

21
2y

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

TESIS QUE PARA OBTENER EL TITULO DE FISICO PRESENTA

MARTHA CHAPA PLATA

CON EL TITULO DE

PERDIDA DE ENERGIA EN COLISIONES ENTRE GOTAS DE MERCURIO
QUE SE DESLIZAN SOBRE UNA SUPERFICIE RUGOSA

BAJO LA DIRECCION DEL

DR. ARTURO MENCHACA ROCHA

TESIS CON
VALIA EN CONFORME



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE

| Cap | Tema | Pág |
|-----|------------------------------------------|-----|
| I | Introducción | 1 |
| II | Interacción gota-vidrio y gota-aire | 3 |
| | II.1 Escogiendo el sistema | 3 |
| | II.2 El coeficiente de fricción | 9 |
| | II.3 Influencia del aire | 13 |
| III | Interacción gota-gota | 16 |
| | III.1 Colisiones inelásticas | 16 |
| | III.2 Coeficiente de fricción gota-gota | 20 |
| IV | Experimento | 28 |
| | IV.1 Instrumento | 28 |
| | IV.2 Calibraciones | 36 |
| | IV.3 Desarrollo de las colisiones | 45 |
| V | Resultados | 47 |
| | V.1 La trayectoria y energía del sistema | 47 |
| | V.2 Desplazamiento gota-gota | 51 |
| VI | Conclusiones | 61 |
| | Referencias | 64 |

CAPITULO I

INTRODUCCION

Los fenomenos relacionados con gotas han despertado el interes de los cientificos desde hace mucho tiempo, baste con recordar los trabajos de Laplace, Young, Rayleigh y, en epocas más recientes, los de S. Chandrasekhar¹.

Esta tesis forma parte de un proyecto para estudiar las colisiones entre gotas de mercurio. Las circunstancias ideales para realizarlo hubieren sido aquellas en que las gotas chocaran en el espacio vacio y sin gravedad. Sin embargo, como es facil de imaginar, el evitar el efecto de la gravedad representaba una situacion inaccesible a nuestro laboratorio. Asi que el estudio debió realizarse utilizando gotas que se deslizan sobre una superficie. Ese arreglo experimental, sin embargo, introduce complicaciones como la friccion con el aire y la interaccion con la superficie solida, que deben ser estudiadas y, de ser posible, minimizadas antes de poder sacar conclusiones del resto de las observaciones. Asi, la idea central de este trabajo es estudiar la fuerza que se opone al deslizamiento de gotas sobre superficies solidas, y compararla, de alguna manera, con la fuerza que actúa entre las gotas mismas, cuando estas entran en contacto.

En el capítulo II, se describen los conceptos relacionados con la interacción de una gota con un sustrato sólido, lo que ayudará a decidir que sistema líquido-sólido utilizar. También se deriva una ecuación empírica que permite evaluar la magnitud de la influencia del vidrio sobre el movimiento de la gota, al final del capítulo se estima teóricamente la influencia correspondiente al aire. En el siguiente capítulo (III) se propone un procedimiento para evaluar la pérdida de energía en la colisión "inelástica" de dos gotas idénticas. Esto permitirá establecer un marco de comparación de los efectos "externos" con el que ejercen las gotas entre sí. En el capítulo IV, se describe el instrumento utilizado para realizar estas mediciones y la metodología empleada para estudiar las colisiones entre gotas. En el capítulo V se analizan los datos obtenidos en base a los conceptos descritos en los capítulos II y III. Finalmente en el capítulo VI se dan las conclusiones del trabajo.

CAPITULO II

INTERACCION GOTA-VIDRIO Y GOTA-AIRE

En este capítulo se describen, primero, los conceptos relacionados con la interacción de la superficie sólida con la gota. Estas consideraciones nos llevarán a escoger un sistema líquido-sólido (mercurio en vidrio). Posteriormente se establece un procedimiento para evaluar, a partir de datos experimentales, un coeficiente global de fricción. Al final del capítulo se hará una estimación simple de la contribución a este coeficiente por parte de la fricción que ejerce el aire sobre las gotas en movimiento.

II.1 Elección del sistema.

El fenómeno de mojado de una superficie sólida por una gota es bien conocido y está caracterizado por el ángulo de contacto (θ) (ver figura 11.1a) resultado de una condición de equilibrio, entre las tensiones superficiales involucradas, descrita por la ecuación de Young²:

$$\Gamma_{sa} - \Gamma_{sl} = \Gamma_{la} \cos \theta \quad 11.1$$

donde Γ_{sa} , Γ_{sl} y Γ_{la} son las tensiones superficiales solido-aire, solido-liquido y liquido-aire, respectivamente, y θ es el angulo de contacto. Aunque, idealmente, este angulo debiera ser independiente del movimiento de la gota, como veremos, este resulta ser afectado por irregularidades en la interfase liquido-solido (ver fig 11.1b).

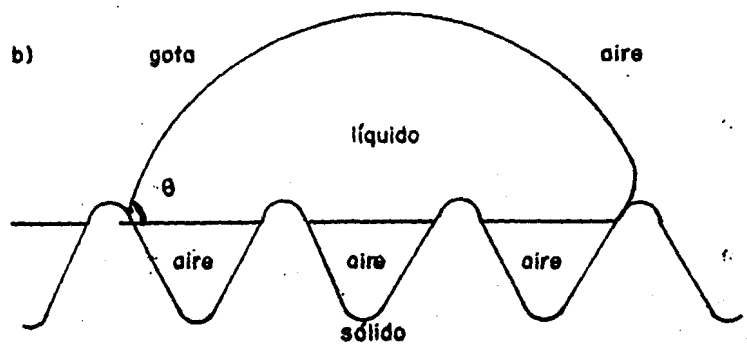
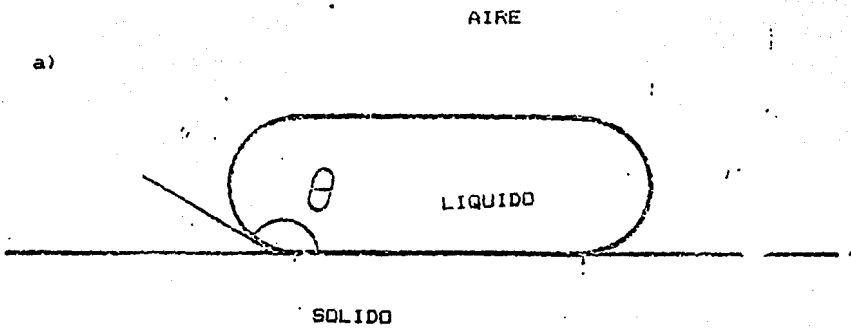


Figura II.1 Gota sobre una superficie rugosa, a) para un caso no compuesto b) para un caso compuesto

Sobre este tema, la influencia de la rugosidad ha sido estudiada por Johnson y Detrez³. Ellos demostraron que, bajo ciertas condiciones, la rugosidad tiende a incrementar el ángulo aparente de contacto. Su interpretación se basa en un modelo de "configuraciones compuestas", en el cual el líquido está imposibilitado para penetrar en la profundidad de las cavidades del sólido por efecto de su tensión superficial. Tal fenómeno fue estudiado experimentalmente por los mismos autores³ quienes observaron que no solo el ángulo de contacto sino, también la movilidad de gotas de agua en superficies de parafina aumentaba si esta era rugosa. En un estudio reciente, utilizando gotas de mercurio en vidrio, A. Menchaca⁴ demostró que ese aumento en la movilidad se debe a que la fuerza que se opone al desplazamiento de la gota es proporcional al área de contacto. Así, en una superficie rugosa, como el contacto disminuye por la presencia de cavidades, la fuerza de "fricción" disminuye. Ese trabajo⁴ también demostró que el coeficiente de fricción varía inversamente con el ángulo de contacto.

De lo anterior se deduce que, para realizar un estudio sobre gotas que se deslizan con mínima fricción en el sólido, debe escogerse un sistema caracterizado por un gran ángulo de contacto. Uno de los sistemas de mayor θ es el mercurio-vidrio con $\theta=140^\circ$ aproximadamente. El mercurio, bastante puro (tri-destilado), se puede adquirir comercialmente y el vidrio es fácil de obtener y de limpiar. La desventaja de este sistema es que los vapores de mercurio son bastante dañinos para la salud.

Una alternativa interesante es agua en parafina ($\theta=110^\circ$, aproximadamente). Sin embargo esta tiene varias desventajas prácticas. La superficie de parafina es difícil de limpiar (sin deformarse), y la temperatura puede alterarse fácilmente. Otra desventaja es la baja densidad del agua, y su menor tensión superficial, relativa al mercurio. Las gotas grandes son más inestables (se deforman y se rompen con más facilidad) que las chicas. Ya que, para una misma masa, se requerirían gotas de agua 13 veces más voluminosas (y por lo tanto, más inestables) que las de mercurio, la mayor estabilidad de estas últimas las hace más adecuadas para estudios como el aquí propuesto.

En resumen, con las debidas precauciones, se decidió utilizar el sistema mercurio-vidrio por su mayor ángulo de contacto y mayor densidad ¿Que tan liso debe estar el vidrio?

El estudio de A. Menchaca⁴ comprendió el deslizamiento de gotas de mercurio sobre superficies planas de vidrio rugoso. En ese trabajo, la "movilidad" de gotas de una misma velocidad inicial, V_0 , fue definida por la longitud total de la trayectoria (denominada alcance lineal "A"). Como se muestra en la figura 11.2., el alcance lineal tiene una dependencia tanto en la masa de las gotas como en la rugosidad (caracterizada por el tamaño del grano en el vidrio). También se puede apreciar que, para una masa fija, el alcance lineal es óptimo para superficies tratadas con granos de 40 μm . Así, el sistema utilizado en el presente estudio se realizó con gotas de mercurio que se deslizaban sobre superficies de esa rugosidad.

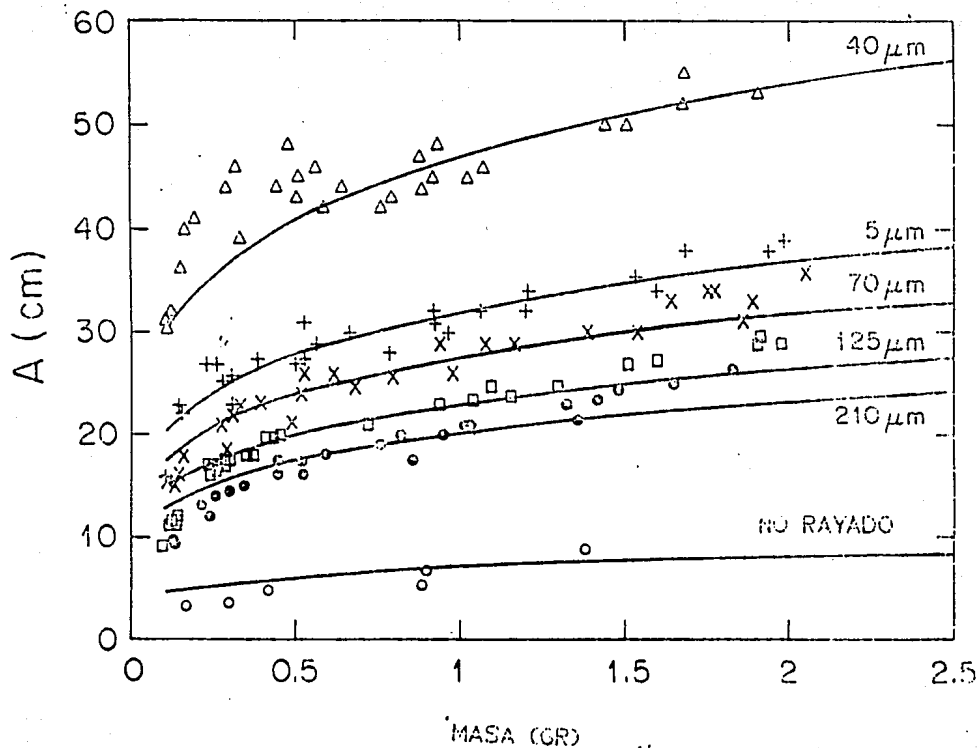


Figura 11.2 El alcance observado⁴ para el movimiento de gotas cuya velocidad inicial (V_0) es de 40 cm/seg. Sobre superficies no rayada (\circ) y sobre superficie con granos $d = 5\ \mu\text{m}$ (+), $d = 40\ \mu\text{m}$ (Δ), $d = 125\ \mu\text{m}$ (\square), $d = 210\ \mu\text{m}$ (\circ) y $70\ \mu\text{m}$ (x), donde (d) es el tamaño de los granos.

11.2 El coeficiente de fricción

Una vez escogido el sistema, es necesario cuantificar la fuerza que se opone al deslizamiento de las gotas. A partir de una video grabación, A. Merchaca⁴ encontró que el movimiento de las gotas a lo largo de una superficie de vidrio rugosa (ver figura 11.3) puede ser descrito, empíricamente, como afectado por una fuerza de fricción del tipo:

$$m \frac{dV}{dt} = -\beta \cdot V \quad (11.1)$$

donde β es un coeficiente de fricción que engloba los efectos de la interacción de la gota con el vidrio y con el aire y m es la masa de la gota. El ajuste a los datos de posición como función del tiempo (curvas continuas en la figura 11.3), requiere resolver esta ecuación para la posición. Es decir, reorganizando la ecuación (11.1):

$$m \cdot \frac{dV}{V} = -\beta \cdot dt \quad (11.2)$$

e integrando se obtiene:

$$-\frac{m}{\beta} \left[\ln v \right] = t + C \quad (11.3)$$

donde la constante de integración C es:

$$C = -\frac{m}{\beta} \ln v_0 \quad (11.4)$$

siendo v_0 la velocidad inicial. Sustituyendo (11.4) en (11.3) y resolviendo para v tenemos:

$$v = v_0 \text{ EXP} \left[-\frac{\beta}{m} \cdot t \right] \quad (11.5)$$

es decir,

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \text{ EXP} \left[-\frac{\beta}{m} \cdot t \right] \quad (11.6)$$

Integrando esta expresión, se tiene:

$$x = \frac{V_0 \cdot m}{\beta} \left[1 - \text{Exp} \left[- \frac{\beta}{m} t \right] \right] \quad (11.7)$$

Ajustando V_0 y β , usando el método de mínima χ^2 , se obtienen los ajustes que se muestran en la figura 11.3 (curvas continuas). A partir de la ecuación (11.7), el valor del coeficiente de fricción resulta ser:

$$\beta = \frac{V_0 \cdot m}{A} \quad (11.8)$$

donde A es el alcance (la posición cuando $t = \infty$). Es decir, para una velocidad inicial V_0 , el coeficiente de fricción β puede deducirse directamente de medir el alcance. Sin embargo, cuando se estudian colisiones entre gotas, es imposible determinar su alcance. Así, los coeficientes de fricción de cada gota en un experimento se deducen a partir de un ajuste a la gráfica de posición como función del tiempo, utilizando la ecuación (11.7) y dejando como parámetros de ajuste a β y a V_0 . De los datos de la ref 4 (ver fig 11.2) se observa que para valores típicos de $V_0 = 40$ cm/s, las masas de un gramo poseen un alcance de 40 cm, lo que indica que el coeficiente de fricción posee valores del orden de:

$$\beta = 1 \text{ g/s.} \quad (11.9)$$

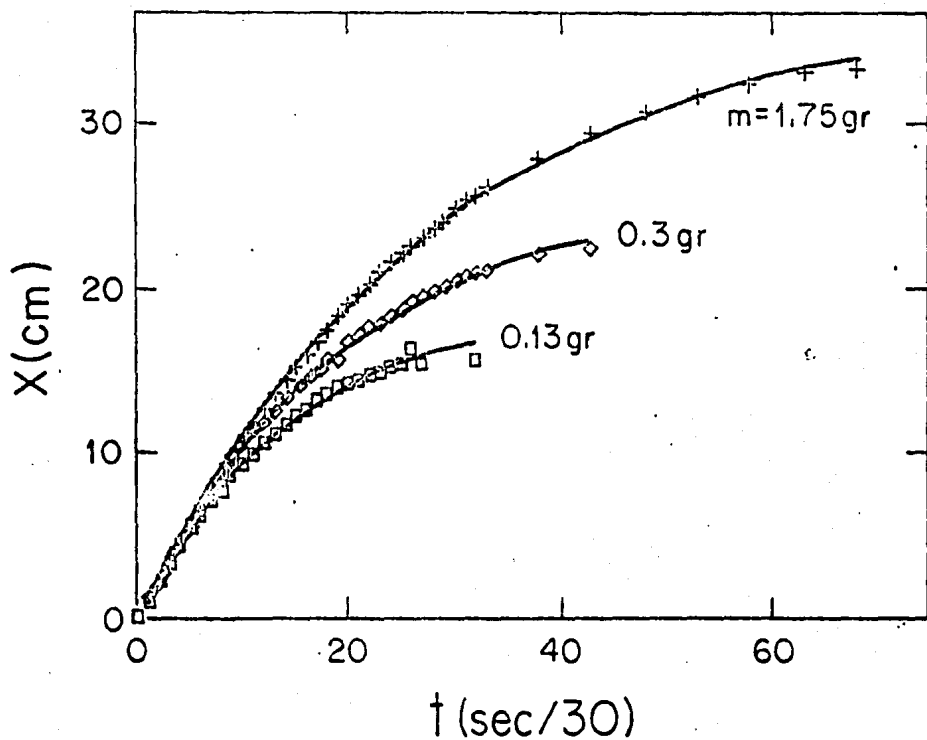


Figura 11.3 Posición de la gota (X), medida a lo largo de la trayectoria como función del tiempo (t), para una superficie en la que se usó granos de $40\mu\text{m}$ y gotas cuyas masas se indican en la figura.

11.3 Influencia del aire.

Hasta ahora, se ha considerado que el coeficiente β engloba el efecto de las interacciones de la gota con el vidrio y con el aire. La contribución debida al arrastre del aire puede ser estimada si se conoce el número de Reynolds R de las gotas en movimiento. Para gotas esféricas, este está dado por:

$$R = \rho V D \quad (11.10)$$

donde, en nuestro caso ρ y η resultan ser la densidad y la viscosidad específica del aire, respectivamente, V es la velocidad de la gota y D es su diámetro. Para aire a 20° C, η/ρ tiene un valor aproximado de $0.15 \text{ cm}^2/\text{s}$. Es decir, que para las gotas más grandes, de 1 cm de diámetro, y velocidades máximas de 40 cm/s, el número de Reynolds (máximo) sería:

$$R = 260 \quad (11.11)$$

En este régimen, la fuerza de arrastre^o debida al aire es proporcional a la velocidad de la gota, ya que la ecuación 11.1, que también presume una dependencia lineal entre la fuerza y la velocidad, da una buena descripción de los datos, el coeficiente global β debe poderse expresar como:

$$\beta = \beta_{ga} + \beta_{gv} \quad (II.12)$$

donde β_{ga} es el coeficiente lineal debido al arrastre del aire y β_{gv} es el correspondiente a la interacción gota-vidrio.

El coeficiente β_{ga} se puede estimar a partir de ⁵

$$\beta_{ga} = 3\pi D_0 (C_D R / 24) \quad (II.13)$$

Donde C_D es el coeficiente de arrastre⁶, que es función de R y que, para el valor máximo indicado (ec. II.10), toma un valor aproximado $C_D = 0.6$. Tomando $\rho = 1.9 \times 10^{-3}$ g/(cm s), el valor máximo de β_{ga} es, entonces:

$$\beta_{ga} = 0.06 \text{ g/s} \quad (II.14)$$

Comparando las ecuaciones (II.14) con (II.9) se aprecia que la contribución del arrastre debido al aire será despreciable comparado con el efecto del vidrio sobre el movimiento de la gota, es decir:

$$\beta_{gv} \approx \beta \times \beta_{ga}$$

(11.15)

En el siguiente capítulo se propone un procedimiento para estimar la magnitud de la interacción gota-gota.

CAPITULO III

INTERACCION GOTA-GOTA

Como se describió en la introducción, la idea principal de esta tesis es comparar la magnitud de las fuerzas a que están sujetas dos gotas de mercurio que, a la vez que chocan una con otra, y se deslizan sobre una superficie de vidrio rugoso. En el capítulo anterior se describieron los criterios seguidos para evaluar la influencia combinada del deslizamiento respecto del vidrio y respecto del aire. En este capítulo se presentan los argumentos seguidos para estimar la influencia que una gota ejerce sobre otra.

III.1 Colisiones inelásticas.

La interacción entre dos gotas envuelve fenómenos enormemente complejos que no han sido lo suficientemente investigados ni experimental ni teóricamente. Entre los mecanismos que dan lugar a la fricción se encuentra el intercambio de masa, la aparición de ondas de compresión, etc. La energía transferida a todos estos procesos internos se transforma en calor debido a procesos viscosos.

En la colisión entre gotas, dependiendo del resultado final se puede determinar la cantidad de energía perdida. El caso extremo es cuando las gotas se funden permanentemente, lo que

llamaremos "fusión" o "coalescencia", en que toda la energía se transforma en interna. En los casos en que en el estado final se encuentren dos gotas de masas similares a las iniciales, que denominaremos "choque inelástico", solo una fracción de la energía relativa se habrá transformado en energía interna. Como se da esta transformación de energía. Algunos razonamientos generales que se verán a continuación permiten obtener una estimación.

Macroscópicamente, la pérdida de energía en estos procesos se debe a la viscosidad, considerada como una manifestación de la irreversibilidad termodinámica. En la interacción entre dos fluidos esféricos, la viscosidad ha sido descrita como debida a dos mecanismos, uno radial y otro tangencial descritos por los coeficientes β y η , respectivamente.

Para explicar los coeficientes de viscosidad consideremos una región A del fluido cuyas partículas tienen una velocidad promedio V_A y una región o gota B (contigua a A, en el momento de la interacción) con partículas de velocidad promedio V_B , como se ilustra en la figura III.1). Al producirse la interacción se puede esperar que ocurra un intercambio de partículas entre las regiones A y B, pero como las partículas tienen masa y velocidad, se puede hablar de un flujo de impulso entre A y B durante el tiempo que dura la interacción. Puede considerarse que si $V_B > V_A$, entonces el flujo de impulso de B hacia A tenderá a "frenar" las partículas de B, y "acelerar" a las partículas de A y viceversa. El coeficiente de fricción β , da una medida del flujo de impulso en dirección perpendicular a la velocidad del fluido, es decir, mide no solo del flujo en una dirección sino en todo el volumen que

rodea a la región. Y el coeficiente de proporcionalidad n da una medida del flujo de impulso tangencial en la misma dirección de la velocidad del fluido, es decir, actúa solo en la superficie que separa a las dos regiones de diferentes velocidades.

Estos movimientos microscópicos durante la interacción generan una pérdida de energía que depende del valor de n y b , y ésta finalmente puede ser transformada en calor.

En el caso que nos ocupa, las colisiones inelásticas, las dos gotas se unen tangencialmente girando una sobre otra y separándose posteriormente luego de una pérdida considerable de energía. En tales condiciones, aquí se considera que esta pérdida de energía se debe al coeficiente de fricción tangencial n , puesto que sólo se analizan los casos en que la masa inicial de cada gota es similar a la masa final, tal coeficiente se llamará coeficiente de fricción gota-gota y se representará por μ_{gg} .

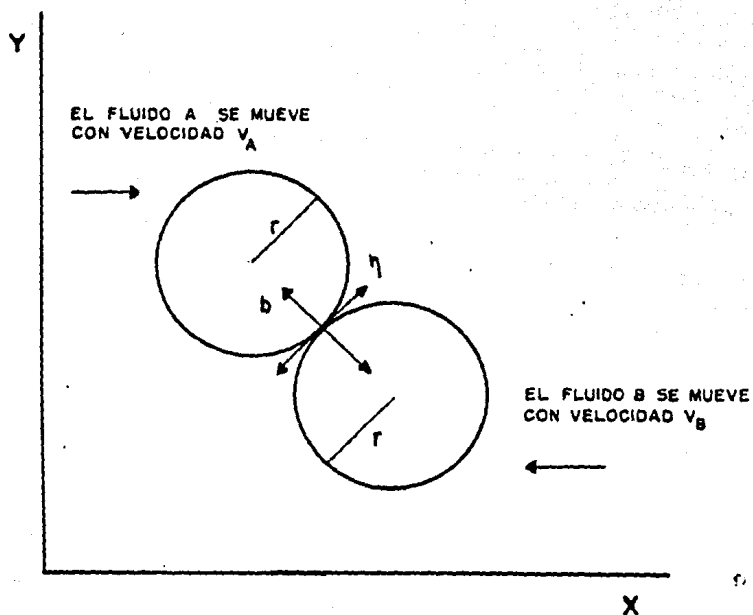


Figura III.1 Interacción entre dos gotas. En cada punto de contacto entre las gotas existe la fuerza de fricción. Donde b es el coeficiente de fricción radial y n es el coeficiente de fricción tangencial.

III.2 Coeficiente de fricción gota-gota.

Dentro del concepto de una fricción gota-gota puramente tangencial, se puede intentar una descripción general a la pérdida de energía durante estos experimentos, suponiendo que, mientras se mueven las gotas, la fuerza de fricción tiene la forma general (a posteriori se verá que los resultados experimentales apoyan esta suposición):

$$F = - \beta V \quad (III.1)$$

donde V es la velocidad relativa entre las dos gotas y β es un coeficiente de fricción global. En esta generalización, se consideraran tres etapas: I) antes, II) durante y III) después de la interacción gota-gota. El coeficiente β en I) y en III), como se discutió en el capítulo anterior, solo incluirá los efectos debidos al vidrio y al aire, mientras que en II) también comprenderá la fricción viscosa entre las dos gotas.

Ya que las gotas se mueven respecto de un observador fijo en el laboratorio, conviene expresar la segunda ley de Newton en términos de la masa reducida μ , es decir,

$$F = \mu a \quad (III.2)$$

donde "a" es la aceleración relativa entre ambas gotas. Así, en cada etapa, la velocidad relativa en cada instante estaría dada por:

$$V(t) = V_0 \text{ EXP} \left[- \frac{\beta}{\mu} \right] \cdot t \quad (III.3)$$

donde V_0 es, la velocidad relative en el instante en que se inicia la etapa. A partir de esta ecuación, se puede obtener una expresión para la energía cinética como función del tiempo, elevando al cuadrado y multiplicando por un medio de la masa reducida, resultando:

$$E(t) = \frac{\mu V_0^2}{2} \left[\text{EXP} \left[- \frac{2\beta}{\mu} t \right] \right] \quad (III.4)$$

Ya que la energía puede ser determinada experimentalmente como función del tiempo (ver figura III.2), esta ecuación puede ser utilizada para obtener los valores de β en cada etapa, a partir de un ajuste de los datos.

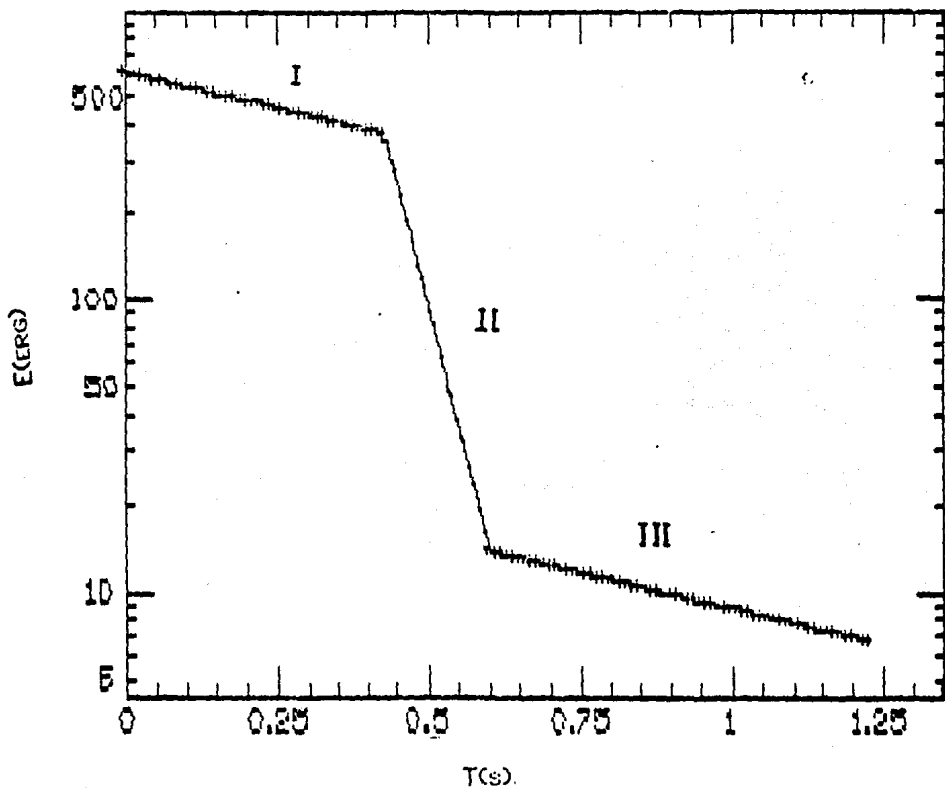


Figura III.2 energía como función del tiempo para una colisión inelástica. En esta gráfica se pueden apreciar tres regiones: antes de la colisión (I), durante la colisión (II) y después de la colisión (III).

A partir de este tipo de gráficas, el valor de β_{gg} puede ser estimado a través de:

$$\beta_{gg} = \beta_{II} - (\beta_{ga} + \beta_{gv}), \quad (III.5)$$

en que β_{II} es el coeficiente de fricción global durante el contacto gota-gota. En esta etapa, el valor de $\beta_{ga} + \beta_{gv}$ se puede estimar a partir de un promedio de los coeficientes globales β que ajusten a los datos correspondientes a la primera y a la tercera etapa.

Dentro del modelo de interacción gota-gota puramente tangencial (ver figura III.3), en la etapa II) habría un desplazamiento Δx de la superficie de una gota sobre la superficie de la otra. Si, como se trata de demostrar en esta tesis, $\beta_{gg} \gg \beta_{gv} + \beta_{ga}$, el valor de Δx podría ser obtenido reescribiendo la ecuación (III.3) como sigue:

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \exp\left[-\frac{\beta_{gg}}{\mu} t\right] \quad (III.6)$$

e integrando entre $t=t_0$, el instante en que se tocan las gotas, y $t=t_1$, el instante en que se separan. Es decir,

$$\Delta x = \frac{1}{g} (V_0 - V_f) \quad (III.7)$$

que, en términos de las energías inicial E_0 , justo antes del contacto, y E_f , justo después:

$$\Delta x = \frac{(2g)^{-1/2}}{\beta} (E_0^{1/2} - E_f^{1/2}) \quad (III.8)$$

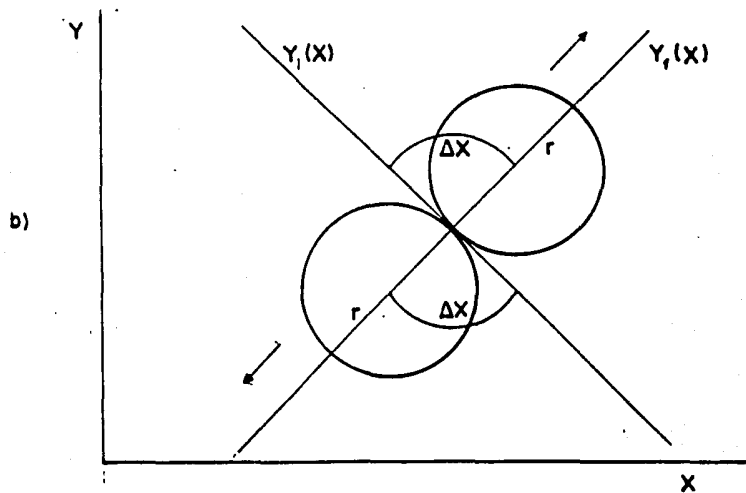
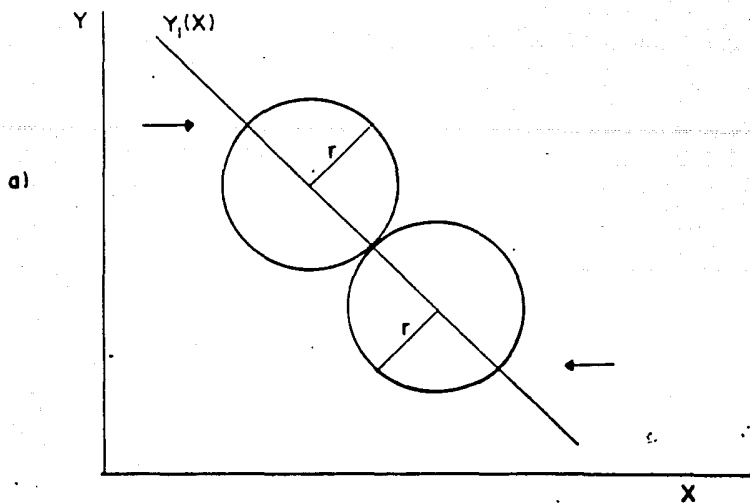


Figura III.3. Colisión entre dos gotas de radio r . a) contacto inicial, y b) contacto final. Las flechas indican la dirección de movimiento de cada gota, $Y_1(x)$ es la línea inicial que une los centros e $Y_2(x)$ es la línea final que une los centros, ΔX es la distancia durante la cual actúa la fuerza gota-gota.

En una colisión inelástica de las analizadas aquí, durante la interacción, las gotas giran juntas desviando mutuamente su dirección angular. En el momento en que se tocan, la línea que une los centros de las dos gotas posee un ángulo inicial θ_1 , respecto de la dirección de movimiento. En el instante en que se separan, la línea de los centros formará un nuevo ángulo θ_f . En la aproximación de fricción tangencial, durante la interacción las gotas se habrán mantenido a una distancia fija igual a la suma de sus radios. Ya que en los casos estudiados se trata de gotas iguales de diámetro D , esta sería la distancia entre los centros de las gotas. Así, la distancia durante la cual actúa la fuerza gota-gota sería, simplemente,

$$\Delta x = (\theta_f - \theta_1) D/2 \quad (111.9)$$

De esta manera, combinando las ecuaciones 111.8 y 111.9, se puede obtener una predicción para la desviación angular $\Delta\theta = \theta_f - \theta_1$, dada por:

$$\Delta\theta = \frac{(2\rho)^{1/2}}{(D/2) \beta_{gg}} (E_o^{1/2} - E_f^{1/2}) \quad (111.10)$$

Ya que $\Delta\theta$ puede ser medida experimentalmente, en el capítulo V compararemos las observaciones correspondientes con las predicciones de la ecuación (111.10), una vez conocido β_{gg} . En

el siguiente capítulo se describe el procedimiento experimental utilizado para observar las colisiones inelásticas y medir, tanto los coeficientes de fricción como las desviaciones angulares.

CAPITULO IV

EXPERIMENTO

En este capítulo se describe el instrumento utilizado, así como los experimentos realizados con el objeto de observar la evolución temporal de las colisiones entre las gotas. Se trata de determinar la importancia relativa de la "fricción" gota-gota respecto del efecto combinado del aire en el que se mueven y el vidrio sobre el cual se deslizan las gotas.

IV.1 El Instrumento

Las gotas se deslizan sobre un vidrio plano, rectangular (ver fig IV.1) de 27 cm x 18 cm, cuya superficie ha sido esmerilado con polvos de carborundum de 40µm. En los lados más alejados se sitúan dos rampas de iucita que tienen una pendiente cuyo ángulo es de 35° y desde donde son lanzadas las gotas por una ranura o canal que les sirve de guía. Antes de cada "lanzamiento", las gotas son mantenidas a una altura preestablecida sobre la rampa por uñas metálicas que obstruyen las ranuras. Una escala graduada, colocada a lo largo del plano inclinado de cada rampa, permite establecer el punto desde el cual se lanzan las gotas. Este arreglo (vidrio con rampas) está contenido en un marco de madera que limita la trayectoria de las gotas, evitando la pérdida del mercurio.

El nivel horizontal del vidrio se ajusta con tres tornillos que atraviesan el marco de madera verticalmente. En la parte inferior del instrumento se coloca una lámpara, que ilumina desde abajo al vidrio, a través de un orificio circular en la base de madera. Entre la lámpara y el vidrio en que se deslizan las gotas hay un segundo vidrio esmerilado que cumple un doble propósito :

- a) Evitar el calentamiento de las gotas y con ello minimizar su evaporación (que es perjudicial para el experimentador).
- b) Dispensar la luz del foco para lograr una iluminación más uniforme sobre el orificio iluminado.

Ahora bien, el iluminar "por abajo" fue con la intención de producir imágenes en dos tonos (luz y sombra) tal que luz indica ausencia de gota, y sombra, presencia de gota. Como veremos, esta "binarización" de los datos, simplifica considerablemente su análisis

A 1.2 m sobre el vidrio se coloca una cámara de video que permite grabar la acción. Esta cámara graba 30 imágenes cada segundo, con una velocidad de obturación de $1/4000$ de segundo. Tanto la cámara como el marco de madera con los vidrios, las rampas y el sistema de iluminación quedan unidas por una estructura de fierro que, a su vez, este sujeta a los muros del laboratorio para evitar vibraciones durante el experimento.

El diseño del instrumento experimental permite también la modificación de la separación entre las trayectorias paralelas de las gotas mediante el ajuste de los ángulos de lanzamiento. Para

esto, cada rampa se encuentra fija al marco de madera que rodea al vidrio, a través de un tornillo. Cuando este se afloja, se puede variar la orientación de las rampas. Así, cuando las ranuras se encuentran colineales, los lanzamientos causarán colisiones centrales. Si se varia el ángulo de una de las rampas una cantidad $\Delta\theta$ y el de la otra en una cantidad $-\Delta\theta$, se lograra que las trayectorias de las gotas sean paralelas y separadas por una distancia que se conoce como el parámetro de impacto.

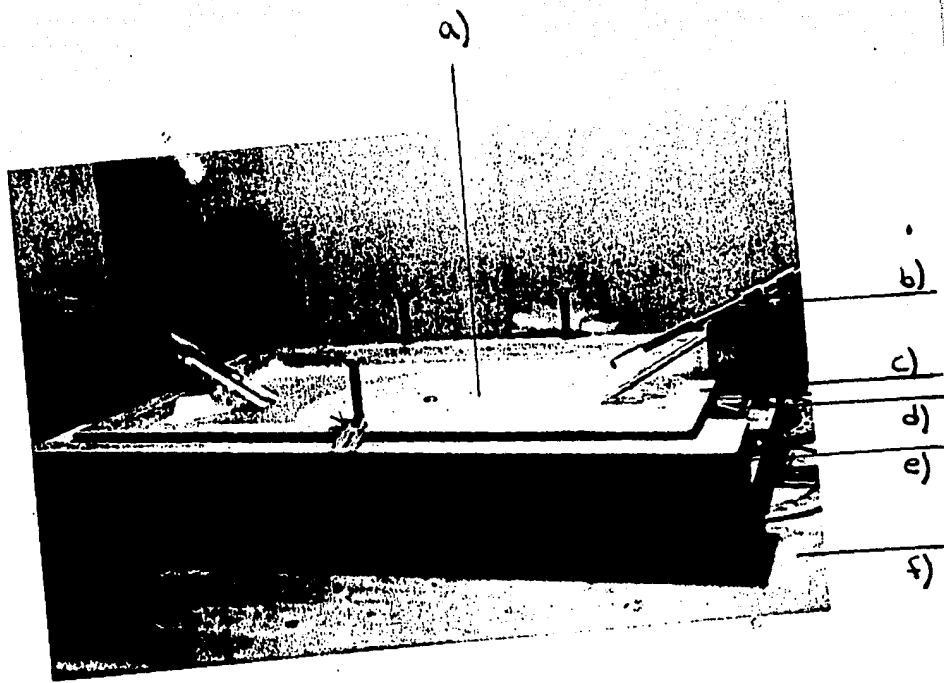
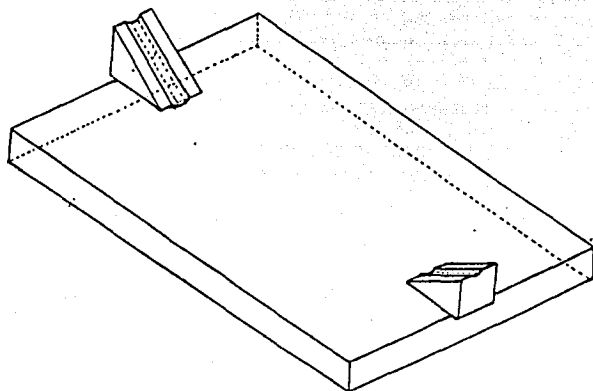
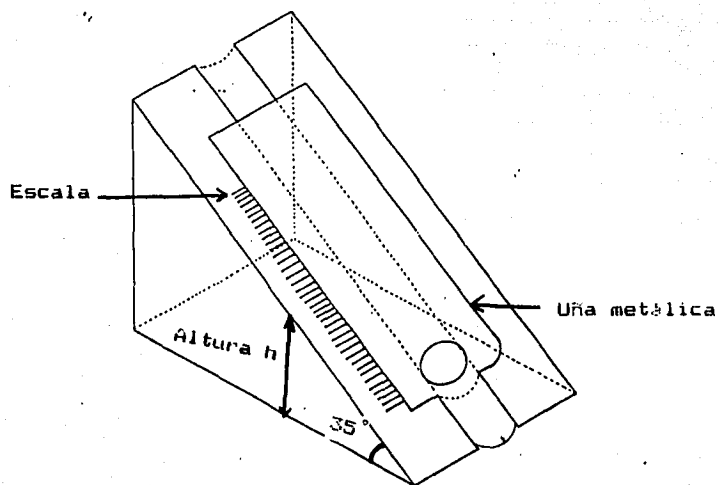


Figura VI.1 Fotografía del aparato. a) vidrio sobre el que se deslizan las gotas, b) rampa c) marco superior d) marco intermedio e) marco inferior f) base de madera.

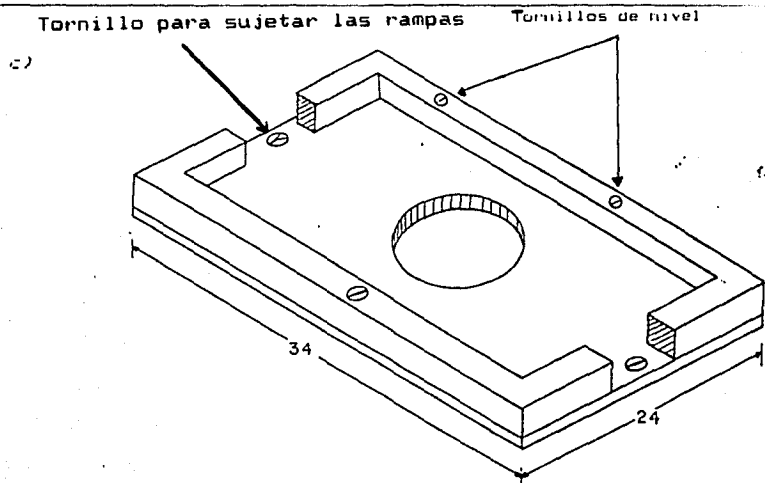
a) Vidrio rugoso sobre el que se deslizan las gotas, y disposición de las rampas.



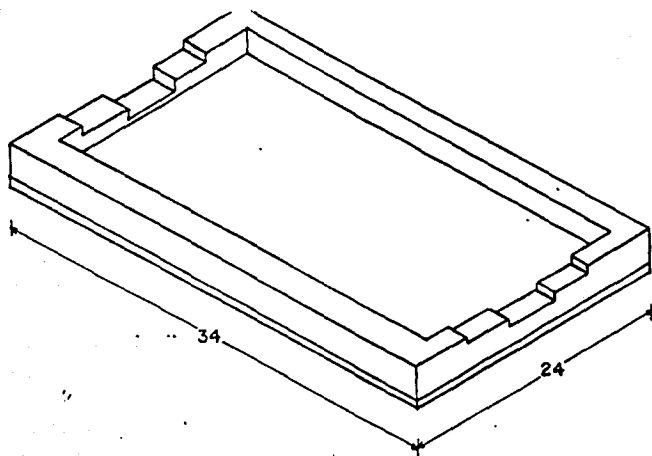
b) Detalle de las rampas.



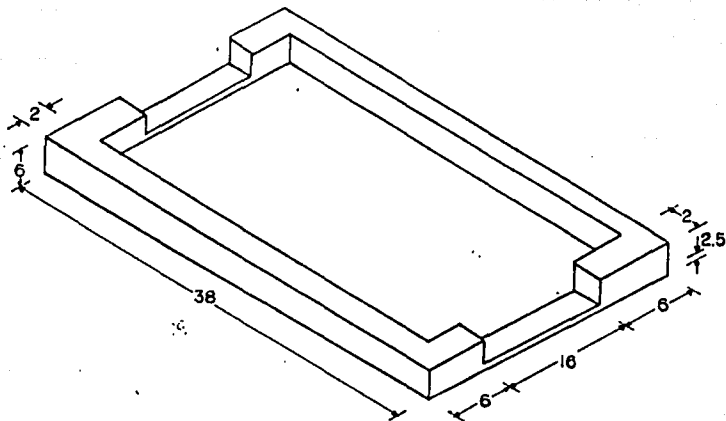
c) Marco superior, que sirve de base al vidrio rugoso y evita la pérdida de mercurio.



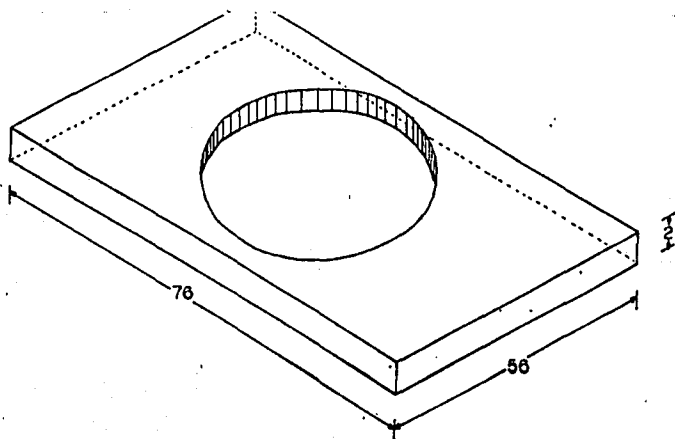
d) Marco intermedio que permite nivelar el vidrio.



e) Marco inferior que envuelve las dos piezas de la página anterior.



f) Base de madera con orificio circular al centro, que sostiene las estructuras anteriores.



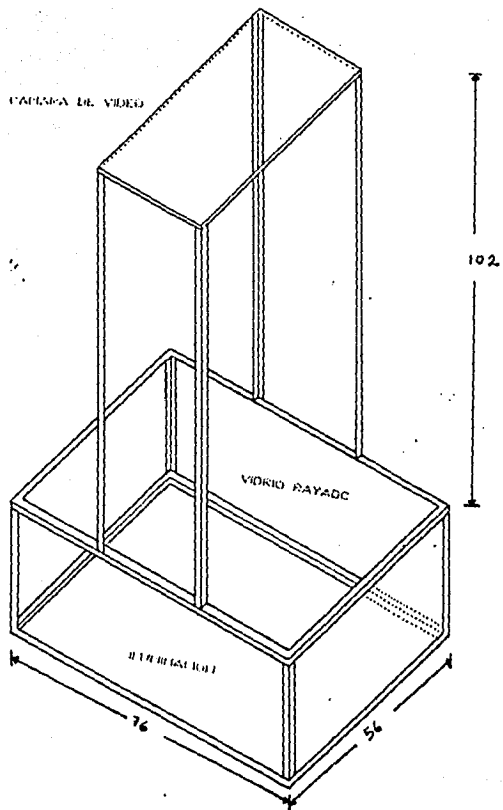


Figura IV.2 Soporte con indicaciones de donde va cada cosa.

IV.2 Calibraciones

El primer factor a considerar en los experimentos fue la limpieza. Las interacciones gota-vidrio y gota-gota dependen de que las superficies de la gota y del vidrio se encuentren libres de contaminantes sólidos (polvo) o líquidos (grasas, solventes, etc). Por esto, el primer paso para garantizar la reproducibilidad de los experimentos fue garantizar la limpieza del vidrio y del mercurio utilizados.

El vidrio esmerilado fue lavado con detergente y, luego, introducido en una tina de ultrasonido que contenía una mezcla de soluciones (limpiador ácido, fosfatizante y desoxidante) para eliminar residuos sólidos y grasas. Posteriormente se le enjuagó, primero con alcohol y finalmente con agua destilada. El equipo ya limpio se mantuvo cubierto para evitar el polvo ambiental hasta antes de la experimentación. En cuanto a las gotas, se utilizó mercurio tri-destilado, manipulado con jeringas estériles y en frascos de vidrio cubiertos.

La masa de las gotas fue medida con una balanza analítica cuya precisión es de 0.0001 g, utilizando el siguiente procedimiento. Primero, se produjo una serie de gotas cuya masa fuera lo más cercana posible a las que se deseaba utilizar en el experimento: 0.3 gr, 0.5 gr, 0.8 gr, 1.3 gr, 1.5 gr, 1.8 gr y 2.0 gr. Luego, a una jeringa desechable se le sustituyó la aguja por un tubo capilar de vidrio. Sobre este capilar, puesto en posición vertical, se le hicieron aforaciones que indicaran las alturas de

las columnas de mercurio correspondientes a las masas mencionadas. Este método de obtener gotas de masas preestablecidas fue probado produciendo cincuenta gotas con el aforado correspondiente a un gramo y, después, pesando cada gota con la balanza de precisión. En la figura IV.3 se muestra la distribución de masas obtenida de esta manera. Como se puede apreciar, el método produjo gotas de 1 g con una desviación estándar del 3%.

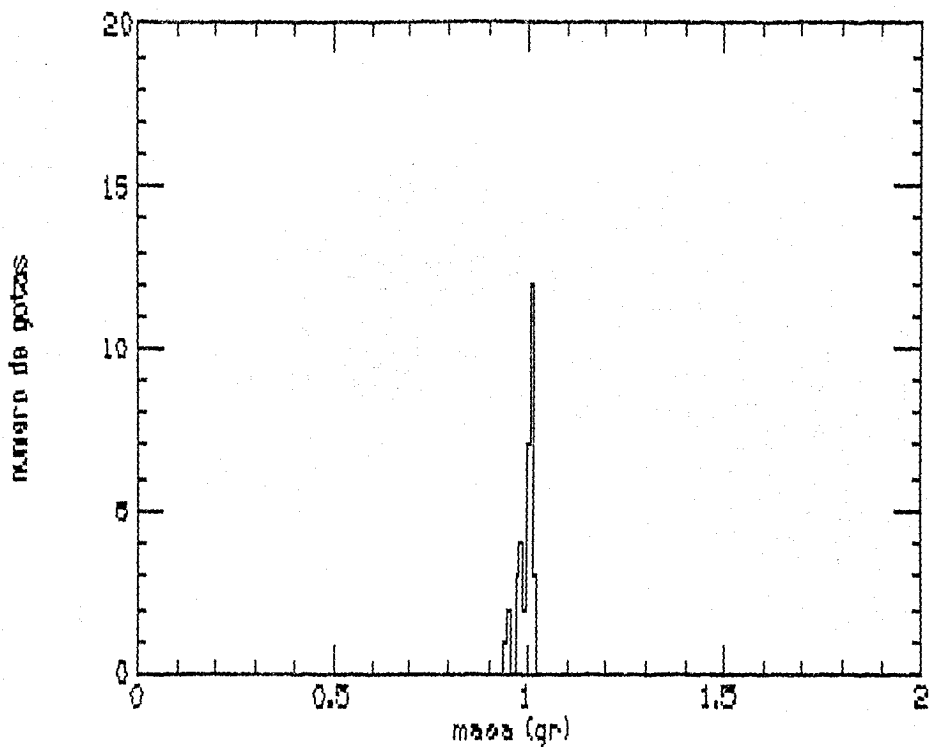


Figura IV.3 Histograma del numero de gotas como función de masa.

Con el método descrito se prepararon las gotas. Posteriormente, la masa de cada gota fue medida en la balanza analítica y registrada para ser utilizada en los cálculos de energía y momento lineal correspondientes. Es decir, ya que se requerían parejas de gotas de masas iguales, en la práctica este método garantizó que las masas de cada par de gotas difirieran entre sí del orden del 3%, mientras que su valor absoluto era conocido con una precisión mucho mayor (0.01%).

El estudio detallado del efecto de los diversos factores sobre el movimiento de las gotas requiere la realización de colisiones a diferentes velocidades. Como ya se vio, esto se logra colocando las gotas a alturas variables sobre las rampas. En la práctica es necesario garantizar que la colisión se lleve a cabo en el campo visual de la cámara, que coincide con el centro del vidrio.

En el caso de colisiones simétricas (gotas de la misma masa), que nos interesa aquí, esto implica lanzar ambas gotas con la misma velocidad, de manera que el centro de masa del sistema colisionante no se desplace respecto a un observador fijo en el laboratorio. Por este motivo fue necesario realizar una calibración de la velocidad que tendría la gota en el punto de colisión (el centro del vidrio) en función de la posición h desde la cual se dejan deslizar las gotas en las rampas. Cabe hacer notar que estas calibraciones solo se utilizaron para poder planeear los experimentos, ya que las velocidades reales de las gotas, como función del tiempo, fueron obtenidas de las imágenes grabadas de cada experimento.

Ya que las rampas no eran idénticas, se debió calibrar cada una por separado. Una característica que las distinguía era que la ranura por donde se desliza el mercurio era más angosta en una que en la otra. Así, para diferenciarlas, a la angosta se le denominó F y a la más gruesa B.

Ya que, como se vio en el capítulo anterior, los coeficientes de fricción relacionados al deslizamiento de gotas son función de la masa de estas, la calibración de cada rampa debió realizarse con gotas de diversas masas para cada altura de lanzamiento h . Así, la rampa F se calibró con gotas cuya masa es de 0.5 gr, 1 gr y 1.5 gr, mientras que la rampa B solo con masas de 1 gr, y 1.5 gr. La calibración para masas intermedias se puede interpolar o extrapolar a partir de estas. Los lanzamientos se realizaron desde alturas h de 0.7, 1.4, 2.1, 2.8, 3.5, y 4.2 centímetros respectivamente, para cada una de las rampas.

Antes de realizar el proceso de grabación de los lanzamientos de calibración, fue necesario, primero, nivelar horizontalmente el plano de deslizamiento de las gotas y, luego, colocar y grabar en video las imágenes de una escala graduada en centímetros en dos posiciones sobre el mismo plano, una paralela a la dirección de movimiento de las gotas y otra perpendicular a esta. Esto último sirve para tener una calibración en centímetros de las dimensiones de las imágenes cuando sean analizadas.

La calibración de las rampas implicó grabar en video los lanzamientos de gotas de las diversas masas desde cada una de las alturas. Como identificación, se registra la lectura del contador

de tiempo de grabación al principio y al final de los lanzamientos. De cada caso (una altura fija y gotas de la misma masa) se grabaron 5 lanzamientos. Este procedimiento se repitió para cada rampa.

Ya con las imágenes grabadas, se procede a su análisis, mismo que se hace a través de un digitalizador. Digitalizar es el proceso de convertir una imagen a su forma digital, es decir, dividir en pequeñas regiones denominadas "pixels". Se puede pensar al digitalizador como una pantalla que posee dos ejes coordenados (x , y). Cada eje coordenado se divide en 512 pixels, así que se tiene una resolución de 512×512 pixels. Se indicó que al realizar los experimentos, se iluminó "por abajo" con la intención de producir imágenes en dos tonos (luz y sombra). La importancia de esto radica en que el digitalizador cuenta con una escala de 128 tonos, que van del negro al blanco, y al tener las imágenes en luz y sombra es fácil diferenciar entre la gota y la superficie del vidrio. Al tener la imagen en el digitalizador, se determina el centro de masa de cada gota, utilizando un cursor, entonces el digitalizador da las coordenadas de posición (x , y) del punto en que está el cursor. Una vez calibrada la imagen digitalizada en centímetros, usando las imágenes previas a los lanzamientos, se anotó las coordenadas del centro de la gota en cada imagen.

Se sabe que la cámara graba 30 imágenes por segundo, por lo que manera se obtiene una gráfica de la posición de cada gota como función del tiempo. A partir de esos datos, se puede determinar la velocidad de la gota en cada instante y, en particular, la que tendrá al pasar por el centro de la imagen. Esto se logra a través

de un ajuste a los datos de posición contra tiempo, utilizando la función:

$$x(t) = \frac{v_0^2}{\beta} \left[1 - \exp \left\{ -\frac{\beta}{m} t \right\} \right] \quad (IV.1)$$

derivada en un capítulo anterior (ecuación 11.7), donde el coeficiente de fricción β y la velocidad inicial v_0 se dejan como parámetros del ajuste. Ya que (ver ecuación 11.5)

$$v = v_0 \exp \left[-\frac{\beta}{m} t \right] \quad (IV.2)$$

de las ecuaciones IV.1 y IV.2 se encuentra que

$$v(x) = v_0 - \frac{\beta}{m} x \quad (IV.3)$$

lo que nos permite encontrar la velocidad en cualquier posición. Ya que había 5 conjuntos de datos para cada masa y para cada rampa, la velocidad asociada a cada altura fue obtenida a partir del promedio de los cinco valores de β y v_0 para cada lanzamiento.

Estas velocidades, en función de la masa y de la altura de lanzamiento, para cada rampa, constituyen la calibración. Las graficas de las figuras IV.3 y IV.4 muestran los resultados obtenidos, junto con un ajuste lineal que podría utilizarse en caso de lanzamientos desde alturas intermedias.

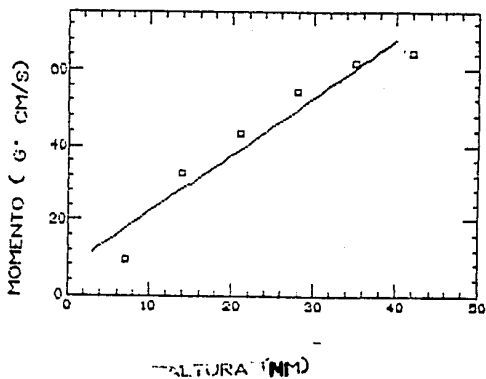
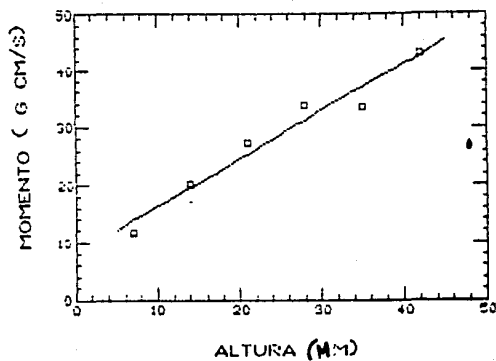
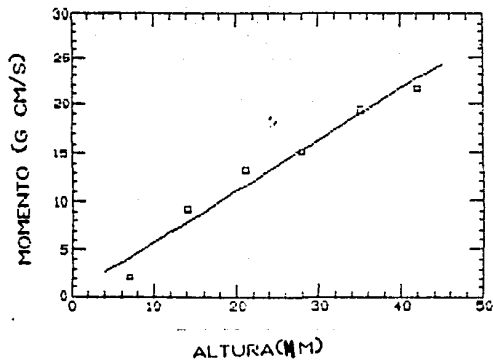


Figura IV.3 Calibración de la rampa F, momento lineal (p) como función de la altura (h) a) $m = 0.5$ gr, b) $m = 1.0$ gr, c) $m = 1.5$ gr.

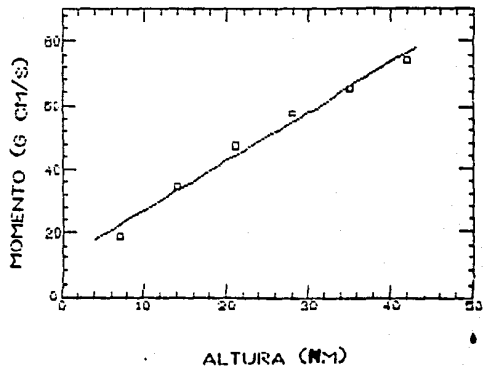
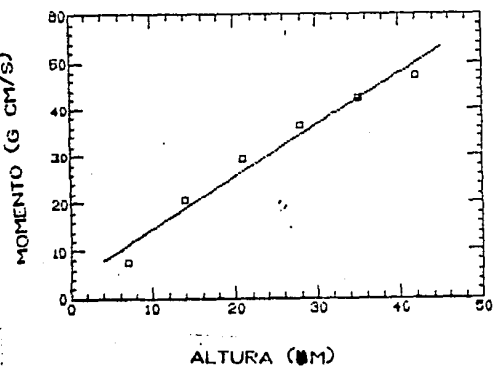


Figura IV.4, La calibración de la rampa G, momento lineal (p) como función de la altura (h) a) $m = 1.0$ gr b) $m = 1.5$ gr.

IV.3 Desarrollo de las colisiones

Una vez calibrado el equipo, el experimento consistió en realizar lanzamientos simultáneos de gotas de igual masa y con la misma velocidad, variando la energía, la masa total y el parámetro de impacto. Se trataba de escoger aquellas colisiones en que, en el estado final resultarían dos gotas de masas aproximadamente iguales. Como se mencionó en el capítulo II, a estas colisiones en que hay poca transferencia neta de masa se les denominó "inelásticas". Las condiciones que determinan que en el estado final aparezcan una, dos o más gotas son el tema de la tesis de licenciatura de Alejandro Cuevas⁷.

Según se explicó en el capítulo III, la interacción gota-gota ocurre mientras estas se tocan y "ruedan" una sobre la otra, de tal forma que el coeficiente de fricción se puede calcular como se haría para el caso de gotas que se deslizan sobre algún material sólido. Desde este punto de vista, es necesario medir el coeficiente β_{gg} para diferentes tipos de colisiones y por ende para diversos desplazamientos ΔX entre las gotas. Esto se logra desde el caso en que estas apenas se tocan tangencialmente, hasta colisiones más centrales. En consecuencia, es necesario variar el parámetro de impacto b entre las gotas colisionantes.

Así, los experimentos consistieron en realizar una serie de lanzamientos de gotas idénticas, variando su masa, la altura de lanzamiento y el parámetro de impacto. Luego de nivelar el equipo y grabar en video las escalas longitudinal y transversal. El

procedimiento consistió en anotar el tiempo de grabación del evento, y realizar el lanzamiento de las gotas repitiendo tres veces cada caso (masa, altura y parámetro de impacto fijos). Para cada altura y masa se varió el parámetro de impacto en tres pasos. Primero colisiones centrales (parámetro de impacto cero), posteriormente colisiones nasales (con el mayor parámetro en el cual aún se tocarán las gotas) y, luego se hicieron lanzamientos para un parámetro de impacto intermedio. Posteriormente se seleccionó otra altura y se siguen los pasos antes citados. Finalmente, se cambia la masa de las gotas y se repite todo el procedimiento.

En total, se realizaron un total de 162 lanzamientos entre los cuales 10 de ellos cumplieron con la definición de colisión inelástica.

CAPITULO V

RESULTADOS

En este capítulo se analizan los datos del capítulo anterior, es decir, las trayectorias de las gotas, a través de las ideas expuestas para la interacción gota-gota; calculando la energía del sistema colisionante, hasta la determinación del coeficiente β_{gg} .

V.1 La trayectoria y energía del sistema

Las posiciones del centro de cada gota (x, y) como función del tiempo, obtenidas del digitalizador, determinan la trayectoria descrita por las gotas. Esta cambia según el momento lineal y el parámetro de impacto que define como será la colisión. A continuación se ilustran (figuras V.1, V.2 y V.3) las trayectorias descritas por gotas, para colisiones del tipo: centrales (parámetro de impacto cero o casi cero), rasantes (contacto tangencial entre ambas gotas) e intermedias.

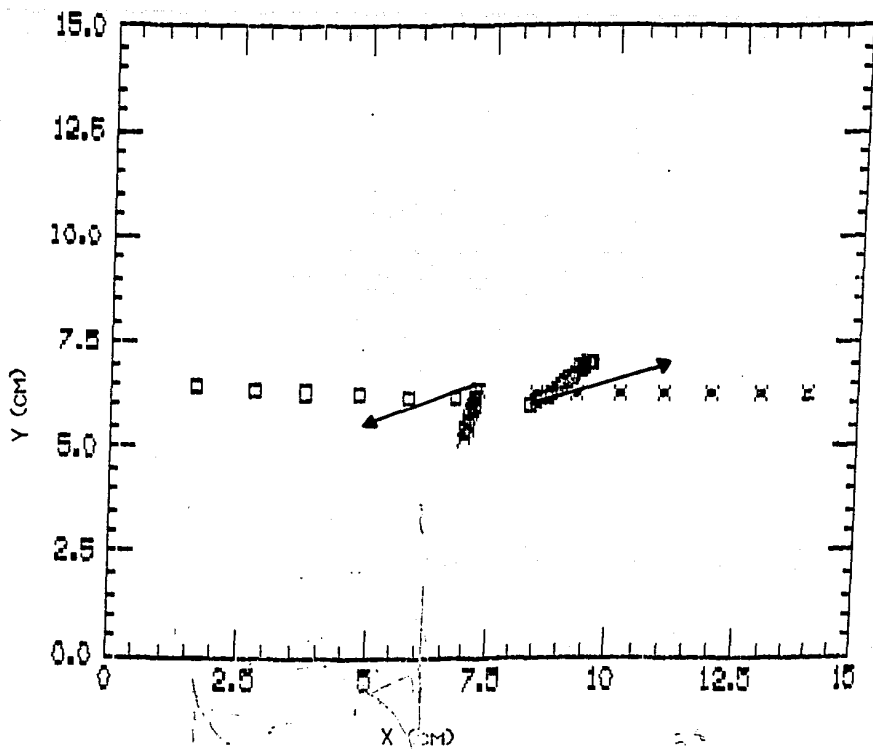


Figura V.1. Trayectoria descrita, en una colisión central, para gotas cuya masa es de 0.8gr., velocidad inicial de 34 cm/seg, y parámetro de impacto $b = .23$ cm. Los símbolos \square y \times representan las posiciones de cada gota. La separación entre cada símbolo equivale a $1/30$ de segundo. Las líneas continuas representan predicciones teóricas de un modelo descrito al final del capítulo.

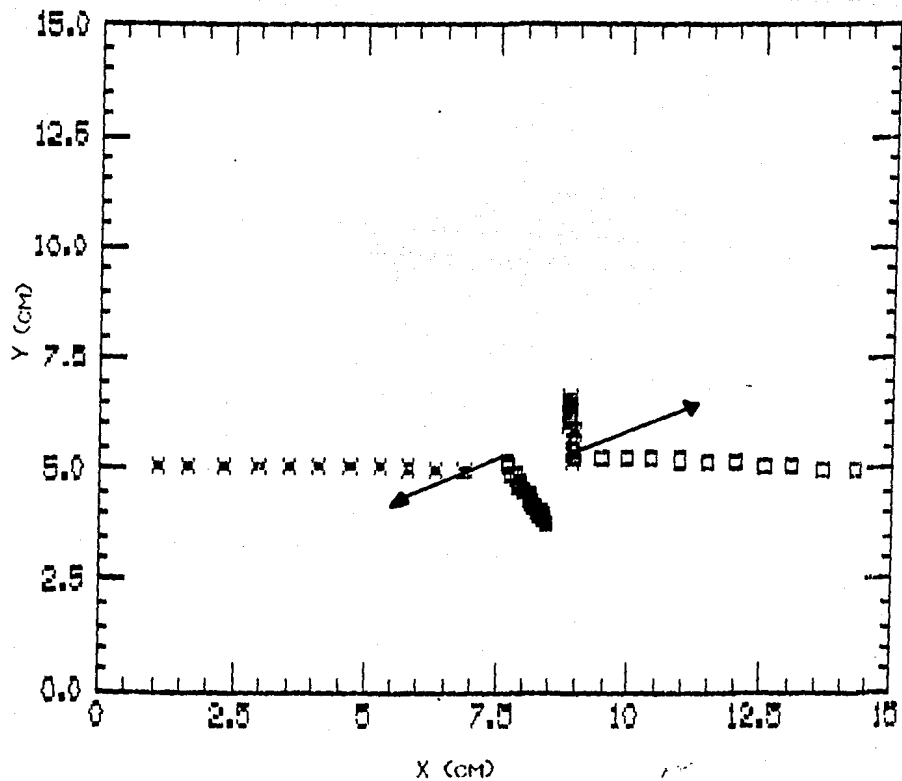


Figura V.2. Trayectoria descrita para una colisión intermedia con gotas de 1.8gr, velocidad inicial de 24 cm/seg y parámetro de impacto $b = .42\text{cm}$. Los símbolos \square y \times representan las posiciones de cada gota. La separación entre cada simbolo equivale a 1/30 de segundo. Las líneas continuas representan predicciones teoricas de un modelo descrito al final del capitulo.

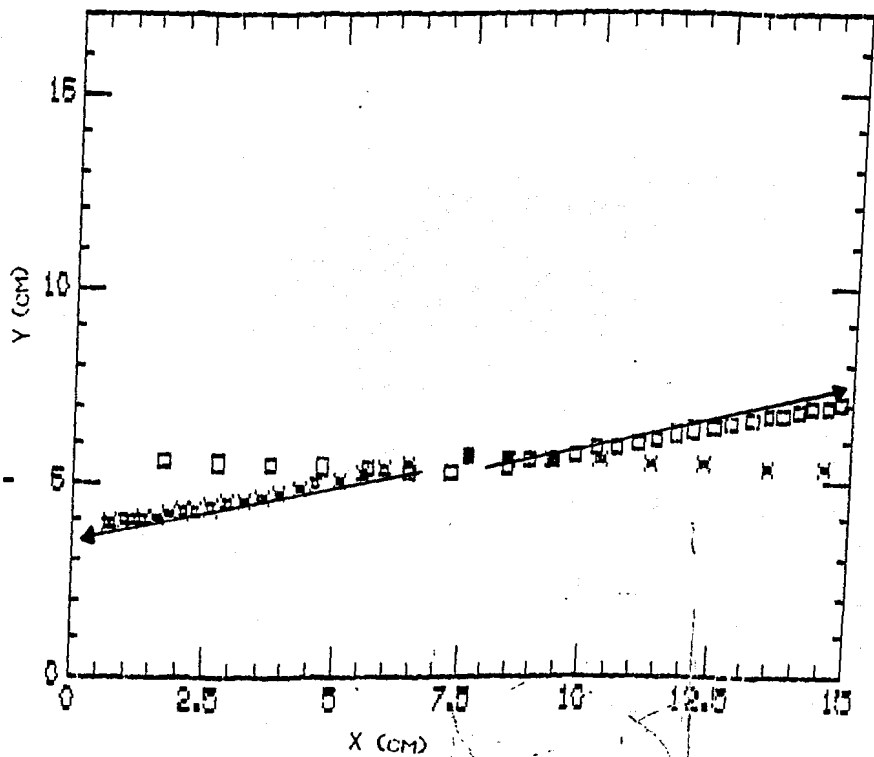


Figura V.3. Trayectoria para colisión rasante con gotas cuya masa es 0.5 μ y velocidad de 35 cm/s, parametro de impacto $b = .4$ cm. Los simbolos \square y \times representan las posiciones de cada gota. La separación entre cada simbolo equivale a 1/30 de segundo. Las líneas continuas representan predicciones teóricas de un modelo descrito al final del capítulo.

V.1 Desplazamiento gota-gota

Con los datos de la trayectoria como función del tiempo (x, y, t) en el sistema del laboratorio, utilizando las ecuaciones descritas en el capítulo III (ver ecuación III.4), se obtuvo la energía cinética total de las dos gotas como función del tiempo $E(t)$, en el sistema de laboratorio. Para ello se desarrolló un programa de cómputo, el cual ajusta los datos de posición contra tiempo utilizando el criterio de minimización de χ^2 . Las figuras V.4, V.5 y V.6 muestran tres ejemplos de los resultados obtenidos para $E(t)$ en colisiones, con parámetro de impacto pequeño ("colisión central"), intermedio y rasante ("colisión periférica"), respectivamente.

En esas figuras se observa la existencia de una discontinuidad en la función $E(t)$ durante el contacto gota-gota, lo que indica que hubo una gran pérdida de energía en la colisión, misma que se observa en la tabla V.1, la cual da los valores de energía total para el instante en que se tocan las gotas (E_a), el instante en que separan (E_d), finalmente se da la energía de las gotas al tiempo $t=0$. Como se demostró en el capítulo II, el movimiento de las gotas, antes y después de la colisión, se encuentra dominado por la interacción gota-vapor, determinada por el coeficiente β_{gv} . Ya que, durante la colisión, el único cambio es el contacto mismo de las gotas, el que la tasa de pérdida de energía en ese lapso aumenta enormemente, representa, al menos, una prueba cualitativa de que $\beta_{gg} \gg \beta_{gv}$.

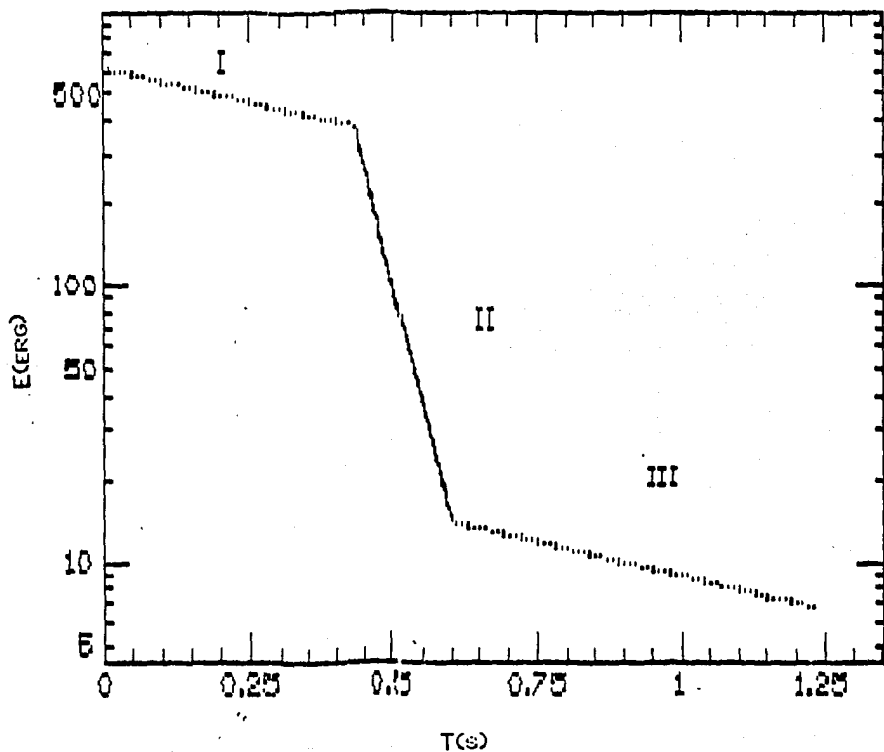


Figura V.4 Energia total como función del tiempo para la colisión central.

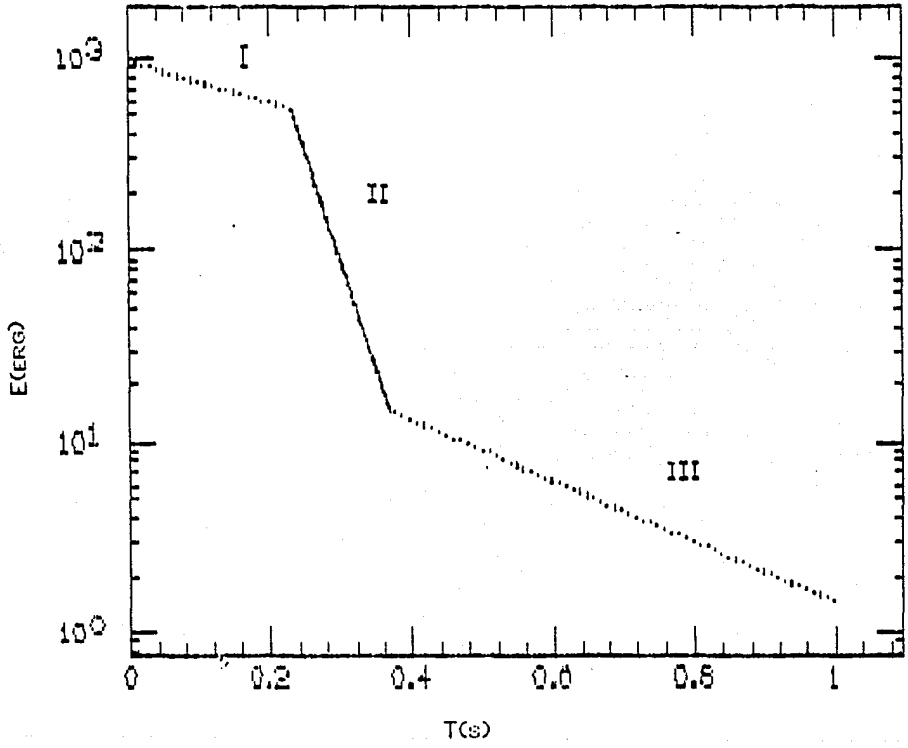


Figura V.5 Energia total como funcion del tiempo, para la colision intermedia.

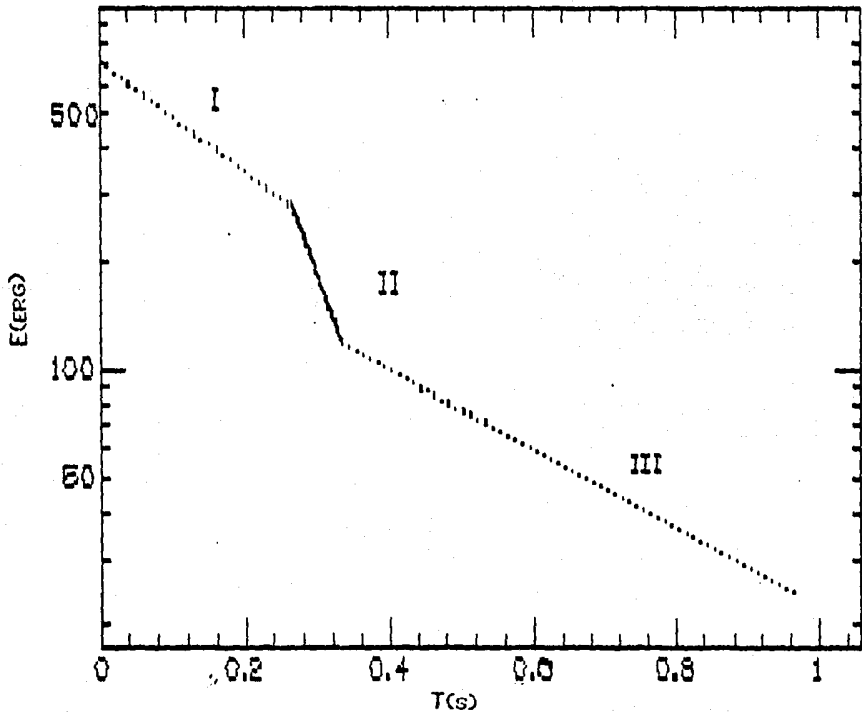


Figura V.6 Energía como función del tiempo, para la colisión rasante.

| E_0 | E_a | E_d |
|---------|---------|--------|
| 648.37 | 413.07 | 33.48 |
| 1123.51 | 603.12 | 14.67 |
| 613.28 | 377.36 | 13.96 |
| 642.43 | 407.03 | 55.48 |
| 897.00 | 540.98 | 26.45 |
| 1582.83 | 1104.46 | 13.41 |
| 948.70 | 542.54 | 14.69 |
| 872.98 | 440.81 | 13.39 |
| 696.75 | 281.16 | 118.37 |
| 437.23 | 185.75 | 14.70 |

Tabla V.1 Los valores E_0 , E_a , E_d representan la energía total de las gotas para $t=0$, para el instante en que se tocan y el instante en que se separan respectivamente. Todos los valores están en erg.

A partir de ajustes a las funciones $E(t)$ obtenidas para las diez colisiones inelásticas se obtienen los coeficientes de fricción β_I , β_{II} y β_{III} para las tres etapas de cada experimento.

| β_I | β_{II} | β_{III} | $\bar{\beta}_{gv}$ | β_{gg} |
|-----------|--------------|---------------|--------------------|--------------|
| 0.56 | 4.36 | 0.39 | 0.46 | 3.97 |
| 0.50 | 13.59 | 0.66 | 0.58 | 13.01 |
| 0.51 | 8.70 | 0.50 | 0.51 | 8.40 |
| 0.51 | 4.48 | 2.00 | 1.22 | 3.07 |
| 0.49 | 4.90 | 0.99 | 0.74 | 4.16 |
| 0.51 | 7.14 | 0.16 | 0.83 | 6.31 |
| 0.48 | 5.28 | 0.73 | 0.61 | 4.67 |
| 0.52 | 6.98 | 0.73 | 0.62 | 6.29 |
| 0.44 | 1.66 | 0.32 | 0.38 | 1.25 |
| 0.27 | 2.84 | 1.00 | 0.64 | 2.19 |

Tabla V.2 Los valores de β_I , β_{II} y β_{III} derivados de los ajustes para cada una de las 10 colisiones. En otras columnas se listan los valores de $\bar{\beta}_{gv}$ promedio y el valor derivado de β_{gg} . (todos estos valores estan en gr/seg)

En la tabla V.2 se muestran los resultados correspondientes. Ahí se puede apreciar que $\beta_I \approx \beta_{III} = \beta_{II}$. El que los coeficientes de la primera y última etapas se parezcan, refleja el hecho de que en las colisiones inelásticas, antes y después de la colisión haya dos gotas de igual masa. En ese sentido, la tercera etapa podría ser vista como una continuación, a largos tiempos, de la primera. Este parecido justifica el uso de la ecuación III.5 para extraer los valores de β_{3g} a partir de β_{II} y un promedio de β_I y β_{III} es decir:

$$\beta_{3g} \approx \beta_{II} - (\beta_I + \beta_{III})/2 \quad (V.1)$$

en que se utiliza la aproximación $\bar{\beta}_{3g} \approx (\beta_I + \beta_{III})/2$, basada en el hecho de que, como se demostró en el capítulo II, durante el deslizamiento de las gotas en el vidrio $\beta_{3g} = \beta_{3a}$. Así, la última columna de la tabla V.1 da los valores de β_{3g} obtenidos. De esta manera se demuestra más cuantitativamente que durante el contacto gota-gota, la acción del vidrio y del aire son poco importantes, comparadas con la interacción misma entre las gotas.

El modelo descrito en el capítulo III explica la interacción gota-gota como un fenómeno de rodamiento en la interfase de los dos cuerpos, con un coeficiente de fricción β_{gg} . En este contexto, resulta sencillo utilizar los valores de β_{3g} , obtenidos a partir del ajuste a las gráficas de pérdida de energía como función del tiempo, para predecir el ángulo de deflexión. Así, estos ángulos pueden ser comparados con los ángulos observados como una prueba de

la consistencia del modelo de fricción tangencial. Los ángulos de deflexión predichos por este modelo fueron incluidos en las figuras V.1, V.2 y V.3 (líneas continuas).

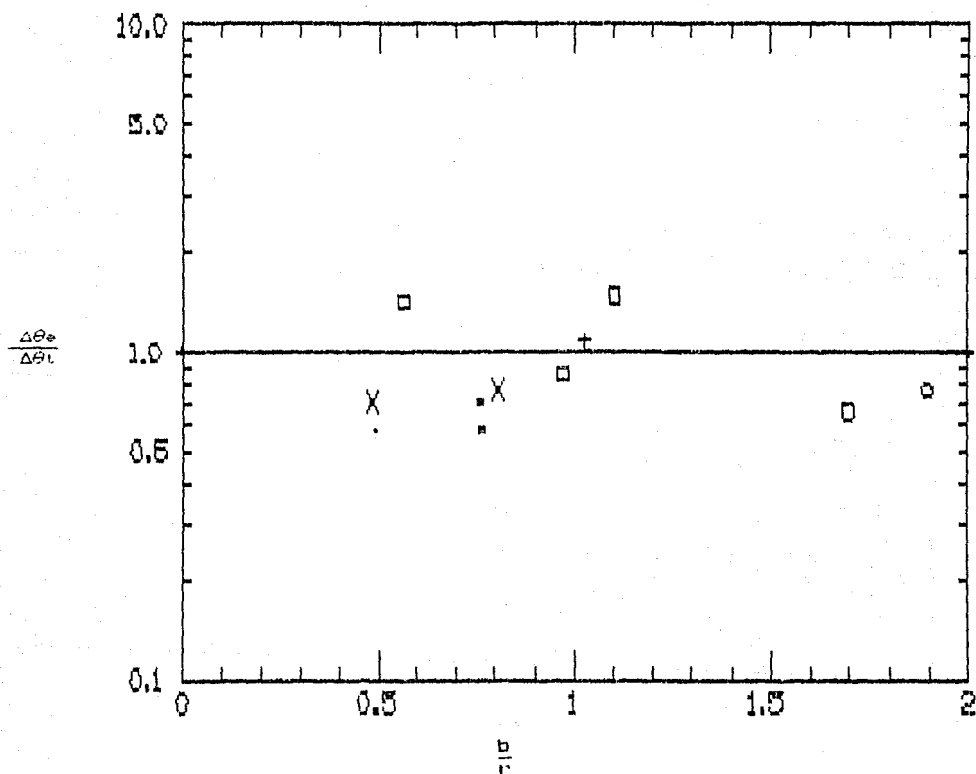


Figura V.7 gráfica del cociente $\Delta\theta_e/\Delta\theta_c$ vs b/r . La línea horizontal representa la predicción teórica.

En la figura V.7 se grafica el cociente $\Delta\theta_e/\Delta\theta_t$ entre la desviación angular observada y la predicha, como función del parámetro de impacto. Ya que se están comparando sistemas de diversas masas, el parámetro de impacto se expresa normalizado por el radio de las gotas. Como puede apreciarse, este modelo simple da una buena descripción de la desviación angular, para una variedad de parámetros de impacto y diversas masas.

CAPITULO VI

CONCLUSIONES

Como parte de una serie de estudios sobre la interacción entre gotas que se deslizan sobre una superficie solida plana, el proposito de esta tesis fue encontrar el sistema liquido-solido que reuniera las siguientes condiciones: a) que se tratase de materiales de facil acceso, y b) que fuese un liquido y una superficie tales que la interacción mutua resultara poco importante comparada con la interacción de las gotas entre si.

Tales condiciones implicaron la solución de dos problemas un tanto independientes. El primero fue estudiar experimentalmente la naturaleza y la magnitud de la fuerza que afecta el movimiento de una gota sobre una superficie. Tambien se determino teóricamente la importancia relativa de la interacción gota-aire, respecto de la gota-vidrio. El segundo problema fue establecer algun marco de referencia que permitiera la comparación de esa fuerza gota-superficie con la resultante de la interacción gota-gota.

Las medidas experimentales, que implicaron la construcción y calibración de un instrumento para estudiar el movimiento y la colisión de gotas, fueron extraídas a partir de imágenes tomadas con una video-grabadora de obturación rápida.

Como resultado, se determinó que, primero, un sistema viable para estudiar choques entre gotas es el mercurio-vidrio. Con base

en un estudio anterior, se mostro que el uso de vidrios rugosos permite minimizar la magnitud de la fuerza que frena a las gotas. Una estimacion simple demostró que la contribucion a esta fuerza debida a la friccion con el aire, para las gotas estudiadas, es despreciable.

Ya que las interacciones gota-gota pueden ser muy complejas, para permitir una comparacion con las fuerzas tipo friccion que afectan el movimiento de las gotas antes de la colision, se escogió un tipo de colisiones gota-gota en las que, como resultado final, se obtienen dos gotas de masas muy similares a las iniciales. Visualmente este tipo de colisiones, denominadas inelásticas, dan la impresion de dos gotas que se unen temporalmente, girando una sobre otra, y que se separan luego de una perdida de energia considerable. Esta imagen simplificada permitio introducir, nuevamente, el concepto de la accion de una fuerza de friccion, esta vez, durante el aparente deslizamiento de una gota sobre la otra.

En base a esta imagen de friccion tangencial, el analisis de la perdida de energia como funcion del tiempo, permitio establecer la magnitud de la fuerza de friccion que actua durante las colisiones inelásticas. De esta manera se pudo mostrar que esta es varias veces mayor a la que ocurre antes, o despues, del contacto gota-gota. Una comparacion de los coeficientes de friccion correspondientes permitieron mostrar, de una manera más cuantitativa, que en las colisiones inelásticas observadas, la accion dominante es la interaccion gota-gota. Finalmente, como una

prueba de consistencia, el modelo de fricción tangencial para colisiones inelásticas permitió predecir con éxito los ángulos de desviación observados experimentalmente.

REFERENCIAS

- ¹ Chandrasekhar S. *Proc. London Math. Soc.* 9 (1959) 141
- ² de Gennes, P.G. 1985. *Mod. Phys.* 57, 627
- ³ Johnson R.E. & Detree K.H. 1964. In *Contact Angle Wettability and adhesion*, Advances in Chemistry Series N: 43, 112, y Detree K.H. & Johnson, R.E., 1964 In *Contact Angle Wettability and adhesion*, Advances in Chemistry Series, No.43, 136.
- ⁴ Menchaca Rocha Arturo, *The mobility of mercury drops on rough glass surface* aceptado en: *Journal of Colloid and Interface Science* (1991)
- ⁵ Fruppacher H.R. and Klett J.D., *Microphysics of Clouds and Precipitation* (1978) D. Reidel Publishing Co.
- ⁶ L. Landau, E. Lifchitz. *Mecánica de fluidos*, Ed. Mir (1967)
- ⁷ Cuevas Salgado Alejandro, *Limite de momento angular para una gota líquida*, tesis, FCUNAM, Agosto de 1991