\, c \in \mathbb{R} \mid c + f(A) \subset B' \,\} \;.$$

Pero siendo $c + f(A)$ un conjunto de la segunda categoria y B' de la primera categoria , es claro que $c + f(A) \not\subset B'$.

$$\therefore\; P\,(f,E)' = \phi \;,\text{ de donde }\; P\,(f,E) = \mathbb{R} \qquad \blacksquare$$

PROPOSICION 1.3 : Sean $E \subset \mathbb{R}^2$ y f una función lineal y continua . Entonces $P\,(f,E)^{o} = \phi$ si y solo si E' contiene un conjunto denso de lineas paralelas a f .

Prueba :

Por el inciso b) de la Proposición 1.1 sabemos que :

$$P\,(f,E)' = \{\, c \in \mathbb{R} \mid c + f(A) \subset B' \,\} = \{\, c \in \mathbb{R} \mid f_c \subset E' \,\} \;.$$

$\Rightarrow$) . Supongamos que $P\,(f,E)^{o} = \phi$, entonces $P\,(f,E)'$ es un conjunto denso en $\mathbb{R}$, de donde se sigue que f_c es una familia densa de rectas paralelas a f .

$\therefore$ $E^{'}$ contiene un conjunto <u>denso</u> de rectas paralelas a f

(pues $f_c \subset E^{'}$) .

$\Leftarrow$) . Supongamos que $E^{'}$ contiene una <u>familia</u> densa de rectas <u>paralelas</u> a f , entonces , como $f_c \subset E^{'}$, se tiene que :

$$P(f,E)^{'} = \{ c \in \mathbb{R} \mid f_c \subset E^{'} \} ,$$

es un conjunto <u>denso</u> en $\mathbb{R}$, esto es , $P(f,E)^{o} = \phi$. ∎

A continuación veremos que se puede construir un conjunto A , de la segunda categoría , tal que la <u>proyección</u> de $A \times A$ <u>sobre</u> cualquier recta con pendiente racional y ordenada al origen racional <u>no</u> contiene un <u>intervalo</u> . Para ello necesitamos contar con un buen ordenamiento de <u>todos</u> los subconjuntos G_δ <u>residuales</u> de la recta real .

Los siguientes lemas nos servirán de apoyo :

LEMA 1 . Hay a lo más c conjuntos abiertos .

En efecto , para cada conjunto abierto U de $\mathbb{R}$, si $p \in U$ entonces <u>existen</u> $a,b \in \mathbb{Q}$ tales que $p \in (a,b) \subset U$, y el conjunto :

$$B = \{ (a,b) \subset \mathbb{R} \mid a,b \in \mathbb{Q} \} ,$$

es llamado una base numerable de la topología de $\mathbb{R}$.

Si un espacio tiene una base numerable B , la topología φ (familia de intervalos abiertos) es de cardinalidad menor o igual a c , ya que :

$$\varphi \subset \mathbb{P}(B) \Rightarrow |\varphi| \leq |\mathbb{P}(B)| = 2^{\aleph_0} = c \ .$$

Por consiguiente , hay a lo más c conjuntos abiertos . ∎

LEMA 2 . Hay c conjuntos G_δ residuales .

En efecto , consideremos la aplicación :

$$\begin{aligned} \chi \ : \ \varphi^{N} = \varphi \times \varphi \times \varphi \times \ldots & \longrightarrow G_\delta \\ \{ U_n \}_{n=1}^{\infty} & \longrightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \end{aligned}$$

Pero tenemos que :

$|\varphi^{N}| = c^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0^2} = c$, y así es claro que χ es una aplicación suprayectiva , luego hay a lo más c conjuntos G_δ .

Finalmente , como $\mathbb{R} - \{ r \}$ es un conjunto G_δ residual para cada $r \in \mathbb{R}$ y $|\{ \mathbb{R} - \{ r \} \mid r \in \mathbb{R} \}| = c$, entonces hay exactamente c conjuntos G_δ residuales . ∎

DEMOSTRACION :

Supongamos que $\mathbb{Q}$ denota al conjunto de los numeros racionales y sea $\{ G_\alpha \}_{\alpha<c}$ un buen ordenamiento de <u>todos</u> los subconjuntos G_δ residuales de la recta real .

Escojamos $a_0 \in G_0 - \mathbb{Q}$. Supongamos que hemos elegido $a_\alpha \in G_\alpha$ para todo $\alpha < \beta$ de tal manera que :

$$a_u \notin \mathbb{Q}\, a_v + \mathbb{Q} \quad \text{siempre que} \quad u , v < \beta \quad .$$

(por la manera de definir a cada a_α , éstos son irracionales) .

Ahora elijamos $a_\beta \in G_\beta - \bigcup \{ \mathbb{Q}\, a_\alpha + \mathbb{Q} \mid \alpha < \beta \}$.

Definamos $A = \{ a_\beta \mid \beta < c \}$, entonces el conjunto A es de la segunda categoria , ya que <u>intersecta</u> a cada conjunto <u>residual</u> G_δ .

De lo anterior surje la siguiente afirmación :

<u>Ninguna</u> recta de la forma $y = rx + s$, para $r, s \in \mathbb{Q}$, puede <u>intersectar</u> al conjunto $A \times A = \{ (a_\beta, a_\delta) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha < \beta , \delta < c \}$.

En efecto , si existiera alguna recta de la forma $y = rx + s$ que <u>intersectara</u> al conjunto $A \times A$, entonces se tendria que :

$(x,y) = (x, rx + s) \in A \times A$, en donde $x \in A$ y $rx + s \in A$ implican que $x = a_\beta$ y $rx + s = a_\delta$.

Sustituyendo obtenemos $ra_\beta + s = a_\delta \in A$, por consiguiente $\beta < \delta$.

Por otra parte , $ra_\beta + s = a_\delta \rightarrow ra_\beta = a_\delta - s \rightarrow a_\beta = \frac{1}{r} a_\delta - \frac{s}{r}$.

$$\therefore \ \frac{1}{r} a_\delta - \frac{s}{r} = a_\beta \in A \text{ , y así } \delta < \beta \ \overset{\nabla}{\circ} \ .$$

$\therefore$ No existe intersección de $A \times A$ con rectas de la forma $y = rx + s$, para $r,s \in Q$.

Por consiguiente , la proyección de $A \times A$ sobre cualquier recta con pendiente racional y ordenada al origen racional no contiene números racionales y , por lo tanto , no contiene ningún intervalo . ■

S E G U N D A   P A R T E

Vamos a estudiar las propiedades de $P(f,E)$ y $Q(f,E)$ cuando E es un conjunto <u>COMPACTO</u> :

PROPOSICION 2.1 : Si E es un conjunto <u>compacto</u> en $\mathbb{R}^2$, entonces, para cada función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ <u>continua</u> :

$$P(f,E) \text{ es compacto en } \mathbb{R} .$$

Prueba :

Supongamos que $c \in P(f,E)$, entonces $\exists\, (x,y) \in \mathbb{R}^2$ tal que :

$$(x,y) \in f_c \cap E \text{, de donde } y = f(x) + c \Rightarrow c = y - f(x) .$$

Definimos $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $\varphi(x,y) = y - f(x)$ para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Entonces φ es continua ya que f es <u>continua</u>.

Como bajo transformaciones continuas la <u>imagen</u> de un conjunto compacto es <u>compacta</u>, entonces E compacto $\Rightarrow$ $\varphi(E)$ <u>compacto</u>.

Pero tenemos que :

$$\varphi(E) = \{ y - f(x) \mid (x,y) \in E \} =$$

$$= \{ c \in \mathbb{R} \mid \exists\, (x,y) \in E \cap f_c \; ; \; c = y - f(x) \} = P(f,E) .$$

$$\therefore \; P(f,E) \text{ es compacto} . \qquad \blacksquare$$

Si E no es compacto , entonces P no es necesariamente compacto como se puede ver en el siguiente ejemplo :

Ejemplo : Sean $E = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1 \}$ y $f(x) = x$, la identidad en $\mathbb{R}$.

Entonces tenemos que :

$$P(f,E) = \{ c \in \mathbb{R} \mid f_c \cap E \neq \phi \} = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) .$$

que no es compacto en $\mathbb{R}$.

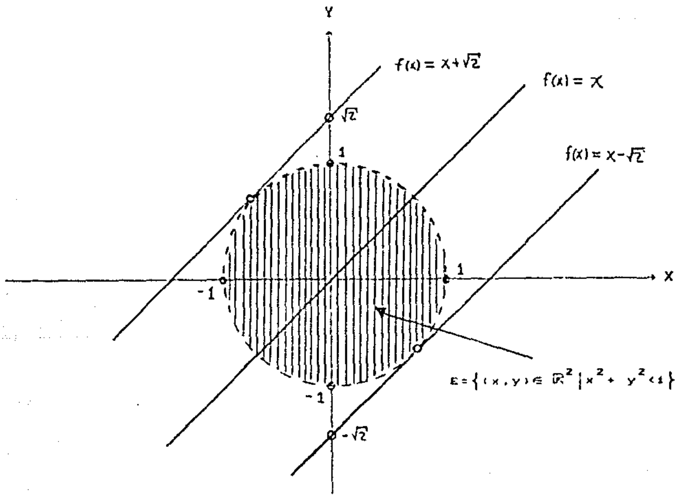

FIGURA 6

Sí E es un compacto y f continua , escribamos $P \equiv P(f,E)$.

Entonces , por la proposición anterior , P es compacto en $\mathbb{R}$.

Por ser P compacto contiene a sus valores máximo y mínimo .

Sean $\alpha = \inf P$ y $\beta = \sup P$ tales valores .

Definamos $\phi : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}$ por $\phi(c) = \lambda_1(\Pi_1(f_c \cap E))$,

para $c \in [\alpha, \beta]$.

Vamos a ver que ϕ es semicontinua superior , y para establecer

ésto necesitaremos de los siguientes lemas :

LEMA 1 . Para cualquier secesión $\{A_k\}$ tenemos que :

$$\text{Ls } A_k \supset \overline{\lim}\, A_k .$$

Prueba :

Sea $p \in \overline{\lim}\, A_k$, entonces hay una infinidad de términos A_k tales que $p \in A_k$. Consideremos $V(p)$ una vecindad arbitraria de p , es claro , entonces , que $V(p) \cap A_k \neq \phi$, para una infinidad de k's . Pero ésto último implica que $p \in \text{Ls } A_k$.

$$\therefore \overline{\lim}\, A_k \subset \text{Ls } A_k . \qquad \blacksquare$$

Lema 2 . $\lambda_1(\overline{\lim}\, \Pi_1(f_{c_k} \cap E)) \geq \overline{\lim}\, \lambda_1(\Pi_1(f_{c_k} \cap E))$.

Prueba : Tenemos que :

$$F - \overline{\lim}\, A_n = \{ x \in F \mid x \in A_n \text{ para un número finito de } n\text{'s} \} =$$

$$= \{ x \in F \mid x \in F - A_n \text{ a partir de cierta } n \} .$$

De la definición anterior se sigue que $\exists\, N$ tal que :

$$x \in \bigcap_{n=N}^{\infty} (F - A_n) = B_N \text{ , en donde } B_N \subset B_{N+1} \text{ , } B = \bigcup_{N=1}^{\infty} B_N$$

$$\text{y} \quad \chi_{B_N} \longrightarrow \chi_B .$$

Por consiguiente , tenemos que :

$$\lambda (B) = \int_F \chi_B \leq \underline{\lim} \int_F \chi_{B_N} = \underline{\lim}\, \lambda (B_N) \text{ , por el Lema de Fatou .}$$

$$\therefore \; - \lambda(B) = - \int_F \chi_B \geq - \underline{\lim} \int_F \chi_{B_N} = - \underline{\lim}\, \lambda(B_N) .$$

$$\therefore \; \lambda(\overline{\lim}\, A_n) = \lambda (F - B) = \lambda(F) - \lambda(B) \geq \lambda(F) - \underline{\lim}\, \lambda (B_N) =$$

$$= \overline{\lim} (\lambda F - \lambda B_N) = \overline{\lim}\, \lambda(F - B_N) = \overline{\lim}\, \lambda(A_n) \quad \blacksquare$$

Tenemos , pues , la siguiente Proposición :

PROPOSICION 2.2 : $\phi (c) = \lambda_1 (\Pi_1 (f_c \cap E))$ es semicontinua superior , para $c \in [\alpha, \beta]$.

Demostración :

Sea $\{ c_k \}$ una sucesión en $[\alpha, \beta]$ que converge a $c \in [\alpha, \beta]$.

Se probará que $\overline{\lim}\, \phi (c_k) \leq \phi (c)$.

Para cualquier sucesión $\{ A_k \}$ de conjuntos en un espacio métrico X, el límite superior, $Ls\, A_k$, esta dado por :

$$Ls\, A_k = \{ x \in X \mid \exists \text{ una subsucesión } \{ A_i \} \text{ de } A_k \text{ y } x_i \in A_i \text{ para cada } i \text{, tal que } x_i \longrightarrow x \text{ cuando } i \longrightarrow \infty \}.$$

Afirmamos que $Ls\, \Pi_1(f_{c_k} \cap E) \subset \Pi_1(f_c \cap E)$.

Supongamos que $x \in Ls\, \Pi_1(f_{c_k} \cap E)$, entonces existe una subsucesión $\{ c_i \}$ de $\{ c_k \}$ y $x_i \in \Pi_1(f_{c_i} \cap E)$ para cada i tal que : $x_i \longrightarrow x$ cuando $i \longrightarrow \infty$. Como Π_1 es la primera proyección, entonces existe un $y_i \in \mathbb{R}$ tal que $(x_i , y_i) \in f_{c_i} \cap E$ para cada i .

Así tenemos que $y_i = f(x_i) + c_i$, y ya que f es una función continua , entonces la sucesión $\{ y_i \}$ converge a $y = f(x) + c$.

Por consiguiente $(x,y) \in f_c$.

Por ser E un conjunto compacto en $\mathbb{R}^2$, en particular es <u>cerrado</u> y así contiene a todos sus puntos de <u>acumulación</u> .

Por consiguiente , puesto que la sucesión $\{(x_i ,y_i)\}$ está contenida en E y <u>converge</u> a (x,y) , entonces se sigue que $(x,y) \in E$.

$$\therefore\ (x,y) \in f_c \cap E \ \text{ y así } \ x \in \Pi_1(f_c \cap E) .$$

$\therefore$ $Ls\, \Pi_1(f_{c_k} \cap E) \subset \Pi_1(f_c \cap E)$ como se afirmaba .

$$\therefore \ \phi(c) = \lambda_1(\Pi_1(f_c \cap E)) \geq \lambda_1(Ls\, \Pi_1(f_{c_k} \cap E)) \geq$$

$$\geq \lambda_1(\overline{\lim}\, \Pi_1(f_{c_k} \cap E)) \qquad \text{(Lema 1)}$$

$$\geq \overline{\lim}\, \lambda_1(\Pi_1(f_{c_k} \cap E)) \qquad \text{(Lema 2)}$$

$$= \overline{\lim}\, \phi(c_k) \ ,$$

y asi ϕ es semicontinua superior como se aseguraba . ■

Ahora bien , si hacemos $Q \equiv Q(f,E) = \{ c \in \mathbb{R} \mid \phi(c) > 0 \} = \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n$,

en donde : $Q_n = \{ c \in \mathbb{R} \mid \phi(c) \geq \frac{1}{n} \}$ para cada número natural n ,

entonces Q es un conjunto $\underline{F_\sigma}$ ya que, por la proposición anterior , ϕ es semicontinua superior y por lo tanto cada Q_n es un conjunto <u>cerrado</u> . Así pues , tenemos el siguiente corolario :

COROLARIO 2.21 : Si E es un conjunto compacto en $\mathbb{R}^2$, entonces $Q(f,E)$ es un conjunto F_σ .

NOTAS :

a $_1$ Cerradura de $Q(f,E)$.

La conclusión <u>no</u> se puede ampliar al caso en el que $Q(f,E)$ sea un conjunto <u>cerrado</u> , como se puede observar en el ejemplo dado en la sección 1 , figura 4 . En éste teníamos que :

$$Q(f,E) = (-4,\ -1)\ \cup\ (1,\ 4) \quad .$$

En general, un conjunto abierto se puede expresar como un conjunto F_σ .

b) Continuidad de la función ϕ .

Considerando el mismo ejemplo de la sección 1 y girando el conjunto E un ángulo de 45°, en sentido contrario a las manecillas del reloj , y dejando sin alteración las demás hipótesis , sucede que la función ϕ no es continua como se muestra a continuación :

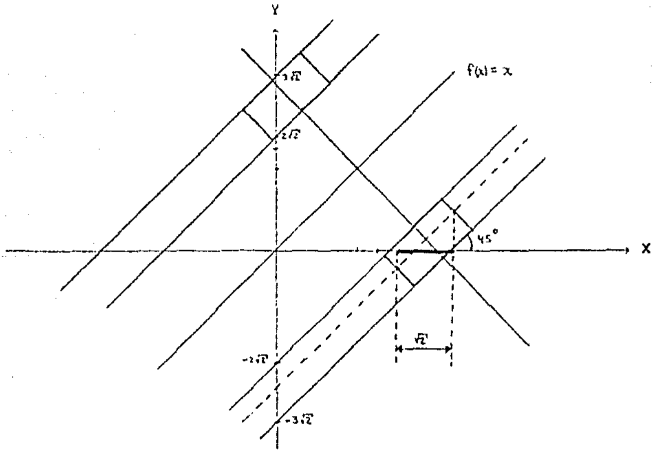

FIGURA 7

Tenemos que E es compacto y así $P(f,E) = [-3\sqrt{2}, 3\sqrt{2}]$.

Por consiguiente, $\phi : [-3\sqrt{2}, 3\sqrt{2}] \longrightarrow \mathbb{R}$ esta dada por :

$$\phi(c) = \begin{cases} \lambda_1(\Pi_1(f_c \cap E)) = 0, & \text{para } c \in (-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}), \\ \lambda_1(\Pi_1(f_c \cap E)) = \sqrt{2}, & \text{para } c \in [-3\sqrt{2}, -2\sqrt{2}] \cup \\ & \cup [2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}], \end{cases}$$

entonces, claramente, ϕ es <u>discontinua</u>.

Sin embargo, ϕ es continua para un rectángulo <u>medible</u> $E = A \times B$, de medida positiva, como veremos en la prueba del Teorema 2.3.

TEOREMA 2.3 : Sean A y B conjuntos medibles en $\mathbb{R}$ con medida finita positiva y sea $E = A \times B$. Entonces $Q(f,E)$ es un subconjunto <u>abierto</u> de $P(f,E)$ para cada función lineal continua f <u>no</u> idénticamente <u>CERO</u>.

Prueba :

Primero sea $f(x) = -x$ para $x \in \mathbb{R}$.

Definimos $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ por la CONVOLUCION de las funciones características χ_A y χ_B (de los conjuntos A y B) en L^2 :

$$(1) \qquad \phi(c) = \chi_A * \chi_B(c) = \int \chi_A(c+y)\,\chi_B(-y)\,d\lambda_1(y) \quad .$$

Tenemos que $\chi_A(c+y)\,\chi_B(-y) = 1 \rightarrow c + y \in A$ y $-y \in B \rightarrow$

$$y \in -c + A \text{ y } y \in -B \rightarrow y \in (-c + A) \cap (-B) \quad .$$

$\therefore$ El integrando en (1) tiene por <u>soporte</u> el conjunto :

$(-c + A) \cap (-B)$ y así tenemos que

$$\int \chi_A(c+y)\,\chi_B(-y)\,d\lambda_1(y) = \lambda_1[(-c + A) \cap (-B)] \quad .$$

$\therefore \phi(c) > 0 \leftrightarrow \lambda_1[(-c + A) \cap (-B)] > 0 \leftrightarrow \lambda_1(A \cap (c - B)) > 0$,

ya que λ_1 es <u>invariante</u> bajo traslaciones .

Por otra parte , para $c \in \mathbb{R}$, tenemos que :

$$f_c(x) = -x + c \rightarrow f_c(-x) = x + c \rightarrow f_c^{-1}(f_c(-x)) = f_c^{-1}(x + c) \rightarrow$$

$$-x = f_c^{-1}(x + c) \rightarrow -(x - c) = f_c^{-1}((x - c) + c) \rightarrow c - x = f_c^{-1}(x) \ .$$

De lo anterior se infiere que la imagen inversa de B esta dada por :

$$f_c^{-1}(B) = c - B \quad .$$

Por consiguiente , $\lambda_1(A \cap (c - B)) > 0 \leftrightarrow \lambda_1(A \cap f_c^{-1}(B)) > 0$

$\therefore \phi(c) > 0 \leftrightarrow c \in Q(f,E)$. (Proposición 1.1 inciso c)

Puesto que ϕ es continua , entonces su <u>soporte</u> $Q(f,E)$ es un conjunto abierto .

Para el caso general , sea $f(x) = m\,x$ con $m \neq 0$.
Por el inciso (c) de la Proposición 1.1 , tenemos que :

$$Q\,(f,E) = \{\, c \in \mathbb{R} \mid \lambda_1(\, A \cap f_c^{-1}(B)) > 0 \,\} =$$

$$\overset{(*)}{=} \{\, c \in \mathbb{R} \mid \lambda_1(\, A \cap \frac{1}{m}\,(\, B - c\,)) > 0 \,\} =$$

$$= \{\, c \in \mathbb{R} \mid \lambda_1[\, m(\, A \cap \frac{1}{m}\,(\, B - c\,))\,] > 0 \,\} =$$

$$= \{\, c \in \mathbb{R} \mid \lambda_1(\, mA \cap (\, B - c\,)) > 0 \,\}$$

y puesto que $\lambda_1(c) > 0 \leftrightarrow \lambda_1(mc) > 0$, entonces solamente tenemos que reemplazar A por mA en el caso especial considerado primero para completar la prueba . ∎

COROLARIO 2.4 : Sean A y B conjuntos medibles en $\mathbb{R}$, con medida finita positiva , y f lineal continua <u>no cero</u> . Entonces $Q\,(f,A{\times}B)$ contiene un intervalo <u>abierto</u> .

Prueba :
Sea $Q \equiv Q\,(f,A{\times}B)$. Es suficiente mostrar que $Q \cap C \neq \phi$ para algun conjunto contable C <u>denso</u> de $\mathbb{R}$.

$(*)$: Tenemos que $f_c(x) = mx + c \rightarrow f_c^{-1}(f_c(x)) = f_c^{-1}(mx + c) \rightarrow$
$x = f_c^{-1}(mx + c) \rightarrow \frac{1}{m}(x - c) = f_c^{-1}(m\,[\frac{1}{m}(x - c)] + c) \rightarrow$
$\frac{1}{m}(x-c) = f_c^{-1}(x-c+c) \rightarrow \frac{1}{m}(x-c) = f_c^{-1}(x)$. $\therefore f_c^{-1}(B) = \frac{1}{m}(B-c)$

Con este fin , fijemos un subconjunto contable C , denso en $\mathbb{R}$. y supongamos que $Q \cap C = \phi$. Entonces para cada $c \in C$ tenemos que :

$$\lambda_1(\{ x \in A \mid f(x) + c \in B \}) = 0 \quad .$$

Por consiguiente , tenemos que :

$$E = \{ x \in A \mid f(x) + c \in B \, , \, c \in C \} \quad ,$$

también tiene medida cero .

Puesto que $\lambda_1(A) > 0$, entonces existe S , subconjunto cerrado de $A - E$, tal que $\lambda_1(S) > 0$.

Por la Proposición 1.1 a) , sabemos que $P(f, S \times B) = B - f(S)$ y así $B - f(S)$ contiene un intervalo , a saber , $Q(f, S \times B)$, por el Teorema 2.3 .

Por consiguiente , $C \cap (B - f(S)) \neq \phi$ lo cual significa que existen $b \in B$, $c \in C$ y $s \in S \subset A$ tales que $b = f(s) + c$.

$\therefore$ $s \in E$ lo cual es una contradicción .

$\therefore$ $Q(f, A \times B)$ contiene un intervalo . ∎

Sería de interés tratar de encontrar conjuntos A y B , más generales , para los cuales siguiera siendo válida la conclusión del Teorema 2.3 , a saber , que $Q(f,E)$ sea un subconjunto abierto de $P(f,E)$. Una posibilidad serían los conjuntos de Baire .

Un conjunto E se dice que tiene la propiedad de Baire , si $E = G \Delta P$, donde G es un conjunto abierto y P es un conjunto de la primera categoría . La clase de los conjuntos que tienen la propiedad de Baire es la sigma-álgebra generada por los conjuntos abiertos junto con los conjuntos de la primera categoría . En general , los conjuntos F_σ y G_δ tienen la propiedad de Baire .

OBSERVACIONES 2.5 :

a) Si A y B tienen la propiedad de Baire , entonces la conclusión del Teorema 2.3 no necesariamente se sigue como mostraremos a continuación :

Sean A el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales, B el conjunto I de los números irracionales y $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, una función lineal y continua , definida por $f(x) = mx$ para $x \in \mathbb{R}$ y alguna $m \in \mathbb{R}$.

Por el inciso a) de la Proposición 1.1 , tenemos que :

$P(f,E) = B - f(A) = I - f(\mathbb{Q}) = I - m\,\mathbb{Q}$, y así resulta que :

$$P(f,E) = \begin{cases} I & \text{si } m = 0 \ , \\ I - \mathbb{Q} & \text{si } m \in \mathbb{Q} \text{ y } m \neq 0 \ , \\ \mathbb{R} & \text{si } m \notin \mathbb{Q} \ . \end{cases}$$

$\therefore$ $P(f,E) \subset I$ siempre que $m \in \mathbb{Q}$ y , por consiguiente , $P(f,E)$ tiene interior VACIO .

b] Si A y B son conjuntos de la segunda categoria , entonces no necesariamente se sigue la conclusión del Teorema 2.3 , como puede verse en el Teorema 1.4 .

De manera natural surje la siguiente pregunta :

¿ Cuándo $\overset{\circ}{P(f,E)}$ contiene un intervalo ?

El siguiente teorema establece condiciones suficientes para los conjuntos A y B :

TEOREMA 2.6 : Sean A y B conjuntos de la segunda categoría , con la propiedad de Baire , y $E = A \times B$. Entonces $\overset{\circ}{R(f,E)} \neq \phi$ para cada función lineal continua f no idénticamente cero .

Prueba :

Sean $A = G \Delta P$ y $B = H \Delta Q$, donde G y H son conjuntos abiertos y P y Q son conjuntos de la primera categoria .

Como por hipótesis A y B son conjuntos de la segunda categoría, entonces G y H <u>no</u> son vacíos y así existen intervalos abiertos <u>no</u> vacíos I y J tales que $I \subset G$ y $J \subset H$.

Sea $m \neq 0$, entonces , para cada $c \in \mathbb{R}$, tenemos que :

$$(c+mA) \cap B = [c+m(G \,\Delta\, P)] \cap (H \,\Delta\, Q) = [c+(mG \,\Delta\, mP)] \cap (H \,\Delta\, Q) .$$

Como $E \,\Delta\, F = (E - F) \cup (F - E)$, entonces $E \,\Delta\, F \supset E - F$ y así :

$$\begin{aligned}
[c+(mG \,\Delta\, mP)] \cap (H \,\Delta\, Q) &\supset [c+(mG - mP)] \cap (H - Q) = \\
&= [c+m(G - P)] \cap (H - Q) = \\
E - F = E \cap F' \longrightarrow \quad &= [c+m(G \cap P')] \cap (H \cap Q') = \\
&= (c+mG) \cap (c+mP') \cap H \cap Q' = \\
&= [(c+mG) \cap H] \cap [(c+mP)' \cap Q'] = \\
&= [(c+mG) \cap H] \cap [(c+mP) \cup Q]' = \\
&= [(c+mG) \cap H] - [(c+mP) \cup Q] .
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad (c+mA) \cap B \supset [(c+mG) \cap H] - [(c+mP) \cup Q] .$$

Pero tenemos que $G \supset I \rightarrow (c+mG) \supset (c+mI)$ y como $H \supset J$, entonces resulta que :

$$(c+mA) \cap B \supset [(c+mI) \cap J] - [(c+mP) \cup Q] .$$

Se sigue , entonces , que existe un intervalo abierto O tal que para cada $c \in O$ el conjunto $(c+mI) \cap J$ contiene un intervalo no vacio . Por consiguiente , el conjunto $(c+mA) \cap B$ contiene un intervalo abierto , no vacio , menos un conjunto de la primera categoria , es decir , para cada $c \in O$ el conjunto $(c+mA) \cap B$ es de la segunda categoria , esto es , el conjunto $A \cap \frac{1}{m}(B - c)$ es también de la segunda categoria .

Puesto que $A \cap \frac{1}{m}(B - c) = A \cap f_c^{-1}(B)$, entonces se sigue que :

$$O \subset \{ c \in \mathbb{R} \mid A \cap f_c^{-1}(B) \text{ es de la segunda categoria} \} =$$

$$= \{ c \in \mathbb{R} \mid \Pi_1(f_c \cap E) \text{ es de la segunda categoria} \} .$$

por la Proposición 1.1 inciso c) .

$$\therefore \; O \subset R(f,E) \quad \text{y asi} \quad R(f,E)^{\circ} \neq \phi \quad . \qquad \blacksquare$$

T E R C E R A   P A R T E

En esta sección estableceremos el resultado principal del trabajo , para esto recordemos que el espacio de todas las funciones lineales continuas puede ser identificado con $\mathbb{R}$.

TEOREMA 3.1 : Existe un conjunto residual E en $\mathbb{R}^2$, con medida completa , tal que $P(f,E)$ tiene interior vacio para un conjunto denso de funciones lineales f .

Prueba :

Denotemos por $\mathbb{Q}$ al conjunto de los números racionales y por E' al complemento de E .

Para cada $m \in \mathbb{R}$ y $r \in \mathbb{Q}$, definimos $L_{m,r}$ como el conjunto :

$$L_{m,r} = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R} \text{ , } y = mx + r \} \quad .$$

Como $\mathbb{Q}$ es un conjunto de la primera categoria y de medida cero , entonces , para cada m fija , el conjunto :

$L_m = \bigcup_r \{ L_{m,r} \mid r \in \mathbb{Q} \}$ es de primera categoria en $\mathbb{R}^2$ y , además , tiene medida cero .

Ahora bien , como la unión contable de conjuntos contables es contable , entonces , al definir : $E' = \bigcup_m \{ L_m \mid m \in Q \}$, vemos que E' es también de la primera categoría en $\mathbb{R}^2$ y de medida <u>cero</u> .

$\therefore$ E es residual en $\mathbb{R}^2$ con medida <u>completa</u> .

Por consiguiente , para cada $m \in Q$ el conjunto E' <u>contiene</u> un conjunto <u>denso</u> de rectas <u>paralelas</u> a $y = mx$ (ya que los racionales forman un conjunto denso en $\mathbb{R}$) .

$\therefore$ $P(f,E)^{\circ} = \phi$ para un conjunto <u>denso</u> de funciones lineales f , de pendiente y ordenada al origen racionales , por la Proposición 1.3 . ∎

COROLARIO 3.2 : Existe un conjunto E , G_δ <u>denso</u> , con medida <u>completa</u> en $\mathbb{R}^2$, el cual <u>no</u> contiene un rectángulo <u>medible</u> $A \times B$ con A y B satisfaciendo a alguna de las siguientes propiedades :

a) G_δ denso ,

b) medida positiva ,

c) propiedad de Baire y de la segunda categoría .

Prueba :

Sea E el conjunto G_δ denso (residual), construido en el Teorema 3.1.

Supongamos que E <u>contiene</u> un rectángulo $A \times B$ donde A y B son conjuntos G_δ densos (residuales), entonces, por el Corolario 1.2, tenemos que $P(f,E) = \mathbb{R}$ para cada función f lineal y continua <u>no</u> idénticamente cero, y así $\overset{\circ}{P(f,E)} \neq \phi$ lo cual contradice al Teorema 3.1.

Si E contiene un rectángulo $A \times B$ tal que los conjuntos A y B tienen medida <u>positiva</u>, entonces, por el Teorema 2.3, resulta que $Q(f,E)$ es un subconjunto <u>abierto</u> de $P(f,E)$ para cada función lineal y continua f, <u>no</u> idénticamente <u>cero</u>.

$\therefore$ $\overset{\circ}{P(f,E)} \neq \phi$, lo cual es, nuevamente, una contradicción con el Teorema 3.1.

Finalmente, si E contiene un rectángulo $A \times B$ con A y B siendo de la segunda categoria y teniendo la propiedad de Baire, entonces, por el Teorema 2.6, sabemos que $\overset{\circ}{R(f,E)} \neq \phi$ y así existe un conjunto <u>abierto</u> O, distinto del vacio, tal que $O \subset R(f,E)$. Como $R(f,E) \subset P(f,E)$, entonces $O \subset P(f,E)$ y así $\overset{\circ}{P(f,E)} \neq \phi$, lo cual es una contradicción con el Teorema 3.1. ∎

B I B L I O G R A F I A

1) R. Anantharaman and J.P. Lee , Planar Sets whose Complements do not Contain a Dense Set of Lines , Real Anal., Exch. 11 (1985 - 86) , pp. 168 - 178 .

2) J. Ceder and D.K. Gangully , On Projections of Big Planar Sets , Real Anal., Exch. 9 (1983 - 84) , pp. 206 - 214 .

3) A.N. Kolmogórov y S.V. Fomin , Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional , MIR (Moscú) , 1975 .

4) K. Kuratowski , Topology I , Academic Press (New York) ,1966 .

5) J.C. Oxtoby , Measure and Category , Springer - Verlag (New York) , 1970 .

6) W. Rudin , Análisis Real y Complejo , Alhambra (Madrid),1979 .

7) H. Steinhaus , Sur les Distances des Points des Ensembles de Mesure Positive , Fund. Math. 1 (1920) , pp. 93 - 104 .