030771
29

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

UNIDAD ACADEMICA DE LOS CICLOS PROFESIONAL Y POSGRADO DEL COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES

ESTUDIO EXPLORATORIO SOBRE EL NIVEL DE DESARROLLO DEL PENSAMIENTO GEOMETRICO DE LOS ESTUDIANTES DEL C.C.H.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS

(EDUCACION MATEMATICA)

QUE PRESENTA:

JUAN MANUEL ESTRADA MEDINA

DIRECTOR DE TESIS

M. EN C. OSCAR CUEVAS DE LA ROSA

MEXICO, D. F. 1991

INDICE

INTRODUCCION

Uno de los problemas principales que actualmente tenemos los profesores que impartimos Geometría en el Colegio de Ciencias y Humanidades (C.C.H.) es el de encontrar métodos de enseñanza que se adecuen a las peculiaridades específicas de un proceso de aprendizaje, en este caso, el de Geometría. Dentro de esta problemática, algunos educadores se han abocado a planear estrategias de enseñanza que se sustentan en la comprensión de las "dificultades" que surgen en la enseñanza de Geometría. En mi parecer, la detección de algunos obstáculos en Geometría, como elemento para instaurar alternativas de enseñanza es uno de los aspectos de esta compleja problemática. En este contexto, otro de los elementos que pueden ser de utilidad para el establecimiento de alternativas es saber acerca de las condiciones cognitivas iniciales bajo las cuales los estudiantes del C.C.H. comienzan el curso de Geometría; saber esto también proporciona una guía para asentar sobre bases más firmes una estrategia de aprendizaje. Sin embargo, estas condiciones de "entrada" las desconociamos los profesores del colegio. Es decir, no había ninguna presunción acerca de cuáles podrían ser estas.

Por estas consideraciones decidí explorar el nivel de desarrollo del pensamiento geométrico de los alumnos. Para ello, se diseñó un cuestionario, que como se sabe, ya fijado el objetivo la planeación del mismo pasa por varias etapas, una de las cuales -la principal- es la idea que genera dicho instrumento, que en este caso, fue el Modelo del desarrollo del pensamiento geométrico de Los Van-Hiele (1957).

Solo me resta manifestar mi agradecimiento por el apoyo entusiasta que me brindaron los maestros: Arturo Bazán, Oscar Cuevas de la Rosa y María del Refugio Gispert y también por sus agudas observaciones para que este trabajo pudiera realizarse.

DEFINICION DE LA PROBLEMATICA.

Presentación:

En este capítulo se bosquejará la problemática en la cual se inserta el trabajo;la exposición de la misma será con base en en los siguientes puntos:

1) Algunos Propósitos Generales del Bachillerato en México.

2)El Colegio de Ciencias y Humanidades una educación alternativa

2.1. Lineamientos Generales del colegio

2.2. Lineamientos Generales del Area de Matemáticas

3) La Geometría en el Colegio de Ciencias y Humanidades.

3.1.Lineamientos Generales de la Geometría

3.2 Problemas en la enseñanza de la Geometría

4) Planteamiento del problema.

5) Objetivo del estudio.

1) Algunos Propósitos Generales del Bachillerato en México.

En nuestro país los estudios de bachillerato (3 años) son una etapa de un sistema escolarizado,que se inicia después de haberse concluído los estudios de primaria (6 años) y secundaria (3 años).

En el sistema educativo nacional hay diversidad de tipos de enseñanza media superior. En términos generales,éstos se pueden clasificar en dos, el terminal y el propedéutico.

En el primero, los planes de estudio están dirigidos a capacitar estudiantes para el mercado de trabajo, por ello sus programas de estudio son específicos en cuanto a los contenidos y habilidades que le servirán al estudiante para desarrollar determinadas actividades productivas o de servicio en la sociedad, ejemplo de estas instituciones son los Conalep(Colegio Nacional de Estudios Profesionales Técnicos), a cuyos egresados no se les permite continuar sus estudios en alguna universidad; es decir, su orientación básica,es la preparación de individuos para el mercado de trabajo.

En la de tipo propedéutico, la enseñanza que se imparte es con miras a preparar estudiantes para continuar estudios superiores en alguna universidad. Es por esto, que los planes de estudio para este ciclo no están diseñados con una orientación especifica; se pretende dar una eseñanza básica en lo humanistico-cientitico. Por ello los contenidos de enseñanza son de carácter general. La inserción del egresado en la sociedad en este segundo tipo de enseñanza tiene lugar después de su preparación universitaria.

Cabe señalar que los dos tipos anteriores no son excluyentes, coexisten bachilleratos que contemplan ambos aspectos, e.g. los CecyT (Centro de Estudios Científicos y Tecnológicos) y El Colegio de Bachilleres. Asimismo, hay bachilleratos especializados cuyos estudios son requisito indispensable para continuar determinadas carreras.(Bravo A., Estrada J.)
Para ilustrar lo dicho anteriormente en relación a la orientación de los bachilleratos en México, se dará a continuación en primer término los propósitos generales de una enseñanza tipo propedéutica (Escuela Nacional Preparatoria) y en segundo, una que considera ambos tipos de enseñanza (Colegio de Bachilleres).

Objetivos Generales de la Escuela Nacional Preparatoria.
La Escuela Nacional Preparatoria a través de su planeación curricular:
a) Auspiciará el desarrollo armónico de la personalidad del educando, propiciando el desenvolvimiento de sus potenciales a través de un acervo cultural, científico y humanístico que promueva los aprendizajes "a ser", "a hacer" y "a aprender".
b) Promoverá en el educando la integración de hábitos de estudio, de disciplina intelectual, de criterio y valoración de objetivos, de actitud reflexiva y crítica; así como la

aplicación de la metodología científica que le permita interpretar objetivamente la realidad.

c) Proporcionará al educando una cultura general básica, dinámica y actualizada que constituya un tronco común durante los dos primeros años; en la que se equilibren los campos científicos y humanísticos, en la que se enfatice el aspecto formativo y se destaquen la lengua propia como instrumento de comunicación y otras que además de facilitar el acceso a las fuentes mismas del conocimiento, propicien el entendimiento entre los pueblos.

d) Fortalecerá en el educando, la conciencia de identidad nacional que por una parte le motive el conocimiento objetivo de su país y le genere conductas cívicas, con base en el ejercicio de los deberes y acciones de servicio y por otro la conveniencia de participación y convivencia en el contexto universal, centrándose en la circunstancia histórica que le tocó vivir.

e) Proporcionará una capacitación propedéutica formativa con bases sólidas, durante el último año del ciclo que provea los estudios especiales y esenciales no especializados y necesarios de un área dada del conocimiento, que permita abordar una determinada carrera profesional.

Objetivos Generales del Colegio de Bachilleres.

El principal propósito del Colegio de Bachilleres, es que el bachiller sea capaz de:

a) Expresarse correcta y eficientemente, tanto en forma oral como escrita, así como interpretar los mensajes recibidos en ambas formas, que maneja y utiliza la información básica formulada en distintos lenguajes y discursos.

b) Utilizar los instrumentos básicos de la ciencia, las humanidades y la técnica para la resolución de problemas en sus dimensiones individual y social, con actitud creativa participando activamente en la solución de problemas socioeconómicos, políticos y ecológicos de su comunidad y su país.

c) Aprender por sí solo, poniendo en práctica métodos y técnicas eficientes para que se propicie su progrso intelectual.

d) Resolver los problemas derivados de su edad y desarrollo, así como incorporarse vocacional y académicamente a estudios superiores, o en su caso si fuera necesario a un trabajo productivo.(Análisis Comparativo de Programas, 1990, Solís Rafael.)

A pesar de esta diversidad del bachillerato,se hace necesario considerar acerca de un perfil del egresado. Entre los rasgos que deben considerarse de este, es que el egresado no sólo debe tener una preparación básica en conocimientos y habilidades sino también poseer elementos objetivos acerca de la sociedad a la cual se va a incorporar. Tener esta conciencia crítica del mundo que le rodea, permitirá al estudiante participar activamente en las soluciones de los problemas de la sociedad. Asimismo se considera que estos tipos de enseñanza desde cierta perspectiva es una diferenciación artificial y por ello no debe servir como argumento para omitir de la currícula asignaturas tales como la geometría.

2)EL COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES UNA EDUCACION ALTERNATIVA.

El C.C.H. es una Institución de enseñanza media superior que surge en el seno de la educación universitaria (1971), y que se inscribe dentro del tipo de bachillerato con propósitos propedéuticos y terminales.

Es un novedoso proyecto educativo que nace como un modelo alternativo a la educación llamada tradicional. Esta, como se sabe ha sido caracterizada por ser un sistema rígido, tanto en su proceso de enseñanza-aprendizaje como en su organización académica. El alumno no es un sujeto activo de su propio aprendizaje, su único rol es el de acumular información y ésta en forma aislada. Uno de los efectos de esta enseñanza es la memorización de los contenidos .No existe un proyecto integral en donde el educando forme parte activo del mismo.

Los contenidos se eligen o se organizan en función de la disciplina que se va a impartir, no en términos de los resultados de aprendizajes esperados. Los resultados de esta enseñanza son la formación de sujetos sin iniciativa, inseguros en la toma de decisiones y acríticos ante la sociedad que les rodea. No se exagera al afirmar que en esta enseñanza uno habla y el otro escucha.

En contraste el C.C.H. es un sistema educativo que intenta dar otro enfoque a lo que es "el enseñar" y lo que es "el aprender".

La propuesta consiste esencialmente en concebir el proceso enseñanza-aprendizaje como una relación dialéctica, en la cual el que enseña como el que aprende juegan un papel activo en la apropiación de conocimientos o en el desarrollo de capacidades intelectuales, habilidades, valores, etc.

El que enseña y el que aprende interactúan, pero el objetivo central en este proyecto es la formación del alumno. En otras palabras, si en el sistema tradicional el proceso se centraba en el educador, ahora en éste se gravita sobre el educando, el objetivo pedagógico es desarrollar y poner en juego las capacidades intelectuales y morales del individuo.

El rol del educador en este sistema es el de ser un guía, un orientador que ayuda al alumno a alcanzar las metas propuestas tomando en cuenta las capacidades y niveles de madurez intelectual que posee el alumno.

Otro rasgo esencial de este modelo es que hace más hincapié en la formación que en la información, entendida aquélla como el desarrollo integral de toda la personalidad del individuo, esto es, en los aspectos intelectuales y morales.
Los contenidos temáticos son seleccionados y organizados en función de la consecusión de los anteriores propósitos de formación del individuo.

2.1.LINEAMIENTOS GENERALES DEL COLEGIO.

En esta parte se expondrán en primer término los planteamientos oficiales del C.C.H. y sus instrumentaciones (programas) en relación a los cursos de matemáticas, y en segundo la de los profesores de la Academia de Matemáticas del Plantel Sur.

De acuerdo a los escritos oficiales (Programas 1979, U.A.C.B.,pág.2.) los objetivos generales del Ciclo de Bachillerato del C.C.H. son:

a) El desarrollo integral de la personalidad del educando, su realización plena en el campo individual y su cumplimiento satisfactorio como miembro de la sociedad.

b) Proporcionar la educación a nivel medio superior indispensable para aprovechar las alternativas profesionales o académicas tradicionales y modernas, por medio del dominio de los métodos fundamentales de conocimiento (los métodos experimental e histórico social) y de los lenguajes (español y matemáticas).

c) Constituir un ciclo de aprendizaje en que se combinen el estudio en las aulas, en el laboratorio y en la comunidad.

d) Capacitar a los estudiantes para desempeñar trabajos y puestos en la producción y los servicios, por su capacidad de decisión y de innovación, sus conocimientos y por la formación de su personalidad que implica el plan académico.

En relación al Plan de Estudios se dice:

El Plan de Estudios del Bachillerato del C.C.H; y todas las actividades que rige, están orientadas a facilitar que los educandos puedan aprender cómo es que se aprende. Por esta razón, es indispensable recordar que lo que se persigue fundamentalmente es que los alumnos cobren conciencia del método con el que están logrando los conocimientos, asimilándolos, interpretándolos, sistematizándolos, aplicándolos. Lo primordial es facilitar a los estudiantes la posibilidad de repetir y recuperar la experiencia de hacer ciencia.[...] El Plan está diseñado de manera que los tres primeros semestres hacen particular énfasis en la forma de conocer la naturaleza (Area de método experimental) y la sociedad (Area de análisis histórico-social), así como las formalizaciones del lenguaje español y las matemáticas... (Op.Cit.pág.3-4).

En el mismo documento se establece que las asignaturas se agrupan por "Areas", por ejemplo, el Area de Matemáticas integra las matemáticas de I a VI, siendo las cuatro primeras obligatorias para todos los alumnos y las dos últimas optativas (Lógica, Estadística, Cibernética y Computación). Respecto a esta clasificación de las asignaturas por áreas se dice:

"El conjunto de asignaturas de un área es resultado de la agrupación de las semejantes y del análisis de una totalidad. A cambio de una enciclopedia cuyo valor informativo se respeta profundamente -se pretende ofrecer la posibilidad para leer la enciclopedia, dando a ella ya no una ordenación alfabética sino una lógica".

Después de haberse explicado el sentido de las áreas, el documento presenta los programas por asignatura; en cada uno "se explica el significado de la asignatura, su orientación básica, su lugar dentro del plan de estudios según semestre y área, así como sus principales objetivos y contenidos" (Op.Cit.Pág.12).

A manera de ejemplo se ilustrará al lector con algunas partes del programa de Matemáticas III (Geometría); éste tiene los siguientes apartados: Presentación, objetivos generales y seis unidades temáticas (El curso y sus implicaciones, Teoría de gráficas, Introducción histórica al estudio de la geometría, Geometría euclidiana, Otras geometrías, Trigonometría) de la misma manera, éstas tienen sus propios objetivos particulares y contenidos. En la presentación se supone que se explicitará, lo que dice el fragmento anteriormente citado, sin embargo en una de sus partes se lee que: La geometría proporciona el conocimiento de una rama de las matemáticas; en ella el estudio es mucho más claro que en otras por intuitivo y concreto.

En este curso se muestra la estructura de una teoría matemática, debido a ello se presenta a la geometría de manera que se distingan, en forma clara, los procesos de formalización. (Op.Cit.Pág.33). Si se atiene uno a este párrafo, la ubicación de la asignatura queda inintelegible, debido a la manera tan general como se presenta. Desde esta perspectiva, caben diversas interpretaciones, las cuales no se abordan aquí.

En lo que refiere, a los objetivos generales se plantea que, el alumno:

- Conocerá la estructura de una teoría matemática.
- Analizará los elementos básicos que contiene una teoría matemática.
- Aplicará la Geometría euclidiana y la trigonometría a la resolución de problemas.

Con las anteriores propuestas programáticas y en particular la de Matemáticas III, la Institución pretendió pasar así, a un nivel operativo. Sin embargo, dicha propuesta no muestra una clara relación entre los lineamientos generales y los objetivos y contenidos temáticos de las propuestas de los programas. Lo anterior puede deberse a que el Documento oficial, sea en esencia una suma de propuestas individuales en las que subyacen interpretaciones igualmente personales de los lineamientos generales y posiciones pedagógicas. La consecuencia de lo anterior, ha sido que en el Colegio, tal instrumento operativo no haya sido contemplado y que cada profesor en el mejor de los casos, haga una libre interpretación de la filosofía y lineamientos generales del Colegio en la impartición de sus cursos.

Ante la situación anterior, un grupo aproximado de 40 profesores de la Academia de Matemáticas del Plantel Sur, se dieron a la tarea de tender el puente entre la filosofía y lineamientos generales del Colegio y los programas de Matemáticas de I a IV. (Tercer Debate: Re-visión de Programas, 1976); pues tal trabajo no había sido emprendido ni por la parte oficial ni la docente.

A continuación, se reproduce el producto de este esfuerzo en lo que toca a lineamientos generales del Colegio y del Area de Matemáticas.

Queremos un hombre que:

- Sea consciente y crítico de su realidad, de la sociedad a la que pertenece y de la realidad del país.
- Valore el trabajo productivo como el instrumento que da a la persona la categoría de ser humano, esto es, que le permite la autoafirmación de su personalidad;
- Aporte su trabajo y esfuerzo a la sociedad, la cual se lo retribuye.
- Ponga en juego todos los conocimientos que posee, para resolver las diferentes problemáticas a las que se enfrenta o ha de enfrentar y que en caso de no poseerlos, sea capaz de buscarlos y encontrarlos.

- Enfrente su realidad con criterios conscientes y claros, de tipo social, científico, técnico, artístico, filosófico u otros;
- Sea autocrítico, es decir, que tenga la capacidad de reconocer si esta actuando en esa realidad de acuerdo a sus criterios de la mejor forma posible.
- Sea congruente en su práctica con los criterios que sostiene.

Retomando los objetivos del Colegio y otras consideraciones, queremos formar a este hombre bajo dos aspectos fundamentales:

1. Que tenga una formación interdisciplinaria y polivalente.
2. Que tenga una educación básica.

Respecto al punto 1, entendemos esta formación como aquélla que permite el enfrentamiento a problemas que requieran de conocimientos desde el enfoque de otras disciplinas, además de conocer las bases científicas generales que conlleven a satisfacer las exigencias de la producción y que pueda convertir al estudiante (potencialmente trabajador), en apto para una gran diversidad de trabajos.

Respecto al punto 2, la educación básica radica en proveerle de los métodos y técnicas necesarias que le fomenten el hábito y la actitud de aplicarlos a problemas concretos y adquirir nuevos conocimientos; como son, el método histórico-social, el método científico experimental, las matemáticas y los métodos y técnicas de investigación documental, herramientas indispensables para aprender a informarse y estudiar sobre materias que aún ignora.

Esta educación básica debe vincular el estudio, la enseñanza en las aulas y laboratorios, con el adiestramiento en el taller y en los centros de trabajo; poniendo énfasis en el ejercico y práctica de los conocimientos teóricos; pretendiendo que esos conocimientos estén orientados a actividades técnicas y/o profesionales.

2.2. Lineamientos Generales del Area de Matemáticas.

Una vez explicitados los objetivos del Colegio de Ciencias y Humanidades , se hace necesario ubicar el Area de matemáticas en este contexto.

La enseñanza de la matemática dentro del colegio adquiere una nueva perspectiva, no se trata de aprender matemática por la matemática misma, sino que contribuya a la formación integral del alumno, en este sentido es que se establecen los objetivos del área.

Desde esta perspectiva, los resolutivos de la Academia satisfacen en parte lo expresado anteriormente, ya que según ésta el estudio de las matemáticas debe proporcionar al alumno:

1. Propiciar en los alumnos el reconocimiento del papel que juega la matemática dentro de la cultura general del individuo, mediante ciertas ramas de ella, que muestren su relación con otras ramas del conocimiento.

- Fomentar la lectura acerca de tópicos científicos, matemáticos que sirvan de apoyo a los cursos para desarrollar su cultura matemática.

2. Lograr por parte del educando la representación de fenómenos y situaciones del mundo físico construyendo modelos que resuelvan los problemas donde se originaron.

- Entendiendo por modelos, la matematización de tales fenómenos y situaciones del mundo físico que dan la posibilidad de que al analizar matemáticamente un problema, reconozca regularidades, patrones en los objetos y sus relaciones, los exprese en lenguaje preciso y trabaje sus propiedades en él, para poder constatar después, si ésto es válido en el entorno en que se originó el problema.

- A través de la resolución de problemas, se tenderá a desarrollar:

* reflexión crítica
* procesos de simbolización y abstracción
* procesos de generalización
* flexibilidad de pensamiento
* generación y perfeccionamiento de algoritmos
* creatividad a través del enfrentamiento a problemas que correspondan a otras ramas del conocimiento que se presenten en su alrededor
* bases para lograr a aprender por sí solos, es decir, para el autoaprendizaje o el aprender a aprender, lo que implica promover el desarrollo de la habilidad para reconocer situaciones de aprendizaje, de manera consciente y manifiesta, y la actitud para buscarlas y/o crearlas
* interés, aceptación y gusto por la matemática, además de valorarla en su aspecto formativo y de aplicación.

3. Desarrollar en los alumnos capacidades intelectuales que involucren la generalización de resultados particulares; la inferencia de resultados particulares a partir de principios generales, la analogía entre situaciones, casos, patrones o resultados, así como la obtención de soluciones a partir de aproximaciones sucesivas entre otros métodos.

Consideraciones Generales de Matemáticas de I a IV.

Con la base anterior el aprendizaje y la enseñanza del álgebra y la geometría:

* es primordial para tener una cultura básica en la matemática
* mostrando la relación del álgebra y geometría con problemas prácticos como generadores de ellas mismas
*orientándolas hacia la construcción de modelos, poniendo relevancia en los aspectos deductivo e inductivo;
* dirigiéndola a la resolución de problemas prácticos y didácticos
* mostrando la relación y aplicación del álgebra y geometría.(Op.Cit.Pág.4.)

3) LA GEOMETRIA EN LA CURRICULA DEL C.C.H.

Como ya fue observado precedentemente, los planteamientos oficiales en relación al lugar que debería jugar la geometría en el C.C.H; no está claro, pues decir, que "En éste (Matemáticas III) se muestra la estructura de una teoría matemática; debido a ello se presenta a la geometría de manera que se distingan, en forma clara, los procesos de formalización" (Op.Cit.Pág.33.) no queda explícito el rol de la geometría en el curso, y debido a ello deja abierta la posibilidad a diversas interpretaciones; dentro de éstas, está la posición que la geometría es el medio por excelencia para desarrollar el pensamiento "lógico" de los estudiantes y se pensó que la manera de lograrlo era poner al alumno hacer "demostraciones" de algunos teoremas de la geometría plana. Bajo este enfoque el curso se iniciaba con la introducción del aparato conceptual básico (definiciones, axiomas y postulados) que serviría de base para la construcción de las demostraciones; pero, como se sabe ésta manera de enseñar la geometría no ha podido rendir sus frutos, en el mejor de los casos, lo que se ha obtenido es que los estudiantes memoricen las demostraciones.

Una de las razones principales que se pueden dar para explicar las decepciones en esta instrucción, es que, es una enseñanza que se basa sólo en las exigencias intrínsicas (orden lógico) del discurso matemático y no en las peculiaridades del proceso de aprendizaje (e.g. condiciones internas del sujeto), en particular se hace a un lado, lo que ya ha sido mencionado, a saber, el nivel de desarrollo del pensamiento de los estudiantes.

Estos reveses, han propiciado buscar otras alternativas las cuales no las tocaremos aqui.

Lo que si se hará, es dejar claro cual será la posición en este trabajo acerca del para qué de la geometría en este ciclo de enseñanza.

De entrada se comparten las propuestas que algunos autores han sugerido sobre el rol que puede jugar la geometría en la educación matemática. Uno de estos proyectos, son las que describe Hoffer en su artículo "Geometry Is More Than Proof" 1981.El titulo es muy sugestivo, pues toca un punto muy sensible y polémico sobre el énfasis que se le ha dado a la enseñanza de la geometría en las últimas décadas, si interpretamos correctamente la idea de Hoffer, su sugerencia consiste en no reducir la geometría a sólo uno de sus elementos, esto es, a la demostración de teoremas, que hay otras capacidades de naturaleza geométrica que son igual de importantes que las habilidades lógicas, y que por tanto también deberian ser desarrolladas.

Algunas de éstas, son las siguientes:

- Visuales.

La geometría claramente es una materia visual, y a menudo estos aspectos pueden servir como una herramienta para las demostraciones.

- Verbales.

Un curso de geometría probablemente estimula el uso de un lenguaje más que cualquier otro curso de matemáticas (...)

Algunos estudiantes tienen fuertes dificultades cuando describen verbalmente un concepto ("Lo entiendo, pero no puedo decirlo").

-Dibujo.

Los cursos de geometría suministran oportunidades a los estudiantes para expresar sus ideas en imágenes y diagramas. En su vida futura, algunos estudiantes tendrán más la necesidad de hacer un dibujo de una situación geométrica que probar un teorema.(...) Las construcciones con regla y compás al inicio de los cursos ayuda a los estudiantes a comprender las propiedades de las figuras.

- Lógicas.

La geometría es una de la materias escolares que ayuda a los estudiantes a aprender a analizar la forma de un argumento y a reconocer argumentos válidos e inválidos en el contexto de figuras geométricas y, en problemas de la vida diaria. Desafortunadamente, algunos cursos de geometría favorecen la memorización sin la comprensión. (...) Para desarrollar las habilidades lógicas, será necesario trabajar mucho informalmente con ideas visuales y verbales antes de ser lanzado a las reglas de la lógica. Ellos deben estar conscientes de la ambigüedad en el lenguaje, de los usos de los cuantificadores, y así sucesivamente.

- Aplicación.

Geometría significa más que "medir la tierra". Los griegos usaron la palabra "mathema" para significar "lo que es aprendido". Se interpreta que los griegos concibieron a las matemáticas como el estudio profundo de los fenómenos físicos. Este punto de vista, se ilustra con la escuela Pitagórica, la cual usó la matemática para explicar, por ejemplo, para explicar los tonos musicales (...) Describir los movimientos de los planetas conduce a cuestiones relacionadas con el círculo, elipses, esferas, y asi sucesivamente.

Se concibe a las matemáticas como el estudio de estructuras - a menudo sugeridas por los fenómenos físicos.

Comúnmente a la idea de describir los fenómenos matemáticamente se le llama modelación matemática. Por análisis del modelo suele obtenerse a menudo información acerca del fenómeno. Uno de los primeros ejemplos de modelos matemáticos se encuentra en los Elementos de Euclides, el cual fue resultado del intento de describir el Universo tal y como fue conocido por los griegos. Los modelos matemáticos son utilizados hoy en día en varios campos tales como la agricultura, biología, psicología y geografía.

Se considera que proponerse forjar estas facultades deberían ser una de las razones para justificar el rol de la geometría en el C.C.H; puesto que, el desarrollo de las mismas permitirá, entre otras cosas, formar estudiantes con un pensamiento abierto, reflexivo y metódico, que es una de las metas generales de la Institución.

Otra de las razones que se pueden apuntar para impartir geometría en este ciclo, es que ésta, participa de las virtudes esenciales de la matemática que son expresadas de manera precisa en el siguiente texto:

"La matemática, como una expresión de la mente humana, refleja la voluntad activa, la razón contemplativa y el deseo de perfección estética. Sus elementos básicos son: lógica e intuición, análisis y construcción, generalidad y particularidad" (Courant y Robbins, pág.3.) Estos elementos están presentes en la geometría euclidiana, y por ello estudiarla a nivel bachillerato es retomar estos elementos, en donde la intuición y el empezar a plantear generalizaciones de algunas demostraciones contribuyen a desarrollar un pensamiento sistemático, a conocer la aplicabilidad y la presencia de elementos geométricos en otras ramas del conocimiento, así como la importancia de la geometría en el desarrollo de la matemática. La geometría entonces, coadyuva a ordenar el pensamiento, con la consecuente contribución a que el estudiante pueda expresar con claridad, coherencia y rigor lógico una idea, un concepto, una discusión.

Además, la geometría sienta bases para el estudio posterior de otras asignaturas, en particular de la geometría analítica tan necesaria par introducirnos a la matemática del movimiento; y por si fuera poco, la geometría también es un medio para acercar al estudiante al Arte, a través de sus formas geométricas, y/o construcciones (e.g. la perspectiva, la "divina proporción").

Los elementos precedentes hacen que la geometría se convierta en una disciplina necesaria que forme parte del plan de estudios del bachillerato.

En resumen, las consideraciones anteriores se hicieron por la falta de precisión en el documento oficial.(Programas. Documento de Trabajo. 1979), acerca del por qué de la ubicación de la geometría en el plan de estudios.

La Academia de Matemáticas del Plantel Sur, también asumió que debería darse geometría euclidiana, pero en sus resolutivos no hay una exposición de motivos sobre el para qué de su inclusión en el Área de Matemáticas; sin embargo, llegó a las siguientes orientaciones:

3.1. LINEAMIENTOS GENERALES DE GEOMETRIA. (matemáticas III y IV).

En relación al aprendizaje y la enseñanza de la geometría, hará énfasis en:

1. Representar mediante modelos geométricos fenómenos y/o situaciones del mundo físico que permitan resolver problemas, propiciando el desarrollo de la capacidad para:

- Visualizar
- Hacer construcciones geométricas
- Simbolizar y abstraer
- Obtener principios generales a través de resultados particulares y viceversa
- Algoritmizar
- Comprobar tanto matemáticamente como en términos del contexto del enunciado del problema estos modelos, como la necesidad de verificar la validez de la solución del problema, e incluso, demostrar.

2. Presentar a la geometría como un medio para llegar al conocimiento del método deductivo.

3. Emplear diferentes métodos en la resolución de problemas como son:

- El gráfico
- Las construcciones geométricas
- La deducción
- La demostración formal y
- Por analogía, entre otros.

Cabe señalar, que el proceso de discusión anterior emprendido por la Academia de Matemáticas, quedó a nivel de lineamientos, quedando pendientes para el futuro cuestiones tales como:

* Determinación de los objetivos específicos
* Análisis de experiencias de aprendizaje y enseñanza
* Análisis de las instrumentaciones didácticas para estos cursos
* Análisis de la bibligrafía básica y otros materiales de apoyo.

3.2.PROBLEMAS EN LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRIA.

Han transcurrido ya aproximadamente cinco años desde que se establecieron los "Lineamientos generales de geometría" y aún la academia no ha avanzado en la discusión de cuestiones tales como: Determinación de los objetivos específicos, análisis de experiencias de aprendizaje y enseñanza, análisis de las instrumentaciones didácticas para los cursos. Sin embargo, es pertinente plantearse las siguientes interrogantes:

En qué medida la enseñanza de la geometría ha logrado con los nuevos lineamientos los aprendizajes deseados?, por qué no se han cumplido?, a qué se debe?

Dado que no se tiene a la mano resultados de algunas evaluaciones que permitan observar, algún cambio en el aprovechamiento escolar después de los resolutivos de la Academia; un indicador que puede sugerir una respuesta aproximada a la primera interrogante, es recurrir a los datos estadísticos de los exámenes ordinarios en relación a los porcentajes de aprobados y no acreditados en Matemáticas III, antes y después de la adopción de los Lineamientos Generales de la Geometría. Con este propósito, se dará al lector a continuación dos tablas que corresponden a dichos periodos, de la misma manera se ofrecerá una gráfica de los resultados de Matemáticas III en todos los planteles del C.C.H. en relación a la asignatura. (Secretaría de Servicios Estudiantiles, C.C.H. Sur, 86-1, 88-1, 90-1)

Tabla 1: MATEMATICAS III, 86-1, ORDINARIO

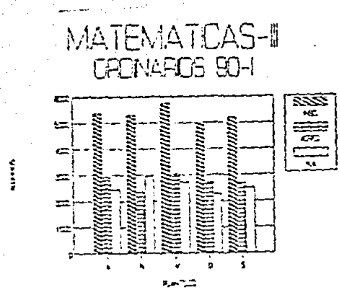
TURNOS	APROBADOS	%	NO ACRED.	%	N.P.	%	TOTAL
01	682	54.7	359	28.8	205	16.5	1246
02	679	57.2	329	27.6	181	15.2	1189
03	511	48.8	291	27.7	246	23.5	1048
04	427	42.8	351	35.2	220	22.0	998
TOTAL	2299	51.3	1330	29.7	852	19.0	4481

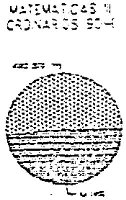
Tabla 2: MATEMATICAS III, 88-1, 90-1, ORDINARIO

TURNOS	APROBADOS	%	NO ACRED.	%	N.P.	%	TOTAL
01	649	51.0	364	28.6	260	20.4	1273
02	642	52.1	371	30.1	218	17.8	1231
03	546	59.0	235	25.4	145	15.6	926
04	431	49.7	245	28.2	191	22.1	867
TOTAL	2268	52.8	1215	28.2	814	19.0	4297

Las estadísticas anteriores, por supuesto que no pueden tomarse como los índices de aprovechamiento de los cursos, sin embargo, los datos en términos brutos indican que la tendencia en la acreditación (50%) antes y después de los resolutivos no se han modificado sustancialmente. Estos resultados son un indicador que las cosas en geometría no marchan del todo bien, a pesar de que la Academia cuenta ya con nuevos lineamientos para la enseñanza de la geometría.

A continuación se presenta la estadística de todos los planteles (Azcapotzcalco, Naucalpan, Vallejo, Oriente y Sur en el periodo 90-1):





Respecto a la segunda pregunta: A qué se debe ésto?
Responderla no es una tarea simple, es un problema en el cual están involucradas distintas variables pero, se pueden aventurar algunas hipótesis que permitan arrojar alguna luz al

asunto. Una que salta a la vista es que todavía la Academia no ha establecido, los objetivos especificos, los contenidos, las instrumentaciones didácticas, etc. Esta situación ha favorecido entre otras cosas, una diversidad de programas en los cursos de geometría, ya que se deja al libre albedrío de cada profesor cuáles deben ser éstos.

Aunado a lo anterior, está la ausencia de sugerencias metodológicas. Otro de los elementos que no se han considerado, en la discusión de programas, son el problema de la madurez intelectual en relación a la materia de estudio y en particular las condiciones iniciales cognitivas bajo las cuales un individuo comienza el curso. Por la poca atención que se le ha puesto a este parámetro pareciera que no es un "problema" que debiera tenerse en cuenta en una instrumentación didáctica. Esta actitud, puede deberse posiblemente a un supuesto -no explícito- que consiste en que el orden del aprendizaje se da en correspondencia con el orden bajo el cual se presenta la disciplina, bajo este supuesto "aprender" significa hacer que el estudiante recorra esta cadena. Desde esta perspectiva las premisas cognitivas no son relevantes. Pero, de acuerdo a las investigaciones de los Van Hiele este elemento si es importante para la concepción de alternativas de aprendizaje, porque cuando no se toman en cuenta, o en el mejor de los casos se "postulan", se producirá una discordancia entre las condiciones iniciales del aprendedor y los requerimientos de la materia y los métodos de enseñanza, esta disonancia se irá agudizando a medida que avance la instrucción, hasta llegar a un punto en el cual el profesor "ya no es escuchado por el alumno".

Indudablemente que el conocimiento precedente no resuelve el problema del aprendizaje en geometría, existen otros factores que tienen sus efectos y que también deben ser elucidados como es el caso de los llamados "obstáculos" (e.g. didácticos y epistemológicos) que no serán analizados en este trabajo. Sin embargo, se sugiere que previamente a la instauración de alternativas, es necesario elaborar un marco general para la concepción de las mismas,por tanto, desde esta perspectiva se acometerá a continuación la problemática de una manera global.

Con el propósito de dar mayor claridad a lo que sigue, se adoptará el punto de vista de la enseñanza como un proceso de comunicación y retroalimentación de información, es decir, que no es unidireccional y del mismo modo; los problemas de aprendizaje, como "problemas de comunicación". Así, los elementos básicos que constituyen la estructura del proceso-aprendizaje serán: el emisor , el mensaje (la materia) y el receptor, donde el profesor y el alumno juegan indistintamente

los papeles de emisor y receptor. Bajo este modelo cuando el proceso se pone _en acto_ aparecen "interferencias" que no dejan que el mensaje sea captado por el receptor de la manera en que fue planeado. Estos ruidos pueden estar localizados en cualquiera de las tres componentes mencionadas.En cualesquiera que se localice, interesa conocer:
Por qué el estudiante no capta el mensaje?, cómo lo capta?, qué causa la interferencia?,de qué naturaleza son éstas? cuál es la manera más adecuada de organizar la información para que sea recibida.

Tener las respuestas a estas interrogantes es de suma importancia ya que permitiría mejorar la comunicación entre emisor y receptor.

Como ya se mencionó, las interferencias que están afectando el mensaje pueden ubicarse en los tres elementos del proceso; por ejemplo, si se sitúa en el emisor, deberá analizarse cómo envía sus mensajes, es decir bajo que estructura están organizados, si fijamos la atención en el mensaje (la materia) interesa saber cómo está codificada y cuál es el "sistema de relaciones" que se requiere para que sea decodificada; cabe precisar que cuando se habla de el "mensaje", no se refiere sólo a una transmisión verbal, sino que aquél puede ser por ejemplo, enfrentmientos y/o proposiciones de acciones para el sujeto ante situaciones problémicas, dicho en otras palabras, la mediación no se da sólo a través de signos lingüísticos. Si está en el receptor se desearía conocer cuál es su sistema decodificador en relación al sistema de la materia y mensaje para que en función de éste, organizar la información para que sea asimilada; dicho con otras palabras, conocer estos aspectos se estaría en mejor disposición para las instrumentaciones didácticas, ya que éstas tenderían a adecuarse a las condiciones del alumno.

Sin embargo,debe quedar claro que los tres elementos (emisor, mensaje y receptor) están imbricados, esto es, que los problemas de enseñanza no se resuelven con el conocimiento de alguno o algunos de ellos, se requiere ver el proceso como una "totalidad" y no como un conglomerado de partes. Esta puntualización viene al caso, pues suele ocurrir que en la búsqueda de alternativas en la enseñanza de la geometría existe la proclividad de enfatizar algunos aspectos del proceso (e.g. cambios de contenido), sin considerar los otros elementos del proceso como por ejemplo las condiciones cognitivas del estudiante, en particular las capacidad iniciales de "recepción", si éstas se desconocen, la comunicación en el mejor de los casos se dificultará. En todo caso lo que debe buscarse es el concierto de los elementos que están involucrados en el proceso.

Es en este contexto, que puede decirse que hay una carencia de estudios referentes a la estructura cognitiva de los estudiantes, pues en la medida en que se tenga un conocimiento más amplio de ésta, la comunicación con el educando será más adecuada.

Resumiendo: en la perspectiva de brindar alternativas que apunten a resolver los problemas en el aprendizaje de geometría, se sugiere adoptar un marco general que contemple los elementos esbozados anteriormente para su diseño, algunos de de éstos podrían ser los siguientes:

a) Análisis de la materia de estudio, e.g. su génesis histórica con el objeto de detectar las dificultades principales que tuvo que superar la humanidad en su constitución y apropiación, pues hay indicios de que aquéllas las volverá a tener el individuo en su aprendizaje.

b) Análisis del sujeto, e.g. génesis cognitiva, con la finalidad de localizar entre otras cosas, obstáculos psicogenéticos, en particular en qué etapa de desarrollo se encuentra el individuo cuando principia la enseñanza.

c) Análisis y/o detección de los obstáculos provocados por la instrumentación de la enseñanza.

El bosquejar este marco como una base para la instauración de alternativas de aprendizaje no pretende sugerir que los estudios que han tocado algunos de los aspectos anteriores no sean pertinentes, al contrario enriquecen al mismo; el propósito es que se tiendan puentes entre los mismos; dicho con otras palabras, que los árboles no impidan ver el bosque.

Con el propósito de ampliar la visión de la problemática antes expuesta y por su pertinencia, se brinda a continuación al lector algunos resultados de investigaciones que se han realizado en torno a la instrucción en geometría que presenta de manera resumida Marilyn N. Suydam en su artículo "The Shape of Instruction in Geometry: Some Highlights from research" (1985). Estos fueron realizados durante los años 1966-1982, las cuales se organizan bajo la siguiente pregunta: Por qué, qué, cuándo y cómo es enseñada más eficientemente la geometría.

En relación al por qué enseñar geometría se reporta lo siguiente:

* desarrolla habilidades lógicas del pensamiento
* desarrolla intuiciones espaciales acerca del mundo
* da el conocimiento necesario para estudiar más matemáticas;y
* enseña a leer e interpretar argumentos matemáticos.

Sin embargo se señala que la geometría parece ser "el área más problemática y controvertida de las matemáticas escolares, hoy en día" (op.cit.) y que algunas controversias provienen de las recomendaciones para cambiar la currícula de geometría (e.g. Las transformaciones geométricas).

En relación a las investigaciones de cómo utilizan los profesores los libros de texto se reporta que:

* dependencia muy profunda del libro de texto
* se sigue el texto al pie de la letra en contenido y secuencia
* se hace poco uso de ingredientes especiales, tales como históricas, biográficas, o materiales; y
* raramente presentan temas que no están en el texto

En relación a cómo los profesores comunican ideas geométricas se reporta que:

* preguntan cuestiones de comprensión más que otros niveles de los problemas.
* Las preguntas se centran en el nivel de comprensión.

* preguntan menos cuestiones a nivel de memoria que en otras asignaturas de matemáticas.

* preguntan menos cuestiones que requieren un nivel superior de pensamiento y pocas preguntas acerca de la naturaleza de una demostración.

* hablan cerca del 80% del tiempo

* estimulan mejor las actitudes cuando permiten que los estudiantes hablen

* comunican un contenido cuya estructura es más sofisticada que la del libro de texto, con expresiones lógicas que requieren una elevada habilidad de pensamiento.

* Aunque las estructuras cognitivas de los estudiantes parecen cambiar durante la instrucción, el cambio no resultó hacia una correspondencia con las estructuras de o el profesor o el libro de texto. Los estudiantes transforman el pensamiento del profesor y el libro de texto que le fueron comunicados en sus propias estructuras cognitivas [es decir, no es el mismo que se pretendió hacer llegar]

En relación a qué aprenden los estudiantes acerca de demostrar, se reporta lo siguiente:

* muchos estudiantes son incapaces de razonar hipotéticamente o deductivamente hasta que alcanza los 13-15 años de edad, y

aún en el grado 11 tienen dificultad en reconocer y construir demostraciones válidas:

- menos del 30% no muestran tenen ninguna comprensión del significado de prueba.
- Cerca del 50% no ven la necesidad de probar lo que consideran obvio
- Al menos el 70% no distingue entre un razonamiento deductivo e inductivo y por lo tanto, no se percatan que la inducción es inadecuada para sostener generalizaciones matemáticas
- Cerca del 80% no comprende el papel de las hipótesis y definiciones en los argumentos matemáticos
- Cerca del 60% no estuvieron dispuestos a razonar a partir de hipótesis que consideraban falsas
- Menos del 20% comprendió la demostración indirecta.

* El 60% de todos los estudiantes de la escuela superior, no estudian demostraciones y para el 40% que lo hace

- 11% estudia demostraciones pero no pueden hacerlas
- 9% pueden hacer solamente demostraciones triviales
- 7% tiene éxito moderado; y
- 13% logra éxito en hacer demostraciones.

En relación a la ubicación de los estudiantes en los niveles de Van Hiele se reporta que:

* Casi el 90% de estudiantes pueden ser clasificados en uno de los niveles de Van-Hiele, con el 34% en el nivel 1 (reconocimiento)

* Los niveles de Van-Hiele no son el único elemento para determinar los éxitos o fracasos en el aprendizaje de escribir demostraciones

A partir de los resultados anteriores puede observarse lo que se había mencionado antes, esto es, hay una carencia de estudios acerca de la estructura cognitiva de los estudiantes,en particular de las condiciones de entrada. El conocimiento de éstas, puede ser un elemento que permita entender por qué el estudiante no tiene éxito -e.g.- en hacer demostraciones; se puede conjeturar que se está exigiendo al estudiante que ponga en juego determinadas estructuras cognitivas que aûn no las posee, y en consecuencia cobra relevancia el saber en que estado de" madurez" se halla. El acercamiento a esta cuestión podrá realizarse si tiene a la mano un modelo teórico del desarrollo del pensamiento, en este caso, específico a la materia que se va a impartir; y para fortuna si lo hay y es el de Los Van-Hiele. El cual ya ha sido verificado en algunos paises (U.R.S.S.1964, U.S.A.1975) y que ha servido de base para cambiar la currícula de geometría en éstos.

Lo escrito en el párrafo precedente conduce a la cuestión que será el eje en este trabajo de tesis y que se expondrá en el siguiente capitulo.

4) PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.

Después de haber esbozado la problematica precedente, el trabajo de tesis se inserta en un punto específico de ésta, a saber, <u>las condiciones internas iniciales de recepción que posee el individuo en relación a la materia que se le va a enseñar</u>, por las razones expuestas en párrafos anteriores.

Cabe precisar que cuando se habla de las condiciones de "entrada" de los alumnos, no se hace referencia sólo al conjunto de conocimientos previos que debe poseer el educando acerca de la materia de estudio, sino que, es lo relativo al grado de desarrollo cognitivo en que se encuentra el pensamiento geométrico de acuerdo a la teoría elaborada por los Van Hiele (1957), según ésta, el pensamiento se despliega a través de niveles específicos en un sentido estrictamente secuencial, que se inicia desde un nivel básico (reconocimiento) hasta alcanzar un nivel superior (rigor). Este modelo teórico del pensamiento lo desarrollaremos más adelante, con lo dicho baste para puntualizar a qué refiere las condiciones internas para el desarrollo . A éstas, no se le había puesto atención en el C.C.H; pues aún no se consideraba como un "problema" para la creación de instrumentaciones didácticas, pero a partir de las investigaciones de los Van Hiele, se asume como tal.

Por las consideraciones anteriores, el planteamiento del presente trabajo será el dar algunos elementos que permitan responder a la siguiente interrogante: Cuál es el nivel de desarrollo del pensamiento geométrico que poseen los estudiantes del C.C.H. cuando principian el curso de geometría?

5) OBJETIVO DEL ESTUDIO

Como ya fue planteado precedentemente, el propósito principal del presente trabajo, es hacer una exploración acerca del nivel de desarrollo del pensamiento de los estudiantes y de manera secundaria, detectar o constatar algunas dificultades ya mencionadas que se presentan en el aprendizaje de la geometría. Dicha indagación la realizaremos a través de la construcción de un examen diagnóstico sobre la base del modelo de Van-Hiele, esto es, estará estructurado de acuerdo a los niveles de pensamiento establecidos por dicho modelo. Los resultados que se obtengan será un elemento que permitirá diseñar de manera más adecuada las estrategias de aprendizaje, es decir, se trata de ofrecer una de las bases que permitan conformar metodologías que se adecuen a las peculiaridades cognitivas del aprendedor, en este caso las condiciones de "entrada", del mismo . Como suele suceder en este tipo de estudios, no podemos decir de antemano que los resultados serán definitivos, sin embargo,los resultados que se obtengan servirán como elementos para conocer cuál es el nivel de desarrollo del pensamiento geométrico de los estudiantes del Colegio de Ciencias y Humanidades.

MARCO TEORICO

Uno de los descubrimientos más notables que se han hecho sobre les "leyes de aprendizaje en geometría" es que el pensamiento geométrico se desarrolla a través de "niveles", que se inicia desde un nivel básico hasta alcanzar un nivel superior. Quienes revelaron la presencia de estos niveles fue la pareja de holandeses Pierre Van-Hiele y Dina Van-Hiele -Geldof (1957). El modelo consta de cinco niveles de comprensión llamados "visualización", "análisis", "deducción informal", "deducción formal" y "rigor" (Crowley M. 1987,p.1.); los cuales estan jerarquizados; la transición entre los mismos depende más de la acción de la enseñanza que de la edad biológica, de este modo, el aprendedor se mueve secuencialmente desde un nivel inicial (visualización) en donde los objetos geométricos son observados por su "apariencia", es decir, las propiedades de las figuras no son explicitamente reconocidas, a través de los niveles anteriormente mencionados, hasta un nivel más alto (rigor) que corresponde con los aspectos formales abstractos de la geometría.

Las repercusiones que trae consigo este descubrimiento es de suma importancia para la enseñanza de geometría, puesto que, proporciona algunos de los elementos teóricos para la instauración de una didáctica de la geometría.

A continuación, se proporcionarán las características generales del Modelo según Gutiérrez A., las cuales son cinco y la sexta es de Fuys, y la descripción de los niveles de pensamiento que se encuentran en la literatura (Fuys, Et al; Wirszup).

Recursividad:

Los elementos implícitos en el razonamiento del nivel N se hacen explícitos en el nivel N+1.

Por ejemplo, un niño de pre-escolar puede diferenciar círculos, triángulos y rectángulos por la "forma" de las figuras (nivel 0); no obstante es evidente que el niño se fija en la existencia y la forma (o cantidad) de los vértices para esa clasificación, aunque no sea consciente de ello. Más adelante, cuando el niño haya alcanzado el nivel 1, si será consciente de que los vértices, como elementos diferenciados, son la clave de la clasificación.

Secuencialidad:

No es posible alterar el orden de adquisición de los niveles, es decir, no se puede alcanzar un nivel de razonamiento sin antes haber superado, de forma ordenada, todos los niveles inferiores.

Una ilusión del aprendizaje memorístico es que los estudiantes aparentan un nivel de razonamiento superior al que realmente tienen porque han aprendido vocabulario y formas de trabajo propios del nivel superior, aunque realmente no los comprenden ni los saben utilizar correctamente. Un ejemplo muy frecuente lo tenemos en los estudiantes de Enseñaza Secundaria cuando los profesores les enseñan matemáticas y les piden que repitan las demostraciones o que resuelvan formalmente problemas; esta práctica se traduce en que, con el paso del tiempo, los estudiantes han aprendido mecánicamente ciertas formas de actuar y de contestar los ejercicios propias del lenguaje matemático formalizado, con las que dan la impresión de encontrarse en el cuarto nivel (deducción), cuando en realidad están muy lejos de este tipo de razonamiento.

Especificidad del lenguaje:

Cada nivel lleva asociado un tipo de lenguaje para comunicarse y un significado específico del vocabulario matemático, de forma que dos personas que utilizan lenguajes de diferentes niveles no podrán entenderse. Por ejemplo, la palabra "demostrar" tiene significados diferentes en los niveles 1,2 y 3, pues para demostrar una propiedad: un estudiante del nivel

1 verificará que se cumplen uno o varios ejemplos y ello bastará para convencerle; un estudiante del nivel 2 sabe que debe dar justificaciones generales, pero éstas se basarán en algún ejemplo o en manipulaciones físicas de los cuerpos. Un estudiante del nivel 3 hará una demostración formal.

Son evidentes las implicaciones de esta propiedad en la forma de comportarse los profesores en las aulas. Con esto, Van-Hiele nos alerta de que si queremos que nuestros alumnos nos entiendan realmente, debemos situarnos en su nivel, en vez de pretender que ellos se sitúen en el nuestro.

Continuidad:

Nuestra experiencia personal nos dice que el tránsito entre los niveles de Van-Hiele se produce de forma continua y pausada, pudiendo llevar varios años en los casos de los niveles 2 y 3. Dado que las caracteristicas de cada nivel de razonamiento son múltiples, es necesario preguntarse cómo hay que tratar a los estudiantes que presentan indicios de haber adquirido algunas caracteristicas de un nivel y también de no haber adquirido otras.

Localidad:

Por lo general, un estudinte no se encuentra en el mismo nivel de razonamiento en cualquier área de la Geometría pues el aprendizaje previo y los conocimientos que tenga son un elemento básico en su habilidad de razonamiento.
Otras puntualizaciones que hace Van Hiele (Fuys, pp.73-76) sobre los niveles son las siguientes:
"Los niveles están caracterizados por diferentes <u>objetos de pensamiento</u>, por ejemplo, en el nivel 0, los objetos de pensamiento son las figuras geométricas. En el nivel 1, el estudiante opera con ciertos objetos, llamados, clases de figuras, las cuales fueron el resultado de las actividades del nivel 0 y las propiedades descubiertas para estas clases. En el nivel 2, estas propiedades llegan a ser los objetos sobre los que el estudiante opera, produciendo un orden lógico de estas propiedades. En el nivel 3, las relaciones ordenadas llegan a ser los objetos sobre los cuales el estudiante trabaja y en el nivel 4, los objetos de pensamiento son los fundamentos de estas relaciones ordenadas".

Descripción de los niveles:

NIVEL 0 (Visualización)

Este nivel inicial se caracteriza por la percepción de las figuras geométricas como una totalidad y como unidades, las figuras son consideradas de acuerdo a su apariencia. Los alumnos no ven las partes de la figura ni pueden percibir las relaciones entre las componentes de la figura y entre las figuras. Ellos aún no pueden comparar figuras en función de sus propiedades comunes. Los niños que razonan en este nivel distinguen figuras por su forma como un todo. Ellos reconocen, por ejemplo, un rectángulo, un cuadrado, y otras figuras. Sin embargo, ellos conciben el rectángulo como completamente diferente del cuadrado. A la edad de los 6 años, ellos pueden reproducir figuras en un geoplano de Gattengo, tales como el rombo, el rectángulo, un cuadrado y un paralelogramo, aún cuando les sean mostrados en situaciones difíciles. El niño puede memorizar los nombres de estas figuras con relativa facilidad, reconocer las figuras por su forma solamente, pero él, no reconoce el cuadrado como un rombo, o el rombo como un paralelogramo. Para él, estas figuras son todavía completamente distintas.

Un estudiante en este nivel (Fuys, Et al.):

1. Identifica ejemplos de figuras por su apariencia como un todo

2. Construye, dibuja o copia una figura

3. Nombra o etiqueta figuras y otras configuraciones geométricas y utiliza nombres estándar y no estándar y nombra apropiadamente.

4. Compara y clasifica figuras sobre la base de su apariencia global.

5. Describe figuras verbalmente por su apariencia como un todo

6. resuelve problemas rutinarios operando sobre las figuras más bien que por usar las propiedades las cuales se aplican en general.

7. Identifica parte de una figura pero

   a) no analiza una figura en términos de sus componentes

   b) no piensa en las propiedades como para caracterizar una clase de figuras.

   c) no hace generalizaciones acerca de las figuras o usa un lenguaje relacional.

NIVEL 1 (Análisis)

El alumno que ha alcanzado este nivel empieza a percibir que las figuras están formadas por partes y dotadas de propiedades, también establece interrelaciones entre estas componentes y relaciones entre figuras individuales. En este nivel es capaz de hacer un análisis de las figuras percibidas. Esto toma lugar en el proceso -y con la ayuda- de observaciones, medidas, dibujos, y construcción de modelos. Las propiedades de las figuras son establecidas experimentalmente, ellas son descritas, pero todavía no son formalmente definidas. Estas propiedades que el alumno ha establecido le sirven como un medio para reconocer las figuras. En esta etapa, las figuras están determinadas por sus propiedades y el estudiante reconoce las figuras por sus propiedades. Que una figura sea un rectángulo significa que tiene cuatro ángulos rectos, que las diagonales son iguales, y que los lados opuestos son iguales. Sin embargo, estas propiedades aún no son interrelacionadas una con otra. Por ejemplo, el alumno advierte que el rectángulo y el paralelogramo tienen los lados opuestos iguales, pero él, todavía no puede concluir que un rectángulo es un paralelogramo. Es decir, aún no es capaz de hacer clasificaciones lógicas.

El estudiante (Fuys, Et al.):

1) identifica y analiza las relaciones entre las componentes de las figuras (e.g. la congruencia de los lados opuestos, congruencia de ángulos)

2) nombra y utiliza un vocabulario adecuado para las componentes y las relaciones (e.g. lados opuestos, ángulos correspondientes son iguales, las diagonales se bisectan una con otra)

3a) Compara dos formas de acuerdo a la relación entre sus componentes

4a) Interpreta y utiliza descripciones verbales de una figura en términos de sus propiedades y usa esta descripción para dibujar y/o construir la figura

5) descubre propiedades de figuras específicas empíricamente y generaliza las propiedades para esta clase de figura

6a) describe una clase de figuras (e.g. paralelogramos en términos de sus propiedades

7) identifica que propiedades se utilizaron para caracterizar una clase de figuras también las aplica a otra clase de figuras y compara clases de figuras de acuerdo a sus propiedades

8) descubre propiedades de una clase de figuras no familiares (e.g. un "cometa")

9) resuelve problemas geométricos utilizando propiedades conocidas de figuras

10) formula y utiliza generalizaciones acerca de propiedades de figuras (guiado por el profesor y/o materiales o espontáneamente) y usa cuantificadores (e.g. todos, cada, ninguno) pero:

a) no explica como ciertas propiedades de una figura están interrelacionadas

b) no formula ni utiliza definiciones formales

c) no explica la inclusión de clases más allá de verificar en ejemplos específicos.

NIVEL 2 (Deducción informal)

Los estudiantes que han alcanzado este nivel de desarrollo geométrico establecen relaciones entre las propiedades de una figura y entre las figuras. En este nivel empiezan a ordenar lógicamente las propiedades de una figura y clases de figuras. El alumno es ahora capaz de percibir la posibilidad de que una propiedad se siga de otra, y el papel de las definiciones es comprendido. Las conexiones lógicas entre las propiedades de las figuras y entre figuras se establecen por medio de definiciones. Sin embargo, en este nivel el estudiante todavía no puede comprender el significado de la deducción como un todo. El ordenamiento lógico de una conclusión la establece con la ayuda del libro de texto o del profesor. El joven todavía no comprende cómo podría ser posible modificar este orden, ni ve la posibilidad de construir la teoría a partir de diferentes premisas.

El, todavía no comprende el papel de los axiomas, y todavía, no puede ver las conexionoes lógicas de las afirmaciones. En este nivel los métodos deductivos aparecen conjuntamente con la experimentación, permitiendo así, obtener nuevas propiedades que pueden ser obtenidas por razonamiento a partir de algunas propiedades que han sido obtenidas experimentalmente. En este tercer nivel un cuadrado es visto como un rectángulo y como un paralelogramo. Esto es, puede hacer clasificaciones lógicas.

El estudiante (Fuys, Et al.):

1a) identifica diferentes conjuntos de propiedades que caracterizan una clase de figuras y analiza que éstas son suficientes

2) da argumentos informales (usando diagramas, formas recortadas que son dobladas o otros materiales)

3) da argumentos deductivos informales
   a) sigue un argumento deductivo y puede proporcionar partes del argumento

4) proporciona más de una explicación para probar algo y justifica estas explicaciones usando diagramas de "árboles"

5) informalmente reconoce la diferencia entre una afirmación y su conversa

6) identifica y usa estrategías para resolver problemas

7) reconoce el papel de los argumentos deductivos y enfrenta los problemas de una manera deductiva pero:

a) no comprende el significado de la deducción en un sentido axiomático (e.g. no ve la necesidad de las definiciones y de supuestos básicos)

b) no distingue formalmente entre una afirmación y su conversa

c) aún no puede establecer interrelaciones entre la red de teoremas.

NIVEL 3 (Deducción Formal)

En este nivel, los estudiantes comprenden el significado de la deducción como un medio para desarrollar y construir toda la geometría. La transición a este nivel se da gracias a que el estudiante ha comprendido el papel y la esencia de los axiomas, definiciones y teoremas; de la estructura lógica de una demostración; y del análisis de las relaciones lógicas entre conceptos y afirmaciones.

Los estudiantes pueden ahora ver las diferentes posibilidades para desarrollar una teoría procediendo de diferentes premisas.

Por ejemplo, el alumno puede ahora examinar todo el sistema de propiedades y características de los paralelogramos usando la definición del mismo en un libro de texto: Un paralelogramo es un cuadrilátero cuyos lados opuestos son paralelos. Pero él puede también construir otro sistema que se base, por ejemplo en la siguiente definición: Un paralelogramo es un cuadrilátero, dos de cuyos lados opuestos son iguales y paralelos.

El estudiante (Fuys, Et al.):

1) reconoce la necesidad de los términos indefinidos, definiciones, y supuestos básicos (e.g. postulados)

2) reconoce las características de una definición formal (e.g.condiciones necesarias y suficientes) y la equivalencia de definiciones

3) prueba de una manera axiomática relaciones que fueron explicadas informalmente en el nivel 2

4) prueba relaciones entre un teorema y afirmaciones referentes al mismo (e.g. conversa, inversa, contrapositiva)

5) establece relaciones entre la red de teoremas

6) compara y contrasta diferentes demostraciones de teoremas

7) examina los efectos de cambiar definiciones iniciales o postulados en una secuencia lógica

8) establece un principio general que unifica varios teoremas diferentes

9) crea demostraciones a partir de un conjunto simple de axiomas usando frecuentemente un modelo para apoyar los argumentos

10) proporciona argumentos deductivos formales pero no investiga los fundamentos axiomáticos de los mismos o compara sistemas axiomáticos

NIVEL 4 (Rigor)

Este nivel de desarrollo intelectual en geometría corresponde al rigor estándar moderno (Hilbertiano). En este nivel se hace abstracción de la naturaleza concreta de los objetos y del significado concreto de las relaciones que conectan estos objetos. Una persona en este nivel desarrolla una teoria sin hacer ninguna interpretación concreta. Aquí la geometría adquiere un carácter general y un campo amplio de aplicaciones. Por ejemplo, varios objetos, fenómenos, o condiciones sirven como "puntos" y cualquier conjunto de "puntos" sirve como una figura, y así sucesivamente.

El estudiante (Fuys, Et al.):

1) establece rigurosamente teoremas en diferentes sistemas axiomáticos (e.g. el enfoque de Hilbert para fundamentar la geometría)

2) compara sistemas axiomáticos (e.g. geometrías euclidianas y no euclidianas); espontáneamente explora como los cambios en los axiomas tienen sus efectos en la geometría resultante

3.) establece la consistencia de un conjunto de axiomas, independencia de un axioma, y la equivalencia de conjuntos diferentes de axiomas; crea un sistema axiomático para una geometría

4) inventa métodos generales para resolver clases de problemas

5) investiga un contexto más amplio en el cual un teorema o principio matemático podría aplicarse.

INSTRUMENTACION DEL EXAMEN DIAGNOSTICO

DISEÑO

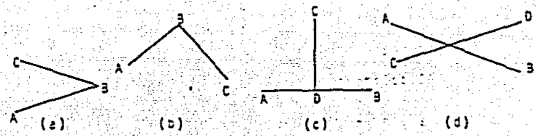
La elaboración del examen diagnóstico fue sobre la base de los niveles del Modelo de Van-Hiele precedentemente desarrollado. A través de este instrumento se exploró el nivel de desarrollo del pensamiento geométrico de los estudiantes que comienzan el curso de geometría cuyos resultados se darán más adelante.

Por tanto, las preguntas se seleccionaron teniendo como marco la secuencialidad de los niveles, asimismo se buscaba que a través de sus respuestas se reflejara el nivel de dasarrollo del pensamiento geométrico del educando. En este sentido interesaba la cualidad de la respuesta más que fuera correcta e incorrecta,

En el cuestionario hay diferentes tipos de preguntas que se pueden agrupar en función de la actividad que se demanda, por ejemplo, se tienen ítems que refieren a tareas de clasificación, inclusión en conceptos, definición, etc.

En relación a las de clasificación se pide al estudiante que agrupoe una serie de figuras dadas y que explique el criterio que utilizó para dicha clasificación, por ejemplo si responde que lo hizo por su "parecido" entonces, dicho estudiante de acuerdo al modelo estaria reflejando comportamientos que lo ubicarían en el nivel 0; si en cambio dice que lo hizo por la "igualdad de sus lados" se le asignaría en el nivel 1.

En las actividades de inclusión en conceptos se trata de que el estudiante indique la pertenencia de un objeto a un concepto, es el caso de la pregunta # 15: de los siguientes pares de rectas, cuáles son perpendiculares?



Respecto a las tareas de defínción, se pide por ejemplo, la descripción de una figura en términos de sus propiedades, o bien que dé la definición formal de un concepto (e.g. altura de un triángulo).

Del mismo modo, de acuerdo a las respuestas que dé el estudiante a estas preguntas se le asigna el nivel correspondiente.

Para aclarar más el espiritu bajo cuál fue diseñado el examen, se dará como ejemplo la pregunta # 10 del mismo, sus posibles respuestas y de acuerdo a éstas, el nivel de pensamiento, el cual aparecerá escrito entre paréntesis.

Pregunta # 10: Qué tipo de figura es la siguiente?

Por qué dice eso?

"Porque parece un pizarrón" (Nivel 0)

"Porque tiene cuatro ángulos rectos, dos lados largos iguales, dos cortos" (Nivel 1)

"Es un cuadrilátero con todos sus ángulos rectos" (Nivel 2).

La pregunta anterior también se pudo diseñar con un formato de opción múltiple, sin embargo, no se hubiera obtenido información con la misma riqueza que en el caso precedente; esta es una de las razones por las que se consideró que las preguntas deberían ser en su mayoría abiertas. Además de lo dicho anteriormente nos interesaba en esta primera búsqueda captar toda la gama de conductas, ya que permitiría tener una mayor comprensión del fenómeno bajo estudio, y con el presente instrumento se propone sea considerado como un elemento para configurar un examen con preguntas cerradas por las ventajas de su aplicación masiva.

Otra característica del cuestionario es que no fue elaborado con la pretención de averiguar conocimientos previos (pre-requisitos).

El número total de preguntas del cuestionario es de 60, las cuales son predominantemente abiertas (70%); algunas de ellas provienen de la literatura revisada (N.C.T.M., 1987, YEAR BOOK, Fuys, Et al, pp. 34-38).

En virtud de que también en el estudio se había planteado de manera marginal el de detectar o constatar algunas dificultades que se presentan en el aprendizaje de geometría, se incluyeron algunas cuestiones que no guardan una relación directa con los niveles de pensamiento ya bosquejados; tal es el caso del grupo de preguntas (ver cuestionario p.p. 3-8) referentes a la categoría denominada "imaginación espacial" (I.E.). Con ellas se quería obtener elementos sobre su desarrollo y observar sus posibles relaciones con los niveles de pensamiento.

Para la realización de estas tareas el individuo tiene que poner en juego dos "habilidades" que denominaremos I.E.1 e I.E.2, y que a grosso modo las caracterizaremos así:

a) I.E.1 : Es aquélla habilidad que permite al sujeto poder imaginar el objeto geométrico en "movimiento" , es decir, no en forma estática. La figura es imaginada ya sea dando giros y/o en traslación e incluso es capaz de hacer "cortes" a la figura con planos e imaginar las secciones que se obtienen con estos.

Este "ver" en movimiento al objeto geométrico permite al educando concebirlo de otra manera, como el producto de distintos movimientos e.g. de puntos, de líneas, planos, superficies y puede no sólo imaginar el resultado de estos movivmientos sino que, hacer la operación inversa de éstos, que le permiten regresar al punto de partida. Las preguntas que van orientadas a explorar esta habilidad son: # 4, #4a, #7, #8 y #9 (ver apéndice).

b) I.E2 : Esta a diferncia de la primera permite al individuo imaginar cómo se "ve" la figura desde distintas posiciones, manteniéndose ésta inmóvil, dicho en otras palabras, el individuo es capaz de colocarse imaginariamente en él "frente", "abajo", "posterior" de la figura y luego poder girar en torno a ella. Aquí es la figura la que se mantiene "fija" y es el observador el que se descentra para moverse alrededor del objeto geométrico.

En cierto sentido esta destreza es la recíproca de la precedente, desde el punto de vista de una relación sujeto-objeto. Las tareas que están encauzadas para observar ésta son: #3a, #3b, #3c, #3d, #5 y #6 (ver apéndice).

Por tanto el análisis de estas cuestiones se hizo por separado y cuyos resultados se dan más adelante.

ANTECEDENTES

Nuestro interés por los problemas en la enseñanza de geometría, que ya fueron señalados, nos condujo de manera natural a toparnos, entre otras, con las investigaciones de los Van-Hiele. El contacto con estas ideas nos hizo reflexionar lo siguiente: para instrumentar de manera más adecuada una estrategia de aprendizaje en geometría, uno de los elementos que deben de tomarse en cuenta, es averiguar cuál es el nivel de desarrollo del pensamiento geométrico en el momento en que principian el curso. Y este problema, fue el que nos condujo a la idea de proyectar un instrumento que nos permitiera diagnosticarlo. Sin embargo, la conformación del mismo no se dio de manera súbita, sino que, antes hicimos una breve "encuesta" para tratar de constatar si se manifestaban algunos de los rasgos del pensamiento geométrico que predecía el modelo de Van-Hiele; para ello, elaboramos (1989) un breve cuestionariro con tres preguntas que se aplicó a dos grupos de matemáticas *III* del C.C.H. las preguntas y los resultados se presentan a continuación:

a) Qué es un cuadrado?

b) Qué es un rectángulo?

c) Podemos afirmar que un cuadrado es un rectángulo?

Cabe señalar que las respuestas a estas interrogantes no son relevantes en sí mismas, sino que por medio de ellas se puede observar el nivel de desarrollo del pensamiento geométrico, de este modo, los "conceptos" que poseen acerca de estas dos figuras.

Resultados del primer grupo con un total de 35 alumnos:

Cuadrado

a) figura que tiene 4 lados iguales = 24 (68.5%)
b) figura que tiene 4 lados iguales y 4 ángulos rectos=9(25.8%)
c) figura que tiene 4 lados iguales y todos sus ángulos iguales = 2 (5.7%)

Rectángulo

a) Dos lados largos iguales y dos lados cortos iguales = 27(77.2%)
b) Dos lados largos iguales y dos lados cortos iguales con ángulos rectos = 7 (20%)

c) Dos lados largos iguales y dos lados cortos iguales con todos sus ángulos iguales = 1 (2.8%)

Un cuadrado es un rectángulo?

a) No = 28 (80.0%)
b) Si = 7 (20.0%)

Resultado del 2o. grupo con un total de 44 alumnos.

Cuadrado

a) Figura con 4 lados iguales = 22 (50%)
b) Figura con 4 lados iguales y 4 ángulos rectos = 18 (41.0%)
c) Figura con 4 lados iguales y todos sus ángulos iguales = 4 (9.0%)

Rectángulo

a) Dos lados largos iguales y dos lados cortos iguales = 27 (61.4%)
b) Dos lados largos iguales y dos lados cortos iguales y cuatro ángulos rectos = 16 (36.4%)

c) Dos lados largos iguales y dos lados cortos iguales y todos sus ángulos iguales = 1 (2.2%)

Un cuadrado es un rectángulo?

a) No = 33 (75.0%)
b) Sí = 11 (25.0%)

Observaciones generales para ambos grupos:

i) A pesar de que el cuadrado es una figura familiar, más del 50% omiten la característica de los ángulos rectos, y en el caso del rectángulo el porcentaje aumenta.

ii) En el caso del rectángulo añaden un elemento secundario en el concepto: los lados "horizontales" deben ser más grandes que los "verticales".

iii) La respueta más común que dieron para no incluir el cuadrado en el concepto de rectángulo fue la siguiente: "el cuadrado tiene sus cuatro lados iguales y el rectángulo no".

Los que respondieron positivamente manejaron diversas razones, e.g., "porque tienen 4 lados", o porque "tienen ángulos rectos", o por su "forma"; hubo un solo caso que dijo: "porque tienen las mismas propiedades".

iv) Los alumnos que atribuyeron la característica de los ángulos rectos al cuadrado, no se la aplicaron al rectángulo.

v) Se presentan casos de respuestas contradictorias sobre la "inclusión", por un lado reconocen que ambas figuras difieren en las dimensiones de los lados pero, por otro lado, registran que tienen en común la propiedad de los ángulos rectos, por esta razón, primero dicen "no" y a renglón seguido aceptan que "si" es posible.

vi) Las "pautas" que se manifiestan en relación a las tres preguntas planteadas, revelan que los estudiantes apelan a las "propiedades" de las figuras para describirlas y compararlas, sin embargo, siguen viendo como distintos al cuadrado del rectángulo, por tanto, sobre esta base podemos afirmar que los estudiantes muestran indicios de estar en el nivel 1.

PILOTEO

Antes de aplicar el examen, lo sujetamos a una prueba preliminar, esto con el objeto de detectar posibles fallas de diversa índole en la elaboración del mismo, que pueden ser, desde la sintaxis de las preguntas hasta el orden secuencial y/o lógico de las mismas.

El piloteo se hizo con 8 estudiantes que iniciaban el curso de geometría.

El cuestionario fue aplicado en dos sesiones de 2 horas cada una separadas por una semana, a los estudiantes se les instruyó que anotaran o que preguntaran todo aquéllo que no comprendieran o que les causara algún problema en los items; ésto con la finalidad de llevar un registro de aquéllas cuestiones que les causaran alguna dificultad y que más tarde nos servirían para hacer las correcciones pertinentes, y quizás eliminar algunas preguntas.

Al término de esta prueba piloto, también se hizo una entrevista a los estudiantes para ampliar y aclarar algunas respuestas que habían dado y de difícil interpretación.

Los resultados de este ensayo, nos sirvió entre otras cosas, para afinar el examen en los siguientes aspectos:

a) La redacción de los ítems

b) Eliminar algunas cuestiones porque no discriminaban

c) Reubicar preguntes en sus niveles respectivos

d) Suprimir las "negaciones", ya que se observó que en las preguntas en donde se utilizaba el vocablo "no" les creaba una dificultad adicional en la comprensión de la tarea, es el caso de frases tales como: " por un punto dado no situado sobre una recta..."

e) Atenuar los "centramientos" en los dibujos con el objeto de no favorecer la respuesta, e.g., se trató de eliminar la influencia que ejercía el dibujo en la pregunta #37 (ver apéndice) se detectó que en ésta, los alumnos respondían "equilátero" porque el dibujo ostentaba sus tres lados iguales, para disminuir este efecto trazamos deliberadamente un triángulo que no apareciera a la vista como equilátero; del mismo modo se hizo para otras preguntas que tenían estos efectos.

MUESTRA

Dado el carácter del estudio, se tomaron dos grupos con un total de 73 alumnos con edad promedio de 16 años que principiaban el curso de Matemáticas III.

Como los resultados del presente estudio podrían depender de las experiencias previas de aprendizaje en geometría entonces indagamos cuáles habían sido éstas, para ello recolectamos información sobre la base de las siguientes preguntas:

a) Llevaste geometría en Secundaria? Si ( ) No ( )

b) Te gustó? Si ( ) No ( )

c) Explique por qué, en caso de haber contestado Si en el inciso b).

Los resultados que se obtuvieron son los siguientes:

a) Si = 53 (72.7%); No = 20 (27.3%)

b) Si les gustó = 38; No les gustó = 23.

c) Respecto a las razones que dieron de por qué si les gustó, se observaron las siguientes pautas: "porque el profesor enseñaba bien" o "porque se le entendía", "porque les gustaba trazar, medir, por su utilidad en la vida diaria, les serviría en su carrera futura".

De por qué no les gustó algunas de las respuestas son: "porque al maestro no se le entendía o no sabía explicar", "porque había que aprenderse fórmulas", "no me atraen, son muy complicadas, me aburre estar haciendo trazos".

Cabe señalar que los temas de Geometría en Secundaria ocupan un espacio significativo. (Ver sig.tabla:Bazán A.)

AREA DE MATEMATICAS

AREA DE MATEMATICAS DISTRIBUCION DE CONTENIDOS PROGRAMATICOS EN LA EDUCACION SECUNDARIA.

ASPECTOS	1er GRADO	2o GRADO	3er GRADO
LOGICA	16%	11%	4%
SISTEMAS NUMERICOS	69%	11%	0%
ALGEBRA	0%	48%	15%
GEOMETRIA	13%	22%	69%
PROBABILIDAD Y ESTADISTICA	5%	8%	9%

De acuerdo a los datos anteriores, puede afirmarse que los antecedes geométricos de los estudiantes que constituyen la muestra son buenos.

APLICACION

El examen se realizó en dos sesiones de dos horas cada una, separadas por una semana.

Antes de la aplicación se explicó a los alumnos los propósitos del examen, por ejemplo se les dijo que los resultados que se obtuvieran iban a permitir organizar el curso de Geometría de una manera más adecuada; en particualar se les comentó que éstos no iban a servir para calificarlos y que por tanto podían poner a su examen un seudónimo si así lo deseaban, ésto con la finalidad de darles confianza y que puedieran identificar su examen en la segunda sesión.

Al momento de la aplicación, se les separó para evitar que vieran las respuestas del compañero de a lado, y con ello atenuar los sesgos en los resultados, de la misma manera se les dio instrucciones acerca de cómo debían responderlo y que preguntaran todo aquello que no comprendieran. Algunos comentarios que exteriorizaron después de la prueba fue que nunca habían resuelto un examen de estas características y que les había parecido difícil porque los había puesto a pensar.

PRESENTACION DE RESULTADOS Y ANALISIS.

En esta parte se abordarán los siguientes puntos: organización de datos y criterio de asignación de niveles, ubicación de los alumnos en los niveles, resultados globales y análisis y presentacion de resultados de algunas preguntas que se consideran relevantes.

1) Organización de datos y criterio de asignación de niveles a las respuestas.

Como ya se dijo anteriormente, una de las caracteristicas del presente cuestionario es que la mayoría de las preguntas son "abiertas" y, con el fin de captar toda la gama de conductas que suelen presentarse en esta clase de examen, hemos diseñado la siguiente estrategia para recoger y organizar los datos (pautas) del mismo:

lero.) Como ya se mencionó en la parte de diseño, el examen contiene preguntas que involucran actividades de agrupamiento, ordenamiento y comparación de figuras, de reconocimiento de objetos en clases, etc. y con la finalidad de captar los datos referentes a estas actividades se construyeron las categorías de "clasificación", "inclusión de clases","inclusión en conceptos", "definición","demostración informal", "demostración formal". Y dado que dichas actividades podían ser acometidas desde distintos niveles de pensamiento, a las categorías anteriores se les asignó los niveles desde los cuales podrían ser alcanzadas, e.g., las cuestiones de "clasificación" que de acuerdo al modelo de Van-Hiele se encuentran en un nivel básico, pueden afrontarse con pautas que pueden reflejar distintos niveles de pensamiento, de tal suerte, que en actividades de esta categoría se podrá tener las siguientes respuetas: "Agrupé las figuras porque tienen la misma forma" o "porque tienen sus cuatro lados iguales", estas conductas serán un indicador de los niveles 0 y 1 respectivamente, y en consecuencia la categoría de "clasificación" tendrá estos dos niveles de acceso. Bajo este esquema asignamos los niveles para las restantes categorías.

2do.) Agrupamos las preguntas en función de las categorías formadas, e.g., la #1, #2 y #3, corresponden a la de "clasificación", y así de manera semejante con las demás (ver apéndice), algunas preguntas no fueron incluidas en las categorías, como las de imaginación espacial.

3ero.) Ubicación de los comportamientos en los niveles. En virtud de que las descripciones de los niveles están dadas de manera genérica y las conductas observadas suelen tener rasgos más específicos, y ésto dificulta su ubicación en los niveles con el fin de asignar las conductas observadas de una manera más precisa en el nivel respectivo, nos auxiliamos de una reseña más concreta de los mismos (Fuys.D. Et al. 1988,p 58).
Con el propósito de aclarar la mecánica que se siguió para para asignar niveles a los comportamientos, daremos el siguiente ejemplo: si un alumno en la pregunta #1, perteneciente a la categoría de "clasificación", contestaba: "Agrupé las figuras en la caja 1 por su parecido", entonces la respuesta se ubicaba en el nivel 0, rasgo 4 (ver apéndice); si el mismo alumno en la tarea #11 de "inclusión de clases", respondía "falsa" porque "el cuadrado tiene sus cuatro lados iguales y el rectángulo no", se colocaba la respuesta en el nivel 1, rasgo 3a.en la categoría mencionada, y así sucesivamente con las restantes preguntas. En síntesis los

tres pasos anteriores constituyeron la estrategia para organizar los datos del cuestionario.

Algunas de las bondades que se revelaron del camino anterior fue que nos facilitó ubicar las respuestas "incorrectas", pues observamos que la explicación de éstas se debían en parte a que el estudiante razonaba sobre la base de una definición inexacta pero ello no implicaba que no se encontrara en un determinado nivel; es posible que en un examen de otro tipo las respuestas "incorrectas" se hubieran podido interpretar de que el alumno no se encontraba en el nivel correspondiente y en consecuencia se le hubiera asignado un nivel inferior.
A manera de ejemplo se presentan a continuación las láminas de clasificación e inclusión de clases del proceso anterior.

INCLUSION DE CLASES PREGUNTAS [illegible]

[illegible]		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
[illegible]	3a	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	7	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	3a	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	2	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
NO CONTESTO		[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

[illegible]		33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56
[illegible]	3a	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	7	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	3a	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	2	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
NO CONTESTO		[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

CLASIFICACION (PREGUNTAS [illegible])

Nivel	Rasgo	Alumnos
0	4	[illegible]
	6	[illegible]
1	36	[illegible]
	6	[illegible]
NO CONTESTO		[illegible]

2) Ubicación de los alumnos en los niveles.

Ya diseñada la estrategia de recolección y organización de los datos del examen, faltaba definir el criterio mediante el cual los alumnos iban a ser ubicados en los niveles, como suele hacerse en estos casos, se utilizó el puntaje (3/5) del total de preguntas pertenecientes a las categorías como norma para la asignación de niveles, criterio utilizado por Gutiérrez A. (1987). Por tanto, con el propósito de utilizar esta regla, nos avocamos a contabilizar el total de rasgos acumulados por alumno en cada nivel de las categorías respectivas; para este fin, construimos una tabla (ver apéndice) en donde aparecen todas las categorías con sus respectivos niveles y los rasgos aglomerados por estudiante en cada nivel y categoría, e.g., en la tabla se puede observar que el alumno #7 obtuvo en la categoría de "clasificación" nivel 0, 3 atributos, en el nivel 1, 0 atributos, y así sucesivamente con las demás; de esta forma se hizo lo mismo con todos los alumnos.

Lo anterior nos iba a permitir tener una visión integral de la distribución de los rasgos en todos los niveles pero, en vista de que se observó que la mayoría de las pautas se concentraban en el nivel 1 por categoría, optamos por considerar solamente lo acumulado en este nivel, agregando a éste los rasgos del nivel 2, sólo en aquellos casos que hubieran tenido "puntos" en este nivel; la razón de esto, era para que no quedaran en desventaja en relación a los alumnos que noe tuvieron puntos en este nivel. De tal suerte, que el alumno #7 acumuló puntos que aplicando el criterio de los 3/5 lo ubican en el nivel 1. Lo precedente se hizo para todos los alumnos.

3) Resultados globales.

Después de la aplicación del criterio anterior, el resultado obtenido de un total de 73 alumnos fue:

1) 30 alumnos (41.0%) se encuentran en el nivel 1
2) 43 alumnos (59%) se ubican en el nivel 0

Presentando en esta forma los resultados del estudio podría dar al lector una idea incorrecta o parcial del mismo, ya que, podría interpretarse que el 59% de los alumnos que se encuentran en este nivel sólo podrían ser capaces, de acuerdo al modelo de Van-Hiele, de : "identificar, nombrar, comparar y operar figuras geométricas de acuerdo a su apariencia" (Fuys, p.5);

pero sobre la base del análisis detallado que hicimos de cada examen, podemos afirmar que estos 43 alumnos no manifiestan comportamientos "puros" del nivel 0, entendidos éstos, por la caracterización dada anteriormente.

4) Análisis diferenciado

Por tanto, con el objeto de brindar más elementos que apoyen la afirmación precedente se realizó un análisis más diferenciado.

Con este propósito, dividimos a la población estudiada en clases, la formación de éstas las generamos a partir del corte de los 3/5, y en términos de las pautas acumuladas.
A partir de éstos, procedimos hacer una nueva re-visión de los exámenes, ello con el fin de dar una mayor precisión a los resultados globales presentados anteriormente.

Respecto a los alumnos que están ubicados en el nivel 1, se observa que aún no poseen un pleno dominio de los métodos de razonamiento que caracterizan este nivel, por ejemplo, cuando describen una figura conocida (paralelogramo) lo hacen en términos de propiedades pero, de manera deficiente, y cuando se les interpela por la definición de altura de un triángulo, la escriben en términos coloquiales, e.g: "Es el punto más alto que se forma de la base, a la punta del ángulo superior", o "La línea que va de la base hasta el vértice del triángulo". Asimismo se observan casos de alumnos cuyas respuestas revelan vestigios del nivel 0; pero también se presentan dos casos de transición al nivel 2, éstos últimos fueron los únicos que mencionaron la característica de los ángulos rectos en el caso del rectángulo.

Para los alumnos que resultaron ubicados en el nivel 0, se pueden diferenciar dos grupos por el tipo de respuestas.

1ER. Grupo..

* Total de alumnos de = 25.

* Este grupo se encuentra en la transición del nivel 0-1, esto es, en las tareas de "definición" y "clasificación", expresan pautas mixtas de nivel 0 y nivel 1, e.g. en la descripción del paralelogramo "dos pares largos", "ladeada", "forma rectangular; y para clasificar utilizan la frase estereotipada: "muy parecido a..." y porque "tiene dos lados inclinados del mismo tamaño".

* La descripción que hacen de una figura es pobre, e.g. en el caso del paralelogramo, escriben: "es plano", "cuatro ángulos", "pares largos", "dos pares cortos" como puede observarse los atributos que utilizan son muy generales.

* No establecen relaciones entre las componentes de la figura que están describiendo.

* Conceptos básicos "mal formados" e.g., 9 alumnos identifican la mediana como la altura de un triángulo.

* Incapacidad para verbalizar la definición de altura de un triángulo aún en términos coloquiales.

* En preguntas demasiado abiertas como la #1 de clasificación responden en términos de "se parece a...", pero en actividades más orientadas contestan sobre la base de propíedádes muy generales.

*Expresión escrita poco clara.

* Toman elementos no esenciales e.g. la posición o la inclinación de la figura como atributos esenciales de la misma.

2do.Grupo.

* Total de alumnos = 18.
* Las preguntas casi no las contestan, o bien lo hacen de manera incoherente.
* En las tareas de "clasificación", maniestan puros rasgos del nivel 0, e.g., "por el parecido", "tamaño", "porque así se acomodan mejor", algunos lo hacen como si se tratara de armar un rompecabezas.

* Sólo 3 casos mostraron rasgos del nivel 1, pero en preguntas más orientadas como la #15.

* En la actividad de "definición", e.g. la descripción del paralelogramo la hacen en términos muy rudimentarios: "4 esquinas", "tiene superficie", "se puede medir", "largo", "ancho".

* Este grupo no muestra tendencia hacia el nivel 1.

Como puede notarse, a partir del análisis anterior por grupos, podemos concluir que el resultado global que se había presentado inicialmente en el sentido de que el 59% del total de alumnos se encontraban en el nivel 0, no lo está en forma absoluta, en vista de que, al menos 25 alumnos de 43 que fueron clasificados inicialmente en el nivel 0, realmente no reflejan pautas puras de este nivel sino que están en la transición del nivel 0-1, dicho en otras palabras, el 59% de los alumnos no reflejan pautas puras del nivel 0, sino que también manifiestan rasgos del nivel 1.

5) Resultados de algunas preguntas:

Con la finalidad de que el lector amplíe su visión y tenga una comprensión más precisa de los resultados del presente estudio, proporcionaremos a continuación una "muestra" de los resultados de algunas preguntas del examen diagnóstico:

Pregunta #10: Qué tipo de figura es la siguiente?

a) número de alumnos que contestaron sobre la base del estereotipo "tiene dos lados largos iguales y dos chicos iguales" = 66 (es decir, el 90.4%) omiten mencionar la característica de los ángulos rectos.

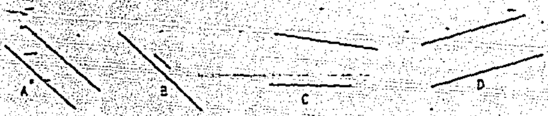
b) Número de alumnos que incluyeron la característica de los ángulos rectos = 5

Pregunta # 15 : Escriba todas las características (propiedades) que usted observe en la siguiente figura.

a)Número de alumnos que contestaron explícitamente que el paralelogramo era un rectángulo = 23 (31.5%)

b) No contestaron = 14 (19.1%)

Pregunta # 17: De los siguientes pares de rectas en el plano, cuáles son paralelas? justifique su respuesta.



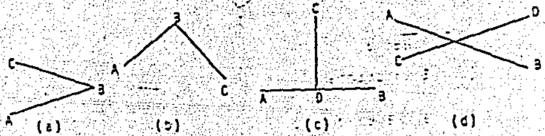
a) Número de alumnos que sí identificaron en todos los casos = 40 (54.7%)

b) Número de alumnos en que se sospecha que su concepto de paralelismo incluye que las paralelas deben tener la misma longitud = 23 (31.5%)

c) Otras respuestas = 8 (11%)

d) No contestaron = 2 (2.7%)

Pregunta #18 : De los siguientes pares de rectas, cuáles son perpendiculares?



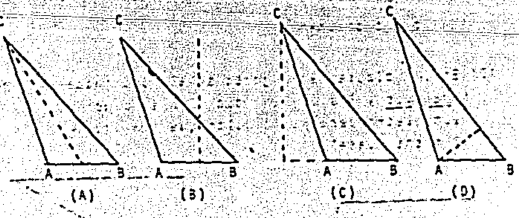
a) Número de alumnos que identificaron en todos los casos = 11

b) Número de alumnos que identificaron perpendiculares sólo cuando una de las rectas era horizontal = 25

c) No identificaron perpendiculares = 25

d) No contestaron = 12

Pregunta #20 :En los siguientes triángulos, cuál tiene dibujada correctamente la altura del vértice C al lado AB?



a) Número de alumnos que identificaron la altura del triángulo = 41

b) Número de alumnos que no lograron identificarla, es decir, la altura es una mediana = 29

c) Otras respuestas = 3

Pregunta #32 : Complete la siguiente frase para obtener una afirmación verdadera: Un cuatrilátero que tiene sus lados adyacentes iguales es un ------- Explique su respuesta ------

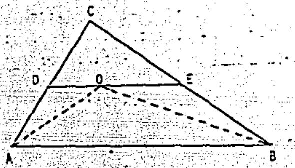
a) Número de alumnos que contestaron que es un rombo = 6 (8.2%)

b) Número de alumnos que contestaron que es un cuadrado = 33 (45.2%)

c) Número de alumnos que contesteron que es un rectángulo = 11 (15.0%)

d) No contestaron = 23 (31.6%)

Pregunta #40 : En el problema siguiente identifique qué es lo dado (lo conocido) y qué es lo que se tiene que demostrar (lo desconocido): "en el triángulo ABC, AO es la bisectriz del ángulo <BAC y BO es la bisectriz del ángulo <ABC que se intersectan en O, la recta DE es paralela al lado AB. Probar que DE = AD + BE. (Nota: NO TRATE DE HACER LA DEMOSTRACION, conteste sólo lo que se le pide.



Lo dado es: ----------------------

Lo que se tiene que demostrar es : ----------------

a) Número de alumnos que lograron distinguir entre lo "dado" y lo que debe ser "probado" = 11 (15.0%)

b) Número de alumnos que no lograron distinguir entre lo "dado" y lo que debe de ser "probado" = 27 (37%)

c) No contestaron = 35 (48%)

Pregunta #42 : En el siguiente enunciado, identifique qué es lo dado y qué es lo que se tiene qué demostrar : "la perpendicular que pasa por el punto medio de la base de un triángulo isósceles pasa por el vértice del triángulo".

Lo dado es: --------------

Lo que se tiene qué demostrar es: -----------------

Nota: En esta pregunta la figura no está dada.

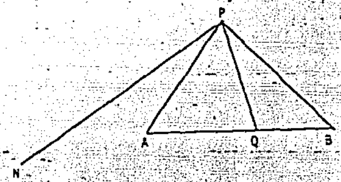
a) Número de alumnos que lograron distinguir entre lo "dado" y lo que se tiene qué "demostrar" = 20 (27.4%)

b) Número de alumnos que no lograron distinguir entre lo "dado" y lo que se tiene qué "demostrar" = 22 (30.1%)

c) No contestaron = 31 (42.5%)

La diferencia entre las preguntas 40 y 42 es que en la primera se da el dibujo y se dice explícitamente "probar que..."; que no es el caso de la segunda.

Pregunta #53 : En las siguientes rectas que pasan por el punto P, cuáles se intersectan a la recta AB?



a) Número de alumnos que contestaron que intersecta sólo la recta PQ = 21 (28.7%)

b) Número de alumnos que respondieron que intersectan las rectas PA, PQ,PB = 6 (8.3%)

c) Número de alumnos que contestaron que intersectaban todas las rectas = 3 (4.2%)

d) Número de alumnos que contestaron que no intersectaba ninguna = 4 (5.4%)

e) Otras respuestas = 4 (5.4%)

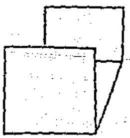
f) No contestaron = 35 (48.0%)

Las respuestas que dan en el inciso a) son del siguiente tenor: "porque está en la mitad de la recta"; respecto al inciso b) "porque llegan a ella" [es decir, no pasan al otro lado de la recta AB].

Enseguida presentaremos los resultados de las preguntas referentes a la parte que denominaremos "imaginación espacial" (I.E.)

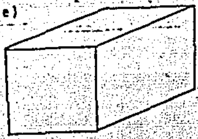
Pregunta #3 Los siguientes dibujos representan figuras geométricas, algunas de ellas se puede decir que son figuras "planas" y otras "espaciales", (es decir, representan figuras tridimensionales), diga en cada caso si se trata de una figura plana o espacial. Explique su respuesta.

c)



d)

e)



Los resultados del inciso 3c. son los siguientes:

a) Número de alumnos que contestaron que contestaron que era plana = 37

b) Número de alumnos que conotestaron que la figura era espacial = 29

c) No contestaron = 7

Los resultados del inciso 3d. (cilindro truncado) son los siguientes:

a) Número de alumnos que contestaron que era una figura plana = 32

b) Número de alumnos que contestaron que era una figura espacial = 32

c) No contestaron = 9

Los resultados del inciso 3e.(cubo) son los siguientes:

a) Número de alumnos que contestaron que era una figura plana = 41

b) Número de alumnos que contestaron que era una figura espacial = 25

c) No contestaron = 7

Pregunta #4 : Imagínese dos rectas paralelas en el plano. Una de ellas se maantiene fija y la otra gira una vuelta completa alrededor de la que está fija manteniéndose siempre paralela a la primera, qué tipo de figura se genera? Haga un dibujo.

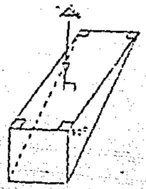
a) Número de alumnos que dibujaron un cilindro = 10

b) Número de alumnos que dibujaron un círculo = 47

c) No contestaron = 16

Sobre la base de los dibujos que realizaron para resolver las actividades #4 y 4 a) reflejan que su imaginación siempre se movió en un plano.

Pregunta #5 : Observe el siguiente dibujo de un sólido, si usted estuviera colocado sobre una línea perpendicular imaginaria que pasa por el centro del sólido a una distancia muy grande, qué tipo de figura "vería"? Haga un dibujo.



a) Número de alumnos que "vieron" un rectángulo = 20

b) Número de alumnos que no "vieron" un rectángulo = 28

c) No contestaron = 25

CONCLUSIONES GENERALES.

El resultado global que arroja el estudio de un total de 73 alumnos, el 41.0% se encuentra en el nivel 1, y el 59% está en el nivel 0, sin embargo, en un análisis más detallado se observó que sobretodo en este último grupo, las pautas reflejadas no son "puras" de acuerdo a la caracterización del nivel 0 sino que, 25 alumnos manifiestan conductas del nivel 1, y que por tanto, consideramos que el mismo se encuentra en una etapa de transición del nivel 0-1. En síntesis, podemos afirmar en términos generales, que sobre la base del presente estudio exploratorio los estudiantes que principian el curso de matemáticas III, en el Colegio de Ciencias y Humanidades del Plantel Sur, el nivel de desarrollo del pensamiento geométrico se sitúa en el nivel 1, o en la transición del nivel 0-1. Con base en lo anterior puede afirmarse que la secuenciación en los Niveles de Van Hiele, no se dan de manera discreta sino contínua.

CONCLUSIONES POR CATEGORIA

Clasificación:

* Los estudiantes agrupan en función de una sola "componente" o propiedad, por ejemplo, los de nivel 0 lo hacen de una manera general (por el "parecido"), en cambio los de niveles superiores lo hacen de manera más específica (número de lados y/o igualdad de los mismos).

* Los alumnos clasifican sobre la base de criterios espontáneos, es decir, no recurren a definiciones, por tanto, no hacen clasificaciones en términos de las propiedades relevantes que caracterizan una figura.

Formación e inclusión de clases:

* No manejan las relaciones entre clases, en particular la inclusión entre las mismas.

* Algunas respuestas incorrectas en este rubro, se deben en parte a conceptos equívocos y parciales.

Inclusión en conceptos:

* En este tipo de actividad, las respuestas incorrectas se debían a conceptos mal formados, añadiéndole propiedades no esenciales, debido posiblemente al uso reiterado de una sola representación para ilustrar conceptos geométricos, pues como se sabe, la representación única favorece la introducción de elementos no relevantes en el concepto.

* Identifican ejemplos de un concepto pero aún no pueden verbalizarlo. (e.g. altura de un triángulo).

Definición:

* En la determinación de un objeto o de un concepto, omiten características esenciales de los mismos.

* No distinguen entre propiedades esenciales y secundarias.

* Dada una figura su descripción es muy rudimentaria (e.g. un rectángulo lo describen como una figura que tiene cuatro lados, superficie, cuatro esquinas).

* No identifican el conjunto mínimo de propiedades que pueden definir una clase.

* Lenguaje geométrico insuficiente.

* No establecen relaciones entre los elementos componentes de una figura, y mucho menos entre las propiedades de la misma.

* Tendencia a caracterizar una figura en términos de una sola propiedad esencial o no esencial, tienen una fuerte tendencia a conceptualizar en función de una sola componente que tiene sus efectos en la formación de conceptos.

Deducción informal

* Incapacidad para seguir los pasos de un argumento "informal", por ejemplo el problema #37 en el cual hicieron caso omiso de los pasos de la consstrucción geométrica, su atención se centró en el dibujo, no intentaron dar una fundamentación de la respuesta en términos de los pasos dados de la construcción, se concretaron a señalar lo que observaron en el trazo, es decir, como éste mostraba 3 lados desiguales, concluían que el triángulo era escaleno; una respuesta similar

se habría obtenido si la figura hubiera ostentado 2 lados iguales. Cabe señalar que en el examen piloto el dibujo era un triángulo equilátero y concluían por esta percepción que el mismo era un equilátero, por esta razón se cambió el dibujo por un triángulo con lados desiguales para atenuar dicho efecto, pero siguieron haciendo lo mismo: respondían sobre la base del dibujo, y no por los pasos de la construcción geométrica.

* El dibujo sobredetermina el razonamiento, como lo ilustran las respuestas en el problema # 58 en donde contestan que las rectas se intersectarán en el interior del triángulo, "porque así se observa que lo harán". Una respuesta similar se habría obtenido si las rectas se hubieran dibujado de tal modo que indicaran que se intersectarían en el exterior del triángulo.

* En un problema geométrico o el enunciado de un teorema no distinguen entre la hipótesis y la tesis.

* Incapacidad para utilzar un " hecho" conocido para obtener un nuevo resultado, incluso apoyándolos con trazos auxiliares.

* Inhabildad para usar una propiedad conocida de una figura para resolver un problema geométrico.

Deducción formal.

* Después de presentarle una lista de enunciados de teoremas, definiciones y postulados de la geometría elemental, no logran diferenciarlos.

Imaginación espacial (I.E.)
En relación a las actividades de imaginación espacial se observó que los estudiantes no pudieron realizar las operaciones mentales que éstas involucraban; por ejemplo en la actividad de la generación del cilindro a partir de dos rectas paralelas en el plano se constató que su imaginación no pudo desprenderse del plano y en consecuencia imaginar el movimiento paralelo de una de las rectas en torno a la otra. Asimismo, no encontramos indicios que permitan abrigar sospechas de la existencia de una relación entre el dominio (o falta) de habilidades espaciales y las destrezas que subyacen en los niveles del pensamiento del Modelo de Van-Hiele. La observación anterior se basa en que se presentaron casos de alumnos que muestran tener una adecuada imaginación espacial y sin embargo, su pensamiento se encuentra en un nivel bajo, o de conductas que están bien "asentadas" e.g., en el nivel 1 y manifiestan un desempeño deficiente en las actividades de I.E. Cabe señalar que la cuestión anterior no fue contemplada como

un objetivo del presente estudio, por tanto, se deja para el futuro una investigación en esta dirección que permita dar más elementos para establecer las relaciones entre los niveles de Van Hiele y las facultades de imaginación espacial.

* Se manifesta una imaginación espacial muy apegada al plano, que tiene sus efectos en la representación de situaciones geométricas y en la resolución de problemas.

S U G E R E N C I A S

* El objetivo del curso de matemáticas que establece la adquisición del método deductivo, debe de mantenerse, pero a condición de que al alumno se le sujete previamente durante un cierto periodo en actividades que involucran la "deducción informal", entendida ésta como el razonamiento deductivo que se apoya en "principios" que han sido obtenidos por "intuición" o por experimentación para obtener nuevas conclusiones, dicho en otras palabras, la fuente de este "método deductivo" es la experiencia, es un discurso que aún no apela al mismo discurso para fundamentar la validez de sus conclusiones. En cierto sentido, esta etapa informal la consideramos como un pre-requisito para arribar a la deducción formal. Y recordar que la geometría es uno de los medios para la formación del pensamiento deductivo de los estudiantes.

* De acuerdo a los resultados del presente estudio, no es adecuado iniciar el curso de geometría dando las definiciones, postulados y axiomas; en vista de que, implicaría que los estudiantes ya poseen las capacidades que involucra el nivel 2

de pensamiento, y que como hemos visto, aún no dominan siquiera de manera completa las del nivel 1. Ya que una de las características del modelo es que los niveles no se pueden saltar. Por tanto, antes de entrar al nivel de deducción informal deberán plantearse actividades que lleven al alumno a adquirir de manera cabal los niveles que le preceden.

* Reconocemos que los dibujos tienen un valor didáctico innegable como ayuda para la conceptualización o de apoyo para el razonamiento deductivo, sin embargo, es necesario que el estudiante tome distancia de los mismos, es decir, no debe confiar ciegamente en la representación visual, debemos estimular a que su pensamiento confíe más en la argumentación lógica que en el trazo y ésto también tiene un alto valor formativo; en todo caso, las imágenes deben de ser una guía para el razonamiento y no el sustento del discurso, lo dicho anteriormente no sugiere -ni entre líneas- que la representación geométrica o la "intuición" deba de ser desterrada de la enseñanza de la geometría.

* La corrección de los conceptos "mal formados" no deberá hacerse con métodos o tácticas que han resultado ser ineficaces en los cursos anteriores, usar otra clase de

alternativas que entre otras cosas estimulen a reflexionar sobre la propia actividad de aprendizaje.

* Como ya se ha observado en algunas partes de este trabajo, el modelo de Van Hiele, es un elemento teórico importante que permite instrumentar estrategias de aprendizaje, pero que sin embargo no resuelve en definitiva los problemas de la enseñanza de la geometría. Desde esta perspectiva y con el propósito de que los profesores que imparten esta asignatura dispongan de más elementos teóricos que sirvan como una base para la búsqueda de alternativas, se propone la organización de un seminario en el cual se aborden algunos de los siguientes tópicos:

a) Génesis histórica de la geometría
b) génesis cognitiva del individuo (el Modelo de Van Hiele)
c) Confrontación de las etapas principales de la constitución de la geometría con los niveles de pensamiento de Van Hiele.
d) "Dificultades" en la enseñanza de la geometría.
e) Concepciones de aprendizaje (por ejemplo: la que se deriva del modelo de Van Hiele, y de la historia).

RECOMENDACIONES DERIVADAS DEL TRABAJO

Dado que no se tenía ninguna sospecha acerca de cuál podría ser el nivel de "entrada" de los estudiantes del curso de geometría, el examen diagnóstico se diseñó sobre el espectro de todos los niveles; el terreno que íbamos a explorar era en cierto sentido "desconocido" para nosotros, en vista de que, no había antecedentes en el C.C.H. de exámenes de esta naturaleza; estas consideraciones influyeron para no acotar de entrada el estudio exploratorio hacia niveles específicos, se trataba de analizar todos los niveles. Pero a raíz de los resultados obtenidos en éste, es nuestro parecer, que el examen diagnóstico deberá ser re-formulado antes de pensar en una aplicación masiva y concentrarlo principalmente en los niveles 0 y 1; asimismo sugerimos incluir en el mismo una serie de cuestiones referentes a la indagación explícita acerca de las imágenes conceptuales que tiene el estudiante sobre "cuadrado", "rectángulo", "rombo", "paralelogramo" y "cuadrilátero", puesto que, conjeturamos que estas imágenes conceptuales tienen un efecto relevante -no obstante su obviedad- en la realización de las actividades que tienen qué ver con los conceptos arriba mencionados.

* Elaborar instrumentos que consideren el carácter contínuo de los niveles del modelo de Van Hiele; pues como ya se observó éstos se dan de forma gradual.

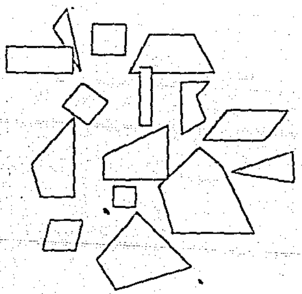
De la misma manera, a nuestro juicio debe de mantenerse la característica de examen abierto, porque permitiría, -entre otras cosas-, hacer otro tipo de interpretaciones de las respuestas que dan los estudiantes, es decir, no necesariamente a través de la óptica del Modelo de Van-Hiele.Sin embargo, como ya lo manifestamos en el capitulo de la Instrumentación del examen, esta nueva versión deberá ser elaborada con la perspectiva de que en un futuro pueda servir como un elemento para la construcción de un examen cerrado.

APENDICE # I

EXAMEN DIAGNOSTICO

1) Las siguientes figuras estaban originalmente distribuidas en diferentes cajas (caja #1, #2, #3, #4) pero alguien las sacó y las revolvió, si te piden que vuelvas a meter las figuras en las cajas que originalmente estaban, cómo las agruparías?, qué idea utilizaste para agruparlas?.

Pon a las figuras el número de la caja a la cuál pertenece cada figura.



Explique su idea para agruparlas:

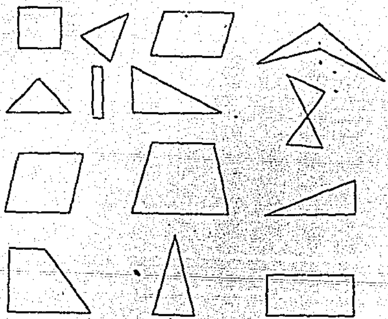
En la caja #1 agrupé las figuras porque

En la caja #2 agrupé las figuras porque

En la caja #3 agrupé las figuras porque

En la caja # 4 agrupé las figuras porque

2) De las siguientes figuras póngales un mismo número a aquéllas que usted considere son de la misma clase (es decir, el #1 para la primera clase, etc)



En qué idea se basó para agruparlas en clases? Explique:

Para la clase # 1:

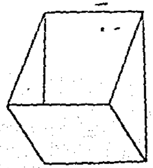
Para la clase # 2:

Para la clase # 3:

Para la clase # 4:

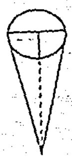
3) Los siguientes dibujos representan figuras geométricas, algunas de ellas se puede decir que son figuras "planas" y otras "espaciales", (es decir, representan figuras tridimensionales) diga en cada caso si se trata de una figura plana o espacial. Explique su respuesta.

a)



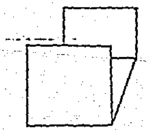
plana ( )
espacial ( )
porque -------

b)



plana ( )
espacial ( )
porque --------

c)



plana ( )
espacial ( )
porque ---------

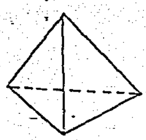
d)

plana ( )
espacial ( )
porque ----------

e)

plana ( )
espacial ( )
porque ---------

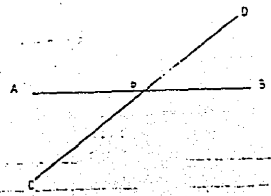
f)



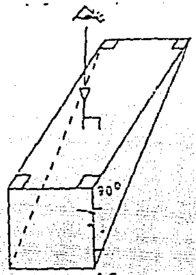
plana ( )
espacial ( )
porque -----------

4) Imagínese dos rectas paralelas en el plano. Una de ellas se mantiene fija y la otra gira una vuelta completa (360) alrededor de la que está fija, manteniéndose siempre paralela a la primera, qué tipo de figura se genera? Haga un dibujo.

4a) Considere las siguientes dos rectas que se intersectan en P. La recta AB la imagina fija, en cambio la recta CD gira una vuelta completa (360) alrededor de la que está fija, pero con apoyo en el punto P, qué tipo de figura se genera? Haga un dibujo.

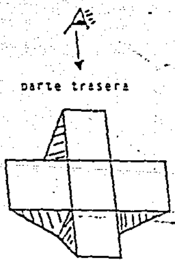


5) Observe el siguiente dibujo de un sólido, si usted estuviera colocado sobre una línea perpendicular imaginaria que pasa por el centro del sólido a una distancia muy grande, qué tipo de figura "vería"? Haga un dibujo.



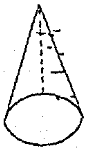
Dibujo visto desde la flecha:

6) Observe la representación del siguiente sólido, si usted estuviera colocado en la parte trasera -donde indica la flecha- y bastante lejos del cuerpo geométrico, cómo se vería la figura?

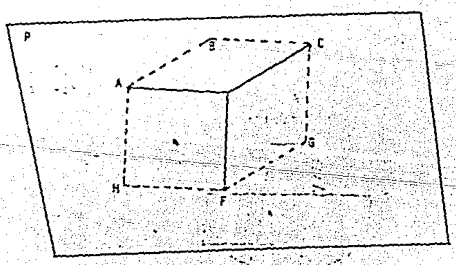


dibujo visto desde la flecha:

7) Observe la siguiente figura: si cortamos con unas tijeras por la línea punteada y si la desdoblamos en el plano, qué figura se obtiene? Haga un dibujo.



8) Lo siguiente es un plano P que "corta" a un cubo, esto es, un plano que pasa por los vértices A, C y F del cubo, qué tipo de figura resultaría en el corte del cubo si quitáramos la parte que corta el plano? Haga el dibujo de lo que resulta al cortar con el plano.



9) Por cuáles vértices de un cubo debería cortar un plano P para que el corte resulte un rectángulo? Haga el dibujo en donde se muestre que el corte da un rectángulo.

10) Qué tipo de figura es la siguiente?

____________ Por qué dice eso? ________

11) Qué piensa de la siguiente afirmación?: Todo cuadrado es un rectángulo.

( ) Es verdadera porque __________

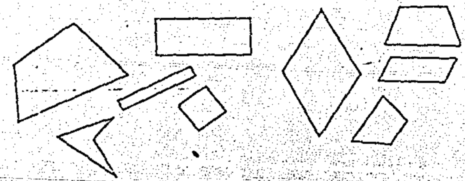
( ) Es falsa porque _________

12) Qué piensa de la siguiente afirmación?: Un rectángulo es un cuadrado.

( ) Es verdadera porque _________

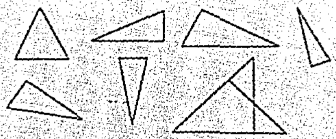
( ) Es falsa porque _________

13) Compare las siguientes figuras: Son todas diferentes?, son todas del mismo tipo?, sólo algunas? aquéllas que usted considera que son de la misma clase póngales el mismo número, por ejem. el 1 para la primera clasificación, etc.



Por cada clasificación que establezca, explique en qué se basó para hacerla:

14) En la siguiente colección de triángulos, ponga el mismo número a aquéllos que sean triángulos rectángulos.



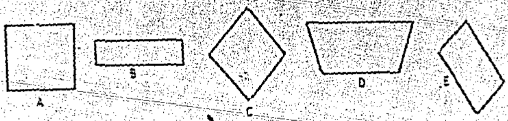
15) Escriba todas las características (propiedades) que usted observe en la siguiente figura.

1) ____________ 2) ____________ 3) ______________

4) ___________ 5) ___________ 6) ______________

7) ___________ 8) ___________ 9) ______________

16) Cuáles de las siguientes figuras son paralelogramos?



( ) ninguno

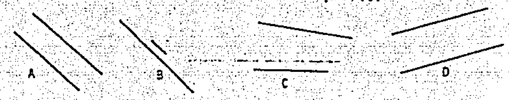
( ) E solamente

( ) B y E solamente

( ) C y D solamente

( ) A, B, C y E solamente

17) De los siguientes pares de rectas en el plano, cuáles son paralelas? Justifique su respuesta.



( ) ninguna

( ) A solamente

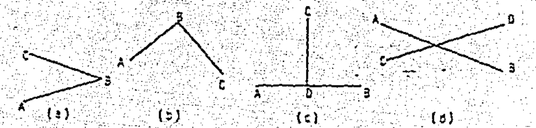
( ) D solamente

( ) A y D solamente

( ) A, B y D solamente

porque ______________________

18) De los siguientes pares de rectas, cuáles son perpendiculares?



( ) ninguna

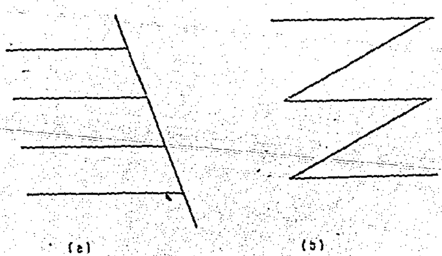
( ) c solamente

( ) b solamente

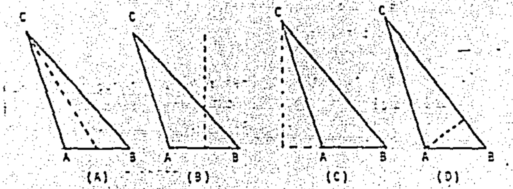
( ) a y d solamente

( ) b y c solamente

19) En las siguientes figuras señale las rectas que sean paralelas y los ángulos que sean iguales (utilice la misma letra para los ángulos que son iguales y sean de la misma clase)



20) En los siguientes triángulos, cuál tiene dibujada <u>correctamente</u> la altura del vértice C al lado AB?



( ) ninguno

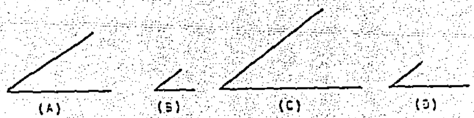
( ) A solamente

( ) B solamente

( ) C solamente

( ) D solamente

21) De los siguientes ángulos, cuál de ellos es el mayor?



( ) A solamente

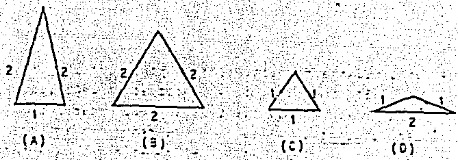
( ) C solamente

( ) D solamente

( ) B solamente

( ) ninguno

22) De los siguientes dibujos de triángulos, cuál de ellos es "falso"?



( ) ninguno

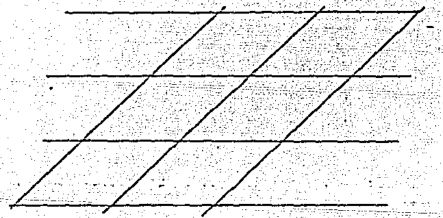
( ) A solamente

( ) D solamente

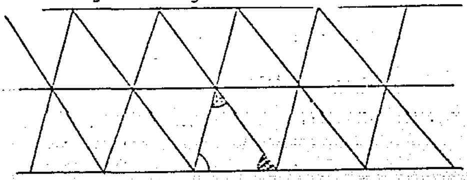
( ) C solamente

Explique su respuesta: ____________________

23) En la siguiente figura identifique los ángulos que sean iguales (utilice la misma letra para los ángulos que sean iguales y pertenezcan a la misma clase).

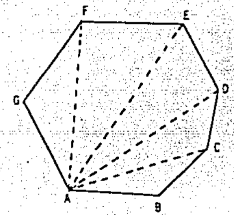


24) La siguiente red está formada por triángulos congruentes. En un triángulo de la red están señalados con tres diferentes colores sus tres ángulos interiores, señale todos los ángulos de la red que sean iguales a cada uno de ellos (usando el mismo color para todos los que sean iguales). Ya que haya hecho esto, trate de probar que las sumas de los ángulos interiores del triángulo es igual a 180.



Explique su razonamiento ______________________________

25) Sin medir los ángulos, diga cuánto vale la suma de los ángulos interiores (<A, <B, <C, <D, <E, <F y <G) del siguiente polígono.



Respuesta ____________
Explique cómo obtuvo el resultado.

26) Entre los niños hay un juego que se llama "adivine mi nombre", el juego consiste en dar algunas pistas, que se supone que a partir de ellas se podrá averiguar el "nombre" del objeto desconocido. Ahora supóngase que usted está pensando en un rectángulo y quiere dar a su amigo algunas pistas para que adivine que usted está pensando en un rectángulo, usted piensa que a su amigo sería necesario darle todas las pistas (propiedades) del rectángulo, para saber que usted está pensando en un rectángulo?, usted piensa que bastaría darle sólo algunas?, cuál es el número más pequeño de pistas que usted daría para que supiera que usted está pensando en un rectángulo?

Pistas que usted daría:

Explique por qué eligió estas pistas:

27) Escriba dos definiciones diferentes de rectángulos que empiecen ambas con:

1a. "Un rectángulo es una figura de cuatro lados" : ________

2a. "Un rectángulo es una figura de cuatro lados" : ________

28) Qué piensa de la siguiente afirmación: Un cuadrado es un rombo.

( ) Es falsa Explique por qué ____________
( ) Es verdadera Explique por qué ____________

29) Qué piensa de la siguiente afirmación: Un rombo es un cuadrado.

( ) Es falsa. Explique por qué ____________

( ) Es verdadera Explique por qué ____________

30) Qué piensa de la siguiente afirmación:

Un cuadrilátero con cuatro lados iguales es un cuadrado.

( ) Es verdadera Explique por qué ____________

( ) Es falsa Explique por qué ____________

31) Qué piensa de la siguiente afirmación:

Un cuadrilátero con todos sus ángulos iguales es un rectángulo.

( ) Es verdadera Explique por qué ____________

( ) Es falsa Explique por qué ____________

32) Complete la siguiente frase para obtener una afirmación verdadera:

Un cuadrilátero que tiene sus lados adyacentes iguales es un ____________ Explique su respuesta ______________________

33) Si en un cuadrilátero los lados opuestos son paralelos, entonces se puede concluir que:

( ) El cuadrilátero es un cuadrado

(   ) Tiene sus lados iguales

(   ) Nada

(   ) Los ángulos opuestos son iguales

(   ) Los ángulos opuestos miden 90 grados

34) Observe las siguientes dos afirmaciones:

a) "Si llueve entonces me pongo la gabardina"
b) "Si me pongo la gabardina entonces llueve"

La afirmación inciso a) es falsa (   ) verdadera (   )

porque ______________________________

La afirmación inciso b) es falsa (   ) verdadera (   )

porque ______________________________

NOTA: A la afirmación b) se le llama la <u>recíproca</u> de la afirmación a).

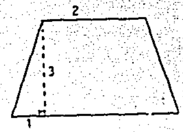
35) Escriba la recíproca de la siguiente afirmación:

"Si ABC es un triángulo isósceles entonces los ángulos de la base son iguales"

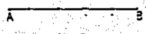
Su recíproca es: ______________________________

Falsa (   )   verdadera (   ) porque ________________

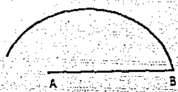
36) Encuentre el área de la siguiente figura



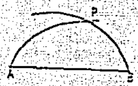
37) Observe la siguiente construcción:

a) Dado el segmento AB : 

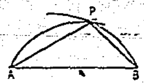
b) Constrúyase sobre él un semicírculo con centro en A y radio = AB



c) Constrúyase otro semicírculo con centro en B y radio = BA



d) Ambos semicírculos se cortan en P. Unir P cono A y P con B

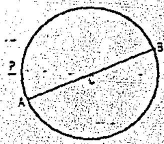


Qué tipo de triángulo es APB? Respuesta ________________

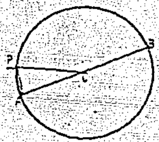
Explique por qué ________________________________

38) Fíjese en las siguientes serie de figuras:

a) APB es un círculo con centro en C y AB es un diámetro



b) Unase P con C y P con A



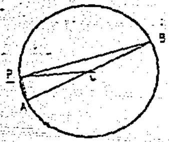
c) Qué tipo de triángulo es el APC? Respuesta ______________

Explique por qué? ______________________________

d) Qué podemos decir de los ángulos <PAC y <CPA?

____

e) Ahora únase P con B



f) Qué tipo de triángulo es el PCB? Respuesta ____________

Explique por qué? ________________________________

g) Qué podemos decir de los ángulos <CPB y <PBC?

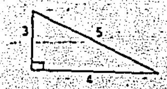
Respuesta ____________ porque __________________

h) Usando los resultados anteriores y el hecho de que en todo triángulo la suma de sus ángulos interiores es 180, es decir, que <CAP + <APC + <CPB + <PBC = 180

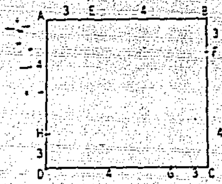
Cuál es el valor del ángulo <APB = <APC + <CPB ?

Respuesta ______________ Explique ______________

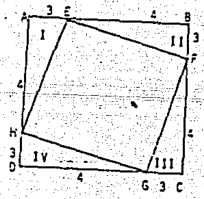
39) Dado el triángulo rectángulo de catetos 3 y 4 y de hipotenusa 5



Construye un cuadrado que tenga como lado : 3+4 de la siguiente manera:



Unase HE, EF, FG, GH



Cómo son los cuatro triángulos respecto al dado?

Respuesta ____________ por qué ______________

Cómo son los ángulos <AHE y <BEF?

Respuesta _____________ por qué _____________

Cómo son los ángulos <AEH y <BFE?

Respuesta ______________ por qué ____________

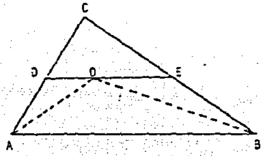
Cuánto vale la suma de los ángulos <AEH y <BFE?

Respuesta ____________ por qué ______________

Qué tipo de figura es la HEFG?

Respuesta ____________ por qué ______________

40) En el problema siguiente identifique qué es lo dado (lo conocido), y qué es lo que se tiene que demostrar (lo desconocido): "En el triángulo ABC, AO es la bisectriz del <BAC y BO es la bisectriz del ángulo <ABC que se intersectan en O, la recta DE es paralela al lado AB. Probar que DE = AD + BE. (Nota: NO TRATE DE HACER LA DEMOSTRACION conteste sólo lo que se le pide)



Lo dado es: ___________________________

Lo que se tiene qué demostrar es : _______________

41) En el problema anterior a partir de la información dada en la figura, qué otra información adicional (implícita) podría usted obtener?

La información implícita es: ______________________

42) En el siguiente enunciado, identifique qué es lo dado y que es lo que se tiene qué demostrar:

"La perpendicular que pasa por el punto medio de la base de un triángulo isósceles pasa por el vértice del triángulo".

a) Lo dado es : ____________________

b) Lo que se tiene qué demostrar es: ____________________

43) En las siguientes afirmaciones escriba en el paréntesis una D para aquéllas que sean definiciones, una T para los teoremas y una P para los postulados.

(   ) Los ángulos opuestos por el vértice son iguales

(   ) Por un punto exterior a una recta sólo puede trazarse una recta paralela

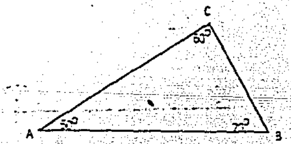
(   ) Los puntos que están en una misma recta son colineales

(   ) La tangente a una curva es la recta que toca a la curva en un solo punto

44) Escriba la definición de altura de un triángulo: ________________________________

45) A continuación se dan tres "demostraciones" del siguiente teorema: En todo triángulo la suma de sus ángulos interiores es dos rectos (180), cuál es la demostración correcta? Explique por qué la que eligió es la correcta y las otras dos no lo son.

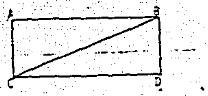
a) Al medir los ángulos de un triángulo encontramos las siguientes medidas:



que al sumarlos se obtiene <A+<B+<C=180

por lo tanto, en todo triángulo la suma de los ángulos interiores es dos rectos

b) Considérese el rectángulo ABCD

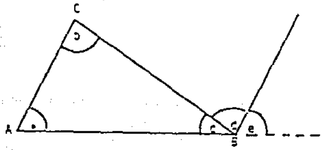


por ser rectángulo se tiene que <A=<B=<C=<D=90,
por lo tanto, <A+<B+<C+<D=4X90=360

Al trazar la diagonal BC el rectángulo queda dividido en dos triángulos congruentes el ABC y el CBD, por lo tanto, la suma de sus ángulos interiores es igual a dos rectos.

c) En el triángulo ABC se traza una paralela BE a AC

i) <c+<d+<e=180 (definición)
ii) <a=<e por ser correspondientes
iii) <b=<d por ser alternos-internos



Sustituyendo ii) y iii) en Sustituyendo ii) y iii) en i) se obtiene

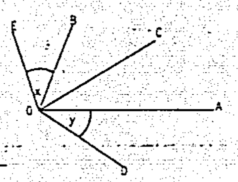
<c+<b+<a=180 lo que queríamos demostrar

La demostración correcta es la ( )

( ) , ( ) no son correctas porque ________________

____

46) En el siguiente ejercicio dé la razón para cada afirmación



lo dado: OC es la bisectriz de <AOB, <x=<y
por demostrar: <DOC =<COE

demostración

afirmaciones razones

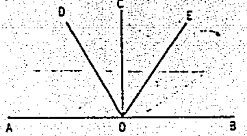
i) CO es la bisectriz de <AOB porque ________

ii) <AOC = <COB porque ________

iii) <x = <y porque ________

iv) por lo tanto, <DOC = <COE porque ________

47) Dé la demostración del siguiente ejercicio:



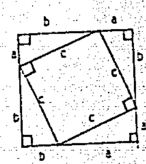
Dados: la línea AB; < BOE = <DOA; CO es la bisectriz del ángulo <EOD

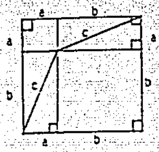
Demostrar que: <COB = 90

Demostración

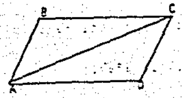
Afirmaciones Razones

48) Sobre la base de los siguientes diagramas demuestre el Teorema de Pitágoras. (Sugerencia: iguale las áreas de los cuadrados)





49) La siguiente figura es un paralelogramo, entonces <BAC=<ACD. Lo anterior se basa en que:



( ) Los ángulos <BAC y <ACD son alternos-internos ya que BC es paralela a AD

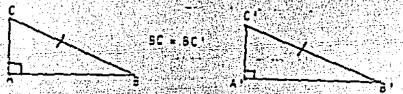
( ) Cualquier par de ángulos internos son iguales

( ) Los ángulos <BAC y <ACD son alternos-internos entre las paralelas AB y DC

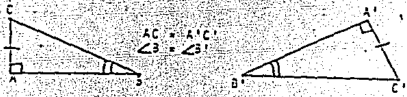
( ) Los triángulos ABC y ADC son isósceles.

50) De los siguientes tres pares de triángulos, cuáles son congurentes?

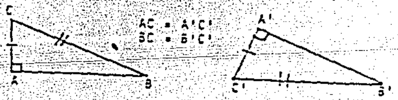
a)



b)



c)



( ) El par (a) solamente

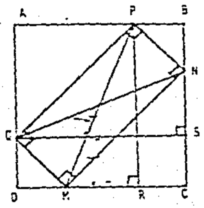
( ) El par (b) solamente

( ) El par (b) y (c) solamente

( ) El par (c) solamente

( ) Ningún par

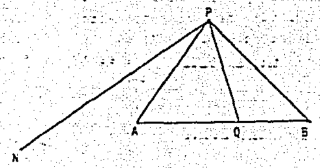
51) En el siguiente diagrama ABCD es un cuadrado. Si NS=MR demuestre que el triángulo NQS es congruente al triángulo MRP.



Afirmaciones Razones

52) Encuentre el área de un cuadrado inscrito en un cículo de radio r

53) En las siguientes rectas que pasan por el punto P, cuáles intersectan a la recta AB?



Respuesta ______________ por qué ______________

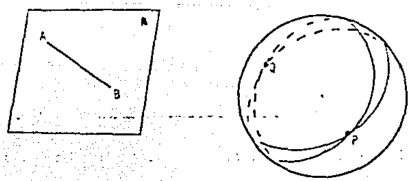
54) Cuál es la negación (el contrario) de la siguiente afirmación?

"Por un punto exterior a una recta solo puede trazarse una paralela a ella"

Respuesta ________________________________

Haga un dibujo que ilustre la negación anterior

55) En un plano la linea recta se define como la trayectoria más corta entre dos puntos. Y que el plano está formado por rectas. Ahora imagínese que hay otra clase de "seres planos" que viven en una superficie esférica de dos dimensiones y que no saben en que clase de mundo viven. La estructura de este mundo está constituida por circulos máximos que se intersectan en P y Q, es decir, dos circulos cualesquiera siempre se cortan



Qué pensaría usted de alguien que afirmara que las "líneas rectas" en este mundo son los círculos máximos?

a) Explique ______________________________

Qué cosa sería la trayectoria más corta sobre esta superficie?

b) Respuesta ______________________________

Explique ______________________________

56) En el mundo anteriormente descrito dada una "recta" y un punto exterior a ella, existirá una recta paralela a la recta dada?

a) Explique ______________________________

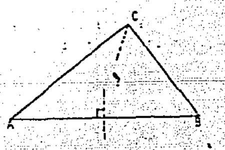
Pueden trazarse rectángulos?

b) Explique ______________________________

57) Usted sabe que en todo triángulo la suma de sus ángulos interiores es igual a 180, esta propiedad se mantiene si el triángulo está sobre esta superficie esférica?

Explique ______________________________

58) Considere la bisectriz del ángulo <C y la mediatriz del lado AB, se intersectarán estas dos rectas?, en dónde?



(   ) Se intersectan fuera del triángulo

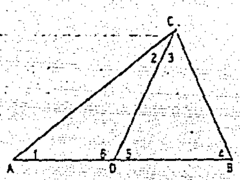
( ) No se intersectan

( ) Las dos rectas coinciden

Explique por qué eligió esa respuesta ______________________

59) La siguiente "demostración" es <u>incorrecta</u>, explique por qué es incorrecta, es decir, en dónde se encuentra el error.

Teorema: En todo triángulo la suma de sus ángulos interiores es dos rectos (180)



Demostración

Divida el triángulo ABC en dos triángulos mediante un segmento rectilíneo trazado desde el vértice C y denote los ángulos con número tal y como se indica en la figura

Sea x la suma de los ángulos de un triángulo (lo desconocido); entonces:

$<1 + <2 + <6 = x$ en el triángulo ADC

$<3 + <4 + <5 = x$ en el triángulo DCD

Sumando estas dos igualdades se tiene:

$<1 + <2 + <3 + <4 + <5 + <6 = 2x$

Pero la suma $<1 + <2 + <3 + <4$ es la suma de los ángulos del triángulo ABC, es decir, también es igual a x; y la suma de los <5 y <6 es igual a 180

por lo tanto, $x + 180 = 2x$

de lo cual se deduce

que $x = 180$ lo cual queríamos demostrar.

El error consiste en ______________________________

BIBLIOGRAFIA

Bishop Alan. Cuáles son algunos de los obstáculos para el aprendizaje de geometría? Estudios en Educ. Matemática, UNESCO, Vol. 5

Bishop Alan. Space and Geometry. (Art. fotocopiado).

Crowley Mary. "The Van-Hiele model of the development of thinking geomtric". In learning and Teaching Geometry. K-12 U.S.A.: The national council of theachers of mathematics, 1987. (Year book) 250 p.

Crowley Mary. "Criterion -Referenced reliabihty Indices Associated with the Van-Hiele Geometry Test". In Journal for Research Mathematics Education Vol.21 number 3, 1990. U.S.A.: National council of teacher of mathematics. 252 p.

Dreyfus Tommy. "Euclid may stay-and Even Be Taught" In Learning and teaching Geometry. K-12 U.S.A.: The National Council of Teachers of Mathematics, 1987, (Year book) 250 p.

Fuys David. Et al. "An investigation of Van-Hiele levels of thinking in Geometry among sixth and ninth Graders : Research Findings and Implications" paper presented at American Educational research Association, New Orleans, Lousiana. April 27, 1984.

Fuys David. Et al. The Van-Hiele Model of Thinking in Geometry among adolescents. In Journal For Research in Mathematics Education, Monograph #3. New York: National Council of Teachers of Mathematics, 1988. 195 p.

Gutiérrez Angel. Et al. "Estudio de las caracteristicas de los niveles de Van-Hiele" Universidad de Valencia. 1987. 7 p.

Gutiérrez Angel Et al. "El Modelo de Razonamiento de Van- Hiele como marco para el aprendizaje comprensivo de la Geometria. Un ejemplo: Los Giros". España: Universidad de Valencia, 1990. 20 p.

Hershkowitz R. Et al. "Activities With Teachers Based on Cognitive Research" In Learning and Teaching Geometry. K-12 . U.S.A.: The National Council of Theachers of Matematics. 1987. (Year book) 250 p.

Wilson Mark. "Measuring a Van-Hiele Geometry Sequence: A reanalysis". In Journal For Research in Mathematics Education . Vol. 21 number 3, 1990. U.S.A.: National Council of Teachers of Mathematics. 252 p.

Wirszup I. "Breaktroughs In the Psichology of learning and teaching Geometry " In J.L. Martin. Edit. Space And Geometry: Papers from a research workshop.Columbus, Ohio: Eric/SMEAC 1976.

CLASIFICACION (PREGUNTAS 1,2,13)

NIVELES / ESTUDIANTES		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	11	18	19	20	21	22
0	4			3				1,2,13	1,2	13	1,2,13	1,2,13	13	13	1,2,13	1,2,13	1,2,13	1,2,13		2,13	1,2	1	[illegible]
	6																						
1	3b	1,2,13	1,2,13	13	1,2,13	1,2,13	1,2,13	2	2,13		1,2,13	1,2,13	1,2,13	1,2,13	1,2,13	2,13		13	1,2,13		13	1,2	1,2,13
	6a				2,13																		
NO CONTESTO										1,2										1		13	

CLASIFICACION

(NIVEL 0) DESCRIPCIONES:

4. Compara y clasifica formas sobre la base de su apariencia como un todo.

6. Resuelve problemas rutinarios operando sobre las formas mas que utilizar las propiedades.

(NIVEL 1) DESCRIPCIONES:

3b. Clasifica formas de diferentes maneras de acuerdo a ciertas propiedades.

6b. Describe una clase de figuras en términos de sus propiedades.

CLASIFICACION

- Continuación -

NIVELES \ ESTUDIANTES		20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42
0	4	[illegible]	[illegible]		1 2 13				[illegible]				1 2 13	1		1 2					2	13	13	[illegible]
	6																							
1	3	13	2	2 13		1 2 13	2	13	4	1 2 13	1 2 13			2 13	1 2	13	1 2 13	1 2 13		1 2	1 13		1 2	1 2
	4																							
NO CONTESTO			13				13	1 2				1 2 13			13				1 2 13	13		1 2		

CLASIFICACION

- Continuación -

NIVELES / ESTUDIANTES		33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44
0	4		1,2					2	13	13			2,13
	6												
1	3b	1,2	13	1,2,13	1,2,13		[illegible]	1,13		1,2	[illegible]		
	6a												
NO CONTESTO		13				1,2,13	13		1,2,13			1,2,13	1

NIVELES / ESTUDIANTES		45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55
0	4	1			1,2,13							
	6											
1	3b	2	1,2	1,2	1,2		1,2	2,13	2,13	2	1,2	1,2,13
	6a											
NO CONTESTO			13	13		1,2,13	13	1		13	13	

CLASIFICACION

- Continuación -

NIVELES / ESTUDIANTES		49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
O	4											1 2						1 2	1 2 13				
	6																						
1	3b		1 2	2 13	2 13	[illegible]	1 2	1 2 13	1 2	1 13		13	2	2 13	1 2 13	1 2 13	2	13		1 13	2 13	1 2 13	1 2 13
	6a	[illegible]	[illegible]	[illegible]																			
NO CONTESTO		[illegible]	[illegible]	[illegible]		13	13		13		1 2 13		13	2			13						

CLASIFICACION

- Continuación -

NIVELES \ ESTUDIANTES		59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	10	11	12	13	
O	4	[illegible]						[illegible]	[illegible]		[illegible]			2			
	6					[illegible]	[illegible]										
A1	3b	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]		[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	
	6a																
NO CONTESTO			[illegible]	[illegible]			[illegible]										

INCLUSION DE CLASES

(NIVEL 1) DESCRIPCIONES:

3a. Compara dos formas de acuerdo a las relaciones entre sus componentes.

7. Identifica que propiedades se usaron para caracterizar una clase de figuras también las aplicas a otras clases de figuras y compara clases de figuras de acuerdo a sus propiedades.

10c No explica las relaciones entre las clases mas allá de verificar ejemplos explícitos a partir de una lista dada de propiedades.

(NIVEL 2) DESCRIPCIONES:

2b. Ordena clase de figuras (el estudiante responde a la pregunta ¿un rectángulo es un paralelogramo? explicando "si porque ellos tienen todas las propiedades de un paralelogramo, y también la propiedad especial de ángulos rectos".

(NIVEL 3) DESCRIPCIONES:

2. Reconoce las características de una definición formal (i.e. necesidad y suficiencia) y equivalencia de definiciones.

INCLUSION DE CLASES (PREGUNTAS 11, 13, 17, 19)

NIVEL \ ALUMNOS		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
1	3a	11 13 17 19	11 13 17 19	11 13 17 19	11 13 19	11		11 13										11						[illegible]
	7	11 13 17 19	11 13 17 19	11 13 17 19	11 13 17 19	11 13	11 13	11 13	13 17	11 13 17 19	11 13 17 19	11 13	11 13 17 19	11 13 17 19	11 13 17 19	11 13 17 19	11 13 17 19		11 13 17 19	11 13 17 19	11 13 17 19		11 13 17 19	[illegible]
	10c					11 19	17 19																	[illegible]
2	2b								11													17 19		[illegible]
3	2																							[illegible]
NO CONTESTO																						11 13		[illegible]

INCLUSION DE CLASES

- Continuación -

NIVEL \ ALUMNOS		17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
1	3o									[illegible]		[illegible]			[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]		[illegible]
	7		[illegible]	[illegible]	[illegible]		[illegible]		[illegible]		[illegible]		[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]			[illegible]
	10c												[illegible]	[illegible]											
2	2b					[illegible]				[illegible]			[illegible]	[illegible]											
3	2																								
NO CONTESTO						[illegible]				[illegible]		[illegible]	[illegible]					[illegible]				[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

INCLUSION DE CLASES

- Continuación -

NIVEL	ALUMNOS	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
1	3a	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]		[illegible]		[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	
	7	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]			[illegible]		[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	
	10c							[illegible]	[illegible]											
2	2b																			
3	3																			
NO CONTESTO					[illegible]				[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]								[illegible]

INCLUSION DE CLASES

- Continuación -

NIVEL \ ALUMNOS		51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73
1	3a	12 28 29	12	12 28 29	12 28 29	12 28 29	12 28 29	12 28 29	12 28 29	12 28 29	12 28 29	12 28 29	12 28 29	12 28 29	12 28 29	12 28 29	28 29	12	12	12 28 29	12 28 29	12 28 29	12 28 29	12 28 29
	7	11		11	11	11		11	11	11	11	11	11	11	11	11		11	11		11	11	11	11
	10c																							
2	2b		11 28 29																					
3	2																							
NO CONTESTO							11										11							

NIVEL \ ALUMNOS		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
0	1a																	
	1b							16 17						16		17 19	17 32	
1	1	19	19	19	1/	19	19 23	19 23		19 23		19	19	19	19	23		19
	4b	23 17	23	23		23			23			23	23				23	23
	6b	14 30 31 16 21	11 20 21 19 30 31 32	16 17 20 21 30 31 32	16 32 30 31	16 17 19 21 30 31	16 17 20 31 31 32	21 19	16 17 20 31 30 31 32	20 30 31	17 20 30 31	16 17 19 20 21 30 31 32	16 17 19 21 30 31 32	17 19 30 31 32	16 17 20 16 30 31 32	16 20 30 31	16 17 20 21 31	16 17 21 30
2	1b																	
NO CONCEPTO		32	14		19 23	32	14			17 18 32				23	23 14	14		

INCLUSION EN CONCEPTOS

(NIVEL 0) DESCRIPCIONES:

1a. Identifica ejemplos de una forma por su apariencia como un todo:

i) en un simple dibujo, diagrama, en un conjunto de figuras recortadas.

1b. En diferentes posiciones.

(NIVEL 1) DESCRIPCIONES:

4a. Interpreta y usa descripciones verbales de una figura en términos de sus propiedades y usa esta descripción para dibujar/construir la figura.

Ejemplo: El estudiante lee en una trjeta "4 lados" y "todo los lados iguales" y trata de dibujar una figura con esas propiedades la cual no es un cuadrado.

4b. Interpreta verbal o simbolicamente afirmaciones de reglas y las aplica (p.e. cuando se muestra una sierna el estudiante la describe y la usa para identificar ángulos congruentes en una red).

1. Identifica y establece relaciones entre las componentes de figuras.

6b. Dadas ciertas propiedades dice que figura es.

(NIVEL 2) DESCRIPCIONES:

1b. Identifica el conjunto mínimo de propiedades que carcterizan una figura.

INCLUSION EN CONCEPTOS

- Continuación -

NIVEL \ ALUMNOS		16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	
0	1a															17				
	1b	32																		
1	1		19	19 23	19		19 23	19	19 23			23		19 23	19 23		19 23	19 23	19 23	
	4b	23	23			23														
	6b	17 21	16 17 21 30	16 17 19 20 21 30 31	20	16 17 18 19 20 21 30 31	16 17 18 19 20 21 30 31	16 17 18 19 20 21 30 31	16 17	16 17 18 19 20 21 30 31	17 30 31	14 17 20 21 30 31	16 17 20 21 30 31 32	18 21 30 31 32	16 17 20 30 31 32	17 30 31 32	17 30 31 32	16 17 20 21 30 31	16 17 20 31 30	30 32 [illegible]
2	1b																			
NO CONTESTO					16 17 23 30 31 32	32	32			32	19 23 32	19 32	19 23	16	19	19 23		18 32	16 32	

INCLUSION EN CONCEPTOS

- Continuación -

NIVEL / ALUMNOS		31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47
0	1a														17			
	1b																	
1	1	19 23	19 23	19 23	23 [illegible]	23	19 23		19 23				23	19 23		19 23	19 23	23
	4b																	
	6b	17 30 31 32	16 17 20 21 30 31	19 17 20 31 30	30 31 32 17 20	16 21 30 31 32	16 17 30 31 32	16 17 18 30 17 32 19 20	17 30 31 32 20	17 21	17 20 21	30 31 17 21	16 17 20 21 30 31 32 19	17 21	16 30 31 32 20 21	30 31 32 17 20	19 16 20 30 31 32 17 11	14 17 19 21
2	1b																	
NO CONTESTO			17 32	16 32	16			19 23		19 23 30 31 32	19	19 23 32		19 16 30 31 32	14 19 23			19 30 31 32

INCLUSION EN CONCEPTOS

- Continuación -

NIVEL	ALUMNOS	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66
0	1a																		
	1b																		
1	1		19	19 23	19 23	19 23	19	23	19 23	23				19	19	19		19 23	
	4b		23																
	6b	30 31 32 16 20	14 30 31 32 17 20	30 31 17 21	14 16 17 30 31 32	30 31 32 14 16 21	30 31 32 17 20 21	30 31 32 16 17 21	30 14 17 20 21	30 31 32 17 17 21	31 17	30 31 32	30 31 32 20 21	30 31 32 17 18 20 21	30 31 32 16 17 21	30 31 32 14 17 20	30 31 32 17 20	30 31 32 14 17 21	30 31 32 17 21
2	1b																		
NO CONTESTO			16	32					31 32 16		23 30 32	19 23	19			23	19		

INCLUSION EN CONCEPTOS

- Continuación -

NIVEL \ ALUMNOS		64	65	66	67	68	69	70	71	72	73
0	1a										
	1b										
1	1		19 23			19	19 23		19		
	4b										
	6b	30 31 32 17 20	30 31 32 14 13 21	30 31 32 17 21	30 31 32 13 20 21	30 31 32 16 18 17 20	30 31 32 14 16	30 31 32 14 13 21	30 31 32 16 17 18 21	30 31 32 16 [illegible] 26	30 31 32 16 17
2	1b										
NO CONTESTO		19			19 23						23

DEFINICION

(NIVEL 0) DEFINICIONES:

5. Describe verbalmente formas por su apariencia como un todo.

(NIVEL 1) DEFINICIONES:

4a. Interpreta y usa descripciones verbales de una figura en términos de sus propiedades y usa esta descripción para dibujar/construir la figura, por ejemplo: lee en una tarjeta "4 lados" y "todos los lados son iguales" y trata de dibujar una forma con esas dos propiedades que no es un cuadrado.

6a. Describe una clase de figuras por ejemplo paralelogramos en términos de sus propiedades.

10b. No formula y usa definiciones formales.

(NIVEL 2) DEFINICIONES:

1b. Identifica el conjunto mínimo de propiedades que caracterizan una figura.

1c. Formula y usa una definición por una clase de figuras. (Ejemplo: el estudiante formula una definición de un cometa y la utiliza para explicar porqué algunas son o no son cometas)

(NIVEL 3) DESCRIPCIONES:

2. Reconoce las características de una definición formal y equivalencia de definiciones.

DEFINICION (Preguntas 10,15,16,23,44)

NIVEL	ALUMNOS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
0	5										10,15		15				15,16 23	15					
1	4a																						
	6a	10,15,16 23	10,15,16	10,15,23	10,15,23	10,15	10,15,16 23	10,15 16,23	10,15 16,23	15,16 23	15,16	10,15 16	10,15 23	10,15 16,23	10,15 16,23	10,15 16	10	15,16	10,15 16,23	10,15 16,23	10		15,16 23
	10b	44				[illegible]	[illegible]					44				44			44		44		
2	1b					16,23															16	16	10
	1c							44														44	44
3	2																					23	
NO CONTESTO			23,44	44		44	44		44	10,44	44		44	44	44		44	44		44	15	10,15	[illegible]

DEFINICION
- Continuación -

NIVEL \ ALUMNOS		24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
0	5								15				
1	4a												
	6a	10, 15 26, 27	10 26 27	26 27	15 26 27	10 15 26 27	10 15 26	10 15 26 27	10 26 27	10 15 26 27	10, 15	10 15 26 27	15 27
	10b		44		44		44	44		44	44		
2	1b								[illegible]				10 26
	1c												
3	2												
NO CONTESTO		44	15	10 15 44		44			44		26 27	44	44

NIVEL \ ALUMNOS		36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
0	5						10							
1	4a													
	6a	10 26 27	.	15 26 27	10 27 15	15 27	26 27 15	10 15 26 27	10 15 27	10 26 27	10 15 26 27	15 27	10 26 27	10 [illegible] 26 [illegible]
	10b							44				44	44	44
2	1b											10 26		
	1c													
3	2													
NO CONTESTO		15 44	10 15 26 27 44	10 44	44	10 44	44		15 26 44	44	44		15	

DEFINICION

- Continuación -

NIVEL		50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61
0	3a	[illegible]											
1	4a												
	6a	10	10 15 26 27	10 15	10 15 26 27	10 15	10 15 26 27	27	10 15 26 27	10 15 27	10 15 26 27	10 15	10 27
	10b			44	44		44		44	44	44		44
2	1b			26 27									26
	1c												
3	2												
NO CONTESTÓ		26 44	44			26 27 44		10 13 44		26		26 27 44	13

NIVEL		62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73
0	3a	26					10						
1	4a												
	6a	10 15 27	10 26	10 15 26 27	10 15 26 27	10 15 27 15	10 15 26 27	15 26 27	10 15 27	10 15 26	10 15 26 27	10 15 26 27	10 15 26 27
	10b	44	44	44			44		44		44		
2	1b									27			
	1c												
3	2												
NO CONTESTÓ			15 27		44	44		44	26			44	

NIVEL	ALUMNOS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
DEMOSTRACION INFORMAL (Preguntas 24 25 33 36 37 38 39 49 50 b)																		
1	4b	24	24	24		24	24			24	24		24	24	24	24	24 50b	24
	5				24			24	24			24						
	9	36						36	36								25	
	10a	33 49		33 49		33 49	49	33 49	33	33 49	33 49	33	33 49	49	33	33 49	49	33 49
2	2c						33							33	49			
	2d																	
	3a		37 38 39						39									
	6																	
NO CONTESTO		38	36 49 50b	36 50	36 50b 49 33	36 50b	25 36		25 49 50	36 37 38	36 37 49 50	36 37 49 50	36 50	36 50	25 36	25 36	36	36

ANEXO DE DEFINICIONES DE: "DEMOSTRACION INFORMAL"

(NIVEL 1) DESCRIPCIONES:

4b. Interpreta verbal o simbolicamente afirmaciones de reglas y las aplica, por ejemplo: el estudiante describe una "sierra" y la usa para identificar ángulos congruentes en una red.

5. Empiricamente descubre propiedades de figuras especificas y las generaliza para esta lcase de figuras.

9. Resuelve problemas geométricos usando propiedades conocidas de figuras o por "intuición".

10a. No explica como ciertas propiedades de una figura estan interrelacionadas.

(NIVEL 2) DESCRIPCIONES:

2d. Descubre nuevas propiedades por deducción.

3a. Da argumentos deductivos informales. Sigue un argumento deductivo y puede suministrar partes de un argumento.

6. Identifica y usa estrategias o por medios intuitivos para resolver problemas.

DEBOSTRACION INFORMAL

- Continuación

NIVEL	ALUMNOS	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34
1	4b	24	24		29 36	24 50b		29						24		24	24	29 35	24
	5						24				39	24	24 39					39	
	9					36					50b 49	36							
	10a	33 49	33 49		33 49	33 49	33	49	33 49			33	33	33	24 25 33	33	49	33	
2	2c						49	33			33						33		33
	2d					[illegible]													
	3a					38													
	6																		
NO CONTESTO		36	36	24 25 33 36 37 49 50b		39	39	25	24 25 36 37 38 39	24 25 33 36 39 49 50b	24 25 36	37 38	25 36 37 38 49 50b	36	36	25 36 37 39 49 50b	36	36 50b	

DEMOSTRACION INFORMAL

Continuación

NIVEL	ALUMNOS	3	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
1	4b	25	24	24			25								24	24			
	5	39					24				39 24								
	9										36 49				49				
	10a	33			33	33		33	33	33			33		33			33 49	33
2	2c		33	33			33				33			33		33			
	2d																		
	3a																		
	6																		
NO CONTESTO		50b		36	24 25 36 38 39 50b	24 25 36 37 39 49 50b	39 49 50b	24 36 37 38 39 49 50b	25 36 37 39 49 50b	25 36 37 38		24 25 33 36 37 38 39 49 50b	24 25 36 49 50b	24 25 36 37 38			24 25 36 39	24-25-36	24 25 36 37 39

DEMOSTRACION INFORMAL

- Continuación

NIVEL		45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61
1	4b		24	24				24	24	24		24						24
	5																	
	9		49					49				36				50b 49		36
	10a		33			33 49	33	33		33	33	33		33		33		33
2	2c	33		33					33									
	2d																	
	3a																	
	6																	
NO CONTESTO		24 25 36 37 38			24 25 36 39	24-25-36	24-25 36 37 38 39	25 36	36	36	24 25 36		24 33 36 37 38 39 49 50b	36	24 25 33 36 37 38 39	24 36	24 36 39 49 50b	39

DEMOSTRACION INFORMAL
- Continuación

NIVEL	ALUMNOS	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73
1	4b					24	24						24	24		24		
	5																	
	9			50b 49		36	36							49	24 36			
	10a	33		33		33	33	33			33 49	33				33	49	49
2	2c								33	33			33	33	33			
	2d																	
	3a																	
	6																	
NO CONTESTO		36	24 25 33 36 37 38 39	24 36	24 36 39 49 50b	39		24 25 36 38 39 49	24 36 37			24	25 36 39	25 36	25	36 39 49 50b	36	

ALUMNOS / NIVEL	3: 1	3: 3	NO CONTESTO
1			[illegible]
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			
13			
14			
15			
16			
17			
18			
19			
20			
21			
22			

DEMOSTRACION FORMAL (PREGUNTAS: 43, 45, 46, 47, 48, 50c, 51, 53)

DEMOSTRACION FORMAL

(NIVEL 3) DESCRIPCIONES:

1. Reconoce la necesidad de términos indefinidos, definiciones, y supuestos básicos (por ejemplo postulados).

3. Prueba en una forma axiomática relaciones que fueron explicadas informalmente en el nivel 2.

DEMOSTRACION FORMAL (PREGUNTAS 43, 45, 46, 47, 48, 50, 51, 52)			
Nivel / Alumnos	3		NO CONTESTO
	1	3	
1			[illegible]
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			
13			
14			
15			
16			
17			
18			
19			
20			
21			
22			

DEMOSTRACION FORMAL

(NIVEL 3) DESCRIPCIONES:

1. Reconoce la necesidad de términos indefinidos, definiciones, y supuestos básicos (por ejemplo postulados).

3. Prueba en una forma axiomática relaciones que fueron explicadas informalmente en el nivel 2.

DEMOSTRACION FORMAL

- Continuación -

NIVEL / ALUMNOS	3		NO CONTESTO
24			
25			
26			
27			
28			
29			
30			
31			
32			
33			
34			
35			
36			
37			
38			
39			
40			
41			
42			
43			
44			
45			
46			
47			
48			

DEMOSTRACION FORMAL

- Continuación -

NIVEL \ ALUMNOS		51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73
J	1																							
	3																							
NO CONTESTO																								

TABLA DE TOTALES.

TIPO DE ACTIVIDAD	NIVELES \ ALUMNOS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
CLASIFICACION	0			1				3	1	1							3	3		2	2	1		3		1		3		
	1	3	3	2	3	3	3		2		3	3	3	3	3	2	2		3		1	1	3		3	1	1	2	3	3
INCLUSION DE CLASES	1	4	4	4	4	4	4	4	2	4	4	2	4	4	4	4	3		4	4	4		4	4	4	1	3	1	2	3
	2								1													2				1			1	1
	3																													
DEFINICION	0										.						1	1						2						
	1	3	3	3	3	3	1	4	4	3	3		4	4	4	4	1	2	3	4	2	[illegible]	1	1	4	4	2	4	4	4
	2					1		1													1	1	1							
	3																					1								
INCLUSION EN CONCEPTOS	0							2						1		1	1													
	1	3	4	4	4	3	4	3	3	3	4	4	4	3	3	3	3	4	4	3	4	4	1	4	4	4	3	3	3	4
	2																						2							
	3																													
DEMOSTRACION INFORMAL	1	4	1	3	1	3	2	4	3	3	3	2	3	2	2	3	4	3	3		4	5	3	2	2		3	3	4	3
	2	.	4	1	1	1	1		1					1	1							1	1	1			1		.	
DEMOSTRACION FORMAL																														
TOTALES		24	24	21	15	21	22	10	21	15	16	16	22	19	21	18	17	13	24	10	21	21	23	21	21	11	17	17	21	22

TABLA DE TOTALES
- Continuación -

TIPO DE ACTIVIDAD	NIVELES \ ALUMNOS	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58
CLASIFICACION	0			3	1		2					1	1	1			2	1			3				1	1					
	1	3			2	2	1	3	3		2	2		2	3			2	2	2			2	2	2	2	2	3	2	2	
INCLUSION DE CLASES	1	3	4	4	4	2	4	3	3	2	2		2		4	4	2	4	4	4		3	2	4	1	4	4	4	3	4	4
	2	1																							3						
	3																														
DEFINICION	0			1										1																	
	1	4	5	3	5	3	4	2	3		4	3	2	3	5	3	3	4	3	4	5	4	1	4	3	5	2	5	2	5	4
	2							2											2						2						
	3																														
INCLUSION EN CONCEPTOS	0		1														1														
	1	8	4	6	8	7	6	6	7	8	7	2	3	4	9	4	6	7	10	5	6	5	8	6	9	8	7	7	7	7	[illegible]
	2																														
	3																														
DEMOSTRACION INFORMAL	1	3	3	3	3	4	1	1	1	1	1	1	1	1	4		1		3	1		2	1	3	1	2	1	3		1	
	2				1	1	1	1			1				1			1		1					1						
DEMOSTRACION FORMAL																															
TOTALES		22	16	16	23	18	17	18	17	11	13	8	8	10	26	11	13	17	24	13	11	14	14	19	21	21	16	22	14	19	1

TABLA DE TOTALES
Continuación -

TIPO DE ACTIVIDAD	NIVELES \ ALUMNOS	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73
CLASIFICACION	0				1	1						2						2	3		1			1		
	1		2	2	2	2	2	3	2	2		1	1	2	3	3	2	1		2	2	3	3	2	3	3
INCLUSION DE CLASES	1	3	2	4	1	4	4	4	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	2	2	2	4	4	4	4	4
	2				3																					
	3																									
DEFINICION	0														1						1					
	1	4	1	4	3	5	2	5	2	5	4	5	2	3	4	3	5	4	4	5	1	4	3	5	4	4
	2				2									1									1			
	3																									
INCLUSION EN CONCEPTOS	0																									
	1	5	9	6	8	8	7	7	7	7	7	7	5	8	7	7	5	8	5	6	8	7	6	8	6	5
	2																									
	3																									
DEMOSTRACION INFORMAL	1	2	1	3	1	2	1	3		1		3		3	3	1			2	1	1	2	2	2	1	1
	2			1	1												1	1			1	1	1			
DEMOSTRACION FORMAL	1																									
TOTALES		14	14	19	21	21	16	22	14	19	10	16	12	21	21	18	17	18	13	16	17	21	20	21	18	17