



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
FACULTAD DE QUIMICA

**"DETERMINACION DE PROPIEDADES DE LIQUIDOS
MEDIANTE UN VISCOSIMETRO DE
ESFERA ROTATORIA"**

287

OCTAVIO MANERO BRITO

INGENIERO QUIMICO

1976



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

CLAS. Tesis

ADD. 1976

FECHA

PROC. 6

279



QUIMICA

Jurado asignado originalmente según el tema.

PRESIDENTE: Prof. RUDI STIVALET CORRAL

LOCAL: Prof. JORGE LUDLOW LANDERO

SECRETARIO: Prof. RAFAEL MORONES ESCOBAR

1er. SUPLENTE: Prof. MIGUEL SALOMA TERRAZAS

2º. SUPLENTE: Prof. SERGIO TREJO MARTINEZ

Lugar donde se desarrolló el tema: CENTRO DE INVESTIGACION DE MATERIALES. UNAM.

Nombre completo y firma del sustentante: OCTAVIO MANERO BRITO *O Manero*

Nombre completo y firma del asesor del tema: RAFAEL MORONES ESCOBAR *R. Morones*

Nombre completo y firma del supervisor técnico: BALTASAR MENA INIESTA *Baltasar Mena*

A MIS PADRES:

PORQUE GRACIAS A ELLOS ME FUE POSIBLE TERMINAR CON MIS
ESTUDIOS PROFESIONALES.

A LA UNIVERSIDAD.

AL CENTRO DE INVESTIGACION DE MATERIALES.

A BALTASAR MENA.

A RAFAEL MORONES.

INDICE

Prólogo

- 1.- Fluidos Newtonianos y fluidos no Newtonianos
 - Fluidos Newtonianos
 - Fluidos no Newtonianos
 - Fluidos no Newtonianos independientes del tiempo
 - Plásticos Bingham
 - Fluidos Pseudoplásticos
 - Fluidos Dilatantes
 - Fluidos no Newtonianos dependientes del tiempo
 - Fluidos Tixotrópicos
 - Fluidos Reopéticos.
- 2.- Propiedades y Ecuaciones de Estado.
 - Ecuaciones de estado. Generalidades.
 - Fluidos simples. Fluidos de Rivlin Ericksen.
 - Fluidos de Green - Rivlin.
 - Fluidos de Rivlin - Ericksen. Fluidos de Oldroyd.
 - Fluidos a Régimen permanente.
 - Fluidos a Régimen no permanente.
- 3.- Medición de las Propiedades de los Fluidos Viscoelásticos.
 - Esfuerzo cortante simple.
 - Viscosímetro capilar.
 - Sistema cono y plato.
 - Cilindros concéntricos.
 - Placas paralelas.
- 4.- Viscosimetría de Esfera Rotatoria.
 - El movimiento de un líquido debido a una esfera que gira sobre su eje.
 - Caso Newtoniano.
 - Caso no Newtoniano.
 - Diagramas.

5.- Experimento y Resultados.

Objetivos.

Descripción y operación del equipo experimental.

Mediciones del torque de la esfera.

Patrones de flujo.

Solución 0.6% Separan AP-30 Agua. Lecturas.

Gráficas Viscosidad-Rapidez de deformación.

Gráfica Esfuerzo-Rapidez de deformación.

Resultados.

Gráficas 1 y 2.

Solución 50% Glicerina + 50% Sol. 1% Separan AP-30 Agua.

Lecturas.

Gráficas Viscosidad-Rapidez de deformación.

Gráfica Esfuerzo-Rapidez de deformación.

Resultados.

Fotografías.

Solución 54% Glicerina + 46% Sol. 1% Separan AP-30 Agua.

Lecturas.

Gráficas Viscosidad-Rapidez de deformación.

Gráfica Esfuerzo-Rapidez de deformación.

Resultados.

6.- Análisis de los Resultados.

7.- Conclusiones.

Bibliografía.

PROLOGO

Como una gran parte de los procesos en Ingeniería Química tienen relación con los fluidos, es obvio que científicos e ingenieros necesitan obtener conocimientos acerca de los fluidos. Por sus muchas aplicaciones, el estudio de la mecánica de los fluidos es uno de los más vitales y fundamentales en la ingeniería y en las ciencias aplicadas. De una manera simple, podemos decir que un fluido es una sustancia incapaz de resistir fuerzas o esfuerzos de corte sin desplazarse. Los fluidos se clasifican generalmente en compresibles e incompresibles. Dentro del grupo de los fluidos incompresibles existe una clasificación muy importante, que nos permite dividir a éstos dentro de dos grandes grupos: los fluidos Newtonianos y los no Newtonianos.

Dentro de este trabajo se van a estudiar las propiedades tanto de unos como de los otros, primero desde un enfoque teórico y luego experimental, por medio de un viscosímetro de esfera rotatoria.

Ultimamente ha cobrado gran importancia el estudio de los líquidos no Newtonianos que tienen un comportamiento viscoelástico. Como un ejemplo podemos nombrar a las soluciones acuosas poliméricas, que va intervienen en numerosos procesos en las plantas químicas y en cuya atención se concentra este trabajo.

El trabajo en su parte teórica nos dá información acerca de las diferencias fundamentales que existen entre los líquidos Newtonianos y los no Newtonianos, de las ecuaciones de estado que describen su comportamiento y de los sistemas viscométricos, con los que podemos analizar físicamente y de una manera directa las propiedades de los líquidos en base a tres parámetros fundamentales: la viscosidad y la primera y segunda diferencia de esfuerzos normales.

El último de estos sistemas viscométricos es el de la esfera rotatoria, que nos propone un método para el estudio de los anteriores parámetros. El método comienza por plantear las ecuaciones de continuidad, constitutiva y de movimiento, a fin de obtener expresiones tanto para el torque, cuando la esfera gira dentro de un medio Newtoniano o no Newtoniano, como para el patrón de flujo de estos mismos líquidos, haciendo proyecciones de las líneas de corriente.

La parte experimental consiste en fotografar el patrón de flujo formado por líneas de colorante, que se ha colocado en el baño donde la esfera gira, comprobando los resultados de la teoría. Además, a partir de las lecturas del viscosímetro, se pueden trazar gráficas de viscosidad y torque contra rapidez de deformación, que sirven para el estudio de la curva de flujo de las soluciones estudiadas y para determinar la viscosidad a cero rapidez de deformación de éstas. Del análisis del patrón de flujo formado por mediciones hechas de las líneas de corriente, es posible calcular una relación de las dos diferencias de esfuerzos normales, procedimiento que se justifica teóricamente.

CAPITULO 1

FLUIDOS NEWTONIANOS Y FLUIDOS NO NEWTONIANOS

Flúidos Newtonianos.

El comportamiento Newtoniano es exhibido por flúidos en los cuales la disipación de energía viscosa es debida a las colisiones de especies de pequeñas moléculas, comparativamente hablando. Todos los gases, líquidos y soluciones de bajo peso molecular entran dentro de esta categoría. Excepciones notables son las suspensiones coloidales y soluciones poliméricas donde las especies moleculares son grandes. Estos flúidos muestran marcadas desviaciones del comportamiento Newtoniano.

Flúidos no Newtonianos.

Los flúidos no Newtonianos son usualmente aquellos para los cuales la curva de flujo no es lineal, o sea que la viscosidad de un flúido no Newtoniano no es constante a una dada temperatura y presión, sino que depende de otros factores como la velocidad de deformación en el aparato en el que el flúido esta contenido, o de la historia previa de las deformaciones del flúido.

Estos flúidos reales para los cuales la curva de flujo no es lineal, se clasifican dentro de tres grandes grupos:

- a).- Flúidos para los cuales la velocidad de deformación en un punto dado es alguna función del esfuerzo cortante en ese punto y no depende de nada más, siendo éstos los flúidos Stokesianos.
- b).- Sistemas más complejos para los cuales la relación entre el esfuerzo cortante y la velocidad de deformación depende del tiempo en el que se le ha aplicado el esfuerzo o de su historia previa.
- c).- Sistemas que tienen características de flúidos y sólidos a la vez y exhiben elasticidad parcial después de la deformación, llamados flúidos viscoelásticos.

Flúidos no Newtonianos independientes del tiempo.

Los flúidos del primer tipo cuyas propiedades son independientes del tiempo, deberán ser descritos por una ecuación reológica de la forma:

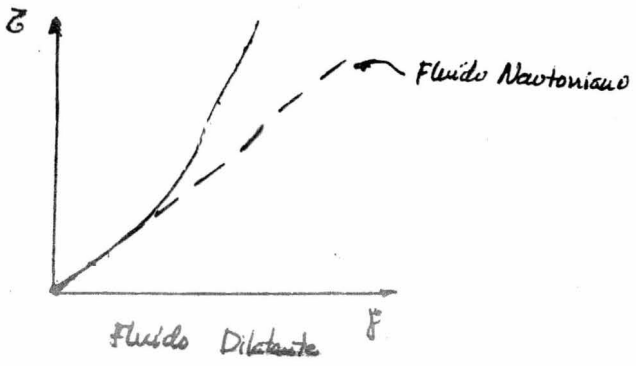
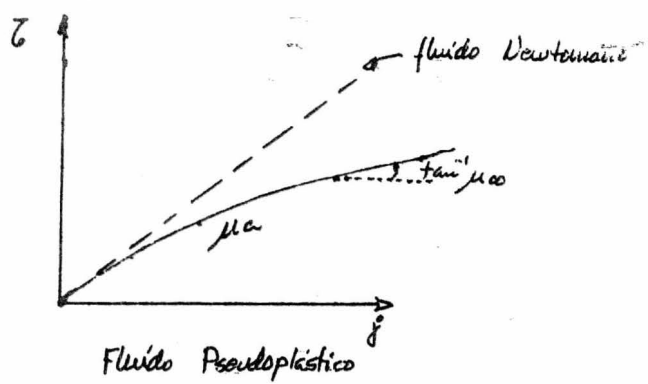
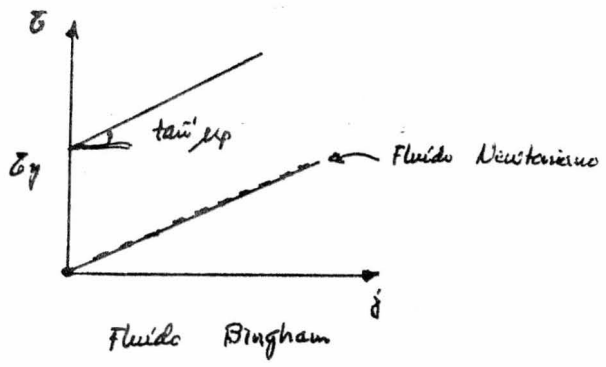
$$\dot{\gamma} = f(\tau)$$

Esta ecuación implica que la velocidad de deformación en cualquier punto del flúido es una función simple del esfuerzo cortante en ese punto. Estos flúidos son llamados no Newtonianos viscosos.

Estos fluidos pueden ser convenientemente subdivididos dentro de tres distintos tipos dependiendo de la naturaleza de la función en la ecuación anterior. Estos tipos son:

- 1.- Fluidos Plásticos Bingham.
- 2.- Fluidos pseudoplásticos.
- 3.- Fluidos dilatantes.

Las curvas de flujo típicas de estos tres tipos de fluidos son mostradas a continuación, haciendo la comparación con la relación lineal de los fluidos newtonianos.



I).- Plásticos Bingham.

Un plástico Bingham está caracterizado por una curva de flujo que es una línea recta teniendo una intercepción τ_y sobre el eje de los esfuerzos cortantes. Este valor recibe el nombre de esfuerzo crítico y es el esfuerzo que debe ser excedido antes de que el flujo comience. La ecuación reológica de un plástico Bingham es:

$$\tau - \tau_y = \mu_p \dot{\gamma} \quad \tau > \tau_y$$

donde μ_p es la viscosidad plástica o coeficiente de rigidez, que es la pendiente de la curva.

El concepto de plástico Bingham idealizado es muy conveniente en la práctica porque muchos tipos de fluidos siguen aproximadamente esta forma de comportamiento. Ejemplos comunes son los lodos, pinturas de aceite, pasta de dientes, etc.

La explicación del comportamiento de un plástico Bingham es que el fluido en reposo contiene una estructura tridimensional de suficiente rigidez para resistir cualquier esfuerzo menor que el crítico. Si este esfuerzo es excedido, la estructura se desintegra completamente y el sistema llega a ser el de un fluido Newtoniano bajo un esfuerzo cortante $\tau - \tau_y$. Cuando el esfuerzo cortante cae abajo de τ_y , la estructura se rehace.

II).- Fluidos pseudoplásticos.

Los fluidos pseudoplásticos no muestran ningún valor de ruptura y la curva de flujo típica para estos materiales indica que la relación de esfuerzo cortante a rapidez de deformación, que es la viscosidad aparente μ_a , cae progresivamente con la rapidez de deformación y la curva de flujo llega a ser lineal solamente a altas velocidades de deformación. Esta pendiente límite es conocida como la viscosidad a esfuerzo infinito y se designa como μ_∞ .

Una gráfica logarítmica de esfuerzo cortante contra rapidez de deformación para estos materiales es con frecuencia lineal con una pendiente entre cero y la unidad. Como resultado, una relación empírica funcional conocida como la ley de potencias es comúnmente usada para caracterizar a los fluidos de este tipo. Esta relación,

que fue originalmente propuesta por Ostwald, y que ha sido ampliamente descrita por Reiner, puede ser expresada como:

$$\tau = k / \dot{\gamma}^{n-1}$$

III).- Fluidos dilatantes.

Los fluidos dilatantes son similares a los pseudoplásticos al mostrar un valor de ruptura, pero la viscosidad aparente para estos materiales se incrementa con el aumento de la rapidez de deformación. La ecuación de la ley de potencias es otra vez aplicable, pero en este caso el exponente n es mayor que la unidad.

Este tipo de comportamiento fue originalmente encontrado en suspensiones con alta concentración de sólidos por Osborne Reynolds. El sugirió que cuando estas suspensiones concentradas están en reposo, los espacios vacíos son mínimos y el líquido es suficiente para llenarlos. Cuando este material es puesto en movimiento a pequeñas velocidades, el líquido lubrica el movimiento de las partículas y el esfuerzo es consecuentemente pequeño. A altas velocidades de deformación el empaquetado denso de las partículas es roto y el material se expande o dilata y los espacios vacíos se incrementan. En esta situación hay insuficiente líquido en la nueva estructura para lubricar el flujo de las partículas y los esfuerzos aplicados tendrán que ser más grandes. La formación de esta estructura causa que la viscosidad aparente se incremente rápidamente con el incremento de la rapidez de deformación.

El término dilatante ha sido empleado para todos los fluidos que exhiben la propiedad de incrementar la viscosidad aparente cuando se incrementa la velocidad de deformación. Muchos de éstos, como algunas pastas, no son suspensiones verdaderas y no se dilatan en el sentido normal de la palabra. La explicación previa, por lo tanto, no se aplica.

En los procesos industriales, los fluidos dilatantes son mucho menos comunes que los pseudoplásticos, pero cuando la ley de potencias es aplicable, el tratamiento para ambos fluidos es el mismo.

FLUIDOS NO NEWTONIANOS DEPENDIENTES DEL TIEMPO.

Algunos fluidos reales no pueden ser descritos por una ecuación matemática sencilla como la ecuación (1) que se aplica a fluidos para los cuales la relación entre esfuerzo cortante y velocidad de deformación es independiente del tiempo. La viscosidad aparente de fluidos más complejos depende no solamente de la rapidez de deformación sino del tiempo en que el esfuerzo ha sido aplicado. Estos fluidos pueden ser subdivididos dentro de dos clases:

a).- Fluidos tixotrópicos.

b).- Fluidos reopécticos.

Estos fluidos se clasifican de acuerdo a si el esfuerzo cortante decrece o se incrementa con el tiempo cuando el fluido es puesto a velocidad constante.

a).- Fluidos tixotrópicos.

Los materiales tixotrópicos son aquellos cuya consistencia depende de la duración del esfuerzo así como de la velocidad de deformación.

Si un material tixotrópico es puesto en movimiento a velocidad constante después de un período de reposo, la estructura progresivamente se romperá y la viscosidad aparente disminuirá con el tiempo. La velocidad de rompimiento de la estructura durante la aplicación del esfuerzo a una velocidad dada dependerá del número de estructuras que se puedan romper y por lo tanto decrecerá con el tiempo. (Esto se podría comparar con la velocidad en una reacción química de primer orden). La simultánea velocidad de reformación de la estructura deberá incrementarse con el tiempo al aumentar el número de ligaduras de la nueva estructura. Eventualmente, un estado de equilibrio dinámico se alcanza cuando la velocidad de formación de la estructura se iguala a la de rompimiento de la misma estructura. Esta posición de equilibrio depende de la velocidad de deformación y aumenta el rompimiento de la estructura al incrementar la velocidad de deformación.

Como un ejemplo podemos considerar un material confinado a moverse dentro de un viscosímetro cilíndrico. Después de que el material ha sido puesto en reposo durante un período grande de tiempo, uno de los cilindros rota a velocidad constante. El torque en el otro cilindro deberá incrementarse con el tiempo como se ve en la figura 2. El decremento de velocidad y el torque final deberán ambos depender de la

velocidad v de la velocidad de deformación.

La tixotropía es algunas veces un proceso reversible y después de estar en reposo la estructura del material se regenera gradualmente. Si la curva de flujo de un material tixotrópico es determinada inmediatamente después de aplicar un esfuerzo y luego se deja en reposo, y este proceso se repite varias veces, se obtienen curvas como se muestran en la figura 3.

Esta clase de comportamiento nos muestra una curva de histéresis cuando se grafica el esfuerzo cortante contra la rapidez de deformación. Esta curva es graficada primero para el incremento de rapidez de deformación a velocidad constante y después para el decremento de la rapidez de deformación a velocidad constante. Esto es ilustrado en la figura 4, donde las curvas A y B son dibujadas para fluidos del tipo Newtoniano y pseudoplástico que exhiben tixotropía.

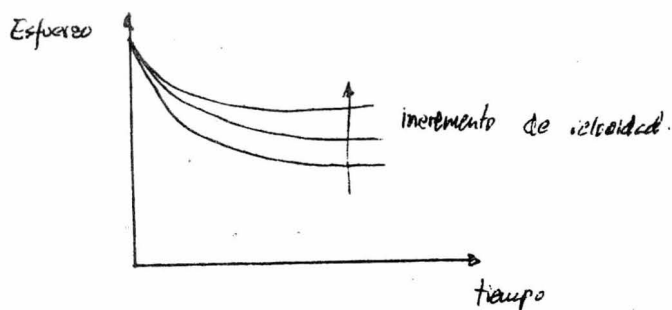


FIG 2. tixotropía.

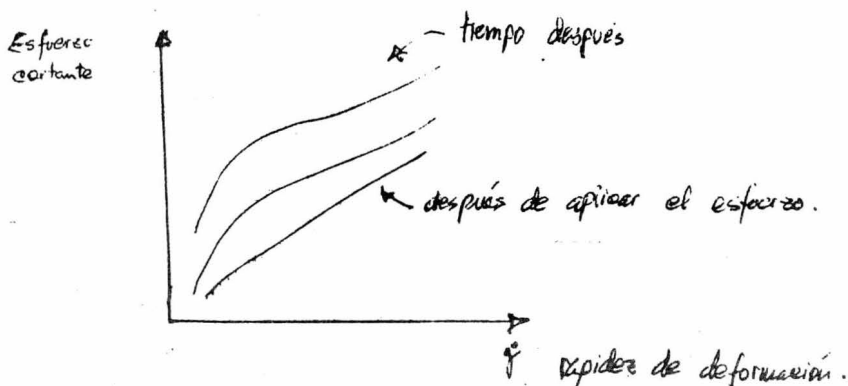


FIG 3. tixotropía.

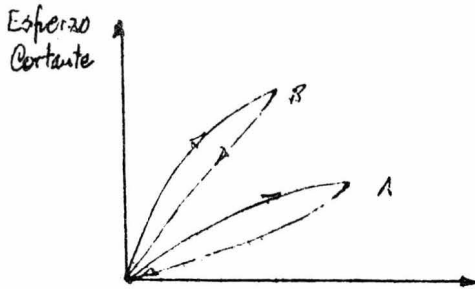


FIG 4 Efecto de histéresis Velocidad de deformación.

Para incrementar la altura de las curvas de flujo, se aplica el esfuerzo a incrementos de tiempo cada vez mas grandes antes de hacer la trayectoria de regreso. Una sola curva puede ser obtenida continuando el proceso de aplicar el esfuerzo hasta llegar al equilibrio.

El término "cuerpo falso", es encontrado con frecuencia en tratados sobre tixotropía. Este concepto fue introducido por Bryce-Jones para distinguir varios tipos de comportamiento tixotrópico en plásticos Bingham. Los materiales tixotrópicos verdaderos son aquellos en los que la estructura se rompe completamente bajo la influencia de altos esfuerzos y llegan a ser verdaderos líquidos después de que el esfuerzo ha sido dejado de aplicar, hasta que después de un período de tiempo en que la estructura se reforma. Los materiales de cuerpo falso no pierden sus propiedades sólidas completamente y pueden exhibir un valor de rompimiento en el esfuerzo, que solamente se aprecia originalmente después de estar en reposo por un período de tiempo grande.

Las curvas de histéresis se muestran en la figura 5 para estas dos clases de materiales.

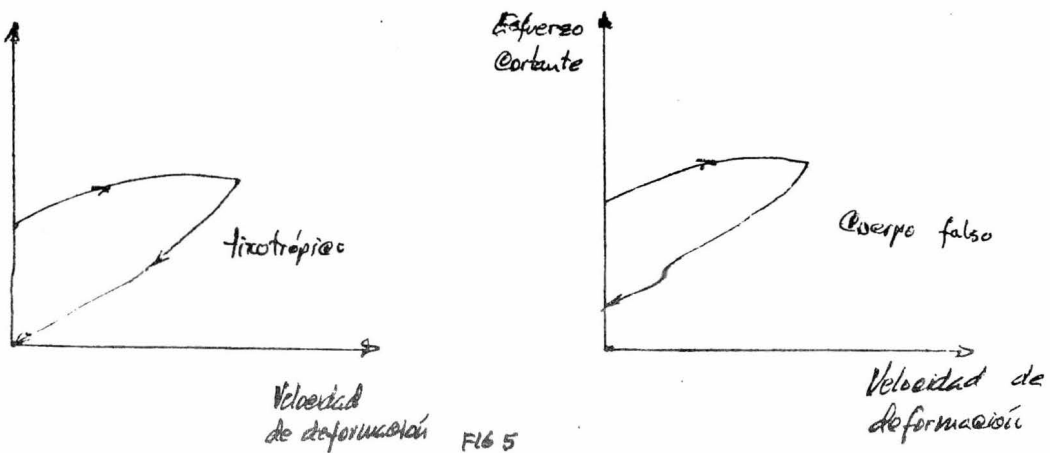


FIG 5

Este comportamiento puede ser ilustrado en el siguiente experimento. Considerando un recipiente con un cilindro sobre el cual se coloca un alambre de torsión, se analizará el efecto en el cilindro cuando, después de que éste se pone en movimiento impulsando al líquido a moverse, cesa de moverse el cilindro y el líquido dejará de agitarse. El efecto de torsión en el alambre deberá variar con el tiempo como se muestra en la figura 6 para los dos tipos de material.

Con los materiales de cuerpo falso habrá una torsión residual en el alambre, indicando que el material puede ofrecer resistencia permanente después de ser agitado, por lo que retiene un valor finito de rompimiento. Un material tixotrópico verdadero deberá mostrar una torsión residual solamente si después de algún tiempo la agitación cesa antes de que el cilindro sea soltado, para permitir que la estructura se reforme.

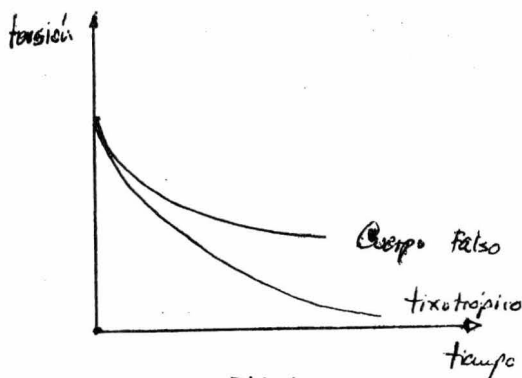


FIG 6

b).- Fluidos Reopécticos.

Este es el caso de la formación gradual de la estructura al aplicar un esfuerzo. Existe con frecuencia un valor crítico de esfuerzo en el cual la reformatión de la estructura no ocurre, sino su rompimiento. Este comportamiento es observado en soluciones diluidas de pentóxido de vanadio y bentonita.

Existen otros materiales, sin embargo, en los cuales la estructura se forma solamente bajo un esfuerzo y se desintegra gradualmente en el reposo. Esto usualmente se llama "reopexia", pero es bastante distinto su comportamiento al de algunas pastas. Aún cuando este comportamiento se realiza a moderadas velocidades de deformación, si la velocidad es grande la estructura no se formará. Una suspensión de oleato de anonio se comporta de esta manera. Se considera ahora el flujo de este material a través de un capilar. A diferencias de presión moderadas, al principio el flujo es rápido y luego decrece cuando la estructura se empieza a formar. A presiones más altas el flujo es más rápido siempre y no decrece porque la estructura no se forma a altas velocidades de deformación.

CAPITULO 2

PROPIEDADES Y ECUACIONES DE ESTADO

PROPIEDADES Y ECUACIONES DE ESTADO.

Para que una ecuación de estado describa apropiadamente el comportamiento de fluidos viscoelásticos, deberá satisfacer ciertos principios básicos:

a).- El comportamiento de un elemento material depende solamente de su historia reológica previa y no del estado de los elementos de los alrededores. Para satisfacer este principio es necesario emplear un sistema de referencia Lagrangeano. Sin embargo, en problemas de flujo de fluidos, las ecuaciones de estado deberán resolverse a la par con las ecuaciones de movimiento y continuidad, y satisfacer determinadas condiciones en la frontera, por lo que en este caso el sistema de coordenadas Euleriano resulta más apropiado. El problema es, por lo tanto, interpretar una situación física determinada en un sistema de referencia Euleriano, que es más ventajoso desde el punto de vista teórico.

b).- El comportamiento de un elemento material no depende del movimiento traslacional o rotacional del material como un todo en el espacio. Este principio es conocido con el nombre de "indiferencia material" o de "objetividad material" e implica que en el continuo, el movimiento de un cuerpo rígido no experimenta cambios en los esfuerzos internos. Si existiera algún cambio en los esfuerzos, se presentaría una deformación.

Los dos principios anteriores se satisfacen introduciendo un sistema de coordenadas convectivo embebido en el material y deformándose continuamente con él. Un elemento que está en \underline{x} al tiempo t , deberá tener la misma posición referida a un sistema de coordenadas convectivo en todos los demás tiempos.

El sistema de coordenadas convectivo no es afectado por algún movimiento de cuerpo rígido superpuesto, por lo que satisface el principio (b).

Debido a que todas las cantidades referidas a un movimiento absoluto en el espacio son irrelevantes, el interés radica en el conocimiento de las distancias relativas y del movimiento de las partes de un elemento arbitrario \underline{x} .

Un elemento de longitud entre ξ^i y ξ^j y $\xi^i, d\xi^j$ es:

$$ds(t') = \delta_{jk}(\xi, t') d\xi^j d\xi^k \quad -\infty < t' \leq t \quad (1)$$

donde t es el tiempo presente y t' un tiempo anterior.

Una variable de deformación más conveniente es:

$$\delta_{je}(\xi, t') - \delta_{je}(\xi, t) \quad (2)$$

ya que pequeños valores de esta variable corresponden a pequeñas deformaciones.

Una derivada con respecto al tiempo cuando el sistema de coordenadas es mantenido constante es $\frac{D}{Dt}$ y el tensor de esfuerzos covariante es $\tau_{je}(\xi, t)$ y es tomado como la variable dinámica. Para que tengan un uso determinado en la solución de problemas de flujo, las ecuaciones formuladas en el anterior sistema de coordenadas, deberán ser referidas a las coordenadas X^i fijas en el espacio. Esto se logra aplicando ciertas reglas de transformación.

Los tensores τ_{je} y τ_{il} se transforman en el tensor de esfuerzos $\tau_{ik}(X; t)$ y en el tensor métrico $g_{ik}(X)$ respectivamente. (Referidos en el instante corriente). Los tensores asociados referidos a un instante anterior son más complicados, ya que la ecuación (2) es transformada en:

$$\tau_{ik}(X, t, t') = \frac{dX^m}{dX^i} \frac{dX^r}{dX^k} \tau_{mr}(X') - \tau_{ik}(X) \quad (3)$$

donde X^m es la posición al tiempo t' de un elemento que está en el punto X^i al tiempo t . El operador $\frac{D}{Dt}$ es transformado en:

$$\frac{D}{Dt} A_{ik} = \frac{dA_{ik}}{dt} + v^r \frac{dA_{ik}}{dX^r} + \frac{dv^m}{dX^i} A_{mk} + \frac{dv^m}{dX^k} A_{mi} \quad (4)$$

donde v^i es el vector velocidad y las cantidades como $\frac{D^m}{Dt^m} \delta_{je}(\xi, t')$ evaluadas en $t = t'$ son los tensores de rapidez de deformación o tensores de Rivlin Ericksen $A_{ik}^{(m)}$ definidos como:

$$A_{ik}^{(m)} = \frac{D^m}{Dt^m} g_{ik}(X) \quad (5)$$

Fluidos simples.- Fluidos de Rivlin Ericksen.

Una ecuación de estado para fluidos simples puede ser expresada en coordenadas convectivas como:

$$\bar{C}_{je}(\underline{\xi}, t) = -p \delta_{je}(\underline{\xi}, t) + \bar{C}_{je}'(\underline{\xi}, t) \quad (5)$$

$$\bar{C}_{je}'(\underline{\xi}, t) = \int_{-\infty}^t [\delta_{je}(\underline{\xi}, t') - \delta_{je}(\underline{\xi}, t)]$$

o en coordenadas fijas como:

$$\bar{C}_{ikl}(x, t) = -p \delta_{ikl}(x, t) + \bar{C}_{ikl}'(x, t) \quad (7)$$

$$\bar{C}_{ikl}'(x, t) = + \int_{-\infty}^t [\bar{C}_{ikl}(x, t, t')]$$

donde F es un funcional que para fluidos incompresibles es:

$$F(0) = 0 \quad (8)$$

Una suposición básica, necesaria en la teoría de fluidos simples, es la de la memoria desvaneciente. Esta suposición introduce la definición de norma en el funcional de la ecuación (8), que resulta en una serie de aproximaciones para el funcional F. La norma es:

$$\|C(s)\| = \int_0^{\infty} [|C(s)|^2 \alpha^2(s) ds]^{1/2} \quad (9)$$

La primera y segunda aproximaciones para un fluido incompresible están dadas por:

$$P_{ik}' = \int_0^{\infty} \mu(s) C_{ik}(s) ds \quad (10)$$

$$P_{ik}' = \int_0^{\infty} \mu(s) C_{ik}(s) ds + \iint_0^{\infty} \alpha(s_1, s_2) C_{ij}(s_1) C_{jk}(s_2) ds_1 ds_2 \quad (11)$$

donde:

$$C_{ik}(s) = C_{ik}(t-s)$$

y por la simetría del tensor de esfuerzos se requiere que:

$$\alpha(s_1, s_2) = \alpha(s_2, s_1)$$

Las ecuaciones (10) y (11) son llamadas las ecuaciones de viscoelasticidad lineal finita y viscoelasticidad de segundo orden, respectivamente.

Las condiciones bajo las cuales las ecuaciones (10) y (11) son aproximaciones de las ecuaciones (6) y (7), cuando la norma (9) es pequeña, son las siguientes:

a).- Si la deformación ha sido pequeña durante la historia del movimiento; por ejemplo, un movimiento oscilatorio de pequeña amplitud.

b).- La norma puede ser pequeña para grandes deformaciones cuando el fluido es ligeramente elástico.

c).- Si las velocidades y aceleraciones son pequeñas, el funcional de la ecuación (8) puede ser aproximado por una función de las derivadas del argumento evaluadas cuando $s = 0$; por ejemplo, los tensores de Rivlin Ericksen. Entonces, una aproximación alternativa a (10) y (11) puede ser expresada como:

$$P_{ik}' = \alpha_1 A_{ik}^{(1)} \quad (12)$$

$$P_{ik}' = \alpha_1 A_{ik}^{(1)} + \alpha_2 A_{ik}^{(2)} + \alpha_3 A_{ij}^{(1)} A_{jk}^{(1)} \quad (13)$$

La ecuación (12) es la ecuación para un fluido de primer orden (Newtoniano), y la ecuación (13) para un fluido de segundo orden. Las relaciones entre los parámetros materiales α_1 , α_2 , α_3 , y las funciones kernel de (10) y (11) están dadas por:

$$\alpha_1 = - \int_0^{\infty} \mu(s) s ds \quad (14)$$

$$\alpha_2 = \int_0^{\infty} \mu(s) \frac{s^2}{2} ds \quad (15)$$

$$\alpha_3 = \iint_0^{\infty} \alpha(s_1, s_2) \frac{s_1 s_2^2}{2} ds_1 ds_2 \quad (16)$$

Las ecuaciones (12) y (13) son aproximaciones útiles de la ecuación funcional general (8) en fluidos lentos, cuando las velocidades y aceleraciones son pequeñas y en el caso de fluidos ligeramente elásticos.

Cuando la deformación es pequeña pero las aceleraciones no, las expresiones integrales (10) y (11) deberán emplearse; por ejemplo, en movimientos oscilatorios de pequeñas amplitudes y altas frecuencias.

Fluidos de Green - Rivlin.

A partir de premisas similares a las de Coleman y Noll, desarrollan aproximaciones integrales del funcional. Las aproximaciones de menor orden son esencialmente las mismas a las expresadas por las ecuaciones (10) y (11). Estos fluidos, son aproximaciones al fluido simple cuyo procedimiento de aproximación es análogo a una expansión en series de Taylor de una función analítica, o alternativamente, a partir de una aplicación directa del teorema de Stone - Weirstrass. En casi todas las circunstancias, el fluido de Green - Rivlin es equivalente al fluido simple de Coleman y Noll.

Fluidos de Rivlin - Ericksen.

Los fluidos de Rivlin - Ericksen están basados en las expresiones del tensor de esfuerzos como una función de los gradientes de velocidad y los gradientes de aceleración, o sea que el tensor de esfuerzos es expresado como una función de los primeros n tensores de Rivlin - Ericksen. (Ecuación 3). Por lo que:

$$\bar{P} = \underline{M} (A_1, A_2, \dots, A_n) \quad (17)$$

donde:

$$\underline{A}_2 = \frac{\partial A_1}{\partial t}, \dots, \underline{A}_n = \frac{\partial A_{n-1}}{\partial t} \quad (18)$$

Por el principio de indiferencia material se demuestra que \underline{M} es una función isotrópica, es decir:

$$\underline{Q} \cdot \underline{M} (A_1, A_2, \dots, A_n) \cdot \underline{Q}^T = \underline{M} (\underline{Q} \cdot A_1 \cdot \underline{Q}^T, \underline{Q} \cdot A_2 \cdot \underline{Q}^T, \dots, \underline{Q} \cdot A_n \cdot \underline{Q}^T) \quad (19)$$

donde Q es un tensor ortogonal arbitrario.

Puesto que \mathbb{M} es isotrópica y los tensores \underline{A}_i son simétricos, Rivlin demostró que cualquier función isotrópica de dos matrices se podía representar de la forma:

$$\bar{P} = \bar{P} - pI = \mathbb{M}(\underline{A}_1, \underline{A}_2) \quad (20)$$

donde hemos restringido el teorema a solo dos matrices simétricas \underline{A}_1 y \underline{A}_2 . Por lo que (20) se puede representar como:

$$\bar{P} - pI = \alpha_0 I + \alpha_1 \underline{A}_1 + \alpha_2 \underline{A}_2 + \alpha_3 \underline{A}_1^2 \quad (21)$$

donde α_0 , α_1 , α_2 y α_3 son funciones de los invariantes de \underline{A}_1 y \underline{A}_2 , es decir:

$\text{tr } \underline{A}_1$	$\text{tr } \underline{A}_2^2$	$\text{tr } \underline{A}_2 \underline{A}_1^2$
$\text{tr } \underline{A}_2$	$\text{tr } \underline{A}_1 \underline{A}_2^2$	$\text{tr } \underline{A}_1^2 \underline{A}_2^2$
$\text{tr } \underline{A}_1 \underline{A}_2$	$\text{tr } \underline{A}_1^3$	
$\text{tr } \underline{A}_1^2$	$\text{tr } \underline{A}_2^3$	

Todos los invariantes de \underline{A}_1 y \underline{A}_2 en flujos viscométricos (esfuerzo cortante simple), dependen de potencias de la rapidez de deformación $\dot{\gamma}$, por lo que (21) se puede escribir como:

$$\bar{P} - pI = \eta(\dot{\gamma}) \underline{A}_1 + \beta(\dot{\gamma}^2) \underline{A}_1^2 + \Gamma(\dot{\gamma}^4) \underline{A}_2 \quad (22)$$

donde η , β y Γ son funciones materiales en un fluido de segundo orden.

Las primeras dos aproximaciones de un fluido de Rivlin - Ericksen están dadas, por lo tanto, por las ecuaciones (12) y (13).

Fluidos de Oldroyd.

Oldroyd propuso una ecuación de estado expresada como:

$$\begin{aligned} \underline{P} \dot{k}' + \lambda_1 \frac{D \underline{P} \dot{k}'}{Dt} + \mu_0 \underline{P}_{ij} \underline{A}_{ik}'' - \mu_1 (\underline{P}_{ij}' \underline{A}_{jk}' + \underline{P}_{ij}' \underline{A}_{ji}''') &= \\ = \eta_0 (\underline{A}_{ik}'' + \lambda_2 \underline{A}_{ik}''' - \mu_2 \underline{A}_{ij}'' \underline{A}_{jk}''') & \quad (23) \end{aligned}$$

donde η_0 es la viscosidad a cero rapidez de deformación y $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2, \mu_3$, son constantes materiales con dimensiones de tiempo.

La equivalencia entre la ecuación (23) y los fluidos de Rivlin - Ericksen se mostrará enseguida.

Fluidos a régimen permanente.

Para este caso, la ecuación (2), el tensor es un grado mayor en la velocidad que el tensor A_{ik} . La primera aproximación a (23) es entonces:

$$P_{ik} = \eta_0 A_{ik}^{(1)} \quad (24)$$

que es la ecuación de Navier - Stokes para un fluido Newtoniano. Si (24) es sustituida en (23), se obtiene:

$$P_{ik} + \lambda_1 \frac{\partial P_{ik}}{\partial t} = \eta_0 [A_{ik}^{(1)} + \lambda_2 A_{ik}^{(2)} + (\mu_1 - \mu_2) A_{ij}^{(1)} A_{jk}^{(1)}] \quad (25)$$

Operando ambos lados de la ecuación por $(1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t})$ y ordenando términos, obtenemos:

$$P_{ik} = \eta_0 [A_{ik}^{(1)} - (\lambda_1 + \lambda_2) A_{ik}^{(2)} + (\mu_1 - \mu_2) A_{ij}^{(1)} A_{jk}^{(1)}] \quad (26)$$

que es equivalente a la ecuación de un fluido de segundo orden (13) si:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \eta_0 \\ \alpha_2 &= \eta_0 (\lambda_2 - \lambda_1) \\ \alpha_3 &= \eta_0 (\mu_1 - \mu_2) \end{aligned} \quad (27)$$

Fluidos a régimen no permanente.

Si el flujo no es a régimen permanente, la derivada $\frac{\partial}{\partial t}$ en la ecuación (2) no eleva el orden de la ecuación, como lo hacía en los problemas a régimen permanente. Para relacionar la ecuación de Oldroyd con las ecuaciones de viscoelasticidad finita, empezaremos a partir del modelo de Oldroyd en coordenadas convectivas:

$$\begin{aligned}
 P_{ik}' + \lambda_1 \frac{D P_{ik}'}{Dt} + \mu_0 P_j^j \delta_{ik}'' - \mu_1 [P_{ij}' \delta_{jk}'' + P_{kj}' \delta_{ji}''] &= \\
 = 2\eta_0 [\delta_{ik}'' + \lambda_2 \frac{D \delta_{ik}''}{Dt} - 2\mu_2 \delta_{ij}' \delta_{jk}''] &
 \end{aligned} \tag{28}$$

donde:

$$\delta_{ik}'' = \frac{1}{2} \frac{D \delta_{ik}}{Dt} \tag{29}$$

Si consideramos los términos P_{ik}' , δ_{ik}'' , $\frac{D \delta_{ik}''}{Dt}$ del mismo orden, la aproximación de primer orden a (28) es:

$$P_{ik}' + \lambda_1 \frac{D P_{ik}'}{Dt} = 2\eta_0 [\delta_{ik}'' + \lambda_2 \frac{D \delta_{ik}''}{Dt}] \tag{30}$$

que puede ser escrita como:

$$P_{ik}' = 2\eta_0 \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \delta_{ik}'' + 2\eta_0 \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)}{\lambda_1^2} \int_{-\infty}^t e^{-(t-t')/\lambda_1} \delta_{ik}''(t') dt' \tag{31}$$

Transformando a coordenadas fijas:

$$P_{ik}' = \eta_0 \frac{\lambda_2}{\lambda_1} A_{ik}'' + \eta_0 \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)}{\lambda_1^2} \int_0^{\infty} e^{-s/\lambda_1} \dot{C}_{ik}(s) ds \tag{32}$$

donde:

$$\dot{C}_{ik}(s) = \frac{\partial x_i^{pr}}{\partial x^i} \frac{\partial x^r}{\partial x^k} A_{ir}''(x', t') \tag{33}$$

La ecuación (32) puede ser expresada en la siguiente forma:

$$P_{ik}' = \int_0^{\infty} K_1(s) \dot{C}_{ik}(s) ds \tag{34}$$

donde:

$$K_1(s) = \eta_0 \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \delta(0) + \eta_0 \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1^2} e^{-s/\lambda_1} \tag{35}$$

Las ecuaciones (34) y (35) nos dan las relaciones entre la ecuación de Oldroyd y las ecuaciones de viscoelasticidad finita. Para obtener las relaciones de segundo orden, la aproximación de primer orden es sustituida en la ecuación (28) y se hace para segundo orden.

Las relaciones finales son:

$$P_{ik} = \int_0^{\infty} K_1(s) \dot{C}_{ik}(s) ds + \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} K_2(s_2, s_3) [\dot{C}_{ijk}(s_3) \dot{C}_{ij}(s_2) + \dot{C}_{ij}(s_3) \dot{C}_{ijk}(s_2)] ds_2 ds_3 \quad (35)$$

donde K_1 esta dado por la ecuación (35) y:

$$K_2 = \begin{cases} 0 & 0 \leq s_3 < s_2 \\ \eta_0 \frac{(\mu_1 \lambda_2 - \mu_2 \lambda_1)}{\lambda_1^2} e^{-s_2/\lambda_1} \delta(s_3 - s_2) + \eta_0 \frac{\mu_1 (\lambda_1 - \lambda_2)}{\lambda_1^2} e^{-s_2/\lambda_1} & s_3 \geq s_2 \end{cases} \quad (37)$$

Este procedimiento se repite para obtener órdenes más elevados.

El análisis anterior muestra que para pequeñas deformaciones, las ecuaciones de Oldroyd están clasificadas como casos especiales de la teoría de viscoelasticidad de enésimo orden.

De las ecuaciones de estado anteriores se aprecia que en los casos de líquidos ligeramente elásticos en flujo lento, se pueden emplear ecuaciones de estado simples para describir el comportamiento general de los líquidos viscoelásticos.

CAPITULO 3

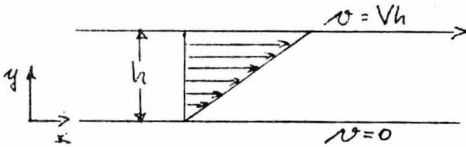
MEDICION DE LAS PROPIEDADES DE LOS FLUIDOS VISCOELASTICOS

ESFUERZO CORTANTE SIMPLE

Consideremos un líquido incompresible situado entre dos placas paralelas separadas una distancia h . La placa superior se mueve a una velocidad constante v_h en el sentido x_1 de un sistema de coordenadas cartesianas. Las componentes del vector velocidad son:

$$\vec{v} = (u(y), v=0, w=0) \quad (1)$$

El perfil de velocidades se ilustra en la figura.



Como se observa en esta descripción gráfica, se trata de un perfil lineal, donde la velocidad en cada punto está dada por la relación:

$$\vec{v} = u\left(\frac{y}{h}\right) = v_h\left(\frac{y}{h}\right) \quad (2)$$

Para analizar el estado de esfuerzo en el fluido, definamos primeramente el tensor gradiente de velocidades \bar{L} , como:

$$\bar{L} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (3)$$

donde u , v y w son las componentes de la velocidad en las direcciones x , y y z , respectivamente. En este caso, tendremos:

$$\bar{L} = \begin{pmatrix} 0 & u' & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

donde $u' = \frac{\partial u}{\partial y}$. Tomando la transpuesta:

$$\bar{L}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ u' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

El tensor rapidez de deformación, \bar{D} , se define como:

$$\bar{D} = \frac{1}{2} (\bar{L} + \bar{L}^T) \quad (6)$$

Sustituyendo (4) y (5) en (6), tenemos:

$$\bar{D} = \frac{u'}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

Elevando al cuadrado esta matriz, tenemos:

$$\bar{D}^2 = \frac{u'^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

Con las ecuaciones (7) y (8) podemos calcular los principales invariantes del tensor rapidez de deformación, que se definen como:

$$\begin{aligned} I &= \text{tr } \bar{D} \\ II &= \frac{1}{2} \left[-(\text{tr } \bar{D})^2 + \text{tr } \bar{D}^2 \right] \\ III &= \det \bar{D} \end{aligned} \quad (9)$$

donde $\text{tr } \bar{D}$ es la traza del tensor \bar{D} .

Para el caso de movimiento cortante simple, estos son:

$$\begin{aligned} I &= 0 \\ II &= -\frac{u'^2}{4} \\ III &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

El primer invariante principal es una expresión equivalente a la ecuación de conservación de masa para un líquido incompresible. Entonces, en coordenadas rectangulares tenemos:

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0 \quad (11)$$

Para relacionar el estado de esfuerzo en el fluido con respecto a su rapidez de deformación, es necesario plantear una ecuación constitutiva que nos de una forma explícita del tensor de esfuerzos. La forma lineal más sencilla, es la de un líquido Newtoniano:

$$\bar{p} = \mu \bar{D} \quad (12)$$

Generalizando, para un fluido no lineal, por ejemplo, un fluido Stokesiano, tenemos:

$$\bar{p} = -p \bar{I} + \Phi_1 (\text{II}_D, \text{III}_D) \bar{D} + \Phi_2 (\text{II}_D, \text{III}_D) \bar{D}^2 \quad (13)$$

Por la ecuación (7) tenemos:

$$\bar{p}_{xy} = -p + \Phi_1 \left(\frac{u'}{2} \right) \quad (14)$$

Y por medio de la ecuación (8), para los demás componentes del tensor de esfuerzos, tenemos:

$$\begin{aligned} \bar{p}_{11} = \bar{p}_{xx} &= -p + \Phi_1(0) + \frac{\Phi_2}{4} (u')^2 \\ \bar{p}_{22} = \bar{p}_{yy} &= -p + \Phi_1(0) + \frac{\Phi_2}{4} (u')^2 \\ \bar{p}_{33} = \bar{p}_{zz} &= -p \end{aligned} \quad (15)$$

Para ver la variación del tensor de esfuerzos en el sistema, se plantea la ecuación de movimiento:

$$\rho \frac{D\bar{p}}{Dt} = \mu \nabla \cdot \bar{p} - \nabla p + \rho F \quad (16)$$

Aplicando la ecuación de continuidad (11) y la distribución de velocidades (1), despreciando fuerzas externas y gradientes de presión:

$$\nabla \cdot \bar{p} = 0 \quad (17)$$

o sea, el esfuerzo es constante.

A partir de estas últimas ecuaciones, definimos las tres funciones viscométricas siguientes:

I.- Función viscosidad.

II.- Primera diferencia de esfuerzos normales = $N_1 = P_{11} - P_{22}$.

III.- Segunda diferencia de esfuerzos normales = $N_2 = P_{22} - P_{33}$.

En el caso de un líquido incompresible Newtoniano, la viscosidad es una constante que no depende de la rapidez de deformación, y la primera y segunda diferencia de esfuerzos normales son cero.

Para el caso del fluido Stokesiano, tenemos:

$$\mu = \frac{\Phi_1}{2} = f(u') \quad (18)$$

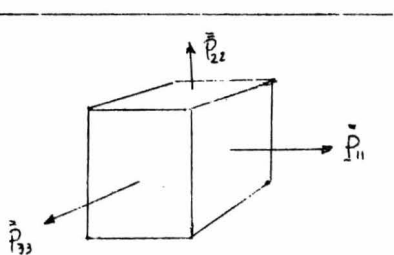
$$N_1 = 0 \quad (19)$$

$$N_2 = \frac{\Phi_2}{4} (u')^2 \quad (20)$$

por las ecuaciones (15).

Para el caso de líquidos viscoelásticos tenemos, además de la variación de la viscosidad con la rapidez de deformación, que las diferencias de esfuerzos normales no son iguales a cero ni son iguales entre sí.

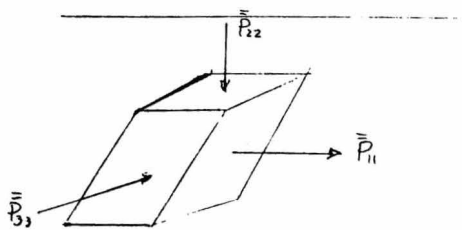
Los siguientes esquemas nos muestran la diferencia que existe entre un fluido Newtoniano y uno no Newtoniano en el esfuerzo constante simple.



Newtoniano

$$P_{11} - P_{22} = 0$$

$$P_{22} - P_{33} = 0$$



No Newtoniano

$$P_{11} - P_{22} \neq 0$$

$$P_{22} - P_{33} \neq 0$$

VISCOSIMETRO CAPILAR

El viscosímetro capilar se encuentra descrito esquemáticamente en las figuras 1 y 2. El fluido se coloca en un recipiente del cual es descargado a través de un tubo capilar por la acción de la presión, proporcionada ya sea por un gas, la gravedad, un vacío parcial a la salida, o un pistón. Consideremos por simplicidad, la presión de un gas como fuerza activante.

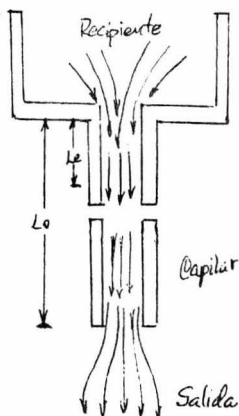


FIG. 1

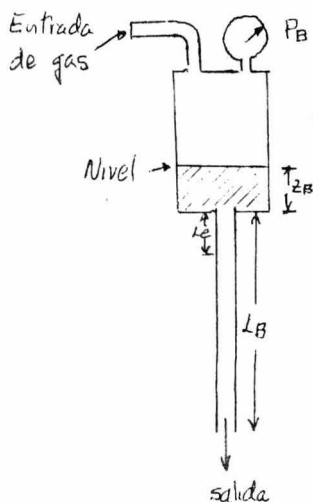


FIG. 2

Cuando la presión se aplica dentro del recipiente, el líquido comienza a fluir a través del tubo. Después de un cierto tiempo, el flujo se encuentra en régimen permanente. Para cada punto del sistema de flujo, el vector velocidad es tangente a la trayectoria de la partícula a través del punto considerado. A la entrada del capilar, la velocidad tiene componentes radiales (V_r) y axiales (V_z).

Si el tubo es largo, el flujo se considera laminar y completamente desarrollado a una determinada longitud después de la entrada al capilar. En esta región del tubo, la componente radial de la velocidad se anula y además, la presión decrece linealmente con la distancia. (Flujo de Poiseuille).

A la salida del tubo, la componente radial se manifiesta otra vez, y existe una expansión del líquido, en caso de que éste sea viscoelástico.

En la región de flujo desarrollado, las componentes de la velocidad en coordenadas cilíndricas son:

$$\begin{aligned} V_r = V_\theta = 0 \\ V_z = v_z(r) \end{aligned} \quad (1)$$

El tensor de esfuerzos es el siguiente:

$$P_{ik} = \begin{bmatrix} -\bar{p} + Pr' & 0 & Pr'_z \\ 0 & -\bar{p} & 0 \\ Pr'_z & 0 & -\bar{p} + Pr'_z \end{bmatrix} \quad (2')$$

Las ecuaciones de movimiento se reducen a :

$$-\frac{dp}{dr} + \frac{1}{r} \frac{d(rPr')}{dr} = 0 \quad (3)$$

$$-\frac{dp}{dz} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rPr'_z) = -\rho Fe \quad (4)$$

Diferenciando la ecuación (3) se obtiene:

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{dp}{dr} \right) = \frac{d}{dr} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) = 0 \quad (5)$$

por lo que :

$$\frac{dp}{dz} = f(z) \neq f(r) \quad (6)$$

$$\text{y} \quad \frac{dp}{dz} = \text{constante}$$

$$\text{Si llamamos a } P = \frac{dp}{dz} - \rho g = \text{constante} \quad (7)$$

Integrando la ecuación (4):

$$Pr'_z(r) = \frac{Pr}{z} + \frac{A}{r} \quad (8)$$

La constante A deberá ser igual a cero, ya que el esfuerzo no puede ser infinito en el centro del tubo. Por lo que:

$$Pr'_z(r) = \frac{Pr}{z} \quad (9)$$

El gasto volumétrico Q es:

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^R v_z \, r \, dr \, d\theta = 2\pi \int_0^R v_z \, r \, dr \quad (10)$$

donde R es el radio del tubo.

Integrando por partes y suponiendo que no hay deslizamiento de fluido en la pared, o sea que $v_z(R) = 0$, se encuentra:

$$Q = -2\pi \int_0^R r^2 \left(\frac{1}{2} \frac{dv_z}{dr} \right) dr \quad (11)$$

A partir de un simple balance de fuerzas se tiene que:

$$Pr_z = \frac{r}{R} \bar{\tau}_w \quad (12)$$

donde $\bar{\tau}_w$ es el esfuerzo en la pared. Sustituyendo (12) en (11):

$$\frac{4Q}{\pi R^3} = \frac{8}{\bar{\tau}_w} \int_0^{\bar{\tau}_w} Pr_z^2 \left(-\frac{1}{2} \frac{dv_z}{dr} \right) dPr_z \quad (13)$$

Existe una única relación entre $\frac{1}{2} \frac{dv_z}{dr}$ (rapidez de deformación) y $Pr_z(r)$ (esfuerzo cortante), por lo que la ecuación (13) nos muestra una relación única entre $\frac{4Q}{\pi R^3}$ y $\bar{\tau}_w$.

Diferenciando la ecuación (13) con respecto a Pr_z :

$$\left(-\frac{1}{2} \frac{dv_z}{dr} \right)_w = \frac{1}{8} \bar{\tau}_w \left[\frac{d(4Q/\pi R^3)}{d\bar{\tau}_w} + \frac{3(4Q/\pi R^3)}{\bar{\tau}_w} \right] \quad (14)$$

Esta ecuación puede ser empleada directamente para reducir el diagrama de esfuerzos en el capilar al diagrama de esfuerzos básico de la siguiente manera:

- Para cada valor dado de $\bar{\tau}_w$, el valor de $\frac{4Q}{\pi R^3}$, (cantidad llamada también pseudorapidez de deformación), puede ser obtenida de los datos).
- La pendiente de la curva puede ser obtenida en ese punto.
- Estos son los únicos términos que aparecen en el lado derecho de la ecuación (14), por lo que $\left(-\frac{1}{2} \frac{dv_z}{dr} \right)$ puede ser calculado.
- Ambos $\bar{\tau}_w$ y $\left(-\frac{1}{2} \frac{dv_z}{dr} \right)$ pueden ser medidos en el mismo punto proporcionando los términos del diagrama básico de esfuerzos.

En el caso de un fluido Stokesiano incompresible, la ecuación de estado está dada por:

$$P_{ij} = -g_{ij} p + \alpha_1 e_{ij} + \alpha_2 e_{im} e_{jm} \quad (15)$$

$$P = -pI + \alpha_1 \bar{D} + \alpha_2 \bar{D}^2$$

donde los escalares α_1 y α_2 son funciones del II y III invariantes del tensor de esfuerzos. llamaremos $\frac{1}{2}\alpha_1$ la viscosidad aparente y α_2 , el coeficiente de esfuerzos normales.

En la región de flujo desarrollado, tenemos que:

$$v_r = v_\theta = 0, \quad v_z = f(r) \quad (1)$$

para régimen permanente y flujo laminar. Estas ecuaciones satisfacen la ecuación de continuidad. El tensor e_{ij} o \bar{D} de deformaciones es:

$$\bar{D} = \frac{1}{2} \frac{dv_z}{dr} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (16)$$

Los principales invariantes del tensor \bar{D} son:

$$I = \text{tr } \bar{D} = 0$$

$$II = \frac{1}{2} (-I^2 + \text{tr } \bar{D}^2) = \frac{1}{4} \left(\frac{dv_z}{dr} \right)^2$$

$$III = \det \bar{D} = 0 \quad (17)$$

donde:

$$\bar{D}^2 = \frac{1}{4} \left(\frac{dv_z}{dr} \right)^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (18)$$

en consecuencia α_1 y α_2 son funciones de r.

El tensor de esfuerzos es:

$$P'_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \alpha_2 \left(\frac{dv_z}{dr} \right)^2 & 0 & \frac{1}{2} \alpha_1 \left(\frac{dv_z}{dr} \right) \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} \alpha_1 \left(\frac{dv_z}{dr} \right) & 0 & \frac{1}{4} \alpha_2 \left(\frac{dv_z}{dr} \right)^2 \end{bmatrix} \quad (19)$$

Según la ecuación (9), el esfuerzos cortante decrece linealmente con la distancia radial medida desde el centro del tubo:

$$F_{rz}(r) = \frac{Pr}{z} = \frac{1}{z} \alpha_1(r) \frac{dV_z}{dr} \quad (20)$$

Integrando:

$$V_z = -P \int_r^R \frac{r dr}{\alpha_1(r)} \quad (21)$$

donde se supone que $V_z(R) = 0$.

El flujo volumétrico es:

$$Q = 2\pi \int_0^R V_z r dr = -2\pi P \int_0^R r dr \int_r^R \frac{r dr}{\alpha_1(r)} \quad (22)$$

Intercambiando el orden de integración, se reduce a:

$$Q = -P\pi \int_0^R \frac{r^3 dr}{\alpha_1(r)} \quad (23)$$

Para líquidos Newtonianos, tenemos que: $\alpha_1(r) = \mu = \text{constante}$
Sustituyendo en (23) tenemos:

$$Q = \frac{P\pi R^4}{8\mu} \quad (24)$$

que es la ley de Hagen Poiseuille.

La integración de la ecuación (23) se puede realizar numérica o analíticamente, si se conoce como varía α_1 con respecto a r .

Considerando ahora la presión en un fluido Stokesiano, la ecuación (7) muestra que la presión está dada por:

$$p = (P + \rho g)z + f(r) \quad (25)$$

Sustituyendo (7) y (19) en la ecuación de movimiento (3), da:

$$\frac{df(r)}{dr} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \alpha_2(r) \left(\frac{dV_z}{dr} \right)^2 \right] \quad (26)$$

Si α_2 fuera conocida, se podría determinar f , y de ahí p . Como el líquido se supuso incompresible, sin embargo, no hay modo de determinar la constante arbitraria; por lo que la presión no está completamente determinada. Esta situación es característica de problemas donde el material se supone incompresible.

Es claro que la expresión: $P_{rr} = \frac{1}{4} \alpha_2 \left(\frac{dv_z}{dr} \right)^2$ se podría usar para calcular α_2 si se conociera P_{rr} por medio de: $P_{rr} = -p + P_{rr}'$, pero dado que la presión es indeterminada, el método no mide α_2 . Se deduce que el único camino para medir α_2 es medir todos los esfuerzos normales y aplicar: $N_1 = N_2 = \frac{1}{4} \alpha_2 \left(\frac{dv_z}{dr} \right)^2$ donde N_1 y N_2 son las diferencias de esfuerzos normales. Esto es extremadamente difícil de realizar experimentalmente, y no se ha hecho en un viscosímetro capilar.

Ahora, para determinar las funciones viscométricas, consideremos la componente $\theta\theta$ del tensor de esfuerzos, y para nuestro caso, las ecuaciones de movimiento se reducen a:

$$\frac{\partial P_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} (P_{rr} - P_{\theta\theta}) = 0 \quad (27)$$

$$\frac{\partial P_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r P_{rz}) = 0 \quad (28)$$

En términos del tensor de esfuerzos extra P_{ik}' , éstas llegan a ser:

$$\frac{dP}{dr} = \frac{dP_{rr}'}{dr} + \frac{1}{r} (P_{rr}' - P_{\theta\theta}') \quad (29)$$

$$\frac{dP}{dz} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r P_{rz}') \quad (30)$$

donde p es la presión isotrópica y se supone implícitamente que la rapidez de deformación y los esfuerzos extra son independientes de z . Para un fluido Newtoniano, tenemos que:

$$P_{rz}' = \mu \frac{dv_z}{dr} \quad (31)$$

Sustituyendo (31) en la ecuación (9) e integrando, con la condición en la frontera de que la velocidad axial es cero en la pared del tubo, tenemos:

$$v_z = \frac{R^2 P}{4\mu} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \quad (32)$$

Sustituyendo (32) en (10) e integrando, nos da:

$$\frac{4Q}{\pi R^3} = \frac{\bar{c}_w}{\mu} = \frac{R^2 P}{2\mu} \quad (33)$$

(Hagen Poiseuille), donde podemos calcular μ mediante una gráfica de pseudorapidez de deformación contra \bar{c}_w . Para fluidos no Newtonianos, se define la viscosidad aparente μ_a como:

$$\frac{1}{\mu_a} = \frac{4Q/\pi R^3}{\bar{c}_w} = \frac{P}{\bar{c}_w} \int_0^{\bar{c}_w} \frac{P}{P_1^2} \left(-\frac{1}{2} \frac{dP_1}{P_1} \right) dP_1 \quad (34)$$

Para la determinación de las diferencias de esfuerzos normales, se integra la primera ecuación de movimiento (27) con respecto a r desde cero hasta R :

$$P_{rr}(R,z) = P_{rr}(0,z) - \int_0^R \frac{(P_r - P_\theta)}{r} dr \quad (35)$$

Por simetría, el esfuerzo cortante es cero en el centro del tubo. Entonces tenemos:

$$P_{rr}(0,z) = -p(0,z) \quad (36)$$

y si $p^{(R,L)}$ es la presión en la pared medida a la salida, tal que:

$$P_{rr}(R,L) = -p^{(R,L)} \quad (37)$$

donde L es la región viscométrica.

Para $z = L$, la ecuación (35) toma la forma:

$$p^{(R,L)} - p(0,L) = \int_0^R \frac{(P_r - P_\theta)}{r} dr \quad (38)$$

Si ahora definimos a T_L como la reducción de la fuerza total debido a la elasticidad del líquido, y donde:

$$T_L = \int_0^R P_{zz}(r,L) d(\pi r^2) \quad (39)$$

Integrando por partes:

$$T_z = \pi R^2 p_{zz}(R, L) - \int_0^R \pi r^2 \left(\frac{dp_{zz}}{dr} \right) dr \quad (40)$$

Usando la identidad:

$$\frac{dp_{zz}}{dr} = \frac{dp_{rr}}{dr} + \frac{d}{dr} (p_{zz} - p_{rr}) \quad (41)$$

tenemos, sustituyendo (21) en (41):

$$\frac{dp_{zz}}{dr} = \frac{p_{\theta\theta} - p_{rr}}{r} + \frac{d}{dr} (p_{zz} - p_{rr}) \quad (42)$$

Sustituyendo (12) en (40), tenemos:

$$T_z = \pi R^2 p_{zz}(R, L) - \int_0^R \pi r^2 \left[\frac{p_{\theta\theta} - p_{rr}}{r} + \frac{d}{dr} (p_{zz} - p_{rr}) \right] dr \quad (43)$$

Integrando por partes el segundo miembro de la integral, tenemos:

$$T_z = \pi R^2 p_{rr}(R, L) + \pi \int_0^R (2p_{zz} - p_{rr} - p_{\theta\theta}) r dr \quad (44)$$

Sustituyendo (31) en (44) nos da:

$$T_z + \pi R^2 p^{(R, L)} = \pi \int_0^R (2p_{zz} - p_{rr} - p_{\theta\theta}) r dr \quad (45)$$

Usando (12) tenemos:

$$T_z + \pi R^2 p^{(R, L)} = \frac{\pi R^2}{\sigma \omega^2} \int_0^{\sigma \omega} p'_{zz} (2p_{zz} - p_{rr} - p_{\theta\theta}) dA'_z \quad (46)$$

Diferenciando (46) con respecto a $\sigma \omega$ y después multiplicando por $\sigma \omega^2$ para dar:

$$\left[2p_{zz} - p_{rr} - p_{\theta\theta} \right]_{\omega} = \frac{1}{\pi R^2 \sigma \omega} \frac{d}{d\sigma \omega} \left[\sigma \omega^2 (T_z + \pi R^2 p^{(R, L)}) \right] \quad (47)$$

A partir de (12) y (38) tenemos:

$$\left[p_{rr} - p_{\theta\theta} \right]_{\omega} = \sigma \omega \frac{d}{d\sigma \omega} \left[p^{(R, L)} - p(D, L) \right] \quad (48)$$

que es la ecuación para la primera diferencia de esfuerzos normales.

Finalmente, a partir de (46) y (47) tenemos:

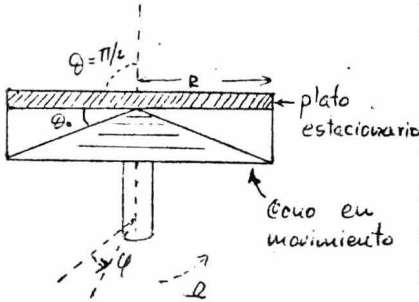
$$[P_{zz} - P_{rr}]_{\omega} = P^{(R)} + \frac{\sigma_{\omega}}{2} \frac{d}{d\omega} P(0, \kappa) + \frac{1}{2\pi R^2 \sigma_{\omega}} \frac{d}{d\omega} (\sigma_{\omega}^2 T_2) \quad (49)$$

$$[P_{zz} - P_{\theta\theta}]_{\omega} = P^{(R)} + \sigma_{\omega} \frac{d}{d\omega} P^{(R)} - \frac{1}{2} \sigma_{\omega} \frac{d}{d\omega} P(0, \kappa) + \frac{1}{2\pi R^2 \sigma_{\omega}} \frac{d}{d\omega} (\sigma_{\omega}^2 T_2) \quad (50)$$

que es la ecuación de la segunda diferencia de esfuerzos normales.

SISTEMA CONO Y PLATO

Es un instrumento que nos sirve para medir viscosidades aparentes y esfuerzos normales. El material al cual se le van a hacer las mediciones está situado entre el plato ($\theta = \pi/2$) y el cono ($\theta = \pi/2 + \theta_0$), ambos supuestamente infinitos en extensión.



Las mediciones de velocidad angular y torque nos dan la relación entre el esfuerzo y la rapidez de deformación. Si el ángulo entre el cono y el plato es pequeño (θ_0), el esfuerzo cortante será casi uniforme a través del fluido.

Utilizando coordenadas esféricas, el flujo en el instrumento tendrá los siguientes componentes físicos de la velocidad:

$$v_r = 0$$

$$v_\theta = 0$$

$$v_\phi = r\Omega(\theta) \sin\theta \quad (1)$$

Con las siguientes condiciones en la frontera:

a).- $\Omega = 0$ en $\theta = \pi/2$ en el plato estacionario.

b).- $\Omega = \Omega_0$ en $\theta = \pi/2 + \theta_0$ en el cono en movimiento. (2)

En este caso, θ es el ángulo entre la vertical y el radio vector r . La coordenada en la dirección tangencial es ϕ .

Cada cono de líquido $\theta = \text{constante}$ gira alrededor de $\theta = 0$ con velocidad angular $\Omega = \Omega(\theta)$

El flujo cortante es unidireccional. Las superficies cortantes son conos de $\theta = \text{constante}$ y las superficies ortogonales son esferas de radio constante. Las intersecciones son círculos con $\theta = \text{constante}$ en planos horizontales.

Interesa medir:

a).- La fuerza sobre el plato, que es proporcional a la primera diferencia de esfuerzos normales.

b).- El torque, que es proporcional a la viscosidad.

c).- La distribución de esfuerzos sobre el plato, que nos puede dar la segunda diferencia de esfuerzos normales.

Rapidez de deformación.

Tiene dos componentes que no se anulan: $e_{\varphi\varphi} = e_{\theta\theta}$, dados por:

$$e_{\varphi\varphi} = \frac{1}{2} \operatorname{sen} \theta \frac{d\Omega}{d\theta} \quad (3)$$

El tensor de esfuerzos que prevalece en el fluido es:

$$\bar{\bar{p}} = \begin{pmatrix} -p + P_{\varphi\varphi} & P_{\varphi\theta} & 0 \\ P_{\varphi\varphi} & -p + P_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & -p + P_{rr} \end{pmatrix} \quad (4)$$

donde los P_{ij} son funciones solamente de θ . Las correspondientes ecuaciones de movimiento son:

$$-p r \Omega^2 \operatorname{sen}^3 \theta = -\frac{\partial p}{\partial r} - \frac{P_{\theta\theta} + P_{\varphi\varphi}}{r} \quad (5)$$

$$-p r \Omega^2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\operatorname{sen} \theta P_{\theta\theta}') - \frac{\cos \theta}{r} P_{\varphi\varphi}' \quad (6)$$

$$\frac{\partial P_{\varphi\varphi}'}{\partial \theta} + 2 \cos \theta P_{\varphi\varphi}' = 0 \quad (7)$$

donde se ha incorporado cualquier fuerza externa a la presión isotrópica p , y donde se han eliminado los términos que contienen derivadas con respecto a φ , dada la simetría del problema.

Por la ecuación de continuidad, tenemos que:

$$\frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{dP_{\varphi\varphi}'}{d\theta} = 0 \quad (8)$$

Integrando la ecuación (7):

$$P_{\varphi\varphi}' = \frac{A}{\operatorname{sen}^2 \theta} \quad (9)$$

donde A es una constante de integración.

Para que la ecuación (9) sea compatible con las ecuaciones (5) y (6), es necesario hacer las siguientes aproximaciones:

a).- Los efectos de inercia son despreciables a velocidades angulares pequeñas, o sea, que se ignoran los términos de segundo orden en las velocidades.

- b).- El ángulo del cono (θ_0) es muy pequeño, lo suficiente como para que $\sin\theta \approx 1$ y $\cot\theta \approx 0$.
- c).- El cono y el plato son del mismo radio a .
- d).- La superficie libre del líquido es parte de una esfera de radio a con centro en el vértice del cono.
- e).- El flujo cortante simple a régimen permanente continúa hasta la superficie libre.
- f).- Las fuerzas de tensión superficial son despreciables.

Con estas suposiciones, las ecuaciones de movimiento se reducen a:

$$0 = \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\rho \omega^2 + \rho g}{r} \quad (10)$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{d\rho g}{d\theta} \quad (11)$$

$$0 = \frac{d\rho g}{d\theta} \quad (12)$$

La ecuación (12) es la comprobación de que el esfuerzo cortante es uniforme y no varía con respecto a θ . Las otras ecuaciones serán usadas cuando se discutan las diferencias de esfuerzos normales.

Para un esfuerzo de corte constante, tenemos:

$$\rho g = \mu_{ap} \sin\theta \frac{d\Omega}{d\theta} \approx \mu_{ap} \frac{d\Omega}{d\theta} \quad (13)$$

donde μ_{ap} es la viscosidad aparente.

Sustituyendo (13) en (12) e integrando con las condiciones en la frontera ya especificadas, ecuaciones (2), nos da el siguiente perfil de velocidades:

$$\frac{\Omega}{\Omega_0} = \frac{\theta - \pi/2}{\theta_0} \quad (14)$$

O sea, que a un radio constante, la velocidad angular varía linealmente con la posición angular θ .

De aquí, que la rapidez de deformación sea:

$$\sin\theta \frac{d\Omega}{d\theta} \approx \frac{\Omega_0}{\theta_0} = \dot{\gamma} \quad (15)$$

El torque M requerido para mantener el plato estacionario es:

$$M = \int_0^a P_{\theta\theta} \Big|_{\theta = \pi/2} 2\pi r^2 dr \quad (16)$$

$$\text{donde } P_{\theta\theta} \Big|_{\theta = \pi/2} = \mu g \dot{\gamma} \quad (17)$$

sustituyendo (13) en (15). Con (17) e integrando la ecuación (16) y sabiendo que:

$$\dot{\gamma} = \frac{\Omega_0}{\theta_0}$$

nos da:

$$M = \frac{2}{3} \pi a^3 \mu g \frac{\Omega_0}{\theta_0} \quad (18)$$

Esta ecuación nos indica que la medida del torque en el plato estacionario es una función de la velocidad angular del cono (Ω_0), y puede ser usada para preparar gráficas de esfuerzo o viscosidad aparente contra rapidez de deformación; éstas gráficas deberán ser idénticas a las obtenidas usando un aparato de Couette o un viscosímetro capilar.

El cono y plato puede ser usado para medidas de esfuerzos normales cuando se le adapta un manómetro y otras modificaciones apropiadas. Para derivar las ecuaciones pertinentes, consideremos la ecuación (10), que puede ser escrita de la manera siguiente:

$$\frac{d\sigma}{dr} = - (P_{\theta\theta} + P_{\phi\phi}) \quad (19)$$

Si N_1 y N_2 son, respectivamente, la primera y segunda diferencia de esfuerzos normales, entonces:

$$N_1 = P_{\phi\phi} - P_{\theta\theta} \quad (19)$$

$$N_2 = P_{\theta\theta} - P_{rr} \quad (20)$$

En la interfase a la orilla del aparato, el esfuerzo normal P_{rr} es balanceado por la presión estática en el fluido ambiente, P_0 . Entonces:

$$P_{rr}' = 0 \quad (21)$$

$$P_{\theta\theta} = N_2 \quad (22)$$

$$P_{\phi\phi} = N_2 + N_1 \quad (23)$$

por lo cual:

$$\frac{dp}{dr} = -(2N_2 + N_1) \quad (24)$$

Esta última ecuación predice una dependencia logarítmica de la presión p con respecto a r , y la pendiente de una curva de p contra $\log r$ puede ser empleada para determinar la función de esfuerzos normales $2N_2 + N_1$.

Integrando la ecuación (24) y aplicando la siguiente condición en la frontera:

$$p = -N_2 + p_0 \quad \text{para } r = a \quad (25)$$

Es decir:

$$p(r) = (2N_2 + N_1) \log r/a - N_2 \quad (26)$$

La fuerza total normal sobre el plato es:

$$F = \int_0^a p(r) 2\pi r dr \quad (27)$$

Integrando:

$$F = \frac{\pi a^2}{2} N_1 \quad (28)$$

Esta ecuación implica que las mediciones de la fuerza total como una función de la velocidad angular pueden ser empleadas para determinar la variación de la primera diferencia de esfuerzos normales N_1 con la velocidad de deformación.

En principio, (17) y (28) pueden ser empleadas para medir N_1 y N_2 separadamente. Para verificar el valor de N_2 se emplea la ecuación (17), donde la pendiente de la curva de ρ contra $\log r$ puede ser tomada para puntos lejanos de la orilla.

La elevación del fluido en un manómetro acoplado al aparato es una medida del esfuerzo normal $P_{\theta\theta}$; por lo que:

$$P_{\theta\theta}(r) = -P_0 - \rho g h \quad h = h(r) \quad (29)$$

Con diferentes soluciones poliméricas, se ha observado que la elevación en los tubos del manómetro es cero en las orillas, por lo que:

$$h(a) = 0 \quad (30)$$

por lo que se concluye que a $r = a$:

$$P_{rr} = P_{\theta\theta} \quad (31)$$

Más aún, esta igualdad es válida aún cuando r varía, por lo que es válida en todo el fluido. Es decir, que los esfuerzos normales actuando en cada plano paralelo a la dirección de flujo, son iguales. Además, datos experimentales indican que la relación entre la altura en los tubos manométricos y la variación del radio es logarítmica, por lo que:

$$\rho g h(r) = K \ln \frac{a}{r} \quad (32)$$

donde K es una función de la rapidez de deformación.

De las ecuaciones (29), (31) y (32) se obtiene:

$$\frac{dP_{rr}}{dr} = \frac{dP_{\theta\theta}}{dr} = K \quad (33)$$

Entonces, por la ecuación (17):

$$K = -P_{\theta\theta} - \rho g h \quad (34)$$

por lo que $P_{00} \neq P_{\phi\phi}$.

O sea que:

$$P_{11} = P_{00} + P_{\phi\phi} \quad (35)$$

Conclusión: Los esfuerzos normales en planos normales a la dirección del flujo son diferentes a los esfuerzos normales en planos paralelos a la dirección del flujo. La ecuación (35) es conocida como la relación de esfuerzos normales de Roberts-Weissenberg.

FLUJO DE COUETTE (CILINDROS CONCENTRICOS).

Otro instrumento viscosimétrico común es el llamado Couette, o viscosímetro de cilindros concéntricos; consiste en un par de cilindros coaxiales arreglados de manera tal, que uno de los cilindros puede ser girado mientras el otro permanece fijo. El fluido se coloca entre los dos cilindros. El torque necesario para mantener la posición del cilindro fijo, es una medida del esfuerzo cortante, y la velocidad angular del cilindro es una medida de la rapidez de deformación.

Si la relación entre los radios de los dos cilindros es cercana a la unidad, el esfuerzo cortante y la rapidez de deformación serán casi uniformes a través del fluido y una gráfica de esfuerzo contra rapidez de deformación puede ser obtenida directamente de los datos experimentales.

El flujo de Couette proporciona otro posible método para determinar la viscosidad aparente μ y la primera diferencia de esfuerzos normales. Los cilindros se suponen infinitos en longitud. El radio del cilindro interior es r_i y el del exterior r_o . Referida a coordenadas cilíndricas, la distribución de velocidad está dada por:

$$\begin{aligned}v_r &= 0 \\v_\theta &= r\Omega(r) \\v_z &= 0\end{aligned}\tag{1}$$

que implica la ausencia de efectos terminales y donde $\Omega(r)$ es la velocidad angular del fluido con respecto al eje del instrumento, por lo que el flujo es axisimétrico y las variaciones con respecto a la coordenada angular y a la coordenada z son cero.

El tensor de esfuerzos del sistema queda expresado como:



$$P_{ik} = \begin{pmatrix} -p + A r' & A r_0' & 0 \\ P_0 r' & -p + B_0 r_0' & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} \quad (2)$$

La rapidez de deformación es:

$$\dot{\gamma} = r \frac{d\dot{\theta}}{dr} \quad (3)$$

El tensor de alargamiento \bar{D} es:

$$\bar{D} = \frac{1}{2} r \frac{d\dot{\theta}}{dr} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \dot{\gamma} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Elevando al cuadrado:

$$\bar{D}^2 = \frac{1}{4} \dot{\gamma}^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Y los invariantes principales de \bar{D} son:

$$\begin{aligned} I &= \text{tr} \bar{D} = 0 \\ II &= \frac{1}{2} [-I^2 + \text{tr} \bar{D}^2] = \frac{\dot{\gamma}^2}{4} \\ III &= \det \bar{D} = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Si el líquido es incompresible, el primer invariante es equivalente a la ecuación de continuidad.

Los coeficientes reológicos son:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= f(0, II, 0) = \alpha_1(r) \\ \alpha_2 &= f(0, II, 0) = \alpha_2(r) \end{aligned} \quad (7)$$

De la ecuación de estado para un fluido de Stokes, se encuentra que los componentes físicos del tensor de esfuerzos extra son:

$$P_{ik}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \alpha_2(r) \dot{\gamma}^2(r) & \frac{1}{2} \alpha_1(r) \dot{\gamma}(r) & 0 \\ \frac{1}{2} \alpha_1(r) \dot{\gamma}(r) & \frac{1}{4} \alpha_2(r) \dot{\gamma}^2(r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

Las ecuaciones de movimiento se reducen a:

$$-\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{dA_r}{dr} + \frac{1}{r} (A_r - B_\theta) = -\rho \Omega^2 r \quad (9)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_\theta') = 0 \quad (10)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad (11)$$

Integrando las ecuaciones (10) y (11):

$$A_\theta' = \frac{A}{r^2} \quad (12)$$

$$p = -\rho g z + f(r) \quad (13)$$

donde A es una constante y f(r) es una función arbitraria de r.

Considerando el caso en que la rapidez de deformación es pequeña, entonces α_1 y α_2 son casi constantes, y de la ecuación (12) tenemos:

$$A_\theta' = \frac{A}{r^2} = \frac{1}{2} \alpha_1 \dot{\theta}(r) = \frac{1}{2} \alpha_1 r \frac{d\Omega}{dr} \quad (14)$$

Integrando esta última expresión:

$$\Omega = \frac{-A}{\alpha_1 r^2} + B \quad (15)$$

Si el cilindro exterior lo ponemos fijo, y consideramos que su radio es muy grande comparado con el del cilindro interior, entonces $B = 0$. Si Ω_i es la velocidad angular del cilindro interior (de radio r_i) entonces:

$$\Omega = \Omega_i \left(\frac{r_i}{r}\right)^2 \quad (16)$$

Suponiendo que un fluido de Stokes ocupa la región entre los cilindros, tenemos que:

$$P_{zz} = -\rho = \text{constante} \quad (17)$$

Utilizando la ecuación (13) y diferenciando con respecto a r , tenemos:

$$-\rho g \frac{dz}{dr} = -f'(r) \quad (18)$$

De la ecuación (9) se encuentra:

$$\frac{dP}{dr} = f'(r) = \rho r \Omega^2 + \frac{d}{dr} Pr' + \frac{1}{r} (Pr' - P_0')$$
(19)

Sustituyendo (19) en (18):

$$\frac{dz}{dr} = \frac{1}{\rho g} \left[\rho r \Omega^2 + \frac{d}{dr} Pr' + \frac{1}{r} (Pr' - P_0') \right]$$
(20)

Por la ecuación (18) tenemos que :

$$Pr' = \frac{1}{4} \alpha_2 r^2 \left(\frac{dz}{dr} \right)^2$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación (20), y también (16) en (20), tenemos:

$$\frac{dz}{dr} = \frac{1}{\rho g} \left[\rho r \Omega^2 \frac{r_1^4}{r^4} r + \frac{d}{dr} \left\{ \frac{1}{4} \alpha_2 r^2 \left(\frac{dz}{dr} \right)^2 \right\} \right]$$
(21)

Efectuando las respectivas operaciones:

$$\frac{dz}{dr} = \frac{\Omega_1^2 r_1^4}{\rho g r^3} \left(\rho - \frac{4\alpha_2}{r^2} \right)$$
(22)

Entonces, si $4\alpha_2/r^2 > \rho$ y $\alpha_2 > 0$, se encuentra que $dz/dr < 0$ cerca del cilindro interior; esto es, el fluido tiende a subir por el cilindro interior. Este efecto es exactamente el opuesto al que se presentaría en un fluido Newtoniano ($\alpha_2 = 0$); dicho efecto se llama efecto "Weissenberg".

Si $\alpha_2 > 0$ y si $4\alpha_2/r^2 \gg \rho$, entonces se tiene:

$$z \approx \frac{\Omega_1^2 r_1^4 \alpha_2}{\rho g r^4}$$
(23)

O sea que la altura interfacial varía de manera inversa a la cuarta potencia del radio. Es necesario puntualizar que la observación del efecto Weissenberg en ciertos fluidos no significa que sean Stokesianos. Los fluidos viscoelásticos también lo presentan.

Para encontrar las expresiones que nos permitan calcular la primera diferencia de esfuerzos normales, hacemos referencia a la ecuación (9). Esta ecuación nos da la variación de la presión con la posición radial. El gradiente de presión en la dirección radial se compone del término de fuerza centrífuga ($\rho r \Omega^2$) y de los términos de esfuerzos normales.

Si diferenciamos los términos de inercia, la ecuación (9) puede ser integrada para dar:

$$\Delta P = P_r \Big|_{r_0} - P_r \Big|_{r_c} = \int_{r_c}^{r_0} (\rho r \Omega^2 - A_r) \frac{dr}{r} \quad (24)$$

que expresada de otra forma:

$$\frac{dP_r}{dr} = \rho r \Omega^2 - A_r \quad (25)$$

con la que podemos calcular la primera diferencia de esfuerzos normales.

Ahora, el problema de determinar la función viscosidad $\mu(\dot{\gamma})$ de las mediciones de torque en el flujo de Couette no es trivial, excepto en los casos en que el espacio anular sea muy pequeño.

Si C es el par (por unidad de longitud del cilindro), sobre el cilindro de radio r, tenemos:

$$C = 2\pi r^2 P_r' \quad (26)$$

en donde C es independiente de r, y podemos escribir:

$$P_r'(r) = \frac{C}{2\pi r^2} \quad (27)$$

Por la ecuación (8) tenemos que:

$$P_r'(r) = \frac{1}{2} \alpha_1 \dot{\gamma}^2(r)$$

Sustituyendo este valor en la ecuación (27) obtenemos:

$$\frac{e}{2\pi r^2} = \frac{1}{2} \alpha_1 r \frac{d\Omega}{dr} \quad (28)$$

ya que por la ecuación (3) tenemos que: $\gamma = r \frac{d\Omega}{dr}$

De la ecuación (28) obtenemos la distribución de velocidades en función de cantidades medibles. La viscosidad μ es:

$$\mu = \frac{1}{2} \alpha_1 \quad (29)$$

Integrando la ecuación (28) con (29) y aplicando las siguientes condiciones en la frontera:

$$\Omega = 0 \quad \text{cuando} \quad r = r_0 \quad (30)$$

Se obtiene:

$$\Omega = \frac{e}{4\pi\mu} \left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} \right) \quad (31)$$

En el punto $r = r_1$:

$$\Omega_i = \frac{e}{4\pi\mu} \left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r_1^2} \right) \quad (32)$$

de donde podemos medir la viscosidad.

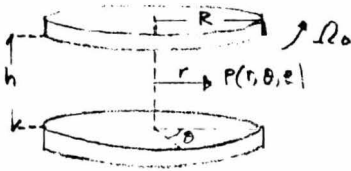
Sustituyendo (27) en (32) obtenemos la expresión para el esfuerzo:

$$P_{r\theta}'(r) \Big|_{r=r_0} = \frac{e}{2\pi r_0^2} = 2\mu \frac{\Omega_i r_1^2}{r_0^2 - r_1^2} \quad (33)$$

por lo que la velocidad de deformación es:

$$\dot{\gamma} = \frac{2 \Omega_i r_1^2}{r_0^2 - r_1^2} \quad (34)$$

PLACAS PARALELAS



El sistema mostrado en la figura representa el flujo entre dos discos o placas paralelas separadas una distancia h . Los discos tienen radio R . El disco superior gira a una velocidad angular constante, mientras que el disco inferior se

encuentra en reposo. Un fluido homogéneo e incompresible llena el espacio entre los discos. El objeto es utilizar dicho aparato para medir las propiedades del líquido.

Análisis del sistema.

Usando coordenadas cilíndricas, el campo de velocidades está dado por:

$$\begin{aligned} v_r &= 0 \\ v_\theta &= r\Omega(z) \\ v_z &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Con condiciones en la frontera:

$$\begin{aligned} z = 0 & \quad \text{cuando} \quad \Omega = 0 \\ z = h & \quad \text{cuando} \quad \Omega = \Omega_0 \end{aligned} \quad (2)$$

El tensor de esfuerzos es:

$$P_{ik} = \begin{pmatrix} -P & 0 & 0 \\ 0 & -P + P_{\theta\theta} & P_{\theta z} \\ 0 & P_{z\theta} & -P + P_{zz} \end{pmatrix} \quad (3)$$

La velocidad de deformación es:

$$\dot{\gamma} = r \frac{d\Omega}{dz} \quad (4)$$

Si despreciamos los términos de inercia en las ecuaciones de movimiento, así como los efectos inducidos por los bordes de las placas, el flujo se considera viscométrico. Las superficies de corte son los planos paralelos $z = \text{constante}$, girando con una velocidad

angular dada con respecto al eje z, que empieza desde cero en el plato inferior hasta Ω_0 en el superior.

Las ecuaciones de esfuerzo despreciando inercia son:

$$\frac{dP_{rr}}{dr} + \frac{1}{r} \frac{dP_{r\theta}}{d\theta} + \frac{dP_{rz}}{dz} + \frac{P_{rr} - P_{\theta\theta}}{r} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{dP_{r\theta}}{dr} + \frac{1}{r} \frac{dP_{\theta\theta}}{d\theta} + \frac{dP_{\theta z}}{dz} + \frac{2P_{r\theta}}{r} = 0 \quad (6)$$

$$\frac{dP_{rz}}{dr} + \frac{1}{r} \frac{dP_{r\theta z}}{d\theta} + \frac{dP_{zz}}{dz} + \frac{P_{rz}}{r} = \rho g \quad (7)$$

Si la distancia h es pequeña, se tiene que:

$$\rho g = 0 \quad (8)$$

Por simetría:

$$\frac{dP_{r\theta}}{d\theta} = \frac{dP_{\theta\theta}}{d\theta} = \frac{dP_{\theta z}}{d\theta} = 0 \quad (9)$$

Además, según la distribución de velocidades:

$$P_{rz} = P_{\theta r} = 0 \quad (10)$$

Las ecuaciones se reducen a :

$$r \frac{dP_{rr}}{dr} = - (P_{rr} - P_{\theta\theta}) \quad (11)$$

$$\frac{dP_{\theta z}}{dz} = 0 \quad (12)$$

$$\frac{dP_{zz}}{dz} = \rho g \quad (13)$$

Integrando la ecuación (12), sabiendo que: $P_{\theta z} = \mu r \frac{d\theta}{dz}$

y junto con las condiciones en la frontera (2), nos da:

$$\Omega = \Omega_0 \left(\frac{z}{h} \right) \quad (14)$$

Sustituyendo (14) en (4) y efectuando las operaciones, tenemos:

$$\dot{\gamma} = \Omega_0 \left(\frac{r}{h} \right) \quad (15)$$

Por las ecuaciones (14) y (15) vemos que Ω únicamente depende de z y $\dot{\gamma}$ de r . Integrando las ecuaciones (12) y (13) tenemos:

$$P_{\theta z} = f(r) \quad (16)$$

$$P_{zz} = \rho g z + f(r) \quad (17)$$

Por las ecuaciones (11), (16) y (17) vemos que los componentes del tensor de esfuerzos dependen solamente de r , es decir:

$$\bar{p} = \bar{p}(\dot{\gamma}) = \bar{p}(r) \quad (18)$$

Diferenciando la ecuación (15) con respecto a r , obtenemos:

$$\frac{d\dot{\gamma}}{dr} = \frac{\dot{\gamma}}{r} \quad (19)$$

Por lo que:

$$\dot{\gamma} \frac{d\bar{p}}{d\dot{\gamma}} = r \frac{d\bar{p}}{dr} \quad (20)$$

Usando la identidad:

$$P_{zz} = P_{rr} + (P_{zz} - P_{rr}) \quad (21)$$

Multiplicando la expresión por r y diferenciando con respecto a r :

$$r \frac{dP_{zz}}{dr} = r \frac{dP_{rr}}{dr} + r \frac{d(P_{zz} - P_{rr})}{dr} \quad (22)$$

Por las ecuaciones (11) y (20) tenemos, sustituyéndolas en la ecua-

ción (22):

$$r \frac{dP_{zz}}{dr} = - (P_{rr} - P_{\theta\theta}) + r \frac{d}{dz} (P_{zz} - P_{rr}) \quad (23)$$

La ecuación (23) puede expresarse también como:

$$\frac{dP_{zz}}{dr} = - \frac{(P_{rr} - P_{\theta\theta})}{r} + \frac{d}{dz} (P_{zz} - P_{rr}) \quad (24)$$

La ecuación (23) por sí misma no nos da un método para calcular la primera diferencia de esfuerzos normales a menos que $(P_{zz} - P_{rr}) = 0$, por lo que no es una función de esfuerzos normales. Esta es una diferencia con el caso del cono y plato, donde nos daba un método para calcular $2N_2 + N_1$.

Medición de la fuerza axial.

Otra cantidad medible es la fuerza normal entre las dos placas.

Para determinarla, es necesario hacer las siguientes suposiciones:

a).- La superficie libre es parte del cilindro $r = R$, donde R es el radio de ambos platos.

b).- La distribución de velocidades (1), existe en la superficie libre, por lo que se desprecian los efectos terminales.

La condición en la frontera de la superficie libre está dada por:

$$P_{rr} = -P_{\theta} \quad \text{para} \quad r = R \quad \text{en} \quad 0 \leq z \leq h \quad (25)$$

Integrando la ecuación (24) tenemos:

$$P_{zz}(r) = \int_r^R (P_{rr} - P_{\theta\theta}) \frac{dr}{r} + (P_{zz} - P_{rr}) \quad (26)$$

Si F es la fuerza total normal, esta será:

$$F = 2\pi \int_0^R P_{zz}(r) \Big|_{z=h} r dr \quad (27)$$

Sustituyendo (26) en (27) tenemos:

$$F = 2\pi \int_0^R \left\{ \int_r^R (P_{rr} - P_{\theta\theta}) \frac{dr}{r} + (P_{zz} - P_{rr}) \right\} r dr \quad (28)$$

Invirtiendo el orden de integración de la doble integral tenemos:

$$F = 2\pi \int_0^R \frac{(P_{rr} - P_{\theta\theta})}{r} r dr d\bar{r} + 2\pi \int_0^R r (P_{zz} - P_{rr}) d\bar{r} \quad (29)$$

El máximo valor de δ estará dado por la ecuación (15):

$$\delta_R = \frac{\Omega_0 R}{h} \quad (30)$$

La ecuación (29) se puede expresar también como:

$$F = \frac{\pi h^2}{\Omega_0^2} \int_0^{\delta_R} (P_{rr} - P_{\theta\theta}) d\delta \quad (31)$$

Sustituyendo para Ω_0 en términos de δ_R (30) y diferenciando, tenemos:

$$\frac{2F}{\pi R^2} \left[1 + \frac{1}{2} \frac{d \ln F}{d \ln \delta_R} \right] = (P_{rr} - P_{\theta\theta}) \Big|_{\delta_R} \quad (32)$$

Esta ecuación, análoga a la expresión de fuerza para el cono y plato, provee un método para determinar $(P_{rr} - P_{\theta\theta})$ separadamente, a partir de la fuerza total en las dos geometrías.

Medición del torque.

El torque ejercido sobre la placa fija, o bien, el torque necesario para mantener la velocidad angular Ω en la placa superior, es una cantidad medible.

$$M = 2\pi \int_0^R P_{\theta z} r^2 dr \quad (33)$$

Con la ecuación constitutiva para un fluido Newtoniano:

$$P_{\theta z} = \mu \dot{\gamma} = \mu r \frac{\Omega_0}{h} \quad (34)$$

sustituyendo e integrando:

$$M = \frac{\pi \mu \Omega_0 R^4}{2h} \quad (35)$$

De aquí podemos medir la viscosidad, a partir de las mediciones de torque y velocidad angular.

CAPITULO 4

VISCOSIMETRIA DE ESFERA ROTATORIA

El movimiento de un líquido viscoelástico debido a una esfera que gira sobre su eje.

Los fluidos viscoelásticos idealizados son materiales cuyo comportamiento a pequeñas velocidades de deformación puede ser caracterizado por un espectro de tiempos de relajamiento. Las ecuaciones de estado que describen el comportamiento de estos fluidos son simples y pueden ser expresadas de la forma:

$$P_{ik} = -p g_{ik} + P_{ik}' \quad (1)$$

donde P_{ik} es el tensor de esfuerzos, p es una presión isotrópica arbitraria, g_{ik} es el tensor métrico y P_{ik}' es el tensor de esfuerzos extra. En este capítulo se tratará de llegar a una expresión del par sobre la esfera debido al líquido cuando ésta rota sobre su eje. Esto será útil en la determinación de los parámetros del líquido cuando se tengan resultados experimentales. Además, se llegará a expresiones para las proyecciones de las líneas de corriente en cualquier plano que contenga al eje de rotación, y se demostrará que son fuertemente dependientes de los parámetros del líquido.

En nuestro caso, el tensor de esfuerzos extra, será expresado como:

$$P_{ik}' = \int_{-\infty}^t \psi(t-t') \frac{dx^i}{dx^m} \frac{dx^k}{dx^r} e^{(1) \text{ nor}}(x^i, t') dt' \quad (2)$$

donde $e^{(1)}$ es el tensor de rapidez de deformación, y:

$$\psi(t-t') = \int_0^{\infty} \frac{N(\sigma)}{\sigma} e^{-(t-t')/\sigma} d\sigma \quad (3)$$

En esta ecuación, $N(\sigma)$ es la función de distribución de los tiempos de relajamiento σ , y $x^k = f(x^i, t')$ es la posición al tiempo t' del elemento que está instantáneamente en el punto x^i al tiempo t .

El líquido denominado B por Oldroyd, es un caso especial de este líquido obtenido cuando:

$$N(\sigma) = \eta_0 \frac{\lambda_1}{\lambda_1} \delta(\sigma) + \eta_0 \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1} \delta(\sigma - \lambda_1) \quad (4)$$

donde η_0 es la viscosidad limitante a pequeñas velocidades de deformación y λ_1 y λ_2 son los tiempos de relajamiento y retardamiento, respectivamente. El líquido Newtoniano es un caso especial, donde:

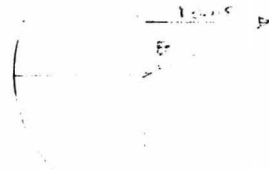
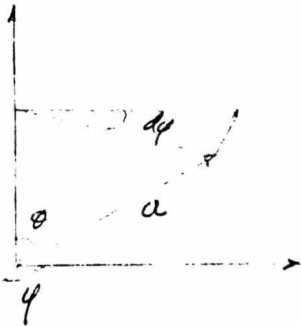
$$N(\sigma) = \eta_0 \delta(\sigma) \quad (5)$$

donde δ es la función delta de Dirac, definida como:

$$\delta(x) = 0, \quad (x \neq 0) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = \int_0^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

Si se considera una esfera de radio a que gira sobre su eje ($\theta = 0$), a una velocidad angular Ω dentro de un baño grande de líquido, y refiriendo al sistema a las coordenadas esféricas (r, θ y φ), donde r se mide desde el centro de la esfera y donde U, V y W son las componentes de la velocidad en ese sistema de coordenadas, se tiene que las condiciones en la frontera del sistema son:

- 1.- $U = V = 0, \quad W = a \sin \theta$ cuando $r = a$.
- 2.- $U = V = W = 0$ cuando $r = \infty$. (6)



Como la esfera gira a velocidad angular constante, el movimiento es independiente del tiempo; y además, dada la simetría del problema, la dependencia del movimiento con respecto a φ también se elimina. Tomando esto en cuenta, las ecuaciones de movimiento y continuidad se reducen a :

Ecuación de continuidad:

$$\frac{d}{dr} (U r^2 \sin \theta) + \frac{d}{d\theta} (V r \sin \theta) = 0 \quad (7)$$

Ecuaciones de movimiento:

Componente r:

$$\rho \left[U \frac{dU}{dr} + \frac{U}{r} \frac{dU}{d\theta} - \frac{(U^2 + W^2)}{r} \right] - \rho g \cos \theta =$$

$$= -\frac{dP}{dr} + \frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 P r)}{dr} + \frac{d(\sin \theta P \theta)}{r \sin \theta d\theta} - \frac{(P_{\theta\theta} + P_{\varphi\varphi})}{r} \quad (8)$$

Componente θ :

$$\rho \left[\frac{U}{r} \frac{d(rV)}{dr} + \frac{V dV}{r d\theta} - \frac{W^2 \cot \theta}{r} \right] + \rho g \sin \theta =$$

$$= -\frac{1}{r} \frac{dP}{d\theta} + \frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 P \theta)}{dr} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{d(\sin \theta P \theta)}{d\theta} - \frac{\cot \theta}{r} P_{\varphi\varphi} \quad (9)$$

Componente φ :

$$\rho \left[\frac{U}{r} \frac{d(rW)}{dr} + \frac{V}{r \sin \theta} \frac{d(W \sin \theta)}{d\theta} \right] = \frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 P \varphi)}{dr} +$$

$$+ \frac{1}{r \sin^2 \theta} \frac{d(\sin^2 \theta P \varphi)}{d\theta} \quad (10)$$

Si escribimos estas ecuaciones en términos adimensionales usando las siguientes sustituciones:

$$L = \left(\frac{\Omega a^2}{r} \right)^2 = Re^2$$

$$\omega = \frac{W}{\Omega a}$$

$$r_1 = \frac{r}{a}$$

$$p = \rho g r \cos \theta + \left(\frac{r^2}{a^2} \right)^2 P^*$$

$$u = \frac{U a}{V}$$

(11)

$$v = \frac{V a}{V}$$

donde $r = \frac{\eta_0}{\rho}$ y $\eta_0 = \int_0^\infty W(\theta) d\theta$, las ecuaciones 7, 8, 9 y 10 quedan:

$$u \frac{du}{dr_1} + \frac{u}{r_1} \frac{du}{d\theta} - \frac{v^2}{r_1} - \frac{\omega^2}{r_1} = -\frac{dp^*}{dr_1} + \frac{1}{r_1^2} \frac{d(r_1^2 P r_1)}{dr_1} +$$

$$+ \frac{1}{r_1 \sin \theta} \frac{d(\sin \theta P \theta)}{d\theta} - \frac{P_{\theta\theta}}{r_1} - \frac{P_{\varphi\varphi}}{r_1} \quad (12)$$

$$\frac{u}{r_1} \frac{d(r_1 v)}{dr_1} + \frac{v}{r_1} \frac{dv}{d\theta} - \frac{\omega^2 \cot \theta}{r_1} = -\frac{dp^*}{r_1 d\theta} + \frac{1}{r_1^2} \frac{d(r_1^2 P \theta)}{dr_1} +$$

$$+ \frac{1}{r_1 \sin \theta} \frac{d(\sin \theta P \theta)}{d\theta} - \frac{P_{\varphi\varphi} \cot \theta}{r_1} \quad (13)$$

$$\frac{v}{r_1} \frac{d(r_1 \omega)}{dr_1} + \frac{v}{r_1 \sin \theta} \frac{d(\omega \sin \theta)}{d\theta} = \frac{1}{r_1^3} \frac{d(r_1^3 P_{r\varphi}''')}{dr_1} + \frac{1}{r_1 \sin^2 \theta} \frac{d(r_1^2 \sin^2 \theta P_{\theta\varphi}'')}{d\theta} \quad (14)$$

$$\frac{d}{dr_1} (v r_1^3 \sin \theta) + \frac{d}{d\theta} (v r_1 \sin \theta) = 0 \quad (15)$$

El tensor de esfuerzos queda expresado como:

$$P_{ik}' = \frac{\gamma \rho_1^2}{\alpha^2} \begin{bmatrix} P_{rr}'' & P_{r\theta}'' & \left(\frac{\rho_1 a^2}{\gamma}\right) P_{r\varphi}''' \\ P_{r\theta}'' & P_{\theta\theta}'' & \left(\frac{\rho_1 a^2}{\gamma}\right) P_{\theta\varphi}''' \\ \left(\frac{\rho_1 a^2}{\gamma}\right) P_{r\varphi}''' & \left(\frac{\rho_1 a^2}{\gamma}\right) P_{\theta\varphi}''' & P_{\varphi\varphi}'' \end{bmatrix} \quad (16)$$

Las condiciones en la frontera, ecuaciones (6), se transforman en:

- 1.- $u = v = 0, \quad \omega = \sin \theta$ cuando $r_1 = 1$
- 2.- $u = v = w = 0$ cuando $r_1 = \infty$

Ahora, para resolver el caso Newtoniano, vamos a considerar que la esfera está girando a una velocidad angular pequeña, de una magnitud tal que los términos de inercia de las ecuaciones de movimiento los podemos despreciar. También se considera que la componente de velocidad en la coordenada φ es la que existe, debido a la simetría del problema. En esta forma, las ecuaciones de movimiento se reducen a:

$$\nabla \cdot \underline{P} = 0 \quad (17)$$

o sea que:

$$\frac{1}{r_1^3} \frac{d(r_1^3 P_{r\varphi}''')}{dr_1} = 0 \quad (18)$$

Integrando:

$$P_{r\varphi}''' = \frac{c}{r_1^3} \quad (19)$$

donde C es una constante de integración.

En un líquido Newtoniano, la expresión del esfuerzo cortante en coordenadas esféricas es:

$$Pr_{\varphi} = -\mu \left[r \frac{d}{dr} \left(\frac{w}{r} \right) \right] \quad (20)$$

donde tomamos únicamente el término que contiene a W, y donde μ es la viscosidad Newtoniana.

Cuando se adimensionaliza esta ecuación, haciendo uso de las ecuaciones (11), tenemos:

$$Pr_{\varphi}'' = -\mu \left[n \frac{d}{dn} \left(\frac{\Omega \omega}{n} \right) \right] \quad (21)$$

Sustituyendo (19) en (21) :

$$\frac{C}{r^3} = -\mu n \frac{d}{dn} \left(\frac{\Omega \omega}{n} \right) \quad (22)$$

Integrando:

$$\omega = \frac{C}{\mu n^2 \Omega} \quad (23)$$

Aplicando las condiciones en la frontera:

$$\frac{C}{\mu} = \text{sen } \theta \Omega \quad (24)$$

Sustituyendo (24) en (23):

$$\omega = \frac{\text{sen } \theta}{n^2} \quad (25)$$

Sustituyendo (25) en (21) y efectuando las operaciones, tenemos la expresión del esfuerzo:

$$Pr_{\varphi}'' \Big|_{r=1} = 3\mu \Omega \text{sen } \theta \quad (26)$$

para conocer la expresión del torque, utilizamos:

$$C = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} [Pr_{\varphi}'']_{r=1} (a \text{sen } \theta)^2 \text{sen } \theta \, d\theta \, d\varphi \quad (27)$$

donde la diferencial de área en coordenadas esféricas es:

$$dS = a^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \quad (28)$$

Realizando la integración:

$$C = 8\pi \mu a^3 \Omega \quad (29)$$

Para investigar los efectos viscoelásticos, se requieren las soluciones de ecuaciones para valores más grandes de L . Para facilitar esto, suponemos que los componentes de la velocidad y la presión se pueden expandir en series de potencias ascendentes de L :

$$\begin{aligned} U &= \frac{L}{a} [L u_1 + L^2 u_2 + \dots] \\ V &= \frac{L}{a} [L v_1 + L^2 v_2 + \dots] \end{aligned} \quad (30)$$

$$W = \Omega a \left[\frac{\sin \theta}{r^2} + L w_1 + L^2 w_2 + \dots \right]$$

$$p - \rho g r \cos \theta = \frac{\rho L^2}{a^2} [L P_1^* + L^2 P_2^* + \dots]$$

Se propone una solución aproximada suponiendo que los términos significativos de las series (30) lo son hasta el primer orden en L .

En el desarrollo siguiente, se determinarán los componentes del tensor de esfuerzos en términos correspondientes a las distribuciones de velocidades. Para esto, es necesario establecer primero las funciones de desplazamiento X^i para calcular la relación de ese sistema de coordenadas al otro fijo X^i . Luego se calculan los componentes contravariantes del tensor de rapidez de deformación para obtener por medio de la ecuación (2) los componentes del tensor de esfuerzos. Obtenidos éstos, se sustituyen en las ecuaciones de movimiento y continuidad, y se expresan u_1 y v_1 en términos de la función de corriente ψ . Luego se obtienen las soluciones que satisfacen las condiciones en la frontera en el infinito para u_1, v_1 y ψ . Estas soluciones se usarán para determinar $P_{ij}'|_{r=1}$ en el cálculo del torque en el líquido viscoelástico.

Las funciones de desplazamiento x'^k son:

$$\begin{aligned} r' &= r + R(r, \theta, t, t') \\ \theta' &= \theta + \Theta(r, \theta, t, t') \\ \varphi' &= \varphi + \Phi(r, \theta, t, t') \end{aligned} \quad (31)$$

donde $[R]_{t'=t} = [\Theta]_{t'=t} = [\Phi]_{t'=t} = 0$

Los componentes de la velocidad y las funciones de desplazamiento están relacionadas por las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial x'^i}{\partial t} = 0 = \frac{\partial x^i}{\partial t} + v^i \frac{\partial x^i}{\partial x^i} \quad (32)$$

Sustituyendo (30) y (31) en (32) y resolviendo las ecuaciones para R, Θ y Φ encontramos a partir de la ecuación (31) los valores de r', θ' y φ' . Con estos valores, relacionamos los dos sistemas de coordenadas por:

$$\frac{dx'^k}{dx'^m} \quad y \quad \frac{dx^k}{dx^m} \quad (33)$$

Ahora podemos relacionar y determinar los componentes contravariantes del tensor rapidez de deformación $e^{ikur}(r', \theta', t')$ que aparecen en la ecuación de estado (2), o sea, los componentes del tensor rapidez de deformación al tiempo t' para un elemento que está instantáneamente en el punto (r, θ, φ) al tiempo t . Esto puede ser obtenido expresando los componentes del tensor rapidez de deformación para el elemento en (r, θ, φ) al tiempo t , reemplazando r, θ, φ, t en estos componentes por los valores ya encontrados de $r', \theta', \varphi', t'$.

Podemos ya evaluar los componentes del tensor P^{ik} , ecuación (2), que sustituyéndolos en las ecuaciones de movimiento (12), (13), (14) y (15) y de continuidad, resulta:

$$\begin{aligned} \frac{18m \sin^2 \theta}{r^7} - \frac{\sin^2 \theta}{r^5} &= \frac{-dA^*}{dr} + \left[\frac{dU_1}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dU_1}{dr} + \frac{\cos^2 \theta}{r^2} \frac{dU_1}{d\theta} + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{r^2} \frac{d^2 U_1}{d\theta^2} - \frac{2U_1}{r^2} - \frac{2v_1 \cos \theta}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{dU_1}{d\theta} \right] \end{aligned} \quad (34)$$

$$\frac{18m \cos \theta \sin \theta}{r^2} - \frac{\cos \theta \sin \theta}{r^5} = \frac{-\mathcal{P}^*}{r} + \left[\frac{\partial^2 v_i}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial v_i}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r^2} \frac{\partial^2 v_i}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_i}{\partial \theta^2} - \frac{v_i}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_i}{\partial \theta} \right] \quad (35)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (u_i r^2 \sin \theta) + \frac{\partial}{\partial \theta} (v_i r_i \sin \theta) = 0 \quad (36)$$

donde
$$m = \frac{1}{8a^2} \int_0^{\infty} \delta V(\xi) d\xi.$$

Estas ecuaciones se pueden poner en función de ψ sabiendo que:

$$u_i = \frac{-1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad v_i = \frac{1}{r_i \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r_i} \quad (37)$$

y cuyas soluciones son:

$$\psi = \frac{(r_i - 1)^2}{8r_i^3} \left[(1 - 4m)r_i - 8m \right] \sin^2 \theta \cos \theta \quad (38)$$

$$u_r = \frac{(r_i - 1)^2}{8r_i^5} \left[(1 - 4m)r_i - 8m \right] (3 \sin^2 \theta - 2) \quad (39)$$

$$v_\theta = \frac{(r_i - 1)}{4r_i^5} (r_i - 12m) \sin \theta \cos \theta \quad (40)$$

Con estas ecuaciones obtenemos expresiones para P_{r_i}'' y P_{θ}'' , que se sustituyen en la ecuación (14) para obtener el valor de u_i , y encontrar la expresión de P_{r_i}' en función únicamente de m, θ, Ω y \mathcal{L} .

$$\left[P_{r_i}' \right]_{r_i=1} = 3\eta_0 \Omega \sin \theta + \eta_0 \Omega \mathcal{L} \left[- \left(\frac{1}{400} + \frac{3}{140} m - \frac{2}{5} m^2 \right) (\sin \theta) - \left(\frac{45}{44} m^2 + \frac{55}{224} \right) \left(\sin^3 \theta - \frac{4}{5} \sin \theta \right) \right] \quad (41)$$

Sustituyendo (41) en (27) y evaluando la integral, nos queda la expresión del torque:

$$C = 8\pi\eta_0 \Omega a^3 \left[1 + L \left(\frac{1}{1200} + \frac{m'}{140} - \frac{2m'^2}{15} \right) \right] \quad (42)$$

El valor de m' lo podemos obtener graficando $C/8\pi\eta_0 a^3 \Omega$ contra L . La pendiente va a ser $8\pi\eta_0 \Omega a^3 \left(\frac{1}{1200} + \frac{m'}{140} - \frac{2m'^2}{15} \right)$, de donde podemos despejar m' .

Cuando η (viscosidad aparente), la expandemos en series de potencias de δ :

$$\eta(\delta) = \eta_0 - \eta_2 \delta^2 + \eta_4 \delta^4 - \dots \quad (43)$$

entonces el torque toma la expresión:

$$C = 8\pi\eta_0 \Omega a^3 \left[1 + L \left(\frac{1}{1200} + \frac{m'}{140} - \frac{2m'^2}{15} - \frac{12V}{5} \right) \right] \quad (44)$$

donde:

$$V = \frac{\eta_0 \eta_2}{\rho^2 a^4} \quad (45)$$

Desarrollando (44):

$$\frac{C}{8\pi\Omega a^3} = \eta_0 + \frac{\rho^2 \Omega^2 a^4}{\eta_0} \left(\frac{1}{1200} + \frac{m'}{140} - \frac{2m'^2}{15} - \frac{12}{5} \frac{\eta_0 \eta_2}{\rho^2 a^4} \right)$$

Una gráfica de $\frac{C}{8\pi\Omega a^3}$ contra Ω^2 nos da como ordenada al origen η_0 , la cual queda determinada. Habiendo evaluado η_0 , una gráfica de $C/8\pi\eta_0 \Omega a^3$ contra L la usaremos para determinar su pendiente, y así determinar η_2 , si m' es conocida por la observación de las líneas de corriente.

Para la observación de estas líneas, se necesitan construir las proyecciones de las líneas de corriente en cualquier plano que contenga al eje de rotación. El movimiento del líquido, primer orden en L , es obtenido superponiendo la velocidad de rotación sobre éstas proyecciones. La proyección de una línea de corriente está representada por:

$$\psi = \text{constante.}$$

$$\frac{(\eta-1)^2}{\eta^3} \left[(1-4m)\eta - 8m \right] \sin^2 \theta \cos \theta = \text{constante.} \quad (46)$$

Diferentes formas de proyección son obtenidas para valores de m en los siguientes rangos:

Caso 1. $0 \leq m \leq 1/2$

En este caso $0 \leq \frac{8m}{1-4m} < 1$ tal que ψ cambia signo en cada cuadrante para valores de η menores o iguales a 1. Por esto, ψ tiene el mismo signo en todas las partes del líquido dado un cuadrante. El patrón de flujo es similar al de sustancias puramente viscosas ($m=0$); el líquido entra por los polos y sale por el ecuador.

Caso 2. $1/2 < m < 3/4$

En este caso, $\infty > \frac{8m}{1-4m} > 1$ tal que ψ cambia de signo cada cuadrante para un valor finito de η dado por: $\eta^* = \frac{8m}{1-4m}$. Dentro de la esfera $\eta < \eta^*$, el líquido entra por el ecuador y sale por los polos. Fuera de esta esfera sucede lo contrario, como en el caso 1.

En los nodos del flujo secundario (dentro de la esfera $\eta = \eta^*$) de finidos por $r = R \sin \alpha$, $\theta = \sin^{-1} \left[\left(\frac{2}{3} \right)^{1/2} \right]$, $u_1 = v_1 = 0$, las partículas de líquido se mueven en círculos sobre su eje de rotación.

En la esfera $\eta = \eta^*$, u_1 se anula, pero v_1 no. Esto significa que las partículas de fluido que inicialmente ^{estaban} adentro o afuera de esta esfera permanecerán así durante el movimiento.

Caso 3. $m \geq 3/4$

En este caso, ψ no cambia signo en el líquido dado un cuadrante, el signo de ψ es opuesto al del caso 1. El líquido entra por el ecuador y sale por los polos. Como en el caso 2, u_1 y v_1 se anulan en los puntos $r = R \sin \alpha$ y $\theta = \sin^{-1} \left[\left(\frac{2}{3} \right)^{1/2} \right]$.

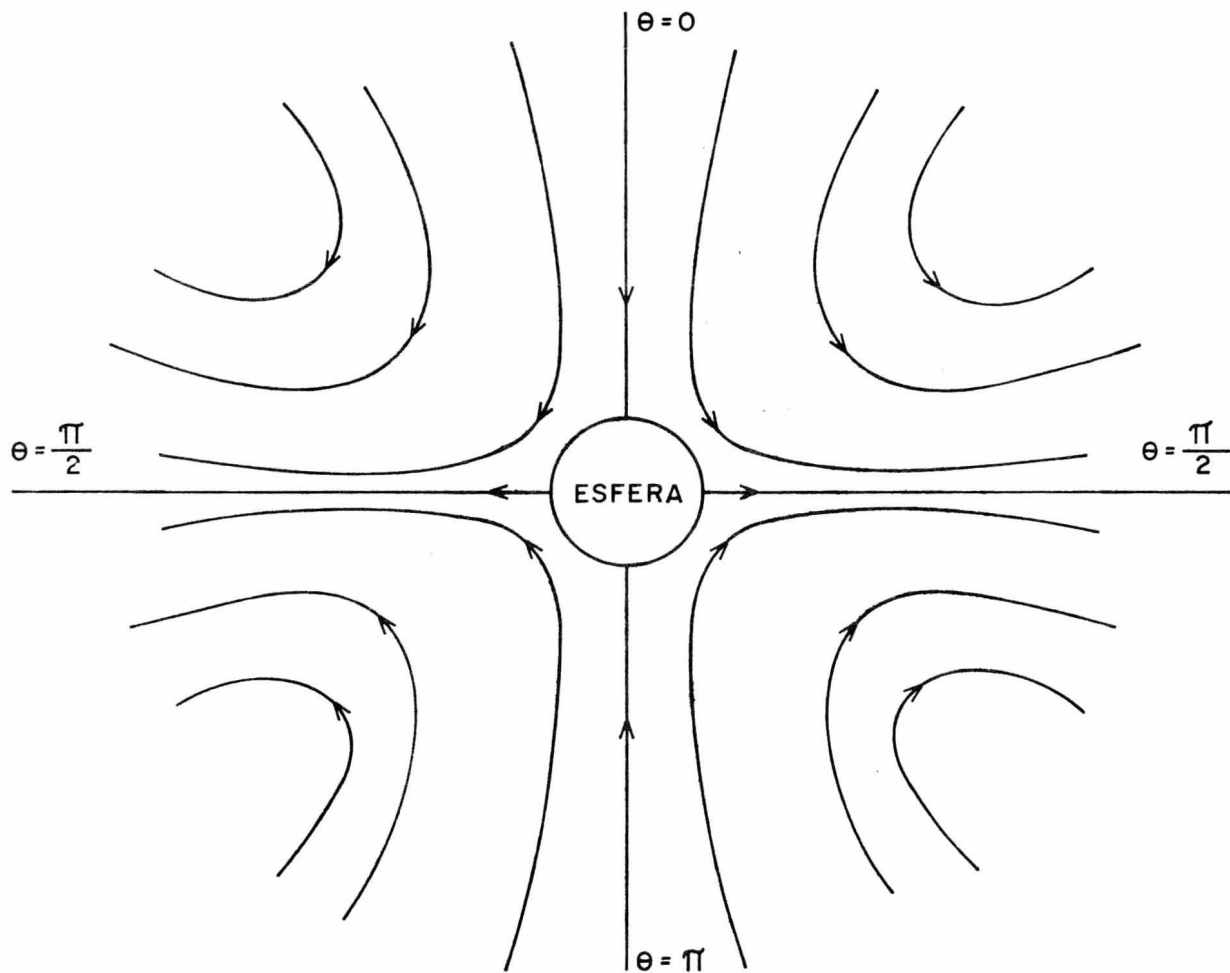
DIAGRAMAS

Diagrama 1.- Proyecciones de las líneas de corriente para $m'=0$.
(Caso Newtoniano).

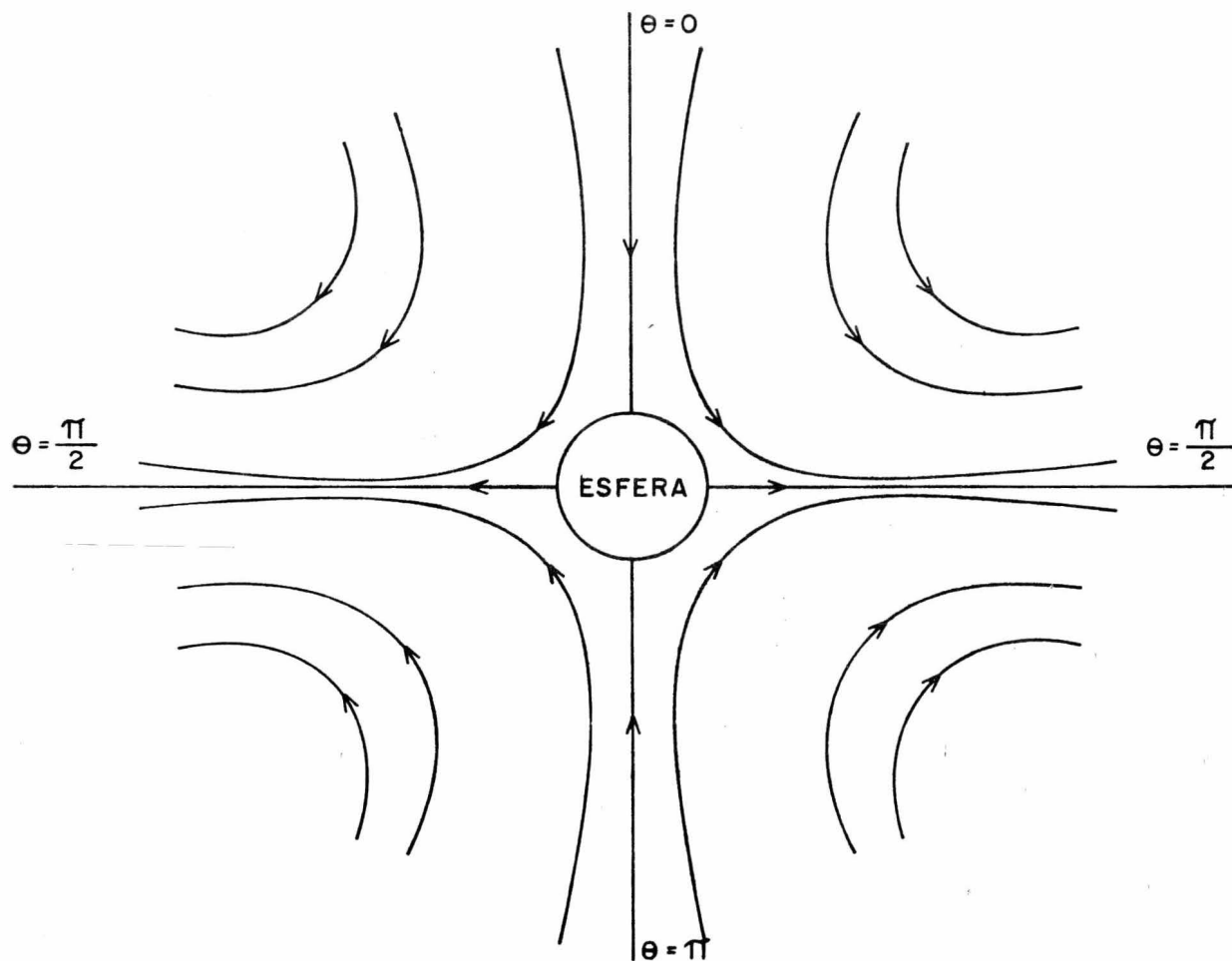
Diagrama 2.- Proyecciones de las líneas de corriente para $m'=1/12$.

Diagrama 3.- Proyecciones de las líneas de corriente para $m'=1/6$.

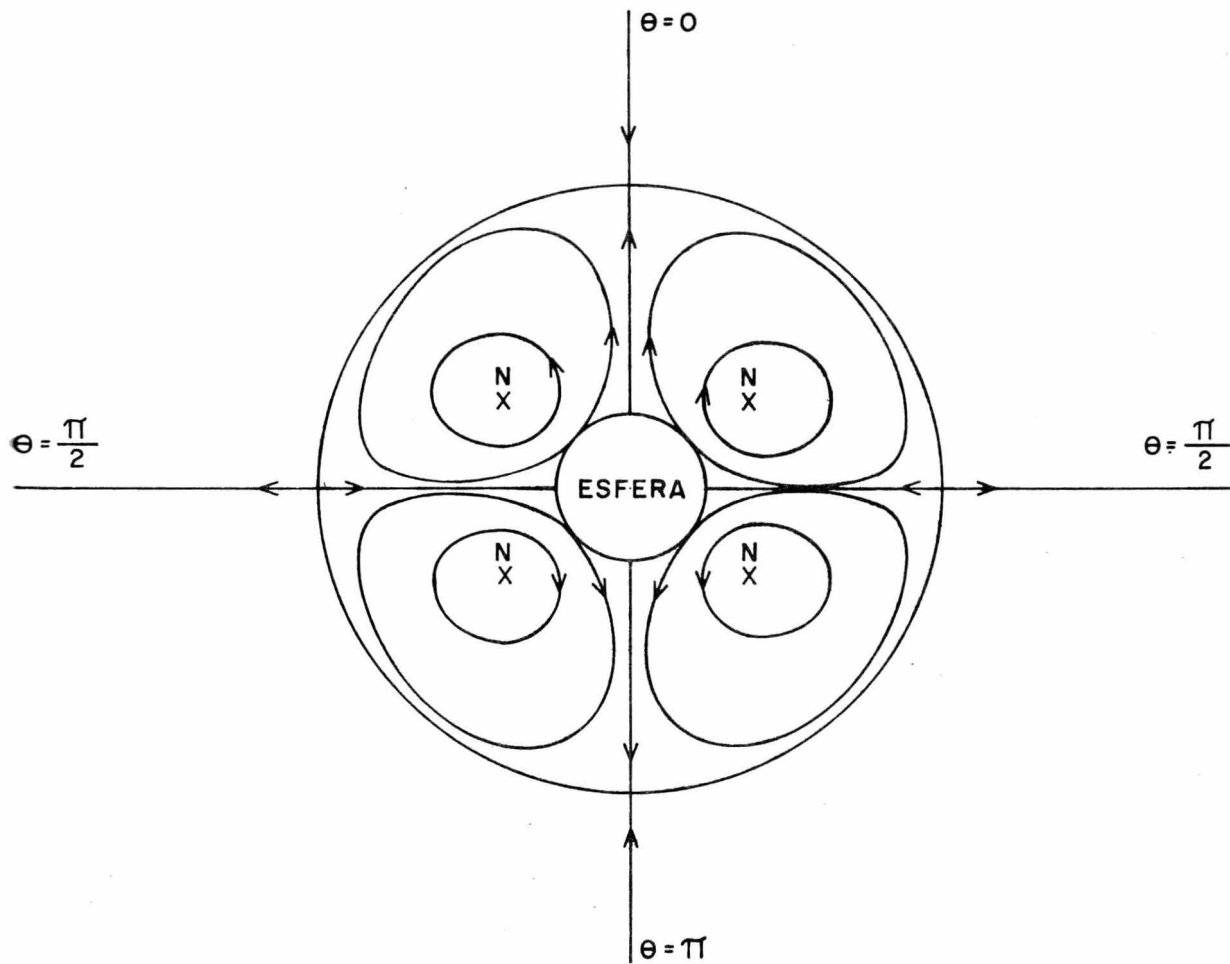
Diagrama 4.- Proyecciones de las líneas de corriente para $m'=1/4$.



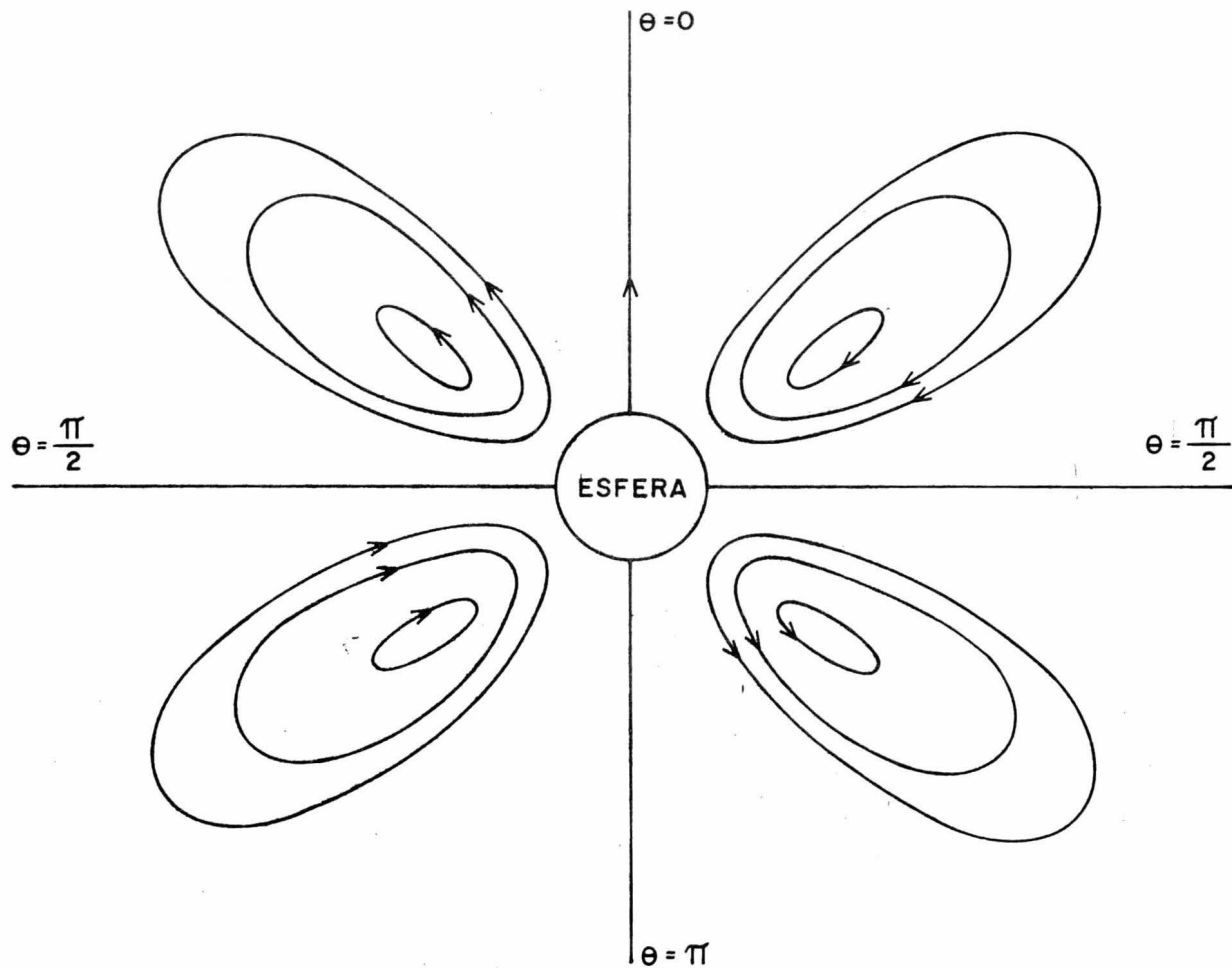
PROYECCIONES DE LAS TRAYECTORIAS DE LAS PARTICULAS EN CUALQUIER PLANO QUE CONTIENE AL EJE DE ROTACION CUANDO $m=0$



PROYECCIONES DE LAS TRAYECTORIAS DE LAS PARTICULAS EN CUALQUIER PLANO QUE CONTIENE AL EJE DE ROTACION CUANDO $m = \frac{1}{12}$



PROYECCIONES DE LAS TRAYECTORIAS DE LAS PARTICULAS EN CUALQUIER PLANO QUE CONTIENE AL EJE DE ROTACION CUANDO $m = \frac{1}{6}$



PROYECCIONES DE LAS TRAYECTORIAS DE LAS PARTICULAS EN CUALQUIER PLANO QUE CONTIENE AL EJE DE ROTACION CUANDO $m = \frac{1}{4}$

CAPITULO 5

EXPERIMENTO Y RESULTADOS

EXPERIMENTO

OBJETIVOS.

El objetivo de la parte experimental de este trabajo es el estudio y análisis de las curvas de viscosidad y torque en la esfera y en diversas geometrías, determinando la viscosidad a cero rapidez de deformación de soluciones acuosas viscoelásticas y además, por medio de la observación del patrón de flujo de una esfera en un medio viscoelástico, la determinación de la relación de esfuerzos normales $2N_2 + N_1$, donde N_1 y N_2 son la primera y segunda diferencias de esfuerzos normales, respectivamente.

Descripción y operación del equipo experimental.

Para la elaboración de las curvas de viscosidad contra rapidez de deformación, se utilizó un viscosímetro Brookfield Synchro-lectric modelo LVT con las siguientes características:

- a).- 110 volts y 60 ciclos.
- b).- 8 velocidades, expresadas en revoluciones por minuto (rpm) con los valores: 0.3, 0.6, 1.5, 3, 6, 12, 30 y 60.
- c).- 4 geometrías cilíndricas, cuyo rango de aplicación depende de la viscosidad del medio y de la velocidad angular que se emplee.
- d).- Una escala circular de 0 a 100, con subdivisiones de 0.5.
- e).- Un protector para el rotor una vez que se ha instalado en el viscosímetro, y que ayuda a no tener flujos anormales cerca del mismo. Se puede usar sin problema, ya que los factores de escala que se acompañan con cada modelo y para cada rotor y velocidad, están ajustados para poder usarse con él.
- f).- Una palanca de embrague que permite fijar la lectura sobre la escala cuando las velocidades que se usan son altas y no es posible efectuar la lectura a simple vista.
- g).- Un dispositivo para nivelar el aparato sobre la superficie donde se coloca.
- h).- Una perilla que le permite desplazarse verticalmente para poder deslazar la altura y ajustarla a la que el rotor debe colocarse.
- i).- Soporte para los rotores o geometrías cilíndricas.

Operación del aparato.

Una vez que se ha preparado la solución del material que se maneja, se pone éste en un vaso de precipitados de 600 c.c. de capacidad y se coloca exactamente debajo del eje que mueve al rotor, centrándolo lo más posible para no provocar errores en las lecturas (aún con el protector, podrían tenerse corrientes anormales si se pone el rotor demasiado junto a la pared del recipiente, ya que existen efectos de pared). Posteriormente se coloca el protector. Se elige el rotor a usar y se ajusta al eje que lo mueve girándolo a favor de las manecillas del reloj. Hay que tener mucho cuidado en el momento de colocarlo, ya que se podrían tener burbujas de aire, lo que afectaría enormemente las determinaciones; por esto, es mejor primero empapar al rotor con la solución y más tarde ajustarlo al eje del motor. Una vez colocado, gracias al dispositivo mencionado en h, se sube o se baja hasta que el nivel del líquido quede en la muesca que para tal efecto lleva cada rotor. Después de esta forma, estamos en la posibilidad de empezar a tomar los datos. Como generalmente se utilizan todas las velocidades, se empieza por poner la más baja e ir aumentando la velocidad paulatinamente después de cada medición. Ya elegida la velocidad, se enciende el aparato, con lo cual, el indicador de la escala empieza a desolazarse hasta que llega a un valor fijo y ya no se mueve más (solamente si el fluido es independiente del tiempo ó, siendo dependiente del tiempo, llega un momento que alcanza su viscosidad límite y se mantiene constante) y en este momento, se aplica el embrague apagando el aparato y observando la lectura obtenida. Con este valor de la escala se busca en una tabla, que el fabricante proporciona, el factor de escala correspondiente al rotor y velocidad usados. Este factor de escala se multiplica por el valor leído, obteniéndose el valor de la viscosidad en centipoises (abreviado como cp). Una vez hecha esta lectura, se deja que el indicador llegue al cero de la escala, para poner en operación nuevamente el aparato, escogiendo otra velocidad. Por lo tanto, a partir de aquí, el proceso es repetitivo para otras velocidades. Al cambiar el rotor, es necesario lavar el usado con agua destilada, para mantenerlo libre de impurezas y perfectamente limpio. Al guardarlo, hay que tener cuidado de no doblar el eje del rotor.

Al momento de quitar o poner el rotor, es conveniente levantar el eje del motor un poco y no moverlo, con el fin de no dañar el resorte que mide la deflexión del indicador.

La preparación de las soluciones se lleva a cabo agregando pequeñas porciones de polvo, en el caso de las poli-acrilamidas, a una cantidad determinada de agua en movimiento por medio de un agitador de hélice. La agitación debe de ser lenta y con largos períodos de reposo, ya que si se agregan cantidades más grandes de polvo, se formarán grumos que tardan mucho tiempo en disolverse.

Cuando se tiene la solución perfectamente homogénea y transparente, se procede a elaborar la curva de viscosidad contra rapidez de deformación, utilizando el viscosímetro Brookfield referido.

Cuando se hace la determinación de la curva de viscosidad, es necesario tener en cuenta dos factores importantes:

- a).- Tomar la temperatura a la que la determinación fue hecha.
- b).- Especificar las fechas de la preparación de la solución y la elaboración de la mencionada curva.

El primer factor es importante ya que la viscosidad de los líquidos es muy sensible a los cambios de temperatura, y un cambio en la temperatura nos afectaría las mediciones de viscosidad, de torque y el patrón de flujo de la esfera se vería también afectado. Las lecturas de viscosidad fueron hechas a la temperatura de 20 grados centígrados.

El segundo factor es importante, ya que las soluciones de poli-acrilamida, si se dejan preparadas por períodos de tiempo largos, tienden a envejecer, y cambian paulatinamente sus propiedades.

Además del viscosímetro, se requirieron dos cajas de lucita transparente, la primera siendo cúbica de 18 cm por lado y la segunda también cúbica de 30 cm de lado, equipadas con un baño a temperatura constante de agua alrededor de la mencionada caja. El objetivo de estas cajas es el de colocar la solución transparente en ellas, meter una de las esferas acoplada con un eje al viscosímetro y después de haber aplicado el colorante, se pone en movimiento y se fotografía el patrón de flujo. Para esto, es necesario colocar una lámpara que alumbré la parte de atrás de la caja en el momento de la fotografía y la cámara delante de la caja a una distancia determinada. El objeto del baño a temperatura constante, es

absorber los cambios de temperatura del medio ambiente, sobre todo de la lámpara, ya que un pequeño aumento en la temperatura de una parte del baño trae consigo un cambio de densidad en la solución y el colorante se distribuye de manera irregular, destruyéndose el patrón de flujo.

Para las mediciones del torque de la esfera y la formación del patrón de flujo fue necesario acoplar a las esferas un eje de acero inoxidable con un machuelo en su parte superior que tenía una rosca para atornillarse directamente al eje del motor del viscosímetro. Se emplearon 4 esferas, con los diámetros siguientes:

Esfera #2, diámetro = $5/4$ ".

Esfera #3, diámetro = $3/4$ ".

Esfera #4, diámetro = $1/2$ ".

Esfera #5, diámetro = $1/4$ ".

La esfera #1 no se empleó, ya que tenía un diámetro muy grande y formaba un patrón muy grande en comparación al tamaño de baño que se tenía. Las esferas eran de teflón (con una excentricidad bastante aceptable), excepto la esfera #5, que era de acero.

Mediciones del torque de la esfera.

Como se vio en el capítulo pasado, el torque para una esfera que gira sobre su eje vertical en un líquido Newtoniano, está dado por la relación:

$$\tau = 8\pi a^3 \Omega \mu$$

Si graficamos $C/8\pi a^3$ contra la rapidez de deformación en ciclos por segundo, nos dará una recta con pendiente igual a la viscosidad del líquido. En el caso de que hagamos lo mismo para un líquido visco-elástico, se obtendrá una curva con pendiente cada vez menor, a medida que aumenta la rapidez de deformación. Si sobre esta curva trazamos una tangente a la parte inicial de ésta y medimos gráficamente su valor, nos dará el valor máximo de viscosidad de la curva, ya que la velocidad de deformación al aumentar, trae consigo un decremento en la viscosidad. Este valor de la viscosidad lo llamamos η_0 o sea, la viscosidad a cero rapidez de deformación. (Gráficas más adelante).

Las mediciones de torque en la esfera necesitaron de la determinación del factor de cada una de ellas. Para esto, fue necesario usar la solución calibradora dada por el fabricante del viscosímetro y que tiene una viscosidad constante a una determinada temperatura. La del viscosímetro que se usó tenía una viscosidad de 1150 cp. a 25 grados centígrados. Hemos dicho ya que las lecturas de viscosidad se determinan leyendo el valor indirecto del torque en la escala del viscosímetro y multiplicando este valor por un factor que depende de la geometría empleada y de la velocidad angular a la cual se determinó la lectura. Por lo que para determinar los factores de las esferas se leyó el valor en la escala del viscosímetro y por medio del valor conocido de la viscosidad de la solución calibradora, se calcularon los factores de cada esfera a cada velocidad angular, donde éstos varían de manera lineal con la velocidad angular por la fórmula:

$$F = \frac{\text{Viscosidad}}{\text{lectura}} \quad (1)$$

Los resultados de la calibración fueron los siguientes:

Esfera #3.

RPM	LECTURA	FACTOR
0.3	5.7	2.018
0.6	11.4	1.009
1.5	28.5	0.404
3.0	57.1	0.202
6.0		0.101
12		0.051
30		0.02
60		0.01

Para los valores de más de 3 RPM se extrapoló la curva de RPM contra factor.

Esfera #4.

RPM	LECTURA	FACTOR
0.3		9.5

RPM	LECTURA	FACTOR
0.6		4.75
1.5	6.025	1.91
3.0	12.05	0.95
6.0	24.10	0.477
12.0	48.20	0.239
30.0		0.0954
50.0		0.0477

Esfera #5.

RPM	LECTURA	FACTOR
0.3		30.3
0.6		15.15
1.5	1.9	6.05
3.0	3.8	3.03
6.0	7.6	1.51
12.0	15.2	0.757
30.0	58.4	0.302
60.0	76.5	0.151

Estos factores nos dan una lectura de viscosidad en poises.

Para la formación del patrón de flujo, se empleó como colorante anilina negra. Se utilizaba para su aplicación una jeringa de 20 c.c. a la cual se le conectaba un tubo doblado en ángulo de 90 grados en cuya punta se ponía una aguja. Cuando la esfera comenzaba a girar, se comenzaba a aplicar el colorante en el plano ecuatorial de ésta. La solución de colorante se preparaba agregando una pequeña cantidad de la anilina, que es un polvo grisáceo, a una muestra de la misma solución donde estaba la esfera. La cantidad de colorante aplicado debe ser la suficiente como para que dé lugar a la formación del patrón de flujo secundario. Cuando ya se tiene el patrón de flujo secundario formado, entonces se enfoca la cámara y se enciende la lámpara para tomar las fotografías.

Patrones de flujo.

Con el método de la observación de los patrones de flujo, había ciertas dificultades que dependían de las soluciones empleadas, en cuanto a la formación de dicho patrón. En la solución del 0.5% de Separan AP-30 en agua, cuando se tenían velocidades angulares pequeñas, fue difícil obtener un patrón bien definido en la parte inferior del baño, por lo que las mediciones se hicieron en la parte superior y en la esfera exterior.

Se realizaron varios patrones de flujo en varias soluciones, con esferas diferentes y a diferentes velocidades angulares. Los mejores patrones se obtuvieron en las soluciones más viscosas, con esferas pequeñas y a bajas velocidades angulares.

Se ha mostrado en el capítulo anterior, que para valores de m' que oscilan entre $1/12$ y $1/4$, las líneas de corriente se dividen en dos regiones distintas separadas por una esfera cuyo radio adimensional r_1^* está dado por:

$$r_1^* = \frac{8m'}{1-4m'} \quad (2)$$

Se ha mostrado también que para $m' > 1/12$, existen posiciones nodales dadas por:

$$r_1^{(n)} = 12am' \quad \theta^{(n)} = 54^\circ 44' \quad (3)$$

donde las partículas de líquido se mueven en círculos alrededor de un eje de rotación.

Debido a que m' depende de a , se debe tener algún control sobre la magnitud de m' para un determinado líquido. O sea, que para valores de m' inferiores a $1/12$, las líneas de corriente son similares a las de un líquido Newtoniano.

Como se tuvieron dos baños de dimensiones diferentes, se pudo observar la influencia que ejercía sobre el patrón de flujo la superficie del mismo y las paredes del recipiente. Se ha explorado este efecto teóricamente, y se ha idealizado el problema de una esfera rotando en un líquido viscoelástico contenido en un recipiente esférico de radio ba , y se ha llegado a la conclusión de que una

relación esfera/recipiente de 1/12 es suficiente, o sea, que un baño con dimensiones mayores que 12 veces el radio de la esfera es necesario para garantizar que el patrón de flujo formado no tendrá efectos considerables de pared o superficiales.

Ahora es necesario relacionar los valores de m' obtenidos de la observación de las fotografías obtenidas del patrón de flujo. Para esto, sabemos del capítulo anterior que:

$$m' = \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{\rho a^2} = \frac{\int_0^{\infty} \sigma N(\sigma) d\sigma}{\rho a^2} \quad (4)$$

donde α_2 y α_3 son los coeficientes de un fluido de Rivlin-Ericksen de segundo orden, dado por:

$$\underline{P}' = \alpha_1 \underline{A}_1 + \alpha_2 \underline{A}_2 + \alpha_3 \underline{A}_1^2 \quad (5)$$

ó por:

$$P_{ik} = 2\alpha_1 e_{ik}^{(1)} + 2\alpha_2 e_{ik}^{(2)} + 4\alpha_3 e_{ij}^{(1)} e_{jk}^{(1)} \quad (6)$$

De la teoría de flujos viscométricos se sabe que:

$$\underline{P}' = \eta \underline{A}_1 - \frac{1}{2} \dot{\gamma}_1^2 \underline{A}_2 + (\dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2) \underline{A}_1^2 \quad (7)$$

donde $\dot{\gamma}_1$ y $\dot{\gamma}_2$ son funciones de $2 \dot{\gamma}^2$ y son escalares llamados coeficientes de esfuerzos normales. Así:

$$N_1 = \dot{\gamma}^2 \dot{\gamma}_1(\dot{\gamma}) \quad (8)$$

$$N_2 = \dot{\gamma}^2 \dot{\gamma}_2(\dot{\gamma}) \quad (9)$$

donde N_1 y N_2 son, respectivamente, la primera y segunda diferencia de esfuerzos normales. Ahora, comparando las ecuaciones (6) y (7):

$$\alpha_2 = -\frac{1}{2} \dot{\gamma}_1 \quad (10)$$

$$\alpha_3 = (\dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2) \quad (11)$$

A partir de las ecuaciones (8), (9), (10) y (11) obtenemos:

$$\alpha_2 + \alpha_3 = \frac{N_1 + 2N_2}{2\gamma^2} \quad (12)$$

Sustituyendo (12) en (4):

$$m' = \frac{N_1 + 2N_2}{2\gamma^2 \rho a^2} \quad (13)$$

con la que podemos medir $N_1 + 2N_2$.

Para la preparación del patrón de flujo se utilizaron dos viscosímetros Brookfield, uno de 4 velocidades y otro de 8 ya descrito. El viscosímetro de 4 velocidades era de 50 ciclos, y sus mediciones se alteraron cuando hubo el cambio de frecuencia acaecido en septiembre de 1975. Fue necesario hacer una nueva calibración para medir las nuevas velocidades angulares. La nueva calibración dio como resultado un cambio de 6, 12, 30 y 60 RPM a 7.2, 14.4, 36 y 72 RPM, calibración que se realizó por mediciones de viscosidad en soluciones calibradoras en las cuales se conocía su viscosidad.

SOLUCION 0.6% SEPARAN AP-30 AGUA

LECTURAS DEL VISCOSIMETRO

CILINDRO #1.

RPM.	CICLOS/SEGUNDO	LECTURA	VISCOSIDAD (POISES)
0.3	0.0314	24.4	48.8
0.6	0.0628	41.2	41.2
1.5	0.157	73.0	29.2

LOG CICLOS/SEGUNDO

-1.5

-1.2

-0.804

LOG VISCOSIDAD (POISES)

1.688

1.615

1.465

CILINDRO #2.

RPM.	CICLOS/SEGUNDO	LECTURA	VISCOSIDAD (POISES)
0.3	0.0314	4.9	49.0
0.6	0.0628	8.2	41.0
1.5	0.157	14.4	28.8
3	0.314	21.0	21.0
6	0.628	29.8	14.9
12	1.256	41.0	10.25
30	3.1416	60.5	6.05
60	6.2832	82.2	4.11

LOG CICLOS/SEGUNDO

-1.5

-1.2

-0.804

-0.503

-0.202

0.099

0.497

0.798

LOG VISCOSIDAD (POISES)

1.69

1.61

1.46

1.32

1.17

1.01

0.78

0.614

CILINDRO #3.

RPM.	CICLOS/SEGUNDO	LECTURA	VISCOSIDAD(POISES)
1.5	0.157	3.9	31.2
3	0.314	5.6	22.4
6	0.628	8.0	16.0
12	1.256	11.4	11.4
30	3.1416	17.4	6.96
60	6.2832	24.4	4.88

LOG CICLOS/SEGUNDO

-0.804

-0.503

-0.202

0.099

0.497

0.798

LOG VISCOSIDAD (POISES)

1.5

1.35

1.2

1.057

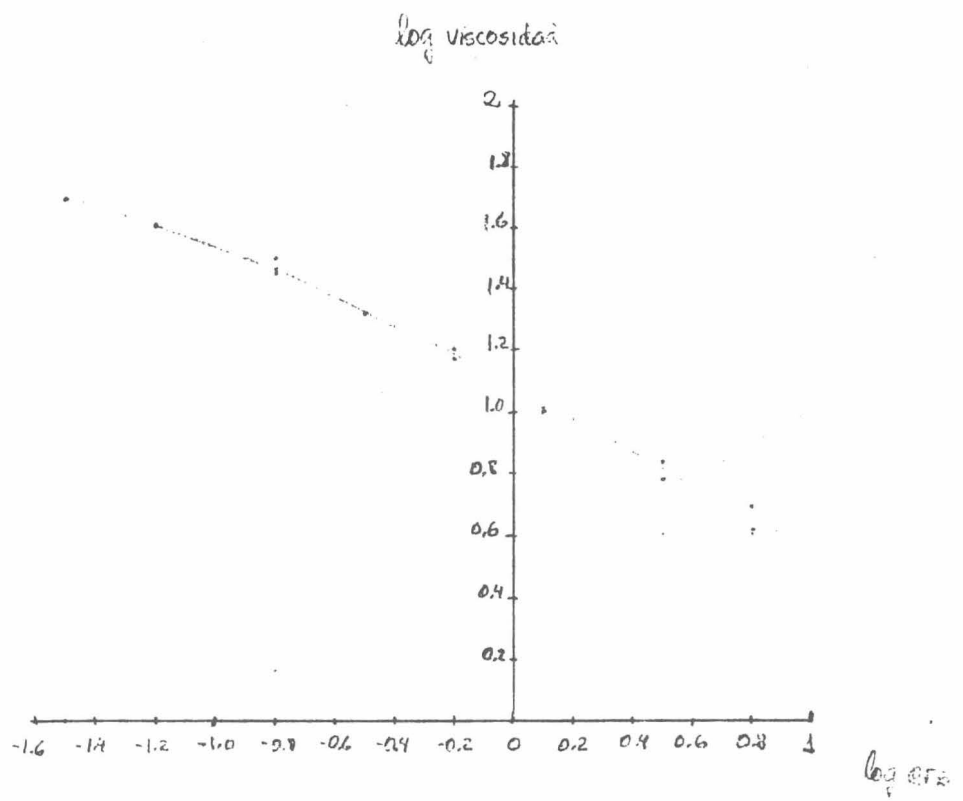
0.84

0.688

ESFERA #4. VALORES DE LA RELACION $C/8\pi a^3$.

CICLOS/SEGUNDO	$C/8\pi a^3$
0.0314	1.54
0.0628	2.58
0.157	4.668
0.314	6.814
0.628	9.7
1.256	13.6
3.1416	20.42
6.2832	28.27

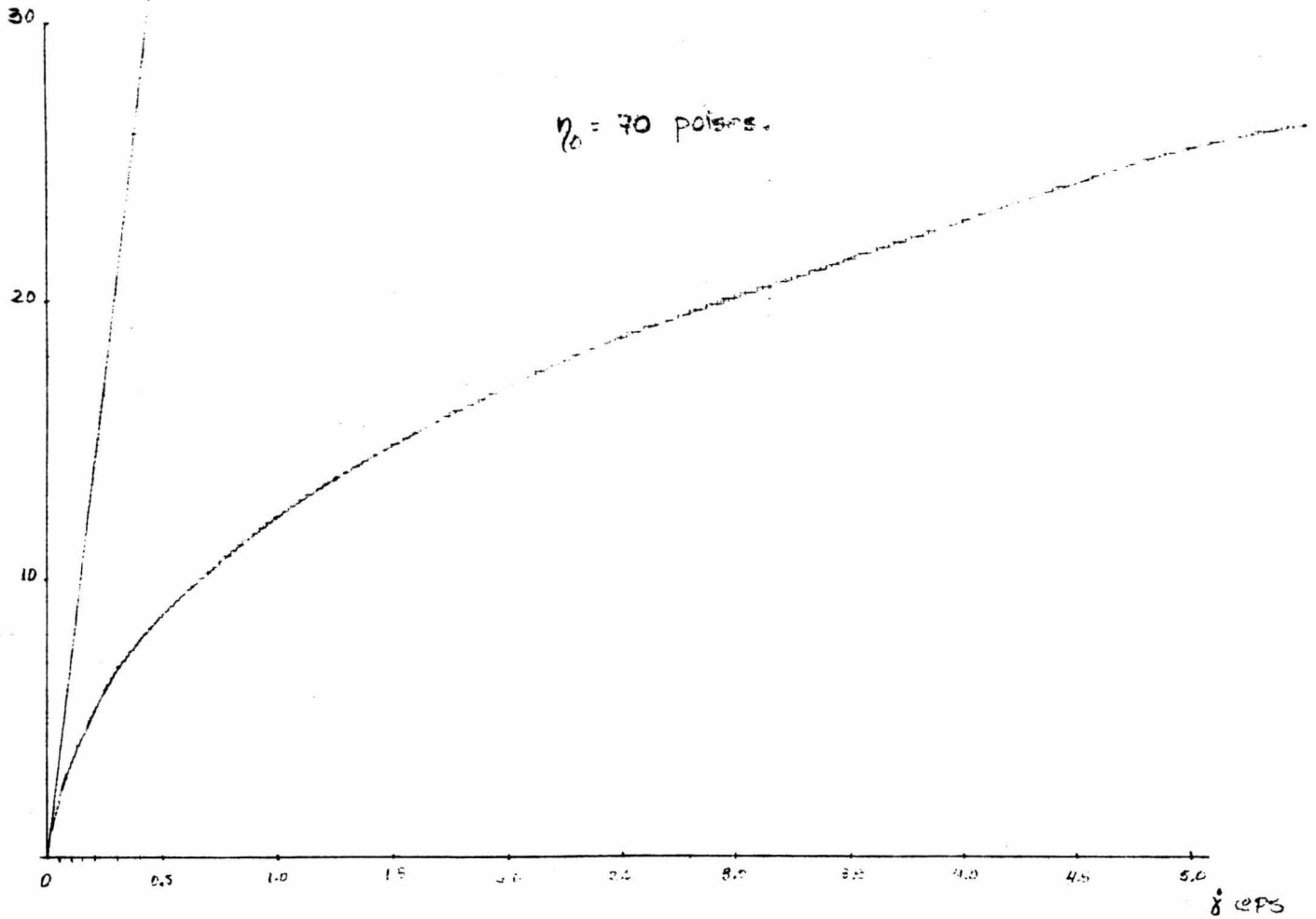
Solución 0.6% Separán AP-30 Agua



$$\frac{Q}{8\pi\eta_0^3} (\text{ dinas/cm}^2)$$

Solucion 0.6% Separan AL 10 Agua

$$\eta_0 = 70 \text{ poises.}$$



RESULTADOS

Esfera #4

Radio = 0.635 cm.

Velocidad angular = 6.2832 rad/seg.

Dimensiones en la fotografía:

Radio de la esfera #4 = 0.5 cm.

Radio de la esfera exterior = 7.3 cm.

Radio del nodo = 2.4 cm.

Dimensiones reales:

$$r_1^* = 9.271 \text{ cm.}$$

$$r_1^{(4)} = 3.048 \text{ cm.}$$

Cálculo de m' a partir de la ecuación 3:

$$m' = 0.4$$

Cálculo de la relación de diferencias de esfuerzos normales:

Ecuación 13:

$$N_1 + 2N_2 = 12.735 \text{ dinas/cm}^2.$$

Observaciones:

Para el cálculo del valor de m' no se usó la ecuación 2, ya que en la fotografía se observó que el patrón de flujo correspondía al del diagrama #4, sin embargo se pudo observar también la esfera exterior. Como el radio de la posición nodal nos dá un valor de m' mayor a 0.25, entonces el patrón no corresponde al del diagrama #3.

Cálculo de N_2 a partir de la gráfica #2:

$$N_2 = -93.4 \text{ dinas/cm}^2.$$

Esfera #5

Radio = 0.3175 cm.

Velocidad angular = 6.2832 rad/seg.

Dimensiones en la fotografía:

Radio de la esfera #5 = 0.25 cm.

Radio de la esfera exterior = 7 cm.

Radio del nodo = 4.2 cm.

Dimensiones reales:

r_1^* = 8.876 cm.

$r_1^{(*)}$ = 5.334 cm.

Cálculo de m' a partir de la ecuación 3:

$m' = 1.4$

Cálculo de la relación de diferencias de esfuerzos normales por medio de la ecuación 13:

$N_1 + 2N_2 = 11.14 \text{ dinas/cm}^2$.

Observaciones:

El valor calculado de m' corresponde al del diagrama #4, por eso se empleó la ecuación 3.

Cálculo de N_2 a partir de la gráfica #2:

$N_2 = -94.2 \text{ dinas/cm}^2$.

Esfera #2.

Radio = 1.5875 cm.

Velocidad angular = 0.6283 rad/seg.

Dimensiones en la fotografía:

Radio de la esfera #2 = 1.6 cm.

Radio del nodo = 4.2 cm.

Dimensiones reales:

$r_1^{(M)} = 4.167$ cm.

Cálculo de m' a partir de la ecuación 3:

$m' = 0.2187$

Cálculo de la relación de diferencias de esfuerzos normales usando la ecuación 13:

$N_1 + 2N_2 = 0.435$ dinas/cm².

Observaciones:

El patrón observado es muy parecido al del diagrama #3, y se observaron claramente las posiciones nodales. La esfera exterior se distorsionó un poco por los efectos de pared, por lo cual no se pudo medir el radio de esta esfera.

Cálculo de N_2 a partir de la gráfica #2:

$N_2 = -22.28$ dinas/cm².

Esfera #4

Radio = 0.635 cm.

Velocidad angular = 0.754 rad/seg.

Dimensiones en la fotografía:

Radio de la esfera #4 = 0.73 cm.

Radio de la esfera exterior = 4.78 cm.

Dimensiones reales:

r_1^* = 4.158 cm.

Cálculo de m' a partir de la ecuación 2:

$m' = 0.1688$

Cálculo de la relación de diferencias de esfuerzos normales por medio de la ecuación 13:

$N_1 + 2N_2 = 0.0774 \text{ dinas/cm}^2$.

Observaciones:

En la fotografía, el radio de la esfera exterior se pudo calcular fácilmente, pero los nodos fueron difíciles de distinguir, por lo que se calculó m' a partir del valor del radio de la esfera exterior, ya que el patrón se asemeja al del diagrama #3.

Cálculo de N_2 a partir de la gráfica #2:

$N_2 = -25.61 \text{ dinas/cm}^2$.

Esfera #4.

Radio = 0.635 cm.

Velocidad angular = 0.314 rad/seg.

Dimensiones en la foto:

Radio de la esfera #4 = 1.4 cm.

Radio de la esfera exterior = 4.25 cm.

Dimensiones reales:

$r_1^* = 1.928$ cm.

Cálculo de m' a partir de la ecuación 2:

$m' = 0.1227$

Cálculo de la relación de diferencias de esfuerzos normales por medio de la ecuación 1):

$N_1 + 2N_2 = 0.00976$ dinas/cm².

Observaciones:

El patrón de flujo correspondía al del diagrama #3, por lo que el valor de m' se calculó a partir de la ecuación 2. En general, para la solución del 0.5%, el valor de m' aumentaba al aumentar la velocidad angular, ya que a velocidades angulares altas el valor de m' revasaba 0.25, que es el valor límite del diagrama #3, y a partir de este valor el cálculo de m' se hace con el radio de la posición nodal y no con el de la esfera exterior.

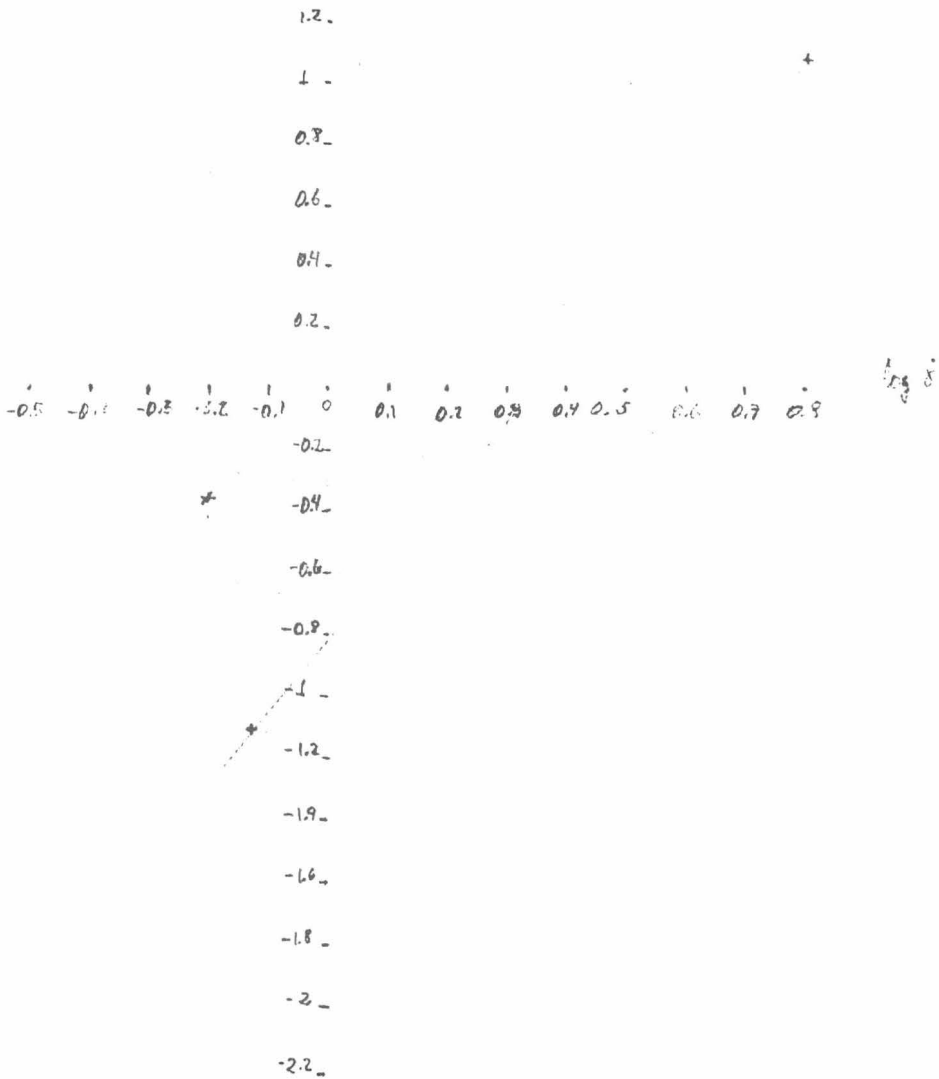
Cálculo de N_2 a partir de la gráfica #2:

$N_2 = -14.42$ dinas/cm².

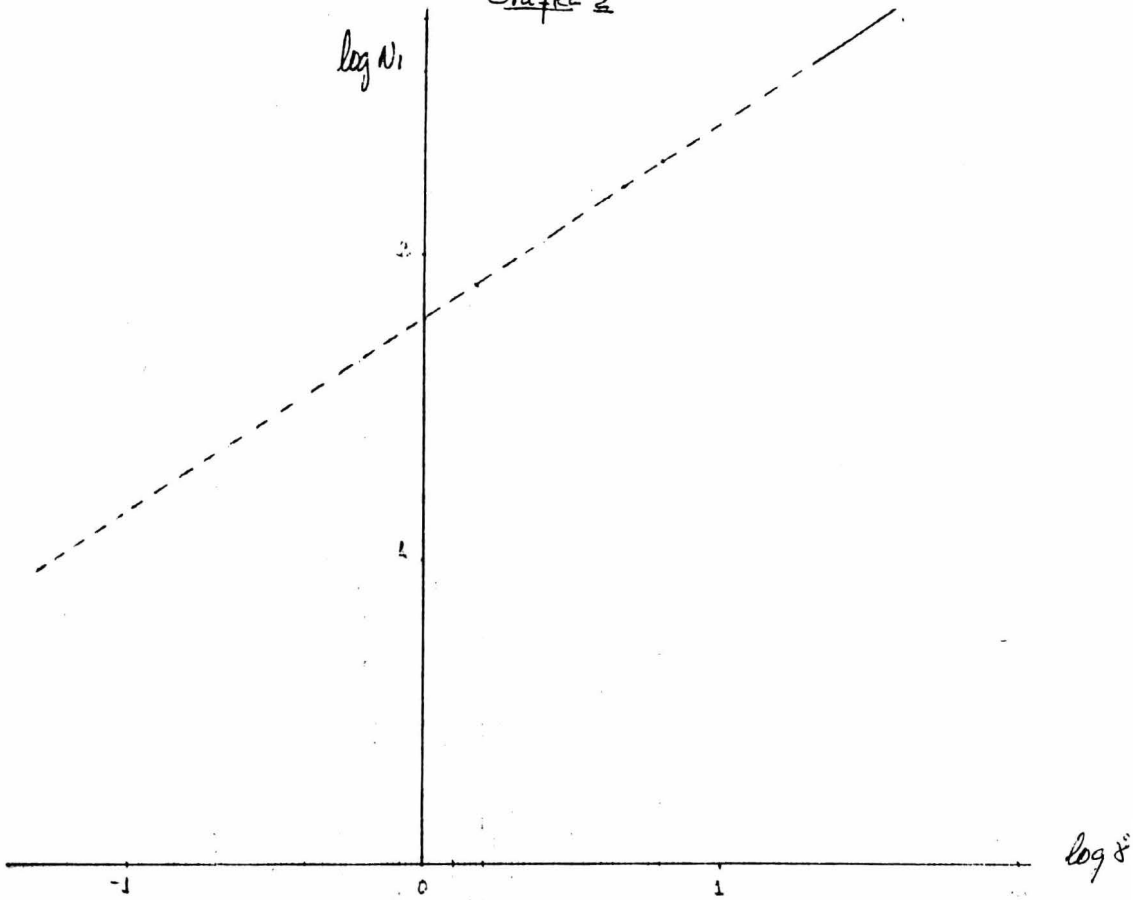
Grafica 1

Sol. acuosa Separán AP-30 0.6%

$\log(2.1z + Ni)$



Grafica 2



Lecturas de regoniómetro de la primera diferencias de esfuerzos normales en función de la rapidez de deformación. La recta punteada es una extrapolación a valores pequeños de rapidez de deformación. Solución acuosa AP-30 0.6%.

SOLUCION 50% GLICERINA + 50% SOL. 1% SEPARAN AP-30 AGUA

LECTURAS DEL VISCOSIMETRO

CILINDRO #2.

RPM	CICLOS/SEGUNDO	LECTURA	VISCOSIDAD(POISES)
0.3	0.0314	49.3	493
0.6	0.0628	62.9	340
1.5	0.157	98.8	198

LOG CICLOS/SEGUNDO

-1.5
-1.2
-0.804

LOG VISCOSIDAD(POISES)

2.693
2.531
2.297

CILINDRO #3.

RPM	CICLOS/SEGUNDO	LECTURA	VISCOSIDAD(POISES)
0.3	0.0314	13.3	532
0.6	0.0628	18.9	378
1.5	0.157	28.3	226.4
3.0	0.314	37.0	148
6.0	0.628	48.3	96.6
12	1.256	63.5	63.5
30	3.1416	95.0	38.0

LOG CICLOS/SEGUNDO

-1.5
-1.2
-0.804
-0.503
-0.202
0.099
0.497

LOG VISCOSIDAD(POISES)

2.726
2.577
2.355
2.17
1.985
1.803
1.58

CILINDRO #4.

RPM	CICLOS/SEGUNDO	LECTURA	VISCOSIDAD(POISES)
0.3	0.0314	2.9	580
0.6	0.0628	4.3	430
1.5	0.157	6.5	260
3.0	0.314	8.3	166
6.0	0.628	12.8	108
12	1.256	14.8	74
30	3.1416	18.5	37
60	6.2832	23.9	23.9

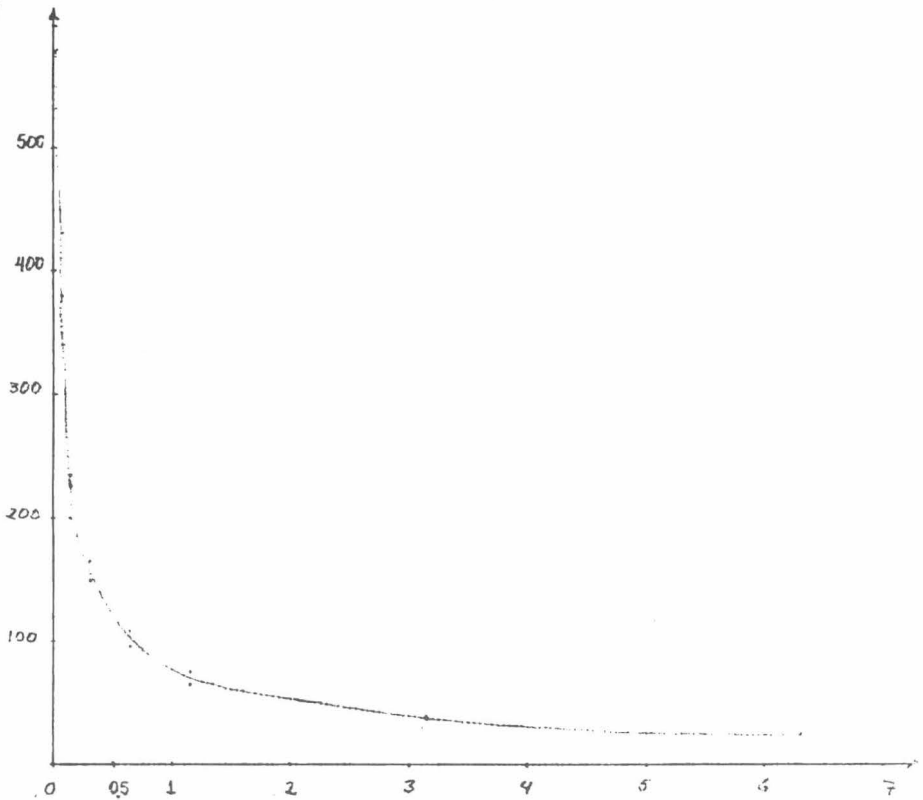
LOG CICLOS/SEGUNDO	LOG VISCOSIDAD(POISES)
-1.5	2.763
-1.2	2.633
-0.804	2.415
-0.503	2.220
-0.202	2.033
0.099	1.869
0.497	1.568
0.798	1.378

ESFERA #4. VALORES DE LA RELACION $C/8\pi a^3$.

CICLOS/SEGUNDO	$C/8\pi a^3$.
0.0314	16.8
0.0628	24.03
0.157	35.82
0.314	49.3
0.628	64.24
1.256	86.35
3.1416	117.81
6.2832	150.17

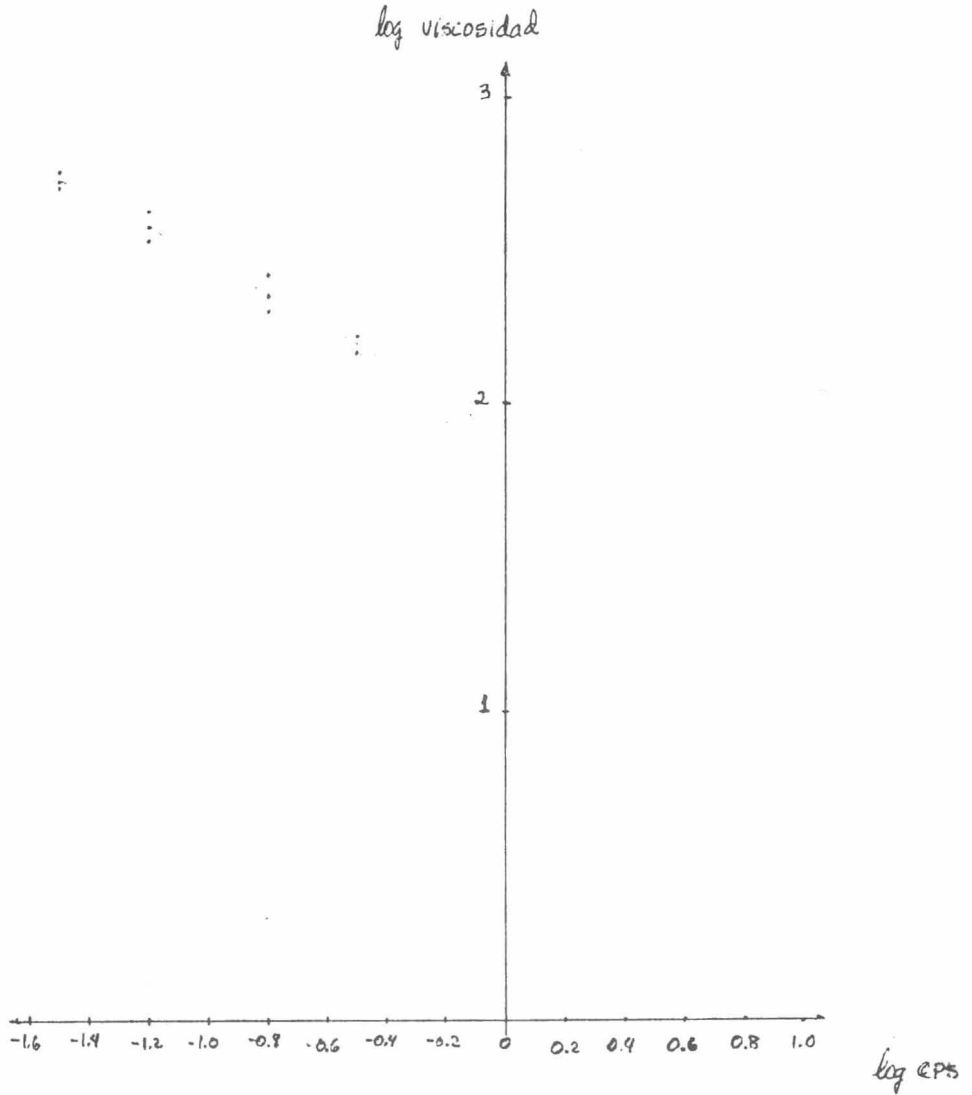
Solución 50% glicerina +
50% sol. 1% Separan AP-30 Agua

Viscosidad
(Poises)



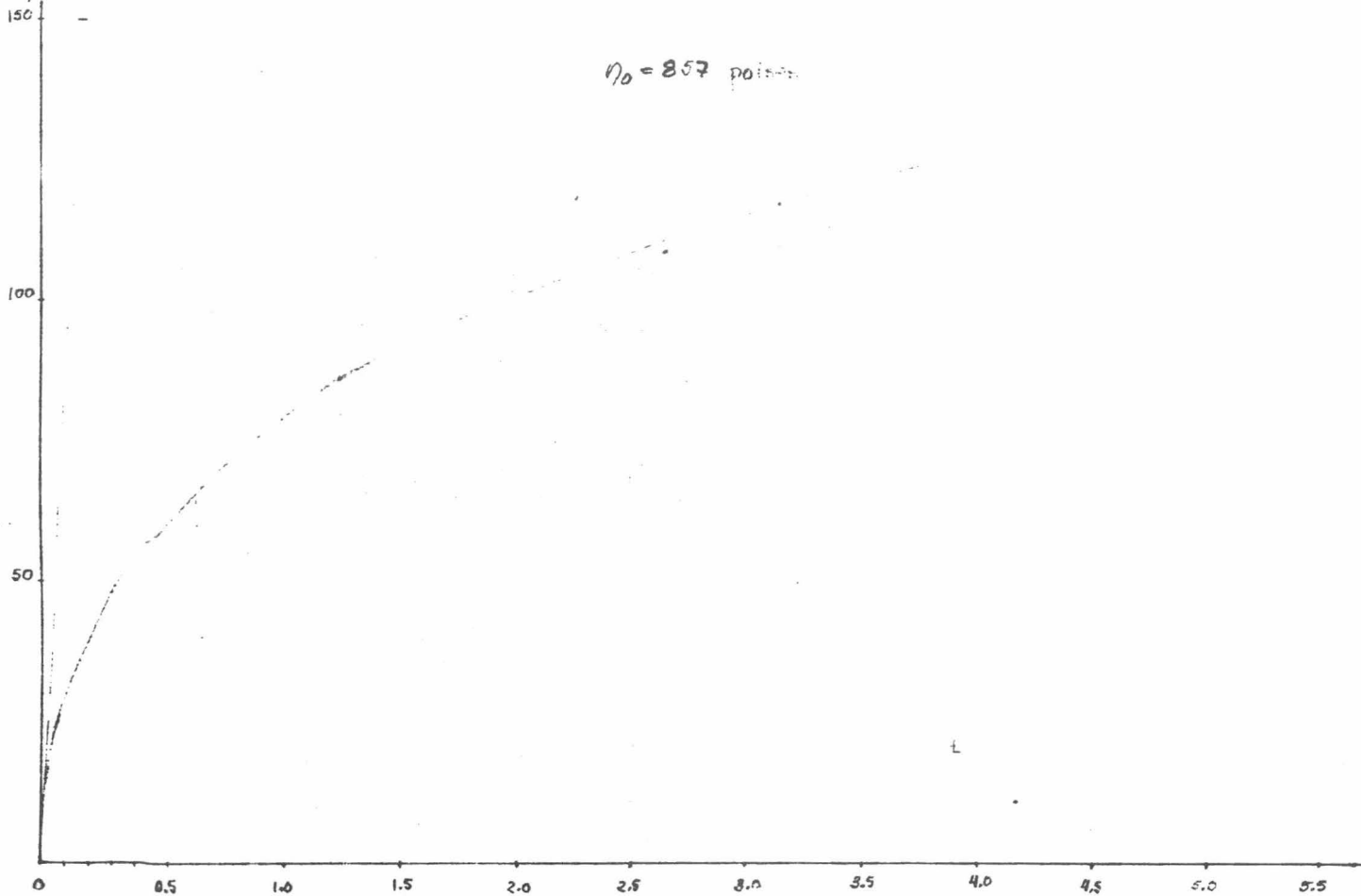
Rapidez de deformación
ciclos/segundo

Solución 50% glicerina +
50% sol. 1% Sepanac AP-30 Agua



$\frac{\rho}{8\pi a^3}$
dina/cm²

$\eta_0 = 857$ poises



$\dot{\gamma}$ eps

RESULTADOS

Esfera #3.

Radio = 0.9525 cm.

Velocidad angular = 0.754 rad/seg.

Dimensiones en la fotografía:

Radio de la esfera #3 = 1.3 cm.

Radio de la esfera exterior = 10 cm.

Radio del nodo = 5.1 cm.

Dimensiones reales:

r_1^* = 7.327 cm.

$r_1^{(0)}$ = 3.737 cm.

Cálculo de m' a partir de la ecuación 2:

$m' = 0.196$

Cálculo de m' a partir de la ecuación 3:

$m' = 0.327$

Cálculo de la relación de diferencias de esfuerzos normales; usando la ecuación 13:

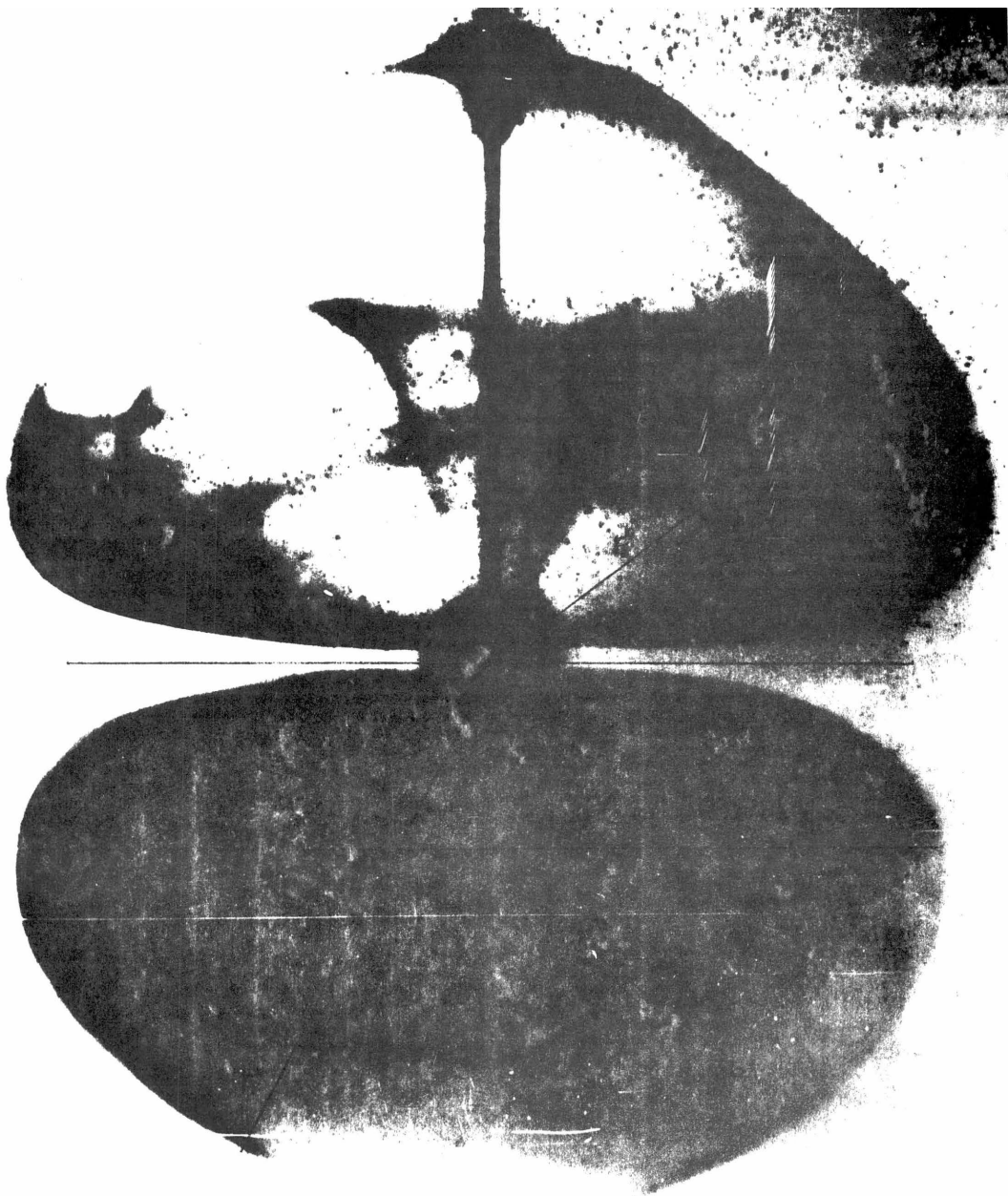
$N_1 + 2N_2 = 0.337 \text{ dinas/cm}^2$.

Observaciones:

Con esta solución, con esta esfera y a esta velocidad angular, se lograron los mejores patrones de flujo. El patrón corresponde propiamente al expuesto en el diagrama #4, aunque el valor de m' calculado a partir de la ecuación 3, que es el correcto, esté muy cerca de 0.25.



Proceso de formación del patrón de flujo secundario.
Solución 50% glicerina + 50% sol. 1% Separan AP-30 agua.



Fotografía del patrón de flujo de la esfera #3 a 0.754 rad/seg.
indicando el radio de la esfera exterior, el radio del nodo y el ángulo

Esfera #4.

Radio = .635 cm.

Velocidad angular = 1.508 rad/seg.

Dimensiones en la fotografía:

Radio de la esfera #4 = 0.5 cm.

Radio del nodo = 2.4 cm.

Dimensiones reales:

$r_1^{(n)} = 3.05$ cm.

Cálculo de m' a partir de la ecuación 3:

$m' = 0.4$

Cálculo de la relación de diferencias de esfuerzos normales a partir de la ecuación 13:

$N_1 + 2N_2 = 0.7336$ dinas/cm².

Observaciones:

El patrón de flujo correspondía plenamente al expuesto en el diagrama #4, por lo que únicamente se midió la posición nodal para la determinación de m' .

Esfera #2.

Radio = 1.5875 cm.

Velocidad angular = 0.754 rad/seg.

Dimensiones en la fotografía:

Radio de la esfera #2 = 0.9cm.

Radio del nodo = 2.9 cm.

Dimensiones reales:

$r_1^{(n)} = 5.115$ cm.

Cálculo de m' ; a partir de la ecuación 3:

$m' = 0.2686$

Cálculo de la relación de diferencias de esfuerzos normales a partir de la ecuación 13:

$N_1 + 2N_2 = 0.7675$ dinas/cm².

Observaciones:

La esfera exterior no se pudo medir por la distorsión del patrón de flujo secundario debido a los efectos de pared, sin embargo las posiciones nodales se pudieron observar claramente y calcular m' a partir de éstas.

SOLUCION 54% GLICERINA + 46% SOL. 1% SEPARAN AF-30 AGUA

LECTURAS DEL VISCOSIMETRO

CILINDRO #2.

RPM	CICLOS/SEGUNDO	LECTURA	VISCOSIDAD(POISES)
0.3	0.0314	22.9	229
0.6	0.0628	32.3	161.5
1.5	0.157	48.6	97.2
3.0	0.314	63.8	63.8
6.0	0.628	82.5	41.3

LOG CICLOS/SEGUNDO

-1.5
-1.2
-0.804
-0.503
-0.202

LOG VISCOSIDAD(POISES)

2.36
2.208
1.988
1.805
1.616

CILINDRO #3.

RPM	CICLOS/SEGUNDO	LECTURA	VISCOSIDAD(POISES)
0.3	0.0314	6.0	240.0
0.6	0.0628	8.6	172.0
1.5	0.157	13.0	104.0
3.0	0.314	17.8	99.2
6.0	0.628	23.8	47.6
12	1.256	32.5	32.5
30	3.1416	49.5	19.8
60	6.2832	70.0	14.0

LOG CICLOS/SEGUNDO

-1.5
-1.2
-0.804
-0.503
-0.202
0.099
0.497
0.798

LOG VISCOSIDAD(POISES)

2.38
2.236
2.017
1.997
1.678
1.512
1.297
1.146

ESFERA #4. VALORES DE LA RELACION $C/8\pi a^3$.

CICLOS /SEGUNDO

$C/8\pi a^3$, (dinas/cm²).

0.0314

7.363

0.0628

10.47

0.157

15.79

0.314

25.59

0.628

27.91

1.256

40.82

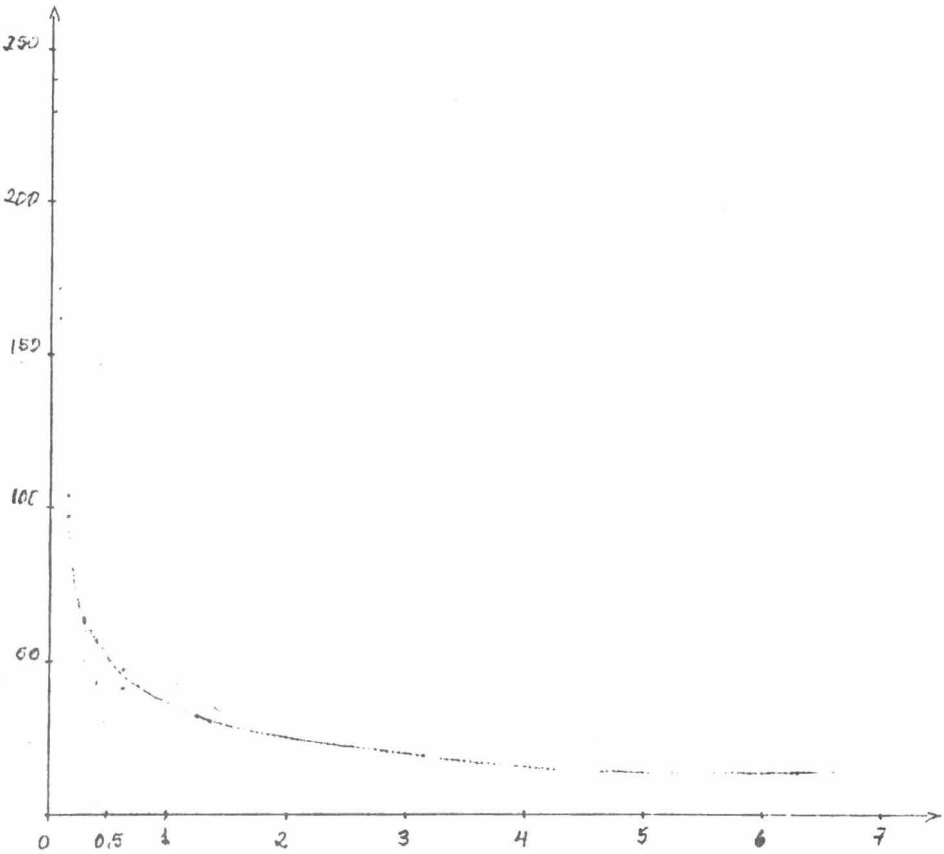
3.1416

62.2

6.2832

87.96

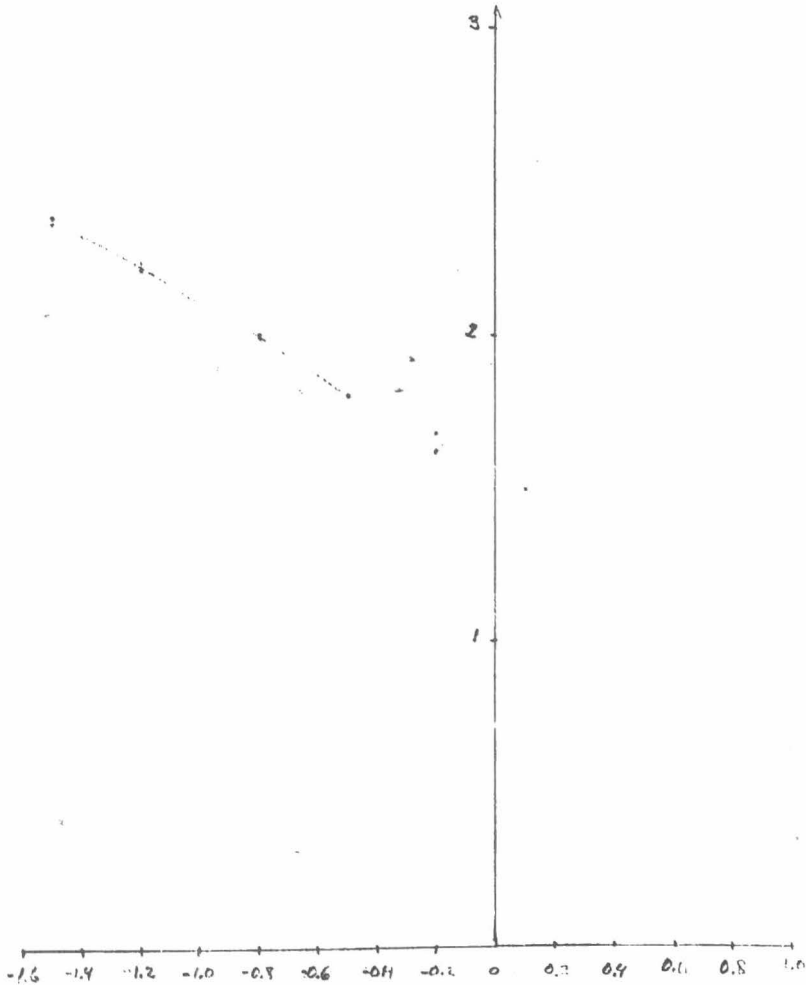
Solución 54% glicerina +
46% sol. 1% Sephadex AP-50 Agua



Rapidez de deformación
ciclos/segundo

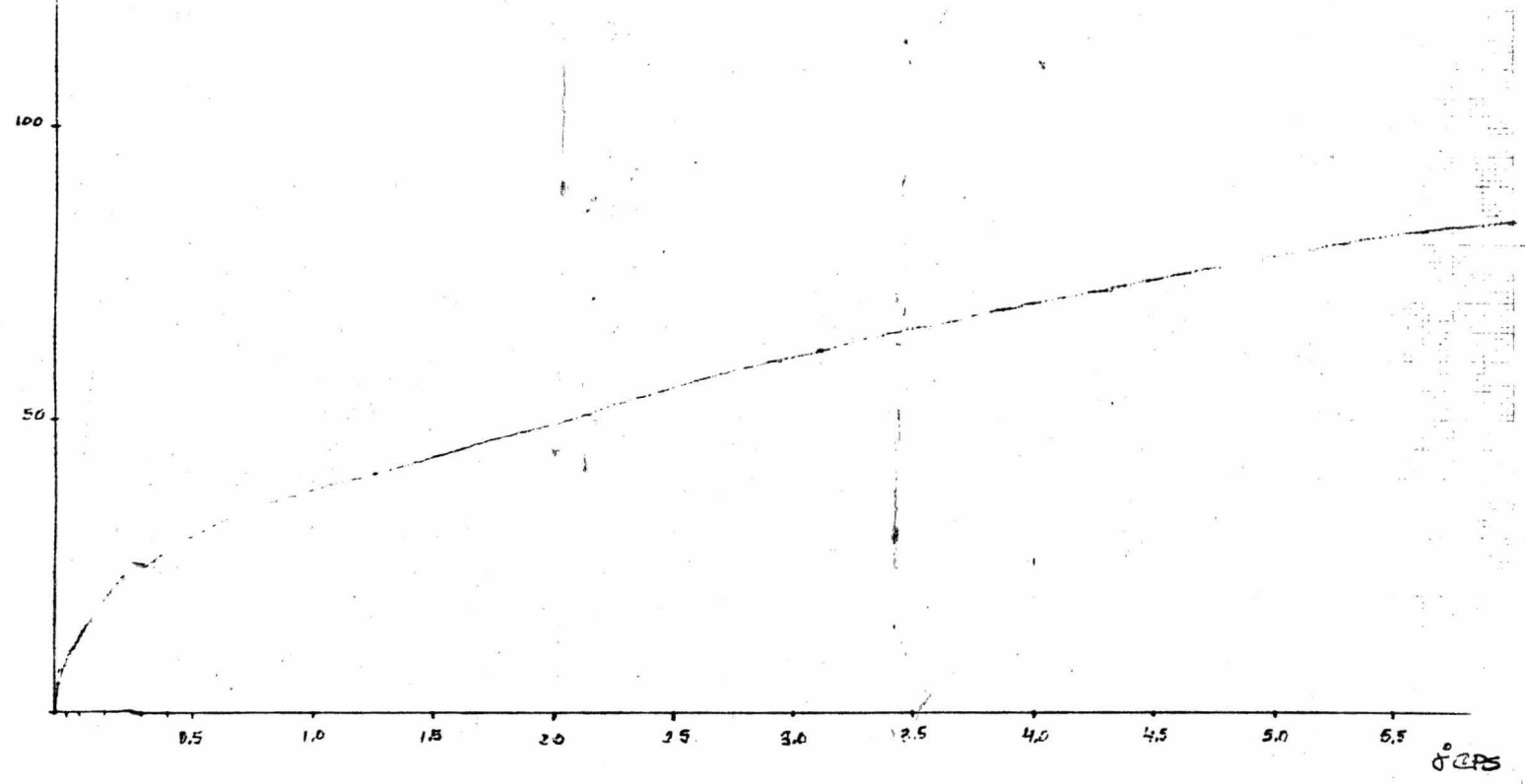
Solución 5% glicerina +
46% sol. 1% Separan AP-90 Agua

log. viscosidad



$\frac{Q}{r \Delta T \Delta x}$
 $\frac{\text{dynes}}{\text{cm}^2}$

$\eta_0 = 385 \text{ poises}$



Esfera #3.

Radio = 0.9525 cm.

Velocidad angular = 0.754 rad/seg.

Dimensiones en la fotografía:

Radio de la esfera #3: = 0.66 cm.

Radio del nodo = 2.7 cm.

Dimensiones reales:

$r_1^{\text{re}} = 3.897$ cm.

Cálculo de m' a partir de la ecuación 3:

$m' = 0.341$.

Cálculo de la relación de diferencias de esfuerzos normales a partir de la ecuación 13:

$N_1 + 2N_2 = 0.3518$ dinas/cm².

Observaciones:

El patrón observado presentaba las 4 posiciones nodales plenamente identificadas. La esfera exterior estaba distorsionada por las paredes del baño, y debido a eso se calculó m' a partir de las mediciones del flujo secundario.

Esfera #2.

Radio = 1.5875 cm.

Velocidad angular = 1.5 rad/seg.

Dimensiones en la fotografía:

Radio de la esfera #2 = 0.9 cm.

Radio del nodo = } cm.

Dimensiones reales:

$$r_1^{(M)} = 5.29 \text{ cm.}$$

Cálculo de m' a partir de la ecuación 3):

$$m' = 0.28$$

Cálculo de la relación de diferencias de esfuerzos normales a partir de la ecuación 1):

$$N_1 + 2N_2 = 3.18 \text{ dinas/cm}^2.$$

Observaciones:

El patrón de flujo presentaba en la fotografía las posiciones nodales claras. El radio de la esfera exterior no fue posible calcularlo debido a que presentaba grandes efectos de pared. Los nodos eran casi circulares, un poco alargados. En general, en las mediciones hechas con esta esfera, el valor de la relación de diferencias de esfuerzos normales tiene un valor elevado. Esto se notó en las mediciones hechas en las pasadas soluciones en las que se emplearon esferas más pequeñas a la misma velocidad angular y la relación de esfuerzos normales nos daba un valor más pequeño. Se dedujo que esta pequeña diferencia se debía a que el tamaño de esta esfera estaba en el límite de confiabilidad en relación al tamaño del baño para tener buenas mediciones.

CAPITULO 6

ANALISIS DE LOS RESULTADOS

A partir de las fotografías de los patrones de flujo formados por el movimiento de una esfera sobre su eje a una velocidad constante a bajos números de Reynolds, ya sea dentro de un líquido Newtoniano o un líquido viscoelástico, fue posible comprobar experimentalmente la teoría desarrollada en el capítulo 4.

En circunstancias favorables, como lo es el escoger una relación entre el tamaño del baño y el radio de la esfera tal que las distorsiones en el patrón de flujo por efectos de pared sean mínimas, las observaciones de los patrones de flujo pueden darnos un método sencillo para calcular m' y de aquí la relación de las diferencias de esfuerzos normales $2N_2 + N_1$. Por valores de N_1 obtenidos en mediciones de un regoniómetro, podemos por medio de esta relación estimar el valor de N_2 .

Las curvas de viscosidad contra velocidad angular en soluciones de Seperan AP-30 y de ésta y glicerina, nos indican que existe una disminución notable de la viscosidad en el primer tramo de la curva, o sea, a velocidades angulares pequeñas. En esta zona, no existe una relación logarítmica entre la viscosidad y la rapidez de deformación, ya que las gráficas logarítmicas no dan líneas rectas. Esta relación logarítmica se alcanza a velocidades angulares un poco más grandes en donde en las gráficas de logaritmo de la viscosidad contra el logaritmo de la rapidez de deformación tiende a ser una recta. Esta zona es donde se aplica la ley de la potencia (que nos dice que el esfuerzo se relaciona con la rapidez de deformación por una forma exponencial). A mayores velocidades angulares, se observa que la curva de viscosidad se hace asintótica, tomando la viscosidad un valor más o menos constante, aunque varíe la velocidad angular. Esta zona se denomina la zona de la segunda viscosidad Newtoniana de un líquido viscoelástico.

Con las mediciones de torque contra velocidad angular fue posible trazar una curva en donde la viscosidad η_0 se pudiera determinar trazando una pendiente inicial a dicha curva y determinando su valor gráficamente. Esto sólo es posible en viscosímetros o dispositivos que nos den valores a bajas deformaciones para poder abarcar la zona de máxima variación de la viscosidad.

Con respecto al patrón de flujo, se observó que efectivamente, según había sido demostrado teóricamente en el capítulo 4, el flujo secundario es un movimiento de las partículas del fluido que entra por el ecuador y sale por los polos de la esfera. Este patrón es el opuesto al de un líquido Newtoniano, en el que el flujo secundario entra por los polos y sale por el ecuador. Según podemos observar en la fotografía, existen zonas de flujo secundario llamadas nodos cuya posición con respecto al eje vertical está predicha teóricamente, y se comprobó experimentalmente. Esta distancia nodal, como se ha visto, nos da un método para calcular m' . Aunque este valor de m' también lo podemos calcular a partir del radio de la esfera exterior cuando el patrón de flujo corresponde al expuesto en el diagrama #3 del capítulo 4, o sea, después de haber determinado el valor de m' por la distancia nodal al centro de la esfera, vemos que el flujo primario, que en la fotografía debería ser circular, no lo es exactamente. Existe un achatamiento de la esfera exterior en la zona cercana a la pared del baño, o sea a los lados y abajo, y en la superficie del mismo baño. Esto nos lleva a la conclusión de que teóricamente es necesario un baño de tamaño infinito para garantizar que no existirán efectos de pared y superficiales y que el patrón de flujo primario, o sea, la esfera exterior, tendrá una forma perfectamente esférica y un alto grado de precisión la determinación de m' a partir del radio de esta esfera exterior.

La relación de diferencias de esfuerzos normales $2N_2 + N_1$ encontrada a partir del valor conocido de m' por la observación del patrón de flujo, vemos que sigue una relación logarítmica con respecto a la rapidez de deformación en el rango de velocidades angulares en el que se tomaron las fotografías del patrón de flujo. También podemos observar el hecho de que esta relación de esfuerzos normales es independiente de la geometría y el tamaño de los objetos que se hayan empleado para determinarla. En el caso de la esfera, a un solo valor de velocidad angular, nos dará un solo valor de la relación de esfuerzos normales, independientemente de la esfera que hayamos empleado. (Gráfica 1 Cap.5).

Otro punto interesante en el que intervienen los efectos de pared y efectos superficiales del baño sobre el patrón de flujo, lo es el hecho de que a un valor de m' mayor a 0.25, todavía se observa el flujo primario o la esfera exterior. Según habíamos visto en el diagrama #4, para valores de m' mayores a 0.25 únicamente observaríamos las posiciones nodales. Es por esto que los valores de m' deducidos por medio de esta esfera exterior no coinciden con los calculados a partir de las posiciones nodales, ya que esta esfera exterior se forma debido a estos efectos de los que hablábamos.

Como veíamos en el capítulo precedente, teníamos para la solución de 0.6% Separan AP-30 en agua mediciones de la primera diferencia de esfuerzos normales contra rapidez de deformación. Estas mediciones son hechas por un regoniómetro a velocidades angulares grandes, bastante mayores a las empleadas en los patrones de flujo, pero que es el rango que nos pueden dar este tipo de aparatos. Debido a esto, se hace una primera aproximación extrapolando esta curva para abarcar el rango de velocidades angulares pequeñas. Con este valor y el de $2N_2 + N_1$ ya determinado, vemos que el rango de valores de N_2 estimado es el de la mitad de N_1 con signo contrario. Aquí nos encontramos con una limitación importante, ya que los datos de N_1 proporcionados por un regoniómetro, como ya hemos dicho, nos dan datos a velocidades angulares grandes, y la teoría del viscosímetro de esfera rotatoria sólo es aplicable a números de Reynolds pequeños, ya que como se vió en el desarrollo teórico, de una serie de potencias de Reynolds, se tomó solo el primer término. Por esto, para tener valores más precisos de N_2 , es necesaria una modificación a la teoría para que sea aplicable a valores mayores de rapidez de deformación.

CAPITULO 7

CONCLUSIONES

A partir del desarrollo teórico del movimiento de una esfera sobre su eje a bajos números de Reynolds en un medio ya sea Newtoniano o viscoelástico, es posible trazar las proyecciones de las líneas de corriente y verificar experimentalmente la posición y el movimiento de éstas líneas.

Las mediciones indirectas de torque en la esfera nos dan un método para la determinación de la viscosidad a cero rapidez de deformación, como la pendiente inicial de la curva de esfuerzo contra rapidez de deformación. Las lecturas de viscosidad sirvieron para la preparación de la curva de flujo, cuyo comportamiento en el caso de líquidos viscoelásticos se vuelve asintótico a grandes velocidades de deformación.

Por lo tanto, en la preparación de curvas de torque contra velocidad angular, se observó que son relativamente insensibles a los cambios en m' , por lo que estas mediciones no son recomendables como medio para la determinación de este parámetro. En relación con las diferencias de esfuerzos normales, este desarrollo proporciona un método para estimar el valor de N_2 si conocemos el valor de N_1 de lecturas de regoniómetro. (Siendo N_2 y N_1 la segunda y primera diferencias de esfuerzos normales). Esto es muy importante, porque nos provee un método sencillo para caracterizar y analizar propiedades de líquidos tan importantes a la Ingeniería Química como son los fluidos viscoelásticos.

BIBLIOGRAFIA

R. Aris.

"Vectors, tensors and the basic equations of Fluid Mechanics".
Prentice - Hall, Inc.

R.S. Brodkey.

"The Phenomena of Fluid Motions".
Addison Wesley.

R.B. Bird, W.F. Stewart and E.N. Lightfoot.

"Transport Phenomena".
Wiley.

B.D. Coleman and W.Noll.

Annal. N.Y. Acad. Sci. 89 (1961).

B. Caswell.

Chemical Engineering Science 25, (1970)

A.G. Fredrickson.

"Principles and Applications of Rheology".
Prentice - Hall, Inc.

K. Higashitani and A.S. Lodge.

Transactions of the Society of Rheology.
Vol. 19, Abril - Junio, 1975.

J.G. Oldroyd.

Proc. Roy. Soc. A 200 (1950).

A.C. Pipkin.

Rev. Mod. Phys. (1964), 36.

C. Truesdell.

"The Elements of Continuum Mechanics"

Springer Verlag.

K. Walters.

Z.A.M.P. 21, 4 (1970).

K. Walters.

Rheometry.

Chapman and Hall. London.

F. Walters.

Quart. J. Mech. Appl. Math., 13, 444 (1960).

K. Walters and J.G. Savings.

"A Rotating - Sphere Elastoviscometer".

Transactions of the Society of Rheology. 9, 407-416, (1955).

F. Walters and N.D. Waters.

"On the use of Rotating Sphere in the measurement of elastico -
viscous parameters"

British Journal of Applied Physics, 14, 667-671 (1963).

K. Walters and N.D. Waters.

"The interpretations of experimental results obtained from a
Rotating - Sphere Elastoviscometer."

British Journal of Applied Physics.

K. Walters and N.D. Waters.

"A note of the formulations of simple equations of state for
Elastico - Viscous liquids".

Journal of Applied Mathematics and Physics. 14, 742-745 (1963).

B. Mena.

Curso de mecánica de fluidos no Newtonianos.

D.E.S.F.I. UNAM. 1975.