

01189

1  
24

**FUNCIONES DE DISTRIBUCION DE PROBABILIDAD TRIVARIADAS DE VALORES  
EXTREMOS Y SUS APLICACIONES EN HIDROLOGIA**

**CARLOS AGUSTIN ESCALANTE SANDOVAL**

**TESIS DOCTORAL**

Presentada a la División de Estudios de  
Posgrado de la

**FACULTAD DE INGENIERIA**

de la

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO**

como requisito para obtener  
el grado de

**DOCTOR EN INGENIERIA**

**( APROVECHAMIENTOS HIDRAULICOS )**

**TESIS CON  
FALSA LEYENDA**

**CIUDAD UNIVERSITARIA. D.F. . 1991**



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# INDICE

	PAGINA
<b>INTRODUCCION</b>	<b>1</b>
<b>Capítulo 1. DISTRIBUCIONES DE VALORES EXTREMOS</b>	
1.1 Introducción	11
1.2 Sobre el desarrollo de las distribuciones de valores extremos	13
1.3 Genesis, características y propiedades de las distribuciones univariadas de valores extremos	15
1.4 Génesis, características y propiedades de las distribuciones bivariadas de valores extremos	24
<b>Capítulo 2. MODELO TRIVARIADO DE VALORES EXTREMOS</b>	
2.1 Introducción	31
2.2 Construcción del modelo matemático	32
2.3 Genesis, características y propiedades de las distribuciones trivariadas de valores extremos	38
<b>Capítulo 3. ESTIMACION DE PARAMETROS</b>	
3.1 Introducción	45
3.2 Propiedades de los parámetros estimados	46
3.3 Método de máxima verosimilitud	47
3.4 Funciones Logarítmicas de verosimilitud de las distribuciones trivariadas de valores extremos	51
<b>Capítulo 4. CONFIABILIDAD EN LA ESTIMACION DE PARAMETROS</b>	
4.1 Introducción	60
4.2 Propiedades asintóticas de los estimadores de máxima verosimilitud	62
4.3 Varianzas asintóticas univariadas	63
4.4 Varianzas asintóticas trivariadas	66
4.4.1 Distribución VET111	67
4.4.2 Distribución VET112	71
4.4.3 Distribución VET122	75
4.4.4 Distribución VET222	79

	<b>PAGINA</b>
<b>Capítulo 4. . . .</b>	
<b>4.5 Contenido de información relativa</b>	<b>83</b>
4.5.1 Distribución VET111	84
4.5.2 Distribución VET112	87
4.5.3 Distribución VET122	90
4.5.4 Distribución VET222	93
<b>4.6 Aplicación a muestras pequeñas</b>	<b>98</b>
4.6.1 Distribución VET111	98
4.6.2 Distribución VET112	100
4.6.3 Distribución VET122	101
4.6.4 Distribución VET222	103
<b>Capítulo 5. APLICACIONES EN HIDROLOGIA</b>	
5.1 Introduccion	106
5.2 Selección del tipo de distribución de valores extremos	107
5.3 Limites de confianza de eventos de diseño	115
5.4 Comparacion con otras distribuciones univariadas	122
<b>Capítulo 6. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES</b>	<b>129</b>
<b>REFERENCIAS</b>	<b>132</b>
<b>APENDICE A</b>	<b>137</b>
<b>APENDICE B</b>	<b>165</b>
<b>APENDICE C</b>	<b>174</b>
<b>APENDICE D</b>	<b>185</b>
<b>APENDICE E</b>	<b>244</b>
<b>APENDICE F</b>	<b>261</b>

## LISTA DE TABLAS

Tabla		PAGINA
4.1	Coefficientes de la matriz de Varianza-Covarianza de la distribución general de valores extremos	65
4.2	Relación de información relativa para la distribución VET111	86
4.3	Relación de información relativa para la distribución VET112	89
4.4	Relación de información relativa para la distribución VET122	93
4.5	Relación de información relativa para la distribución VET222	95
4.6	Combinaciones propuestas para las muestras en la fase de simulación	100
5.1	Error estándar de la mejor distribución de cada aproximación univariada, bivariada y trivariada, para elegir la distribución final de valores extremos en las estaciones de la región A	111
5.2	Parámetros finales de la mejor distribución de cada aproximación univariada, bivariada y trivariada de valores extremos de las estaciones en la región A	112
5.3	Error estándar de la mejor distribución univariada y trivariada, para elegir la distribución final de valores extremos en las estaciones de la región B	113
5.4	Parámetros finales de la mejor distribución de las aproximaciones univariada y trivariada de valores extremos en las estaciones de la región B	114
5.5	Parámetros de la distribución univariada con el mínimo error estándar en las estaciones de la región A.	124
5.6	Errores estándar de la distribución univariada elegida y de la mejor opción trivariada de valores extremos para seleccionar la mejor alternativa en las estaciones ubicadas en la región A.	125
5.7	Eventos de diseño de la mejor distribución univariada y trivariada de valores extremos para las estaciones de la región A.	126
B.1	Varianzas asintóticas y simuladas de los parámetros trivariados de la distribución VET111	166

**Tabla**

**PAGINA**

B.2	Varianzas asintóticas y simuladas de los parámetros trivariados de la distribución VET112	168
B.3	Varianzas asintóticas y simuladas de los parámetros trivariados de la distribución VET122	170
B.4	Varianzas asintóticas y simuladas de los parámetros trivariados de la distribución VET222	172
C.1	Descripción y características de las estaciones en la región A	177
C.2	Descripción y características de las estaciones en la región B	178
C.3	Gastos máximos anuales (m <sup>3</sup> /s) de las estaciones en la región A	179
C.4	Gastos máximos anuales (m <sup>3</sup> /s) de las estaciones en la región B	180
C.5	Coefficientes de correlación y tamaños de muestra relativos para los grupos de tres estaciones seleccionadas en la región A	181
C.6	Coefficientes de correlación y tamaños de muestra relativos para los grupos de tres estaciones seleccionadas en la región B	182
C.7	Parámetros iniciales univariados obtenidos por el método de máxima verosimilitud de las distribuciones Gumbel y GVE para las estaciones de la región A	183
C.8	Parámetros iniciales univariados obtenidos por el método de máxima verosimilitud de las distribuciones Gumbel y GVE para las estaciones de la región B	184
E.1	Varianzas asintóticas y simuladas de los valores de diseño de la distribución VET111 ( Caso A )	245
E.2	Varianzas asintóticas y simuladas de los valores de diseño de la distribución VET111 ( Caso B )	246
E.3	Varianzas asintóticas y simuladas de los valores de diseño de la distribución VET111 ( Caso C )	247
E.4	Varianzas asintóticas y simuladas de los valores de diseño de la distribución VET111 ( Caso D )	248

**Tabla**

**PAGINA**

E. 5	Varianzas asintóticas y simuladas de los valores de diseño de la distribución VET112 ( Caso A )	249
E. 6	Varianzas asintóticas y simuladas de los valores de diseño de la distribución VET112 ( Caso B )	250
E. 7	Varianzas asintóticas y simuladas de los valores de diseño de la distribución VET112 ( Caso C )	251
E. 8	Varianzas asintóticas y simuladas de los valores de diseño de la distribución VET112 ( Caso D )	252
E. 9	Varianzas asintóticas y simuladas de los valores de diseño de la distribución VET122 ( Caso A )	253
E. 10	Varianzas asintóticas y simuladas de los valores de diseño de la distribución VET122 ( Caso B )	254
E. 11	Varianzas asintóticas y simuladas de los valores de diseño de la distribución VET122 ( Caso C )	255
E. 12	Varianzas asintóticas y simuladas de los valores de diseño de la distribución VET122 ( Caso D )	256
E. 13	Varianzas asintóticas y simuladas de los valores de diseño de la distribución VET222 ( Caso A )	257
E. 14	Varianzas asintóticas y simuladas de los valores de diseño de la distribución VET222 ( Caso B )	258
E. 15	Varianzas asintóticas y simuladas de los valores de diseño de la distribución VET222 ( Caso C )	259
E. 16	Varianzas asintóticas y simuladas de los valores de diseño de la distribución VET222 ( Caso D )	260
F. 1	Límites al 0.95% de confianza univariados, bivariados y trivariados de valores extremos para la estación Chinipas	262
F. 2	Límites al 0.95% de confianza univariados, bivariados y trivariados de valores extremos para la estación Choix	263
F. 3	Límites al 0.95% de confianza univariados, bivariados y trivariados de valores extremos para la estación Ixpalino	264
F. 4	Límites al 0.95% de confianza univariados, bivariados y trivariados de valores extremos para la estación Jaina	265

**Tabla**

**PAGINA**

F.5	Límites al 0.95% de confianza univariados, bivariados y trivariados de valores extremos para la estación La Huerta	266
F.6	Límites al 0.95% de confianza univariados, bivariados y trivariados de valores extremos para la estación Palo Dulce	267
F.7	Límites al 0.95% de confianza univariados, bivariados y trivariados de valores extremos para la estación Piaxtla	268
F.8	Límites al 0.95% de confianza univariados, bivariados y trivariados de valores extremos para la estación San Francisco	269
F.9	Límites al 0.95% de confianza univariados, bivariados y trivariados de valores extremos para la estación Tecusiapa	270
F.10	Límites al 0.95% de confianza univariados, bivariados y trivariados de valores extremos para la estación Toahayana	271
F.11	Límites al 0.95% de confianza univariados, bivariados y trivariados de valores extremos para la estación Urique	272



## LISTA DE FIGURAS

Figura	PAGINA
3.1 Mínimo arreglo muestral trivariado	48
3.2 Máximo arreglo muestral trivariado	48
4.1 Arreglo muestral propuesto para el cálculo de los contenidos de información relativa	85
C.1 Localización de las estaciones en la región A	175
C.2 Localización de las estaciones en la región B	176
D.1 Curvas de frecuencia empírica y ajustada mediante las aproximaciones univariada, bivariada y trivariada para los gastos máximos anuales de la estación Acatitan	186
D.2 Curvas de frecuencia empírica y ajustada mediante las aproximaciones univariada, bivariada y trivariada para los gastos máximos anuales de la estación Badiraguato	187
D.3 Curvas de frecuencia empírica y ajustada mediante las aproximaciones univariada, bivariada y trivariada para los gastos máximos anuales de la estación Chinipas	188
D.4 Curvas de frecuencia empírica y ajustada mediante las aproximaciones univariada, bivariada y trivariada para los gastos máximos anuales de la estación Choix	189
D.5 Curvas de frecuencia empírica y ajustada mediante las aproximaciones univariada, bivariada y trivariada para los gastos máximos anuales de la estación Guatenipa	190
D.6 Curvas de frecuencia empírica y ajustada mediante las aproximaciones univariada, bivariada y trivariada para los gastos máximos anuales de la estación Huites	191
D.7 Curvas de frecuencia empírica y ajustada mediante las aproximaciones univariada, bivariada y trivariada para los gastos máximos anuales de la estación Ixpalino	192
D.8 Curvas de frecuencia empírica y ajustada mediante las aproximaciones univariada, bivariada y trivariada para los gastos máximos anuales de la estación Jaina	193

<b>Figura</b>	<b>PAGINA</b>	
D. 9	Curvas de frecuencia empírica y ajustada mediante las aproximaciones univariada, bivariada y trivariada para los gastos máximos anuales de la estación La Huerta	194
D. 10	Curvas de frecuencia empírica y ajustada mediante las aproximaciones univariada, bivariada y trivariada para los gastos máximos anuales de la estación Los Molinos	195
D. 11	Curvas de frecuencia empírica y ajustada mediante las aproximaciones univariada, bivariada y trivariada para los gastos máximos anuales de la estación Naranja	196
D. 12	Curvas de frecuencia empírica y ajustada mediante las aproximaciones univariada, bivariada y trivariada para los gastos máximos anuales de la estación Palo Dulce	197
D. 13	Curvas de frecuencia empírica y ajustada mediante las aproximaciones univariada, bivariada y trivariada para los gastos máximos anuales de la estación Piaxtla	198
D. 14	Curvas de frecuencia empírica y ajustada mediante las aproximaciones univariada, bivariada y trivariada para los gastos máximos anuales de la estación San Francisco	199
D. 15	Curvas de frecuencia empírica y ajustada mediante las aproximaciones univariada, bivariada y trivariada para los gastos máximos anuales de la estación San Ignacio	200
D. 16	Curvas de frecuencia empírica y ajustada mediante las aproximaciones univariada, bivariada y trivariada para los gastos máximos anuales de la estación Santa Cruz	201
D. 17	Curvas de frecuencia empírica y ajustada mediante las aproximaciones univariada, bivariada y trivariada para los gastos máximos anuales de la estación Tamazula	202
D. 18	Curvas de frecuencia empírica y ajustada mediante las aproximaciones univariada, bivariada y trivariada para los gastos máximos anuales de la estación Tecuápa	203

**Figura****PAGINA**

D. 19	Curvas de frecuencia empírica y ajustada mediante las aproximaciones univariada, bivariada y trivariada para los gastos máximos anuales de la estación Toahayana	204
D. 20	Curvas de frecuencia empírica y ajustada mediante las aproximaciones univariada, bivariada y trivariada para los gastos máximos anuales de la estación Urique II	205
D. 21	Curvas de frecuencia empírica y ajustada mediante las aproximaciones univariada, bivariada y trivariada para los gastos máximos anuales de la estación Zopilote	206
D. 22	Curvas de frecuencia empírica y ajustada mediante las aproximaciones univariada y trivariada para los gastos máximos anuales de la estación Achotal	207
D. 23	Curvas de frecuencia empírica y ajustada mediante las aproximaciones univariada y trivariada para los gastos máximos anuales de la estación Amapa	208
D. 24	Curvas de frecuencia empírica y ajustada mediante las aproximaciones univariada y trivariada para los gastos máximos anuales de la estación Angel R Cabadas	209
D. 25	Curvas de frecuencia empírica y ajustada mediante las aproximaciones univariada y trivariada para los gastos máximos anuales de la estación Apoala	210
D. 26	Curvas de frecuencia empírica y ajustada mediante las aproximaciones univariada y trivariada para los gastos máximos anuales de la estación Axusco	211
D. 27	Curvas de frecuencia empírica y ajustada mediante las aproximaciones univariada y trivariada para los gastos máximos anuales de la estación Azueta	212
D. 28	Curvas de frecuencia empírica y ajustada mediante las aproximaciones univariada y trivariada para los gastos máximos anuales de la estación Bellaco	213
D. 29	Curvas de frecuencia empírica y ajustada mediante las aproximaciones univariada y trivariada para los gastos máximos anuales de la estación Calapilla	214
D. 30	Curvas de frecuencia empírica y ajustada mediante las aproximaciones univariada y trivariada para los gastos máximos anuales de la estación Canton	215

**Figura****PAGINA**

D. 31	Curvas de frecuencia empirica y ajustada mediante las aproximaciones univariada y trivariada para los gastos máximos anuales de la estación Cuatutolapan	216
D. 32	Curvas de frecuencia empirica y ajustada mediante las aproximaciones univariada y trivariada para los gastos máximos anuales de la estación Cuichapa	217
D. 33	Curvas de frecuencia empirica y ajustada mediante las aproximaciones univariada y trivariada para los gastos máximos anuales de la estación Dominguillo	218
D. 34	Curvas de frecuencia empirica y ajustada mediante las aproximaciones univariada y trivariada para los gastos máximos anuales de la estación Jacatepec	219
D. 35	Curvas de frecuencia empirica y ajustada mediante las aproximaciones univariada y trivariada para los gastos máximos anuales de la estación La Angostura	220
D. 36	Curvas de frecuencia empirica y ajustada mediante las aproximaciones univariada y trivariada para los gastos máximos anuales de la estación La Estrella	221
D. 37	Curvas de frecuencia empirica y ajustada mediante las aproximaciones univariada y trivariada para los gastos máximos anuales de la estación La Junta	222
D. 38	Curvas de frecuencia empirica y ajustada mediante las aproximaciones univariada y trivariada para los gastos máximos anuales de la estación Las Prietas	223
D. 39	Curvas de frecuencia empirica y ajustada mediante las aproximaciones univariada y trivariada para los gastos máximos anuales de la estación Lauchapan	224
D. 40	Curvas de frecuencia empirica y ajustada mediante las aproximaciones univariada y trivariada para los gastos máximos anuales de la estación Matamba	225
D. 41	Curvas de frecuencia empirica y ajustada mediante las aproximaciones univariada y trivariada para los gastos máximos anuales de la estación Monterosa	226
D. 42	Curvas de frecuencia empirica y ajustada mediante las aproximaciones univariada y trivariada para los gastos máximos anuales de la estación Papaloapan	227
D. 43	Curvas de frecuencia empirica y ajustada mediante las aproximaciones univariada y trivariada para los gastos máximos anuales de la estación Quiotepec	228

**Figura****PAGINA**

D. 44	Curvas de frecuencia empírica y ajustada mediante las aproximaciones univariada y trivariada para los gastos máximos anuales de la estación Santo Domingo	229
D. 45	Curvas de frecuencia empírica y ajustada mediante las aproximaciones univariada y trivariada para los gastos máximos anuales de la estación Tepelmeme	230
D. 46	Curvas de frecuencia empírica y ajustada mediante las aproximaciones univariada y trivariada para los gastos máximos anuales de la estación Tomellín	231
D. 47	Curvas de frecuencia empírica y ajustada mediante las aproximaciones univariada y trivariada para los gastos máximos anuales de la estación Tuxtepec	232
D. 48	Curvas de frecuencia empírica y ajustada mediante las aproximaciones univariada y trivariada para los gastos máximos anuales de la estación Xiquila	233
D. 49	Curvas de frecuencia empírica y ajustada mediante las aproximaciones univariada y trivariada para los gastos máximos anuales de la estación Zapote	234
D. 50	Curvas de frecuencia empírica y ajustada mediante la mejor distribución univariada y trivariada para los gastos máximos anuales. Estación Chinipas	235
D. 51	Curvas de frecuencia empírica y ajustada mediante la mejor distribución univariada y trivariada para los gastos máximos anuales. Estación Choix	236
D. 52	Curvas de frecuencia empírica y ajustada mediante la mejor distribución univariada y trivariada para los gastos máximos anuales. Estación Huites	237
D. 53	Curvas de frecuencia empírica y ajustada mediante la mejor distribución univariada y trivariada para los gastos máximos anuales. Estación Ixpalino	238
D. 54	Curvas de frecuencia empírica y ajustada mediante la mejor distribución univariada y trivariada para los gastos máximos anuales. Estación Los Molinos	239
D. 55	Curvas de frecuencia empírica y ajustada mediante la mejor distribución univariada y trivariada para los gastos máximos anuales. Estación Palo Dulce	240
D. 56	Curvas de frecuencia empírica y ajustada mediante la mejor distribución univariada y trivariada para los gastos máximos anuales. Estación Santa Cruz	241

**Figura****PAGINA**

D. 57	Curvas de frecuencia empírica y ajustada mediante la mejor distribución univariada y trivariada para los gastos máximos anuales. Estación Tamazula	242
D. 58	Curvas de frecuencia empírica y ajustada mediante la mejor distribución univariada y trivariada para los gastos máximos anuales. Estación Zopilote	243

## NOMENCLATURA

a	coeficiente de la matriz de varianza covarianza GVE
$\alpha$	parámetro de asociación del modelo mezclado
$a_{i1}$	coeficientes de la matriz de varianza covarianza VET111
b	coeficiente de la matriz de varianza covarianza GVE
$b_{i1}$	coeficientes de la matriz de varianza covarianza VET112
c	coeficiente de la matriz de varianza covarianza GVE
$c_{i1}$	coeficientes de la matriz de varianza covarianza VET122
$d_{i1}$	coeficientes de la matriz de varianza covarianza VET222
Cov (·)	covarianza
E (·)	valor esperado
exp (·)	antilogaritmo
f	coeficiente de la matriz de varianza covarianza GVE
$f_i$	elemento del vector $\xi_i$
f (·)	función de densidad de probabilidad
F (·)	función de distribución de probabilidad acumulada
g	coeficiente de la matriz de varianza covarianza GVE
$g_i$	elemento del vector $\xi_i$
$g_s$	coeficiente de asimetría
g (·)	función de densidad de probabilidad
G (·)	función de distribución de probabilidad acumulada
h	coeficiente de la matriz de varianza covarianza GVE
I	matriz de información de Fisher
$I_i$	indicador
$I_r$ (·)	Contenido de información relativa
Ln (·)	Logaritmos naturales
L (·)	función de verosimilitud
LL (·)	función de verosimilitud logarítmica
m	parámetro de asociación del modelo logístico
$m_t$	parámetro de asociación trivariada
$m_{b_i}$	parámetro de asociación bivariada
n	tamaño de muestra
$n_e$	longitud efectiva
$n_i$	tamaño de muestra relativo

$n_g$	número de años ganados
$N_i$	tamaños de muestra univariada
$Q_T$	gasto para un periodo de retorno T específico
$R$	coeficiente de correlación múltiple
$R_i$	número aleatorio con distribución ( 0.1 )
$S^2$	varianza de la muestra
$T$	periodo de retorno ( años )
$u_i$	parámetro de ubicación
$Var ( \cdot )$	varianza
$V_{jk}$	$jk$ ésimo elemento de la matriz de varianza covarianza de valores extremos trivariado
$W$	variable reducida general de valores extremos
$y$	variable reducida Gumbel
$y^*$	mediana de la variable reducida GVE
$y^\#$	moda de la variable reducida GVE
$Z ( \cdot )$	valor de la ordenada normal estándar
$\alpha_i$	parámetro de escala
$\beta_i$	parámetro de forma
$\Gamma ( \cdot )$	función gamma
$\partial$	derivada parcial
$\xi_i$	vector
$\theta_i$	vector de parametros
$\mu$	media poblacional
$\nu$	grados de libertad
$\pi$	3.141516
$\Pi$	operador producto
$\rho$	coeficiente de correlación poblacional
$\sigma^2$	varianza poblacional
$\Sigma$	operador suma
$\chi^2$	percentil de la distribución Chi-cuadrada



## INTRODUCCION

El agua es elemento esencial para el consumo humano, los procesos de manufactura de artículos industriales, la transformación de energía y la producción de alimentos. En muchas partes del mundo, el agua es un importante medio de transporte y un factor significativo en las actividades recreativas. Se calcula que la cantidad de agua que hay en la hidrósfera es de unos 1500 millones de kilómetros cúbicos, de los cuales el 95% es agua salada y el 5% dulce. Del agua dulce, el 80% se encuentra en forma de hielo o nieve y el 20% en forma líquida. Por lo anterior, sólo el 1% del agua total de la hidrósfera es económicamente aprovechable por el hombre. De esta agua disponible, el 80% corresponde a aguas subterráneas, y de éstas, el 50% se encuentran abajo de los mil metros de profundidad.

En México se precipita anualmente un volumen de 1.53 billones de metros cúbicos de agua, equivalente a una lámina de 780 m m. en todo el territorio. Aproximadamente la cuarta parte del agua llovida, unos 410.000 millones de metros cúbicos constituyen el escurrimiento superficial del país, distribuidos en forma tan irregular que prácticamente impide su aprovechamiento en forma racional. Específicamente, más del 65% de su superficie es árida o semiárida, y en esa porción del territorio, apenas existe el 20% del escurrimiento en ríos. No obstante, en esta parte se desarrolla gran actividad productiva que conlleva una demanda importante de agua, al localizarse las dos terceras partes de la

población. más del 70% de la industria manufacturera y el 90% de la superficie de agricultura de riego.

En cambio en las zonas lluviosas litoral y sureste, de clima húmedo y subhúmedo, que representa sólo el 35% del país, el escurrimiento aportado por los ríos es del 80% y en ella vive sólo el 24% de la población y la industria manufacturera es incipiente, por lo cual la demanda del líquido es mucho menor.

Más de la cuarta parte de la población se localiza arriba de los 2000 metros sobre el nivel del mar y . en esta área se dispone del 4% del escurrimiento medio anual de agua; por debajo de los 500 metros se asienta un número similar de habitantes y el escurrimiento es mayor al 50%.

La irregular distribución espacial y temporal de las aguas ha hecho necesaria la construcción de obras de aprovechamiento hidráulico. A la fecha, el país cuenta con 1270 presas de almacenamiento con una capacidad de 147 kilómetros cúbicos, cifra que corresponde al 36% del volumen que escurre superficialmente, y se han construido más de 700 kilómetros de acueductos para entrega de agua en bloque a distintas ciudades, además de otras obras para regular y controlar el recurso.

El agua se controla y regula para servir a una amplia variedad de propósitos. El control de avenidas, el drenaje de terrenos, el alcantarillado y la eliminación de aguas negras y residuales y el diseño de las estructuras de cruce de los caminos, son aplicaciones de la ingeniería de los recursos hidráulicos para el control del agua. El riego, el abastecimiento de agua a la

población e industria, las mejoras de la navegación y el aprovechamiento de la energía hidroeléctrica, son ejemplos de la utilización del agua.

Los factores que deben ser considerados en las fases de planeación, diseño, construcción y operación de un aprovechamiento hidráulico son de tipo: hidrológico, hidráulico, geológico, mecánico-eléctrico, ambiental, económico y político.

La planificación puede definirse como la consideración o tratamiento ordenado de un proyecto, desde la declaración original de objetivos, a través de la evaluación de alternativas, hasta la decisión final sobre un curso de acción a tomar. La evaluación de alternativas se rigen por los principios de la ingeniería económica, los cuales tratan de optimizar la relación beneficio-costos.

Debido a que la precipitación y el escurrimiento varían ampliamente de año en año, es antieconómico diseñar un proyecto para proporcionar protección contra la más desastrosa avenida, o para asegurar un abastecimiento adecuado de agua durante la sequía mas severa que pudiera presentarse. En lugar de esto, el diseño del proyecto se basa en un riesgo admisible, producto de un adecuado análisis hidrológico.

Los diseños de proyecto para aprovechamiento hidráulico dependen de la solución que se de a la pregunta: cuanta agua dispondremos ? . En este renglón, los gastos máximos del escurrimiento constituyen las bases para el diseño en los proyectos para controlar excesos de agua, mientras que el volumen

de escurrimiento en periodos más prolongados, es de mucho más interés para diseñar proyectos que involucren la utilización del agua.

El escurrimiento en los ríos presenta dos épocas que conviene describir brevemente:

- a. Epoca de sequía, periodo de escurrimiento muy reducido en la que no se dispone del agua suficiente para su uso en el riego, agua potable, o generación de energía eléctrica, y se caracteriza por clima seco, agotamiento de la humedad del suelo, reducción del agua subterránea y por la reducción o cese eventual del flujo en corrientes.
- b. Epoca de avenidas, en que el escurrimiento es excesivo y provoca desbordamientos en su cauce natural.

Es innegable que la presencia de estos eventos hidrológicos provoca, en muchas partes del mundo, pérdidas humanas y económicas cada año. En México, el monto medio anual de daños cuantificables por inundaciones es de aproximadamente 66 millones de dolares, mientras que las pérdidas humanas, suman más de mil al año. Además, en los últimos 15 años han resultado damnificados más de un millón y medio de personas y se estima que anualmente las inundaciones en el país obligan a la relocalización de alrededor de 50,000 personas.

El hombre puede hacer poco para evitar las inundaciones o las sequías, sin embargo, puede tener la capacidad de reducir al mínimo los daños que estas provocan. El medio más obvio, para reducir los daños, es el de advertir a la población de la

ocurrencia de una avenida con cierto tiempo de anticipación, para que esta sea capaz de evacuar la zona en peligro y de proteger sus posesiones. Similarmente, la advertencia de cierto período de sequía traería consigo la búsqueda de fuentes alternas de suministro de alimentos, y en casos extremos, la reubicación de la población.

Una segunda forma de reducción de daños es mediante el enfoque probabilístico que pretende evaluar la ocurrencia de los eventos extremos analizados. Por ejemplo, la delimitación de la planicie de inundación apoyada en la probabilidad de ocurrencia de cada uno de los niveles en un río podría asegurar que los desarrollos urbanos e industriales no se localicen en zonas de alto riesgo. Como alternativa, estas zonas peligrosas pueden ser ocupadas por parques, áreas recreativas u otras actividades compatibles con el riesgo que ello implica.

Para estimar la probabilidad de ocurrencia de cierto evento se utiliza la técnica estadística del análisis de frecuencias. Cabe aclarar que cuando el evento en estudio son las avenidas, se realiza un análisis de frecuencias de gastos máximos anuales, similarmente, cuando se trata de sequías, los gastos analizados son los mínimos anuales.

El análisis de frecuencias de gastos máximos o mínimos anuales se usa como una ayuda para advertir desastres, además de soporte para producir diseños eficientes de vertedores de presas, capacidades de drenaje en caminos y poblaciones, pilas de puentes, obras de protección, encauzamiento y defensa de ríos.

El análisis de frecuencias de avenidas, se propuso aproximadamente en 1914, aunque avocado a reducir la incertidumbre en su estimación, se ha desarrollado a lo largo de líneas divergentes, con resultados no uniformes en métodos de análisis y, por tanto, en los resultados. El presente estado del arte es tal que no se ha alcanzado un acuerdo general en la técnicas de análisis y no se han establecido estándares con propósito de diseño, como se han hecho en otras ramas de la Ingeniería. Por ejemplo, el proyectista de estructuras conoce las cargas impuestas a su estructura, pero no tiene la seguridad de que estas cargas no serán excedidas. Este proyectista no conoce que cargas por sismo o viento se ejercen sobre la estructura, pero toma en cuenta esta incertidumbre haciendo consideraciones razonables y utilizando un factor de seguridad amplio. El ingeniero de recurso hidráulicos, no conoce la magnitud de los escurrimientos que afectarán al proyecto, ya que estos eventos son totalmente aleatorios. Las incertidumbres hidrológicas no son de ninguna manera las únicas del diseño hidráulico, porque las demandas futuras de agua, los beneficios y los costos, todos son inciertos en un grado determinado, pero un error serio en las estimaciones de la hidrología prevista o esperada puede tener efectos devastadores sobre la economía del proyecto, especialmente por su alto costo.

Cuando una estructura hidráulica es subdiseñada, mediante el empleo de métodos y datos inadecuados, el resultado es, para la mayoría de los casos, la falla de esta. Al respecto, la American Water Works Association ha informado que de 293 fallas de presas

en los Estados Unidos y otros países, desde 1799, cerca del 20% se debieron a la inadecuada capacidad del vertedor de excedencias, es decir, por la mala determinación de la avenida de diseño.

Por otra parte, el que una estructura hidráulica no falle no implica un diseño eficiente. Frecuentemente, las estructuras son sobrediseñadas, considerándose muy seguras pero excesivamente costosas.

El territorio mexicano presenta una gran diversidad de condiciones orográficas, que aunadas a las características propias derivadas de su ubicación geográfica, determinan notables contrastes climáticos que dan a su vez, situaciones de escasez o exceso de agua. Estos fenómenos han originado el inicio de una política hidráulica orientada hacia una rigurosa planeación para el futuro, la cual requiere del perfeccionamiento de los métodos y técnicas de los análisis hidrológicos.

Dentro de estos métodos y técnicas se encuentra el ya mencionado análisis de frecuencias de eventos hidrológicos extremos, el cual requiere de la estimación de cierto gasto de diseño  $Q_T$ , asociado con un período de retorno  $T$  (años), en una estación para la cual el período de registro  $n$  es mucho menor que  $T$ . La variabilidad de los estimados de  $Q_T$ , basado en el registro de una sola estación, ha provocado la exploración de métodos de estimación regional para mejorar su estimación. Estos métodos consideran la información proveniente de otra u otras estaciones vecinas que presenten una buena correlación con la muestra en estudio y que posean una mayor longitud de período de registro.

Existen muchos métodos de análisis de frecuencias regionales (Cunnane, 1988), uno de ellos es mediante el empleo de distribuciones multivariadas.

Muchas contribuciones han sido publicadas en la literatura relacionadas al problema de mejorar la estimación de parámetros usando distribuciones multivariadas. Sin embargo, la mayoría de ellas se han concentrado en la distribución normal (Anderson, 1957).

Recientemente, la aproximación multivariada de valores extremos ha sido aplicada a la solución de problemas hidrológicos. Los fundamentos teóricos de tal aproximación fueron dados hace más de 30 años (Gumbel, 1958, 1959, 1960a, 1960b, 1967; Tiago de Oliveira, 1958, 1975a, 1975b.; Galambos, 1975, 1978), pero ellos han tenido muy poco impacto en el campo de la hidrología. Después de estos trabajos, muchos modelos bivariados de valores extremos comenzaron a aparecer en la literatura (Tiago de Oliveira, 1982). Un grupo particular entre ellos son los modelos diferenciables, los cuales fueron estudiados por Rueda (1981) y Raynal (1985, 1987a, 1987b), sus resultados demuestran que se obtienen mejoras significativas en la fase de estimación de parámetros, en la reducción de la variabilidad de los gastos de diseño y el cálculo de límites de confianza para valores de diseño, por lo que el análisis de frecuencias a través de distribuciones multivariadas de valores extremos representa un campo prometedor de investigación, además de que está en gran parte inexplorado en el sentido de aplicaciones hidrológicas.



En este trabajo se desarrolla una alternativa para el análisis de frecuencias de eventos hidrológicos extremos, en el ámbito de los análisis regionales y mediante el uso de la distribución logística multivariada de valores extremos.

Los objetivos específicos son:

- a. Desarrollar la aproximación trivariada de las funciones de distribución de valores extremos.
- b. Determinar la reducción en la variabilidad de los parámetros por la estimación conjunta trivariada en comparación con la univariada para cada estación individual.
- c. Aplicar la metodología propuesta al análisis de frecuencias de gastos máximos anuales en dos regiones hidrológicas de la República Mexicana.

La contribución general de la investigación propuesta es la de demostrar que la aplicación de las distribuciones trivariadas de valores extremos, al análisis de frecuencias de eventos hidrológicos extremos, mejora las fases de estimación de parámetros, cálculo de eventos de diseño y de sus correspondientes límites de confianza.

Se espera que el reducir la incertidumbre en la estimación de la probabilidad de ocurrencia de los eventos hidrológicos analizados traerá consigo sensibles ahorros en los costos de construcción de las estructuras, incremento en la seguridad de las obras de control de avenidas y una mejor delimitación y uso de la planicie de inundación.

El trabajo se ha estructurado de la siguiente forma:

En el Capítulo 1 son presentadas, en primer término, una descripción del desarrollo de la teoría de los valores extremos. posteriormente se dan las características y propiedades de las distribuciones univariadas y bivariadas de valores extremos.

En el Capítulo 2 se muestran las características y propiedades del modelo trivariado de valores extremos.

En el Capítulo 3 se desarrolla un algoritmo para determinar los estimados de máxima verosimilitud de los parámetros de las funciones de distribución de probabilidad trivariadas propuestas en el Capítulo 2.

La confiabilidad de los estimados de los parámetros de las distribuciones trivariadas de valores extremos es analizada en el Capítulo 4. Su aplicación a muestras pequeñas es probada a través de técnicas de muestreo distribucional.

En el Capítulo 5 se muestran las aplicaciones de las distribuciones trivariadas de valores extremos al análisis de frecuencias de gastos máximos anuales de 49 estaciones hidrométricas.

Las conclusiones y recomendaciones se presentan en el Capítulo 6.

# CAPITULO 1

## DISTRIBUCIONES DE VALORES EXTREMOS

### 1.1 INTRODUCCION

Los proyectos de control de agua son diseñados para reducir los efectos indeseables de las avenidas, las cuales ocurren aleatoriamente.

Un proyecto que eliminara todos los efectos negativos en un año, puede no ser suficiente para proveer completa protección al año siguiente, por lo que los proyectos son diseñados con base en el análisis de un amplio rango de avenidas.

En el análisis de gastos máximos anuales se han manejado diversas funciones de distribución de probabilidad como opciones para modelar a las muestras que se están analizando. Dentro de ese grupo de distribuciones de probabilidad, destaca la muy conocida distribución de valores extremos Gumbel (Tipo I). Las otras dos distribuciones extremas son menos conocidas: Fréchet (Tipo II) y Weibull (tipo III).

Todas ellas son soluciones particulares de la ecuación funcional que deben satisfacer los extremos. La solución general de esta ecuación ha sido encontrada por Jenkinson (1955) y a tal solución se le ha llamado distribución General de Valores Extremos.

El nombre de valores extremos es asignado a estas distribuciones debido a que estas pueden ser obtenidas como distribuciones límite ( $n \rightarrow \infty$ ) de los valores más grandes

entre  $n$  variables aleatorias independientes, cada una teniendo la misma distribución continua.

Las condiciones básicas que definen a las distribuciones asintóticas extremas son:

- a) Las observaciones de la cual los valores extremos son tomados deben ser independientes.
- b) Las observaciones deben ser confiables y estar hechas bajo idénticas condiciones.
- c) El número de observaciones extremas,  $n$ , debe ser grande. El qué tan grande debe ser  $n$  depende de la distribución inicial y del grado de precisión buscado, y
- d) La distribución inicial de la cual son tomados los valores extremos deben pertenecer a uno de los tres tipos mencionados anteriormente.

En general, las distribuciones univariadas de valores extremos han sido usadas ampliamente para ajustar la distribución de eventos hidrológicos extremos. El Natural Environment Research Council ( NERC, 1975 ) proporciona los procedimientos de estimación y aplicaciones de las tres distribuciones de valores extremos al análisis de frecuencias de avenidas. Así mismo, contiene el estado del arte en el análisis de frecuencias de avenidas cuando se usan otras distribuciones univariadas.

Este capítulo se desarrolla como sigue: en la sección 1.2 se hace una reseña histórica sobre el desarrollo de las distribuciones de valores extremos. La génesis, características y propiedades de las distribuciones univariadas y bivariadas de

valores extremos son presentadas en las secciones 1.3 y 1.4, respectivamente.

## 1.2 SOBRE EL DESARROLLO DE LAS DISTRIBUCIONES DE VALORES EXTREMOS

La teoría de los valores extremos describe el comportamiento aleatorio de los enésimos valores más grandes o más pequeños de una muestra de datos.

La historia de los estadísticos de valores extremos comenzó en 1922, en Alemania, con un artículo de L. Von Bortkiewicz, donde se pone de manifiesto que los valores más grandes de muestras tomadas de poblaciones normales son variables que tienen una nueva distribución.

En 1923, R. Von Mises, también en Alemania, introduce el concepto matemático fundamental del valor esperado del elemento más grande de una muestra de datos, dando con esto el inicio al estudio de la distribución asintótica de valores extremos en muestras de distribuciones normales. Los valores más grandes en muestras diferentes a la normal fueron estudiadas por E. L. Dodd en 1923.

En 1925, L. H. C. Tippett obtuvo las probabilidades de los valores más grandes para diferentes tamaños de muestra de una distribución normal.

En 1927, M. Fréchet publicó el primer artículo donde describe la obtención de la distribución asintótica del valor más grande de una clase de distribución individual.

En 1928, R. A. Fisher y L.H.C. Tippett publicaron el artículo

que es considerado el cimiento de la teoría asintótica de las distribuciones de valores extremos. Ellos encontraron, en forma independiente, la distribución asintótica de Fréchet, y construyeron otras dos.

R. Von Mises (1936) y B. Gnedenko (1943) contribuyeron al dar las condiciones necesarias y suficientes para validar las distribuciones asintóticas para los valores más grandes.

Los desarrollos teóricos de los años veinte fueron seguidos, en los años treinta por aplicaciones prácticas usando los estadísticos de valores extremos de distribuciones del tiempo de duración de la vida humana (Gumbel, 1937), y resistencia de materiales (Weibull, 1939).

Desde entonces, estos procedimientos han sido aplicados extensivamente a otros campos que incluyen sismos, datos meteorológicos, efectos de corrosión, tiempos de sobrevivencia de microorganismos, etc.

Con respecto a sus aplicaciones en el análisis de frecuencias de gastos máximos y mínimos están los artículos hechos por Gumbel (1941, 1944, 1945, 1947, 1954).

En artículos pioneros Gumbel (1959, 1960a) propone algunos tipos de distribuciones exponenciales bivariadas. Después, Gumbel (1960b, 1962, 1967) extendió su teoría a las distribuciones multivariadas de valores extremos, sin embargo, muy poca de esta teoría ha sido aplicada al estudio de eventos hidrológicos extremos.

Los trabajos de Clarke (1980), Rueda (1981) y Raynal (1985)

reportan reducciones significativas en la variabilidad de los parámetros estimados mediante las distribuciones bivariadas.

Después de estos trabajos, sólo se han reportado (Takahashi, 1987,1988) algunas propiedades de las distribuciones multivariadas de valores extremos.

### 1.3 GENESIS, CARACTERISTICAS Y PROPIEDADES DE LAS DISTRIBUCIONES UNIVARIADAS DE VALORES EXTREMOS

Las distribuciones de valores extremos fueron obtenidas como distribuciones límite de los valores más grandes o más pequeños de una muestra.

Si  $X(1), X(2), \dots, X(n)$  es una muestra aleatoria de una población continua  $F(x)$ , el  $r$ -ésimo valor más grande es llamado el estadístico de orden  $r$ -ésimo; su valor será denotado como  $x[r]$ . Por lo que, el más pequeño valor muestral es  $x[1]$  y el más grande es  $x[n]$ . Puesto que la distribución de las  $X$ 's,  $F(x)$ , puede ser interpretado como la probabilidad de que  $X$  tenga un valor menor o igual a algún valor específico,  $x$ , la probabilidad de que exactamente  $j$  de las  $X$ 's caiga dentro del intervalo cerrado  $(-\infty, x]$  y  $(n-j)$  caiga en el intervalo abierto  $(x, \infty)$  es obtenida substituyendo  $F(x)$  por la probabilidad en la serie Binomial:

$$\binom{n}{j} F^j(x) (1 - F(x))^{n-j} \quad (1.1)$$

el evento  $x[r] \leq Z$  ocurre si y solamente si,  $r$  o más de la  $X(i)$ 's caen en el intervalo  $(-\infty, Z]$ . Por lo que:

$$P(x[r]) = P(x[r] \leq Z) = \sum_{j=r}^n \binom{n}{j} F^j(Z) (1 - F(Z))^{n-j} \quad (1.2)$$

En particular, la función de distribución de los miembros más grandes de la muestra de una población con distribución  $F(x)$  es:

$$F(x[n]) = (F(x))^n \quad (1.3)$$

Si existe una forma límite para los valores más grandes de  $x$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(x[n]) = L(x) \quad (1.4)$$

esta es llamada la distribución asintótica de los valores más grandes.

Se dice que  $F(x[n])$  es una distribución estable para los más grandes valores, si existen coeficientes de atracción  $a_n$  y  $b_n > 0$  tal que:

$$(F(x))^n = F(a_n x + b_n) \quad (1.5)$$

Esta ecuación fue obtenida por Fréchet (1927) y es llamada el postulado de estabilidad.

Las distribuciones límites fueron obtenidas al resolver la ecuación (1.5) considerando el valor de  $a_n = 1$  para la distribución Tipo I (Gumbel) y  $a_n \neq 1$  para las distribuciones Tipo II (Fréchet) y Tipo III (Weibull), su forma final es:

**Distribución Gumbel**

$$F(x) = \exp(-\exp^{-x}), \quad -\infty < x < +\infty \quad (1.6)$$

**Distribución Fréchet**

$$F(x) = 0 \quad \text{si } x < 0 \quad (1.7)$$

$$F(x) = \exp(-x^{-\beta}) \quad \text{si } x \geq 0, \beta > 0 \quad (1.8)$$

**Distribución Weibull**

$$F(x) = 1 \quad \text{si } x \geq 0 \quad (1.9)$$

$$F(x) = \exp(-(-x)^\beta) \quad \text{si } x < 0 \quad (1.10)$$



En 1955, Jenkinson obtuvo la solución general de la ecuación funcional que deben satisfacer los valores extremos (ecuación 1.5). La solución resultante ha sido llamada " la distribución general de valores extremos " (GVE), la cual representa directamente a las distribuciones II y III. La distribución tipo I resulta como un condición límite de la distribución general de valores extremos.

Cada distribución esta caracterizada por el valor que toma el parámetro de forma  $\beta$ , específicamente:

- a) distribución tipo I (Gumbel) para  $\beta = 0$
- b) distribución tipo II (Fréchet) para  $\beta < 0$
- c) distribución tipo III (Weibull) para  $\beta > 0$

#### *Genesis de la distribución GVE*

Considerese  $N$  muestras, cada una de tamaño  $n$ , que han sido tomadas de la misma población. En cada muestra hay un valor máximo y el valor máximo en las  $Nn$  observaciones es el máximo de los  $N$  máximos valores tomados de muestras de tamaño  $n$ . La distribución del valor máximo en las  $Nn$  observaciones tenderá hacia la misma expresión asintótica tal y como la distribución del valor máximo en las muestras de tamaño  $n$ , siempre y cuando tal asíntota exista.

Dado que una transformación lineal no cambia la forma de la distribución, la probabilidad de que el valor máximo sea menor que  $X$  debe ser igual a la probabilidad de una función lineal de  $X$ , (Gumbel, 1958), la cual es representada por la ecuación (1.5).

Suponiendo que  $F = \exp(-e^{-y(x)})$  y tomando dos veces el logaritmo

natural en (1.5) se tiene que:

$$\ln(n) - y(x) = -y(a_n x + b_n) \quad (1.11)$$

Si se expande (1.11) en potencias de  $(x - x_0)$ , donde  $y(x_0) = 0$  se llega a la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \ln(n) = & -y(b_n + a_n x_0) + (x - x_0) \left\{ y'(x_0) - a_n y'(b_n + a_n x_0) \right\} + \\ & + \frac{(x - x_0)^2}{2!} \left\{ y''(x_0) - a_n^2 y''(b_n + a_n x_0) \right\} + \dots \end{aligned} \quad (1.12)$$

y dado que la ecuación (1.12) es válida para el rango de valores de  $x$ , se pueden obtener las siguientes ecuaciones:

$$-y(b_n + a_n x_0) = \ln(n) \quad (1.13)$$

$$y'(x_0) - a_n y'(b_n + a_n x_0) = 0 \quad (1.14)$$

$$y^{(t)}(x_0) - a_n^t y^{(t)}(b_n + a_n x_0) = 0 \quad (1.15)$$

donde  $(t)$  esta asociado al orden de la derivada y para  $t \geq 1$ , usando (1.13), (1.14) y (1.15):

$$\frac{y^{(t)}(b_n + a_n x_0)}{\left\{ y'(b_n + a_n x_0) \right\}^t} = \frac{y^{(t)}(x_0)}{\left\{ y'(x_0) \right\}^t} \quad (1.16)$$

El miembro de la derecha de la ecuación (1.16) depende sólo de  $t$  y puede escribirse como  $C_t$ . Dado que para valores que varían de  $n$ ,  $(b_n + a_n x_0)$  toma todos los valores en el rango de  $x$ , tenemos que para  $t \geq 1$ , generalmente, (1.16) se transforma en:

$$y^{(t)}(x) = C_t \left\{ y'(x) \right\}^t \quad (1.17)$$

que al diferenciarla con respecto a  $x$  queda:

$$y^{(t+1)}(x) = t C_2 C_t \left\{ y'(x) \right\}^{t+1} \quad (1.18)$$

y la relación recursiva para  $C_t$  es:

$$C_{t+1} = t C_2 C_t \quad \text{para } t \geq 1 \quad (1.19)$$

de donde se obtiene:

$$C_t = (t-1)! C_2^{t-2} \quad (1.20)$$

de las ecuaciones (1.17) y (1.20):

$$y^{(t)}(X_0) = (t-1)! C_2^{t-2} \left\{ y'(X_0) \right\}^t \quad (1.21)$$

la expansión de  $y(x)$  en potencias de  $(X-X_0)$  es:

$$y(X) = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{(X-X_0)^t}{t!} y^{(t)}(X_0) \quad (1.22)$$

y sustituyendo  $y(X_0)$  como aparece en (1.21) y haciendo los cambios de variable de  $y'(X_0)$  por  $W$ ,  $C_2$  por  $k$  y  $1/kW$  por  $a$ , se tiene que:

$$y(X) = \frac{1}{k} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{(X-X_0)^t}{t a^t} \quad (1.23)$$

esto es:

$$y(X) = -\frac{1}{k} \operatorname{Ln} \left( 1 - \frac{(X-X_0)}{a} \right) \quad (1.24)$$

$$(X-X_0) = a (1 - e^{-k y}) \quad (1.25)$$

$$y'(X) = \frac{1}{k} (a - (X-X_0)) \quad (1.26)$$

y de (1.13) y (1.14) finalmente se tiene:

$$a_n = n^k \quad (1.27)$$

$$b_n = (X_0 + a)(1 - n)^k \quad (1.28)$$

La ecuación (1.5) puede ser escrita como:

$$F^k (X_0 + (X - X_0)) = P(X_0 + a(1 - n^k) + n^k(X - X_0)) \quad (1.29)$$

la cual situando arbitrariamente el origen de X donde  $y = 0$ , produce finalmente la solución general a partir de (1.25):

$$X = a (1 - e^{-ky}) \quad (1.30)$$

o bien su inversa:

$$y(X) = - \frac{1}{k} \ln \left( 1 - \frac{X}{a} \right) \quad (1.31)$$

Si en esta solución se considera la existencia de un parámetro de ubicación  $u$  y si la constante  $a$  representa el cociente del parámetro de forma  $\beta$  sobre el parámetro de escala  $\alpha$ , se tiene la forma final de la función de distribución de probabilidad de la distribución general de valores extremos (GVE) es:

$$F(X) = e^{- \left( 1 - \left( \frac{X - u}{\alpha} \right)^\beta \right)^{1/\beta}} \quad (1.32)$$

La función de densidad de probabilidad es:

$$f(X) = \frac{1}{\alpha} \left( 1 - \left( \frac{X - u}{\alpha} \right)^\beta \right)^{1/\beta - 1} \exp \left( - \left( 1 - \left( \frac{X - u}{\alpha} \right)^\beta \right)^{1/\beta} \right) \quad (1.33)$$

donde:

- $u$  es el parámetro de ubicación
- $\alpha$  es el parámetro de escala.  $\alpha > 0$
- $\beta$  es el parámetro de forma

Las características y propiedades de las distribuciones Gumbel y GVE son de acuerdo con NERC (1975):

**a. Distribución de valores extremos tipo I (Gumbel)**

La función de distribución acumulada es:

$$F(x) = 1 - e^{-e^{-(x-u)/\alpha}} \quad (1.34)$$

La función de densidad de probabilidad es:

$$f(x) = \frac{1}{\alpha} e^{-e^{-(x-u)/\alpha}} e^{-x/\alpha} \quad (1.35)$$

donde:

$u$  es el parámetro de ubicación

$\alpha$  es el parámetro de escala,  $\alpha > 0$

la moda está en  $x = u$ , la media, varianza y el sesgo son:

$$\text{Media} = \mu = E(x) = u + C \alpha = u + 0.5772 \alpha \quad (1.36)$$

$$\text{Varianza} = \sigma^2 = E(x - E(x))^2 = \frac{\pi^2 \alpha^2}{6} \quad (1.37)$$

$$\text{Sesgo} = g_3 = 1.14 \quad (1.38)$$

La variable reducida o estandarizada y esta relacionada a  $x$  por:

$$y = \frac{x - u}{\alpha} \quad (1.39)$$

La función de distribución acumulada de la variable reducida es:

$$F(x) = 1 - e^{-e^{-y}} \quad (1.40)$$

y su función de densidad de probabilidad es:

$$f(x) = \frac{1}{\alpha} e^{-e^{-y}} e^{-y} \quad (1.41)$$

la media y varianza de la variable reducida son:

$$\mu = 0.5772 \quad (1.42)$$

$$\sigma^2 = \frac{\pi^2}{6} \quad (1.43)$$

### b. Distribución general de valores extremos GVE

Las características y propiedades para esta distribución deben ser establecidas para cada una de sus ramas.

La relación entre la GVE y la variable reducida de valores extremos tipo I es:

$$x = u + \alpha W \quad (1.44)$$

y :

$$W = \left( \frac{1 - e^{-\beta y}}{\beta} \right) \quad (1.45)$$

donde W es la variable reducida general de valores extremos.

La distribución general de valores extremos es del Tipo II cuando:

$$\alpha > 0; \quad \beta < 0; \quad u + \alpha/\beta < x \leq \infty \quad (1.46)$$

si la variable reducida y para la distribución de valores extremos tipo II es escrita como:

$$y = 1 - \left( \frac{x - u}{\alpha} \right) \beta; \quad 0 \leq y \leq \infty \quad (1.47)$$

sus correspondientes funciones de distribución y densidad son:

$$G(y) = e^{-y^{1/\beta}} \quad (1.48)$$

y :

$$g(y) = - \frac{y^{1/\beta - 1}}{\beta} e^{-y^{1/\beta}} \quad (1.49)$$

la media y varianza de las variables reducidas son:

$$\mu = \Gamma(1 + \beta) \quad (1.50)$$

$$\sigma^2 = \Gamma(1 + 2\beta) - \Gamma^2(1 + \beta) \quad (1.51)$$

donde  $\Gamma(\cdot)$  representa la función gamma completa.

El sesgo correspondiente es:

$$g_s = \frac{\Gamma(1+3\beta) - 3\Gamma(1+2\beta)\Gamma(1+\beta) + 2\Gamma^3(1+\beta)}{(\Gamma(1+2\beta) - \Gamma^2(1+\beta))^3/2} \quad (1.52)$$

la mediana y la moda de la variable reducida son:

$$\text{mediana} = y^* = (0.69315)^{1/\beta} \quad (1.53)$$

$$\text{moda} = y^\# = (1 - \beta)^{\beta} \quad (1.54)$$

La función de momentos en su forma general es:

$$E(y^r) = \Gamma(1 + r/\beta), \quad \beta < 0 \quad (1.55)$$

La distribución general de valores extremos es del Tipo III cuando:

$$\alpha > 0; \quad \beta > 0; \quad -\infty \leq x \leq u + \alpha/\beta \quad (1.56)$$

si la variable reducida  $y$  para la distribución de valores extremos tipo III se escribe como:

$$-y = 1 - \left(\frac{x - u}{\alpha}\right)^\beta; \quad -\infty \leq y \leq 0 \quad (1.57)$$

sus correspondientes funciones de distribución y densidad son:

$$G(y) = e^{-(-y)^{1/\beta}} \quad (1.58)$$

$$y: \quad g(y) = -\frac{(-y)^{1/\beta - 1}}{\beta} e^{-(-y)^{1/\beta}} \quad (1.59)$$

la media y varianza de las variables reducidas son:

$$\mu = -\Gamma(1 + \beta) \quad (1.60)$$

$$\sigma^2 = \Gamma(1 + 2\beta) - \Gamma^2(1 + \beta) \quad (1.61)$$

El sesgo correspondiente es:

$$g^3 = \frac{-\Gamma(1+3\beta) + 3\Gamma(1+2\beta)\Gamma(1+\beta) - 2\Gamma^3(1+\beta)}{(\Gamma(1+2\beta) - \Gamma^2(1+\beta))^{3/2}} \quad (1.62)$$

la mediana y la moda de la variable reducida son:

$$\text{mediana} = y^* = - (0.69315)^\beta \quad (1.63)$$

$$\text{moda} = y^\# = - (1 - \beta)^\beta \quad (1.64)$$

La función de momentos en su forma general es:

$$E(y^r) = (-1)^r \Gamma(1 + r\beta), \quad \beta > 0 \quad (1.65)$$

#### 1.4 GENESIS, CARACTERISTICAS Y PROPIEDADES DE LAS DISTRIBUCIONES BIVARIADAS DE VALORES EXTREMOS

Las distribuciones univariadas han sido desarrolladas y aplicadas ampliamente en el análisis de frecuencias en Hidrología, poca atención se le ha dado al estudio de la aproximación multivariada.

Los artículos pioneros de Finkelstein (1953), Gumbel (1958) y Tiago de Oliveira (1958) dieron los fundamentos teóricos para el análisis de las distribuciones bivariadas de valores extremos.

Una distribución asintótica bivariada se caracteriza por las siguientes propiedades:

- a) Las distribuciones marginales son asintóticas extremas.
- b) Es estable (cumple el postulado de estabilidad).
- c) Posee una función de densidad, y
- d) Se elimina el caso trivial donde la distribución multivariada



es el producto de las distribuciones marginales extremas.

### Génesis

Sean  $(X_i, Y_i)$  pares de variables aleatorias independientes, cada una teniendo la misma distribución conjunta  $F(x,y)$ . Puesto que  $X_1, \dots, X_n$  son variables aleatorias continuas, independientes e idénticamente distribuidas, es posible encontrar transformaciones lineales:

$$X_n = a_n X_{\text{máx}} + b_n \quad (1.66)$$

tal que  $X_n$  tenga una distribución límite ( para  $n \rightarrow \infty$  ) que sea uno de los tres tipos de distribuciones de valores extremos. Habrá también una transformación:

$$Y_n = c_n Y_{\text{máx}} + d_n \quad (1.67)$$

con propiedades similares.

La función de distribución conjunta de  $(\text{máx } X_i, \text{máx } Y_i)$  es:

$$\Pr \{ \text{máx } X_i \leq x, \text{máx } Y_i \leq y \} = F^n(x,y) \quad (1.68)$$

Denotando la función de distribución acumulada bivariada por  $F(x,y)$ , se tiene:

$$F(x,y) = \lim_{n \rightarrow \infty} [ a_n x + b_n, c_n y + d_n ] \quad (1.69)$$

Esta ecuación es una extensión de la ecuaciones (1.4) y (1.5)

La distribución conjunta límite de  $X_n$  y  $Y_n$  ( para  $n \rightarrow \infty$  ) es una distribución bivariada de valores extremos

Entre las distribuciones bivariadas se encuentran los

llamados modelos diferenciables (aquellos que cuentan con una función de densidad) y los no diferenciables. Entre los de la última clase se encuentran (Tiago de Oliveira, 1982): el modelo biextremo, el modelo Gumbel y el modelo Natural. Estos modelos no cuentan con una función de densidad de probabilidad explícita, lo cual hace que la estimación de parámetros sea muy complicada.

Entre los modelos diferenciables se tienen: el modelo logístico y el modelo mezclado. Tales nombres les fueron asignados debido a que en el primer caso, la diferencia de las variables reducidas, cuando ambas marginales son distribuciones Gumbel, tiene una distribución logística estándar. En el segundo caso, el modelo tiene una función de dependencia que parte de una mezcla de las funciones marginales para los casos de independencia y dependencia, cuando estas son distribuciones Gumbel.

#### ( 1 ) El modelo Logístico

Este modelo tiene la forma:

$$F(x,y,m) = \exp \left\{ - \left[ ( -\ln F(x) )^m + ( -\ln F(y) )^m \right]^{1/m} \right\} \quad ( 1.70 )$$

donde:

- m es el parámetro de asociación
- $F(u)$  es la función de distribución marginal de u
- $m \geq 1; 0 \leq \rho \leq 1$

Para  $m = 1$ , la función de distribución bivariada se reduce al producto de sus marginales :

$$F(x,y,m) = F(x) F(y) \quad ( 1.71 )$$

el cual representa el caso de independencia.

( ii ) El modelo mezclado

Este modelo es de la forma:

$$F(x,y,a) = F(x) F(y) \exp \left\{ a \left[ \frac{1}{-\ln F(x)} + \frac{1}{-\ln F(y)} \right]^{-1} \right\} \quad ( 1.72 )$$

donde:

$a$  es el parámetro de asociación

$$0 \leq a \leq 1$$

para  $a = 0$  se tiene el caso de independencia, similar a la ecuación (1.71).

Dado que el modelo logístico bivariado tiene mayor versatilidad que el modelo mezclado ( amplios rangos del coeficiente de correlación y del índice de dependencia, los cuales permiten alternativas más allá del caso de independencia ), es aconsejable ( Raynal, 1985 ) su aplicación a la solución de problemas de análisis de frecuencias en Hidrología.

Gumbel (1962) mostró seis posibles funciones de distribución bivariada, mediante el empleo de las tres asíntotas como funciones marginales dentro del modelo logístico. Raynal (1985) redujo las posibles combinaciones a tres, al utilizar a la distribución general de valores extremos como función marginal. A estas combinaciones Raynal (1985) les ha asignado los nombres siguientes :

a) Distribución de Valores Extremos Bivariado Tipo 11 (VEB11) o Distribución Bigumbel.

b) Distribución de Valores Extremos Bivariado Tipo 12 (VEB12) o Distribución Gumbel-GVE.

c) Distribución de Valores Extremos Bivariado Tipo 22 (VEB22) o Distribución Bigeneral de Valores Extremos.

Además propone el empleo de las siguientes funciones de distribución acumulada y funciones de densidad, para las tres combinaciones de funciones marginales del modelo logístico bivariado:

a. DISTRIBUCION VEB11

$$F(x, y, u_1, \alpha_1, u_2, \alpha_2, m) = \exp \left\{ - \left[ e^{-m\left(\frac{x - u_1}{\alpha_1}\right)} + e^{-m\left(\frac{y - u_2}{\alpha_2}\right)} \right]^{1/m} \right\} \quad (1.73)$$

$$f(x, y, u_1, \alpha_1, u_2, \alpha_2, m) = \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2} e^{-m\left(\frac{x - u_1}{\alpha_1}\right)^{m-1}} e^{-m\left(\frac{y - u_2}{\alpha_2}\right)^{m-1}}$$

$$\exp \left\{ - \left[ e^{-m\left(\frac{x - u_1}{\alpha_1}\right)} + e^{-m\left(\frac{y - u_2}{\alpha_2}\right)} \right]^{1/m} \right\}$$

$$\left[ e^{-m\left(\frac{x - u_1}{\alpha_1}\right)^{m-1}} + e^{-m\left(\frac{y - u_2}{\alpha_2}\right)^{m-1}} \right]^{1/m} m$$

$$\left\{ (m-1) \left[ e^{-m\left(\frac{x - u_1}{\alpha_1}\right)^{m-1}} + e^{-m\left(\frac{y - u_2}{\alpha_2}\right)^{m-1}} \right]^{1/m} \right\} \quad (1.74)$$

b. DISTRIBUCION VEB12

$$f(x, y, u_1, \alpha_1, u_2, \alpha_2, \beta_2, m) = \exp \left\{ - \left[ e^{-m \left( \frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)} + \left( 1 - \left( \frac{y - u_2}{\alpha_2} \right) \beta_2 \right)^{m/\beta_2} \right]^{1/m} \right\} \quad (1.75)$$

$$f(x, y, u_1, \alpha_1, u_2, \alpha_2, \beta_2, m) = \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2} e^{-m \left( \frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)} \left( 1 - \left( \frac{y - u_2}{\alpha_2} \right) \beta_2 \right)^{m/\beta_2 - 1} \exp \left\{ - \left[ e^{-m \left( \frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)} + \left( 1 - \left( \frac{y - u_2}{\alpha_2} \right) \beta_2 \right)^{m/\beta_2} \right]^{1/m} \right\} \left[ e^{-m \left( \frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)} + \left( 1 - \left( \frac{y - u_2}{\alpha_2} \right) \beta_2 \right)^{m/\beta_2} \right]^{1/m - 2} \left\{ (m - 1) + \left[ e^{-m \left( \frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)} + \left( 1 - \left( \frac{y - u_2}{\alpha_2} \right) \beta_2 \right)^{m/\beta_2} \right]^{1/m} \right\} \quad (1.76)$$

c. DISTRIBUCION VEB22

$$f(x, y, u_1, \alpha_1, \beta_1, u_2, \alpha_2, \beta_2, m) = \exp \left\{ - \left[ \left( 1 - \left( \frac{x - u_1}{\alpha_1} \right) \beta_1 \right)^{m/\beta_1} + \left( 1 - \left( \frac{y - u_2}{\alpha_2} \right) \beta_2 \right)^{m/\beta_2} \right]^{1/m} \right\} \quad (1.77)$$

$$\begin{aligned}
f(x, y, u_1, \alpha_1, \beta_1, u_2, \alpha_2, \beta_2, m) &= \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2} \left( 1 - \left( \frac{x-u_1}{\alpha_1} \right)^{\beta_1} \right)^{m/\beta_1 - 1} \\
&\quad \left( 1 - \left( \frac{y-u_2}{\alpha_2} \right)^{\beta_2} \right)^{m/\beta_2 - 1} \\
\exp \left\{ - \left[ \left( 1 - \left( \frac{x-u_1}{\alpha_1} \right)^{\beta_1} \right)^{m/\beta_1} + \left( 1 - \left( \frac{y-u_2}{\alpha_2} \right)^{\beta_2} \right)^{m/\beta_2} \right]^{1/m} \right\} \\
&\quad \left[ \left( 1 - \left( \frac{x-u_1}{\alpha_1} \right)^{\beta_1} \right)^{m/\beta_1} + \left( 1 - \left( \frac{y-u_2}{\alpha_2} \right)^{\beta_2} \right)^{m/\beta_2} \right]^{1/m - 2} \\
&\quad \left\{ (m-1) + \left[ \left( 1 - \left( \frac{x-u_1}{\alpha_1} \right)^{\beta_1} \right)^{m/\beta_1} + \left( 1 - \left( \frac{y-u_2}{\alpha_2} \right)^{\beta_2} \right)^{m/\beta_2} \right]^{1/m} \right\} \\
&\hspace{15em} (1.78)
\end{aligned}$$

## CAPITULO 2

### MODELO TRIVARIADO DE VALORES EXTREMOS

#### 2.1 INTRODUCCION

El uso de la estadística en hidrología, debe proveer la información sobre los parámetros y distribuciones de las variables aleatorias de importancia en el diseño y operación de las estructuras hidráulicas.

Debido a que la mayoría de los datos hidrológicos forman muestras finitas de una población, los parámetros y distribuciones de estas variables no pueden ser determinados exactamente. Una forma de mejorar su estimación, es mediante la construcción de modelos regionales, los cuales consideran la información proveniente de otras fuentes que están correlacionadas con el fenómeno en estudio.

En general, la construcción de un modelo matemático requiere de cierta metodología, la cual es presentada en la sección 2.2 .

Como ya se ha mencionado, el objetivo de este trabajo es el de proporcionar un medio que mejore el análisis de frecuencias de eventos hidrológicos extremos. Con este propósito, se desarrolla la función trivariada de valores extremos, cuyas características y propiedades se muestran en la sección 2.3

## 2.2 CONSTRUCCION DEL MODELO MATEMATICO

Los modelos estadísticos facilitan la predicción, en términos probabilísticos, de las ocurrencias futuras de experimentos u observaciones, y son considerados como la forma más condensada de información acerca de las variables aleatorias en estudio.

El proceso para resolver problemas estadísticos prácticos requiere de las siguientes etapas:

- 1a. Planteamiento del problema
- 2a. Selección del modelo matemático
- 3a. Estimación de los parámetros del modelo
- 4a. Checar la confiabilidad del modelo
- 5a. Derivar conclusiones del modelo

De acuerdo con la problemática planteada en este trabajo, su solución requerirá de la siguiente metodología:

### *Selección del modelo matemático*

En hidrología es raro contar con series lo suficientemente grandes para garantizar que los parámetros de la distribución a ser aplicada, pueda ser estimada de la manera más eficiente.

El estudio de los gastos máximos anuales ha sido analizado, entre otros, a través del uso de distribuciones univariadas de valores extremos, y como una forma de reducir la variabilidad en la estimación de parámetros se han utilizado las distribuciones bivariadas de valores extremos. De acuerdo con los resultados



obtenidos por tales distribuciones, se concluye que de las cinco distribuciones bivariadas de valores extremos conocidas, sólo dos tienen función de densidad explícita, lo que representa una forma fácil de obtener sus parámetros. De estos modelos, el logístico bivariado ha mostrado ser la mejor alternativa, ya que puede reducir la variabilidad de los parámetros hasta en un 15%, comparativamente con los resultados obtenidos al aplicar las distribuciones univariadas de valores extremos. Esta última característica hace pensar que la inclusión de una variable más, en este tipo de modelos, producirá una mejora adicional en la fase de estimación de parámetros.

De acuerdo con lo anterior, el modelo que se pretende desarrollar es del tipo logístico trivariado de valores extremos.

La distribución marginal de la distribución trivariada de valores extremos puede ser cualquiera de los tres tipos de valores extremos ya mencionados, por lo que, hay diez posibles tipos de distribuciones trivariadas, pero si se utilizan como marginales la distribución Gumbel y la general de valores extremos, el número de posibles combinaciones se reduce a cuatro (dos homogéneas y dos no homogéneas), lograndose la reducción de los casos analizados.

#### ***Estimación de parámetros del modelo logístico trivariado***

Las funciones de distribución de probabilidad contienen parámetros los cuales deben ser estimados de la muestra de datos. Estos parámetros deben cumplir con ciertas propiedades:

sesgo nulo, consistencia, eficiencia y suficiencia, de las cuales la más importante es la eficiencia.

En hidrología son usados varios métodos de estimación de parámetros, los cuales pueden ser ordenados de menor a mayor eficiencia como:

- a. Método gráfico
- b. Método de mínimos cuadrados y/o de momentos
- c. Método de máxima verosimilitud

De acuerdo con esto, el método seleccionado para la estimación de parámetros de las distribuciones trivariadas de valores extremos será el de máxima verosimilitud, el cual será estructurado de manera tal, que pueda cubrir todos los posibles arreglos de las muestras analizadas.

El método de máxima verosimilitud selecciona el valor de los parámetros  $\theta$  para los cuales la función de densidad de probabilidad conjunta de las variables aleatorias (función de verosimilitud) es maximizada.

La forma de solución del método es:

- a. Obtener la función logarítmica de verosimilitud asociada a la función de densidad estudiada.
- b. Obtener las derivadas parciales de la función de verosimilitud con respecto a cada uno de los parámetros del modelo.
- c. Cada una de las derivadas resultantes son igualadas a cero, con esto se tiene un sistema de tantas ecuaciones como parámetros existan.
- d. Resolver el sistema resultante mediante procesos iterativos.

De acuerdo al tipo de funciones de verosimilitud resultantes para las distribuciones trivariadas de valores extremos, el paso d representa una forma muy complicada de solución. En lugar de esta, el problema será resuelto a través de un algoritmo de optimización no lineal multivariado restringido, el cual ya ha dado buenos resultados en su aplicación al análisis de series de tiempo hidrológicas.

### *Confiabilidad en la estimación de parámetros*

Con el fin de establecer si hay o no mejoras en la fase de estimación de parámetros, se requiere determinar la varianza de los parámetros a través del calculo de su matriz de varianza covarianza. Sus elementos son obtenidos mediante la expresión:

$$V_{rs} = \left[ - E \left( \frac{\partial^2 \text{Ln } L}{\partial \theta_r \partial \theta_s} \right) \right]^{-1} \quad ( 2.1 )$$

donde:

E[.] = valor esperado de [ . ]

$V_{rs}$  = rsésimo elemento de la matriz de varianza covarianza

Ln L = Función de verosimilitud logarítmica

$\theta_i$  = iésimo parámetro

La complejidad de las funciones de verosimilitud logarítmica prevee el uso de esquemas de integración numérica unidimensional, bidimensional y tridimensional para el cálculo de los valores esperados.

Una vez que las matrices de varianza covarianza han sido

obtenidas, el contenido de información relativa puede ser calculado para mostrar si existe mejora en la estimación de parámetros:

$$I = \frac{\text{Var } \hat{\theta}_U}{\text{Var } \hat{\theta}_T} \quad ( 2.2 )$$

donde:

I = Contenido de información relativa. La mejora es alcanzada para  $I > 1$ .

Var  $\hat{\theta}_U$  = Varianza del parámetro estimado a través de la aproximación univariada.

Var  $\hat{\theta}_T$  = Varianza del parámetro estimado a través de la aproximación trivariada.

Con el fin de mostrar en cuales casos tales mejoras son obtenidas, se requiere obtener la matriz de varianza covarianza para las cuatro alternativas de la distribución trivariada de valores extremos.

Como los resultados anteriores estan basados en resultados asintóticos (  $n \rightarrow \infty$  ), se requiere determinar si estos son aplicables a muestras pequeñas. Con este propósito, se utilizarán técnicas de muestreo distribucional. En general, estas técnicas requieren:

- a. Generar muestras trivariadas de tamaño específico ( a través de distribuciones condicionales )
- b. Obtener para cada una de las muestras generadas el conjunto de parámetros de la distribución.

- c. Calcular la varianza de los parámetros de las muestras simuladas.
- d. Comparar las varianzas asintóticas de los parámetros con sus varianzas simuladas para determinar un tamaño de muestra mínimo.

Nuevamente, este procedimiento debe realizarse para cada una de las cuatro opciones de distribuciones trivariadas de valores extremos.

#### *Aplicaciones al análisis de gastos máximos anuales*

Las distribuciones de valores extremos se aplicarán al análisis de gastos máximos anuales de 49 estaciones de aforos, ubicadas en dos regiones hidrológicas de la República Mexicana. La secuencia de análisis será la siguiente:

- a. Seleccionar, de acuerdo con el criterio de error estándar de ajuste, la mejor distribución para una muestra de datos. Los modelos en competencia serán las distribuciones univariadas, bivariadas y trivariadas de valores extremos. Esta etapa se hace con el fin de determinar en que porcentaje las muestras son ajustadas por estos modelos.
- b. Obtener los gastos de diseño y sus correspondientes límites de confianza para períodos de retorno específico. En esta etapa se requiere determinar si la aplicación de las distribuciones trivariadas reduce la variabilidad de los gastos de diseño. Para esto, se requiere comparar las varianzas asintóticas de los eventos diseño con sus correspondientes varianzas

simuladas. Para obtener estas últimas, nuevamente se requiere del uso de técnicas de muestreo distribucional.

c. Comparar los resultados obtenidos al aplicar las distribuciones trivariadas con aquellos proporcionados al aplicar otras distribuciones univariadas. Las distribuciones consideradas en este análisis serán:

- Distribución Normal
- Distribución Lognormal (2 y 3 parámetros)
- Distribución Gamma (2 y 3 parámetros)
- Distribución LogPearson tipo III
- Distribuciones Gumbel y GVE

Los métodos de estimación de parámetros de estas distribuciones son el de momentos y el de máxima verosimilitud. Con esto se tendrán 18 opciones univariadas, las cuales serán comparadas con la opción trivariada. El criterio de selección del mejor ajuste será el del error estándar.

La aplicación y comparación de las distribuciones trivariadas con las univariadas darán el horizonte de aplicación de estas distribuciones.

### 2.3 CARACTERISTICAS Y PROPIEDADES DEL MODELO TRIVARIADO

#### Génesis

Sean  $(X_i, Y_i, Z_i)$  triadas de variables aleatorias independientes, cada una teniendo la misma distribución conjunta  $F(x,y,z)$ . Puesto que  $X_1, \dots, X_n$  son variables aleatorias

continuas, independientes e idénticamente distribuidas, es posible encontrar transformaciones lineales:

$$X_n = a_n X_{\text{máx}} + b_n \quad (2.3)$$

tal que  $X_n$  tenga una distribución límite ( para  $n \rightarrow \infty$  ) que sea uno de los tres tipos de distribuciones de valores extremos. Habrá también una transformación:

$$Y_n = c_n Y_{\text{máx}} + d_n \quad (2.4)$$

y

$$Z_n = e_n Z_{\text{máx}} + f_n \quad (2.5)$$

con propiedades similares.

La función de distribución conjunta de  $(\text{máx } X_i, \text{máx } Y_i, \text{máx } Z_i)$  es:

$$\Pr \left\{ \text{máx } X_i \leq x, \text{máx } Y_i \leq y, \text{máx } Z_i \leq z \right\} = F^n(x, y, z) \quad (2.6)$$

Denotando la función de distribución acumulada trivariada por  $F(x, y, z)$ , se tiene:

$$F(x, y, z) = \lim_{n \rightarrow \infty} [ a_n x + b_n, c_n y + d_n, e_n z + f_n ] \quad (2.7)$$

Esta ecuación es una extensión de la ecuación (1.60).

La distribución conjunta límite de  $X_n$ ,  $Y_n$  y  $Z_n$  (para  $n \rightarrow \infty$ ) es una distribución trivariada de valores extremos, la cual tiene las mismas propiedades básicas presentadas en la Sección 1.4. Para la distribución logística, la distribución límite tiene la forma:

$$(-\ln F(x, y, z))^m = (-\ln F(x))^m + (-\ln F(y))^m + (-\ln F(z))^m \quad (2.8)$$

el cual es una extensión del modelo logístico bivariado, ecuación (1.70), donde:

$m$  es el parámetro de asociación  
 $F(u)$  es la función marginal de  $u$

El modelo debe satisfacer las siguientes desigualdades:

$$F(x_1) \dots F(x_n) \leq F(x_1, \dots, x_n) \leq \min ( F(x_1), \dots, F(x_n) ) \quad (2.8)$$

$$\left\{ \prod_{j=1}^n F(x_i, x_j) \right\}^{\frac{1}{2(n-1)}} \leq F(x_1, \dots, x_n) \leq \left[ \prod_{i=1}^n F(x_i, x_j) \right]^{1/2} \left[ \prod_{j=1}^n F(x_i) \right]^{n-2} \quad (2.10)$$

El modelo trivariado se desarrollará a partir de la ecuación (2.8). Tomando como funciones marginales a la distribución Gumbel y a la distribución general de valores extremos, se tendrán cuatro combinaciones posibles de distribuciones trivariadas de valores extremos:

- a) Distribución Trivariada de Valores Extremos Tipo 111 (VET111) o Distribución Trigumbel.
- b) Distribución Trivariada de Valores Extremos Tipo 112 (VET112) o Distribución Bigumbel-General de Valores Extremos.
- c) Distribución Trivariada de Valores Extremos Tipo 122 (VET122) o Distribución Gumbel-Bigeneral de Valores Extremos.
- d) Distribución Trivariada de Valores Extremos Tipo 222 (VET222) o Distribución Trigeneral de Valores Extremos.



Las funciones de distribución de probabilidad y de densidad para las distribuciones de valores extremos trivariadas propuestas son:

a. DISTRIBUCION VET111

$$F(x, y, z, u_1, \alpha_1, u_2, \alpha_2, u_3, \alpha_3, m_t) = \exp \left[ - \left( e^{-m_t \left( \frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m_t \left( \frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)} + e^{-m_t \left( \frac{z - u_3}{\alpha_3} \right)} \right)^{1/m_t} \right] \quad (2.11)$$

$$f(x, y, z, u_1, \alpha_1, u_2, \alpha_2, u_3, \alpha_3, m_t) = \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} e^{-m_t \left( \frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)} e^{-m_t \left( \frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)} e^{-m_t \left( \frac{z - u_3}{\alpha_3} \right)} \exp \left[ - \left( e^{-m_t \left( \frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m_t \left( \frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)} + e^{-m_t \left( \frac{z - u_3}{\alpha_3} \right)} \right)^{1/m_t} \right] \left( e^{-m_t \left( \frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m_t \left( \frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)} + e^{-m_t \left( \frac{z - u_3}{\alpha_3} \right)} \right)^{1/m_t - 3} \left[ (1 - m_t) (1 - 2m_t) + \left( e^{-m_t \left( \frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m_t \left( \frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)} + e^{-m_t \left( \frac{z - u_3}{\alpha_3} \right)} \right)^{2/m_t} + (3m_t - 3) \left( e^{-m_t \left( \frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m_t \left( \frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)} + e^{-m_t \left( \frac{z - u_3}{\alpha_3} \right)} \right)^{1/m_t} \right] \quad (2.12)$$

b. DISTRIBUCION VET112

$$F(x, y, z, u_1, \alpha_1, u_2, \alpha_2, u_3, \alpha_3, \beta_3, m_t) = \exp \left[ - \left( e^{-m_t \left( \frac{x-u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m_t \left( \frac{y-u_2}{\alpha_2} \right)} + \left( 1 - \left( \frac{z-u_3}{\alpha_3} \right) \beta_3 \right)^{m_t / \beta_3} \right)^{1/m_t} \right] \quad (2.13)$$

$$f(x, y, z, u_1, \alpha_1, u_2, \alpha_2, u_3, \alpha_3, \beta_3, m_t) = \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} e^{-m_t \left( \frac{x-u_1}{\alpha_1} \right)} e^{-m_t \left( \frac{y-u_2}{\alpha_2} \right)} \left( 1 - \left( \frac{z-u_3}{\alpha_3} \right) \beta_3 \right)^{m_t / \beta_3 - 1} \exp \left[ - \left( e^{-m_t \left( \frac{x-u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m_t \left( \frac{y-u_2}{\alpha_2} \right)} + \left( 1 - \left( \frac{z-u_3}{\alpha_3} \right) \beta_3 \right)^{m_t / \beta_3} \right)^{1/m_t} \right] \left[ e^{-m_t \left( \frac{x-u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m_t \left( \frac{y-u_2}{\alpha_2} \right)} + \left( 1 - \left( \frac{z-u_3}{\alpha_3} \right) \beta_3 \right)^{m_t / \beta_3} \right]^{1/m_t - 3} \left[ \left( 1 - m_t \right) \left( 1 - 2m_t \right) + \left( e^{-m_t \left( \frac{x-u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m_t \left( \frac{y-u_2}{\alpha_2} \right)} + \left( 1 - \left( \frac{z-u_3}{\alpha_3} \right) \beta_3 \right)^{m_t / \beta_3} \right)^{2/m_t} + \left( 3m_t - 3 \right) \left( e^{-m_t \left( \frac{x-u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m_t \left( \frac{y-u_2}{\alpha_2} \right)} + \left( 1 - \left( \frac{z-u_3}{\alpha_3} \right) \beta_3 \right)^{m_t / \beta_3} \right)^{1/m_t} \right] \quad (2.14)$$

c. DISTRIBUCION VET122

$$f(x, y, z, u_1, \alpha_1, u_2, \alpha_2, \beta_2, u_3, \alpha_3, \beta_3, m_l) = \exp \left[ - \left( e^{-m_l \left( \frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)^{m_l}} + \left( 1 - \left( \frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)^{\beta_2} \right)^{m_l / \beta_2} + \left( 1 - \left( \frac{z - u_3}{\alpha_3} \right)^{\beta_3} \right)^{m_l / \beta_3} \right)^{1/m_l} \right] \quad (2.15)$$

$$f(x, y, z, u_1, \alpha_1, u_2, \alpha_2, \beta_2, u_3, \alpha_3, \beta_3, m_l) = \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} e^{-m_l \left( \frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)^{m_l}}$$

$$\left( 1 - \left( \frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)^{\beta_2} \right)^{m_l / \beta_2 - 1} \left( 1 - \left( \frac{z - u_3}{\alpha_3} \right)^{\beta_3} \right)^{m_l / \beta_3 - 1}$$

$$\exp \left[ - \left( e^{-m_l \left( \frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)^{m_l}} + \left( 1 - \left( \frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)^{\beta_2} \right)^{m_l / \beta_2} + \left( 1 - \left( \frac{z - u_3}{\alpha_3} \right)^{\beta_3} \right)^{m_l / \beta_3} \right)^{1/m_l} \right]$$

$$\left[ e^{-m_l \left( \frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)^{m_l}} + \left( 1 - \left( \frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)^{\beta_2} \right)^{m_l / \beta_2} + \left( 1 - \left( \frac{z - u_3}{\alpha_3} \right)^{\beta_3} \right)^{m_l / \beta_3} \right]^{1/m_l - 3}$$

$$\left[ \left( 1 - m_l \right) \left( 1 - 2m_l \right) + \left( e^{-m_l \left( \frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)^{m_l}} + \left( 1 - \left( \frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)^{\beta_2} \right)^{m_l / \beta_2} + \right.$$

$$\left. \left( 1 - \left( \frac{z - u_3}{\alpha_3} \right)^{\beta_3} \right)^{m_l / \beta_3} \right)^{2/m_l} + \left( 3m_l - 3 \right)$$

$$\left( e^{-m_l \left( \frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)^{m_l}} + \left( 1 - \left( \frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)^{\beta_2} \right)^{m_l / \beta_2} + \left( 1 - \left( \frac{z - u_3}{\alpha_3} \right)^{\beta_3} \right)^{m_l / \beta_3} \right)^{1/m_l} \right]$$

(2.16)

d. DISTRIBUCION VET222

$$F(x, y, z, u_1, \alpha_1, \beta_1, u_2, \alpha_2, \beta_2, u_3, \alpha_3, \beta_3, m_t) = \exp \left[ - \left( \left( 1 - \left( \frac{x-u_1}{\alpha_1} \right) \beta_1 \right)^{m_t/\beta_1} + \left( 1 - \left( \frac{y-u_2}{\alpha_2} \right) \beta_2 \right)^{m_t/\beta_2} + \left( 1 - \left( \frac{z-u_3}{\alpha_3} \right) \beta_3 \right)^{m_t/\beta_3} \right)^{1/m_t} \right] \quad (2.17)$$

$$f(x, y, z, u_1, \alpha_1, \beta_1, u_2, \alpha_2, \beta_2, u_3, \alpha_3, \beta_3, m_t) = \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} \left( 1 - \left( \frac{x-u_1}{\alpha_1} \right) \beta_1 \right)^{m_t/\beta_1 - 1} \left( 1 - \left( \frac{y-u_2}{\alpha_2} \right) \beta_2 \right)^{m_t/\beta_2 - 1} \left( 1 - \left( \frac{z-u_3}{\alpha_3} \right) \beta_3 \right)^{m_t/\beta_3 - 1}$$

$$\exp \left[ - \left( \left( 1 - \left( \frac{x-u_1}{\alpha_1} \right) \beta_1 \right)^{m_t/\beta_1} + \left( 1 - \left( \frac{y-u_2}{\alpha_2} \right) \beta_2 \right)^{m_t/\beta_2} + \left( 1 - \left( \frac{z-u_3}{\alpha_3} \right) \beta_3 \right)^{m_t/\beta_3} \right)^{1/m_t} \right]$$

$$\left[ \left( 1 - \left( \frac{x-u_1}{\alpha_1} \right) \beta_1 \right)^{m_t/\beta_1} + \left( 1 - \left( \frac{y-u_2}{\alpha_2} \right) \beta_2 \right)^{m_t/\beta_2} + \left( 1 - \left( \frac{z-u_3}{\alpha_3} \right) \beta_3 \right)^{m_t/\beta_3} \right]^{1/m_t - 1}$$

$$\left[ (1-m_t) \left( 1 - \left( \frac{x-u_1}{\alpha_1} \right) \beta_1 \right)^{m_t/\beta_1} + (1-2m_t) \left( 1 - \left( \frac{y-u_2}{\alpha_2} \right) \beta_2 \right)^{m_t/\beta_2} + \right.$$

$$\left. + \left( 1 - \left( \frac{z-u_3}{\alpha_3} \right) \beta_3 \right)^{m_t/\beta_3} \right]^{2/m_t} + (3m_t - 3)$$

$$\left[ \left( 1 - \left( \frac{x-u_1}{\alpha_1} \right) \beta_1 \right)^{m_t/\beta_1} + \left( 1 - \left( \frac{y-u_2}{\alpha_2} \right) \beta_2 \right)^{m_t/\beta_2} + \left( 1 - \left( \frac{z-u_3}{\alpha_3} \right) \beta_3 \right)^{m_t/\beta_3} \right]^{1/m_t}$$

(2.18)

## CAPITULO 3

### ESTIMACION DE PARÁMETROS

#### 3.1 INTRODUCCION

La parte más importante, desde el punto de vista ingenieril, del uso de distribuciones de probabilidad para modelar eventos extremos en Hidrología es la estimación de los parámetros de la distribución que producirán los gastos de diseño y sus correspondientes límites de confianza.

Existen varios métodos de estimación de parámetros, entre los que se encuentran: mínimos cuadrados, momentos o máxima verosimilitud. La elección de cualquiera de ellos depende, principalmente, de las características de la distribución.

En la sección 3.2 se presentan las propiedades que deben cumplir los estimadores de los parámetros.

La descripción del método seleccionado para estimar los parámetros de las distribuciones trivariadas se muestra en la sección 3.3.

Dado que el método elegido es el de máxima verosimilitud, en la sección 3.4 se presentan las funciones logarítmicas de verosimilitud para las distribuciones trivariadas de valores extremos.

### 3.2 PROPIEDADES DE LOS PARAMETROS ESTIMADOS

Cuando una función de distribución de probabilidad se utiliza para describir el comportamiento de cierta muestra de datos, se requiere determinar el valor de sus parámetros, los cuales deben cumplir con las siguientes propiedades:

#### a. Sesgo nulo

Un estimador  $\hat{\theta}$  de un parámetro poblacional  $\theta$  se dice que tiene sesgo nulo si  $EC(\hat{\theta}) = \theta$ . El sesgo es obtenido por  $EC(\hat{\theta}) - \theta$

#### b. Consistencia

Un estimador  $\hat{\theta}$  de un parámetro  $\theta$  se dice consistente si  $|\hat{\theta} - \theta|$  se aproxima a cero conforme el tamaño de la muestra tiende a infinito

#### c. Eficiencia

Un estimador  $\hat{\theta}$  se dice el más eficiente para  $\theta$ , si tiene sesgo nulo y su varianza es al menos tan pequeña como cualquier otro estimador no sesgado para  $\theta$

#### d. Suficiencia

$\hat{\theta}$  se considera un estimador suficiente para  $\theta$ , si  $\hat{\theta}$  usa toda la información relevante contenida en la muestra.

Hay muchos métodos para determinar los parámetros de una función de distribución de probabilidad a través de la muestra de datos.

El método seleccionado para la estimación de parámetros de las distribuciones trivariadas de valores extremos será el de máxima verosimilitud.

Este método es aplicable a funciones de densidad complicadas y produce estimadores que cumplen con las propiedades ya mencionadas.

Estas características no sólo son importantes en la fase de obtención de parámetros, sino también, para la etapa de determinación de la confiabilidad de estimadores.

### 3.3 METODO DE MAXIMA VEROSIMILITUD

La función de verosimilitud de  $n$  variables aleatorias está definida como la densidad conjunta de esas  $n$  variables, y es una función de los parámetros.

Si  $(X_1, Y_1, Z_1), \dots, (X_n, Y_n, Z_n)$  es una muestra aleatoria de una densidad trivariada, la correspondiente función de verosimilitud es:

$$L(X, Y, Z, \underline{\theta}) = \prod_{i=1}^N f(X_i, Y_i, Z_i, \underline{\theta}) \quad (3.1)$$

donde:

$f(\cdot)$  es la función de densidad trivariada.

$\underline{\theta}$  es el conjunto de parámetros

Dado que las muestras que se analizan no tienen igual longitud de registro (Figuras 3.1 y 3.2), es necesario tener una formulación suficientemente flexible para cubrir todos los posibles arreglos de los datos. Tal formulación está basada en la generalización hecha por Anderson (1957).

EST A	$X_1, \dots, X_{n_3}$
EST B	$Y_1, \dots, Y_{n_3}$
EST C	$Z_1, \dots, Z_{n_3}$

Fig 3.1 Mfimo arreglo muestral trivariado

EST. A  $X_1, \dots, X_{n_1}, X_{n_1+1}, \dots, X_{n_1+n_2}, X_{n_1+n_2+1}, \dots, X_{n_1+n_2+n_3}$

EST. B  $Y_{n_1+1}, \dots, Y_{n_1+n_2}, Y_{n_1+n_2+1}, \dots, Y_{n_1+n_2+n_3}, Y_{n_1+n_2+n_3+1}, \dots, Y_{n_1+n_2+n_3+n_4}$

EST. C  $Z_{n_1+n_2+1}, \dots, Z_{n_1+n_2+n_3}, Z_{n_1+n_2+n_3+1}, \dots, Z_{n_1+n_2+n_3+n_4}, Z_{n_1+n_2+n_3+n_4+1}, \dots$

$Z_{n_1+n_2+n_3+n_4+n_5}$

Fig 3.2 Mfimo arreglo muestral trivariado



La correspondiente función de verosimilitud para el tipo de arreglo mostrado anteriormente es:

$$L(x,y,z,\theta) = \left[ \prod_{t=1}^{n_1} f(p_i, \theta_1) \right]^{I_1} \left[ \prod_{t=1}^{n_2} f(p_i, q_i, \theta_2) \right]^{I_2} \\ \left[ \prod_{t=1}^{n_3} f(x,y,z, \theta_3) \right]^{I_3} \left[ \prod_{t=1}^{n_4} f(r_i, s_i, \theta_4) \right]^{I_4} \\ \left[ \prod_{t=1}^{n_5} f(r_i, \theta_5) \right]^{I_5} \quad (3.2)$$

donde:

- $L(\cdot)$  es la función de verosimilitud de  $(\cdot)$
- $n_1$  es la longitud del registro univariado antes del periodo común  $n_3$ .
- $n_2$  es la longitud del registro con relación bivariada antes del periodo común  $n_3$ .
- $n_3$  es la longitud del registro durante el periodo común en las tres estaciones.
- $n_4$  es la longitud del registro con relación bivariada después del periodo común  $n_3$ .
- $n_5$  es la longitud del registro univariado después del periodo común  $n_3$ .
- $p$  es la variable del registro univariado antes del registro común.
- $(p,q)$  son las variables relacionadas en forma bivariada antes del registro común.
- $(x,y,z)$  son las variables relacionadas en forma trivariada

durante el período común de registro.

$r$  es la variable del registro univariado después del registro común.

$(r, s)$  son las variables relacionadas en forma bivariada después del registro común.

$I_i$  es un número indicador con valor :

$$I_i = 1 \quad \text{si} \quad n_i > 0 \quad \text{o} \quad I_i = 0 \quad \text{si} \quad n_i = 0$$

$\underline{\theta}_i$  vector de parámetros ;  $i = 1, 2, 3, 4, 5$

Dada la propiedad de que el máximo de una función y de su logaritmo ocurren en el mismo punto y debido al hecho que las expresiones que se obtienen al sacar el logaritmo de la ecuación (3.2) son mucho más fáciles de manipular que aquellas producidas por tal ecuación, la función de verosimilitud logarítmica será utilizada en lugar de su versión original.

La ecuación (3.2) es transformada en:

$$\begin{aligned} LL(x, y, z, \underline{\theta}) = & I_1 \left[ \sum_{i=1}^{n_1} \text{Ln } f(p_i, \underline{\theta}_1) \right] + I_2 \left[ \sum_{i=1}^{n_2} \text{Ln } f(p_i, q_i, \underline{\theta}_2) \right] + \\ & + I_3 \left[ \sum_{i=1}^{n_3} \text{Ln } f(x, y, z, \underline{\theta}_3) \right] + I_4 \left[ \sum_{i=1}^{n_4} \text{Ln } f(r_i, s_i, \underline{\theta}_4) \right] + \\ & + I_5 \left[ \sum_{i=1}^{n_5} \text{Ln } f(r_i, \underline{\theta}_5) \right] \end{aligned} \quad (3.3)$$

Los estimadores de máxima verosimilitud de los parámetros de las distribuciones trivariadas de valores extremos son aquellos para los cuales la ecuación (3.3) es maximizada. Para obtener

dichos estimadores se requiere de un procedimiento de optimización del tipo de búsqueda directa, ya que el método indirecto proporcionado por el cálculo diferencial no puede llegar a soluciones analíticas, debido a la complejidad de las funciones asociadas a las densidades de probabilidad trivariadas.

Dadas las características de la función a optimizar, el procedimiento seleccionado es el algoritmo de optimización no lineal multivariado restringido de Rosenbrock (Rosenbrock 1960; Kuester, 1973 ).

### 3.4 FUNCIONES LOGARITMICAS DE VEROSIMILITUD DE LAS DISTRIBUCIONES TRIVARIADAS DE VALORES EXTREMOS

A continuación son presentadas las funciones de verosimilitud logarítmicas a ser optimizadas, para las cuatro distribuciones trivariadas de valores extremos propuestas.

#### a. DISTRIBUCION VET111

$$\begin{aligned}
 LL(x,y,z,u_1,\alpha_1,u_2,\alpha_2,u_3,\alpha_3,m_t,m_{b_1},m_{b_2}) = & I_1 \left\{ -n_1 \ln \alpha_p + \sum_{i=1}^{n_1} \left[ -\left( \frac{p_i - u_p}{\alpha_p} \right) - \right. \right. \\
 \exp \left( - \left( \frac{p_i - u_p}{\alpha_p} \right) \right) & \left. \left. \right] \right\} + I_2 \left\{ -n_2 \left( \ln \alpha_p + \ln \alpha_q \right) + \right. \\
 + \sum_{i=1}^{n_2} \left[ -m_{b_1} \left( \frac{p_i - u_p}{\alpha_p} \right)^{m_{b_1}} - m_{b_1} \left( \frac{q_i - u_q}{\alpha_q} \right)^{m_{b_1}} + \ln \left( \exp \left( -m_{b_1} \left( \frac{p_i - u_p}{\alpha_p} \right)^{m_{b_1}} \right) + \right. \right. \\
 + \exp \left( -m_{b_1} \left( \frac{q_i - u_q}{\alpha_q} \right)^{m_{b_1}} \right) & \left. \left. \right]^{1/m_{b_1}-2} + \ln \left( (m_{b_1} - 1) + \left( \exp \left( -m_{b_1} \left( \frac{p_i - u_p}{\alpha_p} \right)^{m_{b_1}} \right) + \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \exp \left( - m_{b_1} \left( \frac{q_i - u_q}{\alpha_q} \right) \right)^{1/m_{b_1}} - \left( \exp \left( - m_{b_1} \left( \frac{p_i - u_p}{\alpha_p} \right) \right) + \right. \\
& \left. + \exp \left( - m_{b_1} \left( \frac{q_i - u_q}{\alpha_q} \right) \right)^{1/m_{b_1}} \right] \} + I_3 \left\{ - n_3 \left( \ln \alpha_1 + \ln \alpha_2 + \ln \alpha_3 \right) + \right. \\
& + \sum_{i=1}^{n_3} \left[ - m_t \left( \frac{x_i - u_1}{\alpha_1} \right) - m_t \left( \frac{y_i - u_2}{\alpha_2} \right) - m_t \left( \frac{z_i - u_3}{\alpha_3} \right) + \ln \left( \exp \left( - m_t \left( \frac{x_i - u_1}{\alpha_1} \right) \right) + \right. \\
& + \exp \left( - m_t \left( \frac{y_i - u_2}{\alpha_2} \right) \right) + \exp \left( - m_t \left( \frac{z_i - u_3}{\alpha_3} \right) \right) \right)^{1/m_t - 3} + \ln \left[ (1 - m_t)(1 - 2m_t) + \right. \\
& + \left( \exp \left( - m_t \left( \frac{x_i - u_1}{\alpha_1} \right) \right) + \exp \left( - m_t \left( \frac{y_i - u_2}{\alpha_2} \right) \right) + \exp \left( - m_t \left( \frac{z_i - u_3}{\alpha_3} \right) \right) \right)^{2/m_t} + \\
& + (3m_t - 3) \left( \exp \left( - m_t \left( \frac{x_i - u_1}{\alpha_1} \right) \right) + \exp \left( - m_t \left( \frac{y_i - u_2}{\alpha_2} \right) \right) + \right. \\
& + \left. \exp \left( - m_t \left( \frac{z_i - u_3}{\alpha_3} \right) \right) \right)^{1/m_t} \left. \right] - \left( \exp \left( - m_t \left( \frac{x_i - u_1}{\alpha_1} \right) \right) + \right. \\
& + \exp \left( - m_t \left( \frac{y_i - u_2}{\alpha_2} \right) \right) + \exp \left( - m_t \left( \frac{z_i - u_3}{\alpha_3} \right) \right) \right)^{1/m_t} \left. \right] \} + \\
& + I_4 \left\{ - n_4 \left( \ln \alpha_r + \ln \alpha_s \right) + \sum_{i=1}^{n_4} \left[ - m_{b_2} \left( \frac{r_i - u_r}{\alpha_r} \right) - m_{b_2} \left( \frac{s_i - u_s}{\alpha_s} \right) + \right. \\
& + \ln \left( \exp \left( - m_{b_2} \left( \frac{r_i - u_r}{\alpha_r} \right) \right) + \exp \left( - m_{b_2} \left( \frac{s_i - u_s}{\alpha_s} \right) \right) \right)^{1/m_{b_2} - 2} + \\
& + \ln \left( m_{b_2} - 1 \right) + \left( \exp \left( - m_{b_2} \left( \frac{r_i - u_r}{\alpha_r} \right) \right) + \exp \left( - m_{b_2} \left( \frac{s_i - u_s}{\alpha_s} \right) \right) \right)^{1/m_{b_2}} \right. \\
& \left. - \left( \exp \left( - m_{b_2} \left( \frac{r_i - u_r}{\alpha_r} \right) \right) + \exp \left( - m_{b_2} \left( \frac{s_i - u_s}{\alpha_s} \right) \right) \right)^{1/m_{b_2}} \right] \} +
\end{aligned}$$

$$+ I_5 \left\{ -n_5 \ln \alpha_r + \sum_{i=1}^{n_5} \left[ -\left(\frac{r_i - u_r}{\alpha_r}\right) - \exp\left(-\left(\frac{r_i - u_r}{\alpha_r}\right)\right) \right] \right\} \quad (3.4)$$

donde:

$m_t$  es el parámetro de asociación trivariada

$m_{b_1}, m_{b_2}$  son los parámetros de asociación bivariada antes y después del período común.

#### b. DISTRIBUCION VET112

$$\begin{aligned} LL(x, y, z, u_1, \alpha_1, u_2, \alpha_2, u_3, \alpha_3, \beta_3, m_t, m_{b_1}, m_{b_2}) = & I_1 \sum_{i=1}^{n_1} \ln f(p_i, \theta_1) + \\ & + I_2 \sum_{i=1}^{n_2} \ln f(p_i, q_i, \theta_2) + I_3 \left\{ -n_3 (\ln \alpha_1 + \ln \alpha_2 + \ln \alpha_3) + \right. \\ & + \sum_{i=1}^{n_3} \left[ -m_t \left(\frac{x_i - u_1}{\alpha_1}\right) - m_t \left(\frac{y_i - u_2}{\alpha_2}\right) + \ln \left(1 - \left(\frac{z_i - u_3}{\alpha_3}\right) \beta_3\right)^{m_t / \beta_3 - 1} + \right. \\ & + \ln \left( e^{-m_t \left(\frac{x_i - u_1}{\alpha_1}\right)} + e^{-m_t \left(\frac{y_i - u_2}{\alpha_2}\right)} + \left(1 - \left(\frac{z_i - u_3}{\alpha_3}\right) \beta_3\right)^{m_t / \beta_3} \right)^{1/m_t - 3} + \\ & + \ln \left[ (1 - m_t)(1 - 2m_t) + \left( e^{-m_t \left(\frac{x_i - u_1}{\alpha_1}\right)} + e^{-m_t \left(\frac{y_i - u_2}{\alpha_2}\right)} + \left(1 - \left(\frac{z_i - u_3}{\alpha_3}\right) \beta_3\right)^{m_t / \beta_3} \right)^{2/m_t} + \right. \\ & + \left. \left. (3m_t - 3) \left( e^{-m_t \left(\frac{x_i - u_1}{\alpha_1}\right)} + e^{-m_t \left(\frac{y_i - u_2}{\alpha_2}\right)} + \left(1 - \left(\frac{z_i - u_3}{\alpha_3}\right) \beta_3\right)^{m_t / \beta_3} \right)^{1/m_t} \right] \right\} + \\ & - \left( e^{-m_t \left(\frac{x_i - u_1}{\alpha_1}\right)} + e^{-m_t \left(\frac{y_i - u_2}{\alpha_2}\right)} + \left(1 - \left(\frac{z_i - u_3}{\alpha_3}\right) \beta_3\right)^{m_t / \beta_3} \right)^{1/m_t} \left. \right\} + \\ & + I_4 \sum_{i=1}^{n_4} \ln f(r_i, s_i, \theta_4) + I_5 \sum_{i=1}^{n_5} \ln f(r_i, \theta_5) \quad (3.5) \end{aligned}$$

donde  $\sum_{i=1}^n \text{Ln } f(p_i, \underline{\theta}_1)$  y  $\sum_{i=1}^n \text{Ln } f(r_i, \underline{\theta}_5)$  pueden tomar las siguientes formas, dependiendo si pertenece a una distribución Gumbel o general de valores extremos.

Para la distribución Gumbel:

$$\sum_{i=1}^n \left[ -\text{Ln } \alpha_t - \left( \frac{t_i - u_t}{\alpha_t} \right) - \exp\left( - \left( \frac{t_i - u_t}{\alpha_t} \right) \right) \right] \quad (3.6)$$

Para la distribución GVE:

$$\sum_{i=1}^n \left[ -\text{Ln } \alpha_t - \left( 1 - \left( \frac{t_i - u_t}{\alpha_t} \right)^{\beta_t} \right)^{1/\beta_t} + \text{Ln} \left( 1 - \left( \frac{t_i - u_t}{\alpha_t} \right)^{\beta_t} \right)^{1/\beta_t - 1} \right] \quad (3.7)$$

Similarmente,  $\sum_{i=1}^{n_2} \text{Ln } f(p_i, q_i, \underline{\theta}_2)$  y  $\sum_{i=1}^{n_4} \text{Ln } f(r_i, s_i, \underline{\theta}_4)$  tomarán las formas siguientes, dependiendo si están relacionadas como VEB11 o VEB12.

Para VEB11:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \left[ - \left( \text{Ln } \alpha_t + \text{Ln } \alpha_w \right) - m_b \left( \frac{t_i - u_t}{\alpha_t} \right) - m_b \left( \frac{w_i - u_w}{\alpha_w} \right) + \right. \\ & \left. + \text{Ln} \left( \exp \left( - m_b \left( \frac{t_i - u_t}{\alpha_t} \right) \right) + \exp \left( - m_b \left( \frac{w_i - u_w}{\alpha_w} \right) \right) \right)^{1/m_b - 2} + \right. \\ & \left. + \text{Ln} \left( (m_b - 1) + \left( \exp \left( - m_b \left( \frac{t_i - u_t}{\alpha_t} \right) \right) + \exp \left( - m_b \left( \frac{w_i - u_w}{\alpha_w} \right) \right) \right)^{1/m_b} \right) - \right. \\ & \left. - \left( \exp \left( - m_b \left( \frac{t_i - u_t}{\alpha_t} \right) \right) + \exp \left( - m_b \left( \frac{w_i - u_w}{\alpha_w} \right) \right) \right)^{1/m_b} \right] \quad (3.8) \end{aligned}$$

Para VEB12:

$$\sum_{i=1}^n \left[ -\ln \alpha_t + \ln \alpha_w - m_b \left( \frac{t_i - u_t}{\alpha_t} \right) + \ln \left( 1 - \left( \frac{w_i - u_w}{\alpha_w} \right)^{\beta_w} \right)^{m_b / \beta_w} + \ln \left( \exp \left( -m_b \left( \frac{t_i - u_t}{\alpha_t} \right) \right) + \left( 1 - \left( \frac{w_i - u_w}{\alpha_w} \right)^{\beta_w} \right)^{m_b / \beta_w} \right)^{1/m_b - 2} + \ln \left( (m_b - 1) + \left( \exp \left( -m_b \left( \frac{t_i - u_t}{\alpha_t} \right) \right) + \left( 1 - \left( \frac{w_i - u_w}{\alpha_w} \right)^{\beta_w} \right)^{m_b / \beta_w} \right)^{1/m_b} - \left( \exp \left( -m_b \left( \frac{t_i - u_t}{\alpha_t} \right) \right) + \left( 1 - \left( \frac{w_i - u_w}{\alpha_w} \right)^{\beta_w} \right)^{m_b / \beta_w} \right)^{1/m_b} \right] \quad (3.9)$$

c. DISTRIBUCION VET122

$$\begin{aligned} LL(x, y, z, u_1, \alpha_1, u_2, \alpha_2, \beta_2, u_3, \alpha_3, \beta_3, m_t, m_{b1}, m_{b2}) &= I_1 \sum_{i=1}^n \ln f(p_i, \theta_1) + \\ &+ I_2 \sum_{i=1}^n \ln f(p_i, q_i, \theta_2) + I_3 \left\{ -n_3 \left( \ln \alpha_1 + \ln \alpha_2 + \ln \alpha_3 \right) + \right. \\ &+ \sum_{i=1}^n \left[ -m_t \left( \frac{x_i - u_1}{\alpha_1} \right) + \ln \left( 1 - \left( \frac{y_i - u_2}{\alpha_2} \right)^{\beta_2} \right)^{m_t / \beta_2 - 1} + \ln \left( 1 - \left( \frac{z_i - u_3}{\alpha_3} \right)^{\beta_3} \right)^{m_t / \beta_3 - 1} \right. \\ &+ \ln \left( e^{-m_t \left( \frac{x_i - u_1}{\alpha_1} \right)} + \left( 1 - \left( \frac{y_i - u_2}{\alpha_2} \right)^{\beta_2} \right)^{m_t / \beta_2} + \left( 1 - \left( \frac{z_i - u_3}{\alpha_3} \right)^{\beta_3} \right)^{m_t / \beta_3} \right)^{1/m_t - 3} \\ &+ \ln \left[ \left( 1 - m_t \right) \left( 1 - 2m_t \right) + \left( e^{-m_t \left( \frac{x_i - u_1}{\alpha_1} \right)} + \left( 1 - \left( \frac{y_i - u_2}{\alpha_2} \right)^{\beta_2} \right)^{m_t / \beta_2} + \left( 1 - \left( \frac{z_i - u_3}{\alpha_3} \right)^{\beta_3} \right)^{m_t / \beta_3} \right)^{2/m_t} \right. \\ &\left. \left. + \left( 3m_t - 3 \right) \left( e^{-m_t \left( \frac{x_i - u_1}{\alpha_1} \right)} + \left( 1 - \left( \frac{y_i - u_2}{\alpha_2} \right)^{\beta_2} \right)^{m_t / \beta_2} + \left( 1 - \left( \frac{z_i - u_3}{\alpha_3} \right)^{\beta_3} \right)^{m_t / \beta_3} \right)^{1/m_t} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left( e^{-m_t \left( \frac{x_i - u_1}{\alpha_1} \right)} + \left( 1 - \left( \frac{y_i - u_2}{\alpha_2} \right)^{\beta_2} \right)^{m_t / \beta_2} + \left( 1 - \left( \frac{z_i - u_3}{\alpha_3} \right)^{\beta_3} \right)^{m_t / \beta_3} \right)^{1/m_t} + \\
& + I_4 \sum_{i=1}^n \ln f(r_i, s_i, \theta_4) + I_5 \sum_{i=1}^n \ln f(r_i, \theta_5)
\end{aligned} \tag{3.10}$$

donde  $\sum_{i=1}^n \ln f(p_i, \theta_1)$  y  $\sum_{i=1}^n \ln f(r_i, \theta_5)$  pueden tomar las siguientes formas, dependiendo si pertenece a una distribución Gumbel o general de valores extremos.

Para la distribución Gumbel:

$$\sum_{i=1}^n \left[ -\ln \alpha_t - \left( \frac{t_i - u_t}{\alpha_t} \right) - \exp\left( - \left( \frac{t_i - u_t}{\alpha_t} \right) \right) \right] \tag{3.11}$$

Para la distribución GVE:

$$\sum_{i=1}^n \left[ -\ln \alpha_t - \left( 1 - \left( \frac{t_i - u_t}{\alpha_t} \right)^{\beta_t} \right)^{1/\beta_t} + \ln \left( 1 - \left( \frac{t_i - u_t}{\alpha_t} \right)^{\beta_t} \right)^{1/\beta_t - 1} \right] \tag{3.12}$$

Similarmente,  $\sum_{i=1}^n \ln f(p_i, q_i, \theta_2)$  y  $\sum_{i=1}^n \ln f(r_i, s_i, \theta_4)$  tomarán las formas siguientes, dependiendo si están relacionadas como VEB12 o VEB22.

Para VEB12:

$$\sum_{i=1}^n \left[ -(\ln \alpha_t + \ln \alpha_w) - m_b \left( \frac{t_i - u_t}{\alpha_t} \right) + \ln \left( 1 - \left( \frac{w_i - u_w}{\alpha_w} \right)^{\beta_w} \right)^{m_b / \beta_w - 1} + \right.$$



$$\begin{aligned}
& + \text{Ln} \left( \exp \left( -m_b \left( \frac{t_i - u_t}{\alpha_t} \right) \right) + \left( 1 - \left( \frac{w_i - u_w}{\alpha_w} \right) \beta_w \right)^{m_b / \beta_w} \right)^{1/m_b - 2} \\
& + \text{Ln} (m_b - 1) + \left( \exp \left( -m_b \left( \frac{t_i - u_t}{\alpha_t} \right) \right) + \left( 1 - \left( \frac{w_i - u_w}{\alpha_w} \right) \beta_w \right)^{m_b / \beta_w} \right)^{1/m_b} \\
& - \left( \exp \left( -m_b \left( \frac{t_i - u_t}{\alpha_t} \right) \right) + \left( 1 - \left( \frac{w_i - u_w}{\alpha_w} \right) \beta_w \right)^{m_b / \beta_w} \right)^{1/m_b} \quad (3.13)
\end{aligned}$$

Para VEB22:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^n \left[ -\text{Ln} \alpha_t + \text{Ln} \alpha_w + \text{Ln} \left( 1 - \left( \frac{t_i - u_t}{\alpha_t} \right) \beta_t \right)^{m_b / \beta_t - 1} + \text{Ln} \left( 1 - \left( \frac{w_i - u_w}{\alpha_w} \right) \beta_w \right)^{m_b / \beta_w - 1} + \right. \\
& + \text{Ln} \left( \left( 1 - \left( \frac{t_i - u_t}{\alpha_t} \right) \beta_t \right)^{m_b / \beta_t} + \left( 1 - \left( \frac{w_i - u_w}{\alpha_w} \right) \beta_w \right)^{m_b / \beta_w} \right)^{1/m_b - 2} \\
& + \text{Ln} (m_b - 1) + \left( \left( 1 - \left( \frac{t_i - u_t}{\alpha_t} \right) \beta_t \right)^{m_b / \beta_t} + \left( 1 - \left( \frac{w_i - u_w}{\alpha_w} \right) \beta_w \right)^{m_b / \beta_w} \right)^{1/m_b} - \\
& - \left. \left( \left( 1 - \left( \frac{t_i - u_t}{\alpha_t} \right) \beta_t \right)^{m_b / \beta_t} + \left( 1 - \left( \frac{w_i - u_w}{\alpha_w} \right) \beta_w \right)^{m_b / \beta_w} \right)^{1/m_b} \quad (3.14)
\end{aligned}$$

d. DISTRIBUCION VET22

$$\begin{aligned}
& \text{LLC}(x, y, z, u, \alpha_1, \beta_1, u_2, \alpha_2, \beta_2, u_3, \alpha_3, \beta_3, m_t, m_{b1}, m_{b2}) = I_1 \left\{ -n_1 \text{Ln} \alpha_p + \right. \\
& + \sum_{i=1}^{n_1} \left[ -\left( 1 - \left( \frac{p_i - u_p}{\alpha_p} \right) \beta_p \right)^{1/\beta_p} + \text{Ln} \left( 1 - \left( \frac{p_i - u_p}{\alpha_p} \right) \beta_p \right)^{1/\beta_p - 1} \right] \left. \right\} + I_2 \left\{ \right. \\
& \sum_{i=1}^{n_2} \left[ -\text{Ln} \alpha_p + \text{Ln} \alpha_q + \text{Ln} \left( 1 - \left( \frac{p_i - u_p}{\alpha_p} \right) \beta_p \right)^{m_{b1} / \beta_p - 1} + \text{Ln} \left( 1 - \left( \frac{q_i - u_q}{\alpha_q} \right) \beta_q \right)^{m_{b1} / \beta_q - 1} + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \text{Ln} \left( \left( 1 - \left( \frac{p_1 - u_p}{\alpha_p} \right)^{\beta_p} \right)^{m_{b_1} / \beta_p} + \left( 1 - \left( \frac{q_1 - u_q}{\alpha_q} \right)^{\beta_q} \right)^{m_{b_1} / \beta_q} \right)^{1/m_{b_1} - 2} + \\
& + \text{Ln} \left( m_{b_1} - 1 \right) + \left( \left( 1 - \left( \frac{p_1 - u_p}{\alpha_p} \right)^{\beta_p} \right)^{m_{b_1} / \beta_p} + \left( 1 - \left( \frac{q_1 - u_q}{\alpha_q} \right)^{\beta_q} \right)^{m_{b_1} / \beta_q} \right)^{1/m_{b_1}} - \\
& - \left( \left( 1 - \left( \frac{p_1 - u_p}{\alpha_p} \right)^{\beta_p} \right)^{m_{b_1} / \beta_p} + \left( 1 - \left( \frac{q_1 - u_q}{\alpha_q} \right)^{\beta_q} \right)^{m_{b_1} / \beta_q} \right)^{1/m_{b_1}} \Big] \Big\} + \\
& + I_3 \left\{ -n_3 \left( \text{Ln } \alpha_1 + \text{Ln } \alpha_2 + \text{Ln } \alpha_3 \right) + \sum_{i=1}^{n_3} \left[ \text{Ln} \left( 1 - \left( \frac{x_i - u_1}{\alpha_1} \right)^{\beta_1} \right)^{m_l / \beta_1 - 1} + \right. \right. \\
& + \text{Ln} \left( 1 - \left( \frac{y_i - u_2}{\alpha_2} \right)^{\beta_2} \right)^{m_l / \beta_2 - 1} + \text{Ln} \left( 1 - \left( \frac{z_i - u_3}{\alpha_3} \right)^{\beta_3} \right)^{m_l / \beta_3 - 1} + \\
& + \text{Ln} \left( \left( 1 - \left( \frac{x_i - u_1}{\alpha_1} \right)^{\beta_1} \right)^{m_l / \beta_1} + \left( 1 - \left( \frac{y_i - u_2}{\alpha_2} \right)^{\beta_2} \right)^{m_l / \beta_2} + \right. \\
& + \left. \left. \left( 1 - \left( \frac{z_i - u_3}{\alpha_3} \right)^{\beta_3} \right)^{m_l / \beta_3} \right)^{1/m_l - 3} + \text{Ln} \left[ \left( 1 - m_l \right) \left( 1 - 2m_l \right) + \right. \right. \\
& + \left. \left. \left( \left( 1 - \left( \frac{x_i - u_1}{\alpha_1} \right)^{\beta_1} \right)^{m_l / \beta_1} + \left( 1 - \left( \frac{y_i - u_2}{\alpha_2} \right)^{\beta_2} \right)^{m_l / \beta_2} \right. \right. \right. \\
& + \left. \left. \left. \left( 1 - \left( \frac{z_i - u_3}{\alpha_3} \right)^{\beta_3} \right)^{m_l / \beta_3} \right)^{2/m_l} + \left( 3m_l - 3 \right) \right. \right. \\
& \cdot \left. \left. \left. \left( \left( 1 - \left( \frac{x_i - u_1}{\alpha_1} \right)^{\beta_1} \right)^{m_l / \beta_1} + \left( 1 - \left( \frac{y_i - u_2}{\alpha_2} \right)^{\beta_2} \right)^{m_l / \beta_2} \right. \right. \right. \right. \\
& + \left. \left. \left. \left. \left. \left. \left( 1 - \left( \frac{z_i - u_3}{\alpha_3} \right)^{\beta_3} \right)^{m_l / \beta_3} \right)^{1/m_l} \right] - \left( \left( 1 - \left( \frac{x_i - u_1}{\alpha_1} \right)^{\beta_1} \right)^{m_l / \beta_1} + \right. \right. \right. \\
& + \left. \left. \left. \left. \left. \left. \left( 1 - \left( \frac{y_i - u_2}{\alpha_2} \right)^{\beta_2} \right)^{m_l / \beta_2} + \left( 1 - \left( \frac{z_i - u_3}{\alpha_3} \right)^{\beta_3} \right)^{m_l / \beta_3} \right)^{1/m_l} \right] \right\} + I_4 \left\{ \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^n \left[ -(\ln \alpha_r + \ln \alpha_s) + \ln \left( 1 - \left( \frac{r_i - u_r}{\alpha_r} \right)^{\beta_r} \right)^{m_{bz} / \beta_r - 1} + \ln \left( 1 - \left( \frac{s_i - u_s}{\alpha_s} \right)^{\beta_s} \right)^{m_{bz} / \beta_s - 1} + \right. \\
& + \ln \left( \left( 1 - \left( \frac{r_i - u_r}{\alpha_r} \right)^{\beta_r} \right)^{m_{bz} / \beta_r} + \left( 1 - \left( \frac{s_i - u_s}{\alpha_s} \right)^{\beta_s} \right)^{m_{bz} / \beta_s} \right)^{1 / m_{bz} - 2} + \\
& + \ln(m_{bz} - 1) + \left. \left( \left( 1 - \left( \frac{r_i - u_r}{\alpha_r} \right)^{\beta_r} \right)^{m_{bz} / \beta_r} + \left( 1 - \left( \frac{s_i - u_s}{\alpha_s} \right)^{\beta_s} \right)^{m_{bz} / \beta_s} \right)^{1 / m_{bz}} \right) - \\
& - \left. \left( \left( 1 - \left( \frac{r_i - u_r}{\alpha_r} \right)^{\beta_r} \right)^{m_{bz} / \beta_r} + \left( 1 - \left( \frac{s_i - u_s}{\alpha_s} \right)^{\beta_s} \right)^{m_{bz} / \beta_s} \right)^{1 / m_{bz}} \right] \right\} + \\
& + I_s \left\{ -n_s \ln \alpha_r + \sum_{i=1}^{n_s} \left[ - \left( 1 - \left( \frac{r_i - u_r}{\alpha_r} \right)^{\beta_r} \right)^{1 / \beta_r} + \right. \right. \\
& + \left. \left. \ln \left( 1 - \left( \frac{r_i - u_r}{\alpha_r} \right)^{\beta_r} \right)^{1 / \beta_r - 1} \right] \right\}
\end{aligned}$$

( 3.15 )

Para obtener los estimadores de máxima verosimilitud de los parámetros de las distribuciones trivariadas de valores extremos, fue desarrollado el programa de cómputo "PARATRIV". Este algoritmo será utilizado en los capítulos de confiabilidad de estimadores y de aplicaciones en Hidrología.

## CAPITULO 4

### CONFIABILIDAD EN LA ESTIMACION DE PARAMETROS

#### 4.1 INTRODUCCION

Los parámetros de las distribuciones de probabilidad de gastos máximos anuales, en una estación cualquiera, pueden ser estimados utilizando los registros históricos en esa estación o usando, en adición, los registros de estaciones vecinas. La pregunta que surge es: Cuáles estimados son más confiables?

La confiabilidad del estimador de un parámetro, si el parámetro poblacional es desconocido, es el grado de confianza de que tal estimador sea una representación cercana del parámetro poblacional. La confiabilidad puede ser medida a través del sesgo, el error medio cuadrático o de la varianza, es decir, utilizando las propiedades estadísticas de los estimadores (sección 4.2).

El indicador de confiabilidad empleado en este trabajo es el contenido de información relativa, y es definido como la relación de las varianzas de dos estimadores del mismo parámetro. En este caso, el contenido de información es la relación de la varianza univariada del parámetro en consideración sobre su varianza trivariada.

Con el fin de evaluar los contenidos de información relativa para cada uno de los parámetros involucrados, es necesario calcular el valor de los elementos de la matriz de varianza-covarianza de los parámetros para los casos univariado y trivariado.

Debido a que la varianza exacta de los parámetros de las distribuciones univariadas y trivariadas de valores extremos es desconocida, se obtendrán las varianzas asintóticas con el fin de cuantificar el contenido de información relativa de cualquier parámetro  $\theta$ .

Las matrices de varianza-covarianza univariadas para las distribuciones Gumbel y general de valores extremos, que son presentadas en la sección 4.3, han sido obtenidas por Kimball (1949) y Jenkinson (1969), respectivamente. Las matrices asintóticas trivariadas son calculadas mediante el algoritmo numérico desarrollado en la sección 4.4.

Los contenidos de información relativa de los parámetros, secciones 4.5, son obtenidos mediante la aplicación del programa de cómputo VACOTRIV.

Dado que los resultados asintóticos trivariados son aplicables a grandes muestras, se debe checar si estos pueden ser usados en muestras pequeñas. Para tal efecto se requiere el empleo de técnicas de muestreo distribucional. El proceso de simulación, para las distribuciones trivariadas de valores extremos, se llevó a cabo mediante la aplicación del algoritmo desarrollado en la sección 4.6.

## 4.2 PROPIEDADES ASINTÓTICAS DE LOS ESTIMADORES DE MÁXIMA VEROSIMILITUD

Los parámetros estimados por el método de máxima verosimilitud tiene propiedades óptimas de grandes muestras. Una propiedad de este tipo es aquella que está definida en términos de los tamaños de muestra que tienden a infinito.

Tales propiedades pueden resumirse en:

Si  $\hat{\theta}$  es el estimador de máxima verosimilitud de  $\theta$ , entonces:

- a.  $\hat{\theta}$  está distribuido en forma asintóticamente normal, con media 0 y varianza igual a la inversa de la matriz de información de Fisher:

$$\text{Var}(\hat{\theta}) \cong \frac{1}{n} E_{\theta} \left\{ \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \text{Log } f(X; \theta) \right)^2 \right\}^{-1} \quad (4.1)$$

- b. La secuencia de estimadores de máxima verosimilitud  $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_n$  es la mejor asintóticamente; esto es, para grandes tamaños de muestra, otros estimadores de  $\theta$  pueden ser solo tan buenos como los estimadores de máxima verosimilitud, pero no mejores (Mood et al. 1974).

La primera propiedad puede ser extendida al caso de muchos parámetros  $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_i)$  y muchas variables en  $X_1, \dots, X_k$ , donde  $i$  es el número de parámetros,  $k$  es el número de variables, y cada variable tiene el tamaño de muestra  $n$ . En este caso el vector de estimadores de máxima verosimilitud  $\hat{\theta}$  está distribuido en forma normal multivariada con media  $\underline{\theta}$  y matriz de varianza-covarianza igual a la inversa de la matriz de información de Fisher:

$$V \cong \frac{1}{n} \left\{ E \left( \begin{array}{cc} \frac{\partial \text{Log } f(X_1, \dots, X_k)}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \text{Log } f(X_1, \dots, X_k)}{\partial \theta_j} \end{array} \right) \right\}^{-1} \quad (4.2)$$

o bien

$$V \cong \frac{1}{n} \left\{ E \left( - \frac{\partial^2 \text{Log } f(X_1, \dots, X_k)}{\partial \theta_1 \partial \theta_j} \right) \right\}^{-1} \quad (4.3)$$

#### 4.3 VARIANZAS ASINTOTICAS UNIVARIADAS

Kimball (1949) obtuvo la matriz de varianza-covarianza asintótica de los estimadores de máxima verosimilitud de los parámetros de la distribución de valores extremos tipo I (Gumbel):

$$V = \begin{bmatrix} \text{Var}_\alpha(\hat{U}) & \text{Cov}_\alpha(\hat{U}, \hat{\alpha}) \\ \text{Cov}_\alpha(\hat{U}, \hat{\alpha}) & \text{Var}_\alpha(\hat{\alpha}) \end{bmatrix} = \frac{\alpha^2}{N} \begin{bmatrix} 1.1087 & 0.2570 \\ 0.2570 & 0.6079 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

donde:

$\hat{U}$  es el estimador de máxima verosimilitud del parámetro de ubicación

$\hat{\alpha}$  es el estimador de máxima verosimilitud del parámetro de escala

$N$  es el tamaño de muestra usado para estimar los parámetros

$\alpha$  es un subíndice que indica asintótico

Y las varianzas asintóticas son:

$$\text{Var}_\alpha(\hat{U}) = 1.1087 \frac{\alpha^2}{N}$$

$$\text{Var}_\alpha(\hat{\alpha}) = 0.6079 \frac{\alpha^2}{N}$$

(4.5)

Jenkinson (1969) obtuvo la matriz de varianza-covarianza asintótica de los estimadores de máxima verosimilitud de los parámetros de la distribución general de valores extremos:

$$V = \begin{bmatrix} \text{Var}_{\alpha}(\hat{u}) & \text{Cov}_{\alpha}(\hat{u}, \hat{\alpha}) & \text{Cov}_{\alpha}(\hat{u}, \hat{\beta}) \\ \text{Cov}_{\alpha}(\hat{u}, \hat{\alpha}) & \text{Var}_{\alpha}(\hat{\alpha}) & \text{Cov}_{\alpha}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) \\ \text{Cov}_{\alpha}(\hat{u}, \hat{\beta}) & \text{Cov}_{\alpha}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) & \text{Var}_{\alpha}(\hat{\beta}) \end{bmatrix} = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} \alpha^2 b & \alpha^2 h & af \\ \alpha^2 h & \alpha^2 a & ag \\ af & ag & c \end{bmatrix}$$

( 4.6 )

donde:

$\hat{\beta}$  es el estimador de máxima verosimilitud del parámetro de forma

$\hat{u}$  y  $\hat{\alpha}$  ya definidos

a, b, c, f, g, h son coeficientes que dependen del parámetro de forma

Las varianzas asintóticas son:

$$\text{Var}_{\alpha}(\hat{u}) = b \frac{\alpha^2}{N}$$

$$\text{Var}_{\alpha}(\hat{\alpha}) = a \frac{\alpha^2}{N}$$

$$\text{Var}_{\alpha}(\hat{\beta}) = \frac{c}{N}$$

( 4.7 )

Los coeficientes de la matriz fueron obtenidos por Jenkinson (1969) para el parámetro de forma en el rango de  $[-0.4, 1.0]$  y Raynal (1982) extendió el rango de tales coeficientes a  $[-1.5, 1.0]$ , los cuales son presentados en la Tabla 4.1 .



Tabla 4.1 Coeficientes de la matriz de Varianza-Covarianza de la distribución general de valores extremos.

$\beta$	a	b	c	f	g	h
-1.5	3.9120	1.2072	2.3478	-0.0755	-1.2995	1.9811
-1.4	3.3406	1.2172	2.1712	-0.0341	-1.1591	1.8747
-1.3	3.1916	1.2278	2.0047	0.0068	-1.0243	1.7686
-1.2	2.8647	1.2385	1.8458	0.0463	-0.8953	1.6624
-1.1	2.5600	1.2491	1.6948	0.0842	-0.7723	1.5561
-1.0	2.2773	1.2594	1.5515	0.1201	-0.6553	1.4496
-0.9	2.0169	1.2690	1.4153	0.1533	-0.5444	1.3428
-0.8	1.7784	1.2775	1.2862	0.1836	-0.4399	1.2355
-0.7	1.5618	1.2845	1.1637	0.2102	-0.3418	1.1276
-0.6	1.3672	1.2893	1.0477	0.2327	-0.2503	1.0189
-0.5	1.1943	1.2917	0.9379	0.2507	-0.1656	0.9091
-0.4	1.0432	1.2909	0.8340	0.2636	-0.0881	0.7981
-0.3	0.9136	1.2864	0.7358	0.2709	-0.0178	0.6855
-0.2	0.8055	1.2778	0.6424	0.2719	0.0447	0.5711
-0.1	0.7177	1.2612	0.5417	0.2602	0.0957	0.4528
0.0	0.6500	1.2500	0.4800	0.2600	0.1500	0.3400
0.1	0.6084	1.2274	0.4015	0.2424	0.1851	0.2157
0.2	0.5843	1.2030	0.3350	0.2226	0.2153	0.0926
0.3	0.5806	1.1757	0.2761	0.1989	0.2367	-0.0331
0.4	0.5984	1.1495	0.2347	0.1777	0.2526	-0.1591
0.5	0.6390	1.1279	0.2216	0.1654	0.2668	-0.2835
0.6	0.7058	1.1136	0.2486	0.1674	0.2851	-0.4040
0.7	0.8032	1.1004	0.3082	0.1758	0.3085	-0.5233
0.8	0.9461	1.0729	0.3820	0.1669	0.3414	-0.6507
0.9	1.2287	1.0122	0.4529	0.0744	0.4353	-0.8285
1.0	1.2737	1.0024	0.0072	-0.0042	0.0959	-1.0553

#### 4.4 VARIANZAS ASINTÓTICAS TRIVARIADAS

Cada elemento de la matriz de varianza-covarianza de los estimadores de máxima verosimilitud de los parámetros, para cada una de las funciones trivariadas de valores extremos propuestas, es obtenido a partir de la ecuaciones (3.3) y (4.3) de la forma siguiente:

$$\begin{aligned}
 V_{jk} = \frac{1}{n_3} \left\{ - I_1 \frac{n_1}{n_3} E \left[ \frac{\partial^2 \text{Ln } f(p, \theta_1)}{\partial \theta_j \partial \theta_k} \right] - I_2 \frac{n_2}{n_3} E \left[ \frac{\partial^2 \text{Ln } f(p, q, \theta_2)}{\partial \theta_j \partial \theta_k} \right] \right. \\
 - I_3 E \left[ \frac{\partial^2 \text{Ln } f(x, y, z, \theta_3)}{\partial \theta_j \partial \theta_k} \right] - I_4 \frac{n_4}{n_3} E \left[ \frac{\partial^2 \text{Ln } f(r, s, \theta_4)}{\partial \theta_j \partial \theta_k} \right] \\
 \left. - I_5 \frac{n_5}{n_3} E \left[ \frac{\partial^2 \text{Ln } f(r, \theta_5)}{\partial \theta_j \partial \theta_k} \right] \right\}^{-1}
 \end{aligned}
 \tag{4.8}$$

Si se utiliza la identidad siguiente (Kendall y Stuart, 1979):

$$E \left( - \frac{\partial^2 LL}{\partial \theta_j \partial \theta_k} \right) = E \left( \frac{\partial LL}{\partial \theta_j} \frac{\partial LL}{\partial \theta_k} \right)
 \tag{4.9}$$

Los elementos de la matriz de varianza-covarianza para cada alternativa serán calculados como:

$$\begin{aligned}
 V_{jk} = \frac{1}{n_3} \left\{ I_1 \frac{n_1}{n_3} E \left[ \frac{\partial \text{Ln } f(p, \theta_1)}{\partial \theta_j} \frac{\partial \text{Ln } f(p, \theta_1)}{\partial \theta_k} \right] + \right. \\
 + I_2 \frac{n_2}{n_3} E \left[ \frac{\partial \text{Ln } f(p, q, \theta_2)}{\partial \theta_j} \frac{\partial \text{Ln } f(p, q, \theta_2)}{\partial \theta_k} \right] + \\
 \left. + I_3 E \left[ \frac{\partial \text{Ln } f(x, y, z, \theta_3)}{\partial \theta_j} \frac{\partial \text{Ln } f(x, y, z, \theta_3)}{\partial \theta_k} \right] + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + I_4 \frac{n_4}{n_3} E \left[ \begin{array}{cc} \frac{\partial \text{Ln } f(\text{r.s. } \theta_4)}{\partial \theta_j \partial \theta_k} & \frac{\partial \text{Ln } f(\text{r.s. } \theta_4)}{\partial \theta_j \partial \theta_k} \end{array} \right] + \\
& + I_5 \frac{n_5}{n_3} E \left[ \begin{array}{cc} \frac{\partial \text{Ln } f(\text{r. } \theta_5)}{\partial \theta_j \partial \theta_k} & \frac{\partial \text{Ln } f(\text{r. } \theta_5)}{\partial \theta_j \partial \theta_k} \end{array} \right] \}^{-1} \\
& \qquad \qquad \qquad (4.10)
\end{aligned}$$

Las derivadas parciales de primer orden de las funciones de verosimilitud logarítmica con respecto a cada parámetro, para cada una de las funciones trivariadas propuestas VET111, VET112, VET122 y VET222, son presentadas en el Apéndice A.

Para obtener las varianzas asintóticas se utilizarán los esquemas de integración numérica bidimensional y tridimensional de Gauss-Legendre de 16 puntos (Stroud, 1968, 1971), así como el algoritmo de integración por intervalos de O'hara y Smith (O'hara y Smith, 1980).

#### 4.4.1 DISTRIBUCION VET111

La matriz asintótica de varianza-covarianza de los estimadores de máxima verosimilitud de los parámetros de esta distribución tiene la forma de la ecuación (4.11).

Si se utilizan las derivadas parciales de primer orden de la función de verosimilitud logarítmica para la distribución VET111, dadas en el Apéndice A, la matriz de varianza-covarianza puede ser expresada como en la ecuación (4.12). Los coeficientes de esta matriz son una función de los tamaños relativos ( $n_1, n_2, n_3, n_4$  y  $n_5$ ) y de los parámetros de asociación ( $m_{11}, m_{12}$  y  $m_{22}$ ).

V =

$Var(\hat{u}_1)$	$Cov(\hat{u}_1, \hat{e}_1)$	$Cov(\hat{u}_1, \hat{u}_2)$	$Cov(\hat{u}_1, \hat{e}_2)$	$Cov(\hat{u}_1, \hat{u}_3)$	$Cov(\hat{u}_1, \hat{e}_3)$	$Cov(\hat{u}_1, \hat{m}_1)$	$Cov(\hat{u}_1, \hat{m}_2)$	$Cov(\hat{u}_1, \hat{m}_3)$
$Cov(\hat{e}_1, \hat{u}_1)$	$Var(\hat{e}_1)$	$Cov(\hat{e}_1, \hat{u}_2)$	$Cov(\hat{e}_1, \hat{e}_2)$	$Cov(\hat{e}_1, \hat{u}_3)$	$Cov(\hat{e}_1, \hat{e}_3)$	$Cov(\hat{e}_1, \hat{m}_1)$	$Cov(\hat{e}_1, \hat{m}_2)$	$Cov(\hat{e}_1, \hat{m}_3)$
$Cov(\hat{u}_2, \hat{u}_1)$	$Cov(\hat{u}_2, \hat{e}_1)$	$Var(\hat{u}_2)$	$Cov(\hat{u}_2, \hat{e}_2)$	$Cov(\hat{u}_2, \hat{u}_3)$	$Cov(\hat{u}_2, \hat{e}_3)$	$Cov(\hat{u}_2, \hat{m}_1)$	$Cov(\hat{u}_2, \hat{m}_2)$	$Cov(\hat{u}_2, \hat{m}_3)$
$Cov(\hat{e}_2, \hat{u}_1)$	$Cov(\hat{e}_2, \hat{e}_1)$	$Cov(\hat{e}_2, \hat{u}_2)$	$Var(\hat{e}_2)$	$Cov(\hat{e}_2, \hat{u}_3)$	$Cov(\hat{e}_2, \hat{e}_3)$	$Cov(\hat{e}_2, \hat{m}_1)$	$Cov(\hat{e}_2, \hat{m}_2)$	$Cov(\hat{e}_2, \hat{m}_3)$
$Cov(\hat{u}_3, \hat{u}_1)$	$Cov(\hat{u}_3, \hat{e}_1)$	$Cov(\hat{u}_3, \hat{u}_2)$	$Cov(\hat{u}_3, \hat{e}_2)$	$Var(\hat{u}_3)$	$Cov(\hat{u}_3, \hat{e}_3)$	$Cov(\hat{u}_3, \hat{m}_1)$	$Cov(\hat{u}_3, \hat{m}_2)$	$Cov(\hat{u}_3, \hat{m}_3)$
$Cov(\hat{e}_3, \hat{u}_1)$	$Cov(\hat{e}_3, \hat{e}_1)$	$Cov(\hat{e}_3, \hat{u}_2)$	$Cov(\hat{e}_3, \hat{e}_2)$	$Cov(\hat{e}_3, \hat{u}_3)$	$Var(\hat{e}_3)$	$Cov(\hat{e}_3, \hat{m}_1)$	$Cov(\hat{e}_3, \hat{m}_2)$	$Cov(\hat{e}_3, \hat{m}_3)$
$Cov(\hat{m}_1, \hat{u}_1)$	$Cov(\hat{m}_1, \hat{e}_1)$	$Cov(\hat{m}_1, \hat{u}_2)$	$Cov(\hat{m}_1, \hat{e}_2)$	$Cov(\hat{m}_1, \hat{u}_3)$	$Cov(\hat{m}_1, \hat{e}_3)$	$Var(\hat{m}_1)$	$Cov(\hat{m}_1, \hat{m}_2)$	$Cov(\hat{m}_1, \hat{m}_3)$
$Cov(\hat{m}_2, \hat{u}_1)$	$Cov(\hat{m}_2, \hat{e}_1)$	$Cov(\hat{m}_2, \hat{u}_2)$	$Cov(\hat{m}_2, \hat{e}_2)$	$Cov(\hat{m}_2, \hat{u}_3)$	$Cov(\hat{m}_2, \hat{e}_3)$	$Cov(\hat{m}_2, \hat{m}_1)$	$Var(\hat{m}_2)$	$Cov(\hat{m}_2, \hat{m}_3)$
$Cov(\hat{m}_3, \hat{u}_1)$	$Cov(\hat{m}_3, \hat{e}_1)$	$Cov(\hat{m}_3, \hat{u}_2)$	$Cov(\hat{m}_3, \hat{e}_2)$	$Cov(\hat{m}_3, \hat{u}_3)$	$Cov(\hat{m}_3, \hat{e}_3)$	$Cov(\hat{m}_3, \hat{m}_1)$	$Cov(\hat{m}_3, \hat{m}_2)$	$Var(\hat{m}_3)$

$\hat{R}_1^2 \hat{R}_1^1$	$\hat{R}_1^2 \hat{R}_1^2$	$\hat{R}_1^2 \hat{R}_2^2 \hat{R}_1^3$	$\hat{R}_1^2 \hat{R}_2^2 \hat{R}_1^4$	$\hat{R}_1^2 \hat{R}_3^2 \hat{R}_1^5$	$\hat{R}_1^2 \hat{R}_3^2 \hat{R}_1^6$	$\hat{R}_1^2 \hat{R}_1^7$	$\hat{R}_1^2 \hat{R}_1^8$	$\hat{R}_1^2 \hat{R}_1^9$
$\hat{R}_1^2 \hat{R}_2^1$	$\hat{R}_1^2 \hat{R}_2^2$	$\hat{R}_1^2 \hat{R}_2^2 \hat{R}_2^3$	$\hat{R}_1^2 \hat{R}_2^2 \hat{R}_2^4$	$\hat{R}_1^2 \hat{R}_3^2 \hat{R}_2^5$	$\hat{R}_1^2 \hat{R}_3^2 \hat{R}_2^6$	$\hat{R}_1^2 \hat{R}_2^7$	$\hat{R}_1^2 \hat{R}_2^8$	$\hat{R}_1^2 \hat{R}_2^9$
$\hat{R}_2^2 \hat{R}_1^1 \hat{R}_2^3$	$\hat{R}_2^2 \hat{R}_1^1 \hat{R}_2^4$	$\hat{R}_2^2 \hat{R}_2^3$	$\hat{R}_2^2 \hat{R}_2^3 \hat{R}_2^4$	$\hat{R}_2^2 \hat{R}_3^3 \hat{R}_2^5$	$\hat{R}_2^2 \hat{R}_3^3 \hat{R}_2^6$	$\hat{R}_2^2 \hat{R}_2^7$	$\hat{R}_2^2 \hat{R}_2^8$	$\hat{R}_2^2 \hat{R}_2^9$
$\hat{R}_2^2 \hat{R}_1^1 \hat{R}_2^4$	$\hat{R}_2^2 \hat{R}_1^1 \hat{R}_2^5$	$\hat{R}_2^2 \hat{R}_2^4$	$\hat{R}_2^2 \hat{R}_2^4 \hat{R}_2^5$	$\hat{R}_2^2 \hat{R}_3^4 \hat{R}_2^6$	$\hat{R}_2^2 \hat{R}_3^4 \hat{R}_2^7$	$\hat{R}_2^2 \hat{R}_2^7$	$\hat{R}_2^2 \hat{R}_2^8$	$\hat{R}_2^2 \hat{R}_2^9$
$\hat{R}_3^2 \hat{R}_1^1 \hat{R}_3^2$	$\hat{R}_3^2 \hat{R}_1^1 \hat{R}_3^3$	$\hat{R}_3^2 \hat{R}_2^3 \hat{R}_3^4$	$\hat{R}_3^2 \hat{R}_2^3 \hat{R}_3^5$	$\hat{R}_3^2 \hat{R}_3^3 \hat{R}_3^6$	$\hat{R}_3^2 \hat{R}_3^3 \hat{R}_3^7$	$\hat{R}_3^2 \hat{R}_3^7$	$\hat{R}_3^2 \hat{R}_3^8$	$\hat{R}_3^2 \hat{R}_3^9$
$\hat{R}_3^2 \hat{R}_1^1 \hat{R}_3^3$	$\hat{R}_3^2 \hat{R}_1^1 \hat{R}_3^4$	$\hat{R}_3^2 \hat{R}_2^3 \hat{R}_3^5$	$\hat{R}_3^2 \hat{R}_2^3 \hat{R}_3^6$	$\hat{R}_3^2 \hat{R}_3^3 \hat{R}_3^7$	$\hat{R}_3^2 \hat{R}_3^3 \hat{R}_3^8$	$\hat{R}_3^2 \hat{R}_3^7$	$\hat{R}_3^2 \hat{R}_3^8$	$\hat{R}_3^2 \hat{R}_3^9$
$\hat{R}_1^2 \hat{R}_1^7$	$\hat{R}_1^2 \hat{R}_1^8$	$\hat{R}_2^2 \hat{R}_1^7$	$\hat{R}_2^2 \hat{R}_1^8$	$\hat{R}_3^2 \hat{R}_1^7$	$\hat{R}_3^2 \hat{R}_1^8$	$\hat{R}_1^2 \hat{R}_1^7$	$\hat{R}_1^2 \hat{R}_1^8$	$\hat{R}_1^2 \hat{R}_1^9$
$\hat{R}_1^2 \hat{R}_2^7$	$\hat{R}_1^2 \hat{R}_2^8$	$\hat{R}_2^2 \hat{R}_2^7$	$\hat{R}_2^2 \hat{R}_2^8$	$\hat{R}_3^2 \hat{R}_2^7$	$\hat{R}_3^2 \hat{R}_2^8$	$\hat{R}_1^2 \hat{R}_2^7$	$\hat{R}_1^2 \hat{R}_2^8$	$\hat{R}_1^2 \hat{R}_2^9$
$\hat{R}_1^2 \hat{R}_3^7$	$\hat{R}_1^2 \hat{R}_3^8$	$\hat{R}_2^2 \hat{R}_3^7$	$\hat{R}_2^2 \hat{R}_3^8$	$\hat{R}_3^2 \hat{R}_3^7$	$\hat{R}_3^2 \hat{R}_3^8$	$\hat{R}_1^2 \hat{R}_3^7$	$\hat{R}_1^2 \hat{R}_3^8$	$\hat{R}_1^2 \hat{R}_3^9$

Los elementos de la diagonal principal de la matriz de varianza-covarianza corresponden a los valores de las varianzas asintóticas trivariadas de los parámetros.

Las varianzas asintóticas de los parámetros de la distribución VET111 son las siguientes:

$$\text{Var}_\alpha (\hat{u}_{1,T}) = a_{1,1} \frac{\alpha_1^2}{n_3}$$

$$\text{Var}_\alpha (\hat{\alpha}_{1,T}) = a_{2,2} \frac{\alpha_1^2}{n_3}$$

$$\text{Var}_\alpha (\hat{u}_{2,T}) = a_{3,3} \frac{\alpha_2^2}{n_3}$$

$$\text{Var}_\alpha (\hat{\alpha}_{2,T}) = a_{4,4} \frac{\alpha_2^2}{n_3}$$

$$\text{Var}_\alpha (\hat{u}_{3,T}) = a_{5,5} \frac{\alpha_3^2}{n_3}$$

$$\text{Var}_\alpha (\hat{\alpha}_{3,T}) = a_{6,6} \frac{\alpha_3^2}{n_3}$$

$$\text{Var}_\alpha (\hat{m}_{1,T}) = a_{7,7} \frac{1}{n_3}$$

$$\text{Var}_\alpha (\hat{m}_{b_1,T}) = a_{8,8} \frac{1}{n_3}$$

$$\text{Var}_\alpha (\hat{m}_{b_2,T}) = a_{9,9} \frac{1}{n_3}$$

( 4.13 )

donde:

$\alpha$  es un subíndice que indica asintótico

$T$  es un subíndice que indica que las varianzas son trivariadas

#### 4.4.2 DISTRIBUCION VET112

La matriz asintótica de varianza-covarianza de los estimadores de máxima verosimilitud de los parámetros de esta distribución tiene la forma de la ecuación (4.14).

Si se utilizan las derivadas parciales de primer orden de la función de verosimilitud logarítmica para la función VET112, dadas en el Apéndice A, la matriz de varianza-covarianza puede ser expresada como en la ecuación (4.15).

Los coeficientes de la matriz (4.15) son una función de los tamaños de muestra ( $n_1, n_2, n_3, n_4$  y  $n_5$ ) y de los parámetros de asociación ( $m_1, m_{b_1}$  y  $m_{b_2}$ ).

Los elementos de la diagonal principal de la matriz de varianza-covarianza corresponden a los valores de las varianzas asintóticas trivariadas de los parámetros.

V =

$Var(\hat{u}_1)$	$Cov(\hat{u}_1, \hat{\epsilon}_1)$	$Cov(\hat{u}_1, \hat{u}_2)$	$Cov(\hat{u}_1, \hat{\epsilon}_2)$	$Cov(\hat{u}_1, \hat{u}_3)$	$Cov(\hat{u}_1, \hat{\epsilon}_3)$	$Cov(\hat{u}_1, \hat{\beta}_3)$	$Cov(\hat{u}_1, \hat{m}_1)$	$Cov(\hat{u}_1, \hat{m}_2)$	$Cov(\hat{u}_1, \hat{m}_3)$
$Cov(\hat{\epsilon}_1, \hat{u}_1)$	$Var(\hat{\epsilon}_1)$	$Cov(\hat{\epsilon}_1, \hat{u}_2)$	$Cov(\hat{\epsilon}_1, \hat{\epsilon}_2)$	$Cov(\hat{\epsilon}_1, \hat{u}_3)$	$Cov(\hat{\epsilon}_1, \hat{\epsilon}_3)$	$Cov(\hat{\epsilon}_1, \hat{\beta}_3)$	$Cov(\hat{\epsilon}_1, \hat{m}_1)$	$Cov(\hat{\epsilon}_1, \hat{m}_2)$	$Cov(\hat{\epsilon}_1, \hat{m}_3)$
$Cov(\hat{u}_2, \hat{u}_1)$	$Cov(\hat{u}_2, \hat{\epsilon}_1)$	$Var(\hat{u}_2)$	$Cov(\hat{u}_2, \hat{\epsilon}_2)$	$Cov(\hat{u}_2, \hat{u}_3)$	$Cov(\hat{u}_2, \hat{\epsilon}_3)$	$Cov(\hat{u}_2, \hat{\beta}_3)$	$Cov(\hat{u}_2, \hat{m}_1)$	$Cov(\hat{u}_2, \hat{m}_2)$	$Cov(\hat{u}_2, \hat{m}_3)$
$Cov(\hat{\epsilon}_2, \hat{u}_1)$	$Cov(\hat{\epsilon}_2, \hat{\epsilon}_1)$	$Cov(\hat{\epsilon}_2, \hat{u}_2)$	$Var(\hat{\epsilon}_2)$	$Cov(\hat{\epsilon}_2, \hat{u}_3)$	$Cov(\hat{\epsilon}_2, \hat{\epsilon}_3)$	$Cov(\hat{\epsilon}_2, \hat{\beta}_3)$	$Cov(\hat{\epsilon}_2, \hat{m}_1)$	$Cov(\hat{\epsilon}_2, \hat{m}_2)$	$Cov(\hat{\epsilon}_2, \hat{m}_3)$
$Cov(\hat{u}_3, \hat{u}_1)$	$Cov(\hat{u}_3, \hat{\epsilon}_1)$	$Cov(\hat{u}_3, \hat{u}_2)$	$Cov(\hat{u}_3, \hat{\epsilon}_2)$	$Var(\hat{u}_3)$	$Cov(\hat{u}_3, \hat{\epsilon}_3)$	$Cov(\hat{u}_3, \hat{\beta}_3)$	$Cov(\hat{u}_3, \hat{m}_1)$	$Cov(\hat{u}_3, \hat{m}_2)$	$Cov(\hat{u}_3, \hat{m}_3)$
$Cov(\hat{\epsilon}_3, \hat{u}_1)$	$Cov(\hat{\epsilon}_3, \hat{\epsilon}_1)$	$Cov(\hat{\epsilon}_3, \hat{u}_2)$	$Cov(\hat{\epsilon}_3, \hat{\epsilon}_2)$	$Cov(\hat{\epsilon}_3, \hat{u}_3)$	$Var(\hat{\epsilon}_3)$	$Cov(\hat{\epsilon}_3, \hat{\beta}_3)$	$Cov(\hat{\epsilon}_3, \hat{m}_1)$	$Cov(\hat{\epsilon}_3, \hat{m}_2)$	$Cov(\hat{\epsilon}_3, \hat{m}_3)$
$Cov(\hat{\beta}_3, \hat{u}_1)$	$Cov(\hat{\beta}_3, \hat{\epsilon}_1)$	$Cov(\hat{\beta}_3, \hat{u}_2)$	$Cov(\hat{\beta}_3, \hat{\epsilon}_2)$	$Cov(\hat{\beta}_3, \hat{u}_3)$	$Cov(\hat{\beta}_3, \hat{\epsilon}_3)$	$Var(\hat{\beta}_3)$	$Cov(\hat{\beta}_3, \hat{m}_1)$	$Cov(\hat{\beta}_3, \hat{m}_2)$	$Cov(\hat{\beta}_3, \hat{m}_3)$
$Cov(\hat{m}_1, \hat{u}_1)$	$Cov(\hat{m}_1, \hat{\epsilon}_1)$	$Cov(\hat{m}_1, \hat{u}_2)$	$Cov(\hat{m}_1, \hat{\epsilon}_2)$	$Cov(\hat{m}_1, \hat{u}_3)$	$Cov(\hat{m}_1, \hat{\epsilon}_3)$	$Cov(\hat{m}_1, \hat{\beta}_3)$	$Var(\hat{m}_1)$	$Cov(\hat{m}_1, \hat{m}_2)$	$Cov(\hat{m}_1, \hat{m}_3)$
$Cov(\hat{m}_2, \hat{u}_1)$	$Cov(\hat{m}_2, \hat{\epsilon}_1)$	$Cov(\hat{m}_2, \hat{u}_2)$	$Cov(\hat{m}_2, \hat{\epsilon}_2)$	$Cov(\hat{m}_2, \hat{u}_3)$	$Cov(\hat{m}_2, \hat{\epsilon}_3)$	$Cov(\hat{m}_2, \hat{\beta}_3)$	$Cov(\hat{m}_2, \hat{m}_1)$	$Var(\hat{m}_2)$	$Cov(\hat{m}_2, \hat{m}_3)$
$Cov(\hat{m}_3, \hat{u}_1)$	$Cov(\hat{m}_3, \hat{\epsilon}_1)$	$Cov(\hat{m}_3, \hat{u}_2)$	$Cov(\hat{m}_3, \hat{\epsilon}_2)$	$Cov(\hat{m}_3, \hat{u}_3)$	$Cov(\hat{m}_3, \hat{\epsilon}_3)$	$Cov(\hat{m}_3, \hat{\beta}_3)$	$Cov(\hat{m}_3, \hat{m}_1)$	$Cov(\hat{m}_3, \hat{m}_2)$	$Var(\hat{m}_3)$



$$V = \frac{1}{R_3}$$

$\hat{a}_1^2 b_{1,1}$	$\hat{a}_1^2 b_{1,2}$	$\hat{a}_1 \hat{a}_2 b_{1,3}$	$\hat{a}_1 \hat{a}_2 b_{1,4}$	$\hat{a}_1 \hat{a}_3 b_{1,5}$	$\hat{a}_1 \hat{a}_3 b_{1,6}$	$\hat{a}_1 b_{1,7}$	$\hat{a}_1 b_{1,8}$	$\hat{a}_1 b_{1,9}$	$\hat{a}_1 b_{1,10}$
$\hat{a}_1^2 b_{2,1}$	$\hat{a}_1^2 b_{2,2}$	$\hat{a}_1 \hat{a}_2 b_{2,3}$	$\hat{a}_1 \hat{a}_2 b_{2,4}$	$\hat{a}_1 \hat{a}_3 b_{2,5}$	$\hat{a}_1 \hat{a}_3 b_{2,6}$	$\hat{a}_1 b_{2,7}$	$\hat{a}_1 b_{2,8}$	$\hat{a}_1 b_{2,9}$	$\hat{a}_1 b_{2,10}$
$\hat{a}_2^2 b_{3,1}$	$\hat{a}_2 \hat{a}_1 b_{3,2}$	$\hat{a}_2^2 b_{3,3}$	$\hat{a}_2^2 b_{3,4}$	$\hat{a}_2 \hat{a}_3 b_{3,5}$	$\hat{a}_2 \hat{a}_3 b_{3,6}$	$\hat{a}_2 b_{3,7}$	$\hat{a}_2 b_{3,8}$	$\hat{a}_2 b_{3,9}$	$\hat{a}_2 b_{3,10}$
$\hat{a}_2 \hat{a}_1 b_{4,1}$	$\hat{a}_2 \hat{a}_1 b_{4,2}$	$\hat{a}_2^2 b_{4,3}$	$\hat{a}_2^2 b_{4,4}$	$\hat{a}_2 \hat{a}_3 b_{4,5}$	$\hat{a}_2 \hat{a}_3 b_{4,6}$	$\hat{a}_2 b_{4,7}$	$\hat{a}_2 b_{4,8}$	$\hat{a}_2 b_{4,9}$	$\hat{a}_2 b_{4,10}$
$\hat{a}_3 \hat{a}_1 b_{5,1}$	$\hat{a}_3 \hat{a}_1 b_{5,2}$	$\hat{a}_3 \hat{a}_2 b_{5,3}$	$\hat{a}_3 \hat{a}_2 b_{5,4}$	$\hat{a}_3^2 b_{5,5}$	$\hat{a}_3^2 b_{5,6}$	$\hat{a}_3 b_{5,7}$	$\hat{a}_3 b_{5,8}$	$\hat{a}_3 b_{5,9}$	$\hat{a}_3 b_{5,10}$
$\hat{a}_3 \hat{a}_1 b_{6,1}$	$\hat{a}_3 \hat{a}_1 b_{6,2}$	$\hat{a}_3 \hat{a}_2 b_{6,3}$	$\hat{a}_3 \hat{a}_2 b_{6,4}$	$\hat{a}_3^2 b_{6,5}$	$\hat{a}_3^2 b_{6,6}$	$\hat{a}_3 b_{6,7}$	$\hat{a}_3 b_{6,8}$	$\hat{a}_3 b_{6,9}$	$\hat{a}_3 b_{6,10}$
$\hat{a}_1 b_{7,1}$	$\hat{a}_1 b_{7,2}$	$\hat{a}_2 b_{7,3}$	$\hat{a}_2 b_{7,4}$	$\hat{a}_3 b_{7,5}$	$\hat{a}_3 b_{7,6}$	$b_{7,7}$	$\hat{a}_3 b_{7,8}$	$\hat{a}_3 b_{7,9}$	$\hat{a}_3 b_{7,10}$
$\hat{a}_1 b_{8,1}$	$\hat{a}_1 b_{8,2}$	$\hat{a}_2 b_{8,3}$	$\hat{a}_2 b_{8,4}$	$\hat{a}_3 b_{8,5}$	$\hat{a}_3 b_{8,6}$	$\hat{a}_3 b_{8,7}$	$b_{8,8}$	$b_{8,9}$	$b_{8,10}$
$\hat{a}_1 b_{9,1}$	$\hat{a}_1 b_{9,2}$	$\hat{a}_2 b_{9,3}$	$\hat{a}_2 b_{9,4}$	$\hat{a}_3 b_{9,5}$	$\hat{a}_3 b_{9,6}$	$\hat{a}_3 b_{9,7}$	$b_{9,8}$	$b_{9,9}$	$b_{9,10}$
$\hat{a}_1 b_{10,1}$	$\hat{a}_1 b_{10,2}$	$\hat{a}_2 b_{10,3}$	$\hat{a}_2 b_{10,4}$	$\hat{a}_3 b_{10,5}$	$\hat{a}_3 b_{10,6}$	$\hat{a}_3 b_{10,7}$	$b_{10,8}$	$b_{10,9}$	$b_{10,10}$

Las varianzas asintóticas de los parámetros de la distribución VET112 son las siguientes:

$$\text{Var}_\alpha (\hat{u}_{1,T}) = b_{1,1} \frac{\alpha_1^2}{n_3}$$

$$\text{Var}_\alpha (\hat{\alpha}_{1,T}) = b_{2,2} \frac{\alpha_1^2}{n_3}$$

$$\text{Var}_\alpha (\hat{u}_{2,T}) = b_{3,3} \frac{\alpha_2^2}{n_3}$$

$$\text{Var}_\alpha (\hat{\alpha}_{2,T}) = b_{4,4} \frac{\alpha_2^2}{n_3}$$

$$\text{Var}_\alpha (\hat{u}_{3,T}) = b_{5,5} \frac{\alpha_3^2}{n_3}$$

$$\text{Var}_\alpha (\hat{\alpha}_{3,T}) = b_{6,6} \frac{\alpha_3^2}{n_3}$$

$$\text{Var}_\alpha (\hat{\beta}_{3,T}) = b_{7,7} \frac{1}{n_3}$$

$$\text{Var}_\alpha (\hat{m}_{1,T}) = b_{8,8} \frac{1}{n_3}$$

$$\text{Var}_\alpha (\hat{m}_{b_1,T}) = b_{9,9} \frac{1}{n_3}$$

$$\text{Var}_\alpha (\hat{m}_{b_2,T}) = b_{10,10} \frac{1}{n_3}$$

( 4.16 )

#### 4.4.3 DISTRIBUCION VET122

La matriz asintótica de varianza-covarianza de los estimadores de máxima verosimilitud de los parámetros de esta distribución tiene la forma de la ecuación (4.17).

Si se utilizan las derivadas parciales de primer orden de la función de verosimilitud logarítmica para la función VET122, dadas en el Apéndice A, la matriz de varianza-covarianza puede ser expresada como en la ecuación (4.18).

Los coeficientes de la matriz (4.18) son una función de los tamaños de muestra ( $n_1, n_2, n_3, n_4$  y  $n_5$ ) y de los parámetros de asociación ( $m_{11}, m_{b_1}$  y  $m_{b_2}$ ).

Los elementos de la diagonal principal de la matriz de varianza-covarianza corresponden a los valores de las varianzas asintóticas trivariadas de los parámetros.



$\overset{\Delta}{R}_1^2 C_{1,1}$	$\overset{\Delta}{R}_1^2 C_{1,2}$	$\overset{\Delta}{R}_1 \overset{\Delta}{R}_2^2 C_{1,3}$	$\overset{\Delta}{R}_1 \overset{\Delta}{R}_2^2 C_{1,4}$	$\overset{\Delta}{R}_1 C_{1,5}$	$\overset{\Delta}{R}_1 \overset{\Delta}{R}_3 C_{1,6}$	$\overset{\Delta}{R}_1 \overset{\Delta}{R}_3 C_{1,7}$	$\overset{\Delta}{R}_1 C_{1,8}$	$\overset{\Delta}{R}_1 C_{1,9}$	$\overset{\Delta}{R}_1 C_{1,10}$	$\overset{\Delta}{R}_1 C_{1,11}$
$\overset{\Delta}{R}_1^2 C_{2,1}$	$\overset{\Delta}{R}_1^2 C_{2,2}$	$\overset{\Delta}{R}_1 \overset{\Delta}{R}_2^2 C_{2,3}$	$\overset{\Delta}{R}_1 \overset{\Delta}{R}_2^2 C_{2,4}$	$\overset{\Delta}{R}_1 C_{2,5}$	$\overset{\Delta}{R}_1 \overset{\Delta}{R}_3 C_{2,6}$	$\overset{\Delta}{R}_1 \overset{\Delta}{R}_3 C_{2,7}$	$\overset{\Delta}{R}_1 C_{2,8}$	$\overset{\Delta}{R}_1 C_{2,9}$	$\overset{\Delta}{R}_1 C_{2,10}$	$\overset{\Delta}{R}_1 C_{2,11}$
$\overset{\Delta}{R}_2 \overset{\Delta}{R}_1 C_{3,1}$	$\overset{\Delta}{R}_2 \overset{\Delta}{R}_1 C_{3,2}$	$\overset{\Delta}{R}_2^2 C_{3,3}$	$\overset{\Delta}{R}_2^2 C_{3,4}$	$\overset{\Delta}{R}_2 C_{3,5}$	$\overset{\Delta}{R}_2 \overset{\Delta}{R}_3 C_{3,6}$	$\overset{\Delta}{R}_2 \overset{\Delta}{R}_3 C_{3,7}$	$\overset{\Delta}{R}_2 C_{3,8}$	$\overset{\Delta}{R}_2 C_{3,9}$	$\overset{\Delta}{R}_2 C_{3,10}$	$\overset{\Delta}{R}_2 C_{3,11}$
$\overset{\Delta}{R}_2 \overset{\Delta}{R}_1 C_{4,1}$	$\overset{\Delta}{R}_2 \overset{\Delta}{R}_1 C_{4,2}$	$\overset{\Delta}{R}_2^2 C_{4,3}$	$\overset{\Delta}{R}_2^2 C_{4,4}$	$\overset{\Delta}{R}_2 C_{4,5}$	$\overset{\Delta}{R}_2 \overset{\Delta}{R}_3 C_{4,6}$	$\overset{\Delta}{R}_2 \overset{\Delta}{R}_3 C_{4,7}$	$\overset{\Delta}{R}_2 C_{4,8}$	$\overset{\Delta}{R}_2 C_{4,9}$	$\overset{\Delta}{R}_2 C_{4,10}$	$\overset{\Delta}{R}_2 C_{4,11}$
$\overset{\Delta}{R}_1 C_{5,1}$	$\overset{\Delta}{R}_1 C_{5,2}$	$\overset{\Delta}{R}_2^2 C_{5,3}$	$\overset{\Delta}{R}_2^2 C_{5,4}$	$C_{5,5}$	$\overset{\Delta}{R}_3 C_{5,6}$	$\overset{\Delta}{R}_3 C_{5,7}$	$C_{5,8}$	$C_{5,9}$	$C_{5,10}$	$C_{5,11}$
$\overset{\Delta}{R}_3 \overset{\Delta}{R}_1 C_{6,1}$	$\overset{\Delta}{R}_3 \overset{\Delta}{R}_1 C_{6,2}$	$\overset{\Delta}{R}_3 \overset{\Delta}{R}_2 C_{6,3}$	$\overset{\Delta}{R}_3 \overset{\Delta}{R}_2 C_{6,4}$	$\overset{\Delta}{R}_3 C_{6,5}$	$\overset{\Delta}{R}_3^2 C_{6,6}$	$\overset{\Delta}{R}_3^2 C_{6,7}$	$\overset{\Delta}{R}_3 C_{6,8}$	$\overset{\Delta}{R}_3 C_{6,9}$	$\overset{\Delta}{R}_3 C_{6,10}$	$\overset{\Delta}{R}_3 C_{6,11}$
$\overset{\Delta}{R}_3 \overset{\Delta}{R}_1 C_{7,1}$	$\overset{\Delta}{R}_3 \overset{\Delta}{R}_1 C_{7,2}$	$\overset{\Delta}{R}_3 \overset{\Delta}{R}_2 C_{7,3}$	$\overset{\Delta}{R}_3 \overset{\Delta}{R}_2 C_{7,4}$	$\overset{\Delta}{R}_3 C_{7,5}$	$\overset{\Delta}{R}_3^2 C_{7,6}$	$\overset{\Delta}{R}_3^2 C_{7,7}$	$\overset{\Delta}{R}_3 C_{7,8}$	$\overset{\Delta}{R}_3 C_{7,9}$	$\overset{\Delta}{R}_3 C_{7,10}$	$\overset{\Delta}{R}_3 C_{7,11}$
$\overset{\Delta}{R}_1 C_{8,1}$	$\overset{\Delta}{R}_1 C_{8,2}$	$\overset{\Delta}{R}_2^2 C_{8,3}$	$\overset{\Delta}{R}_2^2 C_{8,4}$	$C_{8,5}$	$\overset{\Delta}{R}_3 C_{8,6}$	$\overset{\Delta}{R}_3 C_{8,7}$	$C_{8,8}$	$C_{8,9}$	$C_{8,10}$	$C_{8,11}$
$\overset{\Delta}{R}_1 C_{9,1}$	$\overset{\Delta}{R}_1 C_{9,2}$	$\overset{\Delta}{R}_2^2 C_{9,3}$	$\overset{\Delta}{R}_2^2 C_{9,4}$	$C_{9,5}$	$\overset{\Delta}{R}_3 C_{9,6}$	$\overset{\Delta}{R}_3 C_{9,7}$	$C_{9,8}$	$C_{9,9}$	$C_{9,10}$	$C_{9,11}$
$\overset{\Delta}{R}_1 C_{10,1}$	$\overset{\Delta}{R}_1 C_{10,2}$	$\overset{\Delta}{R}_2^2 C_{10,3}$	$\overset{\Delta}{R}_2^2 C_{10,4}$	$C_{10,5}$	$\overset{\Delta}{R}_3 C_{10,6}$	$\overset{\Delta}{R}_3 C_{10,7}$	$C_{10,8}$	$C_{10,9}$	$C_{10,10}$	$C_{10,11}$
$\overset{\Delta}{R}_1 C_{11,1}$	$\overset{\Delta}{R}_1 C_{11,2}$	$\overset{\Delta}{R}_2^2 C_{11,3}$	$\overset{\Delta}{R}_2^2 C_{11,4}$	$C_{11,5}$	$\overset{\Delta}{R}_3 C_{11,6}$	$\overset{\Delta}{R}_3 C_{11,7}$	$C_{11,8}$	$C_{11,9}$	$C_{11,10}$	$C_{11,11}$

Las varianzas asintóticas de los parámetros de la distribución VET122 son:

$$\text{Var}_a (\hat{u}_{1,T}) = c_{1,1} \frac{\alpha_1^2}{n_3}$$

$$\text{Var}_a (\hat{\alpha}_{1,T}) = c_{2,2} \frac{\alpha_1^2}{n_3}$$

$$\text{Var}_a (\hat{u}_{2,T}) = c_{3,3} \frac{\alpha_2^2}{n_3}$$

$$\text{Var}_a (\hat{\alpha}_{2,T}) = c_{4,4} \frac{\alpha_2^2}{n_3}$$

$$\text{Var}_a (\hat{\beta}_{2,T}) = c_{5,5} \frac{1}{n_3}$$

$$\text{Var}_a (\hat{u}_{3,T}) = c_{6,6} \frac{\alpha_3^2}{n_3}$$

$$\text{Var}_a (\hat{\alpha}_{3,T}) = c_{7,7} \frac{\alpha_3^2}{n_3}$$

$$\text{Var}_a (\hat{\beta}_{3,T}) = c_{8,8} \frac{1}{n_3}$$

$$\text{Var}_a (\hat{m}_{1,T}) = c_{9,9} \frac{1}{n_3}$$

$$\text{Var}_a (\hat{m}_{D_1,T}) = c_{10,10} \frac{1}{n_3}$$

$$\text{Var}_a (\hat{m}_{D_2,T}) = c_{11,11} \frac{1}{n_3}$$

( 4.19 )

#### 4.4.4 DISTRIBUCION VET222

La matriz asintótica de varianza-covarianza de los estimadores de máxima verosimilitud de los parámetros de esta distribución tiene la forma de la ecuación (4.20).

Si se utilizan las derivadas parciales de primer orden de la función de verosimilitud logarítmica para la función VET222, dadas en el Apendice A, la matriz de varianza-covarianza puede ser expresada como en la ecuación (4.21).

Los coeficientes de la matriz (4.21) son una función de los tamaños de muestra ( $n_1, n_2, n_3, n_4$  y  $n_5$ ) y de los parámetros de asociación ( $m_1, m_{b_1}$  y  $m_{b_2}$ ).

Los elementos de la diagonal principal de la matriz de varianza-covarianza corresponden a los valores de las varianzas asintóticas trivariadas de los parámetros.





18  
 $V = \frac{1}{\rho^3}$

$\hat{R}_1^> d_{1,1}$	$\hat{R}_1^> d_{1,2}$	$\hat{R}_1^> d_{1,3}$	$\hat{R}_1^> \hat{R}_2^> d_{1,4}$	$\hat{R}_1^> \hat{R}_2^> d_{1,5}$	$\hat{R}_1^> d_{1,6}$	$\hat{R}_1^> \hat{R}_3^> d_{1,7}$	$\hat{R}_1^> \hat{R}_3^> d_{1,8}$	$\hat{R}_1^> d_{1,9}$	$\hat{R}_1^> d_{1,10}$	$\hat{R}_1^> d_{1,11}$	$\hat{R}_1^> d_{1,12}$
$\hat{R}_2^> d_{2,1}$	$\hat{R}_2^> d_{2,2}$	$\hat{R}_1^> d_{2,3}$	$\hat{R}_1^> \hat{R}_2^> d_{2,4}$	$\hat{R}_1^> \hat{R}_2^> d_{2,5}$	$\hat{R}_1^> d_{2,6}$	$\hat{R}_1^> \hat{R}_3^> d_{2,7}$	$\hat{R}_1^> \hat{R}_3^> d_{2,8}$	$\hat{R}_1^> d_{2,9}$	$\hat{R}_1^> d_{2,10}$	$\hat{R}_1^> d_{2,11}$	$\hat{R}_1^> d_{2,12}$
$\hat{R}_3^> d_{3,1}$	$\hat{R}_1^> d_{3,2}$	$d_{3,3}$	$\hat{R}_2^> d_{3,4}$	$\hat{R}_2^> d_{3,5}$	$d_{3,6}$	$\hat{R}_3^> d_{3,7}$	$\hat{R}_3^> d_{3,8}$	$d_{3,9}$	$d_{3,10}$	$d_{3,11}$	$d_{3,12}$
$\hat{R}_2^> \hat{R}_1^> d_{4,1}$	$\hat{R}_2^> \hat{R}_1^> d_{4,2}$	$\hat{R}_2^> d_{4,3}$	$\hat{R}_2^> d_{4,4}$	$\hat{R}_2^> d_{4,5}$	$\hat{R}_2^> d_{4,6}$	$\hat{R}_2^> \hat{R}_3^> d_{4,7}$	$\hat{R}_2^> \hat{R}_3^> d_{4,8}$	$\hat{R}_2^> d_{4,9}$	$\hat{R}_2^> d_{4,10}$	$\hat{R}_2^> d_{4,11}$	$\hat{R}_2^> d_{4,12}$
$\hat{R}_2^> \hat{R}_1^> d_{5,1}$	$\hat{R}_2^> \hat{R}_1^> d_{5,2}$	$\hat{R}_2^> d_{5,3}$	$\hat{R}_2^> d_{5,4}$	$\hat{R}_2^> d_{5,5}$	$\hat{R}_2^> d_{5,6}$	$\hat{R}_2^> \hat{R}_3^> d_{5,7}$	$\hat{R}_2^> \hat{R}_3^> d_{5,8}$	$\hat{R}_2^> d_{5,9}$	$\hat{R}_2^> d_{5,10}$	$\hat{R}_2^> d_{5,11}$	$\hat{R}_2^> d_{5,12}$
$\hat{R}_1^> d_{6,1}$	$\hat{R}_1^> d_{6,2}$	$d_{6,3}$	$\hat{R}_2^> d_{6,4}$	$\hat{R}_2^> d_{6,5}$	$d_{6,6}$	$\hat{R}_3^> d_{6,7}$	$\hat{R}_3^> d_{6,8}$	$d_{6,9}$	$d_{6,10}$	$d_{6,11}$	$d_{6,12}$
$\hat{R}_3^> \hat{R}_1^> d_{7,1}$	$\hat{R}_3^> \hat{R}_1^> d_{7,2}$	$\hat{R}_3^> d_{7,3}$	$\hat{R}_3^> \hat{R}_2^> d_{7,4}$	$\hat{R}_3^> \hat{R}_2^> d_{7,5}$	$\hat{R}_3^> d_{7,6}$	$\hat{R}_3^> \hat{R}_2^> d_{7,7}$	$\hat{R}_3^> \hat{R}_2^> d_{7,8}$	$\hat{R}_3^> d_{7,9}$	$\hat{R}_3^> d_{7,10}$	$\hat{R}_3^> d_{7,11}$	$\hat{R}_3^> d_{7,12}$
$\hat{R}_3^> \hat{R}_1^> d_{8,1}$	$\hat{R}_3^> \hat{R}_1^> d_{8,2}$	$\hat{R}_3^> d_{8,3}$	$\hat{R}_3^> \hat{R}_2^> d_{8,4}$	$\hat{R}_3^> \hat{R}_2^> d_{8,5}$	$\hat{R}_3^> d_{8,6}$	$\hat{R}_3^> \hat{R}_2^> d_{8,7}$	$\hat{R}_3^> \hat{R}_2^> d_{8,8}$	$\hat{R}_3^> d_{8,9}$	$\hat{R}_3^> d_{8,10}$	$\hat{R}_3^> d_{8,11}$	$\hat{R}_3^> d_{8,12}$
$\hat{R}_1^> d_{9,1}$	$\hat{R}_1^> d_{9,2}$	$d_{9,3}$	$\hat{R}_2^> d_{9,4}$	$\hat{R}_2^> d_{9,5}$	$d_{9,6}$	$\hat{R}_3^> d_{9,7}$	$\hat{R}_3^> d_{9,8}$	$d_{9,9}$	$d_{9,10}$	$d_{9,11}$	$d_{9,12}$
$\hat{R}_1^> d_{10,1}$	$\hat{R}_1^> d_{10,2}$	$d_{10,3}$	$\hat{R}_2^> d_{10,4}$	$\hat{R}_2^> d_{10,5}$	$d_{10,6}$	$\hat{R}_3^> d_{10,7}$	$\hat{R}_3^> d_{10,8}$	$d_{10,9}$	$d_{10,10}$	$d_{10,11}$	$d_{10,12}$
$\hat{R}_1^> d_{11,1}$	$\hat{R}_1^> d_{11,2}$	$d_{11,3}$	$\hat{R}_2^> d_{11,4}$	$\hat{R}_2^> d_{11,5}$	$d_{11,6}$	$\hat{R}_3^> d_{11,7}$	$\hat{R}_3^> d_{11,8}$	$d_{11,9}$	$d_{11,10}$	$d_{11,11}$	$d_{11,12}$
$\hat{R}_1^> d_{12,1}$	$\hat{R}_1^> d_{12,2}$	$d_{12,3}$	$\hat{R}_2^> d_{12,4}$	$\hat{R}_2^> d_{12,5}$	$d_{12,6}$	$\hat{R}_3^> d_{12,7}$	$\hat{R}_3^> d_{12,8}$	$d_{12,9}$	$d_{12,10}$	$d_{12,11}$	$d_{12,12}$

Las varianzas asintóticas de los parámetros de la distribución VET222 son:

$$\text{Var}_\sigma (\hat{u}_{1,T}) = d_{1,1} \frac{\sigma_1^2}{n_3}$$

$$\text{Var}_\sigma (\hat{\alpha}_{1,T}) = d_{2,2} \frac{\sigma_1^2}{n_3}$$

$$\text{Var}_\sigma (\hat{\beta}_{1,T}) = d_{3,3} \frac{1}{n_3}$$

$$\text{Var}_\sigma (\hat{u}_{2,T}) = d_{4,4} \frac{\sigma_2^2}{n_3}$$

$$\text{Var}_\sigma (\hat{\alpha}_{2,T}) = d_{5,5} \frac{\sigma_2^2}{n_3}$$

$$\text{Var}_\sigma (\hat{\beta}_{2,T}) = d_{6,6} \frac{1}{n_3}$$

$$\text{Var}_\sigma (\hat{u}_{3,T}) = d_{7,7} \frac{\sigma_3^2}{n_3}$$

$$\text{Var}_\sigma (\hat{\alpha}_{3,T}) = d_{8,8} \frac{\sigma_3^2}{n_3}$$

$$\text{Var}_\sigma (\hat{\beta}_{3,T}) = d_{9,9} \frac{1}{n_3}$$

$$\text{Var}_\sigma (\hat{m}_{1,T}) = d_{10,10} \frac{1}{n_3}$$

$$\text{Var}_\sigma (\hat{m}_{D_1,T}) = d_{11,11} \frac{1}{n_3}$$

$$\text{Var}_\sigma (\hat{m}_{D_2,T}) = d_{12,12} \frac{1}{n_3}$$

#### 4.5 CONTENIDO DE INFORMACION RELATIVA

De acuerdo con Fisher ( Yevjevich, 1972 ), el concepto de información en cualquier estadístico  $\hat{\theta}$ , estimado de una muestra, está definido como la inversa de la varianza de ese estadístico:

$$I = \frac{1}{\text{Var } \hat{\theta}}$$

( 4.23 )

Puesto que la varianza siempre es positiva, la información  $I$ , varía de cero a infinito. Esto es válido si la distribución de la población es normal.

Una vez que se ha obtenido la matriz de varianza-covarianza, el contenido de información relativa puede ser calculado para mostrar si existe o no mejora en la estimación de los parámetros (Salas, 1980):

$$I_r(\theta) = \frac{\text{Var}_\sigma(\hat{\theta}_U)}{\text{Var}_\sigma(\hat{\theta}_T)} \quad ( 4.24 )$$

donde:

- $I_r(\theta)$  contenido de información relativa asintótica.
- $\text{Var}_\sigma(\hat{\theta}_U)$  Varianza asintótica de los parámetros estimados a través de la aproximación univariada.
- $\text{Var}_\sigma(\hat{\theta}_T)$  Varianza asintótica de los parámetros estimados a través de la aproximación trivariada.

Se obtiene una mejora en la estimación de los parámetros para valores de  $I_r > 1$ .

#### 4.5.1 DISTRIBUCION VET111

Para obtener los contenidos de información relativa, para esta distribución, se requieren las ecuaciones (4.5) y (4.13). Las relaciones resultantes son presentadas a continuación:

$$I_r (u_1) = \frac{1.1087}{a_{1,1}} \frac{n_3}{N_1}$$

$$I_r (\alpha_1) = \frac{0.6079}{a_{2,2}} \frac{n_3}{N_1}$$

$$I_r (u_2) = \frac{1.1087}{a_{3,3}} \frac{n_3}{N_2}$$

$$I_r (\alpha_2) = \frac{0.6079}{a_{4,4}} \frac{n_3}{N_2}$$

$$I_r (u_3) = \frac{1.1087}{a_{5,5}} \frac{n_3}{N_3}$$

$$I_r (\alpha_3) = \frac{0.6079}{a_{6,6}} \frac{n_3}{N_3}$$

( 4.25 )

donde:

$N_i$  es el tamaño de muestra univariada

$a_{i,i}$  son los coeficientes de la matriz de varianza covarianza definidos en la ecuación (4.12)

Para calcular los contenidos de información relativa, se empleará el arreglo mostrado en la Figura 4.1, ajustando el valor de  $n_3 = 25$  y variando los valores de  $n_4$  y  $n_5$  como 0,25,50 y 75, sin que el tamaño total de cada muestra exceda a 100.

estación A  
 $X_1 \dots X_{n_3}$   
 estación B  
 $Y_1 \dots Y_{n_3} \cdot Y_{n_3+1} \cdot \dots \cdot Y_{n_3+n_4}$   
 estación C  
 $Z_1 \cdot \dots \cdot Z_{n_3} \cdot Z_{n_3+1} \cdot \dots \cdot Z_{n_3+n_4} \cdot Z_{n_3+n_4+1} \cdot \dots \cdot Z_{n_3+n_4+n_5}$

Figura 4.1 Arreglo muestral propuesto para el cálculo de los contenidos de información relativa.

Los valores de los parámetros de asociación trivariado y bivariado fueron considerados como 2.0 para ambos casos. Los resultados para las diferentes variaciones del tamaño de las muestras son presentados en la Tabla 4.2.

De los resultados de la Tabla 4.2 se concluye:

- a. Los contenidos de información relativa de los parámetros de las estaciones A y B aumentan conforme la longitud de registro de la estación C se incrementa. Esto significa que hay una ganancia en información cuando los parámetros de las series cortas son estimados asociándoles los datos de muestra más largas.
- b. Al incrementarse el tamaño de muestra de la estación C, el contenido de información relativa de sus parámetros disminuye. Esto es, aunque se gana cierta información al utilizar las series más cortas, su efecto disminuye hasta convertirse en nulo.

		$n_3 = 25$	$m_3 = 2.0$	$m_3 = 2.0$	
Parámetro	$n_4$	$n_5$			
		0	25	50	75
$U_1$	0	1.0458	1.3705	1.5361	1.6366
	25	1.4512	1.6334	1.7453	
	50	1.6722	1.7879		
	75	1.8112			
$CC_1$	0	1.0657	1.3150	1.4356	1.5067
	25	1.3657	1.5167	1.5949	
	50	1.5494	1.6295		
	75	1.6487			
$U_2$	0	1.0458	1.3705	1.5361	1.6366
	25	1.0277	1.2178	1.3441	
	50	1.0216	1.1662		
	75	1.0184			
$CC_2$	0	1.0657	1.3150	1.4356	1.5067
	25	1.0272	1.1793	1.2774	
	50	1.0144	1.1239		
	75	1.0079			
$U_3$	0	1.0458	1.0249	1.0175	1.0137
	25	1.0277	1.0197	1.0155	
	50	1.0216	1.0171		
	75	1.0184			
$CC_3$	0	1.0657	1.0163	0.9996	0.9912
	25	1.0272	1.0071	0.9969	
	50	1.0144	1.0025		
	75	1.0079			

TABLA (4.2) Relación de información relativa para la distribución VET (111)

#### 4.5.2 DISTRIBUCION VET112

Para obtener los contenidos de información relativa, para esta distribución, se requieren las ecuaciones (4.5), (4.7) y (4.16). Las relaciones resultantes son :

$$I_r (u_1) = \frac{1.1087}{b_{1.1}} \frac{n_s}{N_1}$$

$$I_r (\alpha_1) = \frac{0.6079}{b_{2.2}} \frac{n_s}{N_1}$$

$$I_r (u_2) = \frac{1.1087}{b_{3.3}} \frac{n_s}{N_2}$$

$$I_r (\alpha_2) = \frac{0.6079}{b_{4.4}} \frac{n_s}{N_2}$$

$$I_r (u_3) = \frac{b}{b_{5.5}} \frac{n_s}{N_3}$$

$$I_r (\alpha_3) = \frac{a}{b_{6.6}} \frac{n_s}{N_3}$$

$$I_r (\beta_3) = \frac{c}{b_{7.7}} \frac{n_s}{N_3}$$

( 4.26 )

donde:

$N_1$  es el tamaño de muestra univariada  
 $b_{i,i}$  son los coeficientes de la matriz de varianza covarianza definidos en la ecuación (4.15)  
a,b,c son los coeficientes de la matriz de varianza covarianza de la distribución GVE para el

correspondiente valor del parámetro de forma  $\beta$

Para calcular los contenidos de información relativa, se empleará el arreglo propuesto en la Sección 4.5.1. bajo las mismas condiciones. Adicionalmente, se propone el valor de  $-0.10$  para el parámetro de forma de la estación con distribución GVE. Los resultados son presentados en la Tabla 4.3.

De los resultados de la Tabla 4.3 se tiene:

- a. Los contenidos de información relativa de los parámetros de las estaciones A y B aumentan conforme el tamaño de muestra de la estación C se incrementa. Por lo que existe una ganancia en información al utilizar una muestra larga de datos en la obtención de parámetros de series más cortas.
- b. La presencia de la distribución GVE en la estación C, disminuye el valor del contenido de información relativa de las estaciones A y B (comparandolos con los valores obtenidos para la distribución VET111).
- c. Hay una ganancia en información para la serie más larga (estación C) cuando las tres estaciones son usadas. Sin embargo, conforme la muestra más larga se incrementa, relativo a las series más cortas, la ganancia en información decrece hasta el punto en que la relación de información llega a ser menor que uno. En tales casos, ya no es factible utilizar las series con registro corto (estaciones A y B) para estimar los parámetros de la serie más larga (estación C).



		$n_3 = 25$	$m_3 = 2.0$	$m_b = 2.0$			
Parámetro	$n_4$	$n_b$					
		0	25	50	75		
$U_1$	0	1.0450	1.3661	1.5312	1.6318		
	25	1.4504	1.6304	1.7416			
	50	1.6714	1.7856				
	75	1.8105					
$C_1$	0	1.0392	1.2840	1.4067	1.4807		
	25	1.3572	1.4881	1.5681			
	50	1.8235	1.6044				
	75	1.6258					
$U_2$	0	1.0450	1.3661	1.5312	1.6318		
	25	1.0270	1.2142	1.3399			
	50	1.0208	1.1536				
	75	1.0177					
$C_2$	0	1.0392	1.2840	1.4067	1.4807		
	25	0.9928	1.1415	1.2399			
	50	0.9769	1.0838				
	75	0.9689					
$U_3$	0	1.0920	1.0489	1.0323	1.0234		
	25	1.0863	1.0460	1.0346			
	50	1.0575	1.0444				
	75	1.0531					
$C_3$	0	1.0245	0.9586	0.9361	0.9228		
	25	0.9902	0.9581	0.9410			
	50	0.9787	0.9576				
	75	0.9729					
$B_3$	0	1.4414	1.1234	1.0174	0.9644		
	25	1.3265	1.1529	1.0661			
	50	1.2879	1.1674				
	75	1.2688					

TABLA (4.3) Relación de información relativa para la distribución VET (112)

#### 4.5.3 DISTRIBUCION VET122

Para obtener los contenidos de información relativa, para esta distribución, se requieren las ecuaciones (4.5), (4.7) y (4.10). Las relaciones resultantes son :

$$I_r (u_1) = \frac{1.1087}{c_{1,1}} \frac{n_3}{N_1}$$

$$I_r (\alpha_1) = \frac{0.8079}{c_{2,2}} \frac{n_3}{N_1}$$

$$I_r (u_2) = \frac{b}{c_{3,3}} \frac{n_3}{N_2}$$

$$I_r (\alpha_2) = \frac{a}{c_{4,4}} \frac{n_3}{N_2}$$

$$I_r (\beta_2) = \frac{c}{c_{5,5}} \frac{n_3}{N_2}$$

$$I_r (u_3) = \frac{b}{c_{6,6}} \frac{n_3}{N_3}$$

$$I_r (\alpha_3) = \frac{a}{c_{7,7}} \frac{n_3}{N_3}$$

$$I_r (\beta_3) = \frac{c}{c_{8,8}} \frac{n_3}{N_3}$$

( 4.27 )

donde:

$N_1$  es el tamaño de muestra univariada

$c_{i,i}$  son los coeficientes de la matriz de varianza covarianza asintótica definidos en la ecuación (4.18)

a,b,c son los coeficientes de la matriz de varianza

covarianza de la distribución GVE para el correspondiente valor de  $\beta$

Para calcular los contenidos de información relativa, se empleará el arreglo propuesto en la Sección 4.5.1, bajo las mismas condiciones. Adicionalmente, se propone el valor de -0.15 para el parámetro de forma de la primera estación con distribución GVE y -0.10 para la segunda. Los resultados son presentados en la Tabla 4.4.

De los resultados de la Tabla 4.4 se tiene:

- a. Los contenidos de información relativa de los parámetros de las estaciones A y B aumentan conforme el tamaño de muestra de la estación C se incrementa. Por lo que existe una ganancia en información al utilizar una muestra larga de datos en la obtención de parámetros de series más cortas.
- b. La presencia de las distribuciones GVE en las estaciones B y C disminuyen el valor del contenido de información relativa de la estación A (comparándolos con los valores obtenidos para las distribuciones VET111 y VET112).
- c. Hay una ganancia en información para la serie más larga (estación C) cuando las tres estaciones son usadas. Sin embargo, conforme la muestra más larga se incrementa, relativo a las series más cortas, la ganancia en información decrece hasta el punto en que la relación de información llega a ser menor que uno. En tales casos, ya no es factible utilizar las series con registro corto (estaciones A y B) para estimar los parámetros de la serie más larga (estación C).

		$n_3 = 25$	$m_3 = 2.0$	$m_3 = 2.0$	
Parámetro	$n_4$	$n_5$			
		0	25	50	75
$U_1$	0	1.0438	1.3857	1.5310	1.6318
	25	1.4489	1.6296	1.7412	
	50	1.6699	1.7847		
	75	1.8092			
$OC_1$	0	1.0021	1.2558	1.3830	1.4598
	25	1.3093	1.4523	1.5391	
	50	1.4766	1.5660		
	75	1.5824			
$U_2$	0	1.0902	1.3782	1.5177	1.6000
	25	1.0619	1.2292	1.3370	
	50	1.0516	1.1703		
	75	1.0463			
$OC_2$	0	1.0208	1.2163	1.3066	1.3587
	25	0.9868	1.1057	1.1791	
	50	0.9756	1.0614		
	75	0.9700			
$\beta_2$	0	1.3890	1.4438	1.4789	1.4939
	25	1.2011	1.2646	1.3022	
	50	1.1408	1.1922		
	75	1.1097			
$U_3$	0	1.0906	1.0479	1.0315	1.0228
	25	1.0623	1.0428	1.0320	
	50	1.0521	1.0399		
	75	1.0468			
$OC_3$	0	1.0200	0.9573	0.9344	0.9224
	25	0.9858	0.9562	0.9400	
	50	0.9744	0.9553		
	75	0.9686			
$\beta_3$	0	1.3628	1.0844	0.9918	0.9450
	25	1.1972	1.0677	1.0026	
	50	1.1377	1.0560		
	75	1.1071			

TABLA (4.4) Relación de información relativa para la distribución VET (122)

#### 4.5.4 DISTRIBUCION VET222

Para obtener los contenidos de información relativa, para esta distribución, se requieren las ecuaciones (4.5), (4.7) y (4.22). Las relaciones resultantes son :

$$\begin{aligned} I_r (u_1) &= \frac{b}{d_{1,1}} \frac{n_3}{N_1} \\ I_r (\alpha_1) &= \frac{a}{d_{2,2}} \frac{n_3}{N_1} \\ I_r (\beta_1) &= \frac{c}{d_{3,3}} \frac{n_3}{N_3} \\ I_r (u_2) &= \frac{b}{d_{4,4}} \frac{n_3}{N_2} \\ I_r (\alpha_2) &= \frac{a}{d_{5,5}} \frac{n_3}{N_2} \\ I_r (\beta_2) &= \frac{c}{d_{6,6}} \frac{n_3}{N_2} \\ I_r (u_3) &= \frac{b}{d_{7,7}} \frac{n_3}{N_3} \\ I_r (\alpha_3) &= \frac{a}{d_{8,8}} \frac{n_3}{N_3} \\ I_r (\beta_3) &= \frac{c}{d_{9,9}} \frac{n_3}{N_3} \end{aligned}$$

( 4.28 )

donde:

$N_i$  es el tamaño de muestra univariada  
 $d_{i,i}$  son los coeficientes de la matriz de varianza

covarianza asintótica definidos en la ecuación (4.21)

a,b,c son los coeficientes de la matriz de varianza  
covarianza de la distribución GVE

Para calcular los contenidos de información relativa, se empleará el arreglo propuesto en la Sección 4.5.1, bajo las mismas condiciones. Adicionalmente, se proponen los valores de -0.20, -0.15 y -0.10 para los correspondientes parámetros de forma. Los resultados son presentados en la Tabla 4.5.

De los resultados de la Tabla 4.5 se tiene:

- a. Los contenidos de información relativa de los parámetros de las estaciones A y B aumentan conforme el tamaño de muestra de la estación C se incrementa. Por lo que existe una ganancia en información al utilizar una muestra larga de datos en la obtención de parámetros de series más cortas.
- b. Hay una ganancia en información para la serie más larga (estación C) cuando las tres estaciones son usadas. Sin embargo, conforme la muestra más larga se incrementa, relativo a las series más cortas, la ganancia en información decrece hasta el punto en que la relación de información llega a ser menor que uno. En tales casos, ya no es factible utilizar las series con registro corto (estaciones A y B) para estimar los parámetros de la serie más larga (estación C).

		$n_3 = 25$	$m_1 = 2.0$	$m_2 = 2.0$			
Parametro	$n_4$	$n_5$					
		0	25	50	75		
$U_1$	0	1.0868	1.3695	1.6055	1.8856		
	25	1.4460	1.8942	1.6823			
	50	1.6295	1.7201				
	75	1.7408					
$CC_1$	0	1.0141	1.2274	1.3256	1.3821		
	25	1.2712	1.3753	1.4356			
	50	1.3941	1.4555				
	75	1.4862					
$\beta_1$	0	1.2405	1.3555	1.4041	1.4312		
	25	1.3864	1.4382	1.4671			
	50	1.4514	1.4808				
	75	1.4883					
$U_2$	0	1.0878	1.3722	1.5094	1.5903		
	25	1.0599	1.2263	1.3333			
	50	1.0500	1.1683				
	75	1.0450					
$CC_2$	0	1.0135	1.2151	1.3066	1.3587		
	25	0.9835	1.1046	1.1788			
	50	0.9734	1.0604				
	75	0.9684					
$\beta_2$	0	1.2442	1.3469	1.3901	1.4140		
	25	1.1324	1.2069	1.2507			
	50	1.0934	1.1507				
	75	1.0736					
$U_3$	0	1.0882	1.0462	1.0302	1.0217		
	25	1.0604	1.0417	1.0313			
	50	1.0506	1.0390				
	75	1.0456					
$CC_3$	0	1.0126	0.9553	0.9334	0.9218		
	25	0.9822	0.9549	0.9395			
	50	0.9790	0.9542				
	75	0.9669					
$\beta_3$	0	1.2437	1.0268	0.9535	0.9168		
	25	1.1314	1.0246	0.9704			
	50	1.0923	1.0223				
	75	1.0724					

TABLA (4.5) Relación de Información relativa para la distribución VET(222)

#### 4.6 APLICACION A MUESTRAS PEQUEÑAS

Los resultados de las secciones precedentes son aplicables a grandes muestras. Para demostrar si estos pueden ser utilizados en muestras pequeñas se procederá a calcular las varianzas trivariadas mediante técnicas de muestreo distribucional (Buslenko, 1966; Kleijnen, 1974 ).

Las tríadas de valores aleatorios trivariados  $(X_i, Y_i, Z_i)$ , serán obtenidos de la forma siguiente :

- a. Transformar el número aleatorio  $R_1$  con distribución uniforme sobre el intervalo  $(0,1)$  a  $Z_i$ , el cual tiene la distribución marginal  $F(z)$ .

Si la función marginal es Gumbel:

$$Z_i = u_3 - \alpha_3 \text{Ln} ( -\text{Ln} F(z) ) \quad ( 4.29 )$$

Si es general de valores extremos:

$$Z_i = u_3 + \frac{\alpha_3}{\beta_3} \left\{ 1 - ( -\text{Ln} F(z) )^{\beta_3} \right\} \quad ( 4.30 )$$

- b. Substituir  $Z_i$  y un nuevo número aleatorio  $R_2$ , el cual tiene la misma distribución de  $R_1$ , en la función de distribución condicional (4.31), que será resuelta para  $Y$ .

$$F(y|z_i) = \frac{1}{f(z_i)} \frac{\partial F(y, z_i)}{\partial z_i} \Big|_{y=p} \quad ( 4.31 )$$



c. Con los valores de Z e Y y un tercer número aleatorio  $R_3$  que tiene la misma distribución que  $R_1$  y  $R_2$  se obtendrá el valor de X al resolver la ecuación (4.32).

$$FC(x|y_i, z_i) = \frac{1}{f(y_i, z_i)} \left\{ \frac{\partial}{\partial y_i} \left( \frac{\partial FC(x, y_i, z_i)}{\partial z_i} \right) \right\} \Bigg|_{x=q} \quad (4.32)$$

Dadas las características de las funciones analizadas, las ecuaciones (4.31) y (4.32) no tienen solución explícita, para resolverlas se utilizará el esquema numérico de Regula Falsi para búsqueda de raíces de ecuaciones algebraicas (Carnahan, 1969).

Una vez que se han obtenido las secuencias de valores trivariados, los estimadores de los parámetros de máxima verosimilitud univariados son calculados. Estos parámetros serán utilizados como valores iniciales en el esquema de obtención de estimadores de máxima verosimilitud trivariados.

Las varianzas de los parámetros así estimados son determinados por la siguiente ecuación:

$$S^2 = \frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^n (e_i - \bar{e})^2 \quad (4.33)$$

donde:

$S^2$  es la varianza de la muestra

$n$  es el tamaño de la muestra

$\bar{e}$  es la media de la muestra

Si se considera que las varianzas están distribuidas en forma

Chi-cuadrada, se pueden establecer los siguientes límites de confianza (Haan, 1977):

$$\text{Prob} \left\{ \frac{(n-1) S^2}{\chi^2_{\alpha/2, n-1}} < \sigma^2 < \frac{(n-1) S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2, n-1}} \right\} = 1 - \alpha \quad (4.34)$$

donde:

$\sigma^2$  es la varianza poblacional

$\chi^2_{\beta, \nu}$  es el percentil de la distribución chi-cuadrada con  $\nu$  grados de libertad y probabilidad  $\beta = 1 - \alpha/2$

$\alpha$  es el nivel de probabilidad elegido

Los percentiles de la distribución chi-cuadrada son calculados mediante la aproximación (Kendall y Stuart 1969):

$$\chi^2_{\beta, \nu} \cong \nu \left( 1 - \frac{2}{9\nu} + Z(\beta) \sqrt{\frac{2}{9\nu}} \right)^3 \quad (4.35)$$

donde:

$Z(\beta)$  valor de la ordenada de la distribución normal estandar para el nivel de probabilidad  $\beta$

#### 4.6.1 DISTRIBUCION VET111

El valor trivariado  $Z$ , para esta distribución, será calculado mediante la ecuación (4.29). Las ecuaciones (4.31) y (4.32) toman la forma siguiente:

$$F(z|z, \underline{\theta}) = \exp \left\{ - \left[ - e^{-\frac{z - u_3}{\alpha_3}} + (m_b - 1) \left( \frac{z - u_3}{\alpha_3} \right) + \left( e^{-m_b \left( \frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)} + e^{-m_b \left( \frac{z - u_3}{\alpha_3} \right)} \right)^{1/m_b} \right] \right\}$$

$$\left( e^{-m_b \left( \frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)} + e^{-m_b \left( \frac{z - u_3}{\alpha_3} \right)} \right)^{1/m_b - 1} \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned}
 FC(x|y, z, \theta) = & \left\{ \exp \left\{ - \left[ e^{-m_t \left( \frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m_t \left( \frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)} + \right. \right. \right. \\
 & + e^{-m_t \left( \frac{z - u_3}{\alpha_3} \right)} \left. \right]^{1/m_t} \left\{ \left[ e^{-m_t \left( \frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m_t \left( \frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)} + \right. \right. \\
 & + e^{-m_t \left( \frac{z - u_3}{\alpha_3} \right)} \left. \right]^{1/m_t} - z \left\{ (m_t - 1) + \left[ e^{-m_t \left( \frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)} + \right. \right. \\
 & + e^{-m_t \left( \frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)} + e^{-m_t \left( \frac{z - u_3}{\alpha_3} \right)} \left. \right]^{1/m_t} \left. \right\} \\
 & \left\{ \exp \left\{ - \left[ e^{-m_b \left( \frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)} + e^{-m_b \left( \frac{z - u_3}{\alpha_3} \right)} \right]^{1/m_b} \right\} \right. \\
 & \left. \left[ e^{-m_b \left( \frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)} + e^{-m_b \left( \frac{z - u_3}{\alpha_3} \right)} \right]^{1/m_b - 2} \right. \\
 & \left. \left\{ (m_b - 1) + \left[ e^{-m_b \left( \frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)} + e^{-m_b \left( \frac{z - u_3}{\alpha_3} \right)} \right]^{1/m_b} \right\} \right\} \quad (4.37)
 \end{aligned}$$

La distribución VET111 considerada tiene el conjunto de parámetros:  $u_1 = 14.0$ ,  $\alpha_1 = 1.4$ ,  $u_2 = 12.0$ ,  $\alpha_2 = 1.2$ ,  $u_3 = 10.0$ ,  $\alpha_3 = 1.0$ ,  $m_t = 2.0$  y  $m_b = 2.0$ .

Se utilizará el arreglo muestral presentado en la Figura 4.1.

y se analizarán cuatro opciones que dependen de las longitudes relativas  $n_3$ ,  $n_4$  y  $n_5$ , Tabla 4.6.

Tabla 4.6 Combinaciones propuestas para las muestras en la fase de simulación

Caso	$n_3$	Longitud $n_4$	$n_5$	Muestras generadas
A	20	0	0	100
B	20	0	20	100
C	20	20	0	100
D	20	20	20	100

La comparación de las varianzas asintóticas y simuladas para cada caso son presentadas en la Tabla B.1 (Apéndice B) de acuerdo con los arreglos propuestos en la Tabla 4.6. Los valores obtenidos sugieren que aún para tamaños de muestra de 20, los resultados asintóticos dan un buen estimado de las varianzas de los parámetros de la distribución VET111.

#### 4.6.2 DISTRIBUCION VET112

El valor trivariado  $Z$ , para esta distribución, será calculado mediante la ecuación (4.30). Las ecuaciones (4.31) y (4.32) toman la forma siguiente:

$$\begin{aligned}
 F(y|z, \underline{\theta}) = & \exp \left\{ \left( 1 - \left( \frac{z - u_3}{\alpha_3} \right) \beta_3 \right)^{1/\beta_3} - \left[ e^{-m_b \left( \frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \left( 1 - \left( \frac{z - u_3}{\alpha_3} \right) \beta_3 \right)^{m_b/\beta_3} \right]^{1/m_b} \right\} \left( 1 - \left( \frac{z - u_3}{\alpha_3} \right) \beta_3 \right)^{(m_b - 1)/\beta_3}
 \end{aligned}$$

cada caso son presentadas en la Tabla B.2 (Apéndice B) de acuerdo con los arreglos propuestos en la Tabla 4.6. Los valores obtenidos sugieren que para tamaños de muestra entre 20 y 40, los resultados asintóticos dan un buen estimado de las varianzas de los parámetros de la distribución VET112.

#### 4.6.3 DISTRIBUCION VET122

El valor trivariado  $Z$ , para esta distribución, será calculado mediante la ecuación (4.30). Las ecuaciones (4.31) y (4.32) toman la forma siguiente:

$$\begin{aligned}
 FC(y|z, \underline{\theta}) = & \exp \left\{ \left( 1 - \left( \frac{z - u_3}{\alpha_3} \right)^{\beta_3} \right)^{1/\beta_3} - \left[ \left( 1 - \left( \frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)^{\beta_2} \right)^{m_b/\beta_2} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \left( 1 - \left( \frac{z - u_3}{\alpha_3} \right)^{\beta_3} \right)^{m_b/\beta_3} \right]^{1/m_b} \right\} \left( 1 - \left( \frac{z - u_3}{\alpha_3} \right)^{\beta_3} \right)^{(m_b - 1)/\beta_3} \\
 & \left[ \left( 1 - \left( \frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)^{\beta_2} \right)^{m_b/\beta_2} + \left( 1 - \left( \frac{z - u_3}{\alpha_3} \right)^{\beta_3} \right)^{m_b/\beta_3} \right]^{1/m_b - 1} \\
 & \qquad \qquad \qquad (4.40)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 FC(x|y, z, \underline{\theta}) = & \left\{ \exp \left\{ - \left[ e^{-m_l \left( \frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)^{\beta_1}} + \left( 1 - \left( \frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)^{\beta_2} \right)^{m_l/\beta_2} + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. + \left( 1 - \left( \frac{z - u_3}{\alpha_3} \right)^{\beta_3} \right)^{m_l/\beta_3} \right]^{1/m_l} \right\} \left[ e^{-m_l \left( \frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)^{\beta_1}} + \left( 1 - \left( \frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)^{\beta_2} \right)^{m_l/\beta_2} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \left( 1 - \left( \frac{z - u_3}{\alpha_3} \right)^{\beta_3} \right)^{m_l/\beta_3} \right]^{1/m_l - 2} \left\{ (m_l - 1) + \left[ e^{-m_l \left( \frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)^{\beta_1}} + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. + \left( 1 - \left( \frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)^{\beta_2} \right)^{m_l/\beta_2} + \left( 1 - \left( \frac{z - u_3}{\alpha_3} \right)^{\beta_3} \right)^{m_l/\beta_3} \right]^{1/m_l} \right\} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\left[ e^{-m_b \left( \frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)} + \left( 1 - \left( \frac{z - u_3}{\alpha_3} \right) \beta_3 \right)^{m_b / \beta_3} \right]^{1/m_b - 1} \quad (4.38)$$

$$\begin{aligned}
 FC(x|y, z, \underline{\theta}) = & \left\{ \exp \left\{ - \left[ e^{-m_l \left( \frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m_l \left( \frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)} + \right. \right. \right. \\
 & + \left. \left. \left( 1 - \left( \frac{z - u_3}{\alpha_3} \right) \beta_3 \right)^{m_l / \beta_3} \right]^{1/m_l} \right\} \left[ e^{-m_l \left( \frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)} + e^{-m_l \left( \frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)} + \right. \\
 & + \left. \left. \left( 1 - \left( \frac{z - u_3}{\alpha_3} \right) \beta_3 \right)^{m_l / \beta_3} \right]^{1/m_l - 2} \left\{ (m_l - 1) + \left[ e^{-m_l \left( \frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)} + \right. \right. \\
 & + \left. \left. e^{-m_l \left( \frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)} + \left( 1 - \left( \frac{z - u_3}{\alpha_3} \right) \beta_3 \right)^{m_l / \beta_3} \right]^{1/m_l} \right\} \right\} / \\
 & \left\{ \exp \left\{ - \left[ e^{-m_b \left( \frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)} + \left( 1 - \left( \frac{z - u_3}{\alpha_3} \right) \beta_3 \right)^{m_b / \beta_3} \right]^{1/m_b} \right\} \right. \\
 & \left. \left[ e^{-m_b \left( \frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)} + \left( 1 - \left( \frac{z - u_3}{\alpha_3} \right) \beta_3 \right)^{m_b / \beta_3} \right]^{1/m_b - 2} \right. \\
 & \left. \left\{ (m_b - 1) + \left[ e^{-m_b \left( \frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)} + \left( 1 - \left( \frac{z - u_3}{\alpha_3} \right) \beta_3 \right)^{m_b / \beta_3} \right]^{1/m_b} \right\} \right\} \quad (4.39)
 \end{aligned}$$

La distribución VET112 considerada tiene el conjunto de parámetros:  $u_1 = 15.0$ ,  $\alpha_1 = 2.0$ ,  $u_2 = 12.0$ ,  $\alpha_2 = 1.2$ ,  $u_3 = 10.0$ ,  $\alpha_3 = 1.0$ ,  $\beta_3 = -0.10$ ,  $m_l = 2.0$  y  $m_b = 2.0$ .

Se analizarán las mismas opciones de la Sección 4.6.1.

La comparación de las varianzas asintóticas y simuladas para

$$\left\{ \exp \left\{ - \left[ \left( 1 - \left( \frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)^{\beta_2} \right)^{m_b/\beta_2} + \left( 1 - \left( \frac{z - u_3}{\alpha_3} \right)^{\beta_3} \right)^{m_b/\beta_3} \right]^{1/m_b} \right\} \right. \\ \left. \left[ \left( 1 - \left( \frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)^{\beta_2} \right)^{m_b/\beta_2} + \left( 1 - \left( \frac{z - u_3}{\alpha_3} \right)^{\beta_3} \right)^{m_b/\beta_3} \right]^{1/m_b - 2} \right. \\ \left. \left\{ (m_b - 1) + \left[ \left( 1 - \left( \frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)^{\beta_2} \right)^{m_b/\beta_2} + \left( 1 - \left( \frac{z - u_3}{\alpha_3} \right)^{\beta_3} \right)^{m_b/\beta_3} \right]^{1/m_b} \right\} \right\} \right. \\ \left. (4.41) \right.$$

La distribución VET122 considerada tiene el conjunto de parámetros:  $u_1 = 15.0$ ,  $\alpha_1 = 2.0$ ,  $u_2 = 12.0$ ,  $\alpha_2 = 1.2$ ,  $\beta_2 = -0.15$ ,  $u_3 = 10.0$ ,  $\alpha_3 = 1.0$ ,  $\beta_3 = -0.10$ ,  $m_1 = 2.0$  y  $m_b = 2.0$ .

Se analizarán las opciones propuestas en la Sección 4.6.1.

La comparación de las varianzas asintóticas y simuladas para cada caso son presentadas en la Tabla B.3 (apéndice B) de acuerdo con los arreglos propuestos en la Tabla 4.6. Los valores obtenidos sugieren que para tamaños de muestra entre 20 y 40, los resultados asintóticos dan un buen estimado de las varianzas de los parámetros de la distribución VET122.

#### 4.6.4 DISTRIBUCION VET222

El valor trivariado  $Z$ , para esta distribución, será calculado mediante la ecuación (4.30). Las ecuaciones (4.31) y (4.32) toman la forma siguiente:

$$FC(y|z, \theta) = \exp \left\{ \left( 1 - \left( \frac{z - u_3}{\alpha_3} \right)^{\beta_3} \right)^{1/\beta_3} - \left[ \left( 1 - \left( \frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)^{\beta_2} \right)^{m_b/\beta_2} + \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \left( 1 - \left( \frac{z - u_3}{\alpha_3} \right)^{\beta_3} \right)^{m_b / \beta_3} \left. \right]^{1/m_b} \left\{ \left( 1 - \left( \frac{z - u_3}{\alpha_3} \right)^{\beta_3} \right)^{m_b - 1} / \beta_3 \right. \\
 & \left[ \left( 1 - \left( \frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)^{\beta_2} \right)^{m_b / \beta_2} + \left( 1 - \left( \frac{z - u_3}{\alpha_3} \right)^{\beta_3} \right)^{m_b / \beta_3} \right]^{1/m_b - 1} \\
 & \qquad \qquad \qquad (4.42)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 FC(x|y, z, \underline{\theta}) &= \left\{ \exp \left\{ - \left[ \left( 1 - \left( \frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)^{\beta_1} \right)^{m_t / \beta_1} + \left( 1 - \left( \frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)^{\beta_2} \right)^{m_t / \beta_2} + \right. \right. \right. \\
 & + \left. \left. \left( 1 - \left( \frac{z - u_3}{\alpha_3} \right)^{\beta_3} \right)^{m_t / \beta_3} \right]^{1/m_t} \right\} \left[ \left( 1 - \left( \frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)^{\beta_1} \right)^{m_t / \beta_1} + \left( 1 - \left( \frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)^{\beta_2} \right)^{m_t / \beta_2} + \right. \right. \\
 & + \left. \left. \left( 1 - \left( \frac{z - u_3}{\alpha_3} \right)^{\beta_3} \right)^{m_t / \beta_3} \right]^{1/m_t - 2} \left\{ (m_t - 1) + \left[ \left( 1 - \left( \frac{x - u_1}{\alpha_1} \right)^{\beta_1} \right)^{m_t / \beta_1} + \right. \right. \right. \\
 & + \left. \left. \left( 1 - \left( \frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)^{\beta_2} \right)^{m_t / \beta_2} + \left( 1 - \left( \frac{z - u_3}{\alpha_3} \right)^{\beta_3} \right)^{m_t / \beta_3} \right]^{1/m_t} \right\} \right. \\
 & \left. \left\{ \exp \left\{ - \left[ \left( 1 - \left( \frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)^{\beta_2} \right)^{m_b / \beta_2} + \left( 1 - \left( \frac{z - u_3}{\alpha_3} \right)^{\beta_3} \right)^{m_b / \beta_3} \right]^{1/m_b} \right\} \right. \right. \\
 & \left. \left[ \left( 1 - \left( \frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)^{\beta_2} \right)^{m_b / \beta_2} + \left( 1 - \left( \frac{z - u_3}{\alpha_3} \right)^{\beta_3} \right)^{m_b / \beta_3} \right]^{1/m_b - 2} \right. \right. \\
 & \left. \left. \left\{ (m_b - 1) + \left[ \left( 1 - \left( \frac{y - u_2}{\alpha_2} \right)^{\beta_2} \right)^{m_b / \beta_2} + \left( 1 - \left( \frac{z - u_3}{\alpha_3} \right)^{\beta_3} \right)^{m_b / \beta_3} \right]^{1/m_b} \right\} \right\} \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad (4.43)
 \end{aligned}$$

La distribución VET222 considerada tiene el conjunto de parámetros:  $u_1 = 15.0$ ,  $\alpha_1 = 2.0$ ,  $\beta_1 = -0.20$ ,  $u_2 = 12.0$ ,  $\alpha_2 = 1.2$ ,  $\beta_2 = -0.15$ ,  $u_3 = 10.0$ ,  $\alpha_3 = 1.0$ ,  $\beta_3 = -0.10$ ,  $m_t = 2.0$  y  $m_b = 2.0$ .



Los casos analizados son los mismos que en la Sección 4.6.1.

La comparación de las varianzas asintóticas y simuladas para cada caso son presentadas en la Tabla B.4 (apéndice B) de acuerdo con los arreglos propuestos en la Tabla 4.6. Los valores obtenidos sugieren que para tamaños de muestra mayores a 40, los resultados asintóticos dan un buen estimado de las varianzas de los parametros de la distribución VET222.

## CAPITULO 5

### APLICACIONES EN HIDROLOGIA

#### 5.1 INTRODUCCION

En este capítulo se presenta la aplicación de las distribuciones trivariadas de valores extremos al análisis de frecuencias de gastos máximos anuales en dos regiones de la República Mexicana.

La región A, Figura C.1 (apéndice C), está formada por 21 estaciones, las cuales están localizadas en las cuencas de los ríos El Fuerte, Sinaloa, Culiacán, San Lorenzo, Elota y Piaxtla, que se ubican en los estados de Chihuahua y Sinaloa.

La región B, Figura C.2 (apéndice C), está formada por 28 estaciones que se ubican en la llamada Cuenca del Papaloapan. Estas estaciones se encuentran localizadas en los estados de Oaxaca, Puebla y Veracruz.

Las Tablas C.1 y C.2 (apéndice C) dan los nombres, localización, áreas y periodos de registro de las estaciones ubicadas en las regiones A y B.

La secuencia de análisis será la siguiente:

- a. Selección de la distribución que mejor ajusta a la muestra de datos en cada estación de las dos regiones en estudio (Sección 5.2).
- b. Calcular los límites de confianza de eventos de diseño para periodos de retorno específicos (Sección 5.3).

c. Comparar los resultados obtenidos mediante las distribuciones trivariadas con aquellos proporcionados por las distribuciones univariadas más usadas en la práctica hidrológica ( Sección 5.4 ).

## 5.2 SELECCION DEL TIPO DE DISTRIBUCION DE VALORES EXTREMOS

El criterio elegido para seleccionar el tipo de distribución de valores extremos, que mejor ajusta a la muestra de datos, es el del error estándar (Kite, 1977):

$$EE_j = \left[ \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}{n - m_j} \right]^{1/2} \quad (5.1)$$

donde:

- $x_i$  son los datos históricos para  $i = 1, \dots, n$
- $y_i$  son los eventos calculados a través del modelo matemático y para niveles de probabilidad iguales a los de los datos históricos ordenados en forma decreciente de magnitud para  $i = 1, \dots, n$
- $n$  es el tamaño de la muestra
- $m_j$  es el número de parámetros que describen al modelo matemático:  $m_1 = 2$  para la distribución Gumbel ;  
 $m_2 = 3$  para la distribución GVE

La distribución elegida sera aquella que proporcione el mínimo valor del error estándar de ajuste.

Para aplicar las distribuciones trivariadas de valores extremos al análisis de frecuencias de gastos máximos de las regiones A y B (Tablas C.3 y C.4 del apéndice C), las estaciones fueron agrupadas en triadas. Tal agrupamiento se llevo a cabo considerando aquellas estaciones vecinas con el mas alto coeficiente de correlación múltiple.

La medida de correlación esta dada por la expresión:

$$R = \sqrt{1 - \frac{\text{Var}(x)}{\text{Var}(x|Y=y, Z=z)}} \quad (5.2)$$

donde:

$R$                     coeficiente de correlación múltiple  
 $\text{Var}(x)$                 varianza de la variable  $x$   
 $\text{Var}(x|Y=y, Z=z)$     varianza condicional de  $x$  dado  $y, z$

Las tablas C.5 y C.6 ( apéndice C ) proporcionan los coeficientes de correlación múltiple y los tamaños de muestra relativa de las combinaciones óptimas de tres estaciones en las regiones A y B.

Los estimados de máxima verosimilitud de los parametros de las distribuciones Gumbel y GVE son obtenidos mediante la aplicación del paquete de cómputo FLODRO (Raynal y Escalante, 1991). Los estimados, para cada una de las regiones en estudio, son presentados en las Tablas C.7 y C.8 del apéndice C.

El algoritmo desarrollado en el capítulo 3 es utilizado para obtener los estimados de máxima verosimilitud de los parámetros trivariados.

Una vez que son obtenidos los parámetros trivariados se procede a cuantificar la bondad de ajuste de los modelos propuestos.

En la Tabla 5.1 se presentan los valores del mínimo error estándar de ajuste para cada una de las aproximaciones univariada, bivariada y trivariada de valores extremos, así mismo, se determina cual de estos modelos se ajusta mejor a la muestra de datos para cada una de las estaciones de la región A.

Cabe mencionar que la inclusión de la aproximación bivariada se hace con fines comparativos, y que la selección del mejor modelo de este tipo es el producto del proceso de identificación propuesto por Raynal (1985).

De la Tabla 5.1 se observa:

- a) Solo el 30 % de los casos analizados son mejor ajustados por la aproximación bivariada de valores extremos con referencia al ajuste univariado.
- b) El 75 % de las muestras se ajustan mejor a una distribución trivariada comparandolas con el ajuste univariado.
- c) En el análisis global se tiene que el 24% de los casos analizados son mejor ajustados por las distribuciones univariadas de valores extremos; el 1% por la aproximación bivariada y el 75 % por las distribuciones trivariadas.

De lo anterior se puede concluir que, aunque la aproximación bivariada mejora la calidad de los estimadores de los parámetros, la inclusión de una tercera muestra representa una ganancia significativa en la precisión de tales estimadores.

En la Tabla 5.2 se muestran los parámetros finales de las mejores distribuciones para cada una de las aproximaciones univariada, bivariada y trivariada de valores extremos en la región A.

La Tabla 5.3 muestra los valores del mínimo error estándar de ajuste para las aproximaciones univariada y trivariada de valores extremos, así mismo, se determina cual de estos modelos se ajusta mejor a la muestra de datos para cada una de las estaciones de la región B. En este caso, el 75% de las muestras analizadas se ajustaron mejor a una distribución trivariada de valores extremos.

Los parámetros finales de las mejores distribuciones de las aproximaciones univariada y trivariada de valores extremos, en las estaciones de la región B, son presentados en la Tabla 5.4.

La comparación gráfica entre la distribuciones teóricas e históricas son presentadas en el apéndice D.

Los resultados demuestran que las distribuciones trivariadas representan una buena alternativa en el análisis de frecuencias de gastos máximos anuales.

Tabla 5.1 Error estándar de la mejor distribución de cada aproximación univariada, bivariada y trivariada, para elegir la distribución final de valores extremos en las estaciones de la región A

Estación	Distribución Univariada	E. E.	Distribución Bivariada	E. E.	Distribución Trivariada	E. E.	Distribución Seleccionada
ACATITAN	G V E	2 4 4.4	G V E (B)	2 9 5.5	VET 222	2 5 3.9	Univariada (GVE)
BADIRAGUATO	G	6 6 0.9	G (B)	7 3 6.3	VET II2 (GVE)	5 5 0.8	VET II2 (GVE)
CHINIPAS	G	1 8 0.1	VEB II	1 4 2.5	VET II2 (G)	1 3 4.8	VET II2 (G)
CHOIX	G V E	8 7.7	VEB22 (GVE)	7 9.4	VET 222	5 8.8	VET 222
GUATENIPA	G	4 6 8.2	GVE (B)	1 3 8 3.2	VET II2 (G)	3 7 8.9	VET II2 (G)
HUITES	G V E	1 0 2 4.0	GVE (B)	1 1 2 7.9	VET I22 (GVE)	8 3 1.9	VET I22 (GVE)
IXPALINO	G V E	5 3 7.9	VEB II	7 0 5.9	VET 222	3 9 3.0	VET 222
JAINA	G V E	4 2 0.3	VEB I2 (GVE)	6 3 3.4	VET 222	5 3 1.3	Univariada GVE
LA HUERTA	G V E	1 9 2.3	VEB 22	2 7 7.6	VET II2 (GVE)	1 9 2.9	Univariada GVE
LOS MOLINOS	G V E	1 7.3	GVE (B)	1 2.4	VET 222	1 2.1	VET 222
NARANJO	G V E	1 1 4.4	GVE (B)	1 6 4.6	VET 222	1 0 4.7	VET 222
PALO DULCE	G V E	6 3 8.9	VEB 22	3 1 0.9	VET 222	2 6 7.2	VET 222
PIAXTLA	G V E	6 9 3.3	VEB 22	1 0 7 2.2	VET 222	8 7 1.9	Univariada (GVE)
SAN FRANCISCO	G V E	3 5 0.8	VEB II	7 4 6.9	VET 222	4 0 1.5	Univariada (GVE)
SAN IGNACIO	G	4 5 2.7	GVE (B)	8 3 4.7	VET I22 (G)	3 2 8.8	VET I22 (G)
SANTA CRUZ	G V E	4 9 7.2	GVE (B)	3 5 9.6	VET 222	2 5 9.6	VET 222
TAMAZULA	G V E	6 9 2.6	G (B)	8 2.4	VET 222	4 0.5	VET 222
TECUSIAPA	G V E	2 3 1.8	VEB I2 (GVE)	2 2 2.0	VET 22 (GVE)	2 1 2.1	VET I22 (GVE)
TOAHAYANA	G	1 2 8.6	VEB I2 (G)	1 0 4.4	VET 22 (G)	1 2 0.9	VEB I2 (G)
URIQUE II	G	7 3.9	VEB 22	8 5.9	VET 222	7 0.3	VET 222
ZOPILOTE	G	4 9.7	GVE (B)	7 2.2	VET II2 (G)	3 7.2	VET II2 (G)

G = Gumbel

GVE = General de valores extremos

EE = Error estándar

(G) y (GVE) indican que la estación tiene distribución marginal Gumbel o GVE en la función bivariada o trivariada  
(B) del análisis bivariado (Raynal, 1985)

Tabla. 5.2 Parámetros finales de la mejor distribución de cada aproximación univariada, bivariada y trivariada de valores extremos de las estaciones en la región A

Estación	UNIVARIADA			BIVARIADA			TRIVARIADA		
	Ubicación	Escala	Forma	Ubicación	Escala	Forma	Ubicación	Escala	Forma
ACATITAN	576.21	283.80	- 0.62	580.88	320.64	- 0.76	568.93	269.44	- 0.64
BADIRAGUATO	367.19	274.28	0.00	532.07	167.43	0.00	350.22	233.65	- 0.41
CHINIPAS	712.13	414.88	0.00	702.15	467.09	0.00	751.36	493.37	0.00
CHOIX	236.69	130.15	- 0.12	233.18	158.31	- 0.30	220.85	126.29	- 0.39
GUATENIPA	227.64	1020.68	0.00	768.34	509.83	- 1.03	1388.76	1160.27	0.00
HUITES	1564.78	978.87	- 0.57	1826.04	1306.70	- 0.62	1603.30	1038.53	- 0.68
IXPALINO	772.57	473.97	- 0.38	926.76	669.97	0.00	795.03	490.86	- 0.46
JAINA	651.15	328.94	- 0.55	643.47	312.84	- 0.41	655.43	313.49	- 0.49
LA HUERTA	489.62	330.42	- 0.40	471.10	348.15	- 0.60	481.54	332.55	- 0.45
LOS MOLINOS	170.86	61.59	0.49	164.83	80.42	0.49	162.31	79.28	0.49
NARANJO	239.35	222.22	- 0.61	238.11	235.06	- 0.64	292.43	253.37	- 0.47
PALO DULCE	539.81	247.47	- 0.76	537.43	291.77	- 0.93	463.52	216.79	- 1.04
PIAXTLA	657.64	276.01	- 0.94	675.72	350.14	- 0.56	630.89	267.68	- 0.87
SAN FRANCISCO	926.53	532.56	- 0.65	939.40	834.29	0.00	943.69	540.73	- 0.67
SAN IGNACIO	1231.40	568.27	0.00	905.23	149.01	- 3.26	1279.42	766.99	0.00
SANTA CRUZ	835.74	440.23	- 0.40	908.54	511.21	- 0.42	850.97	467.74	- 0.52
TAMAZULA	437.45	168.88	- 0.13	439.59	181.68	0.00	429.47	188.33	- 0.26
TECUSIAPA	534.53	365.15	- 0.54	532.76	345.71	- 0.60	530.21	386.08	- 0.69
TOAHAYANA	707.83	450.81	0.00	697.02	494.73	0.00	691.18	467.57	0.00
URIQUE II	216.05	121.43	0.00	202.90	148.09	- 0.24	205.50	114.07	- 0.21
ZOPILETE	220.18	202.24	0.00	174.02	184.96	- 0.24	223.33	223.43	0.00



Tabla. 5.3 Error estándar de la mejor distribución univariada y trivariada para elegir la distribución final de valores extremos en las estaciones de la región B.

Estación	Distribución Univariada	E. E.	Distribución Trivariada	E. E.	Distribución Seleccionada
ACHOTAL	G	3 4.8 3	VET 112 (G)	4 3.6 3	Univariada G
AMAPA	GVE	3 0.2 5	VET 222 (GVE)	2 0.3 5	VET 222
ANGEL R. CABADAS	GVE	4 2.3 9	VET 112 (G)	3 4.0 2	VET 112 (G)
APOALA	GVE	8 5.8 1	VET 222 (GVE)	8 8.0 3	Univariada G
AXUSCO	GVE	1 2.6 5	VET 112 (G)	1 0.5 5	VET 112 (G)
AZUETA	G	7 5.7 9	VET 112 (G)	6 0.3 2	VET 112 (G)
BELLACO	GVE	1 8 9.2 8	VET 112 (G)	1 8 1.6 8	VET 112 (G)
CALAPILLA	GVE	5 6.5 7	VET 122 (GVE)	6 2.0 3	Univariada GVE
CANTON	G	2 6 5.6 3	VET 112 (GVE)	2 3 3.5 3	VET 112 (GVE)
CUATOTOLAPAN	GVE	3 2 8.1 6	VET 222	2 2 7.5 8	VET 222
CUICHAPA	GVE	3 2.2 7	VET 122 (GVE)	1 1.9 7	VET 122 (GVE)
DOMINGUILLO	GVE	1 0.9 9	VET 122 (GVE)	7 4 7	VET 122 (GVE)
JACATEPEC	GVE	1 0 4.2 5	VET 122 (GVE)	7 3.5 4	VET 122 (GVE)
LA ANGOSTURA	G	2 6.2 3	VET 122 (GVE)	2 3.4 7	VET 122 (GVE)
LA ESTRELLA	G	9 3.4 3	VET 112 (G)	9 5.4 2	VET 112 (G)
LA JUNTA	GVE	9 4.1 1	VET 122 (GVE)	8 0.5 4	VET 122 (GVE)
LAS PRIETAS	G	2 7.4 7	VET 122 (GVE)	2 6.1 7	VET 122 (GVE)
LAUCHAPAN	GVE	7 0.6 2	VET 222	5 4.8 2	VET 222
MATAMBA	GVE	7 8.5 1	VET 222	1 0 5.9 3	Univariada GVE
MONTE ROSA	GVE	1 7 4.0 5	VET 222	1 8 5.0 7	Univariada (GVE)
PAPALQAPAN	GVE	3 0 5.6 2	VET 122 (GVE)	2 5 8.1 4	VET 122 (GVE)
QUIOTEPEC	GVE	8 6.9 0	VET 222 (GVE)	7 8.0 5	VET 222
STO. DOMINGO	GVE	1 1 7.0 5	VET 122 GVE	1 2 7.4 1	Univariada (GVE)
TEPEL MEME	GVE	2 0.7 1	VET 122 (GVE)	1 4.1 8	VET 122 (GVE)
TOMELLIN	G	2 4.3 6	VET 112 (G)	1 6.0 0	VET 112 (G)
TUXTEPEC	GVE	2 9 5.1 9	VET 112 (G)	2 3 0.7 7	VET 112 (G)
XIQUILA	G	3 1.4 9	VET III	2 8.4 5	VET III
ZAPOTE	GVE	6 3.8 8	VET 222	6 8.2 7	Univariada GVE

Tabla 5.4 Parámetros finales de la mejor distribución de las aproximaciones univariada y trivariada de valores extremos en las estaciones de la región B.

Estación	U N I V A R I A D A			T R I V A R I A D A		
	Ubicación	Escala	Forma	Ubicación	Escala	Forma
ACHOTAL	497.03	136.92	0.00	503.79	126.42	0.00
AMAPA	110.71	40.70	0.27	112.24	44.13	0.33
ANGEL R. CABADAS	143.36	90.75	-0.05	153.27	112.45	0.00
APOALA	38.94	35.68	-0.57	39.13	35.55	-0.55
AXUSCO	49.22	22.98	-0.17	53.02	37.06	0.00
AZUETA	832.58	153.28	0.00	843.13	181.76	0.00
BELLACO	526.98	113.41	-0.33	539.37	121.45	-0.32
CALAPILLA	81.56	57.65	-0.28	90.48	83.26	-0.49
CANTON	1926.15	639.61	0.00	1853.14	719.22	-0.02
CUATOTOLAPAN	687.30	118.12	-0.93	689.90	126.72	-1.06
CUICHAPA	221.56	53.15	-0.57	220.08	57.46	-0.64
DOMINGUILLO	25.77	11.89	-0.89	25.81	12.27	-0.95
JACATEPEC	1205.94	300.89	-0.30	1230.95	364.08	-0.16
LA ANGOSTURA	213.17	92.07	0.00	213.79	106.11	0.15
LA ESTRELLA	1197.07	290.49	0.00	1190.46	289.67	0.00
LA JUNTA	332.87	153.30	-0.56	341.21	167.14	-0.58
LAS PRIETAS	214.52	120.58	0.00	219.48	130.06	0.07
LAUCHAPAN	339.48	160.69	-0.09	341.30	172.68	-0.16
MATAMBA	212.22	127.40	-0.40	237.96	128.32	-0.23
MONTE ROSA	838.49	268.34	-0.31	890.79	339.10	-0.03
PAPALO APAN	3396.98	908.53	-0.13	3418.76	965.51	-0.12
QUIOTEPEC	341.08	187.57	-0.13	328.15	179.13	-0.21
STO. DOMINGO	684.39	251.35	-0.23	695.08	262.35	-0.13
TEPELMEME	140.31	36.40	-0.27	144.69	39.95	-0.42
TOMELLIN	109.86	68.71	0.00	109.22	84.94	0.00
TUXTEPEC	2924.17	353.37	-0.32	3011.29	581.69	0.00
XIQUILA	231.05	102.21	0.00	241.54	110.99	0.00
ZAPOTE	480.54	144.19	-0.26	461.68	133.48	-0.35

114

### 5.3 LIMITES DE CONFIANZA DE EVENTOS DE DISEÑO

El análisis de frecuencias de gastos máximos anuales es usado para proveer la magnitud y frecuencia de eventos de diseño con el fin de definir las llanuras de inundación, el tamaño de las estructuras hidráulicas, y sirve como ayuda en la planeación y manejo de las cuencas hidrológicas. Los eventos de diseño pueden ser definidos analíticamente usando funciones de distribución de probabilidad, pero sus correspondientes límites de confianza no se obtienen tan fácilmente.

Los límites de confianza son usados para estimar las incertidumbres asociadas con la determinación de los eventos de diseño para períodos de retorno específico.

Puesto que una distribución de frecuencia es únicamente un estimado de la muestra de cierta población, es probable que otra muestra de igual longitud de la misma corriente, pero tomada en diferente tiempo, produjera una diferente curva de frecuencias. Los límites de confianza o más correctamente, los intervalos de confianza, definen el rango dentro del cual estas curvas de frecuencias son esperadas a ubicarse con cierto nivel de confianza.

Antes de determinar los límites de confianza se obtendrán los eventos de diseño. En caso de que una estación tenga distribución Gumbel, los valores de diseño son calculados por la expresión:

$$\hat{Q}_T = \hat{U} - \hat{\alpha} \ln ( \ln T - \ln ( T - 1 ) ) \quad ( 5.6 )$$

donde:

$\hat{Q}_T$  es el gasto asociado con T años de periodo de retorno  
 $\hat{u}, \hat{\alpha}$  son los estimadores de máxima verosimilitud de los  
parámetros de ubicación y escala de la distribución  
Gumbel

Los eventos de diseño para la distribución general de valores  
extremos son calculados por:

$$\hat{Q}_T = \hat{u} + \frac{\hat{\alpha}}{\hat{\beta}} \left\{ 1 - \left( \text{Ln } T - \text{Ln} ( T - 1 ) \right)^{\hat{\beta}} \right\} \quad ( 5.7 )$$

donde:

$\hat{u}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}$  son los estimadores de máxima verosimilitud de los  
parámetros de la distribución GVE

Si se considera que los parámetros estimados están  
normalmente distribuidos (Sección 4.2), los límites de confianza  
pueden ser escritos como (Mood et al. 1974):

$$\text{LC} ( \hat{Q}_T ) = \hat{Q}_T \pm Z_{\alpha} \text{Var}_a ( \hat{Q}_T ) \quad ( 5.8 )$$

donde:

$\text{LC} ( \hat{Q}_T )$  es el límite de confianza superior o inferior para  
el valor del gasto  $\hat{Q}_T$  (m<sup>3</sup>/s)

$Z_{\alpha}$  es la variable normal estándar para un nivel de  
confianza  $\alpha$

$\text{Var}_a ( \hat{Q}_T )$  es la varianza asintótica del gasto  $\hat{Q}_T$

Las varianzas asintóticas univariadas de los eventos de  
diseño son calculados como (NERC, 1975):

a. Para la distribución Gumbel:

$$\text{Var}_a(\hat{Q}_T) = \text{Var}_a(\hat{u}) + 2 Y_T \text{Cov}_a(\hat{u}, \hat{\alpha}) + Y_T^2 \text{Var}_a(\hat{\alpha}) \quad (5.9)$$

donde:

$\text{Var}_a(\cdot)$  y  $\text{Cov}_a(\cdot)$  son las varianzas y covarianzas asintóticas de los parámetros de la distribución Gumbel, ya definidas en la ecuación (4.4)

$Y_T$  esta definida por:

$$Y_T = -\text{Ln}(\text{Ln } T - \text{Ln}(T-1)) \quad (5.10)$$

b. Para la distribución GVE:

$$\begin{aligned} \text{Var}_a(\hat{Q}_T) = & \text{Var}_a(\hat{u}) + 2 W \text{Cov}_a(\hat{u}, \hat{\alpha}) + W \text{Var}_a(\hat{\alpha}) + \\ & + \left[ \frac{dW^2}{d\hat{\beta}} \right] \text{Var}_a(\hat{\beta}) + 2 \frac{dW}{d\hat{\beta}} \left[ \text{Cov}_a(\hat{u}, \hat{\beta}) + \text{Cov}_a(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) W \right] \end{aligned} \quad (5.11)$$

donde:

$\text{Var}_a(\cdot)$  y  $\text{Cov}_a(\cdot)$  son las varianzas y covarianzas asintóticas de los parámetros de la distribución general de valores extremos definidas en la ecuación (4.6)

$W$  es la variable reducida GVE:

$$W = \frac{(1 - e^{-\hat{\beta} Y_T})}{\hat{\beta}} \quad (5.12)$$

y:

$$\frac{dW}{d\hat{\beta}} = \frac{(Y_T e^{-\hat{\beta} Y_T} - W)}{\hat{\beta}} \quad (5.13)$$

$Y_T$  esta definida por la ecuación 5.10 .

Las varianzas asintóticas trivariadas de los gastos de diseño son obtenidas de acuerdo al procedimiento propuesto por Boes (1983):

a. Se considera que los estimadores de los parámetros de las distribuciones trivariadas de valores extremos vienen de una distribución multivariada normal:

$$\begin{bmatrix} \hat{\theta}_1 \\ \vdots \\ \hat{\theta}_k \end{bmatrix} \sim NMV \left[ \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_k \end{bmatrix} ; I_n^{-1}(\underline{\theta}) \right] \quad (5.14)$$

donde:

$\hat{\theta}_i$  es la variable aleatoria que representa a cada estimador

$\theta_i$  representa el valor medio de  $\hat{\theta}_i$

$I_n^{-1}(\underline{\theta})$  representa la matriz de varianza covarianza de los estimadores de los parámetros de la distribución trivariada de valores extremos

b. Se encuentra la función de distribución de los valores de diseño dado que ellos son una función de los parámetros estimados. Así:

$$\begin{bmatrix} \xi_1(\hat{\theta}) \\ \vdots \\ \xi_r(\hat{\theta}) \end{bmatrix} \sim NMV \left[ \begin{bmatrix} \xi_1(\underline{\theta}) \\ \vdots \\ \xi_r(\underline{\theta}) \end{bmatrix} ; \underline{\xi} I_n^{-1}(\underline{\theta}) \underline{\xi}' \right] \quad (5.15)$$

donde:

$\xi_1(\hat{\theta})$  es la variable aleatoria que representa a los valores de diseño

$\xi_1(\hat{\theta})$  representa el valor medio de  $\xi_1(\hat{\theta})$

$\xi^{-1} I_n^{-1}(\hat{\theta}) \xi^{-1}$  representa la matriz de varianzas covarianzas de los valores de diseño

$\xi$  es un vector definido por la relación:

$$\xi = \left[ \frac{\partial \psi_1(\hat{\theta})}{\partial \theta_j} \right] \quad (5.16)$$

Para la distribución VET111  $\xi$  es el vector:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \begin{bmatrix} 1 & Y_T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \xi_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & Y_T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \xi_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & Y_T & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.17)$$

Para la distribución VET112  $\xi$  es:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \begin{bmatrix} 1 & Y_T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \xi_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & Y_T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \xi_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & f_3 & g_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.18)$$

donde:

$$f_3 = \frac{1 + Y_T^{\beta_3}}{\beta_3} \quad (5.19)$$

$$g_3 = \frac{\alpha_3}{\beta_3} Y_T e^{-\beta_3 Y_T} - \frac{\alpha_3}{\beta_3} (1 - e^{-\beta_3 Y_T}) \quad (5.20)$$

Para la distribución VET122  $\xi$  es:

$$\begin{aligned} \xi_{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & Y_T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \xi_{-2} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & f_2 & g_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \xi_{-3} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & f_3 & g_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.21)$$

donde:

$$f_2 = \frac{1 + Y_T^{\beta_2}}{\beta_2} \quad (5.22)$$

$$g_2 = \frac{\alpha_2}{\beta_2} Y_T e^{-\beta_2 Y_T} - \frac{\alpha_2}{\beta_2} (1 - e^{-\beta_2 Y_T}) \quad (5.23)$$

Para la distribución VET222  $\xi$  es:

$$\begin{aligned} \xi_{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & f_1 & g_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \xi_{-2} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & f_2 & g_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \xi_{-3} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & f_3 & g_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.24)$$



donde:

$$f_{\mathbf{r}} = \frac{1 + Y_{\mathbf{T}} \beta_1}{\beta_1} \quad ( 5.25 )$$

$$g_{\mathbf{r}} = \frac{\alpha_1}{\beta_1} Y_{\mathbf{T}} e^{-\beta_1 Y_{\mathbf{T}}} - \frac{\alpha_1}{\beta_1} ( 1 - e^{-\beta_1 Y_{\mathbf{T}}} ) \quad ( 5.26 )$$

Para obtener las varianzas de los valores de diseño se requiere realizar la multiplicación matricial  $\underline{\xi} \mathbf{I}^{-1} ( \hat{\underline{\theta}} ) \underline{\xi}'$  como se indica en la ecuación 5.15.

Los resultados obtenidos al resolver la ecuación 5.15 son aplicables únicamente a muestras grandes, ya que están basados en la matriz asintótica de varianzas covarianza de los parámetros.

Para demostrar su aplicación a muestras pequeñas se requiere del procedimiento planteado en la sección 4.6. Para esto, se obtendrán las varianzas de los valores de diseño mediante técnicas de muestreo distribucional, así mismo, los correspondientes límites al 95% de confianza, de acuerdo con la ecuación 4.34, para las condiciones propuestas en las secciones 4.6.1, 4.6.2, 4.6.3 y 4.6.4.

Los resultados son presentados en las Tablas E.1 a la E.16 del apéndice E.

De lo obtenido se confirma que los resultados asintóticos son aplicables a muestras de tamaño 20 para la distribución VET111; entre 20 y 40 para las distribuciones VET112 y VET122 y mayores de 40 para la distribución VET222.

En el apéndice F se presentan las tablas que contienen los límites al 95% de confianza univariados, bivariados (Raynal, 1985) y trivariados para eventos de diseño con período de retorno específico de las estaciones que tienen una ganancia significativa en información ( $I_r(\hat{\theta}_1) > 1$ ) de la región A.

#### 5.4 COMPARACION CON OTRAS DISTRIBUCIONES UNIVARIADAS

Los resultados de la sección 5.2 demuestran que la aplicación de las distribuciones trivariadas al análisis de frecuencias de gastos máximos representan, para los casos analizados, una mejor opción dentro del contexto de las distribuciones de valores extremos.

Con el propósito de determinar si las distribuciones trivariadas mejoran el ajuste proporcionado por otras distribuciones univariadas, disponibles en la práctica hidrológica, se realizó el siguiente análisis:

A los registros de gastos máximos anuales de las estaciones ubicadas en la región A, se les ajustaron diferentes funciones de distribución univariada (Normal, Lognormal con dos y tres parámetros, Gamma con dos y tres parámetros y LogPearson tipo III), a través de los métodos de momentos y máxima verosimilitud, y se eligió como la mejor a aquella que produjera el mínimo valor del error estándar, de acuerdo a la ecuación 5.1. La Tabla 5.5 presenta los parámetros de la distribución univariada elegida para cada una de las estaciones de la región A. Las características y propiedades de las distribuciones univariadas consideradas en

este análisis. pueden encontrarse en muchos libros de estadística ( Kite, 1977; Yevjevich, 1972; etc. ).

En la Tabla 5.6 se compara el valor del error estándar de ajuste para la mejor distribución univariada con el de la mejor distribución trivariada de valores extremos. adicionalmente, se selecciona la distribución final para cada estación. En esta tabla se observa que el 52% de los casos analizados son mejor ajustados a través de una distribución trivariada de valores extremos. por lo que este tipo de distribución representan una excelente alternativa en el análisis de frecuencias de gastos máximos anuales.

En la tabla 5.7 se muestran los eventos de diseño, para periodos de retorno específico. de la mejor distribución univariada y de la aproximación trivariada de valores extremos, para los casos en donde la distribución trivariada representó la mejor opción. Se puede observar que las diferencias en magnitud de los gastos calculados pueden ser significativas, incluso para pequeños periodos de retorno.

La comparación grafica se presenta en las Figuras D.50 a la D.58 del apéndice D.

Tabla 5.6 Parámetros de la distribución univariada con el mínimo error estándar en las estaciones de la región A

ESTACION	DISTRIBUCION UNIVARIADA	P A R A M E T R O S		
		UBICACION	ESCALA	FORMA
Acatitan	LN 3 (2)	285.89	1.11	6.02
Badiraguato	Gamma 2 (1)	-	1154.62	0.50
Chinipas	Gamma 2 (1)	-	335.49	2.88
Choix	LN 3 (1)	29.33	0.70	5.49
Guatenipa	Gamma 2 (1)	-	1118.90	1.87
Huites	Gamma 2 (1)	-	3526.62	0.88
Ixpalino	Gamma 2 (1)	-	1191.87	1.11
Jaina	LN 3 (2)	291.36	1.05	6.20
La Huerta	Gamma 2 (1)	-	394.08	2.09
Los Molinos	Normal	185.20	60.26	-
Naranja	LN 3 (2)	6.83	1.08	5.79
Palo Dulce	Gamma 2 (1)	-	1616.12	0.66
Piactla	Gamma 2 (1)	-	1775.55	0.79
Sn Francisco	LN 3 (2)	372.59	1.09	6.68
Sn Ignacio	Gamma 2 (1)	-	556.61	2.90
Santa Cruz	Gamma 2 (1)	-	1130.25	1.22
Tamazula	Gamma 3 (1)	192.36	177.39	2.06
Tecusiapa	LN 3 (2)	153.80	1.08	6.25
Toahayana	LN 3 (1)	-1928.99	0.19	7.96
Urique II	LN 2 (2)	5.49	0.62	-
Zopilote	Gamma 3 (1)	- 340.99	105.06	6.50

Distribuciones: Normal ; LN 2 y LN 3 = Lognormal con 2 y 3 parámetros; Gamma 2 = Gamma con dos parámetros ; Gamma 3 = Gamma con tres parámetros

Estimación de parámetros univariados: (1) = momentos  
(2) = máxima verosimilitud

Tabla 5.6

Errores estándar de la distribución univariada elegida y de la mejor opción trivariada para seleccionar la distribución final en las estaciones ubicadas en la región A.

ESTACION	DISTRIBUCION				
	UNIVARIADA		V E T		SELECCIONADA
	T I P O	E E	T I P O	E E	
Acatitan	LN 3 (2)	296.7	VET222	253.9	VET222
Badiraguato	Gamma 2 (1)	496.9	VET112 (GVE)	550.8	Gamma 2 (1)
Chinipas	Gamma 2 (1)	147.9	VET112 (G)	134.8	VET112 (G)
Choix	LN 3 (1)	71.2	VET222	58.8	VET222
Guatenipa	Gamma 2 (1)	361.7	VET112 (G)	378.9	Gamma 2 (1)
Huites	Gamma 2 (1)	1147.2	VET122 (GVE)	831.9	VET122 (GVE)
Ixpalino	Gamma 2 (1)	508.4	VET222	393.0	VET222
Jaina	LN 3 (2)	484.9	VET222	531.3	LN 3 (2)
La Huerta	Gamma 2 (1)	165.8	VET112 (GVE)	192.9	Gamma 2 (1)
Los Molinos	Normal	14.4	VET222	12.1	VET222
Naranja	LN 3 (2)	96.6	VET222	104.7	LN 3 (2)
Palo Dulce	Gamma 2 (1)	688.8	VET222	267.2	VET222
Piaxtla	Gamma 2 (1)	679.4	VET222	871.9	Gamma 2 (1)
Sn Francisco	LN 3 (2)	234.7	VET222	401.5	LN 3 (2)
Sn Ignacio	Gamma 2 (1)	321.3	VET122 (G)	328.8	Gamma 2 (1)
Santa Cruz	Gamma 2 (1)	502.5	VET222	259.6	VET222
Tamazula	Gamma 3 (1)	66.0	VET222	40.5	VET222
Tecusiapa	LN 3 (2)	207.7	VET122 (GVE)	212.1	LN 3 (2)
Toahayana	LN 3 (1)	136.9	VET122 (G)	120.9	VET122 (G)
Urique II	LN 2 (2)	68.9	VET222	70.3	LN 2 (2)
Zopilote	Gamma 3 (1)	43.2	VET112 (G)	37.2	VET112 (G)

EE = error estándar de ajuste

Distribuciones: Normal ; LN 2 y LN 3 = Lognormal con 2 y 3 parámetros; Gamma 2 = Gamma con dos parámetros ; Gamma 3 = Gamma con tres parámetros

Estimación de parámetros univariados: (1) = momentos  
(2) = máxima verosimilitud

Estación con distribución marginal: (G) = Gumbel  
(GVE) = general de valores extremos

Tabla 5.7 Eventos de diseño de la mejor distribución univariada y trivariada de valores extremos para las estaciones de la región A

ESTACION: CHINIPAS		D I S T R I B U C I O N	
		Gamma 2 (1)	VET112 (6)
PERIODO RETORNO T (años)		$\dot{Q}_T$ (M3/S)	$\dot{Q}_T$ (M3/S)
2		859.63	932.19
5		1383.21	1491.39
10		1726.60	1861.62
20		2049.57	2216.77
50		2458.44	2676.46
100		2759.14	3020.94
500		3440.80	3816.96
1000		3729.96	4159.18

ESTACION: CHOIX		D I S T R I B U C I O N	
		LN 3 (1)	VET222
PERIODO RETORNO T (años)		$\dot{Q}_T$ (M3/S)	$\dot{Q}_T$ (M3/S)
2		270.38	271.40
5		464.49	482.35
10		622.08	683.09
20		794.38	939.52
50		1048.80	1398.57
100		1263.81	1870.13
500		1847.73	3603.44
1000		2139.53	4756.41

ESTACION: HUITES		D I S T R I B U C I O N	
		Gamma 2 (1)	VET122 (6VE)
PERIODO RETORNO T (años)		$\dot{Q}_T$ (M3/S)	$\dot{Q}_T$ (M3/S)
2		2063.32	2035.56
5		4994.74	4311.24
10		7274.96	7130.92
20		9610.92	11585.88
50		12783.00	21764.65
100		15244.13	34944.03
500		21152.56	104526.10
1000		23776.33	167476.00

ESTACION: IXPALINO		D I S T R I B U C I O N	
		Gamma 2 (1)	VET222
PERIODO RETORNO T (años)		$\dot{Q}_T$ (M3/S)	$\dot{Q}_T$ (M3/S)
2		964.13	990.93
5		2097.91	1855.35
10		2943.09	2732.41
20		3791.44	3911.75
50		4924.85	6150.55
100		5793.64	8583.10
500		7852.97	18328.34
1000		8758.42	25319.40

ESTACION: LOS MOLINOS		D I S T R I B U C I O N	
		Normal	VET222
PERIODO RETORNO T (años)		$\dot{Q}_T$ (M3/S)	$\dot{Q}_T$ (M3/S)
2		185.20	188.91
5		235.90	248.52
10		262.43	270.39
20		284.33	286.36
50		308.98	300.19
100		325.40	307.12
500		358.65	316.40
1000		371.42	318.62

ESTACION: PALO DULCE		D I S T R I B U C I O N	
		Gamma 2 (1)	VET222
PERIODO RETORNO T (años)		$\dot{Q}_T$ (M3/S)	$\dot{Q}_T$ (M3/S)
2		618.76	560.24
5		1747.87	1246.99
10		2679.78	2419.88
20		3661.08	4831.67
50		5022.53	12315.96
100		6095.58	25185.93
500		8713.97	133752.90
1000		9891.40	274898.40

ESTACION: SANTA CRUZ	D I S T R I B U C I O N	
	Gamma 2 (1)	VET222
PERIODO RETORNO T (años)	$\bar{Q}_T$ (M3/S)	$\bar{Q}_T$ (M3/S)

2	1032.09	1039.83
5	2163.43	1913.64
10	2994.04	2850.21
20	3821.57	4166.19
50	4920.55	6793.55
100	5759.15	9788.56
500	7737.41	22714.77
1000	8603.96	32601.43

ESTACION: TAMAZULA	D I S T R I B U C I O N	
	Gamma 3 (1)	VET222
PERIODO RETORNO T (años)	$\bar{Q}_T$ (M3/S)	$\bar{Q}_T$ (M3/S)

2	502.55	501.89
5	736.89	774.95
10	896.55	1005.44
20	1049.74	1273.07
50	1246.97	1702.87
100	1393.95	2100.53
500	1731.97	3348.99
1000	1877.05	4069.15

ESTACION: ZOPILOTE	D I S T R I B U C I O N	
	Gamma 3 (1)	VET112 (G)
PERIODO RETORNO T (años)	$\bar{Q}_T$ (M3/S)	$\bar{Q}_T$ (M3/S)

2	307.91	305.22
5	551.00	558.46
10	699.46	726.13
20	833.75	886.96
50	998.13	1095.14
100	1115.79	1251.14
500	1374.63	1811.63
1000	1481.72	1766.61



## CAPITULO 6

### CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

#### **Conclusiones**

El desarrollo de la aproximación trivariada amplía el conocimiento de las funciones de distribución de probabilidad de valores extremos.

Se demostró, a través del contenido de información relativa (relación entre las varianzas de dos estimadores de un parámetro), que el uso de las distribuciones trivariadas pueden mejorar la estimación de parámetros de distribuciones de valores extremos.

En general, los contenidos de información de las series más cortas aumentan conforme el tamaño de la muestra más larga se incrementa. Por lo que existe una ganancia en precisión en la obtención de parámetros de muestras cortas, cuando se utiliza una muestra más larga. En forma similar, hay una ganancia en información, para la serie más larga, cuando la información de las tres estaciones es utilizada. Sin embargo, conforme la muestra más larga se incrementa, relativo a las series más cortas, la información decrece hasta el punto en que la relación de información llega a ser menor que uno. En tales casos, ya no es recomendable utilizar las series con registro corto para estimar los parámetros de la serie más larga.

De acuerdo a los experimentos de muestreo distribucional se concluye que los resultados asintóticos pueden ser aplicables a muestras pequeñas, del orden de 20 para la distribución VET111;

entre 20 y 40 para las distribuciones VET112 y VET122 y mayor de 40 para la distribución VET222.

El ajuste proporcionado por las distribuciones trivariadas de valores extremos resultó ser, para un buen número de los casos analizados (75% con respecto a las distribuciones univariada y bivariada de valores extremos y el 52% con referencia a las distribuciones univariadas Normal, Lognormal, Gamma y Log-Pearson tipo III ) y de acuerdo al criterio de selección propuesto, la mejor opción entre los modelos en competencia, por lo que representan una buena alternativa para reducir la incertidumbre en la estimación de frecuencias de gastos máximos anuales.

Como los límites de confianza son función de las varianzas asintóticas de los parámetros, y estas son mejor estimadas por la aplicación de la aproximación trivariada, se demostró que cuando los contenidos de información relativa son más grandes que uno, los límites de confianza son más estrechos en comparación con los obtenidos por las aproximaciones univariada y bivariada de valores extremos.

### **Recomendaciones**

Es recomendable la aplicación de las distribuciones trivariadas en el caso de que la muestra analizada tenga una longitud relativamente corta.

Para evitar obtener un óptimo local, en el procedimiento de obtención de parámetros trivariados, se recomienda que los valores de arranque del procedimiento propuesto sean los estimadores

univariados de los parámetros de ubicación, escala y forma. Con respecto a los parámetros de asociación bivariada y trivariada, se recomienda utilizar el valor de 2 en ambos casos.

El análisis trivariado de gastos máximos anuales puede extenderse al estudio de sequías (gastos mínimos anuales). Para ello se deberá utilizar el principio de simetría (Gumbel, 1958):

$$F(x)_{\min} = 1 - F(-x)_{\max}$$

Se recomienda el empleo de las distribuciones trivariadas de valores extremos para el análisis de lluvias. El proceso que se sigue para este análisis es similar al descrito para el análisis de gastos, solo que en este caso se trabaja con dos variables, la altura de lluvia  $h_p$  y su duración  $d$ .

Por lo anterior, para definir una cierta distribución de probabilidades de alguna de las dos variables, se deberá considerar constante una de ellas para definir a la otra.

Puesto que hay una ganancia significativa en información, usando distribuciones trivariadas, se puede conjeturar que se obtendrán mayores ganancias mediante la generalización del caso trivariado al multivariado general.

## REFERENCIAS

- Anderson, T. W., " Maximum Likelihood Estimates for a Multivariate Normal Distribution when some Observations are Missing ". Journal of the American Statistical Association. Vol. 52, pp. 220-223. 1957.
- Beard, L. R., " Statistical Methods in Hydrology ". U. S. Army Engineer District. Corps of Engineers. Sacramento, Cal. 1962.
- Boes, D. C., " Class Notes for ST530 Mathematical Statistics " . Department of Statistics, Colorado State University. 1983.
- Bortkiewicz, L., Von. " Variationsbreite und Mittlerer Fehler". Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft, 21 .3-11.1922.
- Carnahan, B. et al., " Applied Numerical Methods ". John Wiley and Sons. 604 p. 1969.
- Clarke, R. T., "Bivariate Gamma Distributions for Extending Annual Streamflow Records from Precipitation: Some Large Sample Results". Water Resources Research. Vol. 16, No. 5, pp. 863-870. 1980.
- Cunnane, C. " Methods and Merits of Regional Flood Frequency Analysis". Journal of Hydrology. Vol 100, No. 1-4, pp.269-290., 1988.
- Dodd, E. L., " The Greatest and the Least Variate Under General Laws of Error ". Transactions of the American Mathematical Society ". 25: p. 525. 1923
- Finkelstein, B. V., " On the Limiting Distributions of the Extreme Terms of a Variational Series of a two-dimensional random quantity ". Doklady Akad. S.S.S.R. 91, No. 2. p. 209. 1953.
- Fisher, R. A. and Tippett, L. H. C., " Limiting Forms of the Frequency Distribution of the Largest or Smallest Member of a Sample ". Proc. of the Cambridge Philosophical Society. Vol. XXIV. Part II. pp. 180-190. 1928.
- Fréchet, M., " Sur la Loi de Probabilite de l'ecart Maximum ". Annales de la Societe Plonaise de Mathematique. Cracovie. Vol. 6. pp. 93-116. 1927.
- Galambos, J., " Order Statistics of Sample from Multivariate Distributions ". Journal of the American Statistical Association. Vol. 70, pp. 674-680. 1975.
- Galambos, J., " The Asymptotic Theory of Extreme Order Statistics" John Wiley and Sons. 352 p. 1978.

- Gnedenko, B. U., " Sur la distribution limite du terme maximum d'une serie aleatoire ", Ann. Math.. Vol 44, pp. 423-453. 1943.
- Gumbel, E. J., " La Duree Extreme de la Vie Humaine ", Actualites Scientifiques et Industrielles. Paris: Herman et Cie. 1937.
- Gumbel, E. J., " The Return Period of Flood Flows ", Annals of Mathematical Statistics. Vol. 12, pp. 183-190, 1941.
- Gumbel, E. J., " On the Plotting of Flood Discharges ", Transactions of the American Geophysical Union. Vol. 25, pp. 699-719. 1944.
- Gumbel, E. J., " Floods Estimated by Probability Methods ", Engineering News Record. Vol. 134, pp. 97-101. 1945.
- Gumbel, E. J., " The Distribution of the Range ", Annals of Mathematical Statistics. Vol. 18, pp. 384-412. 1947.
- Gumbel, E. J., " Statistical Theory of Droughts ", Proceedings American Society of Civil Engineers. Vol. 80, No. 439. 1954.
- Gumbel, E. J., " Statistics of Extremes ", Columbia University Press. 375 p. 1958.
- Gumbel, E. J., " Multivariate Distributions with Given Margins ", Revista da Faculdade de Ciencias. 2 Serie A. Vol. II, No. 2. pp. 178-218. 1959.
- Gumbel, E. J., " Multivariate Distributions with Given Margins and Analytical Examples ", Bulletin of the International Statistical Institute. Vol. 37, No. 3. pp. 363-373. 1960a.
- Gumbel, E. J., " Distributions des Valeurs Extremes en Plusieurs Dimensions ", Publications de L'Institute de Statistique. Vol. 9, pp. 171-173. 1960b.
- Gumbel, E. J., " Statistical Theory of Extreme Values (Main Results) ", Chapter 6, Contribution to Order Statistics, Sarhan, A. S. and Greenberg, B. G., editors, pp. 59-93. John Wiley and Sons. 1962.
- Gumbel, E. J. y Mustafi, C. K., " Some Analytical Properties of Bivariate Extremal Distributions ", Journal of the American Statistical Association. Vol. 62, pp. 569-589. 1967.
- Haan, C. T., " Statistical Methods in Hydrology ", The Iowa State University Press, 378 p. 1977.
- Jenkinson, A. F., " The Frequency Distribution of the Annual Maximum (or Minimum) Values of Metereological Elements", Quaterly Journal of the Royal Metereological Society. Vol 87, pp. 158-171. 1955.

- Jenkinson, A. F., " Estimation of Maximum Floods ", Chapter 5, World Meteorological Organization Technical. Note 98. pp. 183-227. 1969.
- Kendall, M. G. y Stuart, A., " The Advanced Theory of Statistics " 4th. Ed. Vol. 2, Macmillan. 748 p. 1979.
- Kimball, B. F., " An Aproximation to the Sampling Variances of an Estimated Maximum Value of Given Frequency Based on the Fit of the Doubly Exponential Distribution of Maximum Values ", Annals of Mathematical Statistics. Vol. 20, pp. 110-113. 1949.
- Kite, G. W., " Frequency and Risk Analyses in Hydrology ", Water Resources Publications, Fort Collins, Colorado. 1977.
- Kleijnen, J. P. C., " Statistical Techniques in Simulation ". Parte 1. Marcel Dekker Inc. 285 p. 1974.
- Kuester, J. L. y Mize, J. H., " Optimization Techniques with Fortran ". McGraw-Hill Book Co. 500 p. 1973.
- Mood, A. M., Graybill, F. y Boes, D. C., " Introduction to the Theory of Statistics ", McGraw-Hill Inc. Third Edition. 564 p. 1974.
- Natural Environment Research Council, " Flood Studies Report ". Vol 1. pp. 41-52 y 81-97. 1975.
- O'Hara, H. y Smith, F. J., " The Evaluation of the Definite Integrals by Interval Subdivision", Computer Journal. Vol. 12. 1980.
- Raynal, J. A., " Parameter Estimation Efficiency in Extreme Value Distributions Type I and II ", Report of a Special Study, Civil Engineering Department, Colorado State University. 1982.
- Raynal, J. A., " Bivariate Extreme Value Distributions Applied to Flood Frequency Analysis ". PhD dissertation, Colorado State University. Fort Collins, Colorado, USA. 1985.
- Raynal, J. A. y Salas, J. D., " Multivariate Extreme Value Distributions in Hydrological Analyses ", Proceedings of the Rome Symposium, April 1987. IAHS Publications. No. 164. pp. 111-119. 1987a.
- Raynal, J. A. y Salas, J. D., " A Probabilistic Model for Flooding Downstream of the Junction of two rivers ", Hydrological Frequency Modeling. Reidel Publishing Company. pp. 595-602. 1987b.

- Raynal, J. A. y Escalante, C. A., " FLODRO: A User Friendly Personal Computer Package for Flood and Drought Frequency Analyses Education and Training ", Proc. International Symposium on Hydrology and Water Resources. 1991.
- Rosenbrock, H. H., " An Automatic Method for Finding the Greatest or Least Value of a Function ". Computer Journal. Vol. 3. pp.175-184. 1960.
- Rueda, E., " Transfer of Information for Flood Related Variables " M. Sc. Thesis. Civil Engineering Department, Colorado State University. 112 p. Spring 1981.
- Salas J. D., " Transfer of Information to Improve Estimates of Flood Frequencies". Chapter 17 in Hydrology for Transportation Engineers ". Ed. T. G. Sanders. U. S. Dept. of Transportation. pp. 592-653. 1980.
- Stroud, A. H. y Secrest, D., " Gaussian Quadrature Formulas ". Prentice Hall. 374 p. 1968.
- Stroud, A. H., " Approximate Calculation of Multiple Integrals ". Prentice Hall. 431 p. 1971.
- Takahashi, R., " Some Properties of Multivariate Extreme Value Distributions and Multivariate Equivalence ". Ann. Inst. Statist. Math. Vol. 39, Part A. pp. 637-647. 1987.
- Takahashi, R., " Characterizations of a Multivariate Extreme Value Distribution ". Adv. Appl. Prob. Vol. 20. pp. 235-236. 1988.
- Tiago de Oliveira, J., " Extremal Distributions ", Revista Faculdade de Ciencias. 2 Serie A. Vol. 7. Universidade de Lisboa, Lisboa, Portugal. pp. 219-228. 1958.
- Tiago de Oliveira, J., " Bivariate Extremes; Extensions ", Proc. of the 40th. Session. Bulletin of the International Statistical Institute. Vol. 46, Book 2. pp. 241-251. 1975a.
- Tiago de Oliveira, J., " Bivariate and Multivariate Extreme Distributions". Statistical Distributions in Scientific Work. Vol. 1. G. P. Patil et al. editors. D. Reidel Publishing. Company. pp. 355-361. 1975b.
- Tiago de Oliveira, J., " Bivariate Extremes; Models and Statistical Decision ". Technical Report No. 14. Center for Stochastic Processes, Department of Statistics, University of North Carolina, at Chapel Hill. June 1982.
- Tippet, L. H. C., " On the Extreme Individuals and the Range of Sample taken from a Normal Distribution ", Biometrika. Vol. 17, Parts 3 and 4. pp. 364-387. 1925.

- Von Mises R., "Über die Variationsbreite einer Beobachtungsreihe"  
Berliner Math gesellschaft. t.22. p. 3. 1923.
- Von Mises R., " La distribution de la plus grande de n valeurs ",  
Rev. Math de L'Union Interbalkanique. Athens. No. 1, pp.  
1-20. 1936.
- Weibull. W., " The Phenomenon of Rupture in Solids ", Ingenior  
Vetenskaps Akademiens Handlingar. Vol. 153. p. 2. 1939.
- Yevjevich. V., " Probability and Statistics in Hydrology ", Water  
Resources Publications. 302 p. 1972.



**APENDICE A**

DERIVADAS PARCIALES DE PRIMER ORDEN DE LAS FUNCIONES DE VEROSIMILITUD LOGARITMICA PARA LAS DISTRIBUCIONES TRIVARIADAS DE VALORES EXTREMOS ( MODELO LOGISTICO TRIVARIADO ).

A. DISTRIBUCION TRIGUMBEL (VET111)

$$\begin{aligned} \frac{\partial LL(x,y,z,\theta)}{\partial u_k} = & I_1 \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial}{\partial u_k} \left[ - \ln \alpha_p - \left( \frac{p_i - u_p}{\alpha_p} \right) - \right. \right. \\ & \left. \left. \exp \left( - \left( \frac{p_i - u_p}{\alpha_p} \right) \right) \right] \right\} + I_2 \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial}{\partial u_k} \left[ - \left( \ln \alpha_p + \ln \alpha_q \right) \right. \right. \\ & - m_{b_1} \left( \frac{p_i - u_p}{\alpha_p} \right) - m_{b_1} \left( \frac{q_i - u_q}{\alpha_q} \right) + \ln \left( \exp \left( - m_{b_1} \left( \frac{p_i - u_p}{\alpha_p} \right) \right) + \right. \\ & + \exp \left( - m_{b_1} \left( \frac{q_i - u_q}{\alpha_q} \right) \right) \left. \right)^{\frac{1}{m_{b_1}} - 2} + \ln \left( m_{b_1} - 1 \right) + \left( \exp \left( - m_{b_1} \left( \frac{p_i - u_p}{\alpha_p} \right) \right) \right) + \\ & + \exp \left( - m_{b_1} \left( \frac{q_i - u_q}{\alpha_q} \right) \right) \left. \right)^{\frac{1}{m_{b_1}}} - \left( \exp \left( - m_{b_1} \left( \frac{p_i - u_p}{\alpha_p} \right) \right) \right) + \\ & + \exp \left( - m_{b_1} \left( \frac{q_i - u_q}{\alpha_q} \right) \right) \left. \right)^{\frac{1}{m_{b_1}}} \left. \right\} + \frac{I_3}{\alpha_k} \sum_{t=1}^n \left\{ \text{FACTOR} \cdot \right. \\ & \left[ \frac{\left( 1 - 3m_t \right) - A^{\frac{1}{m_t}}}{A} + \frac{2}{A} \frac{A^{\frac{2}{m_t} - 1}}{A^{\frac{1}{m_t} - 1}} + \frac{\left( 3m_t - 3 \right) A^{\frac{1}{m_t} - 1}}{B} \right] \left. \right\} + \\ & + I_4 \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial}{\partial u_k} \left[ - \left( \ln \alpha_r + \ln \alpha_s \right) - m_{b_2} \left( \frac{r_i - u_r}{\alpha_r} \right) - m_{b_2} \left( \frac{s_i - u_s}{\alpha_s} \right) \right. \right. \\ & + \ln \left( \exp \left( - m_{b_2} \left( \frac{r_i - u_r}{\alpha_r} \right) \right) + \exp \left( - m_{b_2} \left( \frac{s_i - u_s}{\alpha_s} \right) \right) \right)^{\frac{1}{m_{b_2}} - 2} + \\ & + \ln \left( m_{b_2} - 1 \right) + \left( \exp \left( - m_{b_2} \left( \frac{r_i - u_r}{\alpha_r} \right) \right) \right) + \exp \left( - m_{b_2} \left( \frac{s_i - u_s}{\alpha_s} \right) \right) \left. \right)^{\frac{1}{m_{b_2}}} - \left. \right\} \end{aligned}$$

$$- \left( \exp \left( - m_{b_2} \left( \frac{r_i - u_r}{\alpha_r} \right) \right) + \exp \left( - m_{b_2} \left( \frac{s_i - u_s}{\alpha_s} \right) \right) \right)^{1/m_{b_2}} \Bigg\} +$$

$$+ I_5 \sum_{i=1}^{n_5} \left\{ \frac{\partial}{\partial u_k} \left[ - \ln \alpha_r - \left( \frac{r_i - u_r}{\alpha_r} \right) - \exp \left( - \left( \frac{r_i - u_r}{\alpha_r} \right) \right) \right] \right\}$$

donde:

$$k = 1, 2, 3$$

$$\text{para } k = 1 \quad \text{FACTOR} = m_l + \exp \left( - m_l \left( \frac{x_i - u_1}{\alpha_1} \right) \right)$$

$$\text{para } k = 2 \quad \text{FACTOR} = m_l + \exp \left( - m_l \left( \frac{y_i - u_2}{\alpha_2} \right) \right)$$

$$\text{para } k = 3 \quad \text{FACTOR} = m_l + \exp \left( - m_l \left( \frac{z_i - u_3}{\alpha_3} \right) \right)$$

$$A = \exp \left( - m_l \left( \frac{x_i - u_1}{\alpha_1} \right) \right) + \exp \left( - m_l \left( \frac{y_i - u_2}{\alpha_2} \right) \right) + \exp \left( - m_l \left( \frac{z_i - u_3}{\alpha_3} \right) \right)$$

$$B = (1 - m_l) (1 - 2m_l) + A^{2/m_l} + (3m_l - 3) A^{1/m_l}$$

$$\frac{\partial \text{LLC}(x, y, z, \theta)}{\partial \alpha_k} = I_1 \sum_{i=1}^{n_1} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha_k} \left[ - \ln \alpha_p - \left( \frac{p_i - u_p}{\alpha_p} \right) - \exp \left( - \left( \frac{p_i - u_p}{\alpha_p} \right) \right) \right] \right\} + I_2 \sum_{i=1}^{n_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha_k} \left[ - \left( \ln \alpha_p + \ln \alpha_q \right) - m_{b_1} \left( \frac{p_i - u_p}{\alpha_p} \right) - m_{b_1} \left( \frac{q_i - u_q}{\alpha_q} \right) + \ln \left( \exp \left( - m_{b_1} \left( \frac{p_i - u_p}{\alpha_p} \right) \right) + \right. \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \exp\left(-m_{b_1} \left(\frac{q_i - u_q}{\alpha_q}\right)\right)^{1/m_{b_1} - 2} + \ln(m_{b_1} - 1) + \left(\exp\left(-m_{b_1} \left(\frac{p_i - u_p}{\alpha_p}\right)\right)\right) + \\
& + \exp\left(-m_{b_1} \left(\frac{q_i - u_q}{\alpha_q}\right)\right)^{1/m_{b_1}} - \left(\exp\left(-m_{b_1} \left(\frac{p_i - u_p}{\alpha_p}\right)\right)\right) + \\
& + \exp\left(-m_{b_1} \left(\frac{q_i - u_q}{\alpha_q}\right)\right)^{1/m_{b_1}} \left. \right\} + \frac{I_B}{\alpha_k} \sum_{i=1}^n \left\{ \text{FACTOR} \cdot \right. \\
& \left. \left[ \frac{(1 - 3m_l) - A^{1/m_l}}{A} + \frac{2 A^{2/m_l - 1} + (3m_l - 3) A^{1/m_l - 1}}{B} \right] \right\} + \\
& + I_4 \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha_k} \left[ -(\ln \alpha_r + \ln \alpha_s) - m_{b_2} \left(\frac{r_i - u_r}{\alpha_r}\right) - m_{b_2} \left(\frac{s_i - u_s}{\alpha_s}\right) + \right. \right. \\
& + \ln\left(\exp\left(-m_{b_2} \left(\frac{r_i - u_r}{\alpha_r}\right)\right) + \exp\left(-m_{b_2} \left(\frac{s_i - u_s}{\alpha_s}\right)\right)\right)^{1/m_{b_2} - 2} + \\
& + \ln(m_{b_2} - 1) + \left(\exp\left(-m_{b_2} \left(\frac{r_i - u_r}{\alpha_r}\right)\right) + \exp\left(-m_{b_2} \left(\frac{s_i - u_s}{\alpha_s}\right)\right)\right)^{1/m_{b_2}} - \\
& \left. \left. - \left(\exp\left(-m_{b_2} \left(\frac{r_i - u_r}{\alpha_r}\right)\right) + \exp\left(-m_{b_2} \left(\frac{s_i - u_s}{\alpha_s}\right)\right)\right)^{1/m_{b_2}} \right] \right\} + \\
& + I_5 \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha_k} \left[ -\ln \alpha_r - \left(\frac{r_i - u_r}{\alpha_r}\right) - \exp\left(-\left(\frac{r_i - u_r}{\alpha_r}\right)\right) \right] \right\}
\end{aligned}$$

donde:

$$k = 1, 2, 3$$

para  $k = 1$

$$\text{FACTOR} = -1 + m_l \left(\frac{x_i - u_1}{\alpha_1}\right) + m_l \left(\frac{x_i - u_2}{\alpha_1}\right) \exp\left(-m_l \left(\frac{x_i - u_1}{\alpha_1}\right)\right)$$

para  $k = 2$

$$\text{FACTOR} = -1 + m_t \left( \frac{y_i - u_z}{\alpha_z} \right) + m_t \left( \frac{y_i - u_z}{\alpha_z} \right) \exp\left(-m_t \left( \frac{y_i - u_z}{\alpha_z} \right)\right)$$

para  $k = 3$

$$\text{FACTOR} = -1 + m_t \left( \frac{z_i - u_a}{\alpha_a} \right) + m_t \left( \frac{z_i - u_a}{\alpha_a} \right) \exp\left(-m_t \left( \frac{z_i - u_a}{\alpha_a} \right)\right)$$

$$A = \exp\left(-m_t \left( \frac{x_i - u_x}{\alpha_x} \right)\right) + \exp\left(-m_t \left( \frac{y_i - u_z}{\alpha_z} \right)\right) + \exp\left(-m_t \left( \frac{z_i - u_a}{\alpha_a} \right)\right)$$

$$B = (1 - m_t) (1 - 2m_t) + A^{2/m_t} + (3m_t - 3) A^{1/m_t}$$

Para la asociación bivariada VEB11 (Bigumbel)

$$\frac{\partial LL(x, y, z, \theta)}{\partial m_{b_k}} = I_j \left\{ \sum_{i=1}^{n_j} \left[ - \left( \frac{v_i - u_v}{\alpha_v} \right) - \left( \frac{w_i - u_w}{\alpha_w} \right) - \frac{1}{m_{b_k}^2} \ln B - \left( \frac{1}{m_{b_k}} - 2 \right) C + \left\{ 1 - B^{1/m_{b_k}} \left[ \frac{1}{m_{b_k}^2} \ln B + \frac{1}{m_{b_k}} C \right] \right\} / D + B^{1/m_{b_k}} \left[ \frac{1}{m_{b_k}^2} \ln B + \frac{1}{m_{b_k}} C \right] \right] \right\}$$

donde:

$$k = 1, 2 \quad ; \quad j = 2, 4$$

$$A = \left( \frac{v_i - u_v}{\alpha_v} \right) \exp\left(-m_{b_k} \left( \frac{v_i - u_v}{\alpha_v} \right)\right) + \left( \frac{w_i - u_w}{\alpha_w} \right) \exp\left(-m_{b_k} \left( \frac{w_i - u_w}{\alpha_w} \right)\right)$$

$$B = \exp\left(-m_{b_k} \left( \frac{v_i - u_v}{\alpha_v} \right)\right) + \exp\left(-m_{b_k} \left( \frac{w_i - u_w}{\alpha_w} \right)\right)$$

$$C = A / B$$

$$D = (m_{b_k} - 1) + B^{1/m_{b_k}}$$

v y w pueden ser p, q, r, s según corresponda.

$$\begin{aligned} \frac{\partial LL(x, y, z, \theta)}{\partial m_t} &= I_3 \left\{ \sum_{i=1}^{n_3} \left[ - \left( \frac{x_i - u_1}{\alpha_1} \right) - \left( \frac{y_i - u_2}{\alpha_2} \right) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left( \frac{z_i - u_3}{\alpha_3} \right) + \left( \frac{1}{m_t} - 3 \right) C - \frac{1}{m_t^2} \text{Ln } B + \right. \\ &+ \left. \left[ (2m_t - 2) + (2m_t - 1) + \left\{ B^{2/m_t} \left[ \frac{2}{m_t} C - \frac{2}{m_t^2} \text{Ln } B \right] \right\} + \right. \right. \\ &+ \left. \left. (3m_t - 3) \left\{ B^{1/m_t} \cdot \left[ \frac{1}{m_t} C - \frac{1}{m_t^2} \text{Ln } B \right] \right\} + 3 B^{1/m_t} \right] / D \right. \\ &\left. - B^{1/m_t} \cdot \left[ \frac{1}{m_t} C - \frac{1}{m_t^2} \text{Ln } B \right] \right\} \end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned} A &= - \left( \frac{x_i - u_1}{\alpha_1} \right) \exp \left( - m_t \left( \frac{x_i - u_1}{\alpha_1} \right) \right) - \left( \frac{y_i - u_2}{\alpha_2} \right) \exp \left( - m_t \left( \frac{y_i - u_2}{\alpha_2} \right) \right) \\ &\quad - \left( \frac{z_i - u_3}{\alpha_3} \right) \exp \left( - m_t \left( \frac{z_i - u_3}{\alpha_3} \right) \right) \end{aligned}$$

$$B = \exp \left( - m_t \left( \frac{x_i - u_1}{\alpha_1} \right) \right) + \exp \left( - m_t \left( \frac{y_i - u_2}{\alpha_2} \right) \right) + \exp \left( - m_t \left( \frac{z_i - u_3}{\alpha_3} \right) \right)$$

$$C = A / B$$

$$D = (1 - m_t) (1 - 2m_t) + B^{2/m_t} + (3m_t - 3) B^{1/m_t}$$

B. DISTRIBUCION BIGUMBEL-GVE (VET112)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \text{LL}(x,y,z,\theta)}{\partial u_k} &= I_1 \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial}{\partial u_k} \left[ \text{Ln } f(p_i \cdot \underline{e}_1) \right] \right\} + \\ &+ I_2 \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial}{\partial u_k} \left[ \text{Ln } f(p_i \cdot q_i \cdot \underline{e}_2) \right] \right\} + \\ &+ \frac{I_3}{\alpha_k} \sum_{i=1}^n \left\{ \text{FACTOR} \cdot \right. \\ &\left. \left[ \frac{(1 - 3m_t) - A^{1/m_t}}{A} + \frac{2 A^{2/m_t - 1} + (3m_t - 3) A^{1/m_t - 1}}{B} \right] \right\} + \\ &+ I_4 \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial}{\partial u_k} \left[ \text{Ln } f(r_i \cdot s_i \cdot \underline{e}_4) \right] \right\} + \\ &+ I_5 \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial}{\partial u_k} \left[ \text{Ln } f(r_i \cdot \underline{e}_5) \right] \right\} \end{aligned}$$

donde:

$$k = 1, 2, 3$$

$$\text{para } k = 1 \quad \text{FACTOR} = m_t + \exp \left( -m_t \cdot \frac{x_i - u_1}{\alpha_1} \right)$$

$$\text{para } k = 2 \quad \text{FACTOR} = m_l + \exp\left(-m_l \left(\frac{y_l - u_2}{\alpha_2}\right)\right)$$

$$\text{para } k = 3 \quad \text{FACTOR} = \frac{(m_l - \beta_3)}{1 - \left(\frac{z_l - u_3}{\alpha_3}\right)^{\beta_3}} + \left(1 - \left(\frac{z_l - u_3}{\alpha_3}\right)^{\beta_3}\right)^{m_l/\beta_3 - 1}$$

$$A = \exp\left(-m_l \left(\frac{x_l - u_1}{\alpha_1}\right)\right) + \exp\left(-m_l \left(\frac{y_l - u_2}{\alpha_2}\right)\right) + \left(1 - \left(\frac{z_l - u_3}{\alpha_3}\right)^{\beta_3}\right)^{m_l/\beta_3}$$

$$B = (1 - m_l)(1 - 2m_l) + A^{2/m_l} + (3m_l - 3)A^{1/m_l}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \text{LL}(x, y, z, \theta)}{\partial \alpha_k} &= I_1 \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha_k} \left[ \text{Ln } f(p_i, e_1) \right] \right\} + \\ &+ I_2 \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha_k} \left[ \text{Ln } f(p_i, q_i, e_2) \right] \right\} + \\ &+ \frac{I_3}{\alpha_k} \sum_{i=1}^{n_3} \left\{ \text{FACTOR} \cdot \right. \\ &\left. \left[ \frac{(1 - 3m_l) - A^{1/m_l}}{A} + \frac{2A^{2/m_l - 1} + (3m_l - 3)A^{1/m_l - 1}}{B} \right] \right\} + \\ &+ I_4 \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha_k} \left[ \text{Ln } f(r_i, s_i, e_4) \right] \right\} + \end{aligned}$$



$$+ I_3 \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha_k} \left[ \text{Ln } f(r_i, \theta) \right] \right\}$$

donde:

$$k = 1, 2, 3$$

para  $k = 1$

$$\text{FACTOR} = -1 + m_1 \left( \frac{x_i - u_1}{\alpha_1} \right) + m_1 \left( \frac{x_i - u_1}{\alpha_1} \right) \exp\left(-m_1 \left( \frac{x_i - u_1}{\alpha_1} \right)\right)$$

para  $k = 2$

$$\text{FACTOR} = -1 + m_1 \left( \frac{y_i - u_2}{\alpha_2} \right) + m_1 \left( \frac{y_i - u_2}{\alpha_2} \right) \exp\left(-m_1 \left( \frac{y_i - u_2}{\alpha_2} \right)\right)$$

para  $k = 3$

$$\text{FACTOR} = -1 + \frac{(m_1 - \beta_3) \left( \frac{z_i - u_3}{\alpha_3} \right)}{1 - \left( \frac{z_i - u_3}{\alpha_3} \right) \beta_3} + \left( \frac{z_i - u_3}{\alpha_3} \right) \left( 1 - \left( \frac{z_i - u_3}{\alpha_3} \right) \beta_3 \right)^{m_1 / \beta_3 - 1}$$

$$A = \exp\left(-m_1 \left( \frac{x_i - u_1}{\alpha_1} \right)\right) + \exp\left(-m_1 \left( \frac{y_i - u_2}{\alpha_2} \right)\right) + \left( 1 - \left( \frac{z_i - u_3}{\alpha_3} \right) \beta_3 \right)^{m_1 / \beta_3}$$

$$B = (1 - m_1) (1 - 2m_1) + A^{2/m_1} + (3m_1 - 3) A^{1/m_1}$$

$$\frac{\partial \text{LLC}(x, y, z, \theta)}{\partial \beta_3} = I_1 \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial}{\partial \beta_3} \left[ \text{Ln } f(p_i, \theta) \right] \right\} +$$

$$+ I_2 \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial}{\partial \beta_3} \left[ \text{Ln } f(p_i, q_i, \theta) \right] \right\} +$$

$$\begin{aligned}
& + I_3 \left\{ \sum_{i=1}^{n_3} \left\{ \text{FACTOR} \cdot \left[ \frac{(1 - 3m_t) - A^{1/m_t}}{A} + \frac{2 A^{2/m_t - 1} + (3m_t - 3) A^{1/m_t - 1}}{B} \right] \right\} \right\} + \\
& + I_4 \left\{ \sum_{i=1}^{n_4} \left\{ \frac{\partial}{\partial \beta_3} \left[ \text{Ln } f(r_i, s_i, \theta_4) \right] \right\} \right\} + \\
& + I_5 \left\{ \sum_{i=1}^{n_5} \left\{ \frac{\partial}{\partial \beta_3} \left[ \text{Ln } f(r_i, \theta_5) \right] \right\} \right\}
\end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned}
\text{FACTOR} &= \left( \frac{m_t}{\beta_3} - 1 \right) \frac{- \left( \frac{z_i - u_3}{\alpha_3} \right)}{1 - \left( \frac{z_i - u_3}{\alpha_3} \right) \beta_3} - \left( \frac{m_t}{\beta_3^2} \right) \text{Ln} \left( 1 - \left( \frac{z_i - u_3}{\alpha_3} \right) \beta_3 \right) + \\
& + \left( 1 - \left( \frac{z_i - u_3}{\alpha_3} \right) \right)^{m_t / \beta_3} \left[ \frac{- \left( \frac{1}{\beta_3} \right) \left( \frac{z_i - u_3}{\alpha_3} \right)}{1 - \left( \frac{z_i - u_3}{\alpha_3} \right) \beta_3} - \left( \frac{1}{\beta_3^2} \right) \text{Ln} \left( 1 - \left( \frac{z_i - u_3}{\alpha_3} \right) \beta_3 \right) \right]
\end{aligned}$$

$$A = \exp\left(-m_t \left(\frac{x_i - u_1}{\alpha_1}\right)\right) + \exp\left(-m_t \left(\frac{y_i - u_2}{\alpha_2}\right)\right) + \left(1 - \left(\frac{z_i - u_3}{\alpha_3}\right) \beta_3\right)^{m_t / \beta_3}$$

$$B = (1 - m_t)(1 - 2m_t) + A^{2/m_t} + (3m_t - 3) A^{1/m_t}$$

$$\frac{\partial LL(x, y, z, \underline{\theta})}{\partial \beta_1} = 0$$

$$\frac{\partial LL(x, y, z, \underline{\theta})}{\partial \beta_2} = 0$$

Para la asociación bivariada VEB11 (Bigumbel)

$$\begin{aligned} \frac{\partial LL(x, y, z, \underline{\theta})}{\partial m_{b_k}} &= I_j \left\{ \sum_{i=1}^{n_j} \left[ - \left( \frac{v_i - u_v}{\alpha_v} \right) - \left( \frac{w_i - u_w}{\alpha_w} \right) - \right. \right. \\ &- \frac{1}{m_{b_k}^z} \ln B - \left( \frac{1}{m_{b_k}} - 2 \right) C + \left\{ 1 - B^{1/m_{b_k}} \left[ \frac{1}{m_{b_k}^z} \ln B + \frac{1}{m_{b_k}} C \right] \right\} / D \\ &\left. \left. + B^{1/m_{b_k}} \left[ \frac{1}{m_{b_k}^z} \ln B + \frac{1}{m_{b_k}} C \right] \right] \right\} \end{aligned}$$

donde:

$$k = 1, 2 \quad ; \quad j = 2, 4$$

$$A = \left( \frac{v_i - u_v}{\alpha_v} \right) \exp \left( - m_{b_k} \left( \frac{v_i - u_v}{\alpha_v} \right) \right) + \left( \frac{w_i - u_w}{\alpha_w} \right) \exp \left( - m_{b_k} \left( \frac{w_i - u_w}{\alpha_w} \right) \right)$$

$$B = \exp \left( - m_{b_k} \left( \frac{v_i - u_v}{\alpha_v} \right) \right) + \exp \left( - m_{b_k} \left( \frac{w_i - u_w}{\alpha_w} \right) \right)$$

$$C = A / B$$

$$D = (m_{b_k} - 1) + B^{1/m_{b_k}}$$

Para la asociación bivariada VEB12 (Gumbel-GVE)

$$\frac{\partial LL(x, y, z, \theta)}{\partial m_{b_k}} = I_j \left\{ \sum_{i=1}^n j \left[ - \left( \frac{v_i - u_v}{\alpha_v} \right) + \frac{1}{\beta_v} \ln \left( 1 - \left( \frac{w_i - u_w}{\alpha_w} \right)^{\beta_v} \right) \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{m_{b_k}^2} \ln B + \left( \frac{1}{m_{b_k}} - 2 \right) C + \left\{ 1 + B^{1/m_{b_k}} \left[ - \frac{1}{m_{b_k}^2} \ln B + \frac{1}{m_{b_k}} C \right] \right\} / D \right. \right. \\ \left. \left. - B^{1/m_{b_k}} \left[ - \frac{1}{m_{b_k}^2} \ln B + \frac{1}{m_{b_k}} C \right] \right] \right\}$$

donde:

$$k = 1, 2$$

$$A = - \left( \frac{v_i - u_v}{\alpha_v} \right) \exp \left( - m_{b_k} \left( \frac{v_i - u_v}{\alpha_v} \right) \right) + \frac{1}{\beta_v} \left( 1 - \left( \frac{w_i - u_w}{\alpha_w} \right)^{\beta_v} \right)^{m_{b_k} / \beta_v} \ln \left( 1 - \left( \frac{w_i - u_w}{\alpha_w} \right)^{\beta_v} \right)$$

$$B = \exp \left( - m_{b_k} \left( \frac{v_i - u_v}{\alpha_v} \right) \right) + \left( 1 - \left( \frac{w_i - u_w}{\alpha_w} \right)^{\beta_v} \right)^{m_{b_k} / \beta_v}$$

$$C = A / B$$

$$D = (m_{b_k} - 1) + B^{1/m_{b_k}}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial LL(x, y, z, \theta)}{\partial m_t} &= I_a \left\{ \sum_{i=1}^{n_a} \left[ - \left( \frac{x_i - u_1}{\alpha_1} \right) - \left( \frac{y_i - u_2}{\alpha_2} \right) - \right. \right. \\
&+ \left. \frac{1}{\beta_3} \ln \left( 1 - \left( \frac{z_i - u_3}{\alpha_3} \right)^{\beta_3} \right) + \left( \frac{1}{m_t} - 3 \right) C - \frac{1}{m_t^2} \ln B + \right. \\
&+ \left. \left[ (2m_t - 2) + (2m_t - 1) + \left\{ B^{2/m_t} \left[ \frac{2}{m_t} C - \frac{2}{m_t^2} \ln B \right] \right\} + \right. \right. \\
&+ \left. \left. (3m_t - 3) \left\{ B^{1/m_t} \left[ \frac{1}{m_t} C - \frac{1}{m_t^2} \ln B \right] \right\} + 3 B^{1/m_t} \right] / D \right. \\
&- \left. \left. B^{1/m_t} \left[ \frac{1}{m_t} C - \frac{1}{m_t^2} \ln B \right] \right\} \right\}
\end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned}
A &= - \left( \frac{x_i - u_1}{\alpha_1} \right) \exp \left( - m_t \left( \frac{x_i - u_1}{\alpha_1} \right) \right) - \left( \frac{y_i - u_2}{\alpha_2} \right) \exp \left( - m_t \left( \frac{y_i - u_2}{\alpha_2} \right) \right) + \\
&+ \left( 1 - \left( \frac{z_i - u_3}{\alpha_3} \right)^{\beta_3} \right)^{m_t / \beta_3} \left( \frac{1}{\beta_3} \right) \ln \left( 1 - \left( \frac{z_i - u_3}{\alpha_3} \right)^{\beta_3} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B &= \exp \left( - m_t \left( \frac{x_i - u_1}{\alpha_1} \right) \right) + \exp \left( - m_t \left( \frac{y_i - u_2}{\alpha_2} \right) \right) + \\
&+ \left( 1 - \left( \frac{z_i - u_3}{\alpha_3} \right)^{\beta_3} \right)^{m_t / \beta_3}
\end{aligned}$$

$$C = A / B$$

$$D = (1 - m_t)(1 - 2m_t) + B^{2/m_t} + (3m_t - 3) B^{1/m_t}$$

C. DISTRIBUCION GUMBEL-BIGENERAL DE VALORES EXTREMOS (VET122)

$$\begin{aligned} \frac{\partial LL(x,y,z,\theta)}{\partial u_k} &= I_1 \sum_{i=1}^{n_1} \left\{ \frac{\partial}{\partial u_k} \left[ \text{Ln } f(p_1 \cdot \theta_1) \right] \right\} + \\ &+ I_2 \sum_{i=1}^{n_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial u_k} \left[ \text{Ln } f(p_1 \cdot q_1 \cdot \theta_2) \right] \right\} + \\ &+ \frac{I_3}{\alpha_k} \sum_{i=1}^{n_3} \left\{ \text{FACTOR} \cdot \right. \\ &\left. \left[ \frac{(1 - 3m_t) - A^{1/m_t}}{A} + \frac{2 A^{2/m_t - 1} + (3m_t - 3) A^{1/m_t - 1}}{B} \right] \right\} + \\ &+ I_4 \sum_{i=1}^{n_4} \left\{ \frac{\partial}{\partial u_k} \left[ \text{Ln } f(r_1 \cdot s_1 \cdot \theta_4) \right] \right\} + \\ &+ I_5 \sum_{i=1}^{n_5} \left\{ \frac{\partial}{\partial u_k} \left[ \text{Ln } f(r_1 \cdot \theta_5) \right] \right\} \end{aligned}$$

donde:

$$k = 1, 2, 3$$

$$\text{para } k = 1 \quad \text{FACTOR} = m_t + \exp \left( -m_t \left( \frac{x_i - u_1}{\alpha_1} \right) \right)$$

$$\text{para } k = 2 \quad \text{FACTOR} = \frac{(m_t - \beta_2)}{1 - \left( \frac{y_1 - u_2}{\alpha_2} \right)^{\beta_2}} + \left( 1 - \left( \frac{y_1 - u_2}{\alpha_2} \right)^{\beta_2} \right)^{m_t / \beta_2 - 1}$$

$$\text{para } k = 3 \quad \text{FACTOR} = \frac{(m_t - \beta_3)}{1 - \left( \frac{z_1 - u_3}{\alpha_3} \right)^{\beta_3}} + \left( 1 - \left( \frac{z_1 - u_3}{\alpha_3} \right)^{\beta_3} \right)^{m_t / \beta_3 - 1}$$

$$A = \exp\left(-m_1 \left(\frac{x_i - u_1}{\alpha_1}\right)^\beta\right) + \left(1 - \left(\frac{y_i - u_2}{\alpha_2}\right)^{\beta_2}\right)^{m_1/\beta_2} + \left(1 - \left(\frac{z_i - u_3}{\alpha_3}\right)^{\beta_3}\right)^{m_1/\beta_3}$$

$$B = (1 - m_1)(1 - 2m_1) + A^{2/m_1} + (3m_1 - 3)A^{1/m_1}$$

$$\frac{\partial \text{LLC}(x, y, z, \theta)}{\partial \alpha_k} = I_1 \sum_{i=1}^{n_1} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha_k} \left[ \text{Ln } f_C p_1 \cdot e_1 \right] \right\} +$$

$$+ I_2 \sum_{i=1}^{n_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha_k} \left[ \text{Ln } f_C p_1 \cdot q_1 \cdot e_2 \right] \right\} +$$

$$+ \frac{I_3}{\alpha_k} \sum_{i=1}^{n_3} \left\{ \text{FACTOR} \cdot \right.$$

$$\left. \left[ \frac{(1 - 3m_1) - A^{1/m_1}}{A} + \frac{2A^{2/m_1 - 1} + (3m_1 - 3)A^{1/m_1 - 1}}{B} \right] \right\} +$$

$$+ I_4 \sum_{i=1}^{n_4} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha_k} \left[ \text{Ln } f_C r_1 \cdot s_1 \cdot e_4 \right] \right\} +$$

$$+ I_5 \sum_{i=1}^{n_5} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha_k} \left[ \text{Ln } f_C r_1 \cdot e_5 \right] \right\}$$

donde:

$$k = 1, 2, 3$$

para k = 1

$$\text{FACTOR} = -1 + m_1 \left( \frac{x_1 - u_1}{\alpha_1} \right) + m_1 \left( \frac{x_1 - u_1}{\alpha_1} \right) \exp\left(-m_1 \left( \frac{x_1 - u_1}{\alpha_1} \right)\right)$$

para k = 2

$$\text{FACTOR} = -1 + \frac{(m_1 - \beta_2) \left( \frac{y_1 - u_2}{\alpha_2} \right)}{1 - \left( \frac{y_1 - u_2}{\alpha_2} \right) \beta_2} + \left( \frac{y_1 - u_2}{\alpha_2} \right) \left( 1 - \left( \frac{y_1 - u_2}{\alpha_2} \right) \beta_2 \right)^{m_1 / \beta_2 - 1}$$

para k = 3

$$\text{FACTOR} = -1 + \frac{(m_1 - \beta_3) \left( \frac{z_1 - u_3}{\alpha_3} \right)}{1 - \left( \frac{z_1 - u_3}{\alpha_3} \right) \beta_3} + \left( \frac{z_1 - u_3}{\alpha_3} \right) \left( 1 - \left( \frac{z_1 - u_3}{\alpha_3} \right) \beta_3 \right)^{m_1 / \beta_3 - 1}$$

$$A = \exp\left(-m_1 \left( \frac{x_1 - u_1}{\alpha_1} \right)\right) + \left( 1 - \left( \frac{y_1 - u_2}{\alpha_2} \right) \beta_2 \right)^{m_1 / \beta_2} + \left( 1 - \left( \frac{z_1 - u_3}{\alpha_3} \right) \beta_3 \right)^{m_1 / \beta_3}$$

$$B = \left( 1 - m_1 \right) \left( 1 - 2m_1 \right) + A^{2/m_1} + \left( 3m_1 - 3 \right) A^{1/m_1}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \text{LLC}(x, y, z, \theta)}{\partial \beta_k} &= I_1 \sum_{i=1}^{n_1} \left\{ \frac{\partial}{\partial \beta_k} \left[ \text{Ln fC } p_1 \cdot \theta_1 \right] \right\} + \\ &+ I_2 \sum_{i=1}^{n_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \beta_k} \left[ \text{Ln fC } p_1 \cdot q_1 \cdot \theta_2 \right] \right\} + \\ &+ I_3 \sum_{i=1}^{n_3} \left\{ \text{FACTOR} \right\} \end{aligned}$$



$$\left[ \frac{(1 - 3m_t) - A^{1/m_t}}{A} + \frac{2 A^{2/m_t - 1} + (3m_t - 3) A^{1/m_t - 1}}{B} \right] \Bigg\} +$$

$$+ I_4 \sum_{i=1}^{n_4} \left\{ \frac{\partial}{\partial \beta_k} \left[ \text{Ln } f(r_i \cdot s_i \cdot e_4) \right] \right\} +$$

$$+ I_5 \sum_{i=1}^{n_5} \left\{ \frac{\partial}{\partial \beta_k} \left[ \text{Ln } f(r_i \cdot e_5) \right] \right\}$$

donde:

$$k = 2, 3$$

para  $k = 2$

$$\text{FACTOR} = \left( \frac{m_t}{\beta_2} - 1 \right) \frac{- \left( \frac{y_i - u_2}{\alpha_2} \right)}{1 - \left( \frac{y_i - u_2}{\alpha_2} \right) \beta_2} - \left( \frac{m_t}{\beta_2^2} \right) \text{Ln} \left( 1 - \left( \frac{y_i - u_2}{\alpha_2} \right) \beta_2 \right) +$$

$$+ \left( 1 - \left( \frac{y_i - u_2}{\alpha_2} \right) \right)^{m_t / \beta_2} \left[ \frac{- \left( \frac{1}{\beta_2} \right) \left( \frac{y_i - u_2}{\alpha_2} \right)}{1 - \left( \frac{y_i - u_2}{\alpha_2} \right) \beta_2} - \left( \frac{1}{\beta_2^2} \right) \text{Ln} \left( 1 - \left( \frac{y_i - u_2}{\alpha_2} \right) \beta_2 \right) \right]$$

para  $k = 3$

$$\text{FACTOR} = \left( \frac{m_t}{\beta_3} - 1 \right) \frac{- \left( \frac{z_i - u_3}{\alpha_3} \right)}{1 - \left( \frac{z_i - u_3}{\alpha_3} \right) \beta_3} - \left( \frac{m_t}{\beta_3^2} \right) \text{Ln} \left( 1 - \left( \frac{z_i - u_3}{\alpha_3} \right) \beta_3 \right) +$$

$$+ \left( 1 - \left( \frac{z_i - u_3}{\alpha_3} \right) \right)^{m_t / \beta_3} \left[ \frac{- \left( \frac{1}{\beta_3} \right) \left( \frac{z_i - u_3}{\alpha_3} \right)}{1 - \left( \frac{z_i - u_3}{\alpha_3} \right) \beta_3} - \left( \frac{1}{\beta_3^2} \right) \text{Ln} \left( 1 - \left( \frac{z_i - u_3}{\alpha_3} \right) \beta_3 \right) \right]$$

$$A = \exp\left(-m_t \left(\frac{x_t - u_t}{\alpha_1}\right)\right) + \left(1 - \left(\frac{y_t - u_t}{\alpha_2}\right)^{\beta_2}\right)^{m_t/\beta_2} + \left(1 - \left(\frac{z_t - u_t}{\alpha_3}\right)^{\beta_3}\right)^{m_t/\beta_3}$$

$$B = (1 - m_t)(1 - 2m_t) + A^{2/m_t} + (3m_t - 3)A^{1/m_t}$$

$$\frac{\partial LL(x, y, z, \theta)}{\partial \beta_1} = 0$$

Para la asociación bivariada VEB12 (Gumbel-GVED)

$$\frac{\partial LL(x, y, z, \theta)}{\partial m_{b_k}} = I_j \left\{ \sum_{i=1}^n \left[ -\left(\frac{v_i - u_v}{\alpha_v}\right) + \frac{1}{\beta_v} \ln\left(1 - \left(\frac{v_i - u_v}{\alpha_v}\right)^{\beta_v}\right) \right. \right.$$

$$\left. - \frac{1}{m_{b_k}^2} \ln B + \left(\frac{1}{m_{b_k}} - 2\right) C + \left\{ 1 + B^{1/m_{b_k}} \left[ -\frac{1}{m_{b_k}^2} \ln B + \frac{1}{m_{b_k}} C \right] \right\} / D \right.$$

$$\left. - B^{1/m_{b_k}} \left[ -\frac{1}{m_{b_k}^2} \ln B + \frac{1}{m_{b_k}} C \right] \right]$$

donde:

$$k = 1, 2 \quad ; \quad j = 2, 4$$

$$A = -\left(\frac{v_i - u_v}{\alpha_v}\right) \exp\left(-m_{b_k} \left(\frac{v_i - u_v}{\alpha_v}\right)\right) + \frac{1}{\beta_v} \left(1 - \left(\frac{v_i - u_v}{\alpha_v}\right)^{\beta_v}\right)^{m_{b_k}/\beta_v} \ln\left(1 - \left(\frac{v_i - u_v}{\alpha_v}\right)^{\beta_v}\right)$$

$$B = \exp\left(-m_{b_k} \left(\frac{v_i - u_v}{\alpha_v}\right)\right) + \left(1 - \left(\frac{v_i - u_v}{\alpha_v}\right)^{\beta_v}\right)^{m_{b_k}/\beta_v}$$

$$C = A / B$$

$$D = (m_{b_k} - 1) + B^{1/m_{b_k}}$$

Para la asociación bivariada VEB22 (BI-GVE)

$$\frac{\partial LL(x,y,z,\theta)}{\partial m_{b_k}} = I_j \left\{ \sum_{i=1}^n \left[ \frac{1}{\beta_v} \ln \left( 1 - c \frac{v_i - u_v}{\alpha_v} > \beta_v \right) + \frac{1}{\beta_v} \ln \left( 1 - c \frac{w_i - u_v}{\alpha_v} > \beta_v \right) \right] \right. \\ \left. - \frac{1}{m_{b_k}^2} \ln B + \left( \frac{1}{m_{b_k}} - 2 \right) C + \left\{ 1 + B^{1/m_{b_k}} \left[ - \frac{1}{m_{b_k}^2} \ln B + \frac{1}{m_{b_k}} C \right] \right\} / D - B^{1/m_{b_k}} \left[ - \frac{1}{m_{b_k}^2} \ln B + \frac{1}{m_{b_k}} C \right] \right\}$$

donde:

$$k = 1, 2$$

$$A = \frac{1}{\beta_v} \left( 1 - c \frac{v_i - u_v}{\alpha_v} > \beta_v \right)^{m_{b_k} / \beta_v} \ln \left( 1 - c \frac{v_i - u_v}{\alpha_v} > \beta_v \right) + \\ + \frac{1}{\beta_v} \left( 1 - c \frac{w_i - u_v}{\alpha_v} > \beta_v \right)^{m_{b_k} / \beta_v} \ln \left( 1 - c \frac{w_i - u_v}{\alpha_v} > \beta_v \right) \\ B = \left( 1 - c \frac{v_i - u_v}{\alpha_v} > \beta_v \right)^{m_{b_k} / \beta_v} + \left( 1 - c \frac{w_i - u_v}{\alpha_v} > \beta_v \right)^{m_{b_k} / \beta_v}$$

$$C = A / B$$

$$D = (m_l - 1) + B^{1/m_l}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial LL(x, y, z, \theta)}{\partial m_l} &= I_a \left\{ \sum_{i=1}^n \left[ - \left( \frac{x_i - u_1}{\alpha_1} \right) + \frac{1}{\beta_2} \ln \left( 1 - \left( \frac{y_i - u_2}{\alpha_2} \right)^{\beta_2} \right) + \right. \right. \\ &+ \frac{1}{\beta_3} \ln \left( 1 - \left( \frac{z_i - u_3}{\alpha_3} \right)^{\beta_3} \right) + \left. \left( \frac{1}{m_l} - 3 \right) C - \frac{1}{m_l^2} \ln B + \right. \\ &+ \left. \left[ (2m_l - 2) + (2m_l - 1) + \left\{ B^{2/m_l} \left[ \frac{2}{m_l} C - \frac{2}{m_l^2} \ln B \right] \right\} + \right. \right. \\ &+ \left. \left. (3m_l - 3) \left\{ B^{1/m_l} \left[ \frac{1}{m_l} C - \frac{1}{m_l^2} \ln B \right] \right\} + 3 B^{1/m_l} \right] / D \right. \\ &\left. - B^{1/m_l} \left[ \frac{1}{m_l} C - \frac{1}{m_l^2} \ln B \right] \right\} \end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned} A &= - \left( \frac{x_i - u_1}{\alpha_1} \right) \exp \left( - m_l \left( \frac{x_i - u_1}{\alpha_1} \right) \right) + \\ &+ \left( 1 - \left( \frac{y_i - u_2}{\alpha_2} \right)^{\beta_2} \right)^{m_l / \beta_2} \left( \frac{1}{\beta_2} \right) \ln \left( 1 - \left( \frac{y_i - u_2}{\alpha_2} \right)^{\beta_2} \right) + \\ &+ \left( 1 - \left( \frac{z_i - u_3}{\alpha_3} \right)^{\beta_3} \right)^{m_l / \beta_3} \left( \frac{1}{\beta_3} \right) \ln \left( 1 - \left( \frac{z_i - u_3}{\alpha_3} \right)^{\beta_3} \right) \\ B &= \exp \left( - m_l \left( \frac{x_i - u_1}{\alpha_1} \right) \right) + \left( 1 - \left( \frac{y_i - u_2}{\alpha_2} \right)^{\beta_2} \right)^{m_l / \beta_2} + \end{aligned}$$

$$+ \left( 1 - \left( \frac{z_1 - u_3}{\alpha_3} \right)^{\beta_3} \right)^{m_t / \beta_3}$$

$$C = A / B$$

$$D = (1 - m_t)(1 - 2m_t) + B^{2/m_t} + (3m_t - 3) B^{1/m_t}$$

#### D. DISTRIBUCION TRIGENERAL DE VALORES EXTREMOS (VET222)

$$\begin{aligned} \frac{\partial LL(x, y, z, \theta)}{\partial u_k} &= I_1 \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial}{\partial u_k} \left[ \text{Ln } f(p_1, \theta_1) \right] \right\} + \\ &+ I_2 \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial}{\partial u_k} \left[ \text{Ln } f(p_1, q_1, \theta_2) \right] \right\} + \\ &+ \frac{I_3}{\alpha_k} \sum_{i=1}^n \left\{ \text{FACTOR} \right. \\ &\left. \left[ \frac{(1 - 3m_t) - A^{1/m_t}}{A} + \frac{2 A^{2/m_t - 1} + (3m_t - 3) A^{2/m_t - 1}}{B} \right] \right\} + \\ &+ I_4 \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial}{\partial u_k} \left[ \text{Ln } f(r_1, s_1, \theta_4) \right] \right\} + \\ &+ I_5 \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial}{\partial u_k} \left[ \text{Ln } f(r_1, \theta_5) \right] \right\} \end{aligned}$$

donde:

$$k = 1, 2, 3$$

para  $k = 1$

$$\text{FACTOR} = \frac{(m_t - \beta_1)}{1 - \left(\frac{x_1 - u_1}{\alpha_1}\right)^{\beta_1}} + \left(1 - \left(\frac{x_1 - u_1}{\alpha_1}\right)^{\beta_1}\right)^{m_t/\beta_1 - 1}$$

para  $k = 2$

$$\text{FACTOR} = \frac{(m_t - \beta_2)}{1 - \left(\frac{y_1 - u_2}{\alpha_2}\right)^{\beta_2}} + \left(1 - \left(\frac{y_1 - u_2}{\alpha_2}\right)^{\beta_2}\right)^{m_t/\beta_2 - 1}$$

para  $k = 3$

$$\text{FACTOR} = \frac{(m_t - \beta_3)}{1 - \left(\frac{z_1 - u_3}{\alpha_3}\right)^{\beta_3}} + \left(1 - \left(\frac{z_1 - u_3}{\alpha_3}\right)^{\beta_3}\right)^{m_t/\beta_3 - 1}$$

$$A = \left(1 - \left(\frac{x_1 - u_1}{\alpha_1}\right)^{\beta_1}\right)^{m_t/\beta_1} + \left(1 - \left(\frac{y_1 - u_2}{\alpha_2}\right)^{\beta_2}\right)^{m_t/\beta_2} + \left(1 - \left(\frac{z_1 - u_3}{\alpha_3}\right)^{\beta_3}\right)^{m_t/\beta_3}$$

$$B = (1 - m_t)(1 - 2m_t) + A^{2/m_t} + (3m_t - 3)A^{1/m_t}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \text{LL}(x,y,z,\theta)}{\partial \alpha_k} &= I_1 \sum_{i=1}^{n_1} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha_k} \left[ \text{Ln } f(p_1 \cdot \theta_1) \right] \right\} + \\ &+ I_2 \sum_{i=1}^{n_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha_k} \left[ \text{Ln } f(p_1 \cdot q_1 \cdot \theta_2) \right] \right\} + \\ &+ \frac{I_3}{\alpha_k} \sum_{i=1}^{n_3} \left\{ \text{FACTOR} \right\} \end{aligned}$$

$$\left[ \frac{(1 - 3m_t) - A^{1/m_t}}{A} + \frac{2 A^{2/m_t - 1} + (3m_t - 3) A^{1/m_t - 1}}{B} \right] \Bigg\} +$$

$$+ I_4 \left\{ \sum_{i=1}^{n_4} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha_k} \left[ \ln f(r_i, s_i, \theta_4) \right] \right\} \right\} +$$

$$+ I_5 \left\{ \sum_{i=1}^{n_5} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha_k} \left[ \ln f(r_i, \theta_5) \right] \right\} \right\}$$

donde:

$$k = 1, 2, 3$$

para  $k = 1$

$$\text{FACTOR} = -1 + \frac{(m_t - \beta_1) \left( \frac{x_i - u_1}{\alpha_1} \right)}{1 - \left( \frac{x_i - u_1}{\alpha_1} \right) \beta_1} + \left( \frac{x_i - u_1}{\alpha_1} \right) \left( 1 - \left( \frac{x_i - u_1}{\alpha_1} \right) \beta_1 \right)^{m_t / \beta_1 - 1}$$

para  $k = 2$

$$\text{FACTOR} = -1 + \frac{(m_t - \beta_2) \left( \frac{y_i - u_2}{\alpha_2} \right)}{1 - \left( \frac{y_i - u_2}{\alpha_2} \right) \beta_2} + \left( \frac{y_i - u_2}{\alpha_2} \right) \left( 1 - \left( \frac{y_i - u_2}{\alpha_2} \right) \beta_2 \right)^{m_t / \beta_2 - 1}$$

para  $k = 3$

$$\text{FACTOR} = -1 + \frac{(m_t - \beta_3) \left( \frac{z_i - u_3}{\alpha_3} \right)}{1 - \left( \frac{z_i - u_3}{\alpha_3} \right) \beta_3} + \left( \frac{z_i - u_3}{\alpha_3} \right) \left( 1 - \left( \frac{z_i - u_3}{\alpha_3} \right) \beta_3 \right)^{m_t / \beta_3 - 1}$$

$$A = \left(1 - \left(\frac{x_i - u_1}{\alpha_1}\right)^{\beta_1}\right)^{m_1/\beta_1} + \left(1 - \left(\frac{y_i - u_2}{\alpha_2}\right)^{\beta_2}\right)^{m_1/\beta_2} + \left(1 - \left(\frac{z_i - u_3}{\alpha_3}\right)^{\beta_3}\right)^{m_1/\beta_3}$$

$$B = (1 - m_1)(1 - 2m_1) + A^{2/m_1} + (3m_1 - 3)A^{1/m_1}$$

$$\frac{\partial \text{LLC}(x, y, z, \theta)}{\partial \beta_k} = I_1 \sum_{i=1}^{n_1} \left\{ \frac{\partial}{\partial \beta_k} \left[ \text{Ln fC } P_1 \cdot e_1 \right] \right\} +$$

$$+ I_2 \sum_{i=1}^{n_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \beta_k} \left[ \text{Ln fC } P_1 \cdot q_1 \cdot e_2 \right] \right\} +$$

$$+ I_3 \sum_{i=1}^{n_3} \left\{ \text{F A C T O R} \cdot \right.$$

$$\left[ \frac{(1 - 3m_1) - A^{1/m_1}}{A} + \frac{2A^{2/m_1 - 1} + (3m_1 - 3)A^{1/m_1 - 1}}{B} \right] \left. \right\} +$$

$$+ I_4 \sum_{i=1}^{n_4} \left\{ \frac{\partial}{\partial \beta_k} \left[ \text{Ln fC } r_1 \cdot s_1 \cdot e_4 \right] \right\} +$$

$$+ I_5 \sum_{i=1}^{n_5} \left\{ \frac{\partial}{\partial \beta_k} \left[ \text{Ln fC } r_1 \cdot e_5 \right] \right\}$$

donde:

$$k = 1, 2, 3$$



para  $k = 1$

$$\begin{aligned} \text{FACTOR} &= \left( \frac{m_t}{\beta_1} - 1 \right) \frac{- \left( \frac{x_1 - u_1}{\alpha_1} \right)}{1 - \left( \frac{x_1 - u_1}{\alpha_1} \right) \beta_1} - \left( \frac{m_t}{\beta_1} \right) \text{Ln} \left( 1 - \left( \frac{x_1 - u_1}{\alpha_1} \right) \beta_1 \right) + \\ &+ \left( 1 - \left( \frac{x_1 - u_1}{\alpha_1} \right) \right)^{m_t / \beta_1} \left[ \frac{- \left( \frac{1}{\beta_2} \right) \left( \frac{x_1 - u_1}{\alpha_1} \right)}{1 - \left( \frac{x_1 - u_1}{\alpha_1} \right) \beta_1} - \left( \frac{1}{\beta_2} \right) \text{Ln} \left( 1 - \left( \frac{x_1 - u_1}{\alpha_1} \right) \beta_1 \right) \right] \end{aligned}$$

para  $k = 2$

$$\begin{aligned} \text{FACTOR} &= \left( \frac{m_t}{\beta_2} - 1 \right) \frac{- \left( \frac{y_1 - u_2}{\alpha_2} \right)}{1 - \left( \frac{y_1 - u_2}{\alpha_2} \right) \beta_2} - \left( \frac{m_t}{\beta_2} \right) \text{Ln} \left( 1 - \left( \frac{y_1 - u_2}{\alpha_2} \right) \beta_2 \right) + \\ &+ \left( 1 - \left( \frac{y_1 - u_2}{\alpha_2} \right) \right)^{m_t / \beta_2} \left[ \frac{- \left( \frac{1}{\beta_2} \right) \left( \frac{y_1 - u_2}{\alpha_2} \right)}{1 - \left( \frac{y_1 - u_2}{\alpha_2} \right) \beta_2} - \left( \frac{1}{\beta_2} \right) \text{Ln} \left( 1 - \left( \frac{y_1 - u_2}{\alpha_2} \right) \beta_2 \right) \right] \end{aligned}$$

para  $k = 3$

$$\begin{aligned} \text{FACTOR} &= \left( \frac{m_t}{\beta_3} - 1 \right) \frac{- \left( \frac{z_1 - u_3}{\alpha_3} \right)}{1 - \left( \frac{z_1 - u_3}{\alpha_3} \right) \beta_3} - \left( \frac{m_t}{\beta_3} \right) \text{Ln} \left( 1 - \left( \frac{z_1 - u_3}{\alpha_3} \right) \beta_3 \right) + \\ &+ \left( 1 - \left( \frac{z_1 - u_3}{\alpha_3} \right) \right)^{m_t / \beta_3} \left[ \frac{- \left( \frac{1}{\beta_3} \right) \left( \frac{z_1 - u_3}{\alpha_3} \right)}{1 - \left( \frac{z_1 - u_3}{\alpha_3} \right) \beta_3} - \left( \frac{1}{\beta_3} \right) \text{Ln} \left( 1 - \left( \frac{z_1 - u_3}{\alpha_3} \right) \beta_3 \right) \right] \end{aligned}$$

$$A = \left(1 - \left(\frac{x_i - u_1}{\alpha_1}\right)^{\beta_1}\right)^{m_1/\beta_1} + \left(1 - \left(\frac{y_i - u_2}{\alpha_2}\right)^{\beta_2}\right)^{m_1/\beta_2} + \left(1 - \left(\frac{z_i - u_3}{\alpha_3}\right)^{\beta_3}\right)^{m_1/\beta_3}$$

$$B = (1 - m_1) (1 - 2m_1) + A^{2/m_1} + (3m_1 - 3) A^{1/m_1}$$

Para la asociación bivariada VEB22 (BI-GVE)

$$\frac{\partial \text{LLC}(x, y, z, \theta)}{\partial m_{b_k}} = I_j \left\{ \sum_{i=1}^n J \left[ \frac{1}{\beta_v} \text{Ln} \left( 1 - \left( \frac{v_i - u_v}{\alpha_v} \right)^{\beta_v} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{\beta_v} \text{Ln} \left( 1 - \left( \frac{w_i - u_v}{\alpha_v} \right)^{\beta_v} \right) \right] \right.$$

$$\left. - \frac{1}{m_{b_k}^2} \text{Ln } B + \left( \frac{1}{m_{b_k}} - 2 \right) C + \left\{ 1 + B^{1/m_b} \left[ - \frac{1}{m_{b_k}^2} \text{Ln } B + \frac{1}{m_{b_k}} C \right] \right\} / D \right.$$

$$\left. - B^{1/m_{b_k}} \left[ - \frac{1}{m_{b_k}^2} \text{Ln } B + \frac{1}{m_{b_k}} C \right] \right\}$$

donde:

$$k = 1, 2 \quad ; \quad j = 2, 4$$

$$A = \frac{1}{\beta_v} \left( 1 - \left( \frac{v_i - u_v}{\alpha_v} \right)^{\beta_v} \right)^{m_{b_k}/\beta_v} \text{Ln} \left( 1 - \left( \frac{v_i - u_v}{\alpha_v} \right)^{\beta_v} \right) + \\ + \frac{1}{\beta_v} \left( 1 - \left( \frac{w_i - u_v}{\alpha_v} \right)^{\beta_v} \right)^{m_{b_k}/\beta_v} \text{Ln} \left( 1 - \left( \frac{w_i - u_v}{\alpha_v} \right)^{\beta_v} \right)$$

$$B = \left( 1 - \left( \frac{v_i - u_v}{\alpha_v} \right) \beta_v \right)^{m_{b_k} / \beta_v} + \left( 1 - \left( \frac{w_i - u_w}{\alpha_w} \right) \beta_w \right)^{m_{b_k} / \beta_w}$$

$$C = A / B$$

$$D = (m_{b_k} - 1) + B^{1/m_{b_k}}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial LL(x, y, z, \theta)}{\partial m_l} &= I_s \left\{ \sum_{i=1}^n \left[ \frac{1}{\beta_1} \ln \left( 1 - \left( \frac{x_i - u_x}{\alpha_1} \right) \beta_1 \right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\beta_2} \ln \left( 1 - \left( \frac{y_i - u_y}{\alpha_2} \right) \right) \right] + \\ &\quad + \frac{1}{\beta_3} \ln \left( 1 - \left( \frac{z_i - u_z}{\alpha_3} \right) \beta_3 \right) + \left( \frac{1}{m_l} - 3 \right) C - \frac{1}{m_l^2} \ln B + \\ &\quad + \left[ (2m_l - 2) + (2m_l - 1) + \left\{ B^{2/m_l} \left[ \frac{2}{m_l} C - \frac{2}{m_l^2} \ln B \right] \right\} + \right. \\ &\quad \left. + (3m_l - 3) \left\{ B^{1/m_l} \left[ \frac{1}{m_l} C - \frac{1}{m_l^2} \ln B \right] \right\} + 3 B^{1/m_l} \right] / D \\ &\quad - \left. B^{1/m_l} \left[ \frac{1}{m_l} C - \frac{1}{m_l^2} \ln B \right] \right\} \end{aligned}$$

donde:

$$A = \left( 1 - \left( \frac{x_i - u_x}{\alpha_1} \right) \beta_1 \right)^{m_l / \beta_1} \left( \frac{1}{\beta_1} \right) \ln \left( 1 - \left( \frac{y_i - u_y}{\alpha_1} \right) \beta_1 \right) +$$

$$+ \left( 1 - \left( \frac{y_i - u_2}{\alpha_2} \right) \beta_2 \right)^{m_i / \beta_2} \left( \frac{1}{\beta_2} \right) \ln \left( 1 - \left( \frac{y_i - u_2}{\alpha_2} \right) \beta_2 \right) +$$

$$+ \left( 1 - \left( \frac{z_i - u_3}{\alpha_3} \right) \beta_3 \right)^{m_i / \beta_3} \left( \frac{1}{\beta_3} \right) \ln \left( 1 - \left( \frac{z_i - u_3}{\alpha_3} \right) \beta_3 \right)$$

$$B = \left( 1 - \left( \frac{x_i - u_1}{\alpha_1} \right) \beta_1 \right)^{m_i / \beta_1} + \left( 1 - \left( \frac{y_i - u_2}{\alpha_2} \right) \beta_2 \right)^{m_i / \beta_2} +$$

$$+ \left( 1 - \left( \frac{z_i - u_3}{\alpha_3} \right) \beta_3 \right)^{m_i / \beta_3}$$

$$C = A / B$$

$$D = (1 - m_i) (1 - 2m_i) + B^{2/m_i} + (3m_i - 3) B^{1/m_i}$$

## APENDICE B

Tabla B.1 Varianzas asintóticas y simuladas de los parámetros trivariados de la distribución VET111

*Caso A*

Varianza asintótica	Límite de confianza inferior	Varianza simulada	Límite de confianza superior
$\text{Var}_a (\hat{u}_1) = 0.104$	0.098	0.127	0.171
$\text{Var}_a (\hat{\alpha}_1) = 0.056$	0.046	0.060	0.081
$\text{Var}_a (\hat{u}_2) = 0.076$	0.052	0.067	0.090
$\text{Var}_a (\hat{\alpha}_2) = 0.041$	0.029	0.038	0.051
$\text{Var}_a (\hat{u}_3) = 0.053$	0.047	0.061	0.082
$\text{Var}_a (\hat{\alpha}_3) = 0.028$	0.021	0.027	0.036
$\text{Var}_a (\hat{m}_t) = 0.111$	0.096	0.125	0.169

*Caso B*

Varianza asintótica	Límite de confianza inferior	Varianza simulada	Límite de confianza superior
$\text{Var}_a (\hat{u}_1) = 0.079$	0.088	0.114	0.154
$\text{Var}_a (\hat{\alpha}_1) = 0.045$	0.029	0.037	0.050
$\text{Var}_a (\hat{u}_2) = 0.058$	0.047	0.061	0.082
$\text{Var}_a (\hat{\alpha}_2) = 0.033$	0.024	0.031	0.042
$\text{Var}_a (\hat{u}_3) = 0.027$	0.024	0.031	0.042
$\text{Var}_a (\hat{\alpha}_3) = 0.014$	0.011	0.014	0.019
$\text{Var}_a (\hat{m}_t) = 0.094$	0.082	0.106	0.143

**Caso C**

Varianza asintótica	Límite de confianza inferior	Varianza simulada	Límite de confianza superior
$\text{Var}_a (\hat{u}_1) = 0.075$	0.068	0.068	0.119
$\text{Var}_a (\hat{\alpha}_1) = 0.043$	0.026	0.034	0.046
$\text{Var}_a (\hat{u}_2) = 0.038$	0.025	0.032	0.043
$\text{Var}_a (\hat{\alpha}_2) = 0.021$	0.012	0.015	0.020
$\text{Var}_a (\hat{u}_3) = 0.027$	0.020	0.026	0.035
$\text{Var}_a (\hat{\alpha}_3) = 0.014$	0.011	0.014	0.019
$\text{Var}_a (\hat{m}_t) = 0.089$	0.080	0.104	0.140
$\text{Var}_a (\hat{m}_{b2}) = 0.155$	0.279	0.363	0.489

**Caso D**

Varianza asintótica	Límite de confianza inferior	Varianza simulada	Límite de confianza superior
$\text{Var}_a (\hat{u}_1) = 0.067$	0.052	0.068	0.092
$\text{Var}_a (\hat{\alpha}_1) = 0.039$	0.026	0.034	0.046
$\text{Var}_a (\hat{u}_2) = 0.032$	0.024	0.027	0.036
$\text{Var}_a (\hat{\alpha}_2) = 0.018$	0.011	0.015	0.020
$\text{Var}_a (\hat{u}_3) = 0.018$	0.011	0.015	0.020
$\text{Var}_a (\hat{\alpha}_3) = 0.010$	0.006	0.008	0.011
$\text{Var}_a (\hat{m}_t) = 0.083$	0.073	0.095	0.128
$\text{Var}_a (\hat{m}_{b2}) = 0.149$	0.250	0.324	0.437

Tabla B.2 Varianzas asintóticas y simuladas de los parámetros trivariados de la distribución VET112

Caso A

Varianza asintótica	Límite de confianza inferior	Varianza simulada	Límite de confianza superior
$\text{Var}_a (\hat{u}_1) = 0.212$	0.098	0.127	0.171
$\text{Var}_a (\hat{\alpha}_1) = 0.117$	0.078	0.101	0.136
$\text{Var}_a (\hat{u}_2) = 0.076$	0.047	0.061	0.082
$\text{Var}_a (\hat{\alpha}_2) = 0.042$	0.035	0.046	0.062
$\text{Var}_a (\hat{u}_3) = 0.057$	0.041	0.053	0.072
$\text{Var}_a (\hat{\alpha}_3) = 0.036$	0.024	0.031	0.042
$\text{Var}_a (\hat{\beta}_3) = 0.019$	0.023	0.030	0.040
$\text{Var}_a (\hat{m}_t) = 0.114$	0.069	0.080	0.121

Caso B

Varianza asintótica	Límite de confianza inferior	Varianza simulada	Límite de confianza superior
$\text{Var}_a (\hat{u}_1) = 0.162$	0.093	0.120	0.162
$\text{Var}_a (\hat{\alpha}_1) = 0.095$	0.075	0.097	0.131
$\text{Var}_a (\hat{u}_2) = 0.058$	0.034	0.044	0.059
$\text{Var}_a (\hat{\alpha}_2) = 0.034$	0.026	0.034	0.046
$\text{Var}_a (\hat{u}_3) = 0.029$	0.022	0.028	0.037
$\text{Var}_a (\hat{\alpha}_3) = 0.019$	0.019	0.025	0.034
$\text{Var}_a (\hat{\beta}_3) = 0.012$	0.008	0.011	0.015
$\text{Var}_a (\hat{m}_t) = 0.096$	0.086	0.112	0.151



**Caso C**

Varianza asintótica	Límite de confianza inferior	Varianza simulada	Límite de confianza superior
$\text{Var}_a (\hat{u}_1) = 0.153$	0.099	0.128	0.173
$\text{Var}_a (\hat{\alpha}_1) = 0.089$	0.073	0.095	0.128
$\text{Var}_a (\hat{u}_2) = 0.039$	0.027	0.036	0.048
$\text{Var}_a (\hat{\alpha}_2) = 0.022$	0.012	0.016	0.022
$\text{Var}_a (\hat{u}_3) = 0.029$	0.024	0.031	0.042
$\text{Var}_a (\hat{\alpha}_3) = 0.018$	0.013	0.017	0.023
$\text{Var}_a (\hat{\beta}_3) = 0.010$	0.009	0.012	0.016
$\text{Var}_a (\hat{m}_t) = 0.091$	0.117	0.152	0.205
$\text{Var}_a (\hat{m}_{b2}) = 0.157$	0.258	0.335	0.452

**Caso D**

Varianza asintótica	Límite de confianza inferior	Varianza simulada	Límite de confianza superior
$\text{Var}_a (\hat{u}_1) = 0.136$	0.077	0.100	0.135
$\text{Var}_a (\hat{\alpha}_1) = 0.082$	0.062	0.080	0.108
$\text{Var}_a (\hat{u}_2) = 0.033$	0.023	0.030	0.040
$\text{Var}_a (\hat{\alpha}_2) = 0.019$	0.011	0.015	0.020
$\text{Var}_a (\hat{u}_3) = 0.020$	0.017	0.023	0.031
$\text{Var}_a (\hat{\alpha}_3) = 0.013$	0.010	0.013	0.018
$\text{Var}_a (\hat{\beta}_3) = 0.008$	0.007	0.010	0.013
$\text{Var}_a (\hat{m}_t) = 0.084$	0.098	0.127	0.171
$\text{Var}_a (\hat{m}_{b2}) = 0.150$	0.262	0.340	0.459

Tabla B.3 Varianzas asintóticas y simuladas de los parámetros trivariados de la distribución VET122

Caso A

Varianza asintótica	Límite de confianza inferior	Varianza simulada	Límite de confianza superior
$\text{Var}_a (\hat{u}_1) = 0.212$	0.187	0.243	0.328
$\text{Var}_a (\hat{\alpha}_1) = 0.121$	0.119	0.155	0.209
$\text{Var}_a (\hat{u}_2) = 0.083$	0.052	0.067	0.090
$\text{Var}_a (\hat{\alpha}_2) = 0.054$	0.034	0.044	0.059
$\text{Var}_a (\hat{\beta}_2) = 0.022$	0.028	0.036	0.049
$\text{Var}_a (\hat{u}_3) = 0.057$	0.050	0.065	0.088
$\text{Var}_a (\hat{\alpha}_3) = 0.036$	0.030	0.039	0.053
$\text{Var}_a (\hat{\beta}_3) = 0.020$	0.025	0.033	0.045
$\text{Var}_a (\hat{m}_t) = 0.117$	0.126	0.163	0.220

Caso B

Varianza asintótica	Límite de confianza inferior	Varianza simulada	Límite de confianza superior
$\text{Var}_a (\hat{u}_1) = 0.162$	0.177	0.230	0.310
$\text{Var}_a (\hat{\alpha}_1) = 0.097$	0.079	0.102	0.137
$\text{Var}_a (\hat{u}_2) = 0.066$	0.074	0.096	0.129
$\text{Var}_a (\hat{\alpha}_2) = 0.045$	0.034	0.051	0.069
$\text{Var}_a (\hat{\beta}_2) = 0.021$	0.019	0.025	0.034
$\text{Var}_a (\hat{u}_3) = 0.030$	0.027	0.035	0.047
$\text{Var}_a (\hat{\alpha}_3) = 0.019$	0.016	0.021	0.028
$\text{Var}_a (\hat{\beta}_3) = 0.013$	0.007	0.010	0.013
$\text{Var}_a (\hat{m}_t) = 0.097$	0.143	0.186	0.251

**Caso C**

Varianza asintótica	Límite de confianza inferior	Varianza simulada	Límite de confianza superior
$\text{Var}_a (\hat{u}_1) = 0.153$	0.138	0.179	0.241
$\text{Var}_a (\hat{\alpha}_1) = 0.093$	0.088	0.114	0.154
$\text{Var}_a (\hat{u}_2) = 0.043$	0.022	0.029	0.039
$\text{Var}_a (\hat{\alpha}_2) = 0.028$	0.013	0.017	0.023
$\text{Var}_a (\hat{\beta}_2) = 0.012$	0.012	0.016	0.022
$\text{Var}_a (\hat{u}_3) = 0.029$	0.027	0.035	0.047
$\text{Var}_a (\hat{\alpha}_3) = 0.019$	0.012	0.015	0.020
$\text{Var}_a (\hat{\beta}_3) = 0.012$	0.009	0.012	0.016
$\text{Var}_a (\hat{m}_l) = 0.094$	0.121	0.157	0.212
$\text{Var}_a (\hat{m}_{b2}) = 0.160$	0.257	0.334	0.451

**Caso D**

Varianza asintótica	Límite de confianza inferior	Varianza simulada	Límite de confianza superior
$\text{Var}_a (\hat{u}_1) = 0.136$	0.108	0.137	0.185
$\text{Var}_a (\hat{\alpha}_1) = 0.084$	0.071	0.092	0.124
$\text{Var}_a (\hat{u}_2) = 0.037$	0.024	0.031	0.042
$\text{Var}_a (\hat{\alpha}_2) = 0.025$	0.015	0.019	0.026
$\text{Var}_a (\hat{\beta}_2) = 0.012$	0.016	0.021	0.028
$\text{Var}_a (\hat{u}_3) = 0.020$	0.015	0.020	0.027
$\text{Var}_a (\hat{\alpha}_3) = 0.013$	0.008	0.011	0.015
$\text{Var}_a (\hat{\beta}_3) = 0.009$	0.007	0.009	0.012
$\text{Var}_a (\hat{m}_l) = 0.086$	0.086	0.112	0.151
$\text{Var}_a (\hat{m}_{b2}) = 0.152$	0.284	0.368	0.497

Tabla B.4 Varianzas asintóticas y simuladas de los parámetros trivariados de la distribución VET222

Caso A

Varianza asintótica	Límite de confianza inferior	Varianza simulada	Límite de confianza superior
$\text{Var}_a (\hat{u}_1) = 0.232$	0.230	0.307	0.414
$\text{Var}_a (\hat{\alpha}_1) = 0.161$	0.162	0.211	0.285
$\text{Var}_a (\hat{\beta}_1) = 0.025$	0.040	0.052	0.070
$\text{Var}_a (\hat{u}_2) = 0.083$	0.061	0.079	0.107
$\text{Var}_a (\hat{\alpha}_2) = 0.055$	0.036	0.047	0.063
$\text{Var}_a (\hat{\beta}_2) = 0.024$	0.032	0.041	0.055
$\text{Var}_a (\hat{u}_3) = 0.057$	0.054	0.071	0.096
$\text{Var}_a (\hat{\alpha}_3) = 0.036$	0.025	0.032	0.043
$\text{Var}_a (\hat{\beta}_3) = 0.022$	0.028	0.036	0.049
$\text{Var}_a (\hat{m}_t) = 0.123$	0.127	0.165	0.223

Caso B

Varianza asintótica	Límite de confianza inferior	Varianza simulada	Límite de confianza superior
$\text{Var}_a (\hat{u}_1) = 0.184$	0.210	0.273	0.368
$\text{Var}_a (\hat{\alpha}_1) = 0.133$	0.121	0.157	0.212
$\text{Var}_a (\hat{\beta}_1) = 0.024$	0.067	0.087	0.117
$\text{Var}_a (\hat{u}_2) = 0.066$	0.064	0.084	0.113
$\text{Var}_a (\hat{\alpha}_2) = 0.046$	0.035	0.046	0.062
$\text{Var}_a (\hat{\beta}_2) = 0.022$	0.032	0.042	0.057
$\text{Var}_a (\hat{u}_3) = 0.030$	0.030	0.039	0.053
$\text{Var}_a (\hat{\alpha}_3) = 0.019$	0.015	0.019	0.026
$\text{Var}_a (\hat{\beta}_3) = 0.013$	0.010	0.013	0.018
$\text{Var}_a (\hat{m}_t) = 0.100$	0.129	0.168	0.227

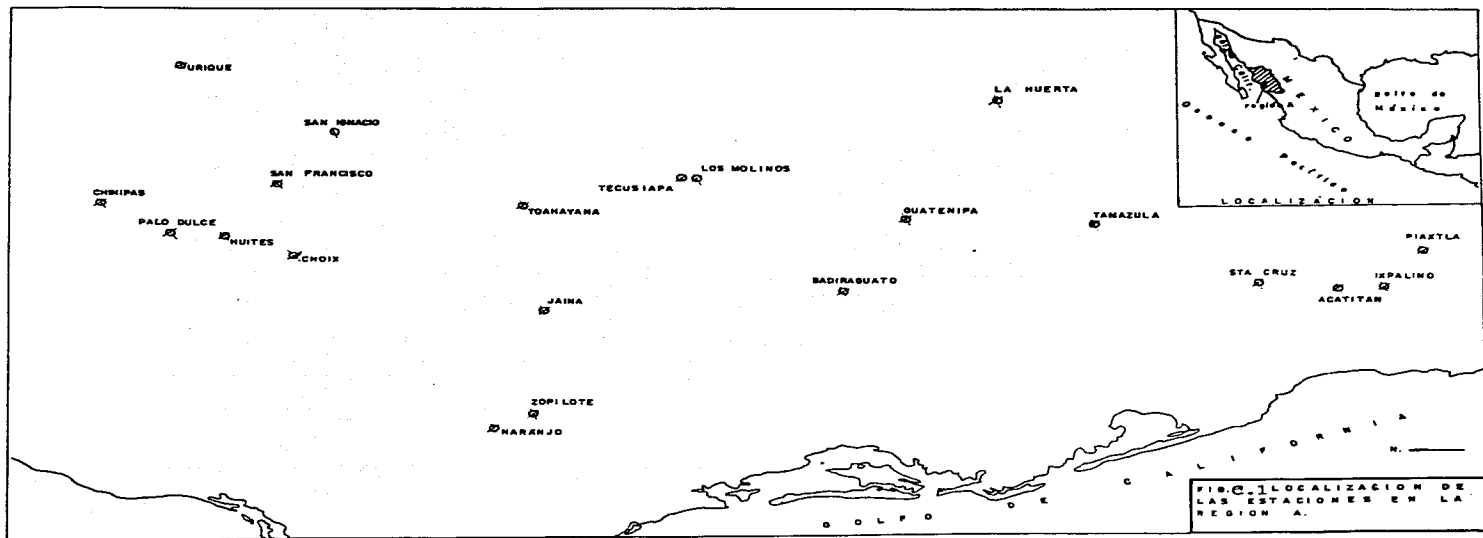
**Caso C**

Varianza asintótica	Límite de confianza inferior	Varianza simulada	Límite de confianza superior
$\text{Var}_a (\hat{u}_1) = 0.175$	0.174	0.227	0.306
$\text{Var}_a (\hat{\alpha}_1) = 0.128$	0.108	0.140	0.189
$\text{Var}_a (\hat{\beta}_1) = 0.023$	0.025	0.033	0.044
$\text{Var}_a (\hat{u}_2) = 0.043$	0.022	0.029	0.039
$\text{Var}_a (\hat{\alpha}_2) = 0.028$	0.012	0.016	0.022
$\text{Var}_a (\hat{\beta}_2) = 0.013$	0.012	0.015	0.020
$\text{Var}_a (\hat{u}_3) = 0.029$	0.024	0.032	0.043
$\text{Var}_a (\hat{\alpha}_3) = 0.018$	0.011	0.014	0.019
$\text{Var}_a (\hat{\beta}_3) = 0.012$	0.009	0.012	0.016
$\text{Var}_a (\hat{m}_t) = 0.096$	0.120	0.156	0.210
$\text{Var}_a (\hat{m}_{b2}) = 0.162$	0.292	0.379	0.511

**Caso D**

Varianza asintótica	Límite de confianza inferior	Varianza simulada	Límite de confianza superior
$\text{Var}_a (\hat{u}_1) = 0.158$	0.151	0.196	0.265
$\text{Var}_a (\hat{\alpha}_1) = 0.118$	0.111	0.144	0.194
$\text{Var}_a (\hat{\beta}_1) = 0.022$	0.029	0.038	0.051
$\text{Var}_a (\hat{u}_2) = 0.037$	0.022	0.029	0.039
$\text{Var}_a (\hat{\alpha}_2) = 0.025$	0.015	0.020	0.026
$\text{Var}_a (\hat{\beta}_2) = 0.012$	0.009	0.012	0.016
$\text{Var}_a (\hat{u}_3) = 0.020$	0.016	0.021	0.028
$\text{Var}_a (\hat{\alpha}_3) = 0.013$	0.008	0.011	0.015
$\text{Var}_a (\hat{\beta}_3) = 0.009$	0.008	0.010	0.013
$\text{Var}_a (\hat{m}_t) = 0.087$	0.082	0.107	0.144
$\text{Var}_a (\hat{m}_{b2}) = 0.153$	0.327	0.425	0.574

**APENDICE C**



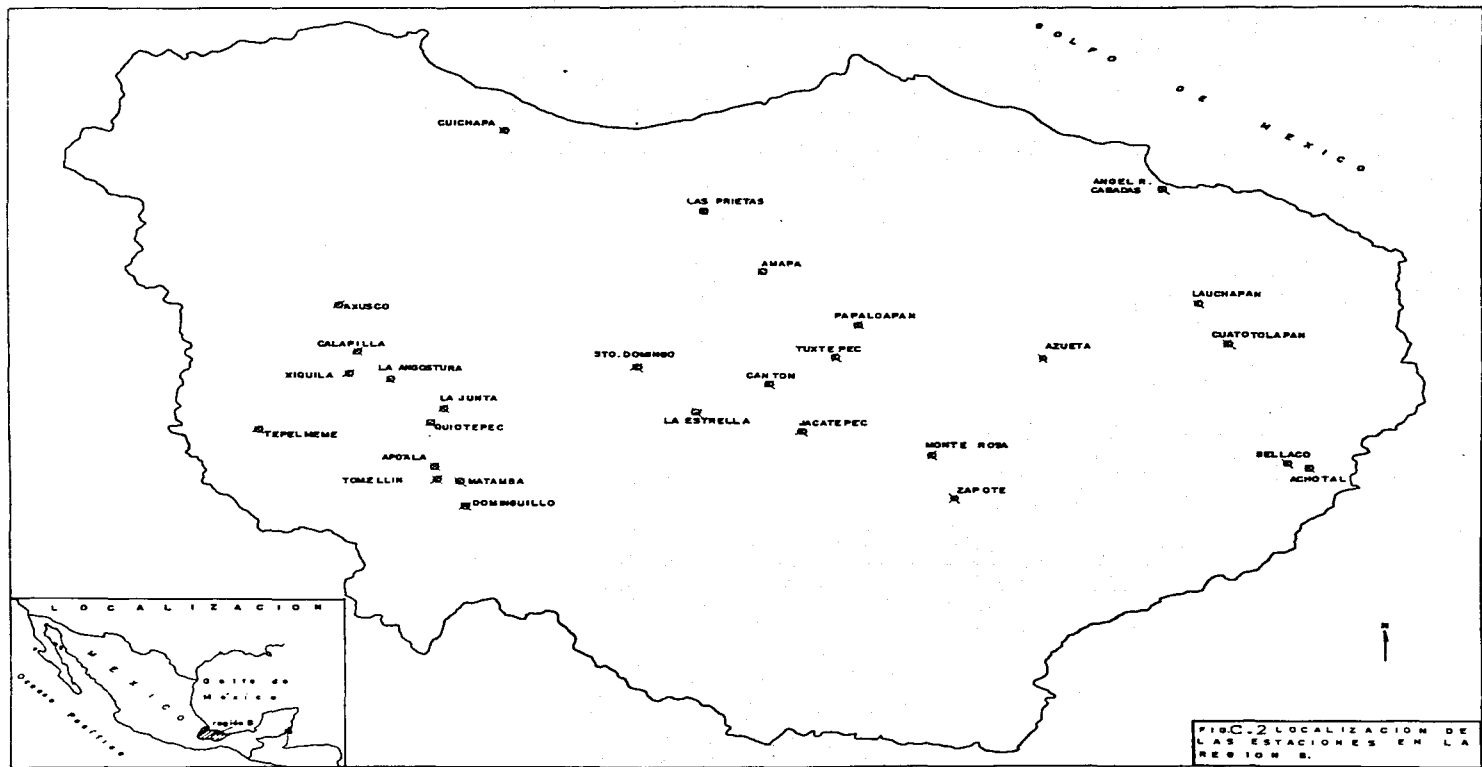


FIG. 2 LOCALIZACION DE LAS ESTACIONES EN LA REGION B.



Tabla C.1 Descripción y características de las estaciones en la región A

Nombre estación	Ubicación Estado	Area (Km <sup>2</sup> )	Años de registro	Periodo de registro
Acatitan	Sinaloa	1884	26	1955-1980
Badiraguato	Sinaloa	1018	22	1955-1980
Chinipas	Chihuahua	5098	15	1966-1980
Choix	Sinaloa	1403	25	1956-1980
Guatenipa	Sinaloa	8252	16	1955-1980
Huites	Sinaloa	26020	39	1942-1980
Ixpalino	Sinaloa	6166	28	1953-1980
Jaina	Sinaloa	8179	39	1942-1980
La Huerta	Sinaloa	8149	12	1969-1980
Los Molinos	Sinaloa	3763	10	1961-1970
Naranjo	Sinaloa	2064	42	1939-1980
Palo Dulce	Chihuahua	6323	23	1958-1980
Piaxtia	Sinaloa	5307	16	1958-1973
San Francisco	Sinaloa	17531	32	1942-1973
San Ignacio	Chihuahua	12166	14	1967-1980
Santa Cruz	Sinaloa	8919	37	1944-1980
Tamazula	Sinaloa	2241	18	1963-1980
Tecusiapa	Sinaloa	3763	15	1959-1973
Toahayana	Sinaloa	5281	23	1958-1980
Urique II	Chihuahua	4000	13	1968-1980
Zopilote	Sinaloa	666	42	1939-1980

Tabla C.2 Descripción y características de las estaciones en la región B

Nombre estación	Ubicación Estado	Área (Km <sup>2</sup> )	Años de registro	Periodo de registro
Achotal	Veracruz	2333	22	1949-1970
Amapa	Veracruz	468	12	1959-1970
Angel R Cabadas	Veracruz	125	14	1957-1970
Apoala	Oaxaca	341	14	1957-1970
Axusco	Puebla	788	12	1959-1970
Azueta	Oaxaca	4656	22	1949-1970
Bellaco	Veracruz	2917	22	1949-1970
Calapilla	Oaxaca	987	16	1955-1970
Canton	Oaxaca	14038	22	1949-1970
Cuatotolapan	Veracruz	7090	22	1949-1970
Cuichapa	Veracruz	1732	22	1949-1970
Dominguillo	Oaxaca	695	15	1956-1970
Jacatepec	Oaxaca	1117	18	1953-1970
La Angostura	Oaxaca	6574	16	1955-1970
La Estrella	Oaxaca	774	17	1954-1970
La Junta	Oaxaca	11878	17	1954-1970
Las Prietas	Veracruz	216	22	1949-1970
Lauchapan	Veracruz	1478	22	1949-1970
Matamba	Oaxaca	2143	14	1957-1970
Monte Rosa	Oaxaca	2870	14	1957-1970
Pápaloapan	Veracruz	21236	22	1949-1970
Quiotepec	Oaxaca	4832	22	1949-1970
Santo Domingo	Oaxaca	12681	17	1954-1970
Teplmeme	Oaxaca	167	15	1956-1970
Tomellin	Oaxaca	780	12	1959-1970
Tuxtepec	Oaxaca	15719	10	1961-1970
Xiquila	Oaxaca	1078	16	1955-1970
Zapote	Oaxaca	633	15	1956-1970

AÑO	ACATITAN	ADARALAYO	CHIRIAPÁ	CHOIX	QUATEMÉ	HUITES	EPALINDO	JAINA	LA MUERTA	LOS MOLINOS	NARANJO	PALO DULCE	PIATZLA	SAN FRANCISCO	SAN IGNACIO	STA. CRUZ	TAMAZULA	TULSIAPÁN	TOMAYAMA	URIOQUE	ZOPILOTE	
9 30												277									162	
9 40												170										35
4 1												87										10
4 2						2531		205 6			1 409			1 558							400	
4 3						1437 8		699 1			1 770			2202							819	
4 4						2580		580			221			1375			2 142				110	
4 5						1 499		714			403			894			1 023				118	
4 6						1 165		746			304			590			838				194	
4 7						1 273		771			61			1137			1161				23	
4 8						32152		693			699			1 668			1 062				690	
4 9						10005		2614			1 320			4 710			784				779	
5 0						3229		2336			374			2920			1085				182	
5 1						677		437			31			493			488				75	
5 2						1269		594			98			699			677				386	
5 3						1025	10 48	546			90			678			807				487	
5 4						955		516			185			683			553				54	
5 5						4780	10 45	1 600			475			3101			1252				208	
5 6		579				696		639			67			583			370				377	
5 7		350			74	593		362			190			434			330				70	
5 8		840			2201	3010		1902	2232		3093	455	1344	3750			1958		1560		1030	
5 9		705			299	1908		722	616		593	743	510	1572			762		387	243	334	
6 0		1510	361		1150	15000	356	2003			334	6800	944	6040			1074		1525	2239	177	
6 1		646			159	1309		864	715	116			472	821			1280		581	793	230	
6 2		1674			376	1620		1766	1137		231	434	347	1276	997		1002		810	888	331	
6 3		622			407	2702		2203	1226		161	433	584	2850	2134		3680	894	1547	1814	806	
6 4		457			200	1319		707	454		206	223	481	652	735		801	592	271	392	62	
6 5		710			494	1944		1334	630		82	534	1300	614	652		689	228	496	329	293	
6 6		1161			273	355		2420	548		282	330	674	631	2144		1156	607	620	812	611	
6 7		553			403	300	2037	2506	1056	600	172	684	635	937	1175	1341	950	907	1010	1251	710	
6 8		1000			338	5000	1534	6200	1338		273	1720	530	6399	1308	1164	7000	723	767	1298	216	
6 9		400			64	435	1508	872	340	175	182	255	1100	799	605	960	484	292	287	295	115	
7 0		588			250	417	136	15398	659		435	390	765	980	900	900	921	500	212	311	88	
7 1		422			435	1420	360	2205	548	167	600	1283	503	950	824	812	590	694	1000	308	318	
7 2		1830			1152	273	4230	2229	4365	632	1931	405	688	3527	2128	1740	3332	1246	2521	676	274	
7 3		792			585	1516		801	1349		1251	1150	1370	640	4855		3073	898	463	3075	1570	
7 4		2003			600	1742		1717	3790		800	2245				1897	2790	361		963	319	
7 5		1410			290	4300		192	488	1086	450	491	273			1002	620	564		368	305	
7 6		1065			320	423	580	3127	3240	675	872	1250		985	740	4029	1435	442		839	293	
7 7		625			250	752	189	451	1133	620	331	73	333			861	836	345		672	79	
7 8		542			245	1446		348	860	5022	405	1020	322			1696	640	564		1500	300	
7 9		355			890	1558		578	3050	6600	1850	1620	1605			2210	3080	365		1630	716	
8 0		1404			434	720		417	825	1498	1374	377	451			876	1550	362		331	338	
8 1					516	3392						656		1180							320	

TABLA C. GASTOS MÁXIMOS ANUALES (m<sup>3</sup>/a)  
DE LAS ESTACIONES EN LA REGIÓN A

AÑO	ACHOTAL	AMAPA	ANGEL R. CABADAS	APDALA	AXUSCO	AZUETA	BELLACO	CALAPILLA	CANTON	CUKUTOLAPAN	CUICHAPA	DOMINGUILLO	JACATEPEC	LA ANGOSTURA
1900	3552					7700	4999							
1901	4551					5999	6899							
1902	5544					3322	7400							
1903	5555					4400	4008							
1904	5555					4477	4499							
1905	5555					4477	4499							
1906	5555					4477	4499							
1907	5555					4477	4499							
1908	5555					4477	4499							
1909	5555					4477	4499							
1910	5555					4477	4499							
1911	5555					4477	4499							
1912	5555					4477	4499							
1913	5555					4477	4499							
1914	5555					4477	4499							
1915	5555					4477	4499							
1916	5555					4477	4499							
1917	5555					4477	4499							
1918	5555					4477	4499							
1919	5555					4477	4499							
1920	5555					4477	4499							
1921	5555					4477	4499							
1922	5555					4477	4499							
1923	5555					4477	4499							
1924	5555					4477	4499							
1925	5555					4477	4499							
1926	5555					4477	4499							
1927	5555					4477	4499							
1928	5555					4477	4499							
1929	5555					4477	4499							
1930	5555					4477	4499							
1931	5555					4477	4499							
1932	5555					4477	4499							
1933	5555					4477	4499							
1934	5555					4477	4499							
1935	5555					4477	4499							
1936	5555					4477	4499							
1937	5555					4477	4499							
1938	5555					4477	4499							
1939	5555					4477	4499							
1940	5555					4477	4499							
1941	5555					4477	4499							
1942	5555					4477	4499							
1943	5555					4477	4499							
1944	5555					4477	4499							
1945	5555					4477	4499							
1946	5555					4477	4499							
1947	5555					4477	4499							
1948	5555					4477	4499							
1949	5555					4477	4499							
1950	5555					4477	4499							
1951	5555					4477	4499							
1952	5555					4477	4499							
1953	5555					4477	4499							
1954	5555					4477	4499							
1955	5555					4477	4499							
1956	5555					4477	4499							
1957	5555					4477	4499							
1958	5555					4477	4499							
1959	5555					4477	4499							
1960	5555					4477	4499							
1961	5555					4477	4499							
1962	5555					4477	4499							
1963	5555					4477	4499							
1964	5555					4477	4499							
1965	5555					4477	4499							
1966	5555					4477	4499							
1967	5555					4477	4499							
1968	5555					4477	4499							
1969	5555					4477	4499							
1970	5555					4477	4499							
1971	5555					4477	4499							
1972	5555					4477	4499							
1973	5555					4477	4499							
1974	5555					4477	4499							
1975	5555					4477	4499							
1976	5555					4477	4499							
1977	5555					4477	4499							
1978	5555					4477	4499							
1979	5555					4477	4499							
1980	5555					4477	4499							
1981	5555					4477	4499							
1982	5555					4477	4499							
1983	5555					4477	4499							
1984	5555					4477	4499							
1985	5555					4477	4499							
1986	5555					4477	4499							
1987	5555					4477	4499							
1988	5555					4477	4499							
1989	5555					4477	4499							
1990	5555					4477	4499							
1991	5555					4477	4499							
1992	5555					4477	4499							
1993	5555					4477	4499							
1994	5555					4477	4499							
1995	5555					4477	4499							
1996	5555					4477	4499							
1997	5555					4477	4499							
1998	5555					4477	4499							
1999	5555					4477	4499							
2000	5555					4477	4499							

TABLA C-4 GASTOS MAXIMOS ANUALES (en \$/a)  
DE LAS ESTACIONES EN LA REGION B

Tabla C.5 Coeficientes de correlación y tamaños de muestra relativos para los grupos de tres estaciones seleccionados en la región A.

Estaciones	Coeficiente de correlación	Tamaños relativos				
		$n_1$	$n_2$	$n_3$	$n_4$	$n_5$
Acatitan-Sta Cruz-Ixpalino	0.926	9	2	26	0	0
Badiraguato-Cuatenipa-Los Molinos	0.670	2	4	6	10	1
Chinipas-Palo Dulce-Urique	0.846	8	2	13	0	1
Choix-Huites-Sn Francisco	0.969	0	14	18	7	0
Guatenipa-La Huerta-Tamazula	0.954	2	4	12	1	0
Jaina-Toahayana-Tecusiapa	0.936	16	1	15	7	0
Naranja-Jaina-Zopilote	0.687	0	3	39	0	0
Palo Dulce-Huites-San Francisco	0.987	0	16	16	7	1
Piactla-Acatitan-Ixpalino	0.864	2	3	16	7	0
Toahayana-Tecusiapa-Los Molinos	0.969	1	2	10	3	7
Urique-Sn Francisco-Sn Ignacio	0.991	25	1	6	7	0
Zopilote-Toahayana-Jaina	0.883	3	16	23	0	0

Tabla C.6 Coeficientes de correlación y tamaños de muestra relativos para los grupos de tres estaciones seleccionados en la región B.

Estaciones	Coeficiente correlación	Tamaños relativos				
		n <sub>1</sub>	n <sub>2</sub>	n <sub>3</sub>	n <sub>4</sub>	n <sub>5</sub>
Achotal-Bellaco-Cuatotolapan	0.962	0	0	22	0	0
Amapa-Papaloapan-Tuxtepec	0.797	10	2	10	0	0
Angel R C-Lauchapan-Cuatotolapan	0.785	0	8	14	0	0
Apoala-Matamba-Quiootepec	0.981	8	0	14	0	0
Axusco-Calapilla-La Angostura	0.203	0	4	12	0	0
Azueta-Papaloapan-Tuxtepec	0.918	0	12	10	0	0
Canton-Papaloapan-Tuxtepec	0.915	0	12	10	0	0
Cuatotolapan-Bellaco-Lauchapan	0.968	0	0	22	0	0
Cuichapa-Las Prietas-Amapa	0.438	0	10	12	0	0
Dominguillo-Matamba-Apoala	0.832	1	0	14	0	0
Jacatepec-Papaloapan-Tuxtepec	0.909	4	8	10	0	0
La Angostura-Quiootepec-La Junta	0.978	5	1	16	0	0
La Estrella-Canton-Tuxtepec	0.864	5	7	10	0	0
Las Prietas-Amapa-Papaloapan	0.756	0	10	12	0	0
Monte Rosa-Papaloapan-Tuxtepec	0.939	8	4	10	0	0
Sto Domingo-La Estrella-Canton	0.835	5	0	17	0	0
Tepelmeme-Xiquila-La Angostura	0.723	0	1	15	0	0
Tomellin-Apoala-Quiootepec	0.791	8	2	12	0	0
Xiquila-La Angostura-La Junta	0.809	1	0	16	0	0
Zapote-Monte Rosa-Azueta	0.773	7	1	14	0	0

Tabla C.7 Parámetros iniciales univariados de las distribuciones Gumbel y GVE para las estaciones de la región A.

Estación	Distribución Gumbel		Distribución GVE		
	ubicación	escala	ubicación	escala	forma
Acatitan	694.80	447.80	576.21	263.80	-0.62
Badiraguato	367.19	274.28	349.68	229.44	-0.03
Chinipas	712.13	414.88	561.48	265.01	-0.85
Choix	245.87	136.85	236.69	130.15	-0.12
Guatenipa	1227.64	1020.68	808.22	552.59	-1.06
Huites	1944.06	1575.22	1564.78	978.87	-0.57
Ixpalino	887.38	621.74	772.57	473.97	-0.38
Jaina	774.12	507.09	651.15	328.94	-0.55
La Huerta	568.86	411.21	489.62	330.42	-0.40
Los Molinos	156.42	54.90	170.86	61.59	0.49
Naranjo	328.21	342.45	239.35	222.22	-0.61
Palo Dulce	685.58	509.62	539.81	247.47	-0.76
Piactla	866.83	723.58	657.64	276.01	-0.94
Sn Francisco	1156.91	845.05	926.53	532.56	-0.65
Sn Ignacio	1231.40	568.27	970.21	205.84	-1.46
Sta Cruz	946.79	596.84	835.74	440.23	-0.40
Tamazula	449.57	173.73	437.45	168.88	-0.13
Tecusiapa	659.43	512.84	534.53	365.15	-0.54
Toahayana	707.83	450.81	690.20	435.25	-0.07
Urique	216.05	121.43	216.98	121.95	0.01
Zopilote	220.18	202.24	204.06	187.85	-0.15

Tabla C.8 Parámetros iniciales univariados de las distribuciones Gumbel y GVE para las estaciones de la región B.

Estación	Distribución Gumbel		Distribución GVE		
	ubicación	escala	ubicación	escala	forma
Achotal	497.03	136.92	498.36	137.75	0.02
Amapa	117.11	47.23	110.71	40.70	-0.27
Angel R Cabadas	145.92	92.52	143.36	90.75	-0.05
Apoala	53.25	57.20	38.94	35.68	-0.57
Axusco	51.47	24.97	49.22	22.98	-0.17
Azueta	832.58	153.28	784.89	101.96	-0.71
Bellaco	551.32	143.88	526.98	113.41	-0.33
Calapilla	91.09	67.45	81.56	57.65	-0.28
Canton	1926.15	639.61	1921.92	637.65	-0.01
Cuatotolapan	776.59	272.23	687.30	118.12	-0.93
Cuichapa	241.73	79.52	221.56	53.15	-0.57
Dominguillo	33.39	22.49	25.77	11.89	-0.89
Jacalepec	1258.65	351.95	1205.94	300.89	-0.30
La Angostura	213.17	92.07	222.95	99.13	0.19
La Estrella	1197.07	290.49	1205.17	295.10	0.05
La Junta	386.43	219.96	332.87	153.30	-0.56
Las Prietas	214.52	120.58	218.49	123.07	0.06
Lauchapan	347.21	166.46	339.48	160.69	-0.09
Matamba	242.93	161.36	212.22	127.40	-0.40
Monte Rosa	887.25	318.49	838.49	268.34	-0.31
Papaloapan	3464.87	966.11	3396.98	908.53	-0.13
Quiotepec	354.73	198.49	341.08	187.57	-0.13
Sto Domingo	716.07	281.30	684.39	251.35	-0.23
Temelmeme	146.17	42.27	140.31	36.40	-0.27
Tomellin	109.86	68.71	109.46	68.35	-0.01
Tuxtepec	2990.05	422.88	2924.17	353.37	-0.32
Xiquila	231.05	102.24	233.98	103.55	0.05
Zapote	502.19	164.89	480.54	144.19	-0.26



## APENDICE D

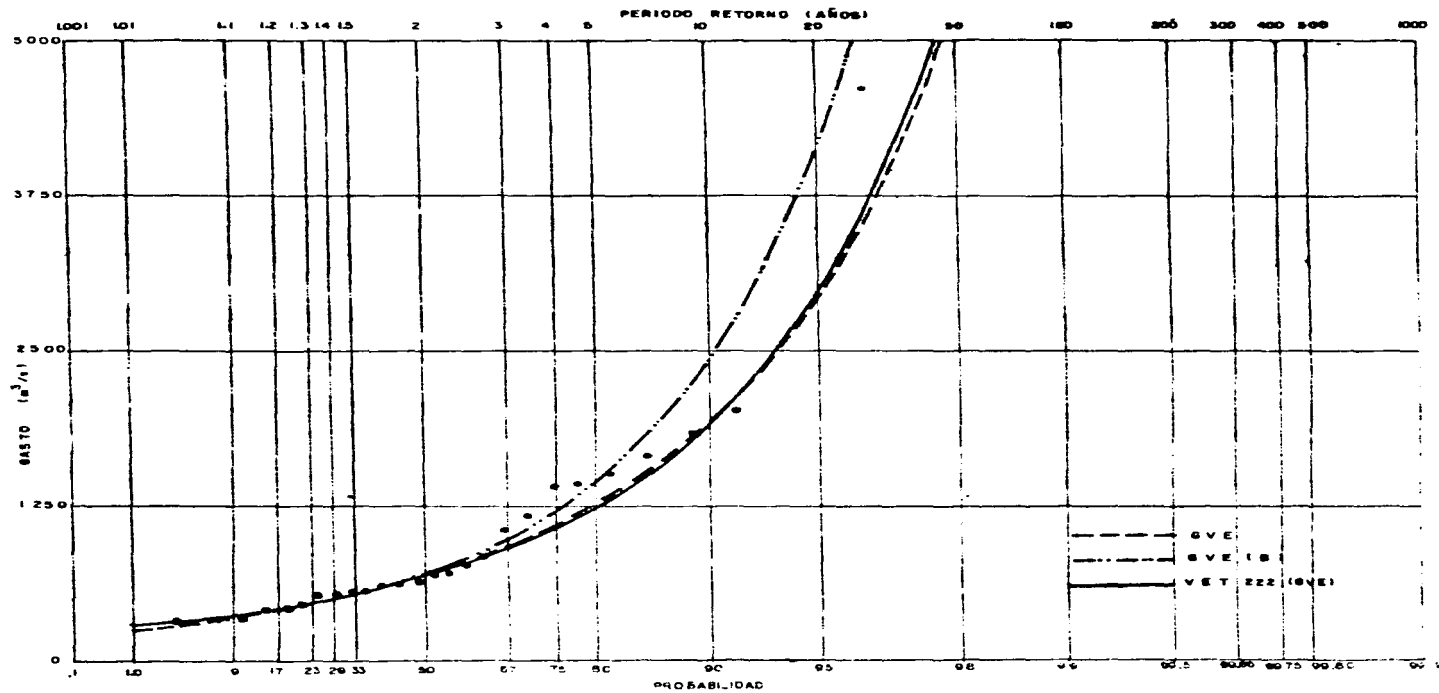


Fig.D.1 Curvas de frecuencia empírica y ajustado mediante las aproximaciones univariada, bivariable y trivariada para los gastos máximos anuales de la estación Acahualtén.

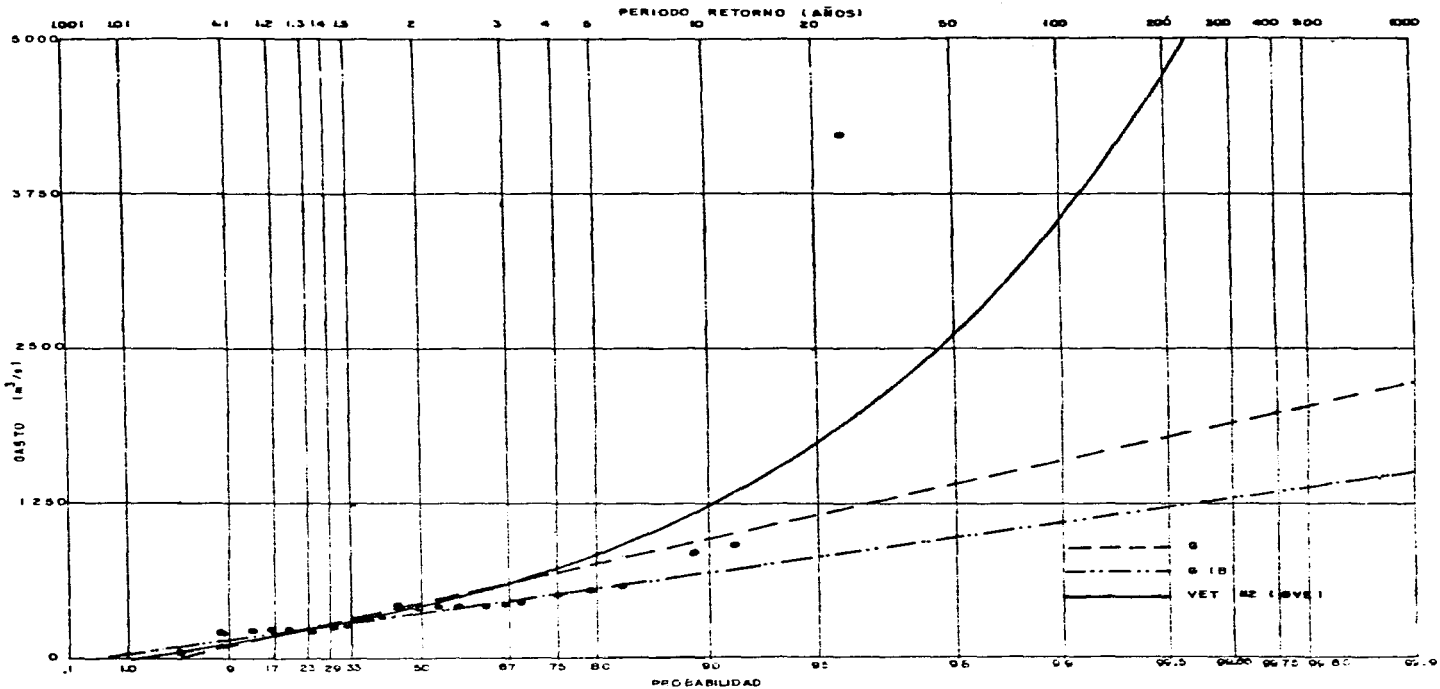


Fig. 2. Curvas de frecuencia empirica y ajustado mediante las aproximaciones univariada, bivarida, y trivariada para los gastos máximos anuales de la estación Badiraguato

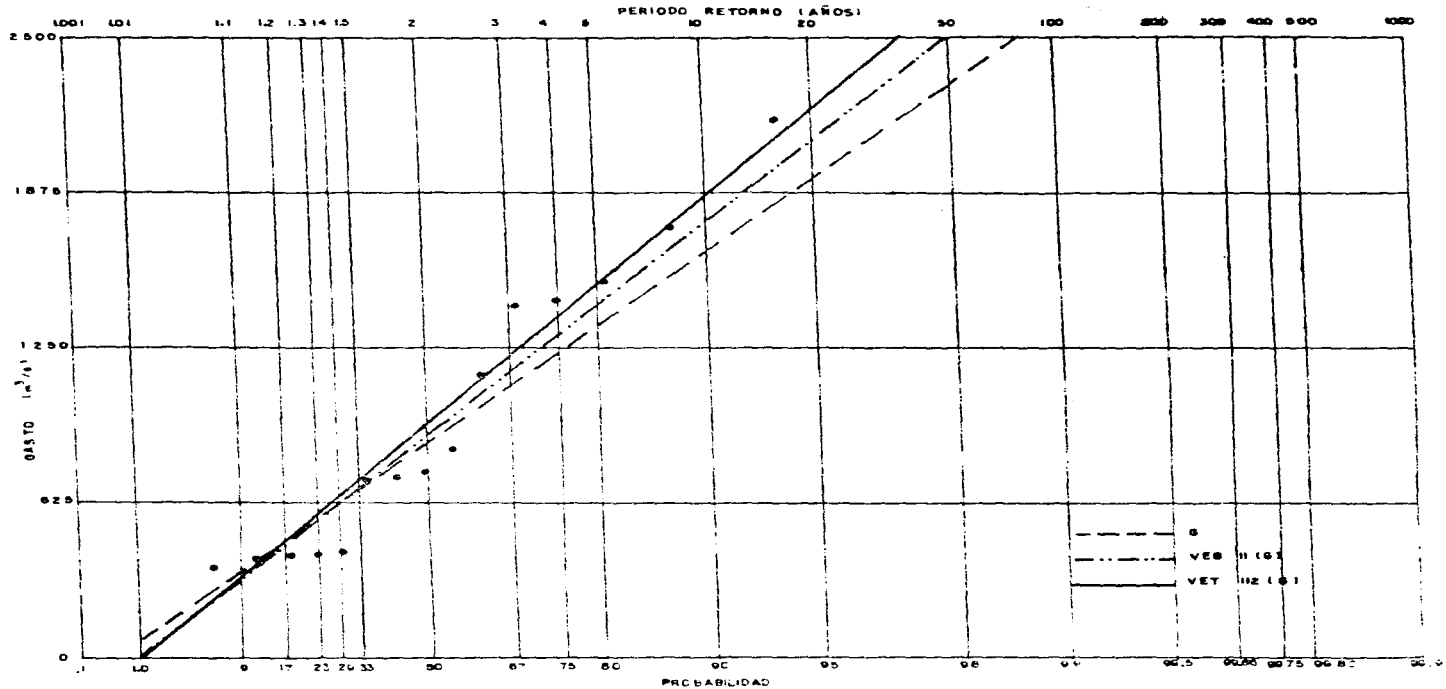


Fig.D.3 Curvas de frecuencia empírica y ajuste mediante las aproximaciones univariada, bivariable y trivariada para los gastos máximos anuales de la estación Chinipas

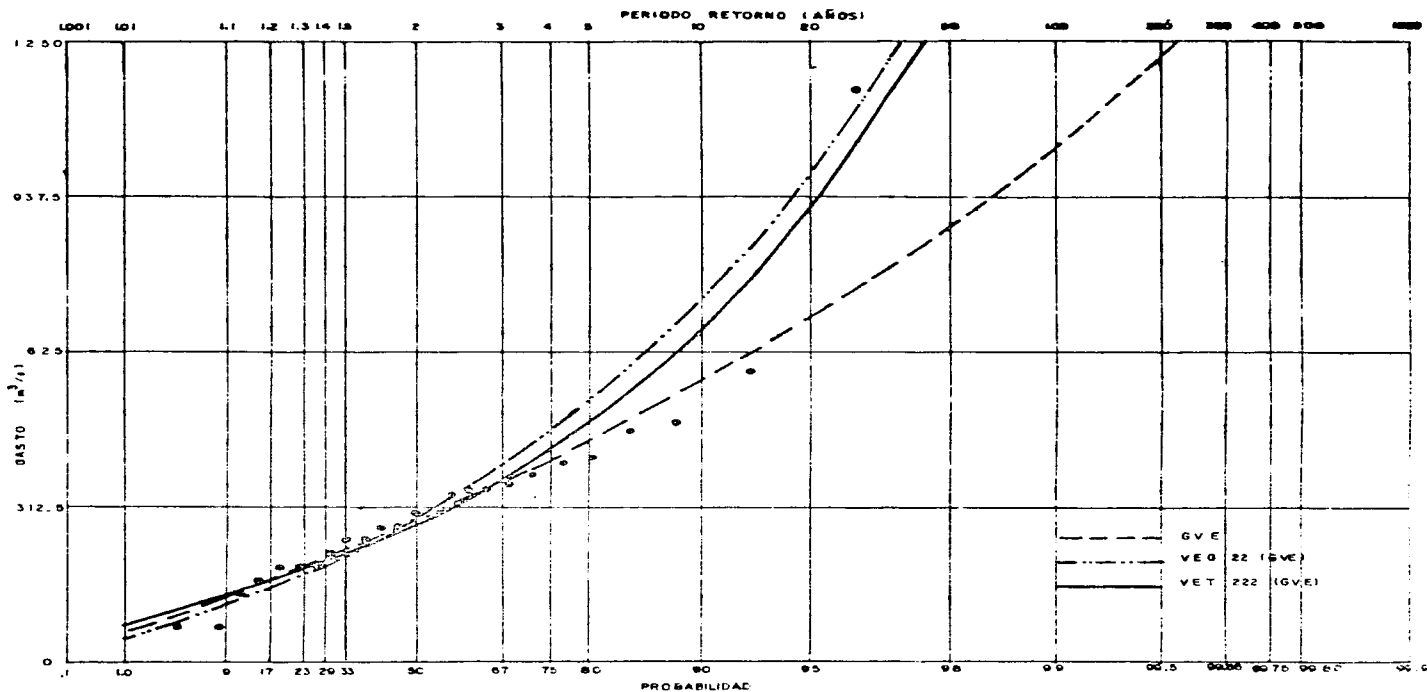


Fig D A Curvas de frecuencia empirica y ajustes mediante las aproximaciones univariado, bivariado y trivariado para los gastos máximos anuales de la estación Chozis

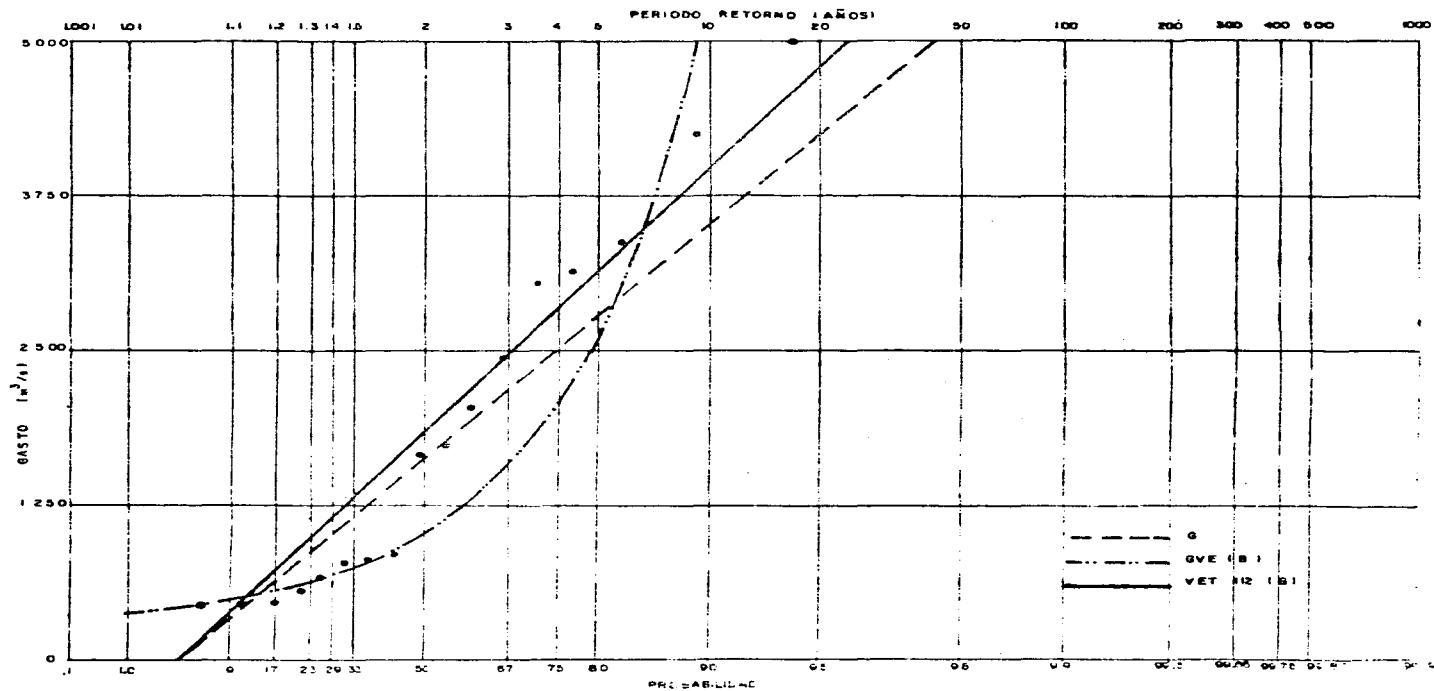


Fig. D.5 Curvas de frecuencia empirica y ajustado mediante las aproximaciones univariado, bivariado y trivariado para los gastos máximos anuales de la estación Guetzing.

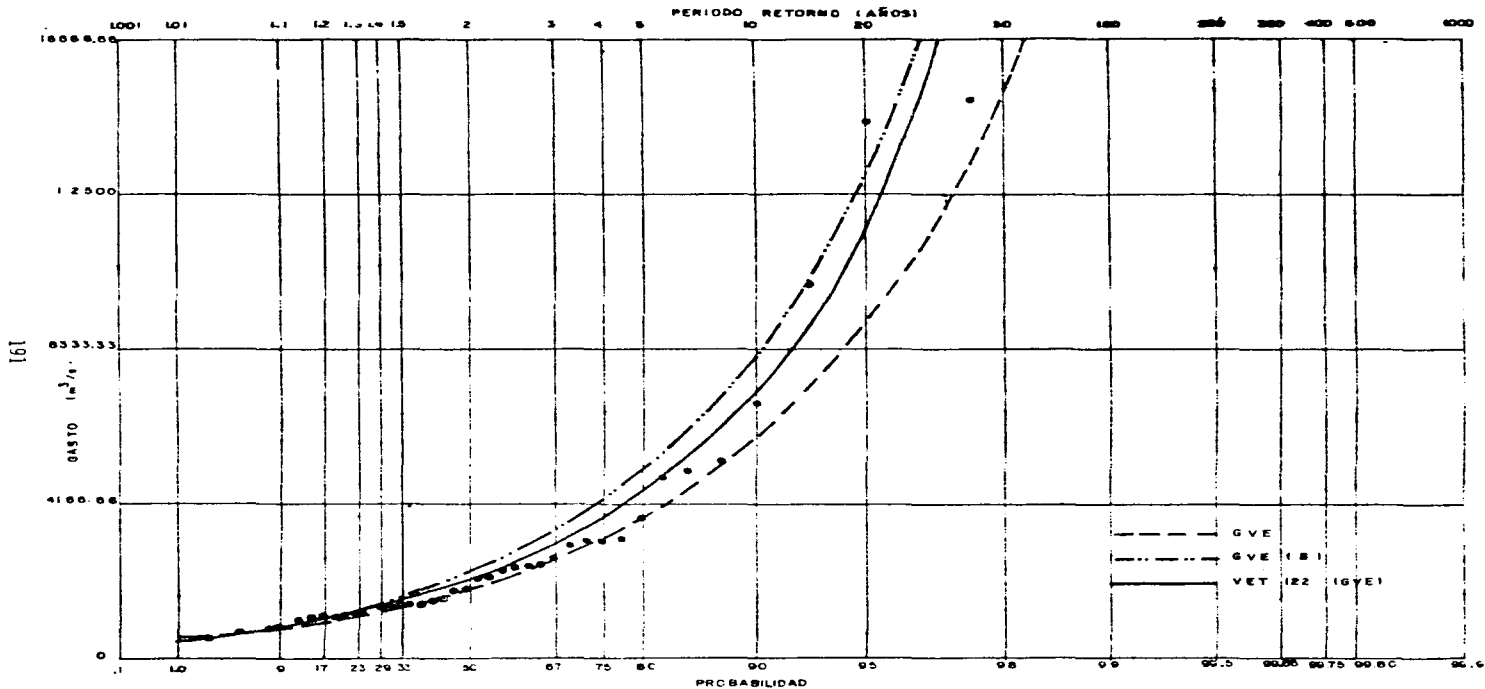


Fig. D.6. Curvas de frecuencia empirica y ajuste mediante las aproximaciones univariada, bivariada y trivariada para los gastos maximos anuales de la estacion Melilla.

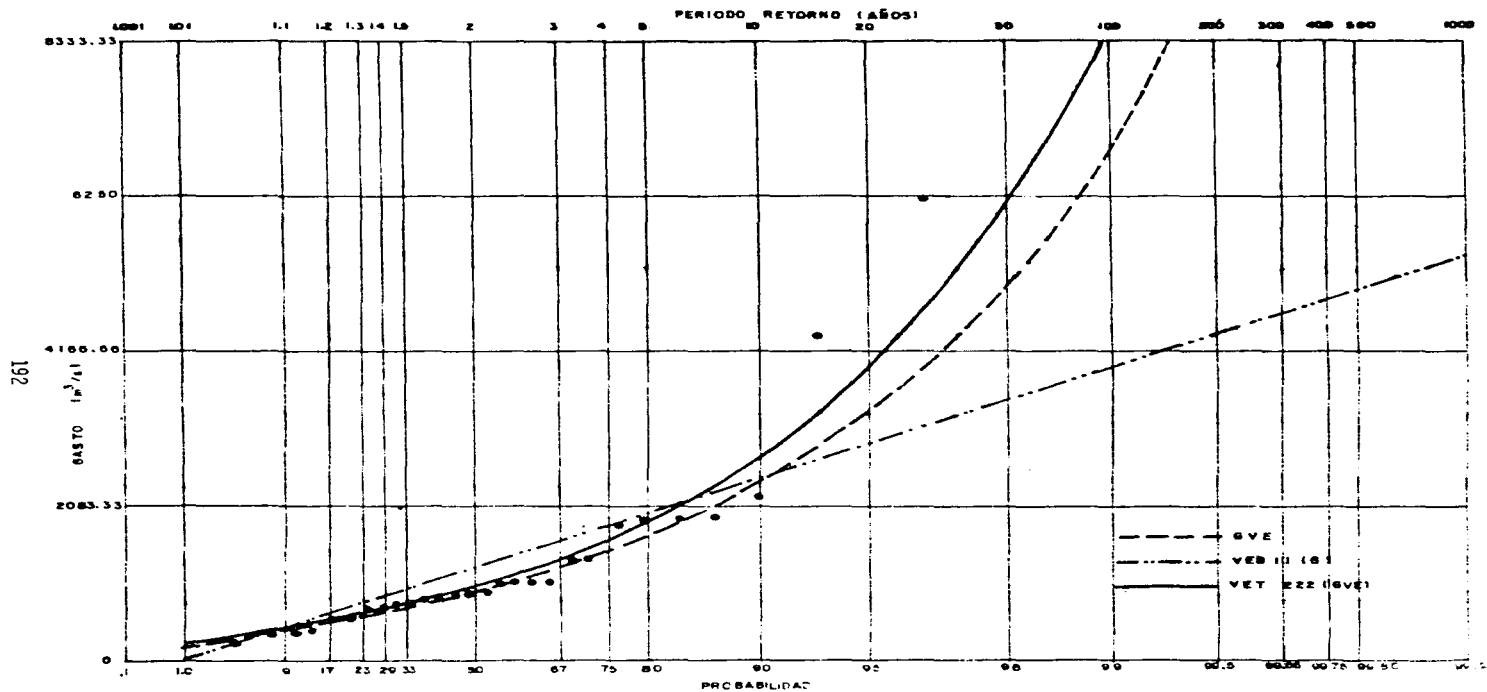


Fig D.7 Curvas de frecuencia empirica y ajuste mediante los procedimientos de GVE, IGVE y IGVET para los gastos máximos anuales de la estación Lapalme



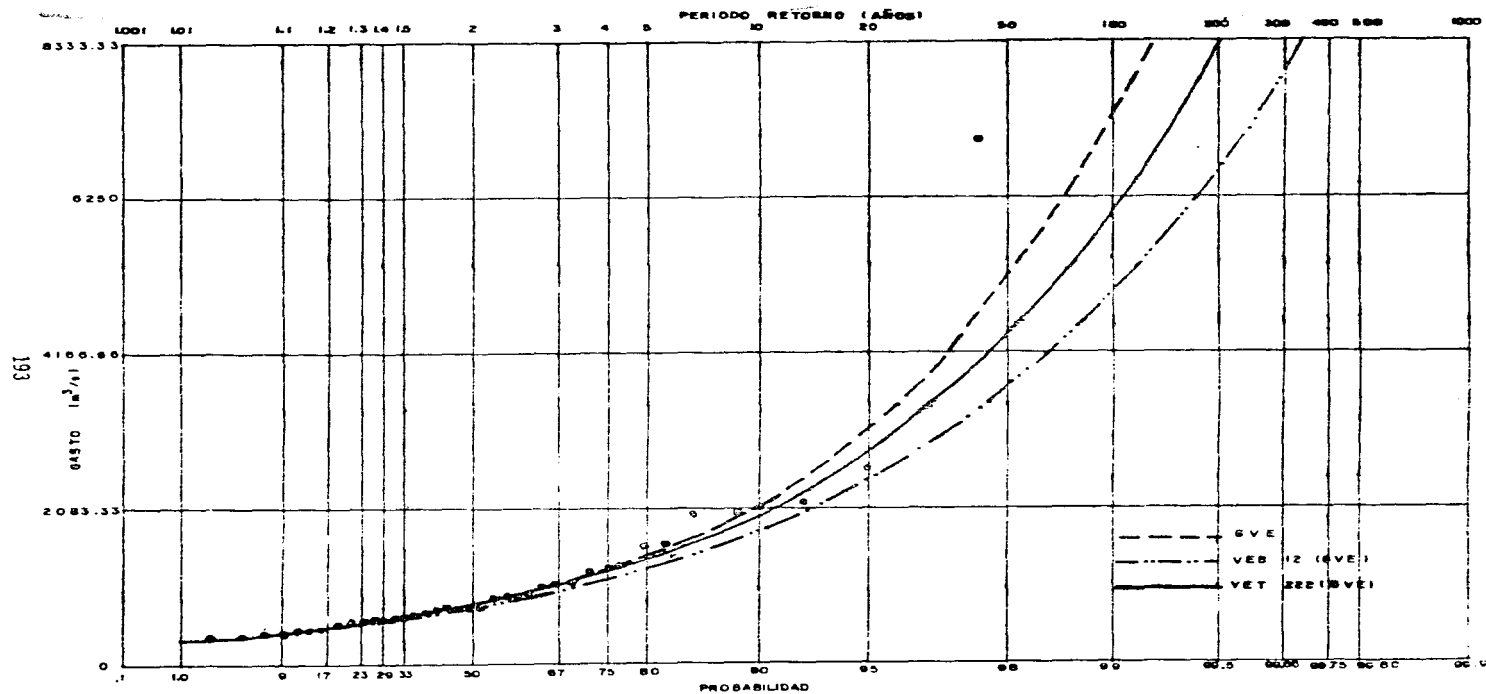


Fig. D. B. Curvas de frecuencia empíricas y ajustadas mediante las aproximaciones univariadas, bivariadas y trivariadas para los gastos máximos anuales de la estación Jorale.

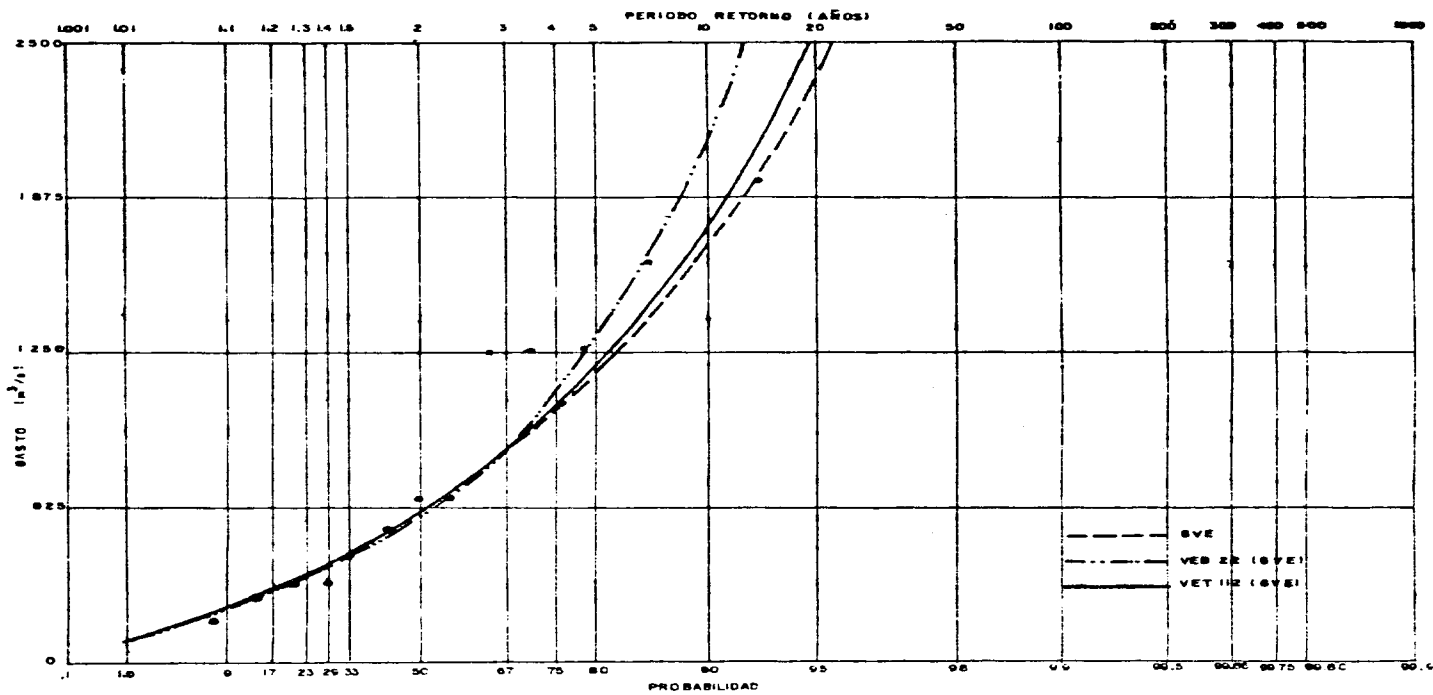


Fig. 9. Curvas de frecuencia empirica y ajustes mediante las aproximaciones univariadas, bivariada y trivariada para los gastos máximos anuales de la estación La Muerte

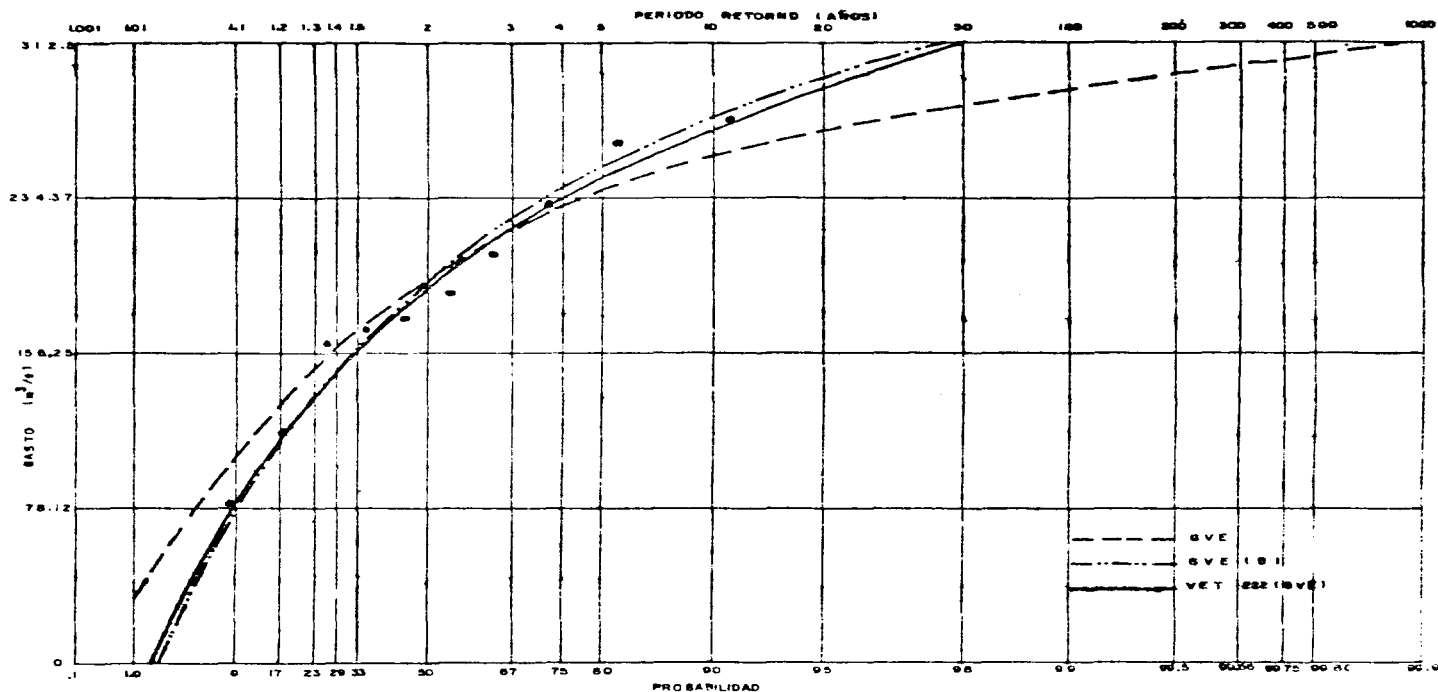


Fig. D. D. Curvas de frecuencia empírica y ajustada mediante las aproximaciones univariado, bivariado y "ivergado para los gastos máximos anuales de la estación Los Melinos.

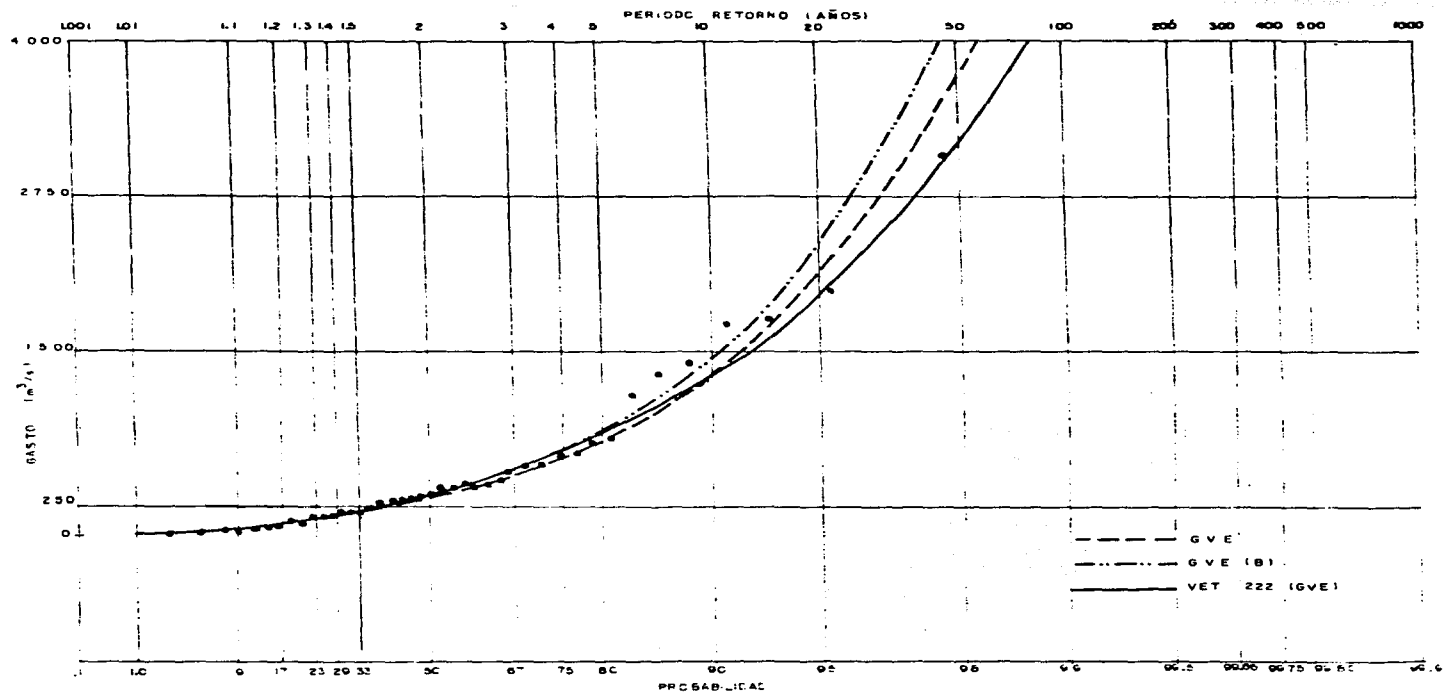


Fig.D.11 Curvas de frecuencia empirica y ajustado mediante las aproximaciones univariada, bivariada y trivariada para los gastos maximos anuales de la estacion Naranjo.

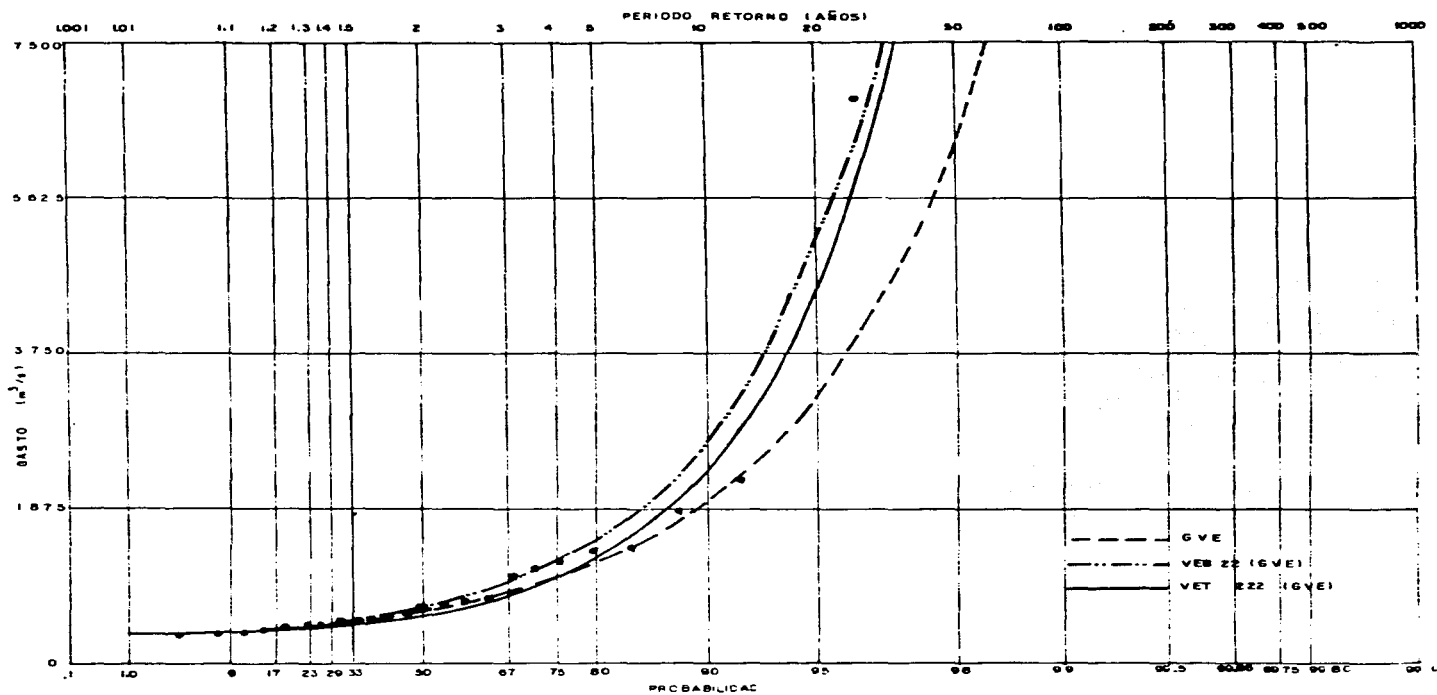


Fig.D.12 Curvas de frecuencia empirica y ajustada mediante las aproximaciones univariada, bivariada y trivariada para los gastos máximos anuales de la estación Peto Dulce

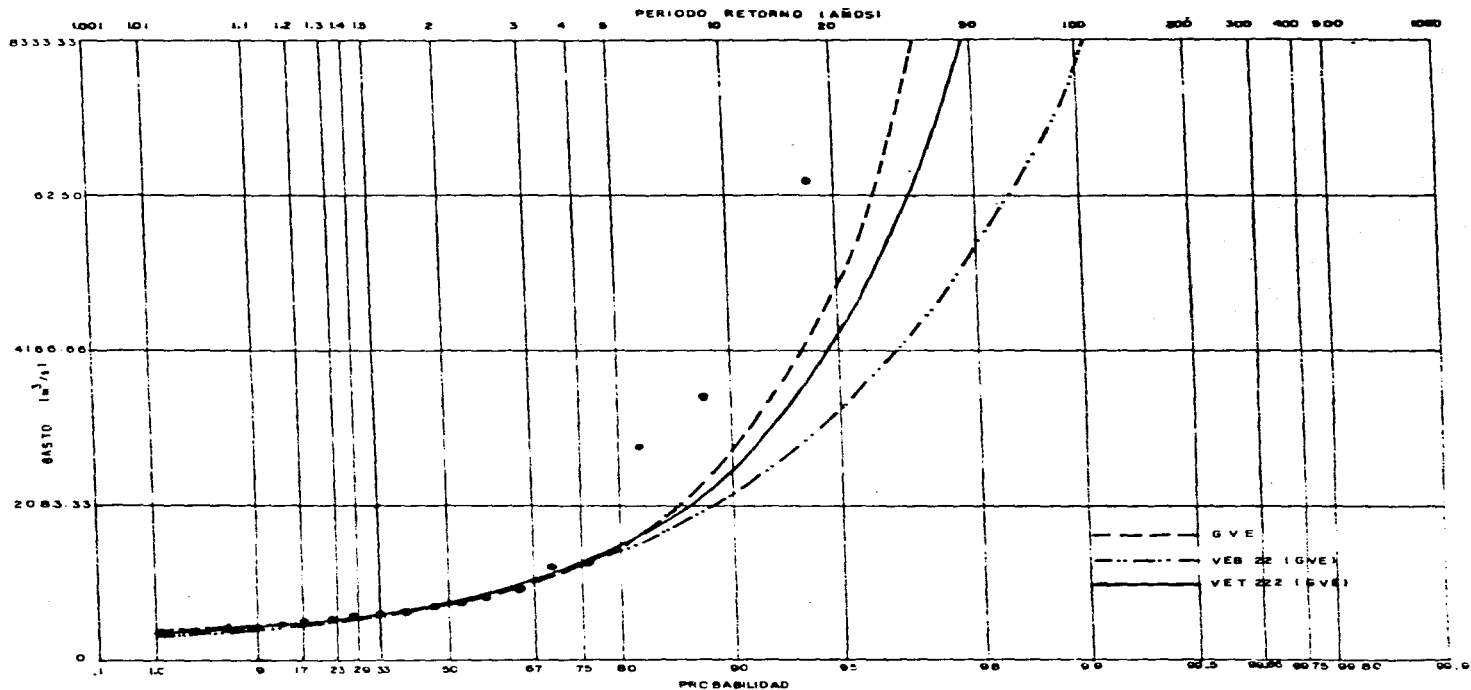


Fig. 13 Curvas de frecuencia empirica y ajuste mediante las aproximaciones univariadas, biperiada y trivariada para los gastos máximos anuales de la estación Pinta

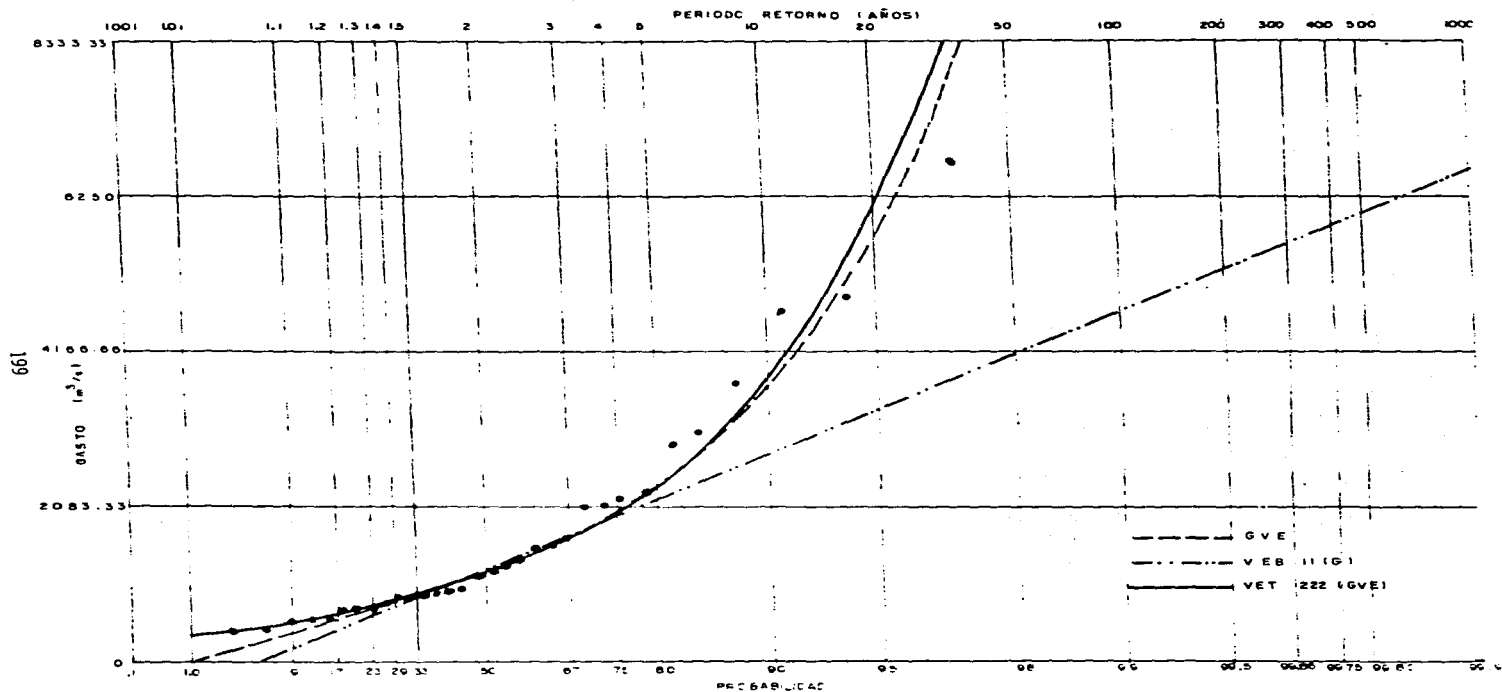
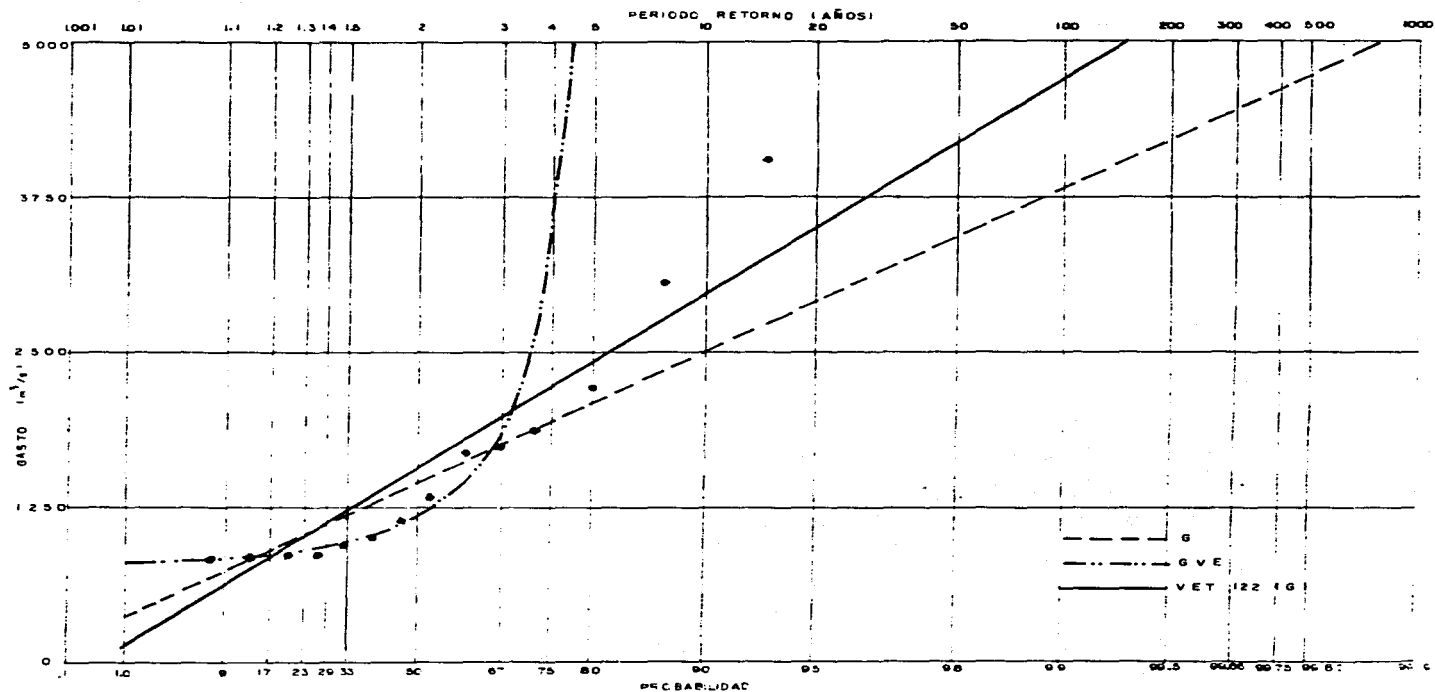


Fig D.14 Curvas de frecuencia empírica y ajustada mediante las aproximaciones univariada, bivariada y trivariada para los gastos máximos anuales de la estación San Francisco





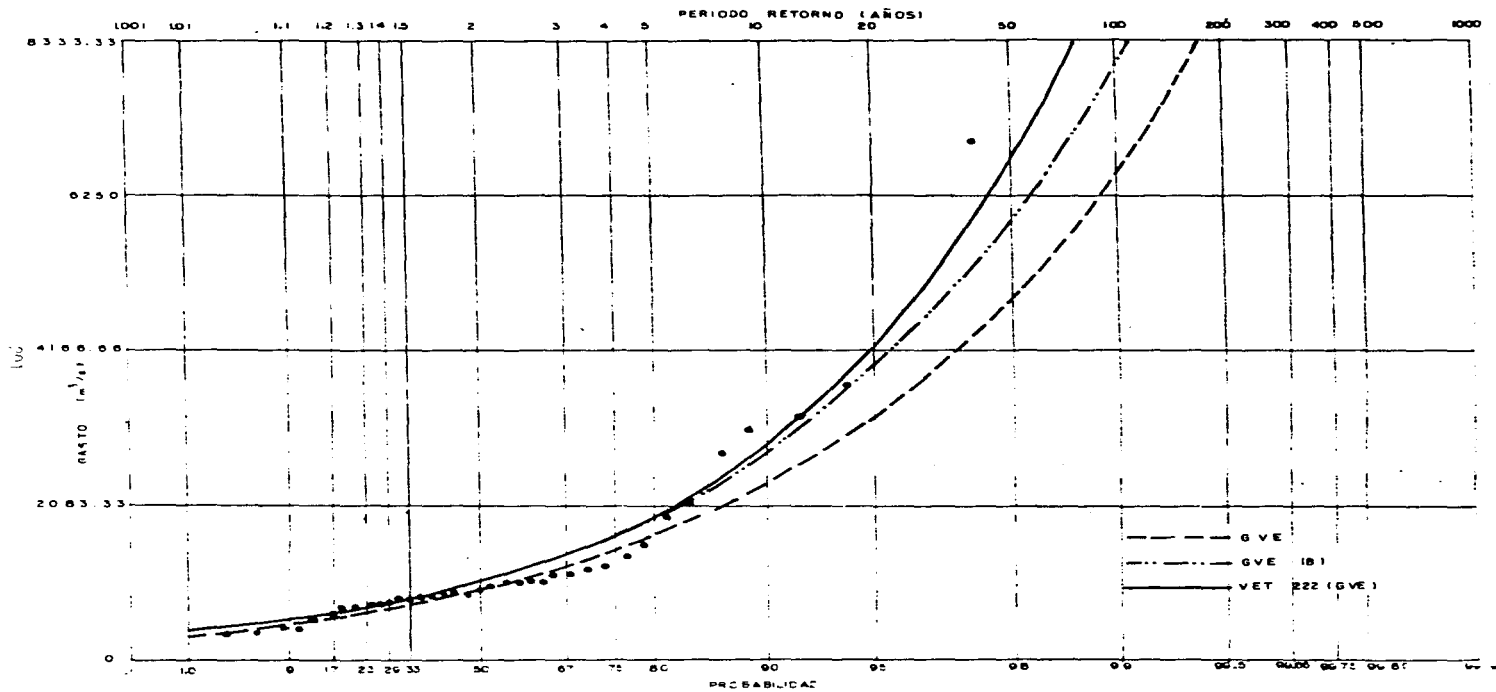


Fig. 10 Curvas de frecuencia empirica y ajustado mediante las aproximaciones univariado, bivariado y trivariado para los gastos maximos anuales de la estacion Santa Cruz

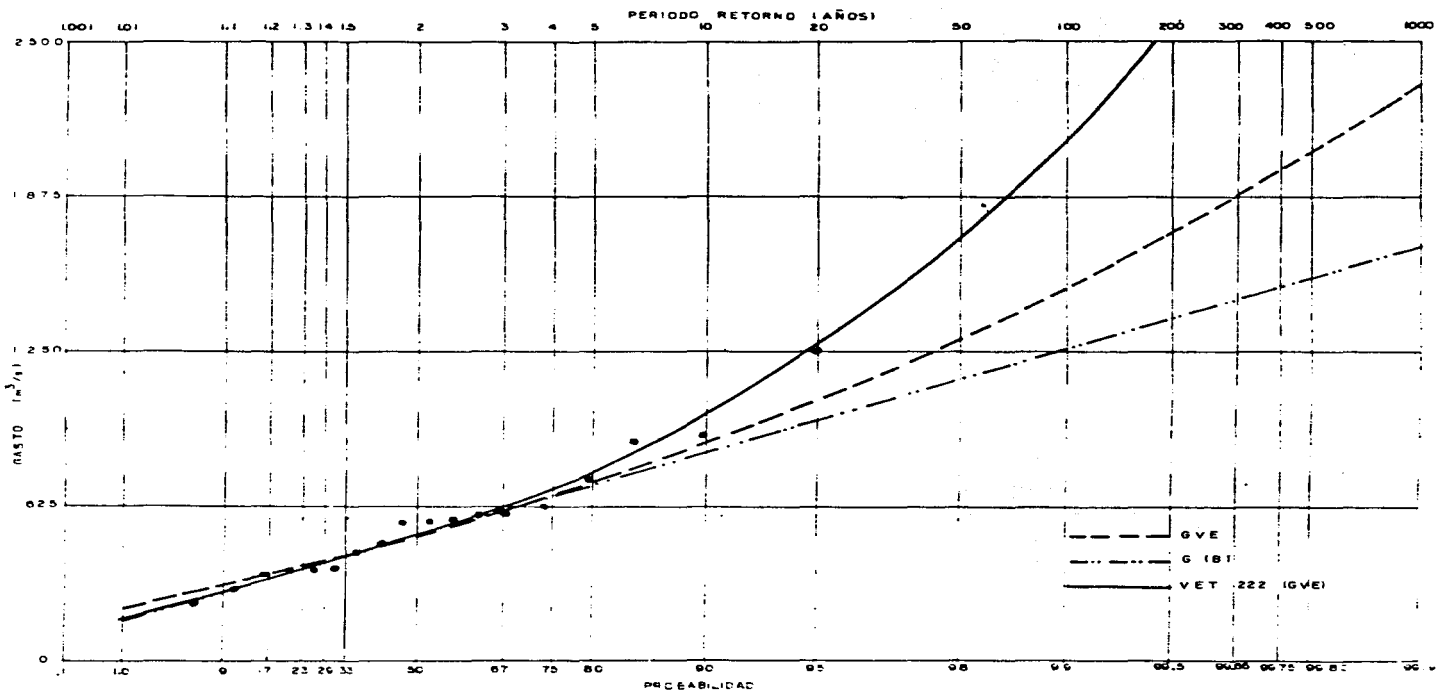


Fig. 17 Curvas de frecuencia empirica y ajustada mediante las aproximaciones univariada, bivariada y trivariada por los gastos máximos anuales de la estación Tomazula

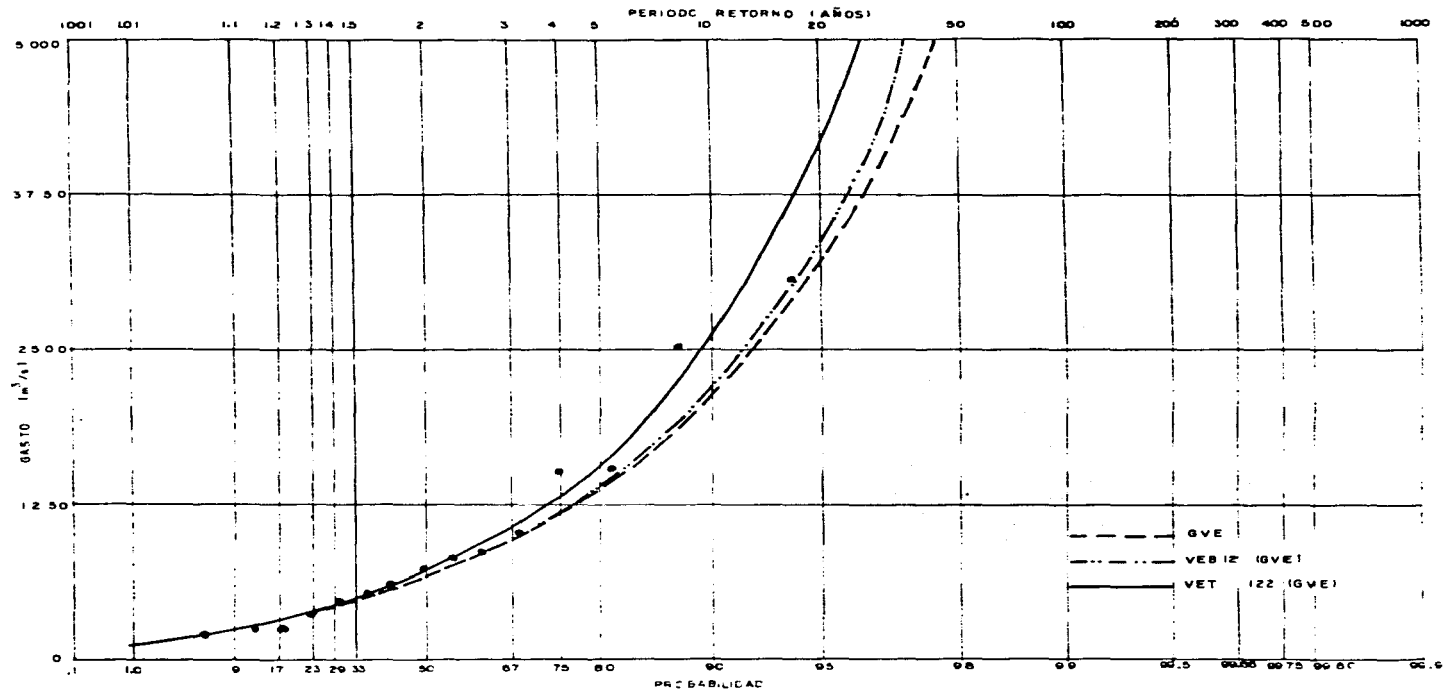


Fig. 18. Curvas de frecuencia empirica y ajustada mediante las aproximaciones universales, bivariada y univariada para los gustos máximos anuales de la estación Tecuapetla.

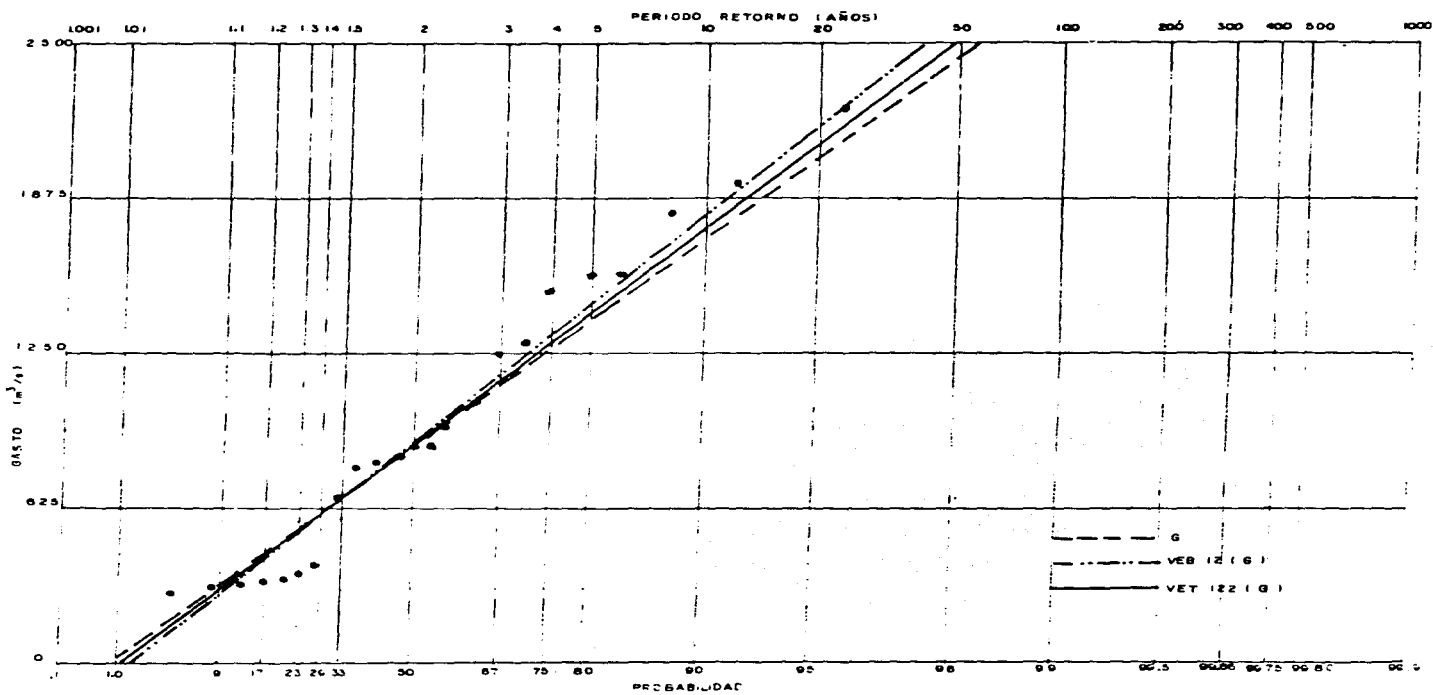


Fig. D.10 Curvas de frecuencia empirica y ajustado mediante las aproximaciones univariada, bivariada y trivariada para los gastos máximos anuales de la estación Tachiyama

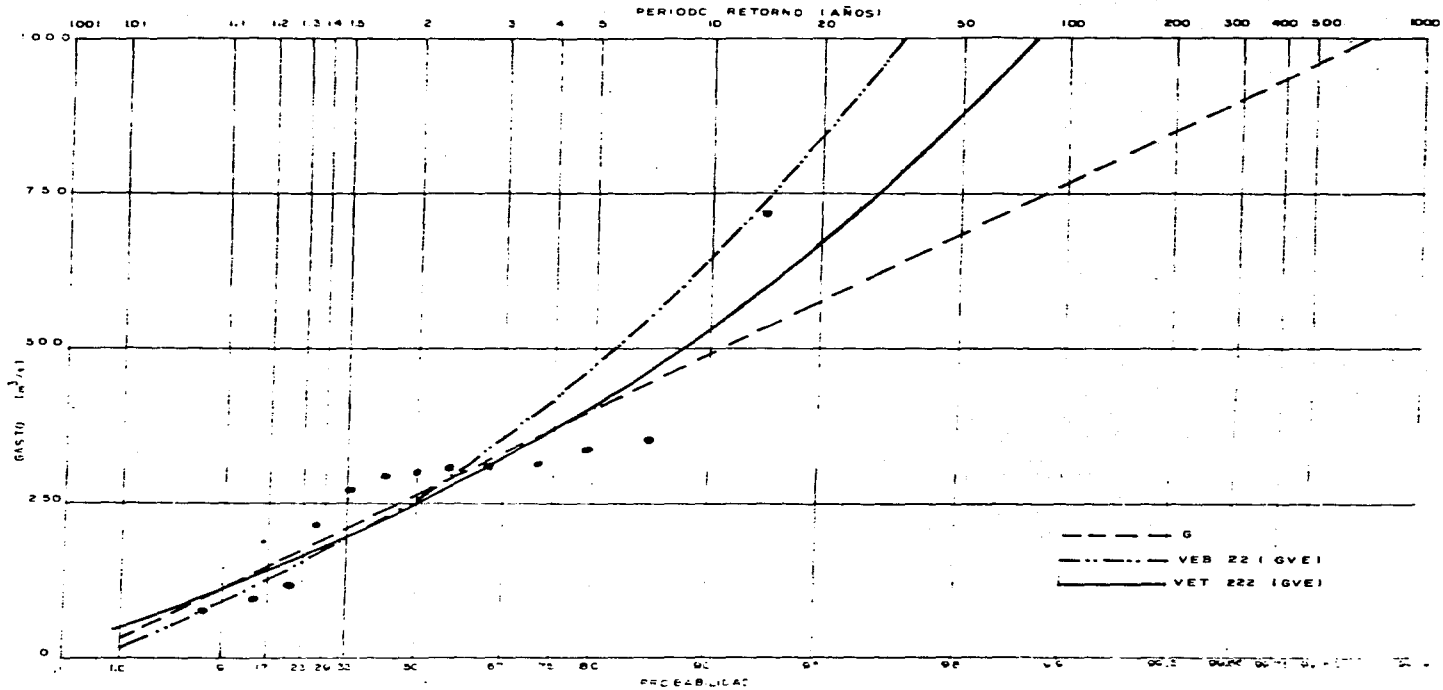


Fig D.20 Curvas de frecuencia empírica y ajustada mediante las aproximaciones univariada, bivariable y trivariada para los gastos máximos anuales de la estación Uruguay.

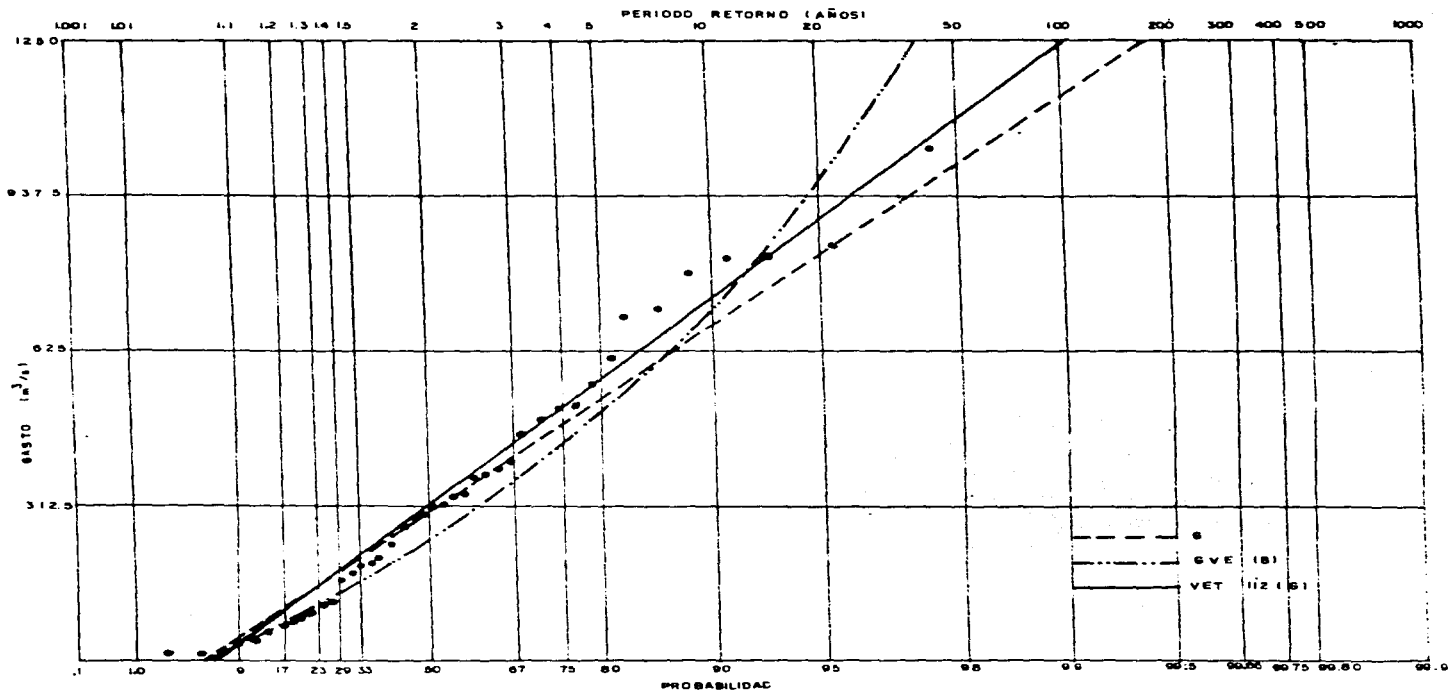


Fig. D.21 Curvas de frecuencia empírica y ajustada mediante las aproximaciones univariadas, bivariadas y trivariadas para los gastos máximos anuales de la estación Zapilote.

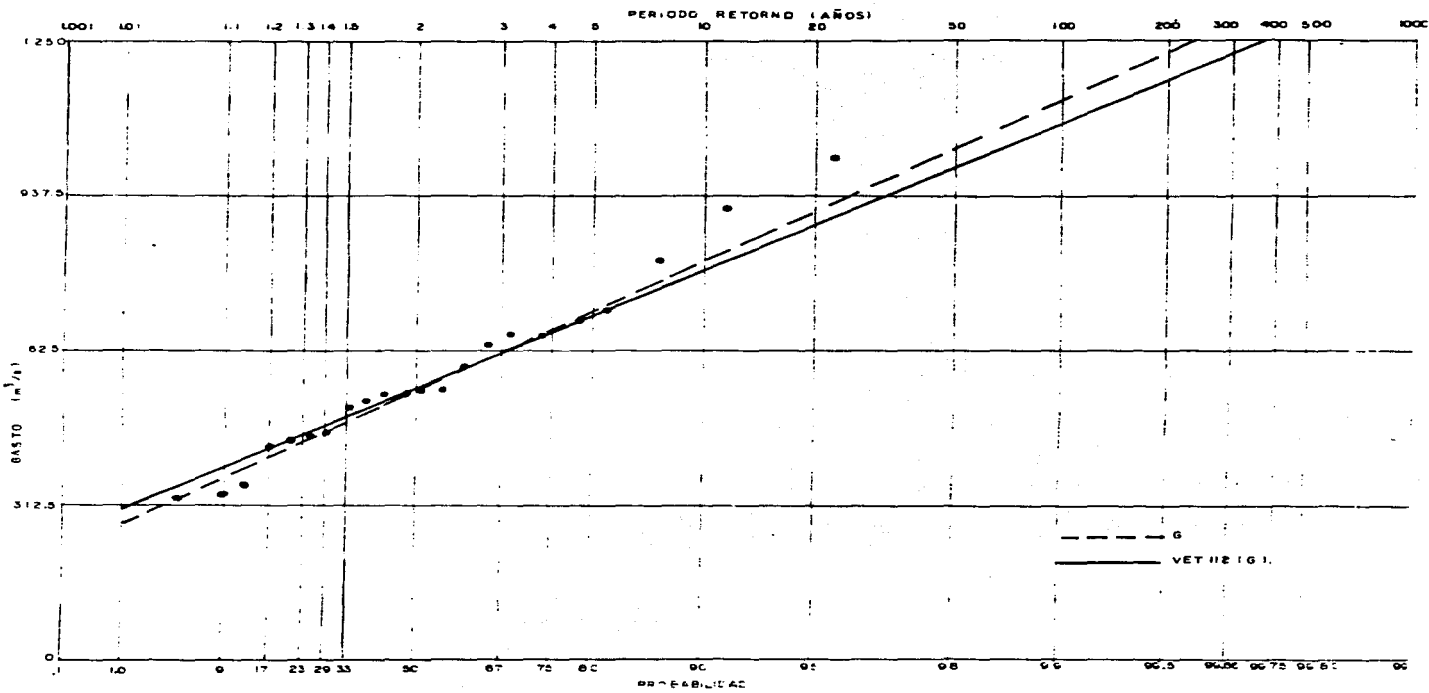


Fig. D.22 Curvas de frecuencia empirica y ajustada mediante las aproximaciones G y Weibull para los gastos máximos anuales de la estación Acholí.

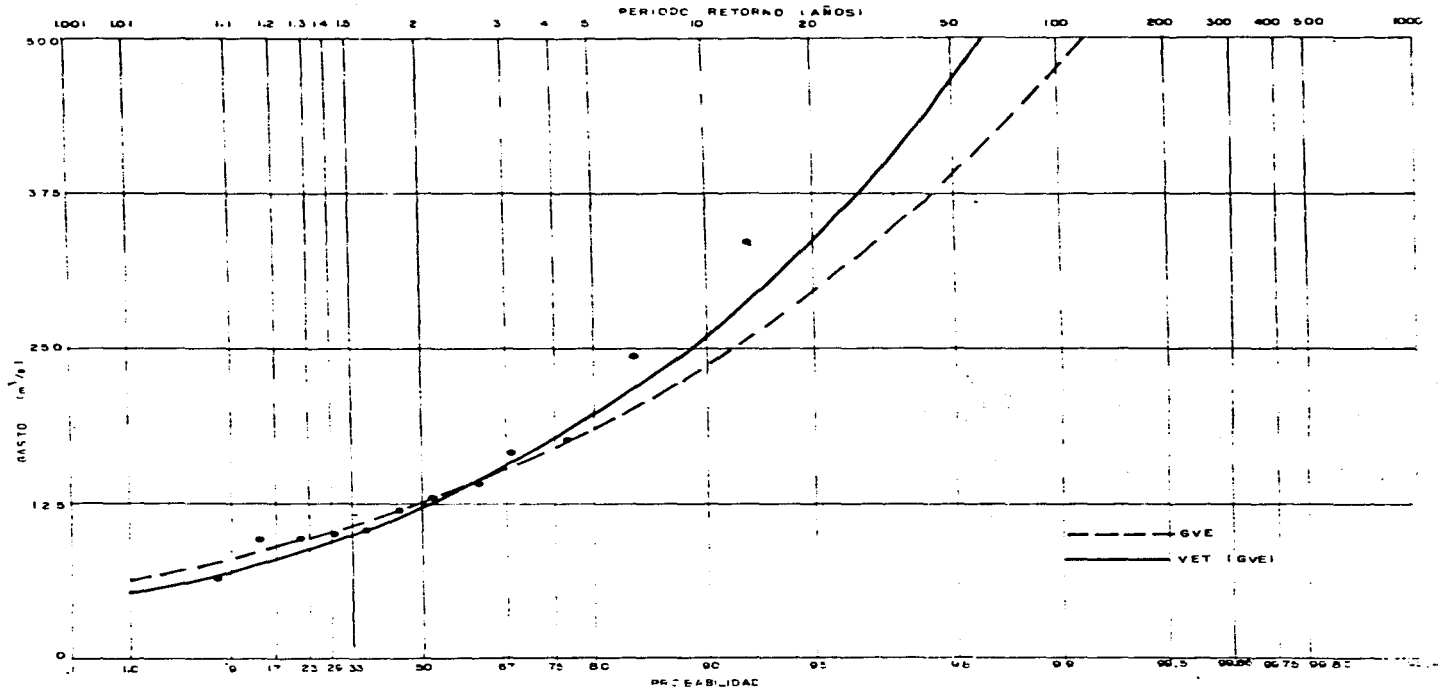


Fig. D-23 Curvas de frecuencia empirica y ajustada mediante las aproximaciones univariado y trivariado para los gastos maximos anuales de la estacion Amapa.



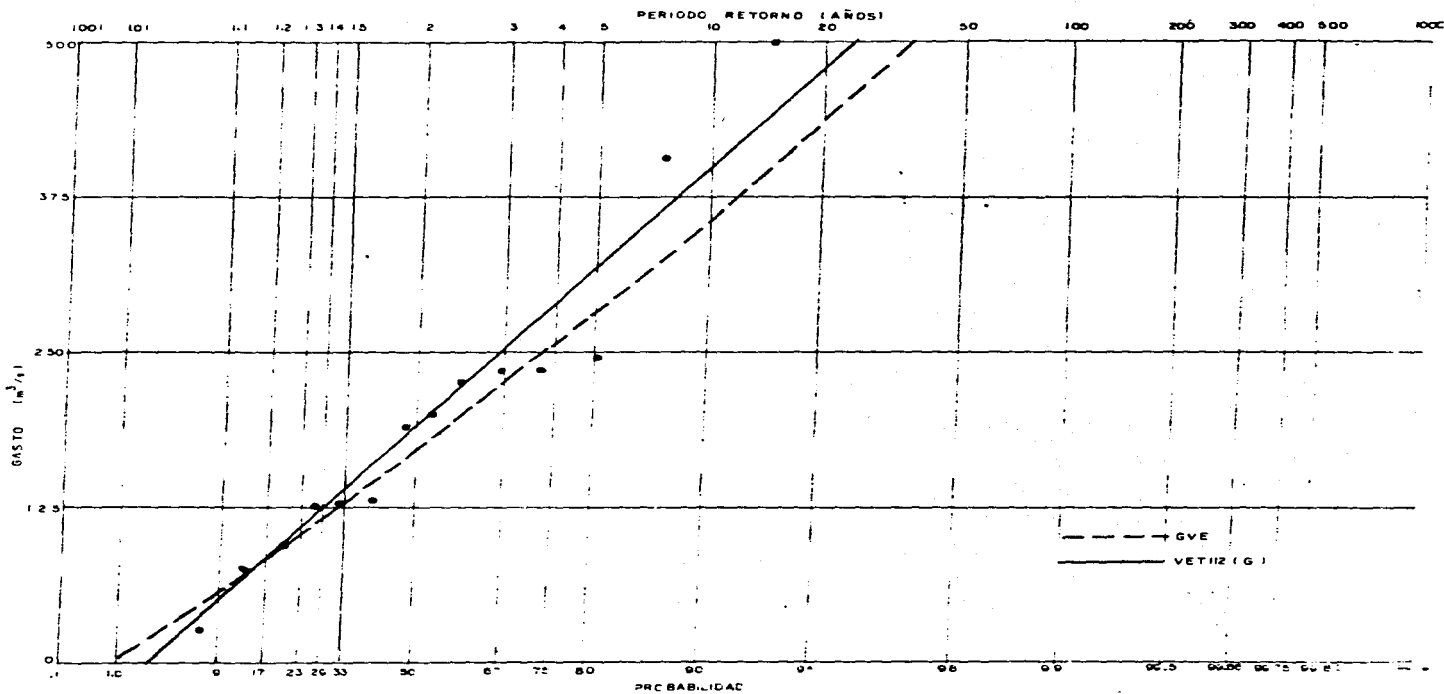
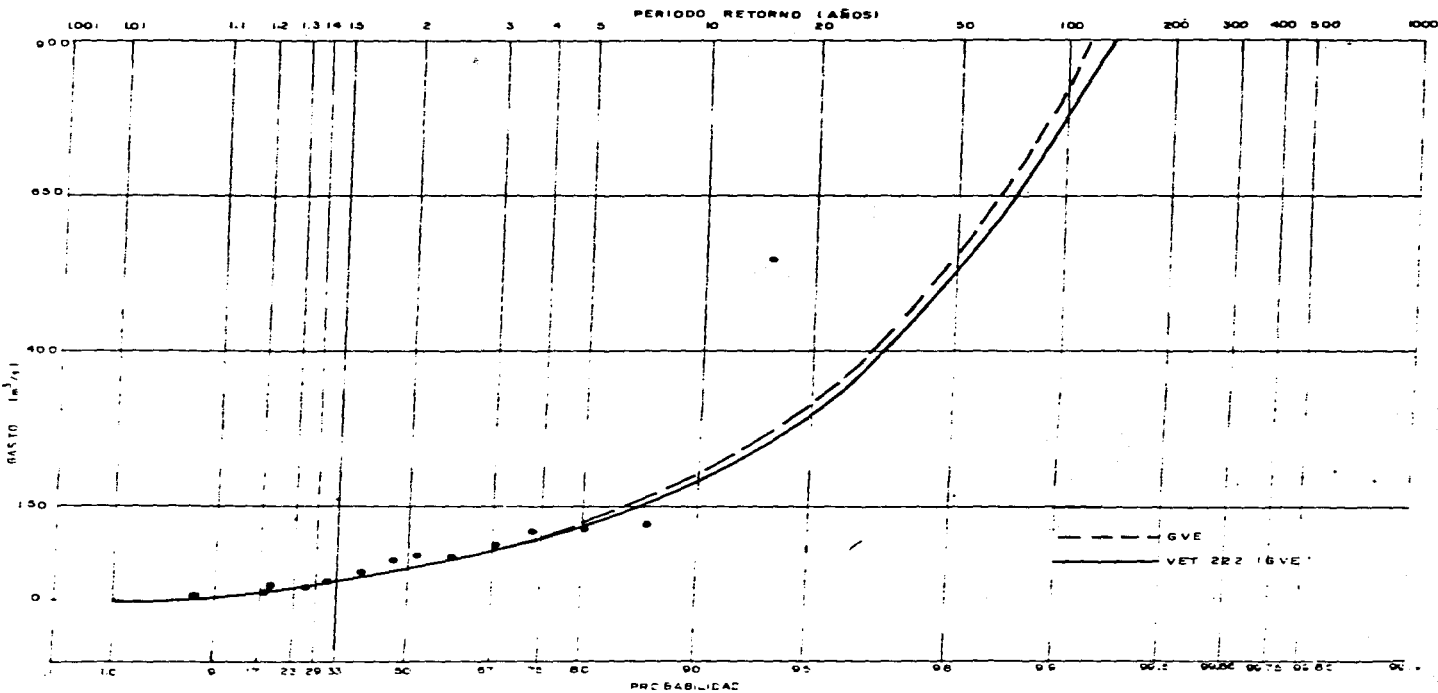


Fig. D.24 Curvas de frecuencia empirica y ajustada mediante las aproximaciones univariada y trivariada para los gastos maximos anuales de la estacion Angel R. Cabados.



F 6 D. 25 Curvas de frecuencia empirica y ajustada mediante las aproximaciones univariado y trivariado para los gastos máximos anuales de la estación Apóstol.

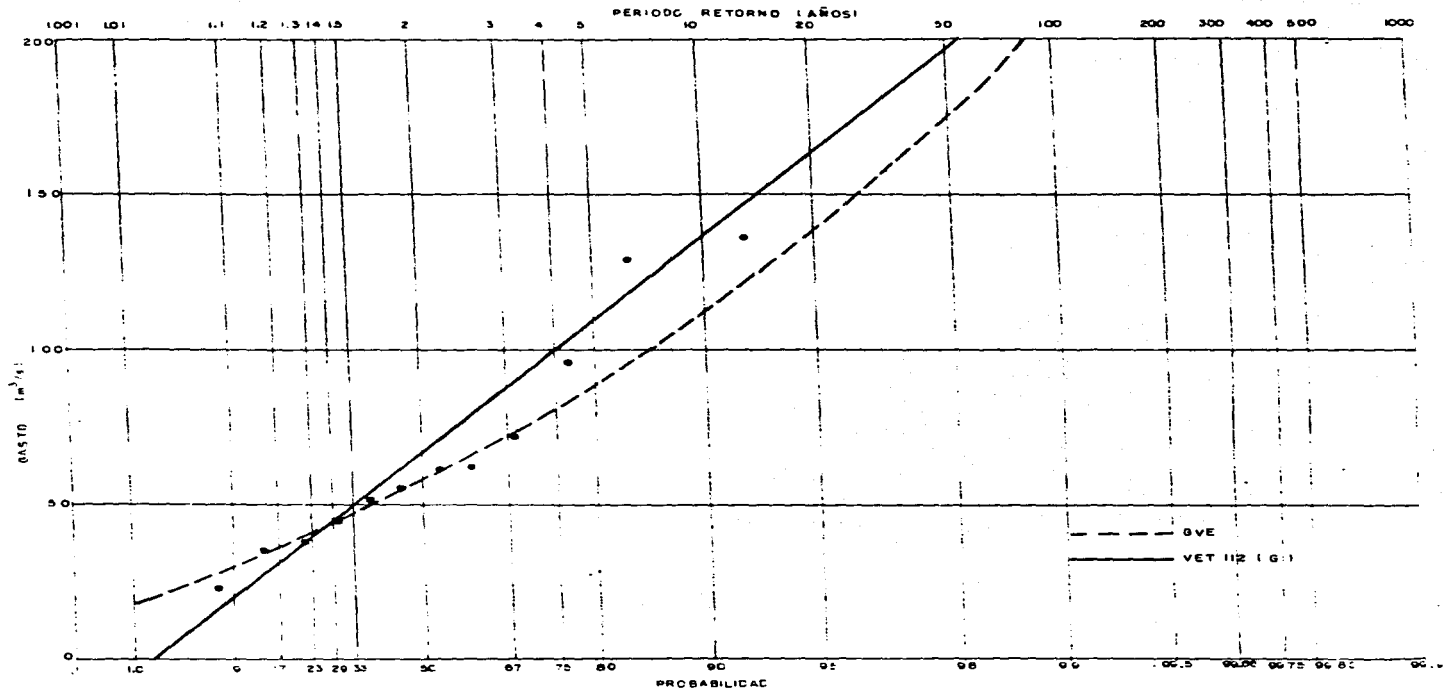


Fig D.26 Curvas de frecuencia empírica y ajustada mediante las aproximaciones univariada y bivariada para los gastos máximos anuales de la estación Axusco.

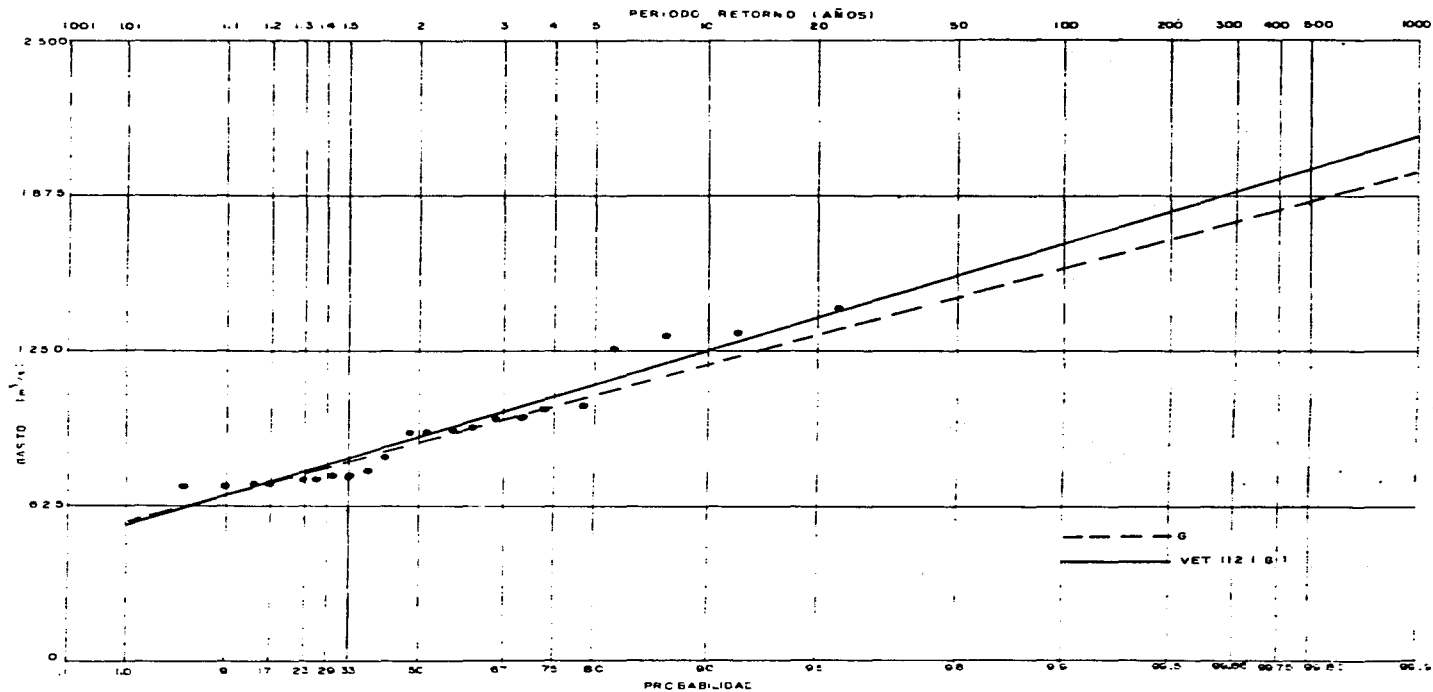


Fig. 27 Curvas de frecuencia empírica, ajustada mediante las aproximaciones un variado y trivariado para los gastos máximos anuales de la estación Azueta.

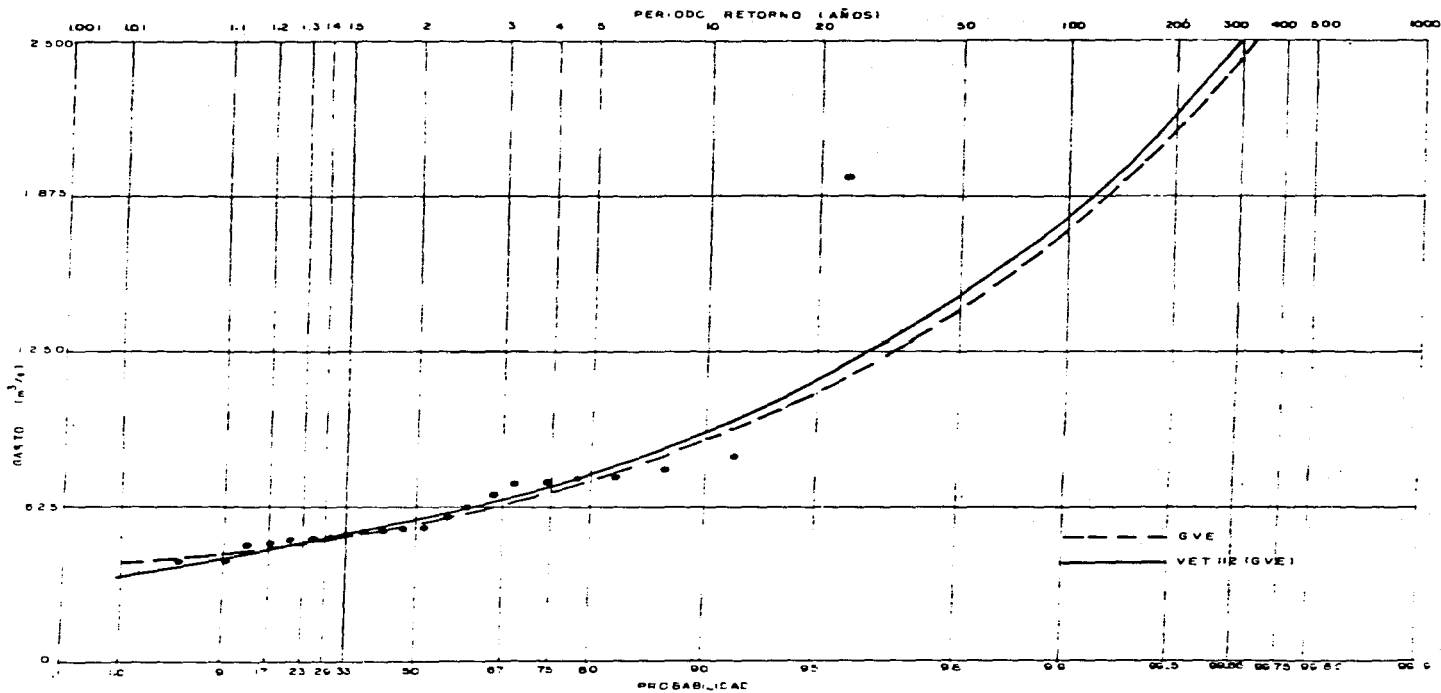


Fig. 28 Curvas de frecuencia empírica y ajustada mediante las aproximaciones univariada y trivariada para los gastos máximos anuales de la estación Bellico

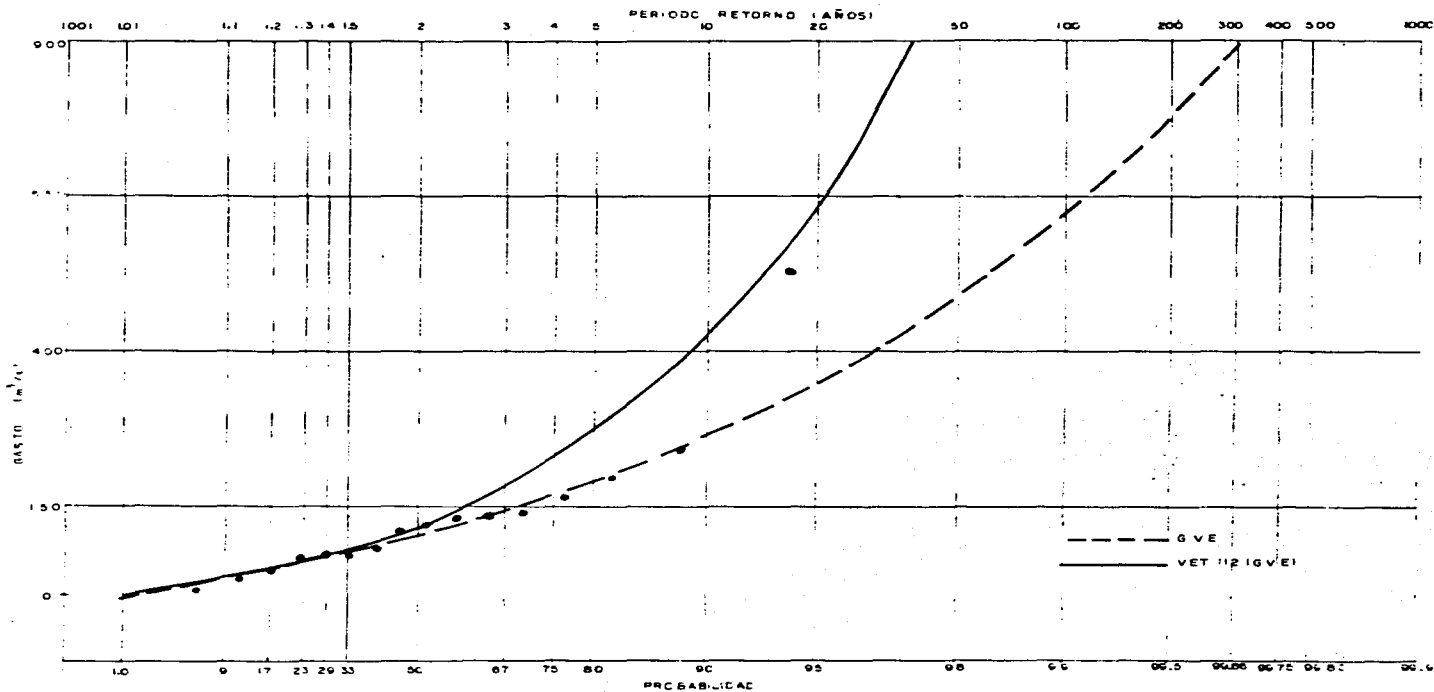


Fig D.29 Curvas de frecuencia empirica y ajustada mediante las aproximaciones univariada y bivariada para los gastos máximos anuales de la estación Colapilla.

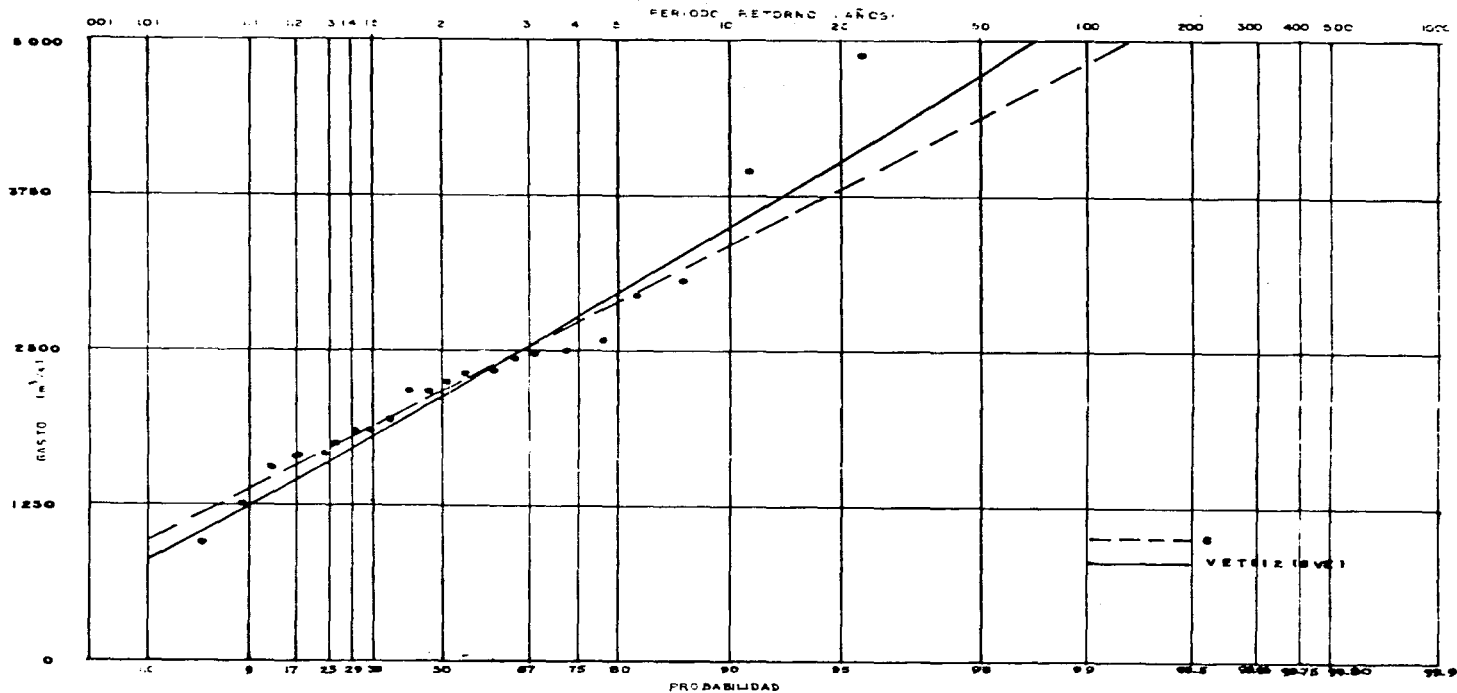


Fig. 36 Curvas de frecuencia empírica y ajustada mediante las aproximaciones univariada y bivarivada para los gastos máximos anuales de la estación Casteja

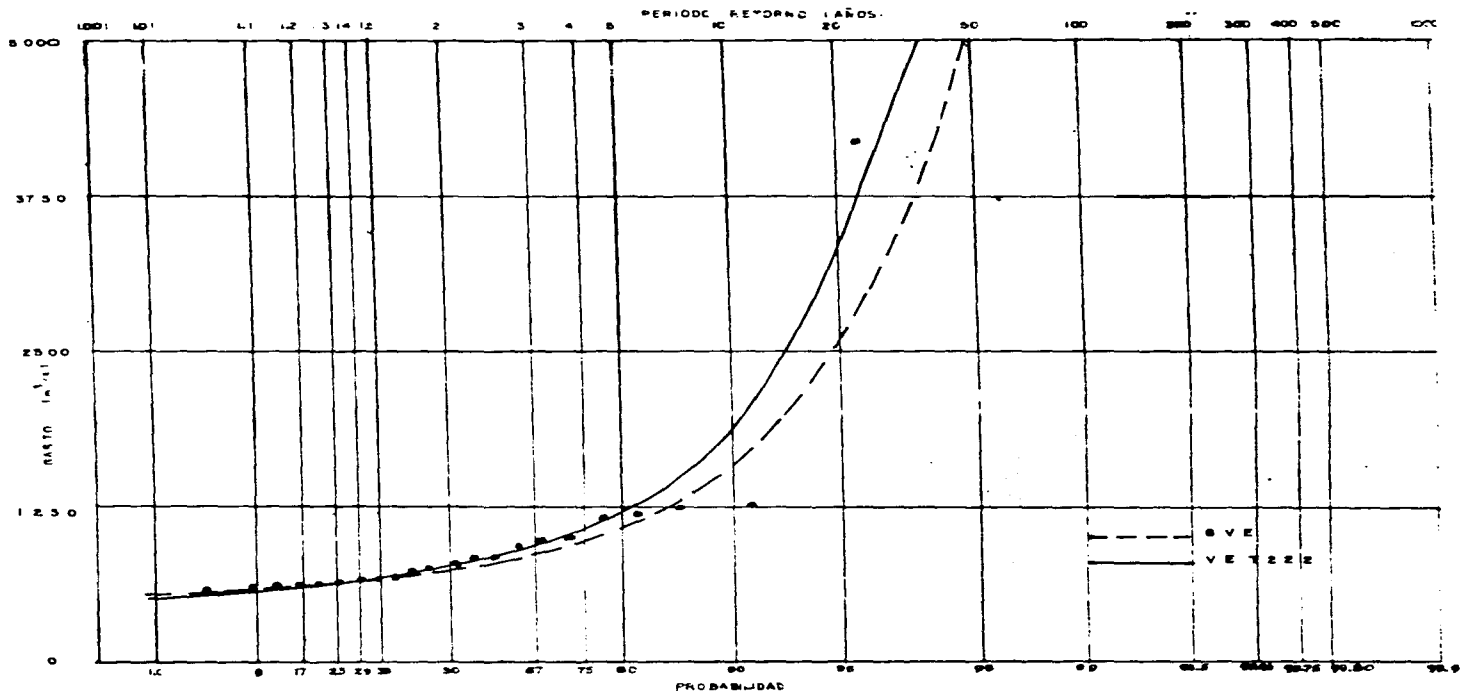


Fig. 31 Curvas de frecuencia empirica y ajustada mediante las aproximaciones univariadas y bivariadas para las góndas máximas anuales de la zona de Castañeda.



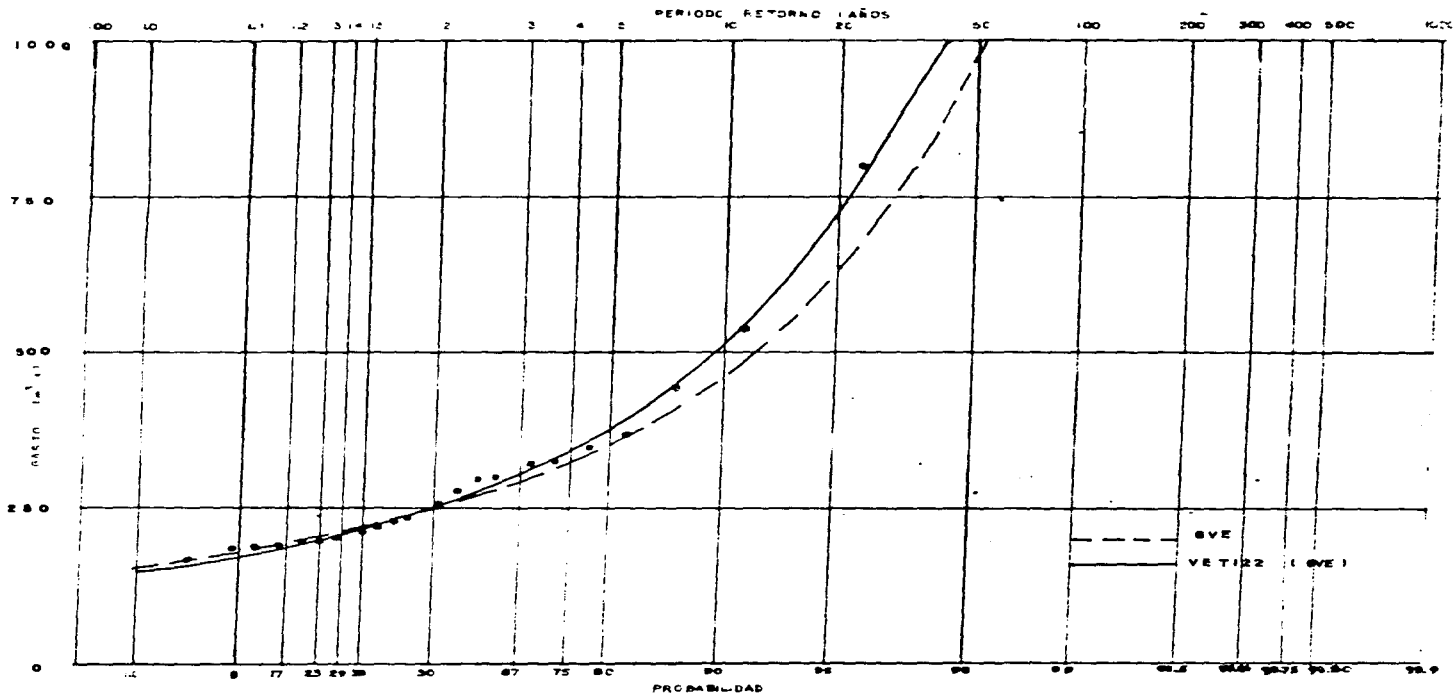


Fig. 32 Curvas de frecuencia empírica y ajustada mediante las aproximaciones uniaxiales para los gastos mínimos anuales de la estación Cuicahpe

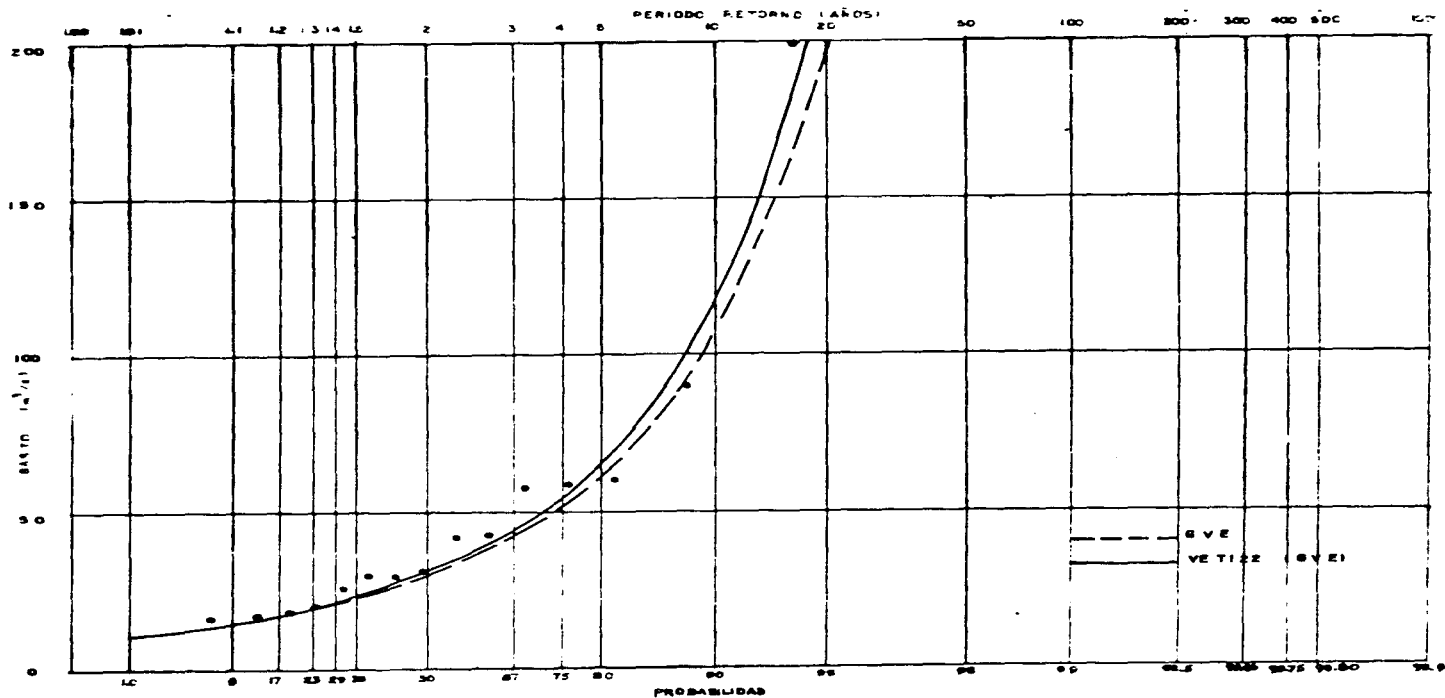


Fig. 33 Curvas de frecuencia empirica y ajustada mediante las aproximaciones univariada y bivariada para los gastos máximos anuales de la estación de Damigüillo.

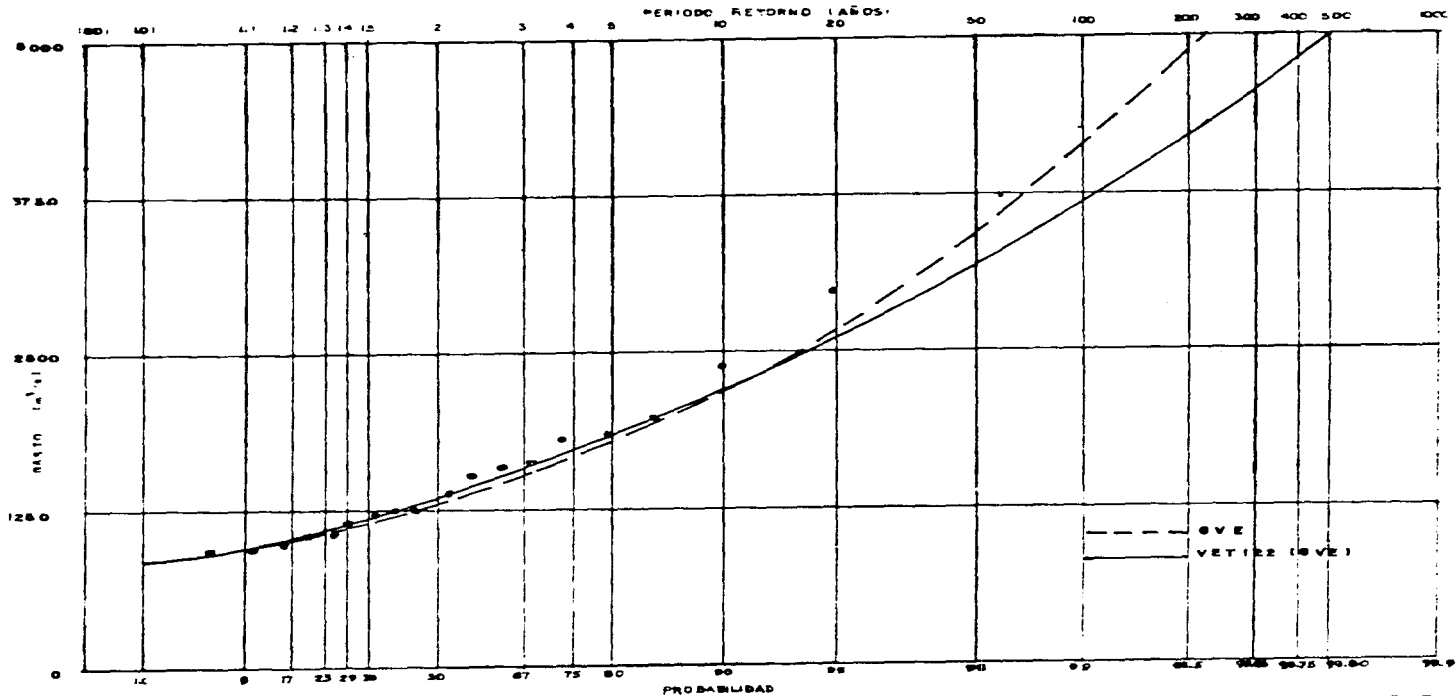


Fig. 34 Curvas de frecuencia empirica y ajustada mediante las aproximaciones unificadas desarrolladas para los gastos máximos anuales de la estación Jacatipac

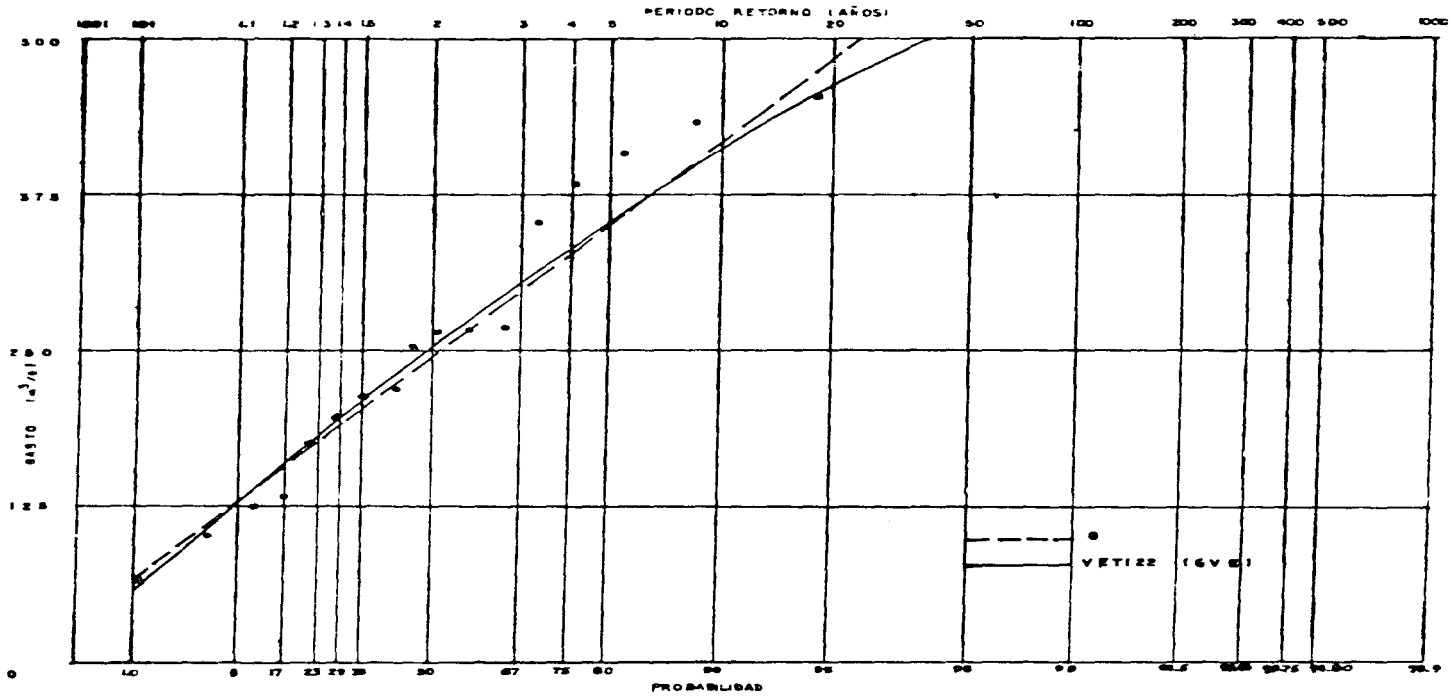


Fig. 36 Curvas de frecuencia empirica y ajustada mediante las aproximaciones univariadas y bivariadas para los gastos máximos anuales de la estación La Angostura

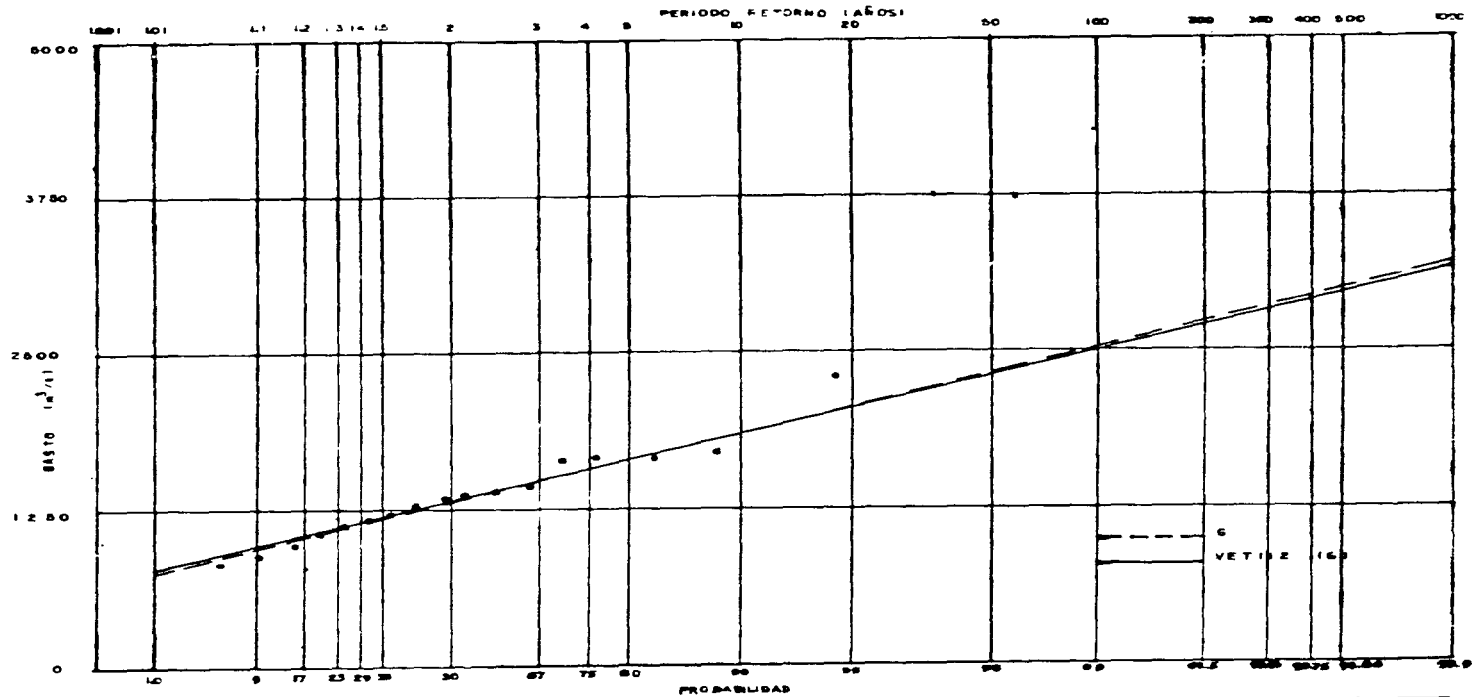


Fig. 30 Curvas de frecuencia empirica y ajuste mediante las aproximaciones univariadas para los gastos máximos anuales de la estación La Estrella

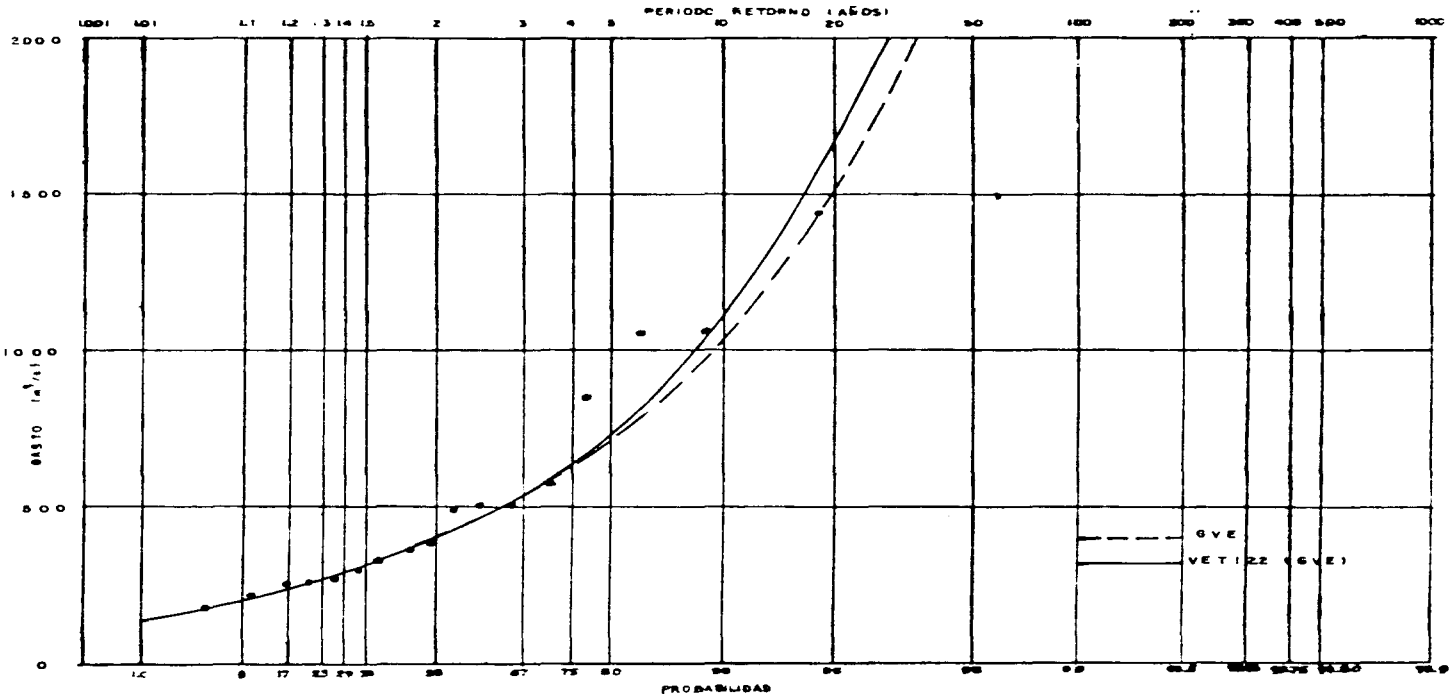


Fig. 37 Curvas de frecuencia empirica y ajustado mediante las aproximaciones uniparametrica y trinomica para los gastos mínimos anuales de la estación La Jueve

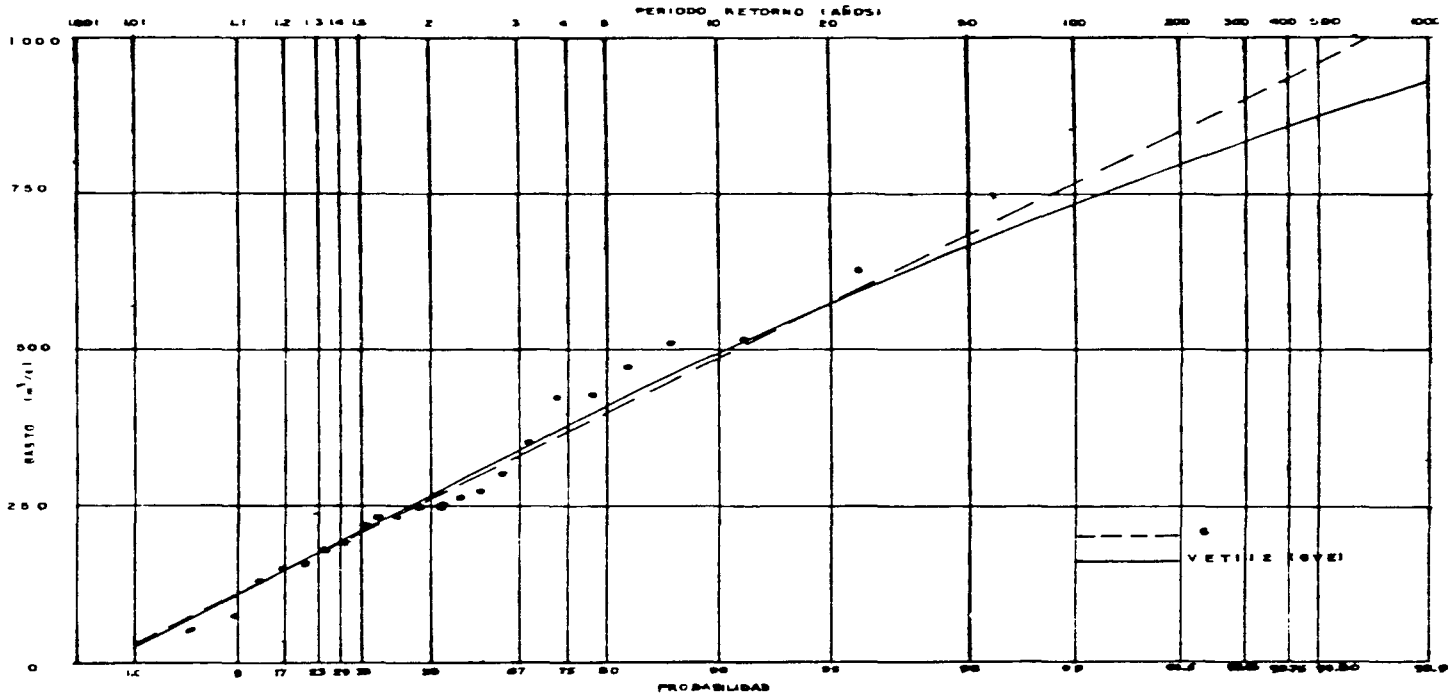


Fig. 3.8 Correo de frecuencia empírico y ajustado mediante las aproximaciones uniparamétrica y trivariada para los gastos máximos anuales de la estación Las Prilevas

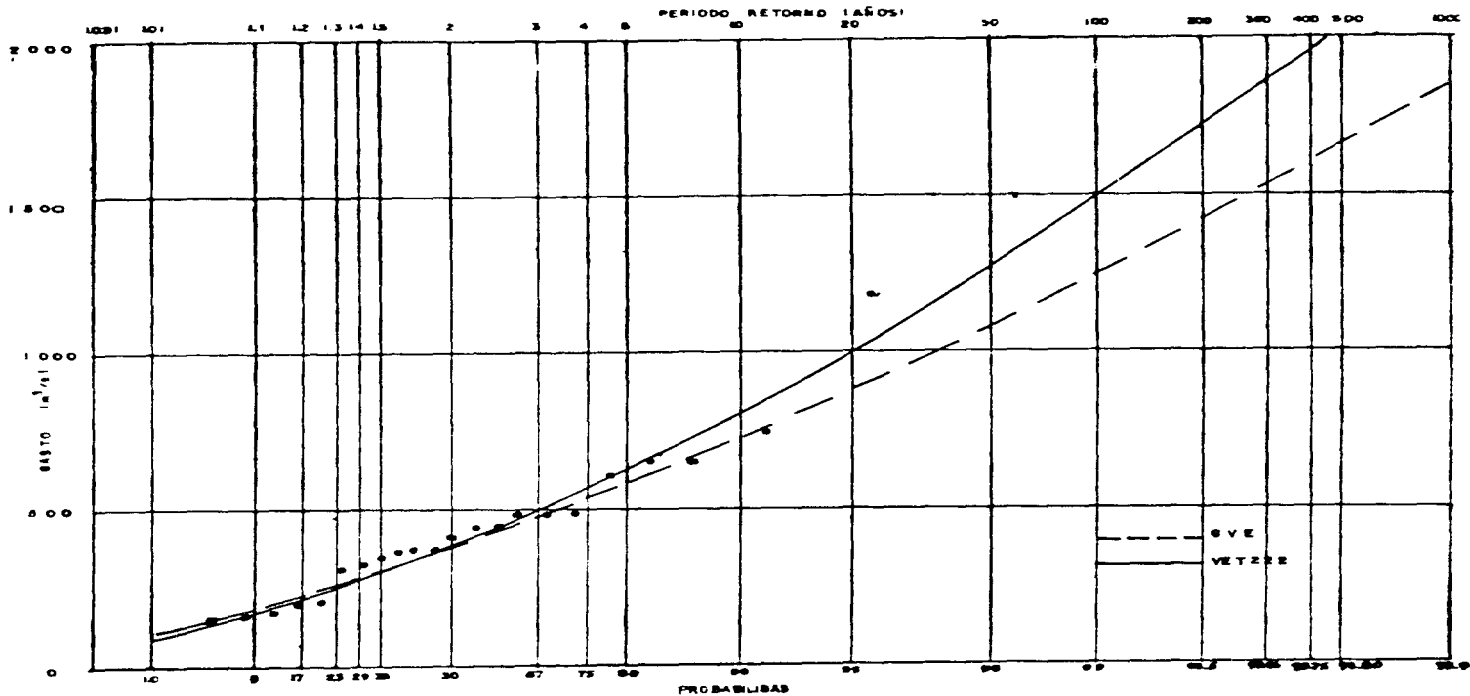


Fig. 2.30 Curvas de frecuencia específica y caudales mediante las aproximaciones empíricas y teóricas para los gastos máximos anuales de la estación Leuchapen.



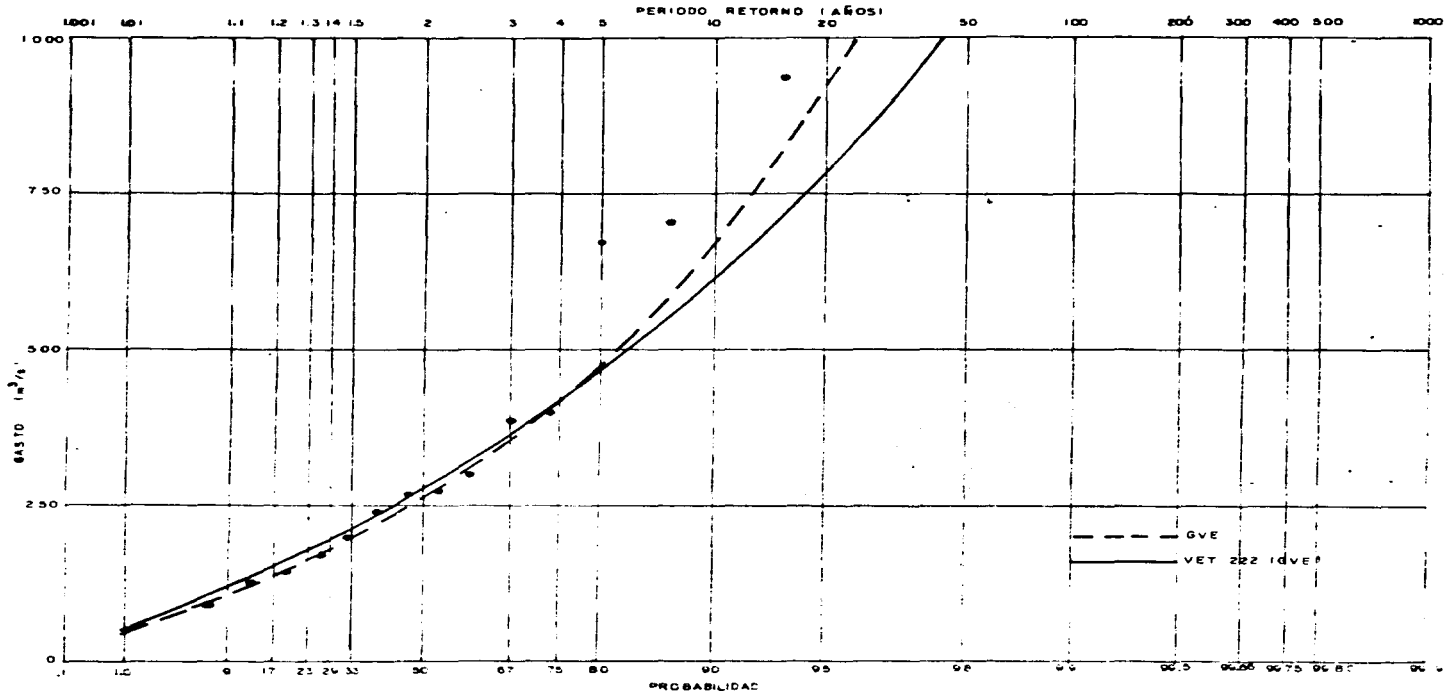


Fig D.10 Curvas de frecuencia empirica y ajustada mediante las aproximaciones univariada y bivariada para los gastos máximos anuales de la estación Matamba

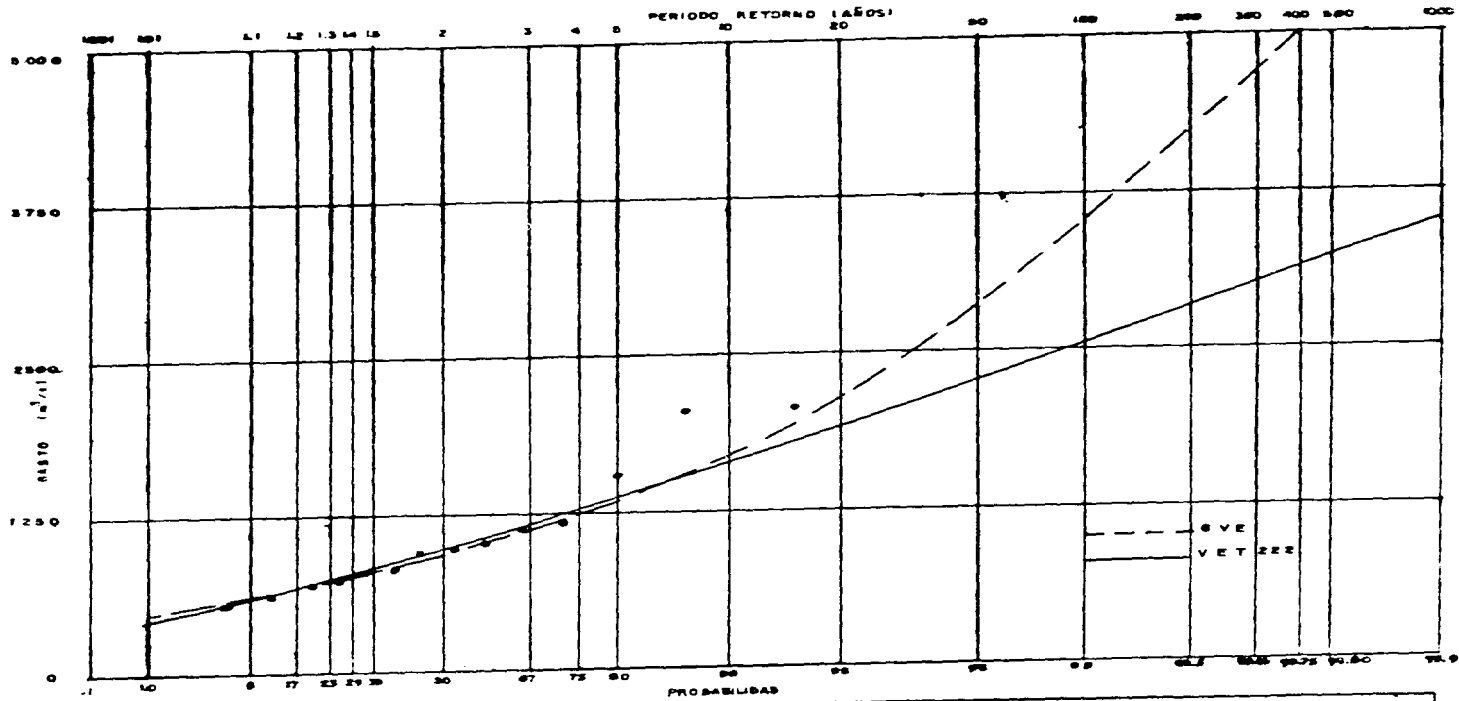


Fig. 41 Curvas de frecuencia empírica y ajuste mediante las aproximaciones unipolares de trivariados para los gastos máximos anuales de la estación de esta Roca

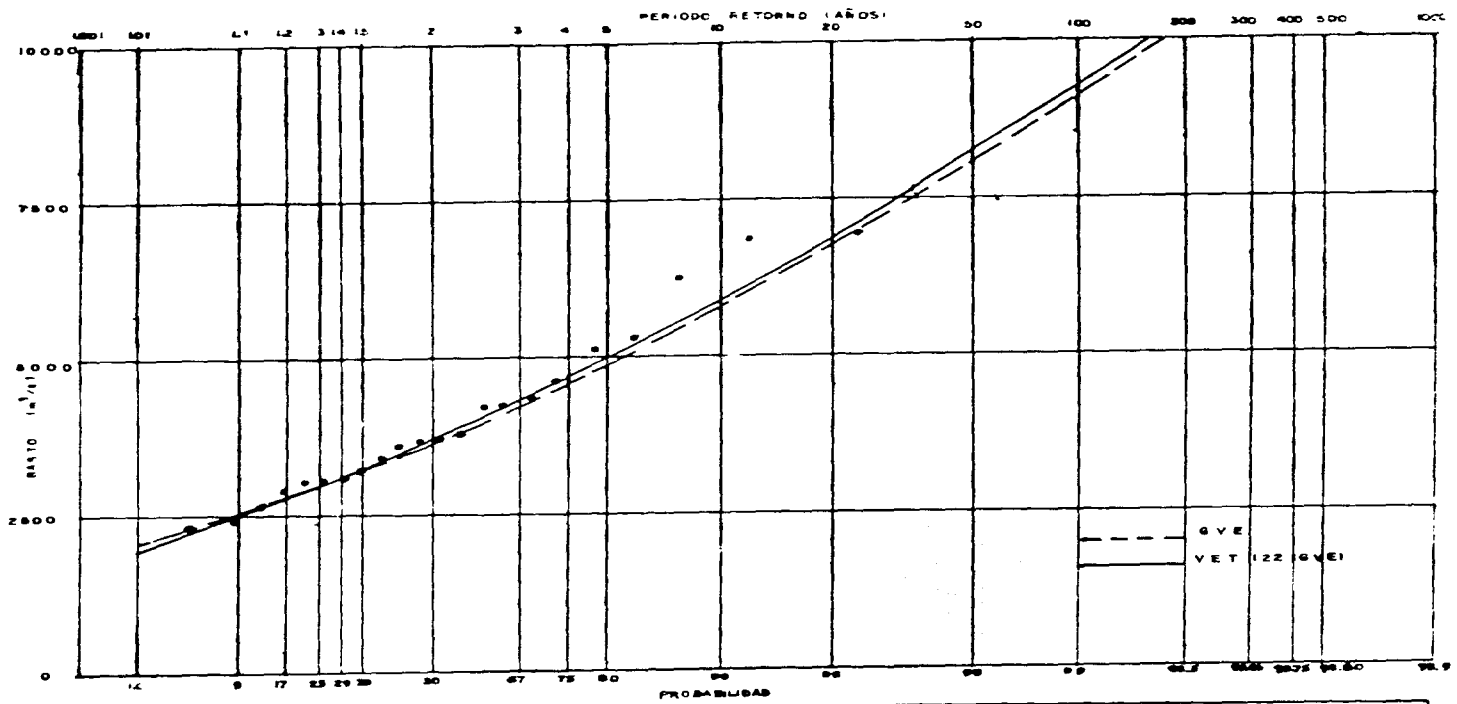


Fig. D-2 Curvas de frecuencia empírica y ajustada mediante las aproximaciones empíricas para los gastos máximos anuales de la estación Papaloapan

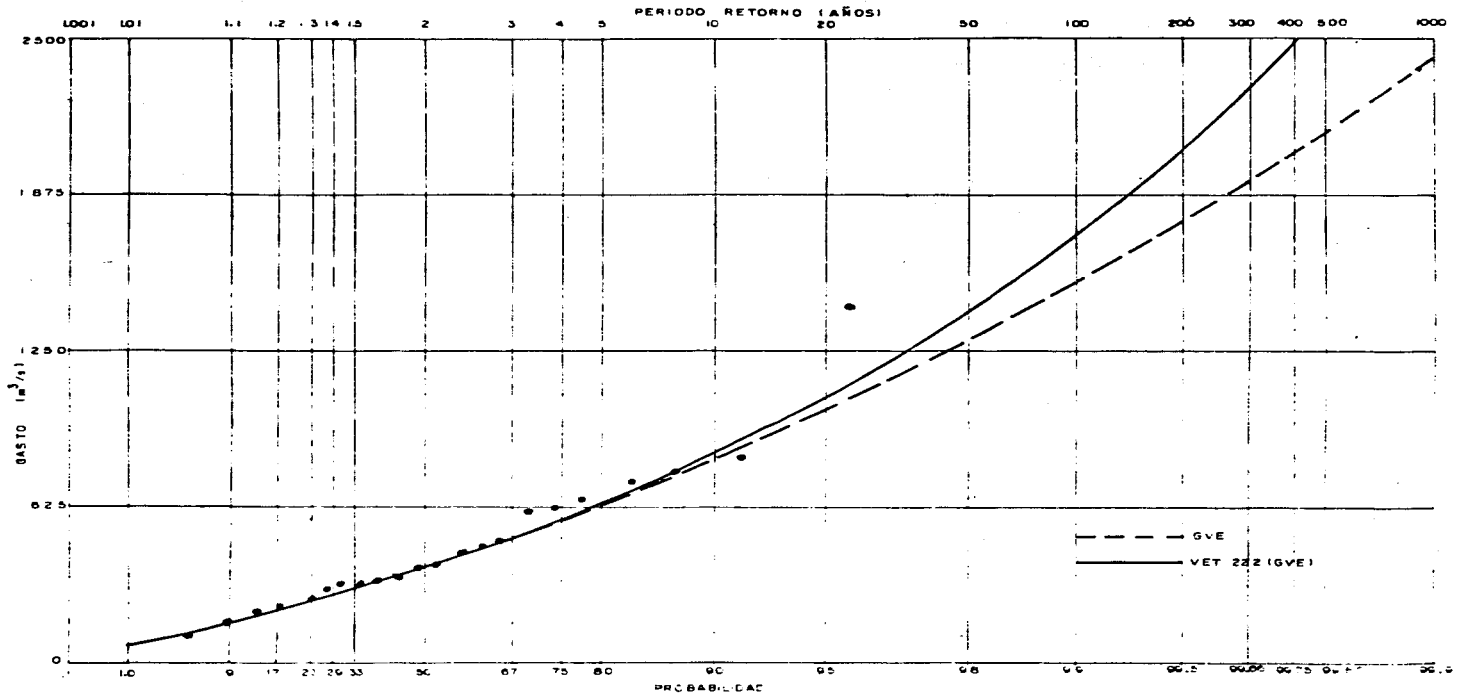


Fig. 43 Curvas de frecuencia empirica y ajustada mediante las aproximaciones univariada y triparamétrica para los gastos máximos anuales de la estación Quiotebe c.

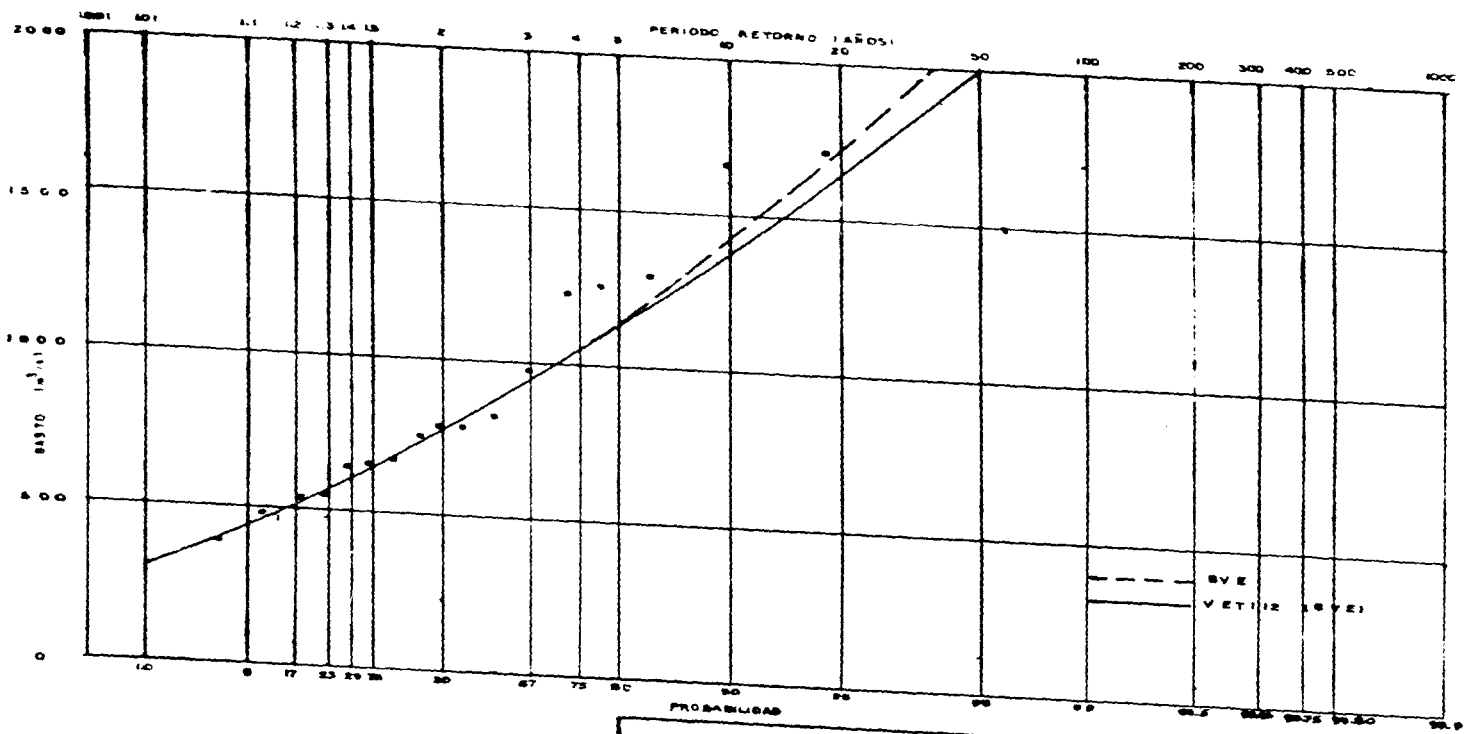


Fig. 44 Curvas de frecuencia empirica y ajustada mediante las aproximaciones univariadas, derivadas para los vientos máximos anuales de la estación Seste de Mague

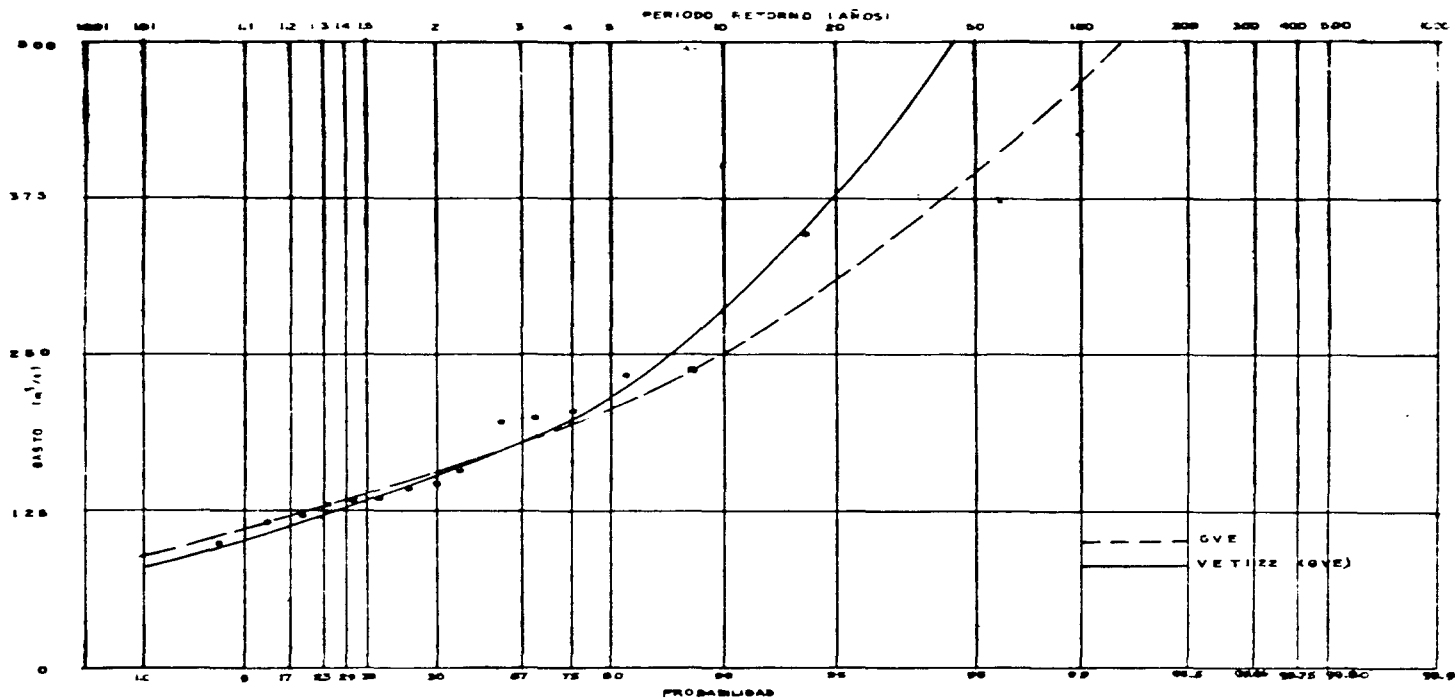


Fig. 46 Curvas de frecuencia empírica y ajuste mediante las aproximaciones uniparamétricas para los gastos máximos anuales de la estación Tepic en mayo

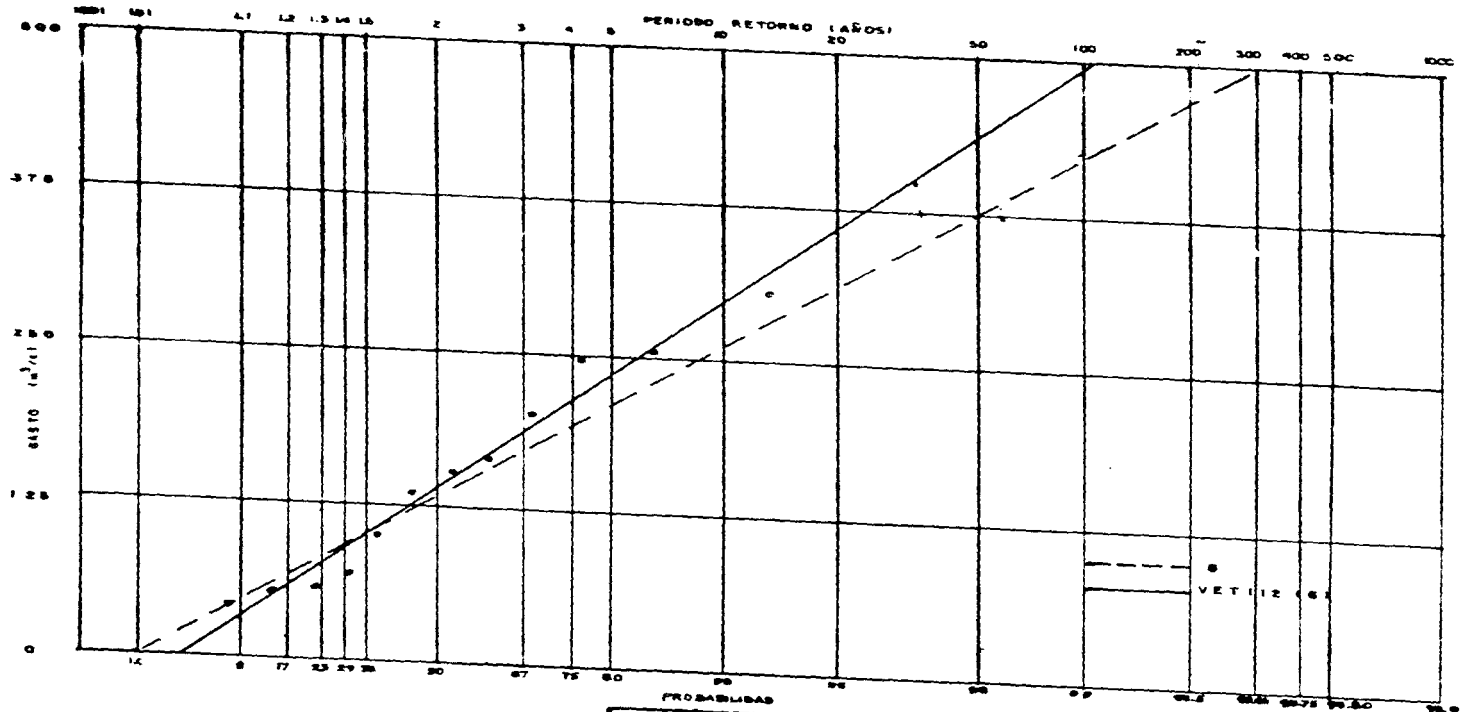


Fig. 46 Curvas de frecuencia empirica y ajuste mediante las aproximaciones unipolares y trimórficas para los gastos máximos anuales de la estación Tumbilla.

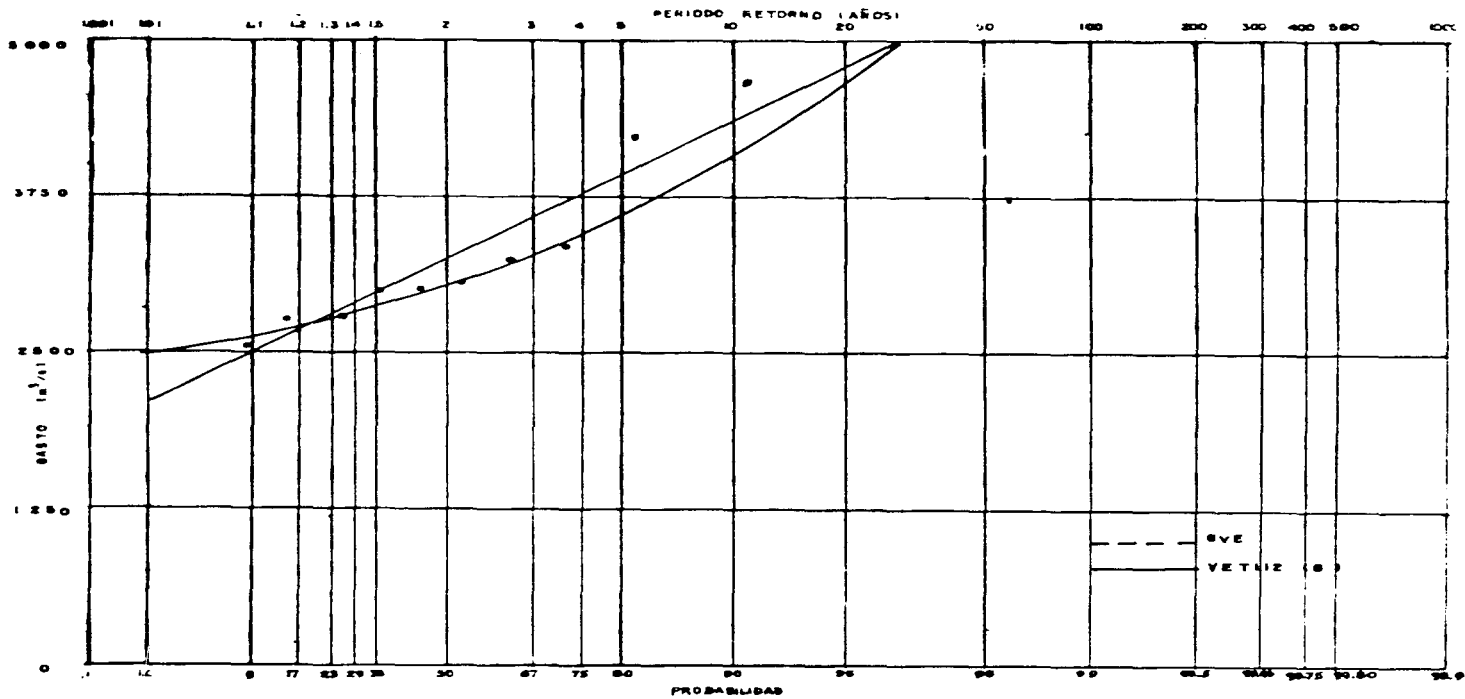


Fig. 47 Curvas de frecuencia empirica y ajuste mediante las aproximaciones uniparametricas para los gastos máximos anuales de la estación Tuxtlapec.



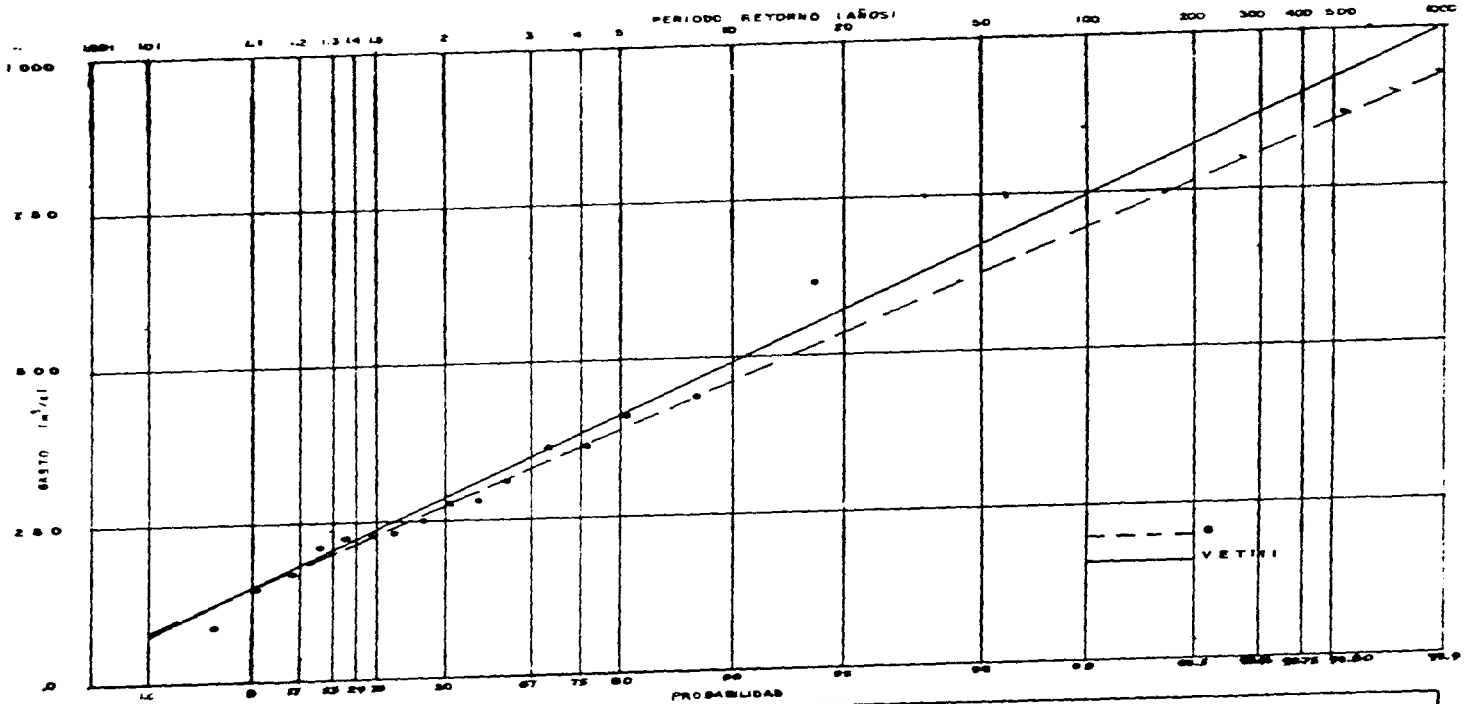


Fig. 48 Curvas de frecuencia empirica y ajustada mediante las aproximaciones empiricas y ajustadas para los gastos máximos anuales de la estación Xiquilá

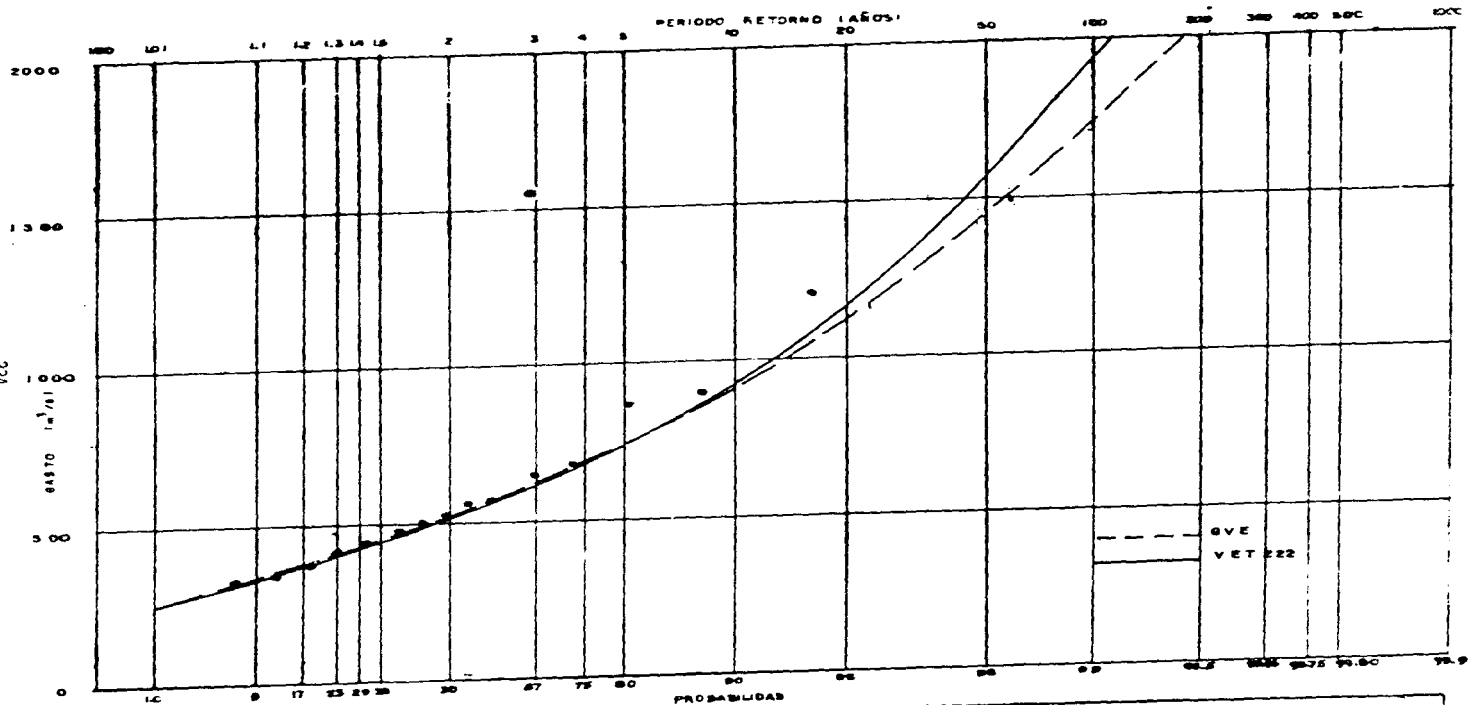


Fig. D-46 Cargas de frecuencia máxima y anuales mediante las aproximaciones de la ecuación (1) para las peltos máximos anuales de la estación Zapote.

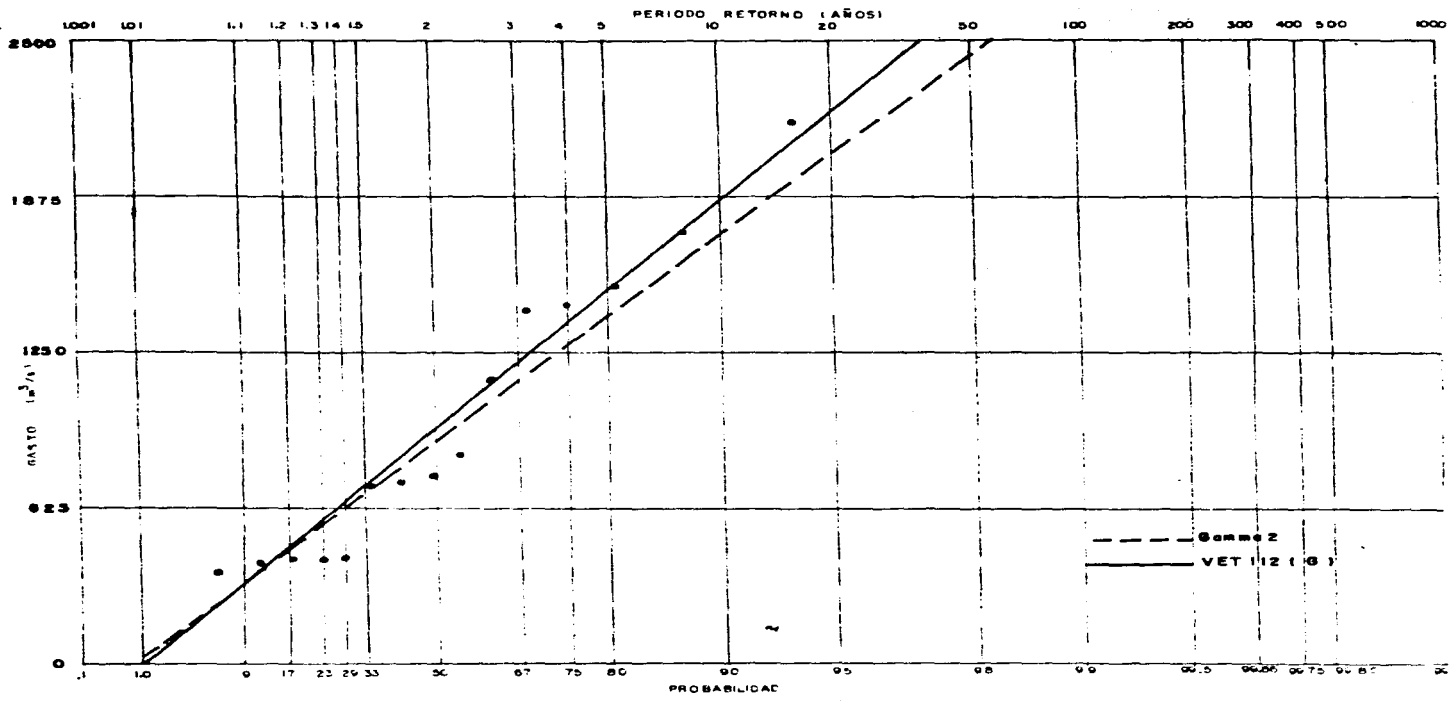


Fig.D50 Curvas de frecuencia empirica y ajustada mediante la mejor distribucion universal y trivariada para los gastos máximos anuales. Estación Chitalpa

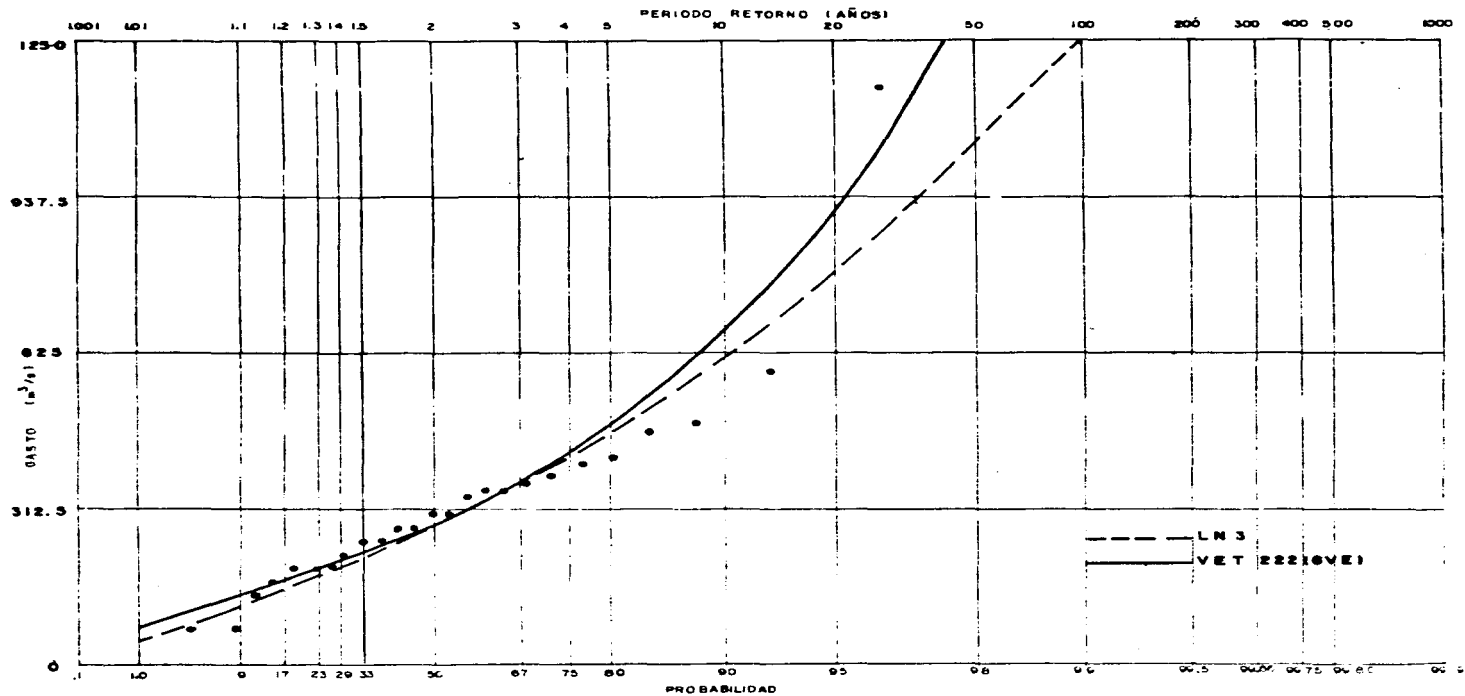


Fig. 51 Curvas de frecuencia empírica y ajustada mediante la mejor distribución univariada y trivariada para los gastos máximos anuales. Estación Chelx

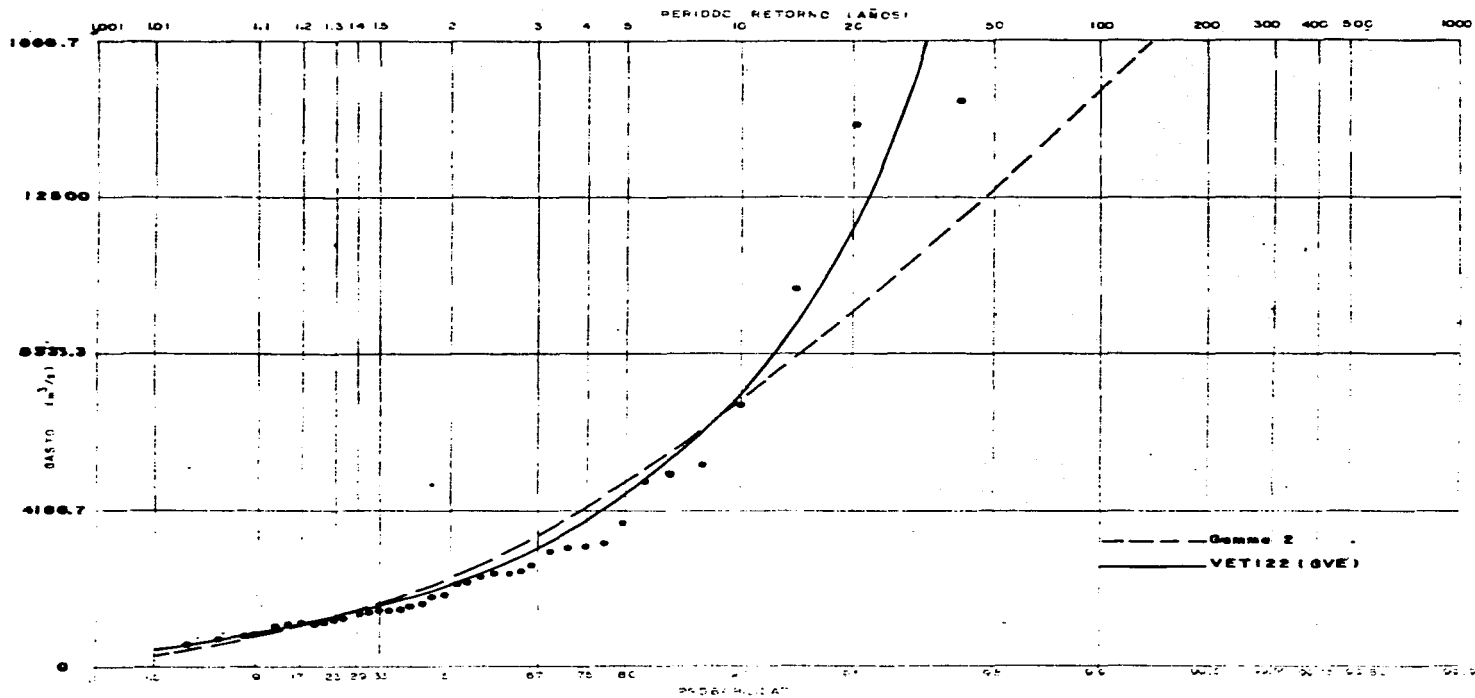


Fig.D.32 Curvas de frecuencia empírica y ajustada mediante la mejor distribución univariada y trivariada para los gastos máximos anuales. Estación Huiles

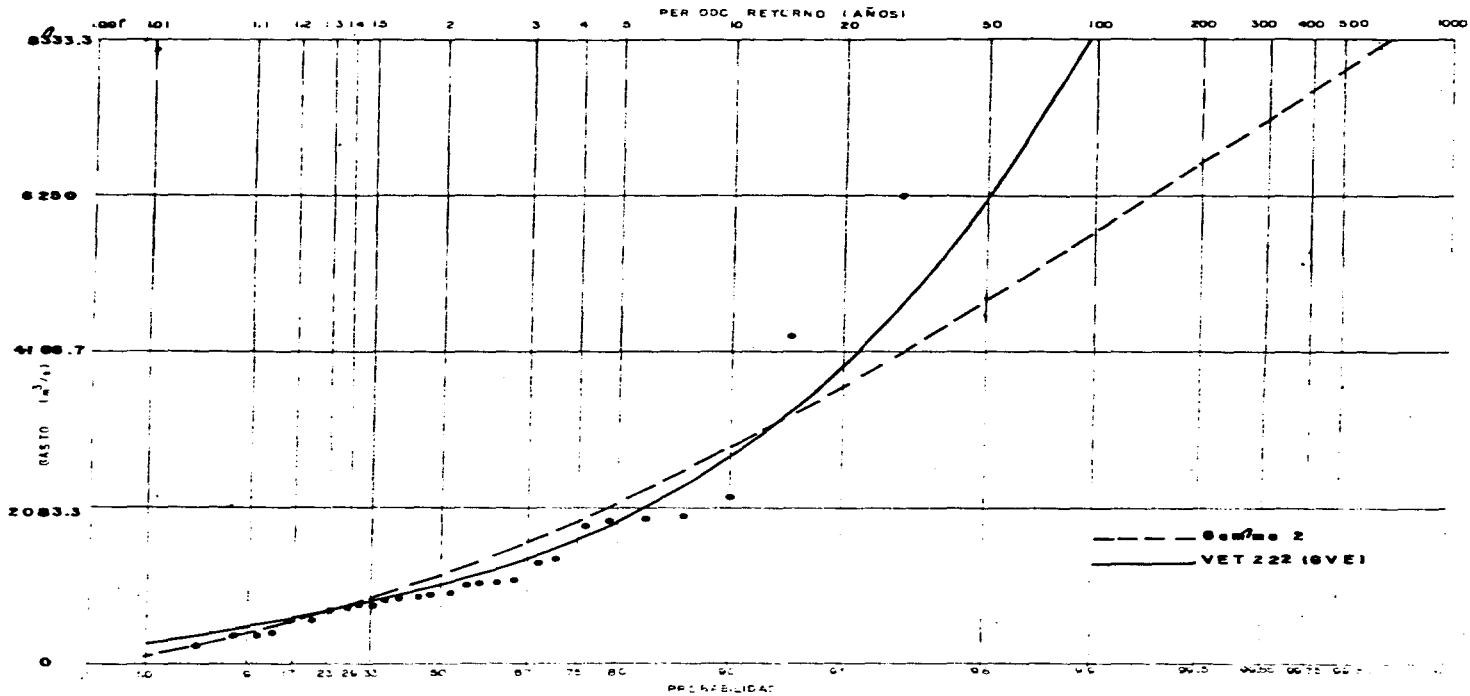


Fig. D.53 Curvas de frecuencia empírica y ajustada mediante la mejor distribución univariada y trivariada para los gastos máximos anuales. Estación Ixpetla

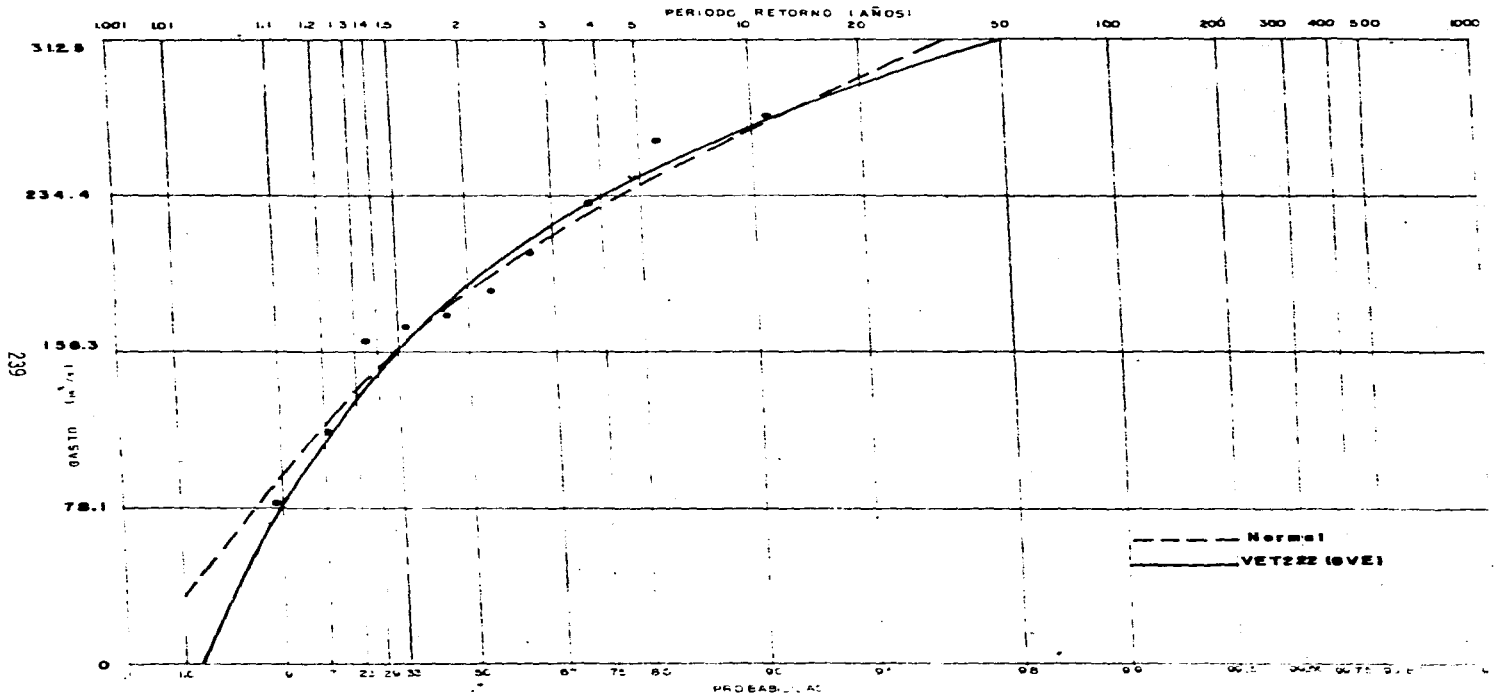


Fig. 54 Curvas de frecuencia empírica y ajustada mediante la mejor distribución univariada y trivariada para los gastos máximos caudales. Estación Los Molinos

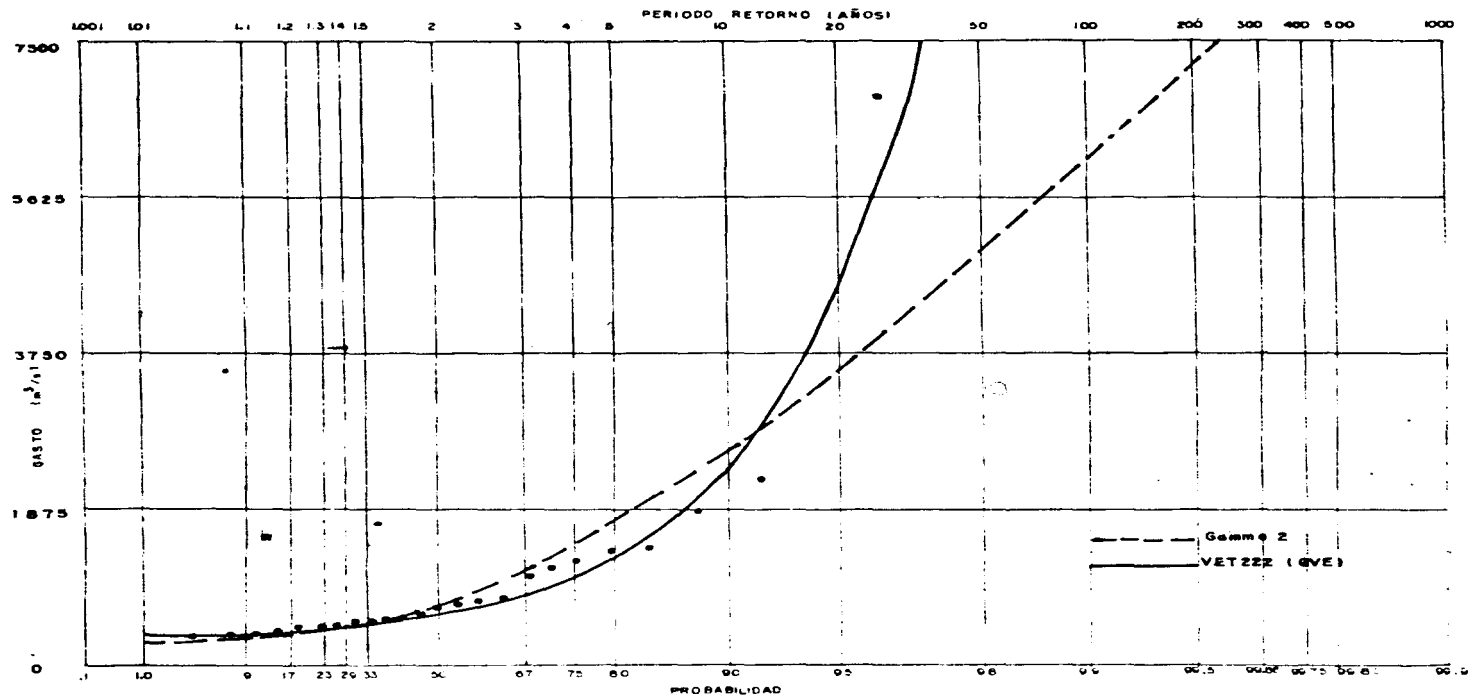


Fig. 55 Curvas de frecuencia empírica y ajustado mediante la mejor distribución univariada y trivariada para los gastos máximos anuales. Estación Palo Dulce



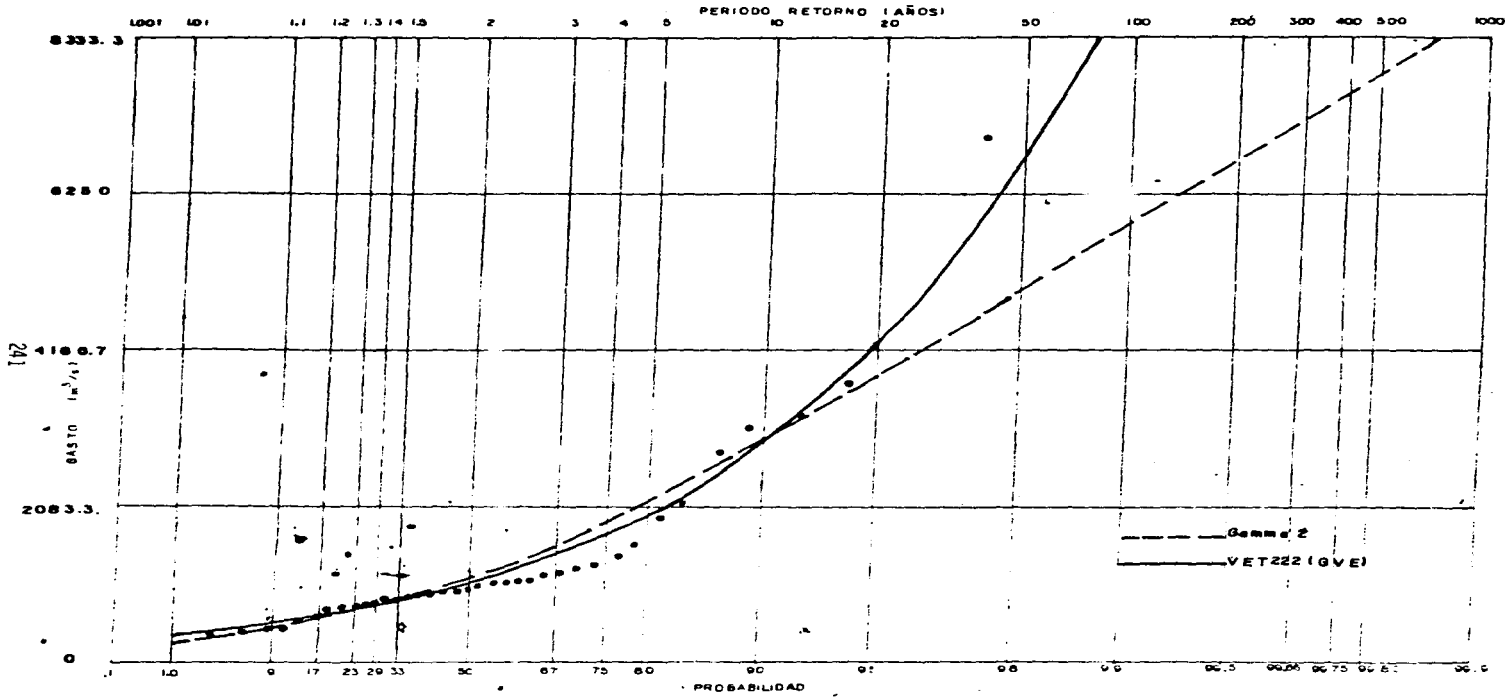


Fig. D. 56 Curvas de frecuencia empírica y ajustada mediante la mejor distribución univariada y trivariada para los gastos máximos anuales. Estación Santa Cruz

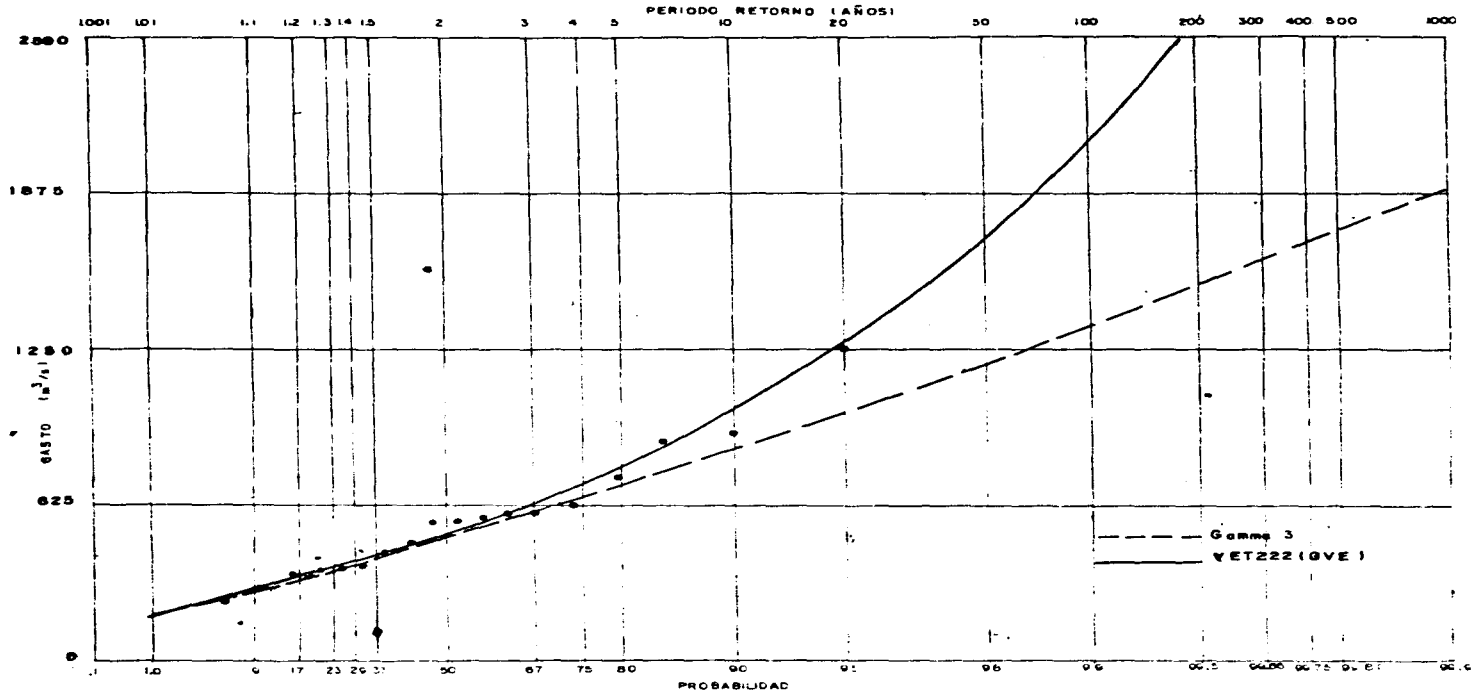


Fig.57 Curvas de frecuencia empirica y ajustada mediante la mejor distribucion univariada y trivariada para los gastos máximos anuales. Estación Tamazula

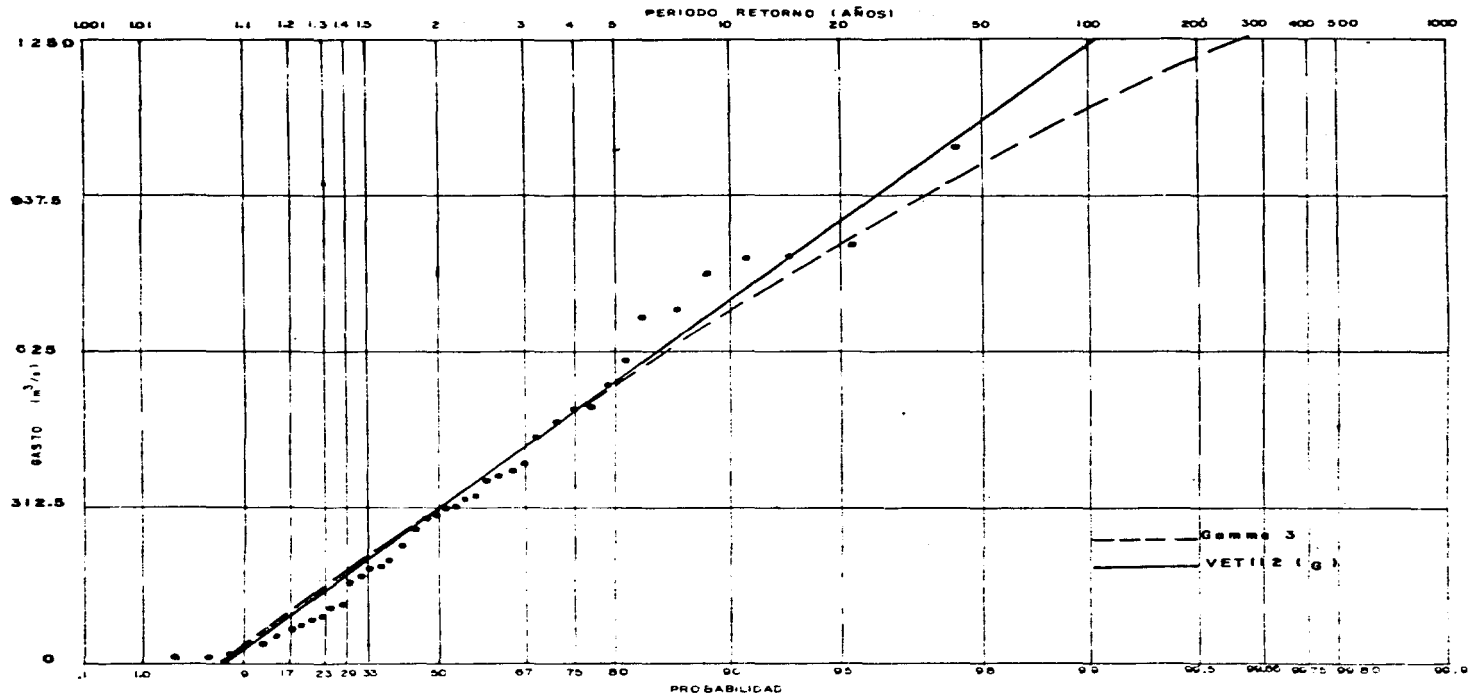


Fig.D.5B Curvas de frecuencia empírica y ajustada mediante la mejor distribución univariada y trivariada para los gastos máximos anuales- Estación Zapilote

## APENDICE E

Tabla E.1 Varianzas asintóticas y simuladas de los valores de diseño de la distribución VET111 ( Caso A )

*Distribución marginal primera estación: Gumbel*

Periodo retorno T(años)	Varianza asintótica $Var_a(Q_T)$	límite de confianza inferior	Varianza simulada $Var_s(Q_T)$	límite de confianza superior
2	0.1255	0.1233	0.1600	0.2159
5	0.2874	0.2790	0.3620	0.4885
10	0.4737	0.4478	0.5809	0.7839
20	0.7115	0.6587	0.8545	1.1532
50	1.1053	1.0032	1.3014	1.7564
100	1.4640	1.3141	1.7047	2.3006
500	2.5016	2.2057	2.8613	3.8616
1000	3.0371	2.6532	3.4549	4.6627
5000	4.4872	3.8974	5.0558	6.8233
10000	5.2008	4.5028	5.8412	7.8833

*Distribución marginal segunda estación: Gumbel*

Periodo retorno T(años)	Varianza asintótica $Var_a(Q_T)$	límite de confianza inferior	Varianza simulada $Var_s(Q_T)$	límite de confianza superior
2	0.0922	0.0694	0.0900	0.1215
5	0.2112	0.1736	0.2253	0.3041
10	0.3480	0.2845	0.3691	0.4981
20	0.5227	0.4221	0.5476	0.7390
50	0.8121	0.6458	0.8378	1.1307
100	1.0756	0.8470	1.0988	1.4829
500	1.8379	1.4224	1.8452	2.4903
1000	2.2313	1.7170	2.2274	3.0061
5000	3.2967	2.5106	3.2568	4.3954
10000	3.8210	2.8995	3.7613	5.0763

*Distribución marginal tercera estación: Gumbel*

Periodo retorno T(años)	Varianza asintótica $Var_a(Q_T)$	límite de confianza inferior	Varianza simulada $Var_s(Q_T)$	límite de confianza superior
2	0.0640	0.0612	0.0794	0.1071
5	0.1466	0.1391	0.1804	0.2435
10	0.2417	0.2206	0.2862	0.3863
20	0.3630	0.3212	0.4167	0.5624
50	0.5639	0.4842	0.6281	0.8477
100	0.7470	0.6304	0.8179	1.1038
500	1.2763	1.0476	1.3590	1.8341
1000	1.5495	1.2609	1.6357	2.2075
5000	2.2894	1.8345	2.3798	3.2118
10000	2.6535	2.1154	2.7442	3.7036

**Tabla E.2** Varianzas asintóticas y simuladas de los valores de diseño de la distribución VET111 ( Caso B )

**Distribución marginal primera estación: Gumbel**

Periodo retorno T(años)	Varianza asintótica $Var_a(Q_T)$	límite de confianza inferior	Varianza simulada $Var_s(Q_T)$	límite de confianza superior
2	0.0924	0.0920	0.1206	0.1628
5	0.2101	0.1578	0.2047	0.2762
10	0.3520	0.2415	0.3133	0.4228
20	0.5362	0.3525	0.4573	0.6171
50	0.8442	0.5406	0.7013	0.9465
100	1.1266	0.7144	0.9268	1.2508
500	1.9481	1.2240	1.5879	2.1430
1000	2.3738	1.4894	1.9321	2.6076
5000	3.5297	2.2124	2.8700	3.8734
10000	4.0998	2.5696	3.3334	4.4988

**Distribución marginal segunda estación: Gumbel**

Periodo retorno T(años)	Varianza asintótica $Var_a(Q_T)$	límite de confianza inferior	Varianza simulada $Var_s(Q_T)$	límite de confianza superior
2	0.0679	0.0571	0.0741	0.1000
5	0.1544	0.1288	0.1671	0.2255
10	0.2586	0.2111	0.2739	0.3696
20	0.3939	0.3161	0.4100	0.5533
50	0.6202	0.4898	0.6354	0.8575
100	0.8277	0.6480	0.8407	1.1346
500	1.4312	1.1055	1.4341	1.9355
1000	1.7440	1.3415	1.7403	2.3487
5000	2.5932	1.9807	2.5694	3.4676
10000	3.0121	2.2951	2.9773	4.0182

**Distribución marginal tercera estación: Gumbel**

Periodo retorno T(años)	Varianza asintótica $Var_a(Q_T)$	límite de confianza inferior	Varianza simulada $Var_s(Q_T)$	límite de confianza superior
2	0.0332	0.0284	0.0369	0.0498
5	0.0775	0.0616	0.0800	0.1079
10	0.1279	0.0999	0.1297	0.1750
20	0.1922	0.1488	0.1931	0.2606
50	0.2983	0.2298	0.2982	0.4024
100	0.3949	0.3036	0.3939	0.5316
500	0.6739	0.5169	0.6706	0.9050
1000	0.8177	0.6271	0.8135	1.0979
5000	1.2071	0.9253	1.2004	1.6201
10000	1.3986	1.0721	1.3908	1.8770

Tabla E.3 Varianzas asintóticas y simuladas de los valores de diseño de la distribución VET111 ( Caso C )

*Distribución marginal primera estación: Gumbel*

Periodo retorno T(años)	Varianza asintótica $Var_a(Q_T)$	límite de confianza inferior	Varianza simulada $Var_s(Q_T)$	límite de confianza superior
2	0.0870	0.0756	0.0981	0.1324
5	0.1974	0.1422	0.1845	0.2490
10	0.3314	0.2234	0.2899	0.3912
20	0.5053	0.3292	0.4271	0.5764
50	0.7967	0.5065	0.6571	0.8868
100	1.0639	0.6692	0.8682	1.1717
500	1.8418	1.1433	1.4832	2.0017
1000	2.2451	1.3892	1.8021	2.4321
5000	3.3403	2.0572	2.6687	3.6017
10000	3.8805	2.3869	3.0963	4.1788

*Distribución marginal segunda estación: Gumbel*

Periodo retorno T(años)	Varianza asintótica $Var_a(Q_T)$	límite de confianza inferior	Varianza simulada $Var_s(Q_T)$	límite de confianza superior
2	0.0472	0.0298	0.0387	0.0522
5	0.1092	0.0649	0.0842	0.1136
10	0.1804	0.1045	0.1356	0.1830
20	0.2712	0.1548	0.2008	0.2710
50	0.4215	0.2377	0.3084	0.4162
100	0.5584	0.3131	0.4061	0.5481
500	0.9542	0.5304	0.6880	0.9285
1000	1.1585	0.6423	0.8332	1.1245
5000	1.7116	0.9451	1.2260	1.6546
10000	1.9838	1.0939	1.4191	1.9152

*Distribución marginal tercera estación: Gumbel*

Periodo retorno T(años)	Varianza asintótica $Var_a(Q_T)$	límite de confianza inferior	Varianza simulada $Var_s(Q_T)$	límite de confianza superior
2	0.0328	0.0237	0.0307	0.0414
5	0.0758	0.0531	0.0699	0.0929
10	0.1252	0.0880	0.1142	0.1541
20	0.1883	0.1330	0.1726	0.2329
50	0.2927	0.2079	0.2698	0.3641
100	0.3878	0.2764	0.3586	0.4839
500	0.6627	0.4753	0.6166	0.8322
1000	0.8045	0.5781	0.7500	1.0122
5000	1.1886	0.8565	1.1112	1.4996
10000	1.3776	0.9947	1.2903	1.7414

Tabla E.4 Varianzas asintóticas y simuladas de los valores de diseño de la distribución VET111 ( Caso D )

*Distribución marginal primera estación: Gumbel*

Periodo retorno T(años)	Varianza asintótica $Var_a(Q_T)$	límite de confianza inferior	Varianza simulada $Var_s(Q_T)$	límite de confianza superior
2	0.0757	0.0815	0.0798	0.1077
5	0.1707	0.1352	0.1755	0.2369
10	0.2891	0.2222	0.2883	0.3891
20	0.4443	0.3342	0.4336	0.5852
50	0.7057	0.5208	0.6754	0.9115
100	0.9462	0.6911	0.8965	1.2099
500	1.6485	1.1854	1.5377	2.0753
1000	2.0133	1.4411	1.8694	2.5229
5000	3.0056	2.1344	2.7689	3.7369
10000	3.4956	2.4761	3.2121	4.3351

*Distribución marginal segunda estación: Gumbel*

Periodo retorno T(años)	Varianza asintótica $Var_a(Q_T)$	límite de confianza inferior	Varianza simulada $Var_s(Q_T)$	límite de confianza superior
2	0.0389	0.0247	0.0320	0.0432
5	0.0906	0.0546	0.0707	0.0964
10	0.1492	0.0905	0.1175	0.1585
20	0.2261	0.1375	0.1784	0.2408
50	0.3542	0.2161	0.2804	0.3784
100	0.4713	0.2883	0.3740	0.5048
500	0.8112	0.4983	0.6465	0.8725
1000	0.9870	0.6072	0.7877	1.0631
5000	1.4638	0.9029	1.1713	1.5808
10000	1.6988	1.0488	1.3605	1.8361

*Distribución marginal tercera estación: Gumbel*

Periodo retorno T(años)	Varianza asintótica $Var_a(Q_T)$	límite de confianza inferior	Varianza simulada $Var_s(Q_T)$	límite de confianza superior
2	0.0222	0.0146	0.0189	0.0255
5	0.0519	0.0334	0.0434	0.0585
10	0.0857	0.0547	0.0710	0.0958
20	0.1289	0.0817	0.1060	0.1431
50	0.2002	0.1263	0.1638	0.2211
100	0.2651	0.1667	0.2163	0.2919
500	0.4526	0.2835	0.3678	0.4964
1000	0.5493	0.3436	0.4458	0.6017
5000	0.8110	0.5064	0.6569	0.8866
10000	0.9398	0.5864	0.7607	1.0266



Tabla E.5 Varianzas asintóticas y simuladas de los valores de diseño de la distribución VET112 ( Caso A )

*Distribución marginal primera estación: Gumbel*

Periodo retorno T(años)	Varianza asintótica $Var_a(Q_T)$	límite de confianza inferior	Varianza simulada $Var_s(Q_T)$	límite de confianza superior
2	0.2572	0.1275	0.1654	0.2232
5	0.5954	0.3500	0.4541	0.6128
10	0.9847	0.6071	0.7876	1.0629
20	1.4819	0.9359	1.2141	1.6385
50	2.3055	1.4809	1.9211	2.5927
100	3.0559	1.9777	2.5656	3.4625
500	5.2261	3.4153	4.4304	5.9793
1000	6.3464	4.1576	5.3933	7.2788
5000	9.3802	6.1682	8.0015	10.7988
10000	10.8733	7.1578	9.2854	12.5316

*Distribución marginal segunda estación: Gumbel*

Periodo retorno T(años)	Varianza asintótica $Var_a(Q_T)$	límite de confianza inferior	Varianza simulada $Var_s(Q_T)$	límite de confianza superior
2	0.0926	0.0676	0.0877	0.1184
5	0.2143	0.1917	0.2487	0.3356
10	0.3545	0.3235	0.4196	0.5663
20	0.5335	0.4870	0.6318	0.8527
50	0.8300	0.7528	0.9765	1.3179
100	1.1001	0.9919	1.2867	1.7365
500	1.8814	1.6752	2.1731	2.9328
1000	2.2847	2.0252	2.6271	3.5455
5000	3.3769	2.9675	3.8495	5.1952
10000	3.9144	3.4293	4.4486	6.0036

*Distribución marginal tercera estación: G V E*

Periodo retorno T(años)	Varianza asintótica $Var_a(Q_T)$	límite de confianza inferior	Varianza simulada $Var_s(Q_T)$	límite de confianza superior
2	0.0754	0.0577	0.0749	0.1011
5	0.1980	0.1389	0.1803	0.2433
10	0.4080	0.2833	0.3675	0.4959
20	0.8538	0.7048	0.9144	1.2341
50	2.1838	2.7199	3.5284	4.7619
100	4.2117	7.6278	9.8951	13.3544
500	16.0522	79.1997	102.7400	138.6582
1000	26.6502	214.0257	277.6400	374.7037
5000	76.4561	2147.0719	2785.2400	3758.9683
10000	115.3082	5812.6521	7540.3312	10176.4500

Tabla E.6 Varianzas asintóticas y simuladas de los valores de diseño de la distribución VET112 ( Caso B )

*Distribución marginal primera estación: Gumbel*

Periodo retorno T(años)	Varianza asintótica $Var_a(Q_T)$	limite de confianza inferior	Varianza simulada $Var_s(Q_T)$	limite de confianza superior
2	0.1900	0.1106	0.1438	0.1041
5	0.4368	0.2951	0.3836	0.3186
10	0.7340	0.5228	0.6782	0.5153
20	1.1193	0.8204	1.0643	1.4364
50	1.7637	1.3206	1.7134	2.3124
100	2.3544	1.7809	2.3103	3.1179
500	4.0724	3.1231	4.0514	5.4678
1000	4.9628	3.8198	4.9551	6.6874
5000	7.3796	5.7142	7.4126	10.0040
10000	8.5715	6.6493	8.6257	11.8410

*Distribución marginal segunda estación: Gumbel*

Periodo retorno T(años)	Varianza asintótica $Var_a(Q_T)$	limite de confianza inferior	Varianza simulada $Var_s(Q_T)$	limite de confianza superior
2	0.0684	0.0435	0.0564	0.0761
5	0.1572	0.1180	0.1531	0.2066
10	0.2642	0.2051	0.2660	0.3589
20	0.4092	0.3166	0.4107	0.5543
50	0.6349	0.5020	0.6512	0.8789
100	0.8476	0.6712	0.8707	1.1751
500	1.4661	1.1613	1.5065	2.0332
1000	1.7865	1.4146	1.8351	2.4767
5000	2.6566	2.1011	2.7256	3.6785
10000	3.0857	2.4391	3.1641	4.2703

*Distribución marginal tercera estación: G V E*

Periodo retorno T(años)	Varianza asintótica $Var_a(Q_T)$	limite de confianza inferior	Varianza simulada $Var_s(Q_T)$	limite de confianza superior
2	0.0398	0.0313	0.0406	0.0548
5	0.1053	0.0944	0.1224	0.1652
10	0.2228	0.1947	0.2526	0.3409
20	0.4840	0.3985	0.5143	0.6941
50	1.2902	0.9732	1.2624	1.7037
100	2.5422	1.8337	2.3787	3.2103
500	9.9660	6.8666	8.9076	12.0217
1000	16.6582	11.4883	14.9030	20.1131
5000	48.2595	34.7054	45.0208	60.7602
10000	72.9773	54.2926	70.4299	95.0524

Tabla E.7 Varianzas asintóticas y simuladas de los valores de diseño de la distribución VET112 ( Caso C )

*Distribución marginal primera estación: Gumbel*

Periodo retorno T(caños)	Varianza asintótica $Var_a(C, Q, T)$	límite de confianza inferior	Varianza simulada $Var_s(C, Q, T)$	límite de confianza superior
2	0.1781	0.0903	0.1172	0.1582
5	0.4084	0.1882	0.2442	0.3296
10	0.6875	0.3565	0.4625	0.6242
20	1.0501	0.5955	0.7726	1.0427
50	1.6572	1.0176	1.3201	1.7816
100	2.2141	1.4172	1.8385	2.4812
500	3.8351	2.6139	3.3909	4.5764
1000	4.6753	3.2456	4.2104	5.6824
5000	6.9576	4.9833	6.4645	8.7245
10000	8.0833	5.8486	7.5868	10.2392

*Distribución marginal segunda estación: Gumbel*

Periodo retorno T(caños)	Varianza asintótica $Var_a(C, Q, T)$	límite de confianza inferior	Varianza simulada $Var_s(C, Q, T)$	límite de confianza superior
2	0.0474	0.0288	0.0374	0.0504
5	0.1113	0.0528	0.0695	0.0924
10	0.1848	0.0856	0.1111	0.1499
20	0.2786	0.1297	0.1683	0.2271
50	0.4339	0.2052	0.2662	0.3593
100	0.5754	0.2754	0.3573	0.4822
500	0.9846	0.4823	0.6256	0.8443
1000	1.1958	0.5902	0.7657	1.0334
5000	1.7677	0.8853	1.1485	1.5500
10000	2.0491	1.0315	1.3381	1.8059

*Distribución marginal tercera estación: G V E*

Periodo retorno T(caños)	Varianza asintótica $Var_a(C, Q, T)$	límite de confianza inferior	Varianza simulada $Var_s(C, Q, T)$	límite de confianza superior
2	0.0388	0.0303	0.0394	0.0532
5	0.1023	0.0683	0.0886	0.1196
10	0.2132	0.1399	0.1815	0.2449
20	0.4516	0.3042	0.3946	0.5326
50	1.1688	0.8149	1.0572	1.4288
100	2.2667	1.6074	2.0851	2.8141
500	8.6950	6.3491	8.2362	11.1156
1000	14.4550	10.7193	13.9054	18.7667
5000	41.5394	32.4839	42.1390	56.8709
10000	62.6721	50.5949	65.6332	88.5787

Tabla E.8 Varianzas asintóticas y simuladas de los valores de diseño de la distribución VET112 ( Caso D )

*Distribución marginal primera estación: Gumbel*

Periodo retorno T(años)	Varianza asintótica $Var_a(C, Q, T)$	límite de confianza inferior	Varianza simulada $Var_s(C, Q, T)$	límite de confianza superior
2	0.1552	0.0735	0.0954	0.1287
5	0.3535	0.1681	0.2181	0.2943
10	0.6003	0.3176	0.4121	0.5562
20	0.9235	0.5262	0.6827	0.9214
50	1.4675	0.8908	1.1556	1.5596
100	1.9682	1.2340	1.6009	2.1605
500	3.4299	2.2564	2.9271	3.9504
1000	4.1891	2.7944	3.6250	4.8923
5000	6.2539	4.2709	5.5404	7.4773
10000	7.2735	5.0049	6.4925	8.7623

*Distribución marginal segunda estación: Gumbel*

Periodo retorno T(años)	Varianza asintótica $Var_a(C, Q, T)$	límite de confianza inferior	Varianza simulada $Var_s(C, Q, T)$	límite de confianza superior
2	0.0392	0.0249	0.0324	0.0437
5	0.0915	0.0499	0.0648	0.0874
10	0.1532	0.0830	0.1077	0.1454
20	0.2326	0.1272	0.1651	0.2228
50	0.3650	0.2024	0.2626	0.3544
100	0.4860	0.2720	0.3529	0.4763
500	0.8371	0.4767	0.6185	0.8347
1000	1.0187	0.5835	0.7570	1.0216
5000	1.5114	0.8749	1.1349	1.5317
10000	1.7541	1.0189	1.3218	1.7839

*Distribución marginal tercera estación: G V E*

Periodo retorno T(años)	Varianza asintótica $Var_a(C, Q, T)$	límite de confianza inferior	Varianza simulada $Var_s(C, Q, T)$	límite de confianza superior
2	0.0266	0.0230	0.0299	0.0403
5	0.0703	0.0558	0.0724	0.0977
10	0.1487	0.1161	0.1506	0.2033
20	0.3217	0.2529	0.3281	0.4428
50	0.8526	0.6737	0.8739	1.1794
100	1.6743	1.3203	1.7127	2.3115
500	6.5309	5.1242	6.6472	8.9711
1000	10.9019	8.5797	11.1298	15.0208
5000	31.5172	25.4747	33.0465	44.5996
10000	47.6303	39.3195	51.0064	68.8384

Tabla E.9 Varianzas asintóticas y simuladas de los valores de diseño de la distribución VET122 ( Caso A )

*Distribución marginal primera estación: Gumbel*

Periodo retorno T(años)	Varianza asintótica $Var_a(Q_T)$	límite de confianza inferior	Varianza simulada $Var_s(Q_T)$	límite de confianza superior
2	0.2588	0.2400	0.3114	0.4203
5	0.6084	0.6071	0.7875	1.0628
10	1.0114	1.0193	1.3223	1.7846
20	1.5263	1.5414	1.9995	2.6985
50	2.3796	2.4012	3.1150	4.2040
100	3.1571	3.1818	4.1276	5.5706
500	5.4063	5.4316	7.0460	9.5093
1000	6.5675	6.5908	8.5498	11.5388
5000	9.7122	9.7242	12.6145	17.0246
10000	11.2600	11.2644	14.6125	19.7210

*Distribución marginal segunda estación: G V E*

Periodo retorno T(años)	Varianza asintótica $Var_a(Q_T)$	límite de confianza inferior	Varianza simulada $Var_s(Q_T)$	límite de confianza superior
2	0.1134	0.0728	0.0945	0.1275
5	0.3303	0.2566	0.3329	0.4493
10	0.7017	0.7232	0.9381	1.2661
20	1.4799	2.1389	2.7747	3.7448
50	3.8258	8.9623	11.6261	15.6906
100	7.5108	26.0606	33.8065	45.6254
500	30.7282	29.8295	38.6956	52.2237
1000	53.0575	84.5553	1095.5800	1478.5981
5000	168.7311	940.0587	12199.2000	16464.0773
10000	266.9657	26539.6084	34427.9000	46463.9984

*Distribución marginal tercera estación: G V E*

Periodo retorno T(años)	Varianza asintótica $Var_a(Q_T)$	límite de confianza inferior	Varianza simulada $Var_s(Q_T)$	límite de confianza superior
2	0.0754	0.0715	0.0928	0.1252
5	0.2008	0.1861	0.2414	0.3258
10	0.4228	0.3754	0.4870	0.6572
20	0.8999	0.8836	1.1463	1.5470
50	2.3298	2.7906	3.6200	4.8856
100	4.5108	6.4654	8.3671	11.3192
500	17.2256	40.2532	52.2176	70.4730
1000	28.5888	85.1547	110.4650	149.0838
5000	81.9027	461.4604	598.6190	807.8980
10000	123.4410	943.5202	1223.9600	1651.8601

Tabla E.10 Varianzas asintóticas y simuladas de los valores de diseño de la distribución VET122 ( Caso B )

*Distribución marginal primera estación: Gumbel*

Periodo retorno T(años)	Varianza asintótica $Var_a(Q_T)$	límite de confianza inferior	Varianza simulada $Var_s(Q_T)$	límite de confianza superior
2	0.1906	0.2143	0.2781	0.3753
5	0.4426	0.4629	0.6006	0.8106
10	0.7463	0.7390	0.9587	1.2939
20	1.1400	1.0874	1.4106	1.9038
50	1.7987	1.6596	2.1529	2.9056
100	2.4024	2.1782	2.8256	3.8134
500	4.1587	3.6707	4.7618	6.4265
1000	5.0687	4.4386	5.7579	7.7709
5000	7.5395	6.5133	8.4492	11.4031
10000	8.7581	7.5325	9.7714	13.1875

*Distribución marginal segunda estación: G V E*

Periodo retorno T(años)	Varianza asintótica $Var_a(Q_T)$	límite de confianza inferior	Varianza simulada $Var_s(Q_T)$	límite de confianza superior
2	0.0881	0.1067	0.1385	0.1869
5	0.2442	0.3103	0.4025	0.5432
10	0.5169	0.6963	0.9032	1.2189
20	1.1158	1.6513	2.1421	2.8909
50	3.0130	5.1990	6.7444	9.1023
100	6.0947	11.9948	15.5500	20.9998
500	26.1985	73.8842	95.8446	129.3522
1000	45.8920	155.0885	201.1850	271.5198
5000	149.4170	818.2453	1061.4500	1432.5361
10000	238.1210	1648.0845	2137.9400	2885.3703

*Distribución marginal tercera estación: G V E*

Periodo retorno T(años)	Varianza asintótica $Var_a(Q_T)$	límite de confianza inferior	Varianza simulada $Var_s(Q_T)$	límite de confianza superior
2	0.0398	0.0344	0.0447	0.0603
5	0.1061	0.1093	0.1418	0.1914
10	0.2276	0.2699	0.3502	0.4726
20	0.4998	0.6295	0.8166	1.1021
50	1.3421	1.7297	2.2438	3.0282
100	2.6504	3.4551	4.4821	6.0490
500	10.4014	14.3837	18.6589	25.1821
1000	17.3830	25.0983	32.5582	43.9406
5000	50.3219	83.5119	108.3340	146.2078
10000	76.0696	136.1349	176.5980	236.3372

Tabla E.11 Varianzas asintóticas y simuladas de los valores de diseño de la distribución VET122 ( Caso C )

*Distribución marginal primera estación: Gumbel*

Periodo retorno T(años)	Varianza asintótica $Var_a(Q_T)$	límite de confianza inferior	Varianza simulada $Var_s(Q_T)$	límite de confianza superior
2	0.1792	0.1569	0.2036	0.2748
5	0.4181	0.3655	0.4741	0.6398
10	0.7075	0.6276	0.8141	1.0987
20	1.0834	0.9719	1.2608	1.7016
50	1.7128	1.5525	2.0140	2.7181
100	2.2902	2.0876	2.7081	3.6548
500	3.9707	3.6512	4.7364	6.3922
1000	4.8418	4.4638	5.7906	7.8150
5000	7.2078	6.6752	8.6592	11.6865
10000	8.3748	7.7674	10.0762	13.5988

*Distribución marginal segunda estación: G V E*

Periodo retorno T(años)	Varianza asintótica $Var_a(Q_T)$	límite de confianza inferior	Varianza simulada $Var_s(Q_T)$	límite de confianza superior
2	0.0583	0.0291	0.0378	0.0510
5	0.1713	0.1038	0.1347	0.1818
10	0.3714	0.3272	0.4244	0.5728
20	0.8011	1.0039	1.3023	1.7576
50	2.1181	3.9035	5.0638	6.8341
100	4.2044	10.0425	13.0275	17.5619
500	17.4297	75.7772	98.3002	132.6662
1000	30.1788	173.0306	224.4600	302.9318
5000	96.2990	1120.2741	1453.2500	1961.3106
10000	152.4755	2476.6364	3212.7600	4335.9506

*Distribución marginal tercera estación: G V E*

Periodo retorno T(años)	Varianza asintótica $Var_a(Q_T)$	límite de confianza inferior	Varianza simulada $Var_s(Q_T)$	límite de confianza superior
2	0.0388	0.0329	0.0427	0.0576
5	0.1044	0.0747	0.0969	0.1307
10	0.2256	0.1614	0.2094	0.2826
20	0.4922	0.3782	0.4906	0.6621
50	1.3021	1.1357	1.4733	1.9884
100	2.5445	2.4592	3.1901	4.3054
500	9.8119	12.2775	15.9267	21.4947
1000	16.3131	23.0942	29.9584	40.4319
5000	46.8204	91.4497	118.6310	160.1047
10000	70.5867	160.9409	208.7770	281.7660

Tabla E.12 Varianzas asintóticas y simuladas de los valores de diseño de la distribución VET122 ( Caso D )

**Distribución marginal primera estación: Gumbel**

Periodo retorno T(años)	Varianza asintótica $Var_a(C, Q, T)$	límite de confianza inferior	Varianza simulada $Var_s(C, Q, T)$	límite de confianza superior
2	0.1558	0.1269	0.1647	0.2228
5	0.3592	0.3124	0.4053	0.5470
10	0.6122	0.5357	0.6950	0.9379
20	0.9435	0.8252	1.0705	1.4447
50	1.5011	1.3092	1.6983	2.2920
100	2.0142	1.7527	2.2737	3.0686
500	3.5123	3.0428	3.9473	5.3273
1000	4.2903	3.7112	4.8143	6.4974
5000	6.4063	5.5259	7.1684	9.6745
10000	7.4710	6.4208	8.3293	11.2412

**Distribución marginal segunda estación: G V E**

Periodo retorno T(años)	Varianza asintótica $Var_a(C, Q, T)$	límite de confianza inferior	Varianza simulada $Var_s(C, Q, T)$	límite de confianza superior
2	0.0498	0.0302	0.0392	0.0529
5	0.1412	0.0739	0.0959	0.1294
10	0.3041	0.2255	0.2925	0.3947
20	0.6630	0.7549	0.9794	1.3218
50	1.7947	3.1904	4.1387	5.5856
100	3.6233	8.4242	10.9281	14.7486
500	15.4621	62.5163	81.0978	109.4498
1000	27.0051	138.7960	180.0500	242.9960
5000	87.4264	817.7750	1060.8400	1431.7128
10000	139.0544	1720.8397	2232.3210	3012.7458

**Distribución marginal tercera estación: G V E**

Periodo retorno T(años)	Varianza asintótica $Var_a(C, Q, T)$	límite de confianza inferior	Varianza simulada $Var_s(C, Q, T)$	límite de confianza superior
2	0.0266	0.0203	0.0264	0.0356
5	0.0714	0.0428	0.0555	0.0749
10	0.1549	0.0893	0.1158	0.1563
20	0.3428	0.2129	0.2762	0.3728
50	0.9235	0.6609	0.8574	1.1571
100	1.8235	1.4494	1.8803	2.5376
500	7.1394	7.1823	9.3171	12.5743
1000	11.9184	13.3260	17.2869	23.3304
5000	34.4266	50.4516	65.4472	88.3277
10000	52.0005	86.8074	112.6090	151.9774



Tabla E.13 Varianzas asintóticas y simuladas de los valores de diseño de la distribución VET222 ( Caso A )

*Distribución marginal primera estación: G V E*

Periodo retorno T(años)	Varianza asintótica $Var_a(Q_T)$	límite de confianza inferior	Varianza simulada $Var_s(Q_T)$	límite de confianza superior
2	0.1179	0.3433	0.4454	0.6011
5	0.3892	1.0354	1.3431	1.8126
10	0.9177	2.7908	3.6203	4.8859
20	2.1251	8.5750	11.1238	15.0127
50	6.0757	30.2860	50.9620	68.7796
100	12.7166	123.7138	160.4850	216.5910
500	59.3263	1803.4544	2339.4900	3157.3628
1000	108.1154	5837.7132	7572.8400	10220.3278
5000	389.6687	94584.0535	122697.0000	165592.2438
10000	651.0982	321001.6130	416412.0000	561990.8998

*Distribución marginal segunda estación: G V E*

Periodo retorno T(años)	Varianza asintótica $Var_a(Q_T)$	límite de confianza inferior	Varianza simulada $Var_s(Q_T)$	límite de confianza superior
2	0.1134	0.0853	0.1107	0.1494
5	0.3366	0.2706	0.3511	0.4738
10	0.7363	0.7407	0.9608	1.2967
20	1.5632	2.1491	2.7879	3.7625
50	4.2076	8.6018	11.1586	15.0597
100	8.3316	23.8191	30.8988	41.7011
500	34.3382	239.6750	310.9130	419.6091
1000	59.3310	643.3523	834.5740	1126.3436
5000	188.6052	6418.5598	8326.3300	11237.2403
10000	298.2511	17371.3604	22534.6000	30412.7646

*Distribución marginal tercera estación: G V E*

Periodo retorno T(años)	Varianza asintótica $Var_a(Q_T)$	límite de confianza inferior	Varianza simulada $Var_s(Q_T)$	límite de confianza superior
2	0.0754	0.0722	0.0936	0.1263
5	0.2056	0.1674	0.2171	0.2929
10	0.4480	0.3822	0.4959	0.6693
20	0.9791	1.0184	1.3211	1.7829
50	2.5813	3.7907	4.9174	6.6365
100	5.0272	9.8422	12.7676	17.2312
500	19.2573	80.8624	104.8970	141.5693
1000	31.9481	195.6642	253.8210	342.5676
5000	91.3525	1511.7322	1961.0600	2646.6525
10000	137.5568	3662.6431	4751.2800	6412.3419

Tabla E.14 Varianzas asintóticas y simuladas de los valores de diseño de la distribución VET22 ( Caso B )

*Distribución marginal primera estación: G V E*

Periodo retorno T(años)	Varianza asintótica $Var_a(Q_T)$	límite de confianza inferior	Varianza simulada $Var_s(Q_T)$	límite de confianza superior
2	0.0918	0.2859	0.3709	0.5005
5	0.2841	0.8271	1.0730	1.4481
10	0.6629	2.0567	2.6680	3.6007
20	1.5647	5.3211	6.9027	9.3159
50	4.6495	17.9194	23.2455	31.3722
100	9.9967	42.7597	55.4691	74.8613
500	48.7984	285.3964	370.2240	499.6554
1000	90.1383	626.4747	812.6800	1096.7953
5000	332.2696	3782.5527	4906.8300	6622.2727
10000	559.1149	8182.0675	10614.0000	14324.6866

*Distribución marginal segunda estación: G V E*

Periodo retorno T(años)	Varianza asintótica $Var_a(Q_T)$	límite de confianza inferior	Varianza simulada $Var_s(Q_T)$	límite de confianza superior
2	0.0892	0.0875	0.1135	0.1532
5	0.2462	0.2418	0.3137	0.4233
10	0.5321	0.6879	0.8924	1.2044
20	1.1723	2.1151	2.7438	3.7030
50	3.2203	8.5918	11.1456	15.0421
100	6.5581	23.0086	29.8474	40.2821
500	28.3505	194.0901	251.7790	339.8017
1000	49.6890	469.9346	609.6120	822.7342
5000	161.7540	3589.5256	4658.4300	6284.3320
10000	257.6968	86321.0440	111978.0000	151125.8489

*Distribución marginal tercera estación: G V E*

Periodo retorno T(años)	Varianza asintótica $Var_a(Q_T)$	límite de confianza inferior	Varianza simulada $Var_s(Q_T)$	límite de confianza superior
2	0.0399	0.0382	0.0496	0.0669
5	0.1075	0.0895	0.1162	0.1568
10	0.2353	0.1893	0.2456	0.3315
20	0.5251	0.4253	0.5517	0.7446
50	1.4251	1.2123	1.5727	2.1225
100	2.8237	2.5432	3.2991	4.4525
500	11.1005	12.0068	15.5756	21.0208
1000	18.5474	22.1558	28.7412	38.7892
5000	53.6388	64.5757	109.7140	148.0703
10000	81.0446	146.9758	190.6610	257.3166

Tabla E.15 Varianzas asintóticas y simuladas de los valores de diseño de la distribución VET222 ( Caso C )

*Distribución marginal primera estación: G V E*

Periodo retorno T(años)	Varianza asintótica $Var_a(Q_T)$	límite de confianza inferior	Varianza simulada $Var_s(Q_T)$	límite de confianza superior
2	0.0870	0.2314	0.3003	0.4052
5	0.2687	0.6047	0.7845	1.0587
10	0.6271	1.5564	2.0190	2.7248
20	1.4855	4.5189	5.8620	7.9113
50	4.4400	18.0698	23.4407	31.6356
100	9.5826	48.6772	63.4049	85.5714
500	47.0641	435.0572	564.3660	761.6727
1000	87.0889	1085.4460	1408.0700	1900.3355
5000	321.9639	8923.1097	11575.3000	15622.0600
10000	542.2613	22105.6894	28676.1000	38701.3516

*Distribución marginal segunda estación: G V E*

Periodo retorno T(años)	Varianza asintótica $Var_a(Q_T)$	límite de confianza inferior	Varianza simulada $Var_s(Q_T)$	límite de confianza superior
2	0.0583	0.0281	0.0365	0.0493
5	0.1732	0.0966	0.1253	0.1691
10	0.3823	0.2987	0.3875	0.5229
20	0.8376	0.9063	1.1757	1.5867
50	2.2432	3.4757	4.5088	6.0850
100	4.4756	8.8259	11.4493	15.4520
500	18.6369	63.9628	82.9743	111.9823
1000	32.2837	142.9849	185.4840	250.3297
5000	103.0056	874.9123	1134.9600	1531.7454
10000	163.0524	1882.8931	2442.5400	3296.4594

*Distribución marginal tercera estación: G V E*

Periodo retorno T(años)	Varianza asintótica $Var_a(Q_T)$	límite de confianza inferior	Varianza simulada $Var_s(Q_T)$	límite de confianza superior
2	0.0388	0.0299	0.0388	0.0523
5	0.1059	0.0673	0.0874	0.1179
10	0.2336	0.1491	0.1934	0.2610
20	0.5180	0.3581	0.4646	0.6270
50	1.3852	1.0988	1.4254	1.9237
100	2.7164	2.4018	3.1157	4.2049
500	10.4956	12.1165	15.7179	21.2129
1000	17.4471	22.8327	29.6192	39.9741
5000	50.0269	90.5223	117.4280	158.4812
10000	75.3846	159.2762	206.6200	278.8549

Tabla E.16 Varianzas asintóticas y simuladas de los valores de diseño de la distribución VET222 ( Caso D )

*Distribución marginal primera estación: G V E*

Periodo retorno T(Caños)	Varianza asintótica $Var_a(Q_T)$	límite de confianza inferior	Varianza simulada $Var_s(Q_T)$	límite de confianza superior
2	0.0761	0.2136	0.2771	0.3739
5	0.2324	0.6087	0.7897	1.0658
10	0.5377	1.5065	2.0840	2.8126
20	1.2866	4.7089	6.1085	8.2440
50	3.9278	18.8898	24.5044	33.0712
100	8.5988	51.3208	66.5749	89.8496
500	43.2116	476.8609	618.5970	834.8603
1000	80.4861	1237.3084	1605.0700	2166.2073
5000	300.7430	11731.0991	15217.9000	20538.1241
10000	508.1795	31484.0770	40842.0000	55120.4870

*Distribución marginal segunda estación: G V E*

Periodo retorno T(Caños)	Varianza asintótica $Var_a(Q_T)$	límite de confianza inferior	Varianza simulada $Var_s(Q_T)$	límite de confianza superior
2	0.0498	0.0291	0.0378	0.0510
5	0.1421	0.0786	0.1020	0.1376
10	0.3104	0.2502	0.3246	0.4381
20	0.6858	0.8456	1.0970	1.4805
50	1.8770	3.5877	4.6541	6.2812
100	3.8056	9.5112	12.3383	16.6518
500	16.2991	71.7117	93.0264	125.5487
1000	28.4771	160.6673	208.4220	281.2869
5000	92.1848	970.0383	1258.3600	1698.2864
10000	146.5935	2064.3647	2677.9500	3614.1694

*Distribución marginal tercera estación: G V E*

Periodo retorno T(Caños)	Varianza asintótica $Var_a(Q_T)$	límite de confianza inferior	Varianza simulada $Var_s(Q_T)$	límite de confianza superior
2	0.0266	0.0216	0.0280	0.0378
5	0.0720	0.0452	0.0587	0.0792
10	0.1588	0.0939	0.1219	0.1645
20	0.3555	0.2266	0.2965	0.4001
50	0.9563	0.7376	0.9568	1.2913
100	1.9109	1.6684	2.1643	2.9209
500	7.4919	8.9163	11.5665	15.6102
1000	12.5055	17.1533	22.2517	30.0309
5000	36.0986	71.5838	92.8604	125.3246
10000	54.5082	129.3165	167.7530	226.3999

## APENDICE F

Tabla F.1 Límites al 95 % de confianza univariados, bivariados y trivariados para la estación Chinipas

APROXIMACION	PERIODO RETORNO T(años)	LIMITE INFERIOR Q(m <sup>3</sup> /s)	EVENTO DE DISEÑO Q(m <sup>3</sup> /s)	LIMITE SUPERIOR Q(m <sup>3</sup> /s)
UNIVARIADA ( G )	2	617.66	864.19	1110.73
	5	956.08	1334.44	1712.80
	10	1160.42	1645.78	2131.15
	20	1350.63	1944.43	2538.24
	50	1592.55	2331.01	3069.46
	100	1772.03	2620.69	3469.34
	500	2183.59	3290.09	4396.60
	1000	2359.70	3577.88	4796.07
BIVARIADA ( VEB11 )	2	661.12	873.34	1085.57
	5	1082.62	1402.76	1722.89
	10	1336.81	1753.27	2169.74
	20	1573.59	2089.50	2605.41
	50	1875.08	2524.71	3174.33
	100	2098.97	2850.83	3602.70
	500	2612.85	3504.46	4596.08
	1000	2832.89	3928.46	5024.03
TRIVARIADA ( VET112 G )	2	726.82	932.19	1137.56
	5	1182.91	1491.39	1799.87
	10	1458.93	1861.62	2264.31
	20	1716.44	2216.77	2717.10
	50	2044.61	2676.46	3308.31
	100	2288.43	3020.94	3753.45
	500	2848.92	3816.96	4791.00
	1000	3088.13	4159.18	5230.23

Tabla F.2 Límites al 95 % de confianza univariados, bivariados y trivariados para la estación Choix

APROXIMACION	PERIODO RETORNO T(años)	LIMITE INFERIOR Q(m <sup>3</sup> /s)	EVENTO DE DISEÑO Q(m <sup>3</sup> /s)	LIMITE SUPERIOR Q(m <sup>3</sup> /s)
UNIVARIADA (GVE)	2	228.52	285.49	342.45
	5	330.10	450.89	571.68
	10	383.64	573.64	763.65
	20	415.65	702.41	989.17
	50	418.17	886.75	1355.33
	100	383.98	1039.25	1694.52
	500	151.22	1445.42	2739.62
	1000	-31.18	1848.09	3323.35
BIVARIADA (VEB22)	2	229.16	298.53	367.89
	5	378.84	537.64	696.07
	10	469.80	746.78	1023.76
	20	530.52	997.41	1464.30
	50	534.43	1413.99	2293.55
	100	447.55	1812.44	3177.33
	500	-288.12	3127.07	6542.25
	1000	-978.82	3920.67	8820.16
TRIVARIADA (VET222)	2	233.03	271.39	309.75
	5	417.88	482.35	546.82
	10	563.09	683.09	803.09
	20	742.82	939.52	1136.22
	50	1029.99	1398.57	1767.15
	100	1084.93	1870.13	2655.33
	500	482.46	3603.44	6724.42
	1000	334.18	4756.41	9178.64

Tabla F.3 Límites al 95 % de confianza univariados, bivariados y trivariados para la estación Ixpalino

APROXIMACION	PERIODO RETORNO T(años)	LIMITE INFERIOR Q(m <sup>3</sup> /s)	EVENTO DE DISEÑO Q(m <sup>3</sup> /s)	LIMITE SUPERIOR Q(m <sup>3</sup> /s)
UNIVARIADA (GVE)	2	515.92	958.97	1402.02
	5	1060.84	1730.77	2400.70
	10	1598.77	2458.53	3318.29
	20	2327.80	3381.35	4434.90
	50	3706.55	5019.57	6332.59
	100	5177.92	6688.99	8200.06
	500	10775.58	12750.65	14725.72
1000	14563.05	16739.24	18915.43	
BIVARIADA (VEB11)	2	889.88	1172.31	1454.74
	5	1504.62	1931.67	2358.73
	10	1886.37	2434.44	2982.51
	20	2245.10	2916.70	3588.31
	50	2703.93	3540.94	4377.95
	100	3045.46	4008.72	4971.98
	500	3830.64	5089.69	6348.74
1000	4167.16	5554.41	6941.67	
TRIVARIADA (VET222)	2	831.93	990.99	1150.05
	5	1614.83	1855.35	2095.87
	10	2423.74	2732.41	3041.08
	20	3533.50	3911.75	4290.00
	50	5679.15	6150.55	6621.95
	100	8040.59	8583.10	8040.59
	500	17619.25	18328.34	19037.43
1000	24338.10	25319.40	26300.70	



Tabla F.4 Límites al 95 % de confianza univariados, bivariados y trivariados para la estación Jaina

APROXIMACION	PERIODO RETORNO T(años)	LIMITE INFERIOR Q(mg/s)	EVENTO DE DISEÑO Q(mg/s)	LIMITE SUPERIOR Q(mg/s)
UNIVARIADA (GVE)	2	629.46	784.70	939.95
	5	983.75	1417.05	1850.36
	10	1195.23	2112.88	3030.52
	20	1271.54	3111.53	4951.53
	50	894.69	5154.40	9414.12
	100	-131.93	7537.49	15206.90
	500	-8842.03	18200.76	45243.54
	1000	-18459.40	26610.43	71680.26
BIVARIADA (VEB12 GVE)	2	634.06	767.23	900.40
	5	963.79	1292.60	1621.42
	10	1192.19	1802.58	2412.96
	20	1374.98	2464.40	3553.82
	50	1462.18	3670.80	5879.43
	100	1305.17	4931.76	8558.36
	500	-724.45	9691.04	20106.54
	1000	-2969.28	12931.82	28832.92
TRIVARIADA (VET222)	2	667.06	781.29	895.52
	5	1070.37	1349.86	1629.35
	10	1424.78	1942.80	2460.82
	20	1831.85	2757.85	3683.85
	50	2467.22	4344.55	6221.78
	100	3027.84	6110.45	9193.06
	500	4599.58	13452.76	22305.94
	1000	5375.98	18891.92	32407.86

Tabla F.5 Límites al 95 % de confianza univariados, bivariados y trivariados para la estación La Huerta

APROXIMACION	PERIODO RETORNO T(años)	LIMITE INFERIOR Q(m <sup>3</sup> /s)	EVENO DE DISEÑO Q(m <sup>3</sup> /s)	LIMITE SUPERIOR Q(m <sup>3</sup> /s)
UNIVARIADA (GVE)	2	331.25	601.36	871.46
	5	471.56	1201.95	1932.34
	10	340.84	1835.08	3329.33
	20	-189.04	2712.92	5614.89
	50	-2019.99	4438.91	10897.80
	100	-4917.67	6378.02	17673.71
	500	-22655.21	14559.72	51774.64
	1000	-39509.08	20697.47	80904.03
BIVARIADA (VEB22)	2	336.31	613.85	891.39
	5	540.72	1318.79	2096.85
	10	473.25	2132.12	3790.98
	20	-37.64	3344.96	6727.56
	50	-2147.27	5937.49	14022.25
	100	-5881.04	9090.24	24061.52
	500	-32566.88	24152.94	80872.77
	1000	-60955.22	36703.88	134362.99
TRIVARIADA (VET112 GVE)	2	350.38	614.05	877.71
	5	454.76	1193.92	1933.08
	10	201.03	1776.95	3352.87
	20	-658.27	2555.20	5768.67
	50	-3660.29	4020.23	11700.75
	100	-8623.35	5599.37	19822.09
	500	-42035.82	11848.01	65731.84
	1000	-71854.57	16282.78	104420.13

Tabla F.6 Límites al 95 % de confianza univariados, bivariados y trivariados para la estación Palo Dulce

APROXIMACION	PERIODO RETORNO T(años)	LIMITE INFERIOR Q(mg/s)	EVENTO DE DISEÑO Q(mg/s)	LIMITE SUPERIOR Q(mg/s)
UNIVARIADA (GVE)	2	458.46	626.67	794.68
	5	646.70	1206.04	1756.38
	10	576.55	2003.53	3430.51
	20	-13.06	3376.15	6765.37
	50	-2848.77	6838.79	16526.36
	100	-8652.96	11757.02	32167.01
	500	-62096.02	41923.74	145943.50
1000	-130966.95	72694.83	276356.62	
BIVARIADA (VEB22)	2	477.40	664.74	852.08
	5	837.64	1485.60	2133.55
	10	918.83	2752.50	4586.16
	20	318.96	5148.27	9977.59
	50	-3795.54	11890.48	27576.49
	100	-13773.54	22488.37	58750.29
	500	-128737.41	99341.58	327420.56
1000	-299888.54	188571.10	677030.75	
TRIVARIADA (VET222)	2	386.01	560.24	734.47
	5	644.31	1246.99	1849.58
	10	714.58	2419.88	4125.18
	20	340.40	4831.67	9322.94
	50	-3370.05	12315.96	28001.97
	100	-8537.65	25185.93	58909.51
	500	-78360.55	133752.90	345866.35
1000	-179201.67	274898.40	728998.47	

Tabla F.7 Límites al 95 % de confianza unvariados, bivariados y trivariados para la estación Piaxtla

APROXIMACION	PERIODO RETORNO T(años)	LIMITE INFERIOR Q(m <sup>3</sup> /s)	EVENTO DE DISEÑO Q(m <sup>3</sup> /s)	LIMITE SUPERIOR Q(m <sup>3</sup> /s)
UNIVARIADA (CGVE)	2	521.51	778.44	1035.36
	5	613.53	1567.47	2521.41
	10	85.04	2802.11	5519.18
	20	-1961.90	5163.52	12288.93
	50	-11180.54	11897.39	34975.32
	100	-30795.25	22611.93	76019.11
	500	-237338.33	101908.95	441156.24
	1000	-535724.71	195407.51	926539.73
BIVARIADA (VEB22)	2	621.51	818.26	1015.01
	5	981.49	1501.12	2020.76
	10	1144.96	2262.49	3380.02
	20	1061.01	3366.90	5672.79
	50	127.10	5653.84	11180.59
	100	-1818.01	8352.68	18523.37
	500	-16706.53	20650.09	58006.71
	1000	-32695.39	30498.30	93691.98
TRIVARIADA (VET222)	2	569.36	746.44	923.52
	5	990.09	1457.77	1925.45
	10	1496.99	2502.76	3508.53
	20	2324.94	4400.24	6475.54
	50	4519.58	9493.65	14467.72
	100	8004.04	17157.66	26311.28
	500	35221.96	68842.91	102463.86
	1000	68733.69	125608.00	182482.31

Tabla F.8 Límites al 95 % de confianza univariados, bivariados y trivariados para la estación San Francisco

APROXIMACION	PERIODO RETORNO T(años)	LIMITE INFERIOR Q(mg/s)	EVENTO DE DISEÑO Q(mg/s)	LIMITE SUPERIOR Q(mg/s)
UNIVARIADA (GVE)	2	731.06	1146.93	1562.80
	5	1644.40	2279.28	2914.16
	10	2826.11	3644.85	4463.59
	20	4749.14	5755.48	6761.82
	50	9199.80	10457.17	11714.54
	100	14952.67	16401.57	17850.47
	500	44714.59	46612.02	48509.45
	1000	71012.77	73104.56	75196.35
BIVARIADA (VEB11)	2	925.28	1245.18	1565.08
	5	1702.41	2190.78	2679.15
	10	2187.06	2816.86	3446.66
	20	2643.30	3417.40	4191.51
	50	3227.54	4194.75	5161.96
	100	3662.72	4777.26	5891.80
	500	4663.79	6123.35	7582.91
	1000	5092.99	6702.05	8311.12
TRIVARIADA (VET22)	2	880.42	1168.33	1456.24
	5	1901.82	2341.35	2780.88
	10	3214.93	3781.75	3214.93
	20	5344.19	6040.88	6737.57
	50	10288.67	11159.16	12029.65
	100	16730.77	17733.86	18736.95
	500	50693.35	52006.95	53320.55
	1000	81084.39	82693.46	84302.53

Tabla F.9 Límites al 95 % de confianza univariados, bivariados y trivariados para la estación Tecusiapa

APROXIMACION	PERIODO RETORNO T(años)	LIMITE INFERIOR Q(m <sup>3</sup> /s)	EVENTO DE DISEÑO Q(m <sup>3</sup> /s)	LIMITE SUPERIOR Q(m <sup>3</sup> /s)
UNIVARIADA (GVE)	2	405.32	682.71	960.09
	5	609.99	1382.72	2155.45
	10	517.94	2151.04	3784.14
	20	-16.86	3251.48	6519.83
	50	-2051.46	5497.27	13046.00
	100	-5456.34	8111.22	21678.79
	500	-27879.63	19766.63	67412.90
1000	-50335.31	28931.57	108198.45	
BIVARIADA (VEB12 GVE)	2	432.12	674.53	916.94
	5	721.85	1375.09	2028.32
	10	785.98	2183.95	3581.92
	20	507.01	3390.83	6274.65
	50	-1016.00	5972.37	12960.74
	100	-3930.21	9113.75	22157.71
	500	-25898.43	24137.27	74172.97
1000	-49804.32	36666.07	123136.45	
TRIVARIADA (VET122 GVE)	2	460.92	691.21	921.50
	5	925.20	1545.76	2166.32
	10	1286.11	2614.18	3942.25
	20	1575.01	4314.64	7054.27
	50	1593.91	8232.86	14871.81
	100	954.82	13346.58	25738.34
	500	-8842.84	40691.08	88225.00
1000	-16460.21	65666.65	147833.51	

Tabla F.10 Límites al 95 % de confianza univariados, bivariados y trivariados para la estación Toahayana

APROXIMACION	PERIODO RETORNO T(años)	LIMITE INFERIOR Q(mg/s)	EVENTO DE DISEÑO Q(mg/s)	LIMITE SUPERIOR Q(mg/s)
UNIVARIADA ( G )	2	656.73	873.07	1089.40
	5	1052.02	1384.03	1716.03
	10	1296.42	1722.33	2148.23
	20	1525.78	2046.83	2567.89
	50	1818.89	2466.87	3114.86
	100	2036.95	2781.63	3526.32
	500	2538.05	3509.00	4479.94
	1000	2752.75	3821.70	4890.65
BIVARIADA (VEB12 G)	2	666.94	878.34	1069.75
	5	1147.30	1439.09	1730.87
	10	1432.14	1810.34	2188.55
	20	1699.69	2166.46	2633.24
	50	2041.92	2627.43	3212.93
	100	2296.69	2972.85	3649.01
	500	2882.52	3771.08	4659.64
	1000	3133.63	4114.25	5094.86
TRIVARIADA (VET122 G)	2	684.54	862.55	1040.56
	5	1121.16	1392.51	1663.86
	10	1391.65	1743.38	2095.11
	20	1645.84	2079.95	2514.06
	50	1971.09	2515.61	3060.13
	100	2213.24	2842.07	3470.90
	500	2770.11	3596.47	4422.83
	1000	3008.82	3920.79	4832.76

Tabla F.11 Límites al 95 % de confianza univariados, bivariados y trivariados para la estación Urique

APROXIMACION	PERIODO RETORNO T(años)	LIMITE INFERIOR Q(mg/s)	EVENO DE DISEÑO Q(mg/s)	LIMITE SUPERIOR Q(mg/s)
UNIVARIADA ( G )	2	183.03	260.55	338.08
	5	279.21	398.18	517.16
	10	336.68	489.31	641.94
	20	389.99	576.72	763.44
	50	457.65	689.86	922.07
	100	507.78	774.65	1041.51
	500	622.62	970.56	1318.51
	1000	671.74	1054.79	1437.86
BIVARIADA ( VEB22 )	2	184.27	259.64	335.01
	5	314.08	470.40	626.72
	10	380.33	645.12	909.92
	20	404.63	845.13	1285.63
	50	345.14	1161.19	1977.25
	100	204.31	1449.08	2693.85
	500	-619.02	2332.11	5283.25
	1000	-1287.76	2830.63	6949.02
TRIVARIADA ( VET222 )	2	177.36	248.96	320.56
	5	258.11	406.61	555.11
	10	282.09	533.65	785.21
	20	257.37	675.85	1094.33
	50	119.63	894.89	1670.15
	100	92.99	1089.54	2272.07
	500	-1138.45	1665.13	4468.71
	1000	-1933.28	1979.19	5891.66