UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

Facultad de Quimica

Jose Alfonso Loyola y Blanco

DISEÑO DE UN SISTEMA PARA LA ENSEÑANZA DE LA MATEMATICA
FUNDAMENTOS DEL PROCESO ENSEÑANZA-APRENDIZAJE

INGENIERO QUIMICO

1974

JURADO ASIGNADO ORIGINALMENTE SEGUN EL TEMA

PRESIDENTE	Jorge Sierra Carvantes
VOCAL	Guillermo Barraza Ortega
SECRETARIO	Perla Ortiz Monasterio
1er. SUPLENTE	Javier De la Vega Andere
2o. SUPLENTE	Cutberto Ramírez Castillo

Sitio donde se desarrolló el tema :

C.C.H. Plantel Vallejo
Facultad de Química , U.N.A.M.

Nombre completo y firma del sustentante :

José Alfonso Loyola y Blanco ____________

Nombre completo y firma del asesor del tema :

Guillermo Barraza Ortega ____________

Nombre completo y firma del supervisor técnico :

Perla Ortiz Monasterio ____________

A mis padres
A la familia Martin-Garreta

A mi hermana
A Edgar y
Victor

Prefacio

De la incomprensión de un lenguaje matemático, y de la ubicación que éste tiene dentro de la ciencia, surgen dos resultados principales :

a) El profesionista que carece de una estructura matemática adecuada no tiene la posibilidad de traducir los resultados de su problemática particular a un lenguaje capaz de analizar las relaciones y asi llegar a la solución mas pertinente.

b) A un nivel preuniversitario, es determinante en la elección de una carrera.

Durante mis estudios de Ingeniería Química, esto representó uno de mis principales problemas de estudio. En realidad, a partir de mi experiencia profesional en el C. C. H. pude percatarme que esto constituye un complejo de factores en la educación.
Asi, el propósito inicial de este trabajo es el de diseñar un curso integrado de Teoría de conjuntos y Lógica matemática para alumnos del primer curso en el C. C. H. . Los contenidos son aproximadamente aquellos recomendados por los programas oficiales.
Por otro lado, también se intenta proveer de una estrategia para el diseño de sistemas educativos.

El trabajo en su primera parte , conduce a establecer una estructura para el sistema enseñanza-aprendizaje de la matemática;en la segunda , esta estructura se particulariza para un curso específico.
En el desarrollo, el capitulo inicial delimita el problema que existe en la enseñanza-aprendizaje de la matemática, al cuál no se le ha dado una solución adecuada durante mucho tiempo, hasta donde yo estoy informado.
Partiendo de ello, se efectúa una recopilación de procesos de aprendizaje en diversas situaciones. El estudio de estos tiene como fin primordial, establecer criterios que generen alternativas para el diseño de un sistema útil, en las circunstancias que nos ocupen.
Se encontrarán :

1)Desarrollos y aprendizajes globales , tales como :

a)El desarrollo de la inteligencia desde el nacimiento del niño hasta que surgen los esquemas de imitación, lo cuál incide un factor en el punto de vista del educador, respecto a la matemática:
¿Es ésta un objeto externo que hay que captar tal cuál ?
¿Es algo susceptible de ser desarrollado por la inteligencia ?

-Piaget.

b)Seis pasos para el aprendizaje de una estructura matemática.

-Dienes.

c)Abstracción e integración de conceptos en una estructura.

-Skemp.

2)Situaciones particulares de aprendizaje :

a)Un estudio experimental de la formación de un concepto.

-Vygotsky.

b)Distinción del aprendizaje de las formas gramaticales en tres niveles.

-Fraser, Bellugi & Brown.

c)La secuencia de eventos que caracteriza a una metodología , origina en el educando un aprendizaje condicionado, o lo lleva mediante intentos y errores a un sistema de pensamiento.

-Pavlov , Thorndike.

La síntesis de las alternativas presentadas, origina un sistema general. Se caracteriza a éste a partir de ciertas propiedades en el sistema de enseñanza-aprendizaje :

a)Forma parte de las ciencias empíricas.
b)Se orienta mediante una filosofía.
c)Se origina a partir de los objetivos, los cuáles deben ser realistas y surgir de necesidades actuales.
d)Se sostiene sobre una estructura, que corresponde a un proceso operacional que la mente efectúa.
e)Toma cuerpo con la infor mación que se desea proporcionar.

En el curso de Lógica matemática que se presenta en la segunda parte, se encontrará una continuidad en el contenido que corresponde a un método científico. Por ello, el primer capítulo, pretende para el estudiante el desarrollo de su capacidad de abstracción, a fin de concluir en hechos significativos en el sentido que conducen a leyes. El siguiente capitulo, además de aclarar la función que desempeña un 'modelo' en la continuidad del conocimiento científico, integra el proceso de abstracción con la formación de un lenguaje. Como consecuencia, el último capitulo permitirá por las bases establecidas, la comprensión de la Lógica simbólica, que en este caso se observará como el producto de todo un proceso intelectual.
El desarrollo no solo permite por el orden de ideas, ubicar al alumno en lo que la "matemática" es, desterrando asi de su mente, la idea de algo inalcanzable, o algo que surge de la nada, sino que también le induce a establecer relaciones con las ciencias experimentales.
Por otro lado cada capitulo ha sido dividido en secciones , las cuáles mediante un proceso de aprendizaje específico tienen como objetivo la integración de un conjunto de conceptos. Se recomienda para cada una de éstas en primer término leer los objetivos y la información, posteriormente efectuar las actividades señaladas mediante la ruta dada dentro del proceso de aprendizaje, consultando una vez más, aquella información pertinente ;al término de esta serie de operaciones mentales los objetivos deben ser alcanzados, por lo que un análisis de éstos evaluará el conocimiento adquirido, debiéndose corregir aquello que no ha sido debidamente aprendido.
Es posible que se encuentren errores, si el material se aplica a la realización de un curso, no obstante esto, debe tenerse presente que la concepción de un sistema de enseñanza-aprendizaje según aqui se presenta, no es la de un 'objeto' ya terminado, precisamente el enfrentarlo a una realidad y modificarlo o sustituirlo de acuerdo a ésto, es lo que se busca.

No podría omitir, al llegar al término de este trabajo, la mención debida a los profesores que, en diversas formas, me brindaron valiosa cooperación y a quiénes dejo aqui constancia de mi agradecimiento.
Al Quím. Guillermo Barraza, director de la tesis.
A la Psic. Perla Ortiz Monasterio, por su guía, colaboración e intercambio de ideas, sin las cuáles este trabajo no se hubiera llevado a cabo.
Al Ing. Jorge Sierra, por sus consejos y ayuda que me permitieron salvar los obstáculos para la realización de la tesis.
A la Mat. Josefina Toledo, quién revisó cuidadosamehte la parte matemática y me hizo sugerencias muy útiles y acertadas.
A la Profa. Angelina Guizar, quién corrigió la redacción de la primera parte, por sus finas atenciones.
A la Pedagoga Hortencia Murillo, por la revisión de los objetivos educacionales y sus inteligentes observaciones.
Al Prof. Jorge Blázquez, a Raúl Monteforte y el grupo de alumnos del C.C.H., quiénes colaboraron activamente para comprobar, en la práctica, las ideas aqui expuestas.

Contenidos

PRIMERA PARTE

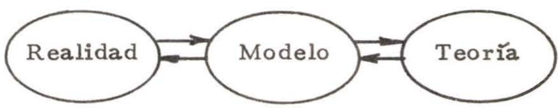
Delimitación del problema.

Introducción

La enseñanza de la Matemática, como actividad profesional plantea una serie de problemas al educador: dificultad para comprender, ausencia de motivación, rechazo hacia el estudio, prejuicios, etc.

Mis primeras experiencias en el C.C.H. en esta actividad me han llevado a tratar de proponer una solución a este problema.

La metodología seguida en el colegio, se ha basado en un modelo* de aprendizaje:



Este modelo al ser aplicado a los cursos, ha creado sistemas que en lo general tienden a presentar el producto intelectual del maestro, lo que para el alumno constituye simple información y una participación casi exclusivamente de memoria y mecanización.

Al escribir este trabajo, he tendido hacia una presentación que no este en función de una demostración lógica del conocimiento matemático, sino que siga un proceso lógico en la secuencia del aprendizaje de la matemática.

Se propone un sistema organizado de modo que el aprendizaje siga, hasta donde sea posible, el proceso de la mente, e implique una participación del alumno con el fin de que él mismo genere su producto, es decir, que alcance por sí mismo el conocimiento.

*S. López de Medrano, Modelos matemáticos, Lenguajes simbólicos, ANUIES, 1972, pag. 43, pag. 30.

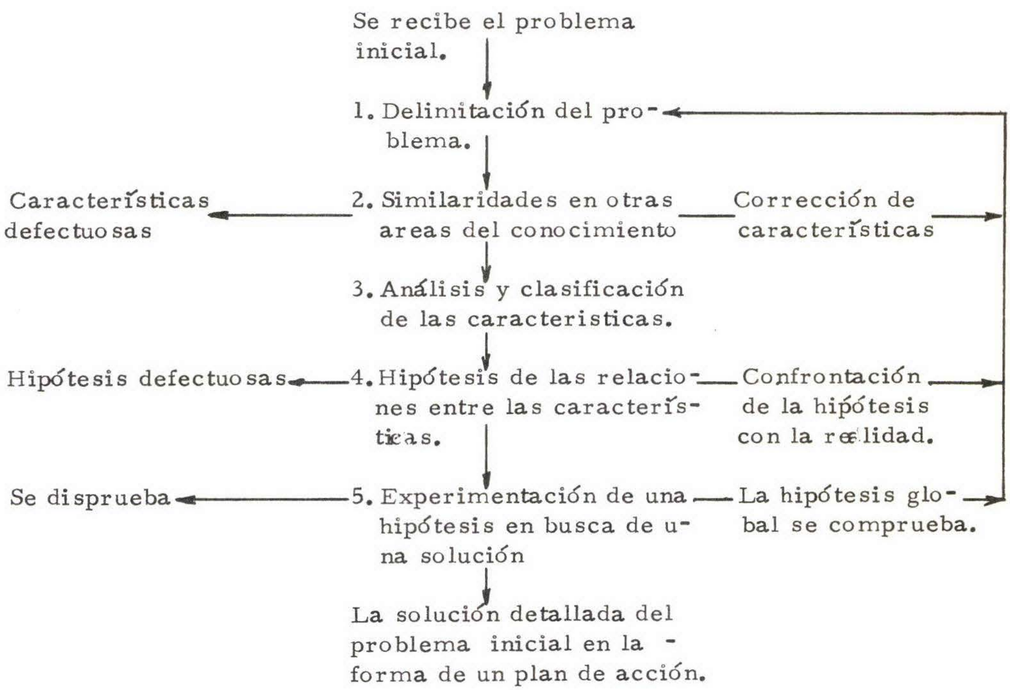
Metodología.

La generación de alternativas posibles*

Todo sistema de procesos comienza como un probelma inicial. Éste consiste en la proposición de una necesidad que ha sido mal definida. Para su solución debe seguirse un método científico.

Pasos del método propuesto:

1. La delimitación del problema.
   Se establece con claridad aquello en lo que se va a concentrar la atención.
2. Similaridades en otras áreas del conocimiento.
   Dadas las características del problema, se buscan marcos de referencia en otras áreas, a fin de encontrar situaciones semejantes.
3. Análisis y clasificación de las características.
   Las diversas características se examinan en los marcos de referencia obtenidos.
4. Hipótesis de las relaciones entre las características.
   El análisis conlleva la generación de relaciones entre las características.
5. Experimentación de una hipótesis en busca de una solución.
   La relación de las características origina hipótesis globales, que pueden convertirse en la solución detallada del problema.



* Dale F. Rudd and Charles C. Watson, Strategy of Process Engineering, Wiley, I. E., 1968.

Las estructuras matemáticas y las estructuras operatorias de la inteligencia.

"El problema central, tanto para el encargado de enseñar las verdades matemáticas, como para el epistemólogo, que reflexiona sobre la naturaleza de los conceptos matemáticos, parece ser el saber si las conexiones matemáticas son engendradas por la actividad de la inteligencia, o si ésta las descubre como una ralidad exterior y completa". *
Por ello, el educador se encuentra ante una disyuntiva : Inspirarse en la lógica formal para ser fiel al espiritu de las matemáticas contemporáneas o por otro lado, considerar el pensamiento matemático como una construcción espontánea de la inteligencia y asi recurrir a las enseñanzas de la psicología , tanto como a las de la lógica.
En efecto, la inteligencia se orienta espontáneamente hacia la organización de opeaciones dentro de sus estructuras que vienen a ser análogas a ciertas estructuras matemáticas, y como consecuencia de esta analogía, el proceso de desarrollo de la inteligencia muestra un aspecto psicológico que complementa a la lógica.
No obstante, desde el punto de vista práctico, no se trata, para el educador, de elegir entre los métodos formales fundados en la lógica y los métodos activos fundados en la psicología : el objetivo de la enseñanza de la matemática será siempre, alcanzar el "rigor lógico", lo mismo que la comprensión basada en un desarrollo formal.
Lo que aqui se intenta es sujetar al alumno a una serie de procesos, que proporciona la psicología, para asimilar efectivamente el contenido matemático.
El principio pedagógico de que todo conocimiento parte de la experiencia del individuo supone una participación activa del sujeto : en primer término el contacto físico permite inducir las propiedades del objeto mediante la percepción del mismo, posteriormente, se realiza la abstracción lógico-matemática, a partir de las acciones u operaciones efectuadas sobre el objeto, y no a partir del objetocomo tal. Como consecuencia de esto último el aprendizaje no constituye, simplemente, una integración de experiencias en forma lineal.

A continuación se muestra un diagrama, en el que se ha esquematizado el desarrollo de la inteligencia desde el nacimiento del niño hasta su etapa de imitación. El diagtama no pretende una exactitud del desarrollo, sino mostrar ciertos aspectos que pueden ser de utilidad para las necesidades de un curso.

* J. Piaget y otros, La enseñanza de las matemáticas, Aguilar, Madrid, 1971, págs. 3-28.

Organismo con un sistema cerebro espinal integrado;instintos - percepciones y conductas reflejas.

Coordinacion de sensaciones y-movimientos.

Ubicación en el medio ambiente. Abstracción de ciertas caracteristicas de vinculación del individuo con el medio;almacén de - experiencias.

Discriminación de elementos - que no caen en el campo de intereses del sujeto.

Actividad generalizada e indis - criminada;los esquemas iniciales se utilizan como medios de investigación.

Coordinación de nuevos movimientos.

Nuevos resultados.

Resultados semejantes. Memoria.

Integración de hábitos y percepciones organizadas.

Conductas reflejas habituales.

Conductas miméticas.

Las seis etapas del aprendizaje en Matemáticas *

Entorno

En esta primera etapa se introduce al individuo en un medio ambiente, construído en particular para poder deducir algunas estructuras matemáticas. Decir de un organismo cualquiera que ha aprendido algo, significa que éste ha podido modificar su comportamiento con respecto a un entorno dado. Si nos proponemos que un individuo aprenda lógica - matemática, parece indispensable enfrentarle ante situaciones que lo lleven a conformar conceptos lógicos ;se inventa un entorno artificial -los bloques lógicos- y al contacto con éste, irá formando de manera más o menos sistemática conceptos lógicos.

Caracterización del medio

Tras un período de adaptación el individuo descubre, en el medio , ciertas regularidades, la agrupación de las cuáles conduce a determinar las características que identifican el entorno artificial. A partir de esta caracterización , el individuo se adapta con mayor seguridad y comienza a manejar las regularidades.

Isomorfismo

Las características de los objetos en un medio, son determinantes de éste. A partir de regularidades en un medio, se comienzan a establecer conexiones de naturaleza abstracta, las propiedades inventadas carecen de importancia, puesto que éstas únicamente son variables que han tomado diversos valores. Se efectúa una abstracción , el individuo se da cuenta de lo que hay de semejante entre los objetos del medio.

Representación

Una vez encontradas las relaciones de naturaleza abstracta que caracterizan la estructura, se necesita de una representación que la simplifique y que permita hablar de lo que se abstrae. Asi, se generan una serie de modelos matemáticos que poseen las mismas características de la estructura.

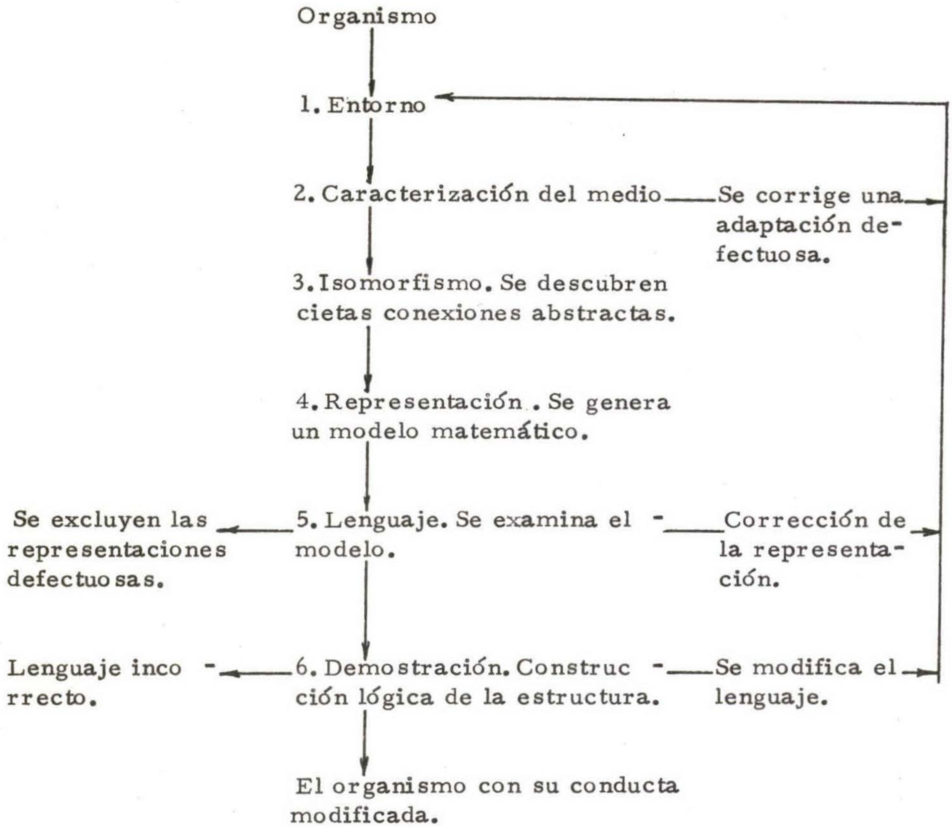
Lenguaje

El modelo generado requiere de un análisis que nos indique si éste, realmente, es una representación de la estructura. Para estudiar las propiedades del modelo, es necesario crear un lenguaje que las describa. Las oraciones inventadas, que describen las regularidades de la estructura, analizan las características del modelo y constituyen un sistema de axiomas.

Demostración

Dado que no es posible describir todas las relaciones de la estructura, se toma un número mínimo -axiomas- y se inventa un procedimiento para deducir las demás. El procedimiento se llama demostración y las relaciones deducidas teoremas.

*Z. P. Dienes, Las seis etapas del aprendizaje en Matemáticas, Ed. Varazen, México, 1970.


Organismo
1. Entorno
2. Caracterización del medio
Se corrige una adaptación defectuosa.
3. Isomorfismo. Se descubren cietas conexiones abstractas.
4. Representación . Se genera un modelo matemático.
Se excluyen las representaciones defectuosas.
5. Lenguaje. Se examina el modelo.
Corrección de la representación.
Lenguaje incorrecto.
6. Demostración. Construcción lógica de la estructura.
Se modifica el lenguaje.
El organismo con su conducta modificada.

Abstracción y Clasificación*

El proceso que conduce a la formación de un concepto es llamado proceso de abstracción;mediante éste, el indivíduo que entra en contacto con un medio ambiente, determina las similaridades entre las experiencias que acumula en él.
Por otro lado, la caracterización del medio permite efectuar una clasificación al agrupar las experiencias con base en las similaridades de éste.
Ya sea durante, o al final del proceso, los conceptos adquiridos se transforman en un símbolo , que sirve de referente y a través del cuál, el concepto es asimilado por el sistema de pensamiento. Al respecto se podría decir, que nuestro pensamiento es una estructura de simbolos, cada uno de los cuáles es el referente de un concepto.
Al tener nuevas experiencias , el individuo en primer término, asocia éstas a las previamente clasificadas. Por ello, el concepto que se forma hace referencia, por una parte a las experiencias pasadas, y por otra, asimila las nuevas por reconocer en éstas determinadas similaridades.
Asi, vemoscomo el individuo, al adquirir un sistema conceptual, se asimila las experiencias acumuladas en cientos de años de evolución humana, esto es, que en muy poco tiempo puede adqurirse el producto de este proceso.
Sin embargo, sin haber efectuado un proceso similar, no se adquiere el conocimiento. Al concebir el proceso enseñanza-aprendizaje como una mera transmisión de datos, se tiene como consecuencia que el alumno al no efectuar el proceso de aprendizaje , no adquiera el conocimiento y olvide pronto lo memorizado.

Aprendizaje por una via estructural*

Una estructura de conocimientos es similar a una red, en la que cada concepto se relaciona con otros mediante sus propiedades, por ejemplo, el concepto 'auto' se relaciona con 'taller' lo, que lleva a composturas, piezas, etc. , también se relaciona con 'agencia', ésta nos lleva a compra, venta, moderno, veloz, etc.
Una relación entre conceptos se realiza a partir de una o varias propiedades: cuchillo-tenedor-cuchara nos muestra una relación a partir de la función que desempeñan como objetos concretos.
La propiedad que agrupa a los conceptos: silla, mesa, banco, sillón, etc. se convierte en el concepto 'mueble', este último es un concepto de mayor grado de abstracción, puesto que engloba a los demás, los primeros son casos particulares de él, esta relación conceptual pertenece a la jerar quía de un determinado conjunto de conceptos.

* R. R. Skemp, The Psychology of Learning Mathematics, Pelican Books, 1971, pags. 13-113

Asi, las relaciones son medios de agrupación, clasificación y jerarquización de conceptos.
La estructura, por sus características, tiene dos funciones importantes en el desarrollo del conocimiento:

a)La característica de ser una agrupación de conceptos ordenados que implica una clasificación, le permite a la estructura desempeñar una función de integración del conocimiento. Cada concepto asimilado de acuerdo a su contenido -propiedades que lo caracterizan- es de inmediato clasificado y ordenado.

b)El hecho de contener en sí misma jerarquias, convierte a la estructura en un instrumento para efectuar posteriores aprendizajes. Asi, los conceptos venideros, se asimilarán a partir de los previamente integrados.

En la aprehensión de una estructura la vía que generalmente se sigue es la de memorización, lo que implica que la aprehensión de conceptos no se realiza a partir de relaciones, propiedades o conceptos de un menor grado de abstracción. Esta vía obedece a un orden lógico que nos es dado al parecer por la información.

Supongamos que se desea enseñar Lógica matemática y Teoría de conjuntos el orden lógico de la información sería :

a)Clasificar los conceptos de Lógica matemática en un bloque, los de Teoría de conjuntos en otro.

b)Dentro de la Lógica se hablaría: proposiciones, tablas de verdad, cuantificadores, etc.

c)En conjuntos el orden sería : conjuntos, subconjuntos, operaciones, etc.

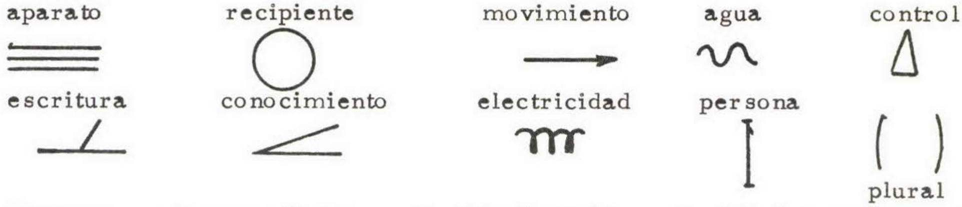
Esta presentación lógica obedece al ordenamiento del conocimiento ya obtenido ;muestra los productos del proceso de aprendizaje.

Cabe señalar que esta enseñanza, no integra el conocimiento -no conduce a formar relaciones entre los conceptos de lógica y conjuntos- , y consecuentemente no prepara al estudiante para un posterior aprendizaje, esto es al no estar relacionados los conceptos, carecen de una jerarquización que conduce a los conceptos de otra estructura.

Otra vía de aprendizaje es aquella que considera las funciones de una estructura en la adquisición del conocimiento, que a partir de éstas, realiza el proceso de enseñanza-aprendizaje.

A continuación se presenta la aprehensión de una estructura artificial mediante esta vía.

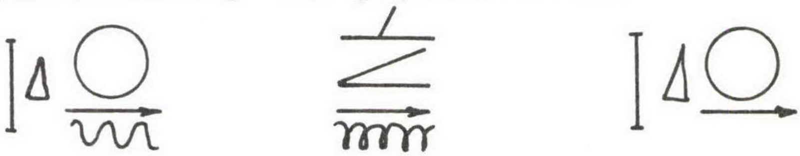
Conceptos fundamentales en la estructura :

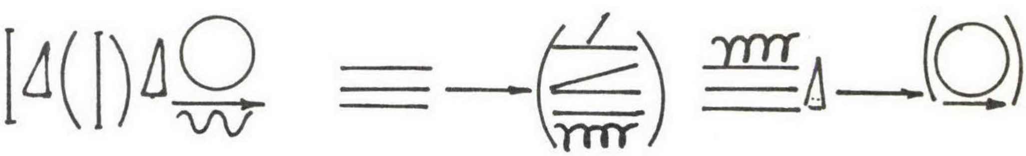


Estos conceptos que tienen un significado en la mente del alumno -excepto el símbolo para el plural- se relacionan y al combinarse le dan un significado a pares o tríos de simbolos. El significado de estos grupos de símbolos están relacionados a los anteriores.

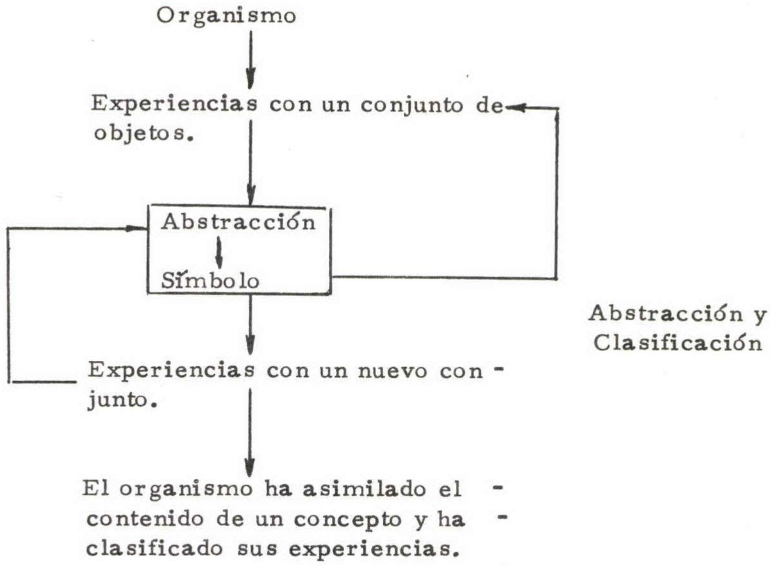
Sucesivamente los datos, se sistematizan, y al ser clasificados de acuerdo a sus propiedades, se genera la formación de nuevos conceptos. Para recordar un concepto se pueden utilizar cualesquiera de las relaciones que tienen con otros conceptos.

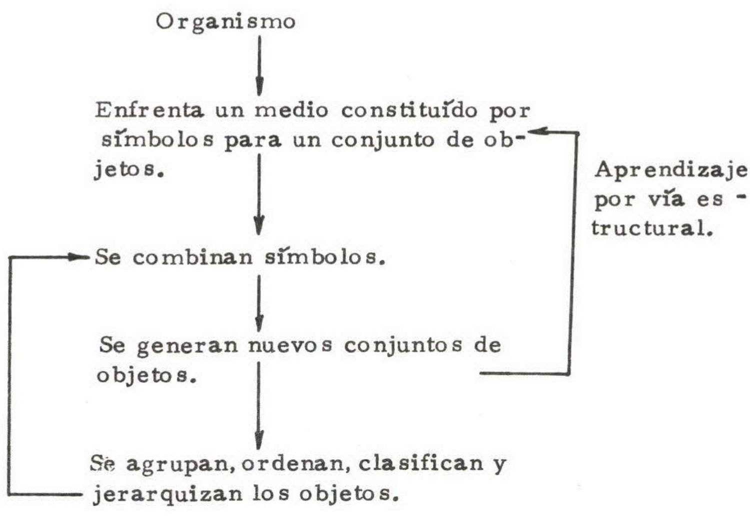
De el significado de los siguientes grupos de símbolos :





En lugar de definir los elementos aislados, en la definición estructural se trata de caracterizar a los elementos por las relaciones que mantienen entre sí en función del sistema. Tal definición del elemento hará las veces de demostración de la necesidad de éste, en cuánto se concibe como perteneciente a un sistema cuyas partes son interdependientes.


Organismo
Experiencias con un conjunto de objetos.
Abstracción
Símbolo
Experiencias con un nuevo con - junto.
El organismo ha asimilado el - contenido de un concepto y ha - clasificado sus experiencias.
Abstracción y Clasificación


Organismo
Enfrenta un medio constituído por símbolos para un conjunto de ob- jetos.
Se combinan símbolos.
Se generan nuevos conjuntos de objetos.
Se agrupan, ordenan, clasifican y jerarquizan los objetos.
Aprendizaje por vía es - tructural.

Un estudio experimental en la formación de conceptos*

De acuerdo a la escuela clásica, la formación de un concepto se alcanza por el mismo método del retrato familiar. Esto se hace tomando fotografías de diferentes miembros de la familia, de tal manera que los rasgos familiares comunes a diversas personas saltan a la vista, mientras que los peculiares no son tomados en cuenta.

Una intensificación similar de los rasgos comunes a un número de objetos se supone que ocurre en la formación conceptual. De acuerdo a la teoría tradicional, la suma de estos rasgos es el concepto. En realidad, como algunos psicólogos lo han visto desde hace tiempo y como el experimento mostrado por Vygotsky lo demuestra* , el camino por el cuál se llega a generar un concepto, no coincide con este esquema lógico.

Cuando este proceso es visto en toda su complejidad, aparece como un movimiento dentro de la pirámide conceptual, alternando constantemente en dos direcciones, de lo particular a lo general y viceversa.

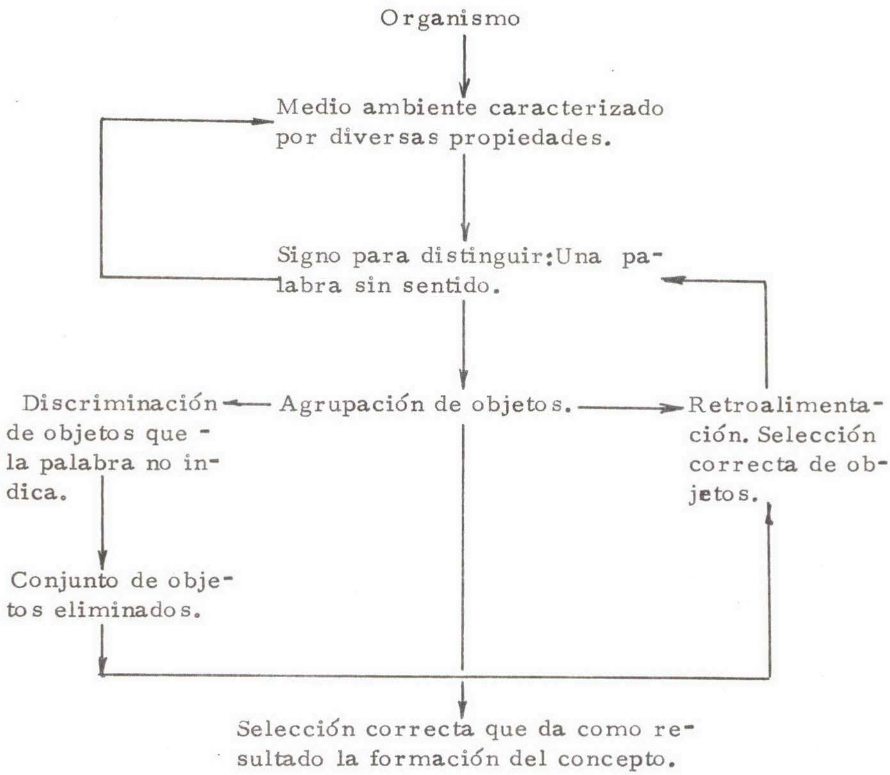
En el experimento de Vygotsky encontramos el siguiente procedimiento:

1. Se escogen cuatro palabras sin sentido : lag, bik, mur, cev.
2. Se escriben al reverso de un conjunto de objetos, llamados bloques lógicos;lag por ejemplo, se escribió al reverso de todas las figuras azules y grandes.
3. Los bloques lógicos sin orden alguno se presentan al sujeto.
4. Se escoge uno, por ejemplo, azul y grande, y se voltea.
5. Se le pide al sujeto que agrupe todos los 'lag'.
6. A menos que la agrupación sea correcta, se voltea uno de los bloques erróneos.
7. Después de cada intento se repite la operación
8. A medida que el número de éstas operaciones aumenta gradualmente, se descubre a que propiedades de los bloques se refiere la palabra sin sentido.

La investigación realizada demuestra que la formación de un concepto, no se realiza a través de un juego de interrelación de asociaciones sino a través de una operación de selección que se da en la mente. Esta operación, como se ha visto, se sirve de palabras como medios que activamente centran la atención , para distinguir rasgos, clasificar, sintetizar y simbolizar cada concepto con un signo.

El procedimiento para estudiar este proceso, en sus diferentes fases de desarrollo, se ha válido, en el experimento, de un método llamado de "doble estimulación ". Dos conjuntos de estímulos son presentados al sujeto, uno como objetos para actuar sobre ellos -bloques lógicos-, y el otro -palabras sin sentido- para organizar esa actividad.

*Language in Thinking, edited by Parveen Adams, Penguin Books, 1972, págs. 277-306.



Proceso de formación de conceptos.

Niveles del aprendizaje de formas gramaticales:**

En el niño, podemos comprobar, mediante dos formas de evidencia su comprensión de algunas expresiones gramaticales, antes de que él sea capaz de hablar.
Cuando se hace referencia a algo, algunas veces comprende el referente. ¿Donde esta la caja?.
El educador desarrolla una acción antes de mandarla, y el niño, ante el mandato, desarrolla la acción.

La finalidad del experimento que aqui se presenta, es la de comparar tres procedimientos diferentes de adquisición de esquemas gramaticales. Estos esquemas se aprenden como un contraste gramatical.
Los tres procedimientos a comparar son:
I. Una persona E que va a producir expresiones, va a ser imitada por el niño. Este procedimiento de imitación es la reproducción de un contraste gramatical a través de un modelo de ejecución: se imitan dos frases que contrastan una forma gramatical.
C. E produce las dos expresiones y muestra a la vez -sin asociar- dos figuras, cada una de las cuáles representa una expresión. El niño debe, al escuchar una frase, señalar la figura correspondiente.
P. E muestra las dos figuras y produce las dos frases, sin asociación. El niño al ver una figura debe expresar la frase correspondiente.
La comparación de los procedimientos proviene de una relación de dificultad, esto es, cada procedimiento involucra una serie de co-ordinaciones mentales, de percepción, atención y memorización y por lo tanto la dificultad para realizarse, es diferente.
En I la ejecución correcta requiere del sujeto no solo que perciba el contraste diferencial sino que, además, tenga control del habla. En C debe percibir, en las oraciones escuchadas, y en las figuras, el contraste, asociarlos y tener el control necesario para señalar correctamente. P es igual que C, únicamente que no se pide señalar, sino emitir la frase correctamente. Los resultados obtenidos se muestran a continuación:
I $>$ C*: La imitación depende de la organización del motor perceptivo del habla; la comprensión depende de la asociación de las frases con el referente -figuras- y ésta es mas compleja que el habla.
I $>$ P : La producción vincula todas las operaciones de imitación y agrega, el conocimiento de las distinciones referenciales.
C $>$ P : La comprensión y la producción de expresiones gramaticales vinculan las mismas operaciones, pero, mientras la comprensión hace referencia a un control de señalamiento, la producción la hace a un control del habla, de donde se concluye que éste último tipo de control es más difícil que el primero.

De estas relaciones se infiere que la imitación no depende de la comprensión. En los resultados experimentales se vió que en el proceso de producción, en diversas ocasiones se transformó la frase original, manteniéndose la asociación correcta, por lo que se puede calificar de creativo.

Organismo

↓

Se enfrenta a dos frases — I

↓

Conducta imitativa.

Organismo

↓

Se enfrenta a dos frases y dos figuras

↓

Asocia las dos frases y las dos figuras ← — C

↓

Escucha una frase

↓

Identifica la figura.

Organismo

↓

Se enfrenta a dos frases y dos figuras.

↓

Asocia las regularidades. ← — P

↓

Ve una figura.

↓

Da la frase.

* '$\succ$' : "más fácil que"

** Language, edited by R. C. Oldfield and J. C. Marshall, Penguin Books, 1971, págs. 48-70.

Psicología en el apendizaje*

El fisiólogo ruso Pavlov, se interesó en sus investigaciones del sistema digestivo, en el comportamiento de los perros, antes de la alimentación. Con este fin colocó a un perro en un lugar a prueba de ruidos, con control de temperatura, e iluminación constante;le efectuó una pequeña operación para obtener una cantidad medible de saliva, que viene a ser, uno de los - factores del comportamiento, que es comparativamente fácil de medir. Ya adaptado el animal a la situación, se introdujo un elemento externo que caracterizó al medio ambiente:una secuencia de eventos. Se tocaba un timbre y después de un intervalo corto, se le dió comida. La secuencia timbre -comida fué prsentada una y otra vez. Gradualmente la cantidad de saliva producida se incrementó, tan pronto el timbre sonaba. El animal salivaba, ahora, en respuesta al timbre, mientras que al principio del experimento, esto no sucedía.

Por la misma época E. S. Thorndike, usó gatos, en una situación diferente. Pusó un gato hambriento en una jaula, y comida afuera, la cuál podía servista desde el interior de la jaula;el diseño de ésta era tal , que jalando - una cuerda del techo, o presionando una palanca, la puerta se abría. Al - principio el comportamiento del gato, se describía como una serie de actos para tratar de salir, tratar de alcanzar la comida. En el curso de su - actividad el animal tarde o temprano operaba el mecanismo de escape. - Después de un intervalo de tiempo, el animal era puesto nuevamente en - la jaula. Thorndike observó, que a medida que pasaba el tiempo, el animal iba ajustando su actividad a la vecindad de la 'aldaba' de la puerta, y que el período entre la llegada y la salida de la jaula, progresivamente se iba acortando. De spués de un gran número de intentos los gatos operaban elmecanismo de escape, tan promto como fueran puestos en la jaula.

En ambos experimentos, se presenta a un animal, ante un tipo simple de propiedad de relación. 'A es seguido por B'. En el caso de Pavlov se presenta una serie de eventos externos que miden un reflejo condicionado, en el caso de Thorndike A no es un evento externo, implica por parte del a - prendiz , un acto, en donde B es la consecuencia de ese acto.

Existen muchos tipos diferentes de explicación para la conjunción parti - cular de eventos, pero cualesquiera que sean las razones, lo que aqui nos interesa es saber que la experiencia de un organismo, es estructurada, y esto implica una serie de órdenes de regulridad -algunos eventos siguiendo a otros inmediatamente, otros después de una dilación, otros de tiempo en tiempo, y algunos más intermitentemente, en ocasiones de la misma - manera y en otras con variaciones regulares -.

Aparte de los eventos en sí mismos, la manera de ser colocados juntos - constituye una variable importante en la descripción de un medio . Y más aún,en la educación, esto constituye un factor de máxima importancia, pala dependencia o independencia del individuo.

*R. Boyer and A. E. M. Seaborne , The psycholgy of learning, Penguin Books, 1971, págs. 22-28.

El organismo con una conducta instintiva.

↓

Adaptación del organismo al medio ambiente. ← Aprendizaje condicionado.

↓

Condiciona su conducta a una secuencia de eventos.

↓

Conducta condicionada.

Organismo

↓

El organismo con una necesidad entra a un medio ambiente.

↓

Rechazo de pasos inútiles. ← Movido por la necesidad tiende a aprovechar los elementos del medio ambiente. — Aprendizaje instrumental.

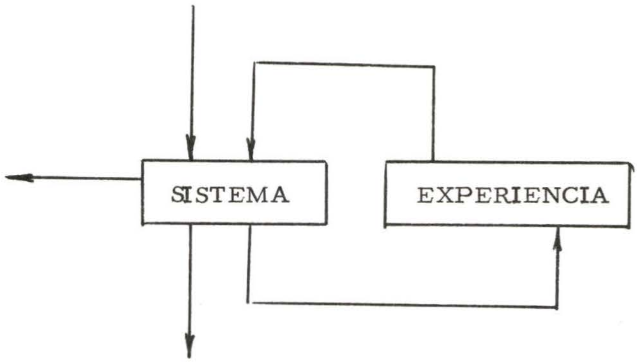
↓

El organismo satisface la necesidad.

↓

Abstracción de las propiedades del medio ambiente.

Elementos generales para el diseño de un curso de matemáticas.



La educación como una ciencia empírica *

El problema de formular una definición aceptable de la idea de una ciencia empírica tiene sus dificultades. Algunas de éstas provienen del hecho de que existen muchos sistemas teóricos, con una estructura lógica muy similar a aquella que en ese momento es aceptada como ciencia empírica. Esta situación se justifica en ocasiones, al decir que hay un gran número de mundos lógicamente posibles.

El sistema llamado ciencia empírica intenta representar solamente un mundo: el mundo real o mundo de nuestra experiencia.

Para hacer esta idea un poco mas precisa se deben distinguir tres postulados que nuestro sistema teórico-empírico tendrá que satisfacer:

1. Tiene que ser consistente, tal que represente un mundo posible o sin contradicciones.
2. Tiene que ser significativo, esto es, representar un mundo de experiencias integrado al desarrollo actual del individuo
3. Tiene que referirse a un campo delimitado de la realidad.

*Karl R. Popper, The Logic of Scientific Discovery, Hutchinson of London, 1968.

Filosofía del sistema*

Para este sistema se ha considerado la filosofía pragmática, la cuál es - una consecuencia de la tradición británica empírica, que como su nombre lo indica se apoya en aquellos datos que nuestros sentidos obtienen directamente, es decir, en la experiencia.
De acuerdo a esta filosofía, el mundo no es ni dependiente, ni independiente de la idea que el hombre tiene de él;la realidad se encuentra en la interacción del ser humano con su medio ambiente. Por ello, el mundo no tiene más significado , que , el que el hombre encuentra en él. El cambio es la esencia de la realidad, y para lo que debemos estar preparados es, para - alterar las formas en que hacemos las cosas;los fines y medios en la educación son flexibles y permanentemente abiertos a revisión. La educación es vida y no una preparación para ella;las materias de estudio deben unirse lo más posible a los problemas inmediatos que el individuo encara, y - que a cada sociedad concreta le corresponde resolver. El pragmatismo - toma al individuo como un organismo activo, continuamente empeñado en reconstruirse e interpretar sus experiencias;que crece en la medida en - que se asocia a otros, y aprende a vivir en una comunidad y se adapta - por sí mismo inteligentemente a las necesidades sociales, en función de - sus aspiraciones.

Epistemología pragmática y Educación*
El pragmatismo parte de una mente activa y exploradora, mas que de una pasiva y receptiva. La mente percibe el mundo que lo rodea y del cuál extrae los datos que le permiten manejarlo y conocerlo. El hombre percibe por medio de sus sentidos la realidad, de la cuál abstrae un concepto y se forma una idea, en un segundo paso confronta de nuevo la idea con la realidad en busca de la verdad. Cuando esta confrontación es percibida por otras mentes humanas se convierte en verdad científica. Encarada a un problema, la inteligencia propone hipótesis para tratar con él, y la hipótesis que resuelve mejor el problema, es la tésis que explica los hechos, a su vez ésta última puede servir como una base , que genera hipótesis para - problemas posteriores. Es por ello, que el maestro debe construir situaciones de aprendizaje alrededor de problemas particulares cuya solución conduciría a sus alumnos a una mejor comprensión de su medio ambiente físico y social. Toda materia de estudio viene a ser significativa para el estudiante y por lo mismo más facilmente dominada, cuando pueda utilizarla como medio para satisfacer sus necesidades y colmar sus intereses;aprenderá más,a partirde todo aquello que caiga en el campo de sus intereses vitales. El profesor deberá propiciar el espiritu de investigación, más, que instruir en función de lo que deba aprender. Por lo tanto, deberá:

a)Ayudarlo a aprender aquello por lo que sienta curiosidad.

b)Hacerlo reflexionar, para que descubra el valor, de aquello que lo tiene, como:ciencia, literatura, historia, etc.

Esto es importante porque sería absurdo dejar al estudiante, seguir sin - rumbo fijo, incapacitado para jerarquizar adecuadamente.

*George F. Kneller, Introduction to the Philosophy of Education, Wiley, 1964.

Análisis de objetivos.

Los objetivos son una jerarquía de cambios de conducta, en los cuáles - llevamos al alumno de lo más sencillo a lo mas complejo, entre estos debe existir continuidad, ya que de lo contrario los objetivos terminales, es decir, el cambio que juzgamos más importante no se logrará. Además estos deben ser evaluables, esto es, que sea posible determinar si han sido alcanzados o no, y no precisamente desde un punto de vista subjetivo, el - cambio debe ser evidente.
Un conjunto de objetivos ambicioso no es conveniente, es mejor intentar un camino sencillo que un camino imposible. En este sentido algunas veces - se hace notar que en México se peca por la cantidad y diversidad de información resultando contraproducente ya que el alumno se siente perdido y sin capacidad para lograr integrar la información. Esta meta ambiciosa - lo angustia, lo desorienta y le crea, en ocasiones, rechazo al estudio. En - la Matemática sucede esto con frecuencia, creándose una imagen exagerada de los requisitos para dominarla. Piaget, nos habla, al estudiar el desarrollo de la inteligencia, de las diferentes capacidades que existen en los seres humanos para procesar datos y de los muchos factores que intervienen en ello, y como, el exceso de información puede ser mas bién un - obstáculo.
Es evidente que se debe definir si lo que se pretende desarrollar en el alumno es una simple imitación, o si se pretende que adquiera comprensión o sea, la asimilación de un conocimiento , hasta desarrollar su creatividad que sería la generación de productos nuevos. A medida que se avanza - en níveles de aprendizaje, las operaciones son más complejas y se requiere más tiempo. Se produce menos pero se logra más calidad. La imitación y la memorización son más sencillas y requieren menos tiempo, pero no modifican sustancialmente las conductas.
Si el lenguaje utilizado para definir los objetivos no es apropiado, puede prestarse a interpretaciones subjetivas, por lo cuál cada profesor puede ofrecer la propia. Tal hecho dificulta la evaluación objetiva.

Estructura del proceso enseñanza-aprendizaje de la Matemática.

La síntesis de diversos procesos de enseñanza-aprendizaje, origina un modelo general para la Matemática. Este modelo, esquema o esqueleto, nos permite generar un curso de matemáticas en particular:

1. Se establece un universo de objetos concretos, que nos lleven a abstraer los conceptos fundamentales de la teoría -entorno-.
2. La formación de conceptos se desarrolla según el proceso de abstracción descrito por Vygotsky.
3. Los conceptos abstraídos del entorno son situados dentro de la teoría que se desea enseñar. Esto se logra a partir de relaciones.
4. Ubicado en una teoría, un concepto abstraído de nuestra realidad concreta, se relaciona con otros, y a partir de estas relaciones es como se forman subestructuras de conceptos dentro de la teoría -Skemp-. En el diseño que se va a mostrar en la parte segunda, cada sección de información se basa en una subestructura.-
5. La operación anterior se repite hasta que los conceptos fundamentales de la teoría a enseñar se hayan abstraído del contexto artificial establecido. El siguiente paso consiste en encontrar un modelo matemático que le permita relacionar estas subestructuras, con las leyes que determinan la teoría. El análisis que nos lleve, dentro del modelo, a las leyes que generan la teoría, se debe realizar con un lenguaje. Se recomienda que la notación utilizada sea diferente a la empleada ya en la teoría, ya que esto permitirá al alumno familiarizarse con un lenguaje diverso. Este modelo tiene como finalidad también, vincular el estudio de la matemática con las ciencias experimentales.
6. Ya alcanzada la teoría, a partir de sus leyes generales, se estudia a ésta de manera rigurosa y formal. Esto favorece tanto un desarrollo logístico como axiomático.

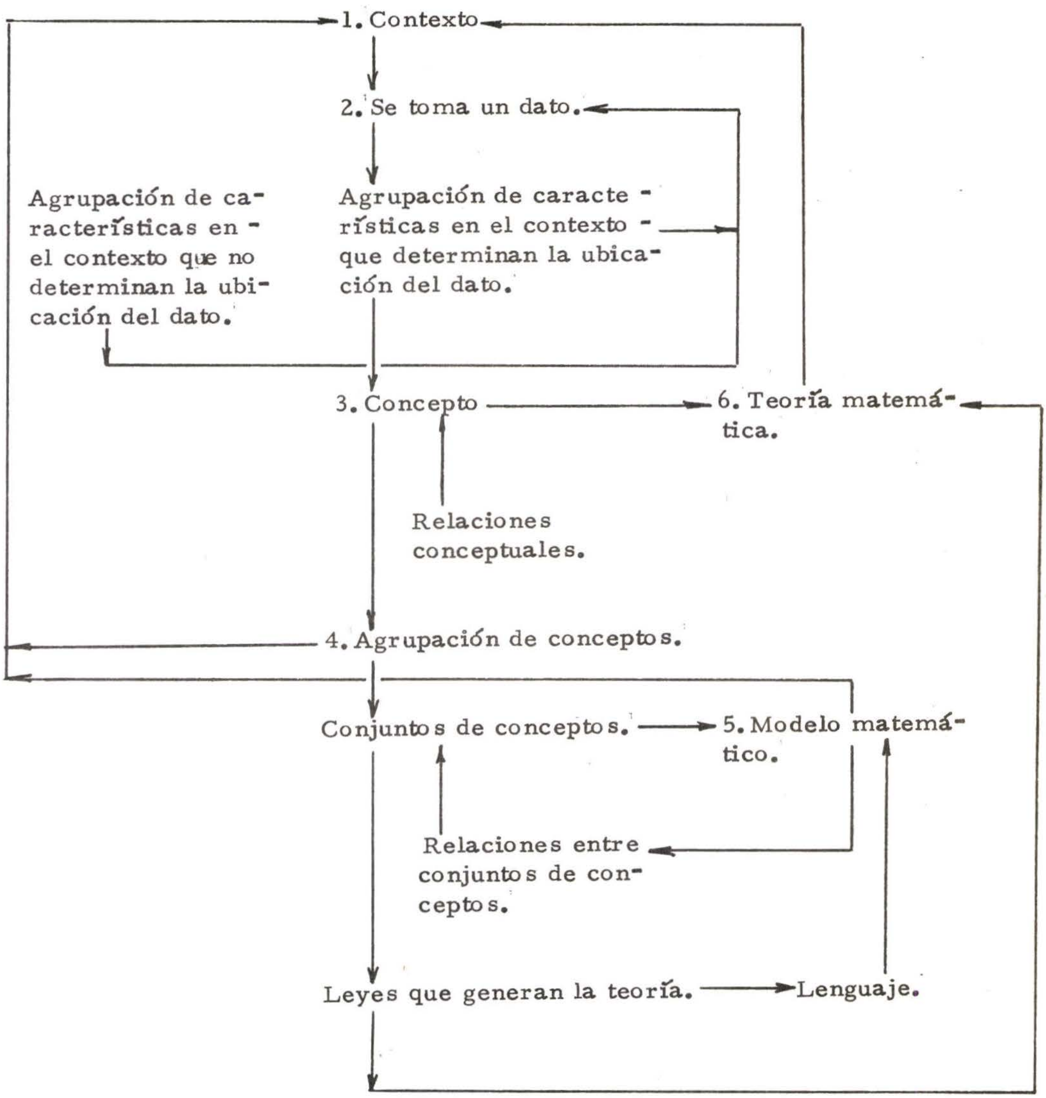
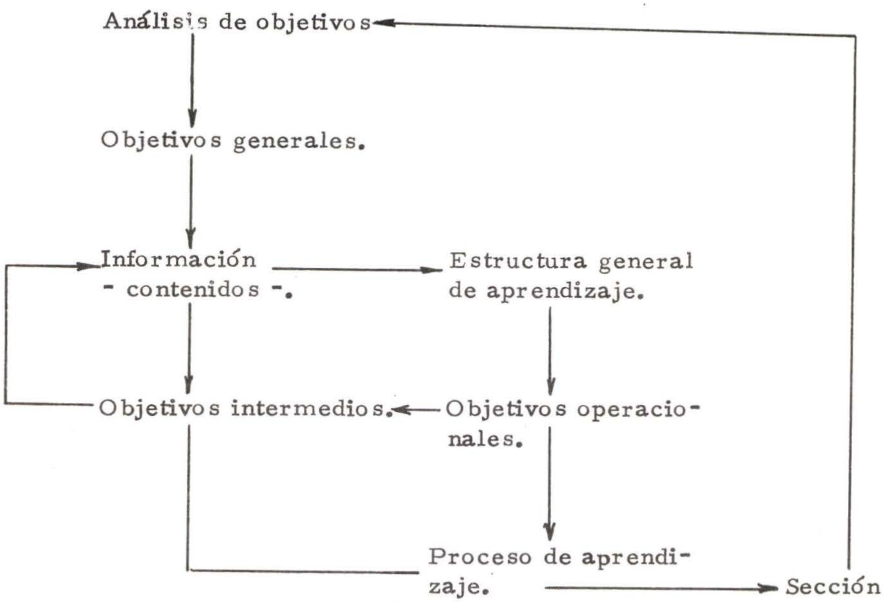

1. Contexto
2. Se toma un dato.
Agrupación de características en el contexto que no determinan la ubicación del dato.
Agrupación de características en el contexto que determinan la ubicación del dato.
3. Concepto
6. Teoría matemática.
Relaciones conceptuales.
4. Agrupación de conceptos.
Conjuntos de conceptos.
5. Modelo matemático.
Relaciones entre conjuntos de conceptos.
Leyes que generan la teoría.
Lenguaje.

Diagrama de aplicación:



La función del diagrama que se presenta es la de generar un curso en particular, a partir de el análisis de objetivos, la estructura general de aprendizaje, la filosofía del sistema y los postulados de la educación como ciencia empírica. Los contenidos son aquellos propuestos para el curso.

Contenidos del primer curso de matemática del C.C.H. *

1. Modelos matemáticos, lenguajes simbólicos.
   a) Modelos matemáticos.
   Diversos métodos de resolución: directo, simulado, simbólico y mental. Ejemplos sencillos.
   Discusión de las diversas ventajas y desventajas de los métodos: abstracción, generalidad, costo, dificultad.
   b) Lenguajes simbólicos.
   Procesos de pensa iento y lenguaje.
   Arbitrariedad y convención en los lenguajes simbólicos.
   El lenguaje simbólico.
   Desarrollo histórico del lenguaje simbólico de los números.
   c) El método científico y las matemáticas.
   El desarrollo de las ciencias.
   El papel de las matemáticas: las matemáticas como el estudio de las propiedades, relaciones y estructuras abstractas y generales.
   Errores que se cometen.
2. Lenguaje y Lógica.
   a) Los lenguajes naturales
   Gramática: sintaxis y semántica.
   Proposiciones y conectivos.
   Cuantificadores.
   Verdad y falsedad en las proposiciones.
   Imprecisión y ambigüedad de los lenguajes naturales.
   b) Lógica simbólica.
   Simbolización de proposiciones y conectivos.
   Tablas de verdad.
   Proposiciones abiertas: variables y conjuntos de verdad.
   Simbolización de cuantificadores.
   La simbolización del lenguaje como abstracción.
   c) Deducción.
   Necesidad de precisar las reglas de deducción.
   Simbolización de las reglas de deducción.
   Deducción simbólica.
   d) George Boole y las leyes del pensamiento.
3. La teoría de los conjuntos.
   a) El concepto de conjunto.
   Paso de la idea intuitiva de conjunto al concepto abstracto y general.
   Subconjuntos, el conjunto vacío, igualdad.
   b) Operaciones entre conjuntos: unión, intersección, complemento y diferencia.
   c) Propiedades de las operaciones.
   d) El diagrama de Venn como modelo geométrico.
   e) Relaciones: Paso del concepto intuitivo de relación al concepto abstracto. Propiedades de las relaciones.
   Producto cartesiano.
   f) Correspondencia biunívoca, cardinalidad.
   g) Cantor y los números transfinitos.

4. Sistemas de numeración

a)El número como abstracción.

b)Sistemas de numeración antiguo.

c)Las operaciones.

d)El sistema decimal.

Notación posicional.

Las cuatro operaciones, comparación con los sistemas antiguos, potencias y raíces.

e)Sistemas de numeración en base distinta de diez.

f)Números racionales.

Quebrados , su uso y notación. Operaciones.

g)Fracciones decimales.

Operaciones

Los racinales como fracciones decimales periódicas.

Números irracionales.

Los números reales como proceso de medición. Representación gráfica.

*

Anexo, programa del C.C.H., 1972.

SEGUNDA PARTE

Introducción

Un primer curso preuniversitario tiene por objeto, presentar un esquema conceptual que sirva de base, a la asimilación del conocimiento matemático ulterior, y a la relación de éste con otras ciencias.

Al mismo tiempo estará orientado hacia la estructuración de un sistema de "pensamiento científico".

Objetivos Generales de la Matemática en el C.C.H.

Dominio Cognoscitivo
Al concluir el ciclo educacional, serás capaz de:

I . Localizar adecuadamente la información significativa en un campo de datos.
II . Formular conclusiones válidas, de la información obtenida mediante un modelo matemático.
III. Verificar en el campo de datos, las relaciones conceptuales predichas por el modelo.
IV . Ajustar o sustituir el modelo de acuerdo a las predicciones de las relaciones conceptuales dentro del campo de datos.

Dominio afectivo
Al concluir el ciclo, el alumno:

I . Aceptará el valor de la matemática en la actividad humana.
II. Valorizará la matemática como instrumento de interpretación y transformación de la naturaleza.

Objetivos del primer curso de matemáticas en el C.C.H.

Dominio cognoscitivo
Al finalizar el primer curso , serás capaz de :

I .Integrar los conceptos básicos de diversas ramas de la matemática.
II .Construir una estructura matemática fundamental, mediante procesos de integración comunes a diversas ciencias.
III. Traducir la información inferida en un campo de datos a un sistema de lenguaje lógico-matemático.

Dominio afectivo
Al concluir el curso , el alumno:

I .Apreciará el valor de la aplicación de la Lógica matemática en otras actividades humanas.
II .Mostrará una actitud de aceptación hacia la Matemática.
III. Mostrará satisfacción al aplicar un sistema de pensamiento, integrado mediante el estudio de la matemática.

Capitulo 1

Desarrollos generales y conceptos fundamentales

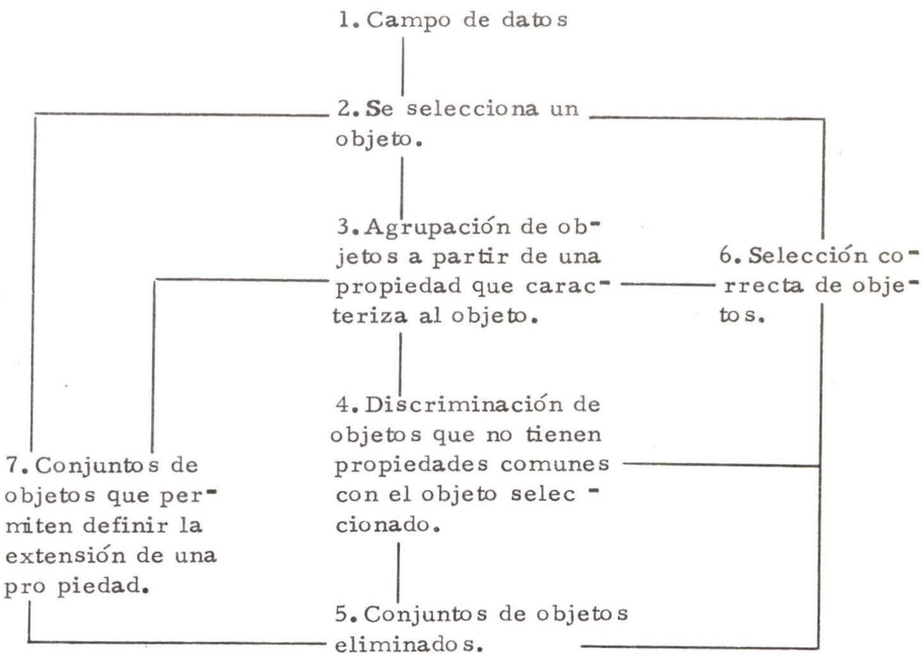
Objetivos

Al concluir está sección:

1.1 Comprenderás el significado de los términos:
Universo, campo de datos y propiedad.
   1. Distinguirás entre términos de significado similar.
   2. Utilizarás cada término en su correcta acepción.

1.2 Comprenderás el significado de las propiedades que caracterizan a la totalidad de elementos en U.
   1. Podrás determinar el conjunto de objetos que se caracterizan por una propiedad.
   2. Agruparás los objetos que poseen una propiedad ausente en un objeto seleccionado.
   3. Señalarás las propiedades presentes y ausentes de un objeto.

Proceso



Información

Universo

Para el propósto de una investigación matemática en particular, en primer término se determinan cuáles son los objetos en discusión.
El conjunto de tales objetos, es llamado el conjunto universal o campo de datos U.
A los elementos del campo de datos se les llama objetos. El campo de datos que se presenta en la fig. 1 , tiene 32 objetos.

Propiedad.

Dentro del campo de datos, existen una serie de condiciones, o especificaciones que llamaremos propiedades. Estas propiedades caracterizan a la totalidad de elementos en U, son: P_a , P_b, P_c, P_d, P_e, P_f , P_g , P_h, P_i , P_j.
De esta totalidad de condiciones en el Universo, una colección de ellas, por ejemplo, las propiedades P_a , P_g , P_i , distinguen a un objeto de los demás, éstas son las propiedades que lo determinan y caracterizany las llamaremos propiedades presentes del objeto;el resto que no lo caracterizan , son las propiedades ausentes en el objeto. El significado de estas propiedades se determina mediante el conjunto de objetos en U, que poseen dicha propiedad. P_a , por ejemplo, se determina por el conjunto de la fig. 3.

Tabla

Los objetos y las propiedades forman el campo de datos. Este campo se puede imaginar, como una red de filas y columnas, en donde las filas representan las propiedades y las columnas los objetos.
Si un objeto se caracteriza por cierta propiedad, lo indicamos en la red -tabla 1-colocando un circulo negro en el cruce de ambos, si no es así se coloca un anillo.
Asi pues, las propiedades que caracterizan a un objeto seleccionado-fig.2 - determinan la 'extensión' del objeto en las propiedades de U.
A su vez, los circulos negros en una fila determinarán, en la totalidad de objetos de U, la 'extensión' de una propiedad en U.

Actividades

1. Selecciona un objeto en U. ruta propuesta dentro del proceso : 1-2
2. Forma conjuntos de objetos que se caracterizen por una propiedad presente del objeto, por ejemplo, figs. 3, 4, 5.
   ruta : 2-3-4-6-2-1-2-3-7
3. Forma conjuntos de objetos que se caracterizen por no tener una propiedad presente del objeto, por ejemplo, figs. 6, 7, 8
   ruta:2-3-4-5-6-2-1-2-5-7
4. Define el significado de cada propiedad, precisando su extensión en U. Utiliza la tabla 1. ruta:2-3-4-5-6-2-1-3-7
5. Indica en la tabla 1, el estado de presencia o ausencia de las propiedades de los objetos indicados. ruta: 2-3-4-5-7-2

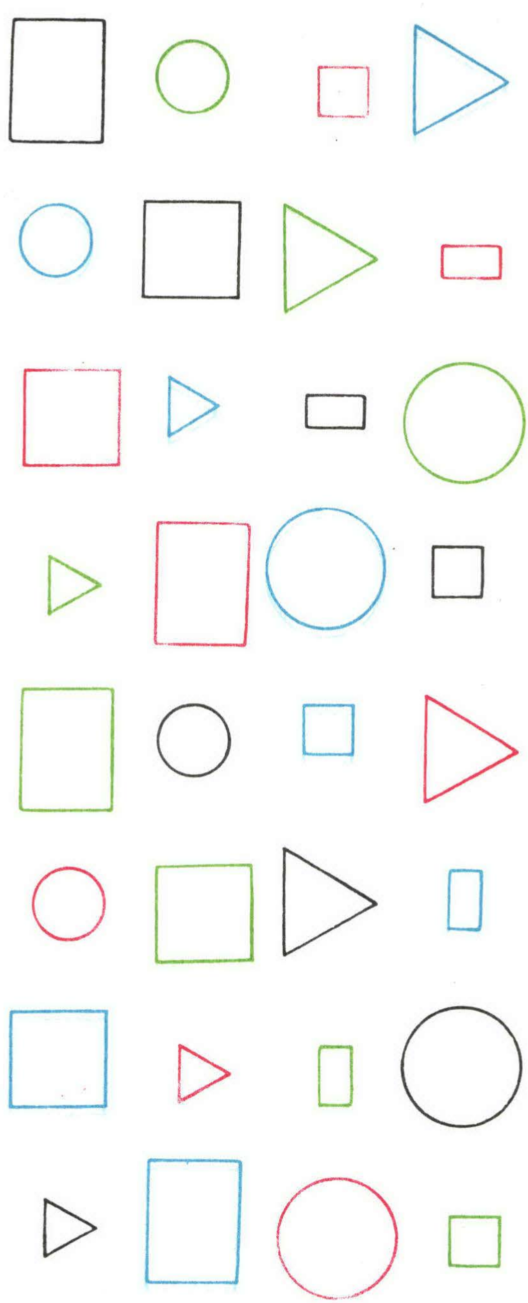


fig 1

fig 2

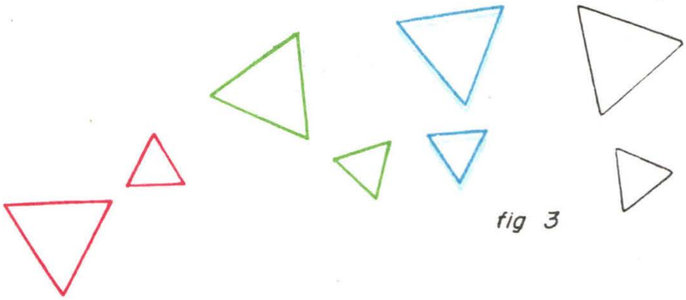


fig 3

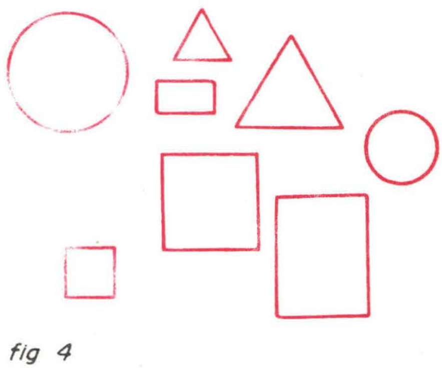
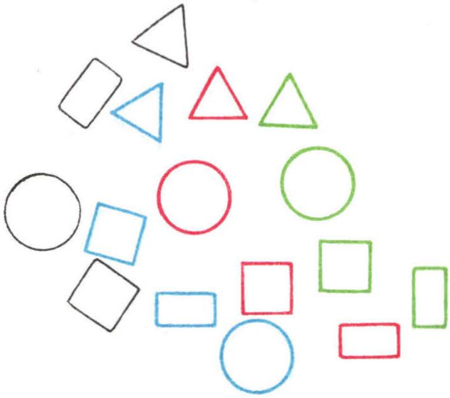


fig 4

fig 5



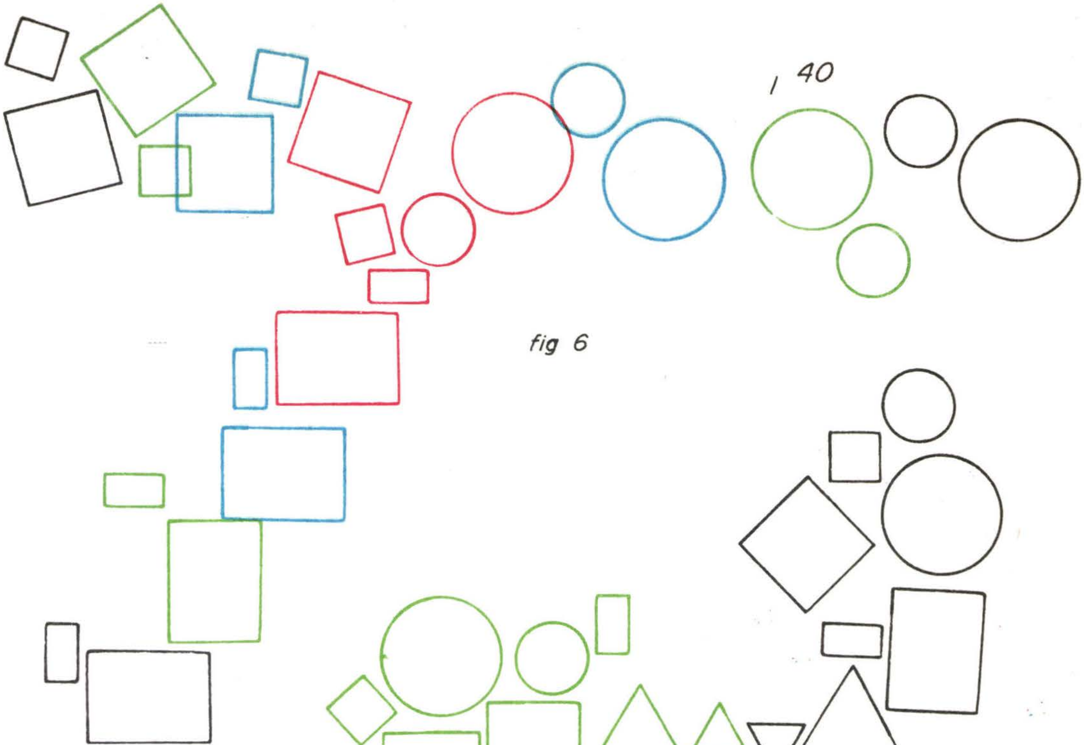


fig 6

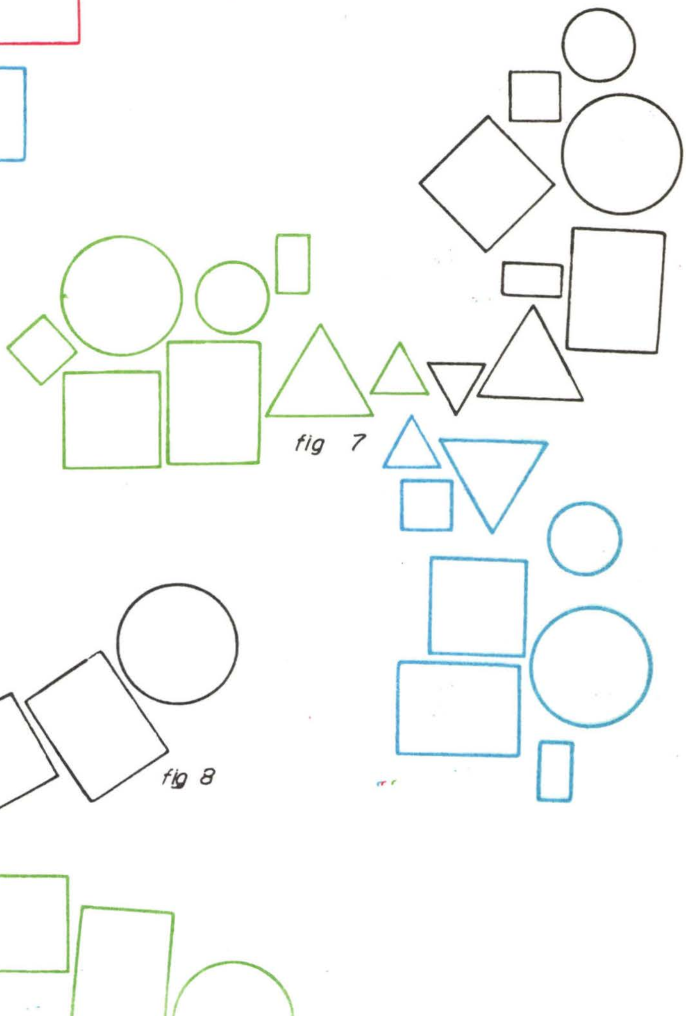


fig 7

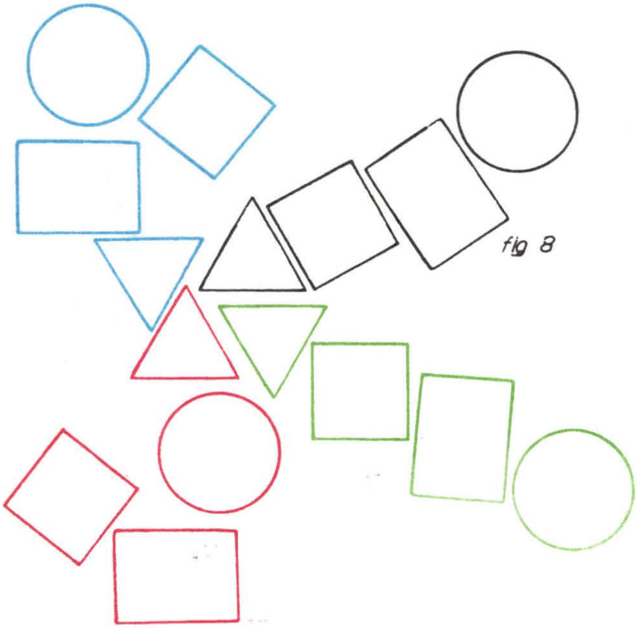
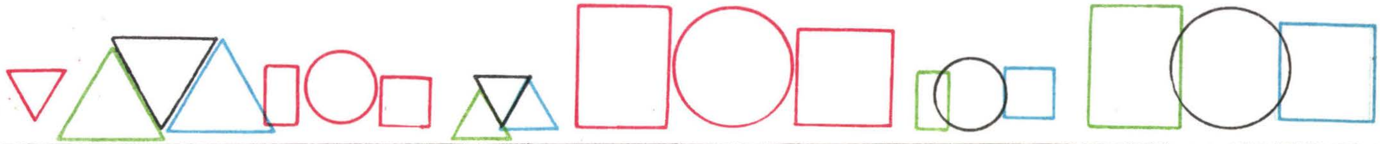


fig 8



P_a	●	●	●	●	○	○	○	●	●	●	○	○	○	○	○	⊘	○	○	○
P_b	○	○	○	○	●	○	○	○	○	○	●	○	○	●	○	○	●	○	○
P_c	○	○	○	○	○	●	○	○	○	○	○	●	○	○	●	○	○	●	○
P_d	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○	○	○	●	○	○	●	○	○	●
P_e	○	●	○	○	○	○	○	●	○	○	○	○	○	●	○	○	●	○	○
P_f	○	○	●	○	○	○	○	○	●	○	○	○	○	○	●	○	○	●	○
P_g	●	○	○	●	●	●	●	○	○	○	●	●	●	○	○	○	○	○	○
P_h	○	○	○	●	○	○	○	○	○	●	○	○	○	○	○	●	○	○	●
P_i	●	○	○	○	●	●	●	●	○	●	○	○	○	●	●	●	○	○	○
P_j	○	●	●	●	○	○	○	○	○	○	●	●	●	○	○	○	●	●	●

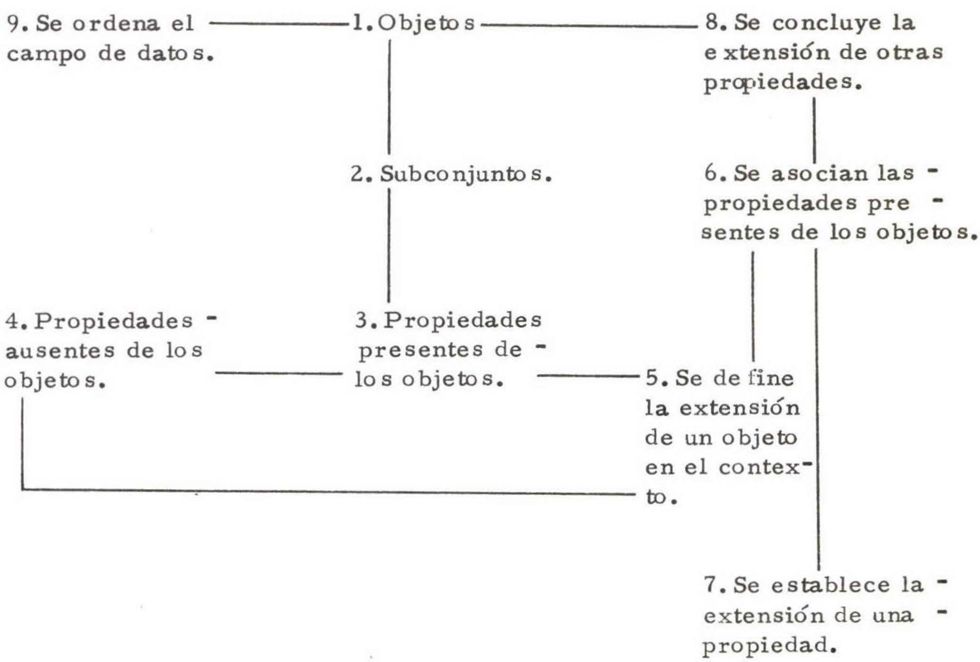
Tabla I

Objetivos — Sección II

Al concluir está sección:

1.3 Serás capaz de generar criterios de procedimiento mediante los cuáles se ordena un campo de datos.
1.4 Comprenderás la interrelación entre objetos y propiedades.
1.5 Inferirás el significado de los términos:
Pertenencia, elemento genérico, subconjunto, conjunto, n^{ada} ordenada.
  1. Expresarás mediante los símbolos adecuados, la extensión de objetos y propiedades
  2. Determinarás cuando un subconjunto está incluído en un conjunto dado.
  3. Distinguirás entre conjunto y n^{ada} ordenada.
  4. Construirás una n^{ada} ordenada.

Proceso



Pertenencia

Decir de un objeto que se comprende su significado equivale a especificar en un contexto U, cuáles son las propiedades que lo caracterizan. En la tabla 2, se puede determinar este significado;en cada cruce de objeto y propiedad, se distingue un estado de presencia o ausencia, a la 1^{a} relación se le simboliza por el signo $\in$, y a la 2^{a} por $\notin$.

Se puede escribir, por ejemplo, $a_1 \in A$, para mostrar que a_1, es un miembro de A, o es un elmento del conjunto de objetos que delimitan la extensión de la propiedad P_a en U;de man era similar $a_1 \notin B$, indica la ausencia de a_1 en P_b;$P_a \in a_1$, señala que la propiedad P_a, es un miembro del conjunto de propiedades que caracteriza a a_1.

Elemento genérico

Los elementos que forman parte de un conjunto pueden designarse mediante un solo simbolo, éste refiere a cualquir elemento de los que pertenecen al conjunto, cada uno de los cuáles está bien determinado.

Cuando escribimos $a \in A$, nos referimos a cualquier elemento de A, donde $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8\}$, es decir, no particularizamos, 'a' es el elemento genérico del conjunto A.

Definición de un conjunto

Un conjunto puede ser definido mediante una 'descripción', la cuál consiste en especificar la(s) propiedad(es), que caracteriza(n) a todos los elementos del conjunto en el campo de datos; hablando sin rigor, consiste en proponer una condición, que delimite dentro de U, un conjunto. En tal caso, dada la condición P_a en U, ésta delimita un conjunto A, cuyos elementos son aquellos de U, para los cuáles se cumple P_a.

$$A = \{a \in U / a \text{ es } P_a\}$$

lo cuál se lee :"A es el conjunto de todos los objetos 'a' que esten en U, tal que, 'a' cumple P_a".

Otro modo de definición, consiste en la enumeración de todos los elementos del conjunto.

Un conjunto A formado por los elementos $a_1, a_2, \ldots, a_8$, se simboliza:

$$A = \{a_1, a_2, a_3\, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8\}$$

La enumeración de todas las propiedades que definen la extensión del objeto a_1, en el contexto U, se expresa:

$$a_1 = \{P_a, P_e, P_j\}$$

Subconjunto

Sean A y S_1 dos partes de un campo de datos U, cuando todo elemento de S_1 pertenece a A, se dice que S_1 está contenido o incluído en A, que A contiene a S_1, o también S_1 es una parte de A, las que son diferentes formas de expresar que : S_1 es un subconjunto de A. Se escribirá:

$$S_1 \subset A, \text{ o } A \supset S_1 \text{ ;en caso contrario } S_1 \not\subset A, \text{o } A \not\supset S_1.$$

Par ordenado

Es claro que la idea de conjunto no trae consigo, la noción de orden entre sus miembros. De un objeto únicamente se sabe si este es miembro de un conjunto dado o no lo es, y aún cuando al enumerar los elementos se efectúa en un orden, éste es enteramente accidental.

Para aclarar la situación, introduciremos el concepto de n^{ada} ordenada, en donde n, es el elemento genérico de $N = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$. Por n^{ada} ordenada, consideraremos una lista de objetos en un determinado orden, por ejemplo, en "$(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_8)$", se estará de acuerdo que a_1, es el primer término, a_2 el segundo, etc; en la n^{ada} resultante, $n=8$.

"(5, 7)", denota una pareja ordenada, en dónde 5 es el primer término y 7 el segundo.

Nótese que $\{\ \}$ indican un conjunto, mientras que ( ) indican una n^{ada} ordenada. Una pareja ordenada, es también llamada 'par ordenado'.

Actividades

1. Determine si cada uno de los subconjuntos mostrados en la fig. 9 está o no, contenido en los conjuntos que se definen a continuación:

$F = \{f \in U / f \text{ es negro}\}$ $J = \{j \in U / j \text{ es grande}\}$ $H = \{h \in U / h \text{ es azul}\}$

Indique, en la tabla 2, el estado de presencia o ausencia de los objetos que son elementos de los subconjuntos S_1, S_2, S_3, -fig. 9.

ruta 1-2-3-4-5.

3. A partir de la asociación de las propiedades de los objetos -tabla 2- define al conjunto A, por enumeración de sus elementos.

ruta 5-6-7.

4. Define una n^{ada} ordenada, con los elementos del conjunto A.

ruta 7-6-8-1-9

5. Determina los elementos de los conjuntos B, C, D, a partir de, la n^{ada} ordenada obtenida. Completa la tabla 2.

ruta 7-6-1-2-3-4-5-6-8.

6. Dibuja en la fig. 10 los objetos faltantes.

ruta 8-1-9.

7. Expresa simbólicamente, la n^{ada} ordenada obtenida, a partir de la fig, 10.

ruta 8-1-9

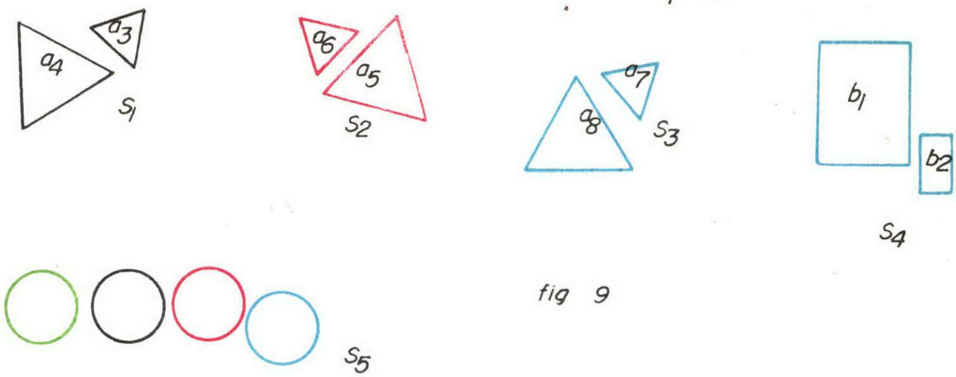

a4
a3
S1
a6
a5
S2
a8
a7
S3
b1
b2
S4
S5

fig 9

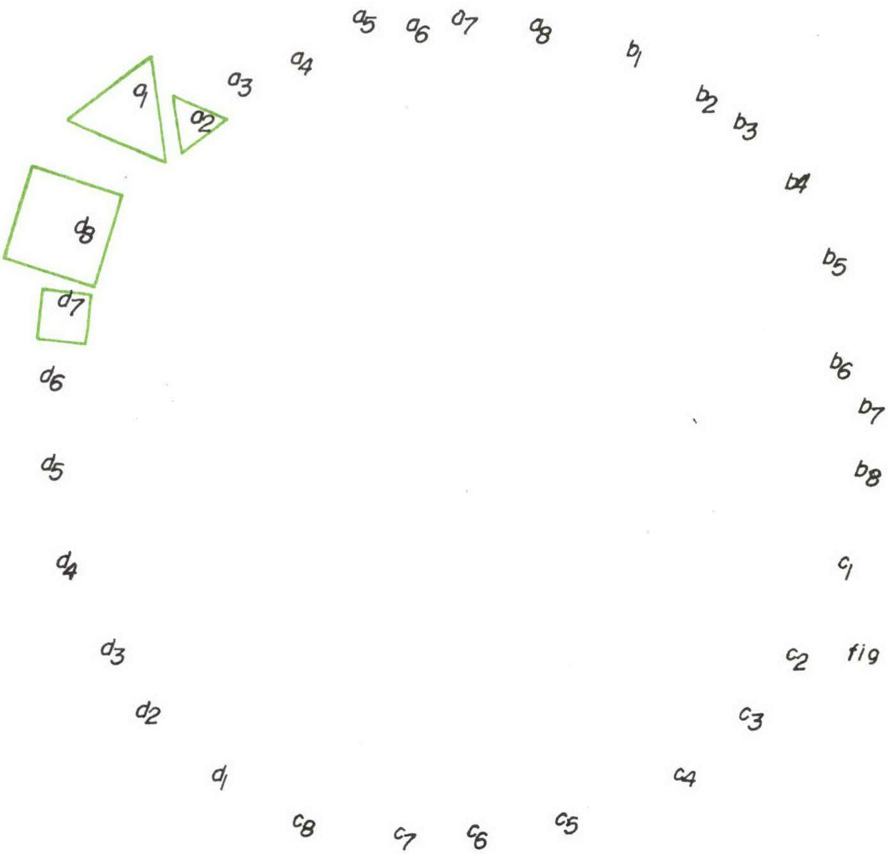

a1
a2
a3
a4
a5
a6
a7
a8
b1
b2
b3
b4
b5
b6
b7
b8
c1
c2
c3
c4
c5
c6
c7
c8
d1
d2
d3
d4
d5
d6
d7
d8

fig 10

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	c_8	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7	d_8
P_a																																
P_b																																
P_c																																
P_d																																
P_e																																
P_f																																
P_g																																
P_h																																
P_i																																
P_j																																

Tabla 2

Sección III

Objetivos

Al concluir está sección:

1.6 Inducirás los principios de organización estructural de un conjunto de objetos.

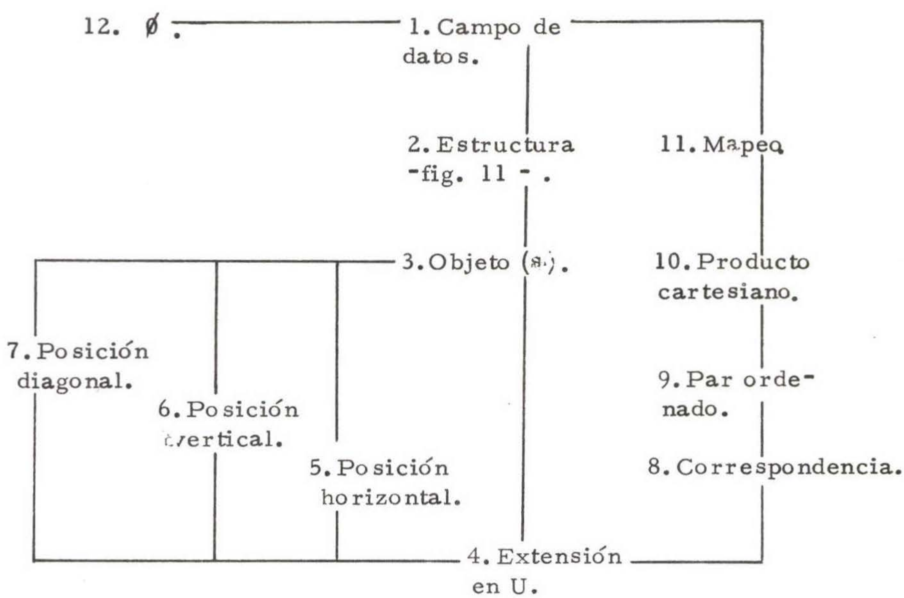
   1. Señalarás las relaciones entre las propiedades de los objetos.
   2. Colocarás nuevos objetos de acuerdo a las relaciones identifi - cadas

1.7 Aplicarás el significado de los términos:

   Conjunto vacío, correspondencia, produto cartesiano, mapeo.

   1. Determinarás los términos en un problema práctico
   2. Describirás la solución de un problema práctico, utilizando los - términos implícitos en él.

Proceso



Información

Conjunto vacío

Si pensamos en una propiedad del campo de datos, pensamos en una parte de U.

Asi, estaremos seguros de que las propiedades: "verde y azul", "grande y chico", definen conjuntos en U, o partes, que no contienen ningún elemento. Esta parte del Universo se llama : vacío, y se denota por $\emptyset$.

Una propiedad ausente o condición nula en el campo de datos, define el conjunto vacío de U.

Correspondencia.

Una extensión de la definición por 'enumeración', consiste en partir de un conjunto conocido para enumerar los elementos de otro conjunto.

Es decir, a partir del conjunto conocido, se puede, mediante una correspondencia de cada uno de sus elementos con cada uno de los elementos del otro, efectuar la enumeración que define al nuevo conjunto.

Por ejemplo :

$$\begin{array}{rcccccccccc} A= & \{ & a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & a_5, & a_6, & a_7, & a_8 & \} \\ & & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ B= & \{ & b_4, & b_3, & b_6, & b_5, & b_8, & b_7, & b_2, & b_1 & \} \end{array}$$

Producto cartesiano

Siendo A y B dos subconjuntos de U. El conjunto de todos los pares ordenados que tienen su primer elemento en A, y su segundo elemento en B, es llamado el producto cartesiano de A y B, y se expresa:

$$AXB = \{(a, b) / a \in A \text{ y } b \in B\}$$

Por ejemplo:

Siendo $F = \{ f \in U / f \text{ es } P_f \}$ y
$H = \{ h \in U / h \text{ es } P_h \}$, entonces

$$FXH = \{(d_1, b_1), (d_1, b_2), (d_1, c_3), \ldots, (d_2, b_2), (d_2, c_3), (d_2, c_4), \ldots, (c_3, a_4), (c_4, d_6), \ldots, (a_3, d_6), (a_3, a_7), \ldots, (a_4, a_7), \ldots, (b_5, a_8), \ldots, (c_8, a_8)\}$$

Mapeo

Ya se ha observado que la noción de par ordenado nos permite relacionar en un determinado orden dos objetos, vgr., $(a4, a8)$.

Por ello, en Matemáticas, este concepto nos será útil, cada vez que se desee asociar dos objetos.

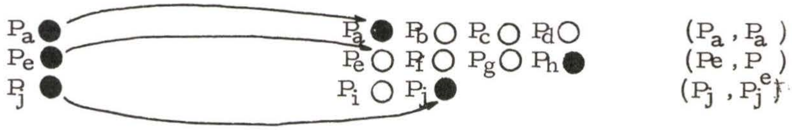
Un subconjunto de AXB, digamos M*, se dice que es un mapeo de A en B, si y solo si, cada miembro de A es un primer término de un par ordenado en M. Este conjunto asocia a un miembro de A, sea a_1, con el elemento de B que está en el par ordenado $(a_1, b_1) \in M$. Si $(a_2, b_2) \in M$, b_2 está asociado con a_2 bajo el mapeo M, b_2 es llamado la imágen de a_2 bajo M.

*algunos autores lo definen como 'función'.

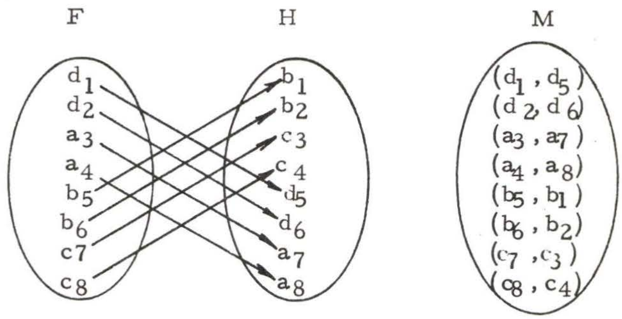
conjunto de propiedades del objeto a_4 - presentes -

conjunto de propiedades presentes y ausentes del objeto a_8

M



Si observamos el conjunto FXH, identificamos a (a_4, a_8), como un elemento del conjunto, de donde se ilustra M.



Se tiene que : $M \subset FXH$

Actividades

1. Selecciona un objeto de la estructura presentada - fig. 11 -.
2. Define las propiedades del objeto - tabla 3 -

ruta 2-3-4

3. Respecto del objeto que seleccionaste toma el próximo, colocado en posición horizontal, y define su extensión en U -tabla 3 -.

ruta 3-4-5-3-4

4. Lleva a cabo la correspondencia entre las propiedades presentes del primer objeto y las propiedades presenres y ausentes del segundo.

ruta 4-8-9

5. Selecciona un par de objetos contiguos en posición vertical, y otro par, en posición diagonal. Desarrolla el paso anterior para cada par.

ruta 2-3-4-6-3-4-8-9
2-3-4-7-3-4-8-9

6. Para cada par obtenido, en los incisos 3 y 5, encuentra un conjunto del cuál sea elemento -producto cartesiano-.

ruta 8-9- 10

7. Dentro de cada producto cartesiano del inciso anterior, determina un subconjunto M, que también contenga al par.

ruta 8-9-10-11

8. Indica el objeto que debe ocupar, cada uno de los siguientes lugares: 7, 8, 9, 10, 11, 12

ruta 2-3-4-5, 6, 7-4-8-11-1-12*

*si en el lugar no se puede determinar un conjunto de props. de U.

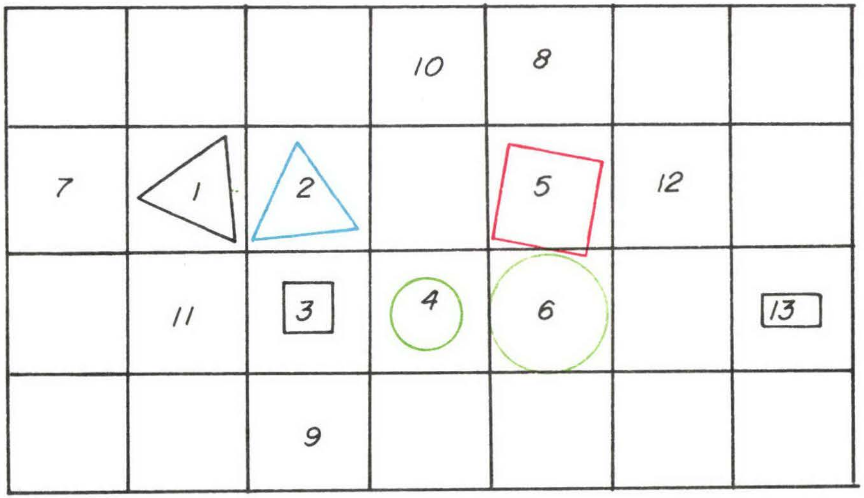


fig 11

1 50

Tabla 3

	1	2		3	4	6		2	3		5	6	1	3		2	4		4	5	1	7		5	8		4	9	3		2	10	5	8		1	2	11	9	3		5	6	12	13	8
P_a																																														
P_b																																														
P_c																																														
P_d																																														
P_e																																														
P_h																																														
P_f																																														
P_g																																														
P_i																																														
P_j																																														

Sección IV

Objetivos

Al concluir esta sección:

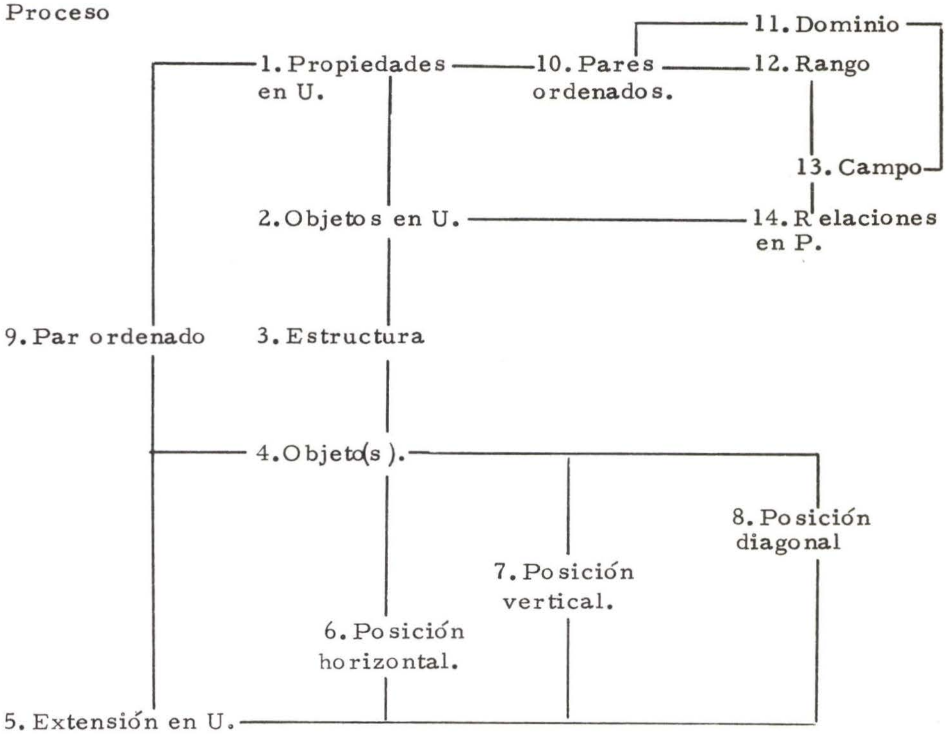
1.8 Reconocerás los principios que generan una estructura

  1. Identificarás las relaciones de propiedades entre los objetos que forman una pareja
  2. Establecerás las diferencias entre relaciones de pares de objetos
  3. Describirás las tendencias de las relaciones.
  4. Organizarás el campo de datos meidante las relaciones identificadas.
  5. Escogerás, para cada espacio en la estructura, el conjunto de propiedades adecuadas.
  6. Definirás la estructura al ordenar los objetos de U.

1.9 Entenderás el concepto matemático de relación.

  1. Definirás el término con tus propias palabras.
  2. Distinguirás términos de significado similar.

Proceso



Información

Relación

Frecuentemente hemos hablado de las relacines que existen en un par de objetos o varios. Veamos un ejemplo en un contexto diferente: si hablamos de los signos del horóscopo, tratamos con relaciones de estos, con nuestro día de nacimiento, hora, etc. Intuitivamente sabemos que al referirnos a relaciones en contextos ordinarios, localizamos un tipo de conexión entre objetos.
En esta sección trataremos, dentro de una estructura -fig. 12-, con relaciones binarias, esto es, relaciones entre dos objetos
Asi como anteriormente definimos una propiedad en U, mediante un conjunto, definiremos a una relación binaria en U, simplemente como un conjunto de pares ordenados:

$$R = \{ r / \text{ si } r \in (x, y) \text{ entonces } x, y \in U \}$$

Según el caso, podemos
utilizar diferente simbología; xRy $R(x) = y$
Dominio y Rango de una Relación
Si R es una relación, entonces el dominio de R es el conjunto de objetos x, tales que, para algún y, se tiene $(x, y) \in R$.
El rango de una relación es el conjunto de objetos y, tales que, para algún x, se tiene $(x, y) \in R$.
Sea R una relación , si el dominio y el rango son U, entonces $R \subseteq U X U$, y de aqui diremos que R es una relación binaria en U.

Actividades

1. Toma tres parejas de objetos -fig. 12- y define su extensión.
rutas: 3-4-5-6-4-5 ; 3-4-5-7-4-5 ; 3-4-5-8-4-5
2. De cada par de objetos define un par ordenado.
ruta 5-9
3. A partir de cada par ordenado obtenido en el inciso anterior, define todos los pares ordenados que, como primer término, contienen una propiedad presente del primer objeto, y como segundo término una propiedad presente del segundo objeto. ruta 9-1-10
4. Sea R_h el conjunto de pares ordenados, cuyo primer término es una propiedad presente de un objeto, y el segundo término refiere las propiedades presentes de un segundo objeto, en donde ambos objetos están colocados uno del otro en posición horizontal; asimismo, R_v, R_d, refieren conjuntos de propiedades presentes de objetos -pares ordenados- en donde ambos objetos están colocados uno del otros en posición vertical y diagonal respectivamente. Determine el dominio y rango de estos tres conjuntos.
ruta 1-9-10-11-12
5. A partir de las relaciones identificadas en el inciso anterior, colocá todos los objetos de U, dentro de la estructura presentada -fig. 12-.
ruta 1-2-3-4-5-6, 7, 8-5-9-1-10-14

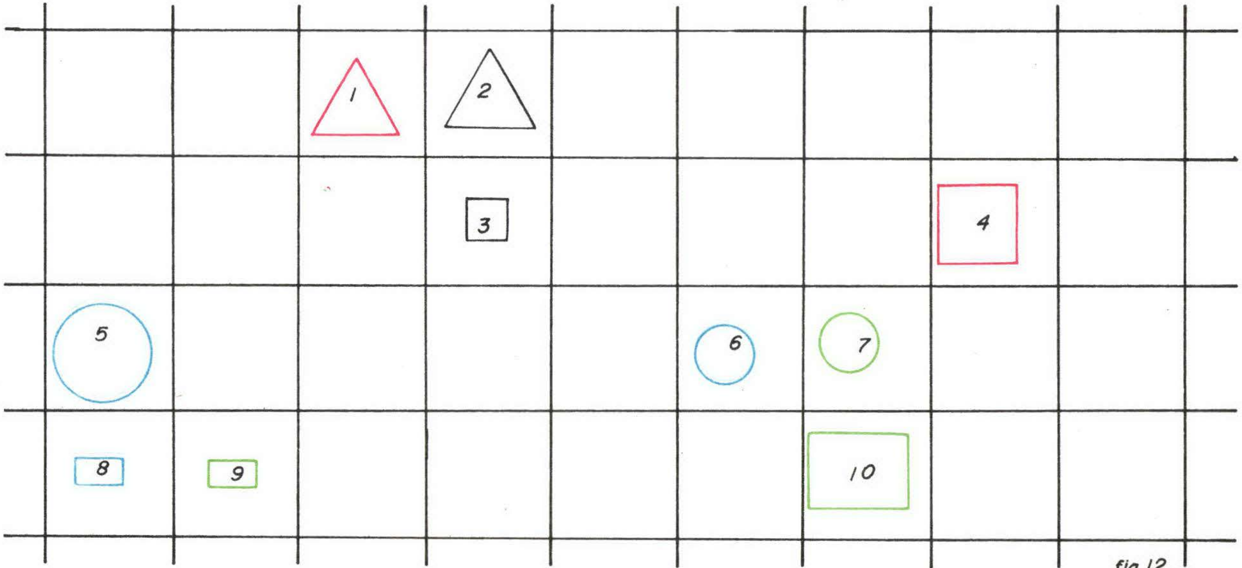


fig 12

Tabla 4

	1	2		6	7		8	9		2	3		5	8		7	10		1	3		5	9		7	4		6	10
P_a																													
P_b																													
P_c																													
P_d																													
P_e																													
P_f																													
P_g																													
P_h																													
P_i																													
P_j																													

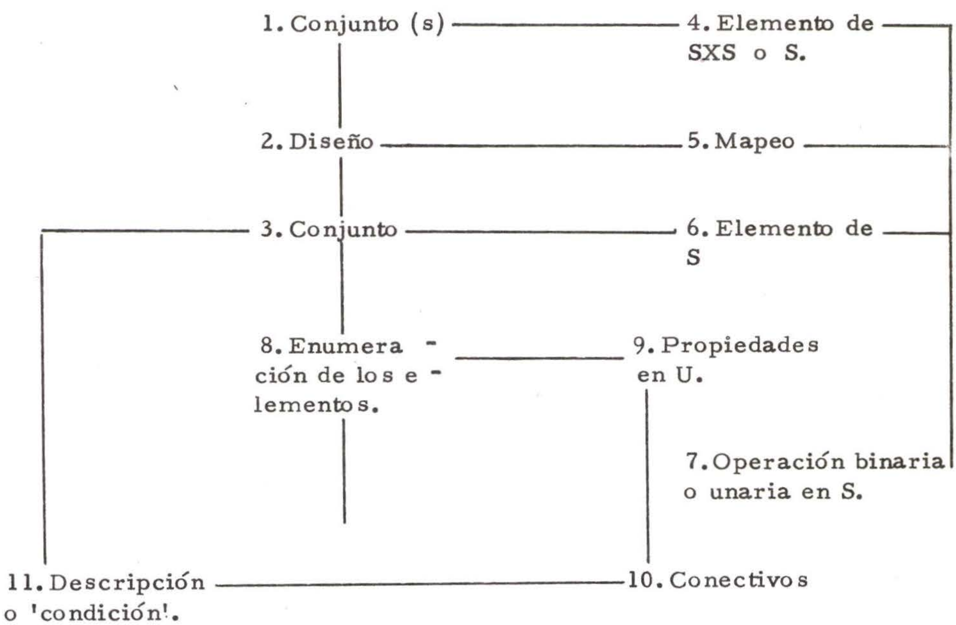
Sección V

Objetivos
Al finalizar esta sección:

1.10 Comprenderás el significado del concepto operación.
  1. Utilizarás el término en su acepción correcta.
  2. Usarás el término, en la descripción de la solución a un problema.

1.11 Concluirás, a partir de resultados operacionales relaciones de propiedades.
  1. Transformarás conjuntos mediante operaciones
  2. Distinguirás entre conectivos y operadores.
  3. Determinarás el conjunto de elementos, resultantes de las operaciones de unión, intersección y complementación, mediante la condición que los describe.

Proceso



Información

Operación

Otro concepto básico en matemáticas, es el de operador en un conjunto. La idea que este concepto contiene, es, la de un diseño, forma o instrucción que nos permita:

a)Hablar de algún (a) objeto o propiedad sin mencionar su nombre.

b)Transformar un (a) objeto o propiedad en otro (a).

El diseño "el objeto igual en color y forma a", permite hablar de c_3, mencionando a c_4 -fig. 10-.

Considerando la forma "no solo mas grande sino igual en color a", transformamos a c_3 en c_4.

Es decir, se efectúa una asociación entre dos miembros de un conjunto. Esta forma especial de mapeo, en donde, el dominio y el rango son el mismo conjunto, se le llama 'operador unario'.

Si K es cualquier conjunto no vacío, por operador unario en K, entenderemos cualquier mapeo de K en K. En caso de que el mapeo sea de KXK en K, el operador es llamado 'binario'.

Conjunto potencia

Este conjunto especial -S- , es aquel cuyos elementos son los subconjuntos de U, comprende entre estos al conjunto $\emptyset$ y a U mismo.

Supongamos : $U = \{a, b, c, d\}$

entonces,

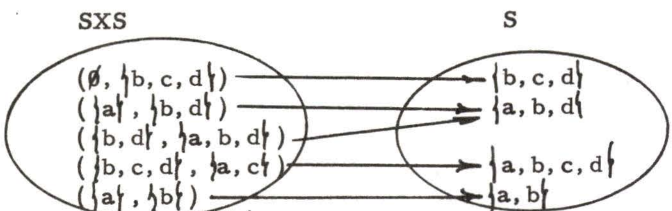
$$S = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{b,c\}, \{b,d\}, \{c,d\}, \{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{b,c,d\}, \{a,b,c,d\}\}$$

y

$$SXS = \{(\emptyset, \emptyset), (\emptyset, \{a\}), (\emptyset, \{b\}), (\emptyset, \{c\}), (\emptyset, \{d\}), (\emptyset, \{a,b\}), \ldots, (\{a,b\}, \emptyset), (\{a,b\}, \{a\}), \ldots, (\{a,b\}, \{a,b,c,d\}), \ldots, (\{a,b,c\}, \emptyset), \ldots, (\{a,b,c,d\}, \{a,b,c,d\})\}$$

Unión

Dado $U = \{a, b, c, d\}$ y el diseño 'unión', se puede efectuar un mapeo de SXS en S.



Si simbolizamos el mapeo por $\bigcup$, el elemento genérico de S por K, y el elemento genérico de SXS por (Y, Z), se tiene que : $((Y, Z), K) \in \bigcup$, en donde K , es imágen bajo $\bigcup$ de (Y, Z).

$\bigcup$ asocia a un miembro de SXS con un miembro de S, por lo que $\bigcup$ es un operador binario en S, lo que se representa :

$$\bigcup(Y, Z) = K \quad o \quad Y \bigcup Z = K$$

Ahora si sabemos que : $Y, Z, K \in S$ y $y, z, k \in U$, definimos al conjunto unión:

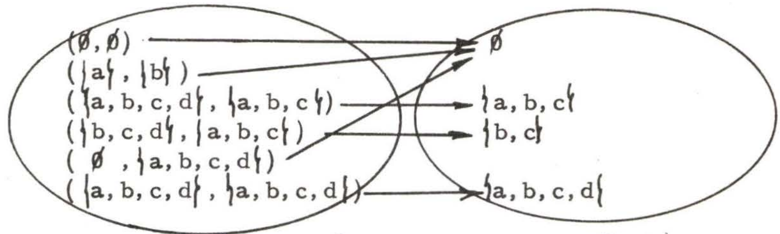
$$Y \bigcup Z = \{k \in U / \text{'k es } P_y \text{ o k es } P_z\text{'}\}$$

La condición 'k es P_y o k es P_z', indica que k se caracteriza por P_y, o por P_z, o por ambas. P_y y P_z indican dos propiedades cualesquiera en U.

Intersección

La operación binaria de la intersección ($\bigcap$), se puede ilustrar mediante el siguiente ejemplo :

SXS S



Por lo que : $((Y, Z), K) \in \bigcap$, o $\bigcap(Y, Z) = K$, o $Y \bigcap Z = K$

y siendo :

$Y = \{y \in U / \text{'y es } P_y\text{'}\}$ $Z = \{z \in U / \text{'z es } P_z\text{'}\}$

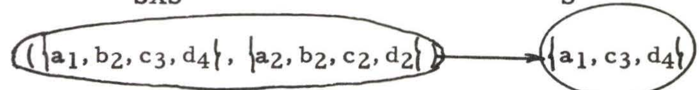
entonces $Y \bigcap Z = \{k \in U / \text{'k es } P_y \text{ y k es } P_z\text{'}\}$

En donde, 'k es P_y y k es P_z', señala que k se caracteriza, a la vez, por P_y y P_z. $\bigcap$ es una operación binaria en S.

Diferencia

Si Y y Z, son dos conjuntos, la diferencia Y—Z, se ilustra en seguida :

SXS S



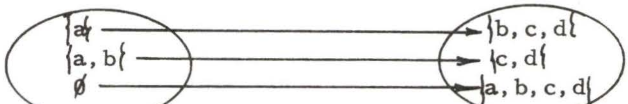
donde $Y = \{a_1, b_2, c_3, d_4\}$ $Z = \{a_2, b_2, c_2, d_2\}$ y $Y — Z = \{a_1, c_3, d_4\}$

La diferencia es una operación binaria en S.

Complementación

Sea P_a una propiedad que caracteriza al subconjunto A de U. Los elementos de U, que no se caracterizan por P_a, constituyen el conjunto complemento de A. La complementación es un mapeo de S en S, es decir una operación unaria en S.

S S



Asi pues $(Z, K) \in \complement$, o $\complement Z = K$

se tiene $\complement Z = \{k \in U / \text{'k} \notin Z\}$, o $\complement Z = \{k \in U / \text{'k no es } P_z\text{'}\}$

también : $Z = U — Z$

La condición 'k no es P_z', indica que k se caracteriza porque no es P_z.

'o' 'y' son conectivos que permiten enunciar la condición -propiedad- del conjuntoconjunto imágen en S, de un elemento de SXS bajo $\bigcup$ y $\bigcap$ respectivamente, mientras que 'no', permite enunciar la condición -propiedad- del conjunto imágen en S, de un elemento de S, bajo $\complement$.

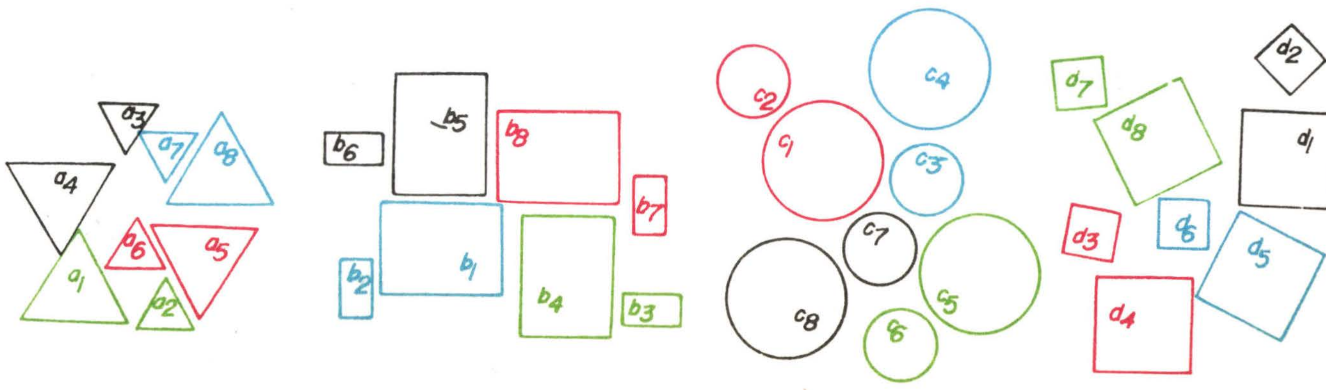
Actividades

Los subconjuntos definidos por P_a, P_e, P_j -tabla 5- son subconjuntos de U, por lo tanto son elementos de S.
En la tabla 5, se han introducido nuevas condiciones, que definen otros tantos elementos de S -filas 2, 3, 4, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14-.
En los siguientes ejercicios ejercicios , enumere en la tabla 5 los elementos del conjunto obtenido mediante la operación , en la fila que corresponda a la propiedad que define al conjunto.

1. Enumere los elementos del conjunto definido por P_a , P_e , P_j , mediante circulos obscuros en la tabla 5.
2. Obtenga $U - A$, $U - E$, $\complement J$. ruta 1-4-7-2-3-8-9
3. Obtenga $E \cup J$, $A \cup \complement A$, $\complement E \cup \complement J$ ruta 1-2-5-7, 2-3-6, 3-8-9-10-11
4. Obtenga $E \cap J$, $A \cap \complement A$, $\complement E \cap \complement J$ ruta 1-2-5-7, 2-3-6-8-9-10-11
5. A partir de $E \cup J$, obtenga $\complement (E \cup J)$
6. A partir de $E \cap J$, obtenga $\complement (E \cap J)$

Tabla 5

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	c_8	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7	d_8
Pa																																
NoPa																																
Pa y NoPa																																
Pa o NoPa																																
Pe																																
Pj																																
Pe o Pj																																
Pe y Pj																																
NoPe																																
NoPj																																
NoPe y NoPj																																
No(Pe o Pj)																																
NoPe o NoPj																																
No(Pe y Pj)																																



Sección VI

Objetivos

Al finalizar esta sección :

1. 12 Analizarás la organización estructural de un campo de datos dado.

1. 13 Aplicarás los conceptos de:relación de equivalencia , partición, condicional y operación.

1. Distinguirás entre operación y partición

2. Inferirás los elementos de una partición mediante relaciones de equivalencia y operaciones.

3. Identificarás el uso adecuado del concepto de relación de e - quivalencia.

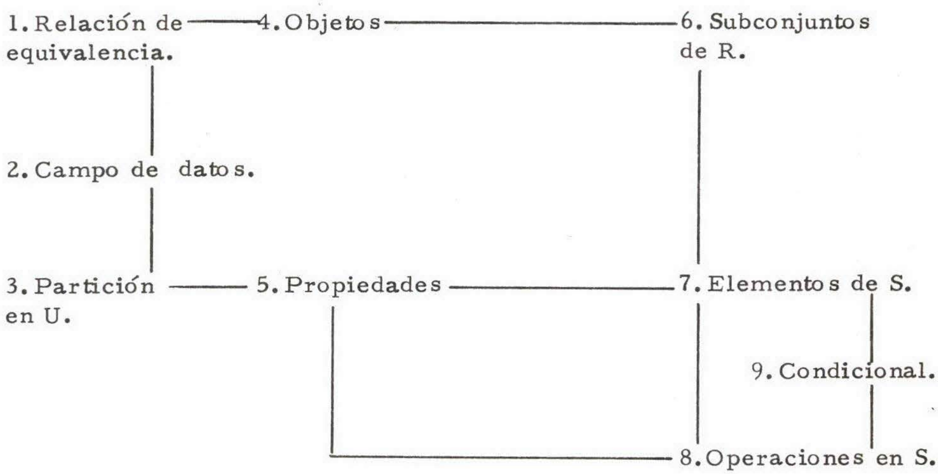
1. 14 Formularás conclusiones válidas.

1. Especificarás suposiciones, para llegar a conclusiones.

2. Reconocerás los conceptos necesarios para describir los e - lementos de una partición.

3. Identificarás relaciones de antecedente y consecuente en el - campo de datos.

Proceso



Actividades

En la fig. 14, se ha inducido, a partir de R :"no es rojo y no es cuadrado como", una partición en U, obteniéndose $S_x = \{x_1, x_2, \ldots, x_{14}\}$ y $S_y = \{y_1, y_2, \ldots, y_{18}\}$. Algunos elementos de R, serían : (x_1, x_2), (x_{10}, x_4); no asi : (x_{11}, y_8).

1. Enumera los elementos de R. ruta: (3-2-1-4)
2. Se tienen dos subconjuntos en S_x, en donde : $S_1 = \{x_1, x_2, x_{10}, \ldots, x_{14}\}$ y $S_2 = \{x_1, x_2, \ldots, x_8\}$. Define mediante su 'descri pción', los siguientes conjuntos : $(S_1 \cup S_2) \cap \complement S_1$, y $(S_1 \cup S_2) \cap \complement S_2$ (3-5-7-8-5)
3. Bajo que mapeo S_y es imágen de S_x ?

En la fig. 15, la relación de equivalencia R : "no es azul y es circulo como" induce una partición en U, obteniéndose los conjuntos $S_w \cup S_z$, $\complement S_w \cap \complement S_z$ en donde $S_w = \{w_1, w_2, \ldots, w_8\}$ y $S_z = \{w_1, w_2, \ldots, w_6, y_1, y_2, \ldots, y_{18}\}$.

4. Enumera los elementos de R. ruta (3-2-1-4-6)
5. Determina el antecedente y el consecuente en la condicional, que define a : $(S_w \cap S_z) \cap \complement S_w$ ruta (7-8-5-7-9)
6. Define $\complement S_w$ y $\complement S_z$, mediante la propiedad que caracteriza a sus elementos. ruta (7-8-5)
7. Determina la imágen bajo $\cap$ en S, del elemento $(\complement S_w, \complement S_z)$, enumerando sus elementos. ruta (7-8-5-4)

En las figs. 16 , 17 , se tiene una partición en U, $P_u = \{S_x, S_y\}$, en donde $S_x = \{x_1, x_2, \ldots, x_8\}$ y $S_y = \{y_1, y_2, \ldots, y_{24}\}$, posteriormente en S_x , se efectúa una partición, $P_x = \{S_1, S_2\}$, en dónde $S_1 = \{x_1, x_2\}$, $S_2 = \{x_3, x_4, \ldots, x_8\}$

8. Determina la relación de equivalencia que induce P_u en U. ruta (3-5-8-7-6-4-1)
9. Indica la relación de equivalencia que induce P_x en S_x. (3-5-7-6-4-1)
10. Define un subconjunto en $S_2 \cup S_y$, mediante una condicional. (5-7-8-9)
11. Define el conjunto imágen bajo $\complement$, de $S_2 \cup S_y$. (7-8-5)

En la fig. 18 , a partir de particiones y operaciones, se obtiene S_x, S_y. Se tiene en primer término R_u:"es tan grande como ", la cuál induce $P_u = \{S_a, S_b\}$;después R_b;"es tan rojo como ", induce en S_b , $P_b = \{S_r, S_s\}$.

12. Define : $S_a, S_b, S_r, S_s, S_x, S_y$. (1-4-6-7-8-5)
13. Determina el mapeo bajo el cuál S_y, es imágen de S_x. (5-7-8)

Información

Relación de equivalencia

Se llama relación de equivalencia entre elementos de un mismo conjunto U, al subconjunto de UXU que cumple con las siguientes propiedades :

a)Reflexividad . Todo elemento de U es equivalente a sí mismo;dicho de otra manera, para todo $a \in U$, se tiene: $(a,a) \in R$, o aRa.
b)Simetría . Para todo $a, b \in U$, si a es equivakente a b, b es equivalente a a, o sea, si $(a,b) \in R$ entonces $(b,a) \in R$.
c)Transitividad . Para todo $a, b, c \in U$, si a es equivalente a b y b es equivalente a c, entonces a es equivalente a c. Si $(a,b) \in R$ y $(b,c) \in R$, entonces $(a,c) \in R$.
El ejemplo más generalizado de este tipo de relación , es la relación de identidad. La congruencia entre figuras es un ejemplo familiar en Geometría. En nuestro campo de datos, R :"es de la misma forma que", sería:

$$R = \{(a_1,a_1),(a_1,a_2),\ldots,(a_1,a_8),\ldots,(b_1,b_1),\ldots(b_2,b_1),\ldots,(b_8,b_1),\ldots,(c_1,c_2),\ldots,(c_2,c_1),\ldots,(d_2,d_3),\ldots,(d_3,d_5),\ldots,(d_5,d_2),\ldots,(d_8,d_8)\}$$

R cumple con las tres propiedades mencionadas anteriormente, por lo que es una relación de equivalencia. El contenido fundamental de las relaciones de equivalencia es que nos llevan a un principio general : objetos equivalentes en alguna propiedad, generan, a partir de esa propiedad, conjuntos equivalentes.
Partición
Un subconjunto de R sería : $R_a = \{(a_1,a_1),\ldots,(a_2,a_1),\ldots,(a_3,a_1),\ldots,(a_5,a_1),(a_5,a_2),\ldots,(a_8,a_8)\}$
que corresponde a AXA;otros subconjuntos de R serían : BXB, CXC, DXD, los cuáles son subconjuntos no vacíos, mutuamente exclusivos -la intersección de dos conjuntos es nula - y cuya unión iguala a R. Es decir, los subconjuntos de U : A, B, C, D , los cuáles son no vacíos, mutuamente exclusivos y cuya unión iguala a U, inducen una relación que es de equivalencia.
El conjunto de tales subconjuntos equivalentes forma una partición P en U.
P que es un subconjunto de S, tiene las siguientes características :
a)Si $A \in P$ entonces $A \neq \emptyset$
b)Si $A, B \in P$ entonces $A = B$ o $A \cap B = \emptyset$
c)Si $k \in U$ entonces existe $A \in P$, tal que $k \in A$
Por lo que R :"es de la misma forma que" ha inducido en U una partición.
Como ya se ha mencionado , la recíproca es cierta. Por ello, la relación que existe entre dos elementos a, b de U, que están en un mismo subconjunto de U, elemento de la partición P, es de equivalencia.
Condicional
Sea el conjunto : $K = \{k \in A \cup B$/'si k es no B_a entonces k es $B_b\}$
La condición 'si $k \notin A$, entonces $k \in B$', define un subconjunto del conjunto $A \cup B$, en donde $A, B \in S$. El conectivo 'si___entonces___' que relaciona propiedades dentro de un conjunto unión, se llama"condicional".
En la condicional : "si $k \notin A$, entonces $k \in B$" ; '$k \notin A$'es llamado antecedente y '$k \in B$' consecuente.
Podemos comprobar que : $K = (A \cup B) \cap \complement A$.

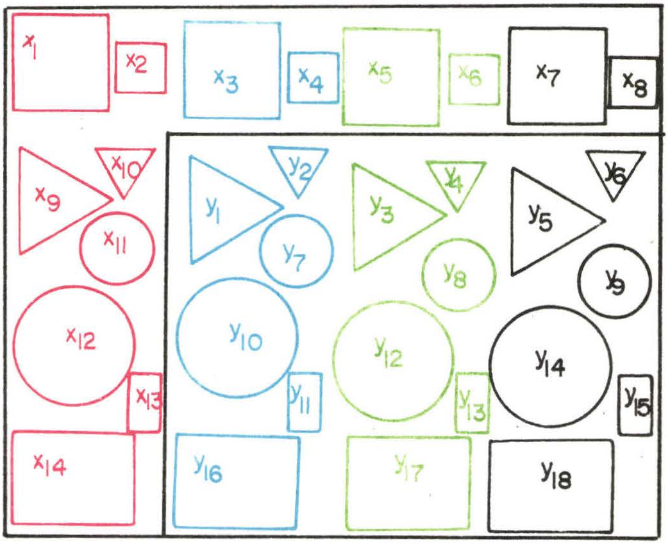
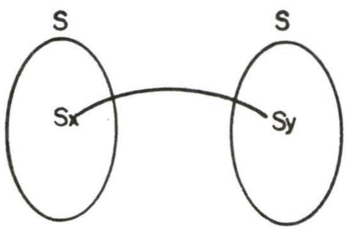

x1
x2
x3
x4
x5
x6
x7
x8
x9
x10
x11
x12
x13
x14
y1
y2
y3
y4
y5
y6
y7
y8
y9
y10
y11
y12
y13
y14
y15
y16
y17
y18

fig 14


S
S
Sx
Sy

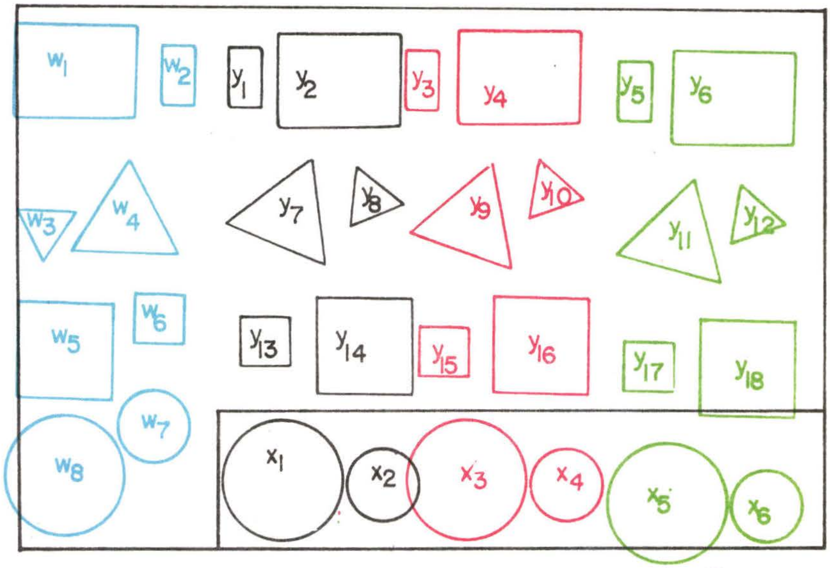
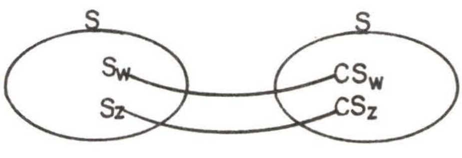
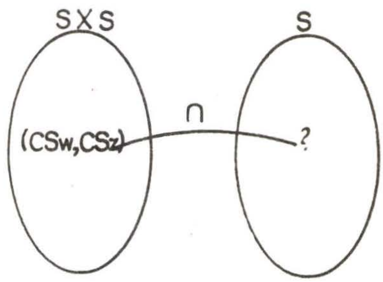
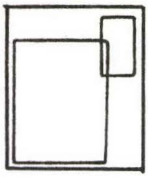

w1
w2
y1
y2
y3
y4
y5
y6
w3
w4
y7
y8
y9
y10
y11
y12
w5
w6
y13
y14
y15
y16
y17
y18
w7
w8
x1
x2
x3
x4
x5
x6

fig 15


S
S
Sw
Sz
CSw
CSz


S X S
S
(CSw,CSz)
∩
?



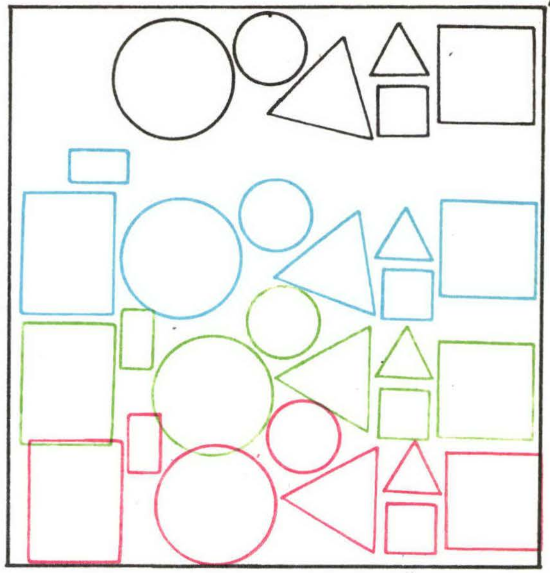
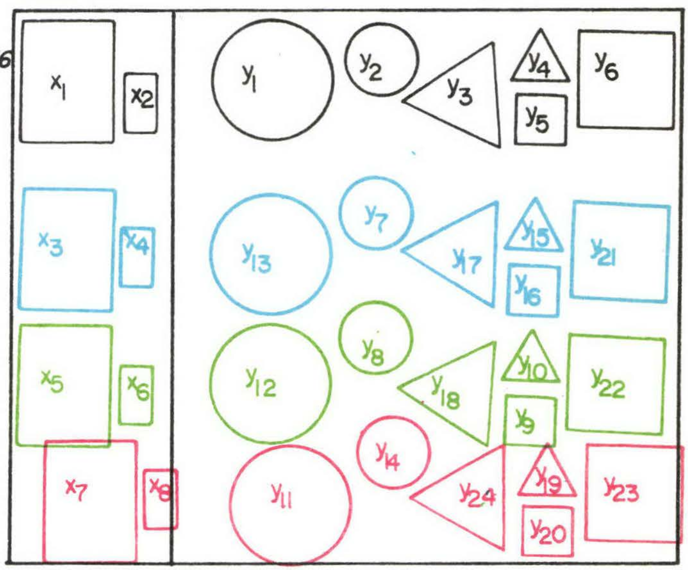
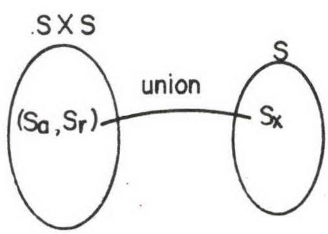
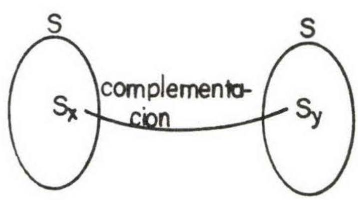


fig 17

fig 16


x_1
x_2
x_3
x_4
x_5
x_6
x_7
x_8
y_1
y_2
y_3
y_4
y_5
y_6
y_7
y_{13}
y_{17}
y_{15}
y_{16}
y_{21}
y_8
y_{12}
y_{18}
y_{10}
y_9
y_{22}
y_{14}
y_{11}
y_{24}
y_{19}
y_{20}
y_{23}


.S X S
S
union
(S_a, S_r)
S_x


S
S
S_x
complementa-
cion
S_y

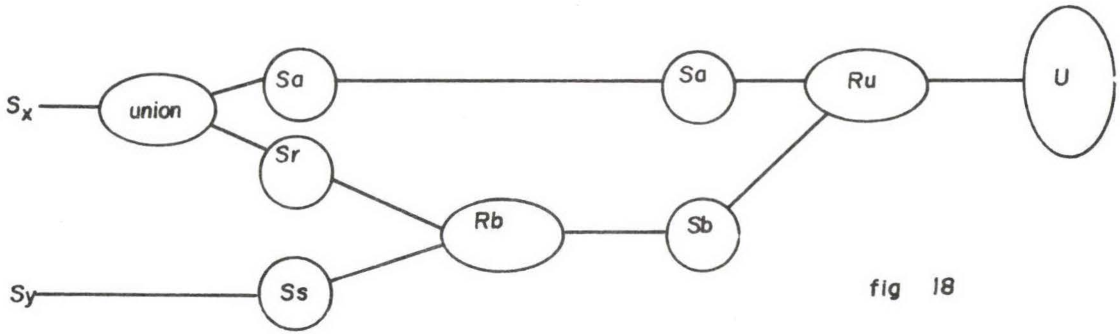
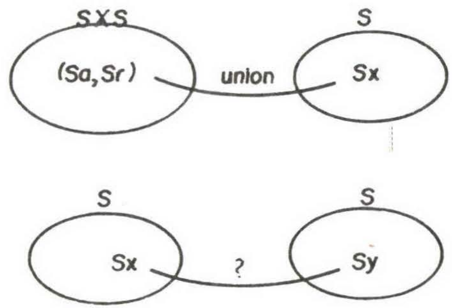


fig 18



Capitulo 2

Un modelo matemático

Sección VII

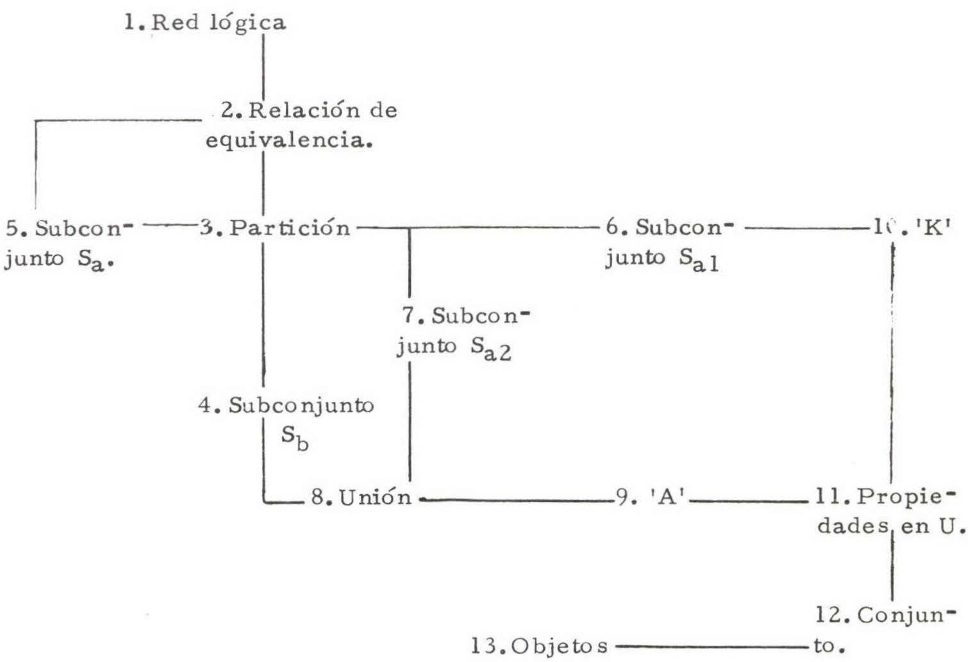
Objetivos

Al termino de esta sección:

2. 1Analizarás la función de un modelo matemático.

1. Inferirás la organización estructural de una red lógica a partir de las operaciones por ésta realizada.
2. Formularás los enunciados que definen subconjuntos de U.
3. Comparás los subconjuntos dados por una red lógica, y una partición efectuada en el campo de datos.

Proceso



Información

Modelo

Supongamos a un general que no dispone de un lugar adecuado a fin de observar en pleno el curso de una batalla, y que sin embargo posee observadores en lugares estratégicos. Mediante la información fragmentaria que recibe, tratará de reconstruir en un mapa, el campo de batalla, moverá piezas que representan materiales, hombres, equipo, etc. A medida que recibe nueva información, el modelo que utiliza cambiará, podrá observar por la simpleza de los elementos que trata, regularidades del ejército contrario, podrá predecir, a partir de la representación más acertada de la realidad, diversos elementos, como movimientos, operaciones, nuevas relaciones.

Si un modelo permite hacer predicciones acertadas de la realidad, será indicación de que su correspondencia es muy estrecha. El modelo nos dará una idea, o más bien, será la representación más cercana a una realidad.

En matemáticas a medida que vamos tratando con los objetos de un universo en particular, cada vez, resulta más necesario abstraer una representación que nos permita tratar con aquel universo con mayor facilidad, y al mismo tiempo que nos lleve a descubrir, relaciones o leyes mas generales para el campo de datos.

Consideraré para una introducción del concepto 'modelo', unicamente ciertas características de éste: Un modelo es la representación que nos permite tratar con una realidad amplia, a fin de ir abstrayendo sus relaciones y leyes universales, es decir, nuestra intención es la de llegar a una descripción general de un Universo de objetos.

Redes lógicas

La postulación de un modelo presupone una buena provisión de resultados fidedignos. La recopilación de estos y la asignación de una nomenclatura apropiada constituyen el paso anterior a una representación. Después se clasifican los resultados.

Esta clasificación constituye por sí misma la postulación de un modelo para la estructura del campo de datos que se estudia. Los sistemas de clasificación son modelos abstractos, mientras que los objetos son los elementos concretos de laestructura;asi pues, un modelo es el resultado de un proceso mediante el cuál hemos percibido las regularidades entre los objetos, y de aqui abstraemos las relaciones y las representamos.

¿Como se construyen los modelos?

A menudo se piensa que los modelos, son el producto de un proceso deductivo, esto no es cierto, ya que por deducción no se obtiene algo nuevo. La conclusión de un proceso deductivo es meramente una proposición que aclara la información suministrada, o sea, que la conclusión es inherente a los datos. Los modelos no se deducen se postulan.

La representación que describe el modelo se supone, y a partir de ésta se hacen predicciones. Las predicciones se verifican en el campo de datos; si éstas son exactas, el modelo es acertado y se dice que está validado;en caso contrario el modelo se sustituye o se modifica de acuerdo a las predicciones que resulten exactas.

Los modelos no siempre han de inventarse o construirse, lo importante es que sean reconocidos. En la fig. 19 se muestra un modelo llamado "redes lógicas".

Nomenclatura polaca

Mediante una comparación de lo que el modelo predice y la realidad, determinamos la validez de las predicciones.

Al comparar dos objetos, se exige aplicar una noción común al análisis de la una o de la otra. En efecto, por la comparación encontramos la figura, el color , el tamaño y otras cosas semejantes en todos los objetos en los que puedan estar presentes, y asi, mediante ésta podemos determinar cuán cerca esta nuestro modelo de lo que pretende representar.

En una deducción del tipo : "a es equivalente a b", "b es equivalente a c", queda claro en consecuencia, que "a es equivalente a c". Esto es, que al comparar un término dado 'a', con uno buscado 'c', lo haremos basándonos en que ambos son b. Para el caso que nos ocupa, 'a' es dado por el modelo, 'c' será buscado en el campo de datos, y 'b' es un signo, símbolo o referente de una característica de ambos. Al conjunto de signos que nos permitirá comparar las predicciones del modelo -a- redes lógicas, con los datos -b- del universo que estudiamos, le llamaremos nomenclatura polaca para conjuntos , en donde :

'K' significa "y", 'A' significa "o", 'N' significa "no" y 'C' significa "si... entonces...". 'x', 'y' refieren a dos propiedades cualesquiera en U.

Asi, los enunciados de las condiciones que definen un conjunto en U, se simbolizan:

'Kxy' es el referente de la condición : "a la vez, propiedad x, propiedad y"
'Axy' es el signo para : "alternativa, propiedad x, propiedad y, o ambas"
'Ny' alude a : "no propiedad y"
'NANxNy' corresponde a la descripción : "no alternativa, no x, no y, ó ninguna".
'CNxy' indica : "si propiedad no x, entonces propiedad y"

Actividades
En la fig. 19 observamos una red lógica, en donde : $G = \{g \in U/\text{'g es rojo'}\}$ y $D = \{d \in U/\text{'d es cuadrado'}\}$
mediante R :"es rojo como", se induce $P_u = \{G, \complement G\}$
1. Enumera los elementos de los subconjuntos G, $\complement G$
ruta ; (1-2-3-4, 5)
2. Con R :"es cuadrado como", se induce en $\complement G$, $P_{cg} = \{\complement G \cap D, \complement G \cap \complement D\}$
Enumera los elementos de ambos subconjuntos
ruta : (5-2-3-6, 7)
* 3. Define el conjunto que se obtiene : $G \cup (\complement G \cap D)$, enumerando sus elementos y enunciando la condición que lo delimita. -nomenclatura polaca-.
(4, 7-8-9)
4. Repite el inciso anterior para el conjunto complemento.
(3-6-10)
* 5. Verifica en el campo de datos los resultados obtenidos en la red 19. -ver fig. 14-
(9, 10-11-12-13)
6. Repite los incisos 1, 2, 3, 4 para las redes de las figs. 20, 21, 22.
7. En la red de la fig. 23, localiza las propiedades -en la red se inscriben en los circulos- que determinan las condiciones a la salida y en el complemento. -véase figs. 16 y 17- Puedes suponer dos propiedades y comprobar los resultados con la red.
8. Determina a partir de los resultados en la salida y el complemento la estructura de la red en la fig. 24. Puedes suponer dos propiedades y una estructura y verificar con los resultados.

*El término 'a' conocido, en este caso sería el que da el modelo -fig. 19- $G \cup (\complement G \cap D)$; el término buscado 'c' lo obtenemos en el campo de datos -fig. 14-, S_x, se observa que la condición que define ambos conjuntos es la misma, lo cuál es el término 'b' dado en un lenguaje específico -nomenclatura polaca-.

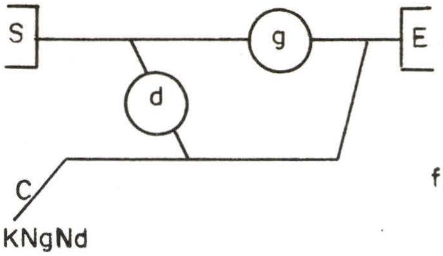


fig 19

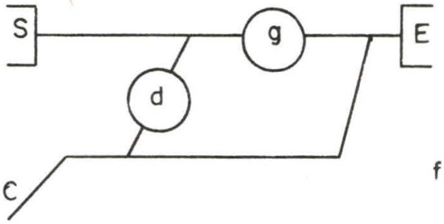


fig 20

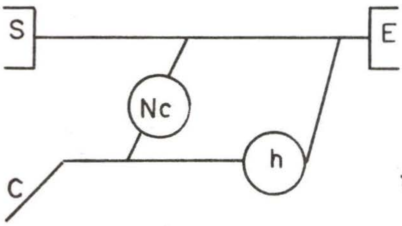


fig 21

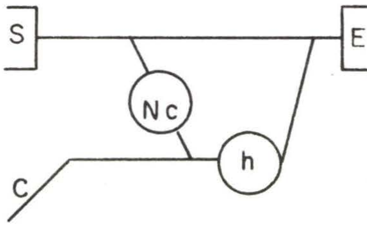


fig 22

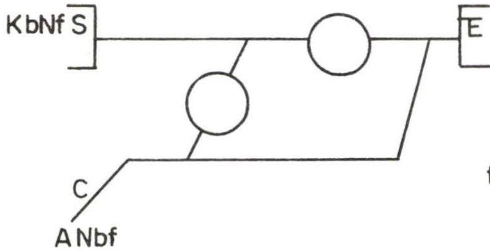


fig 23

fig 24

Sección VIII

Objetivos

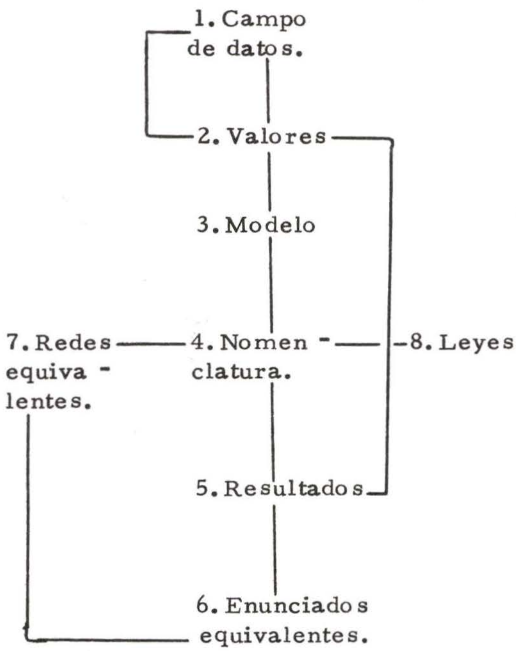
Al concluir esta sección:

2.2 Inferirás las leyes de una estructura, a partir de un modelo.

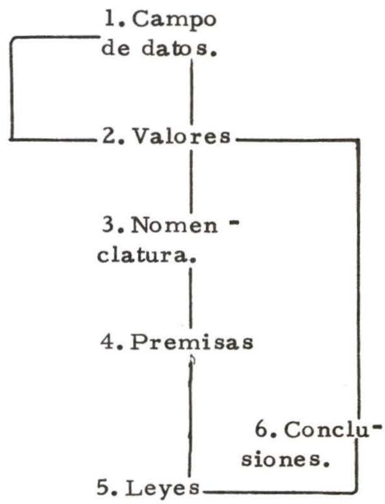
2.3 Determinarás la estructura planteada mediante la conjunción de datos y leyes.

1. Verificarás los resultados obtenidos por el modelo, en el campo de datos.
2. Interpretarás los resultados de redes equivalentes.
3. Diseñarás redes equivalentes.
4. Integrarás las leyes inferidas , con datos y valores, en el campo de datos, para concluir la descripción de una estructura.

Proceso a



Proceso b



Información

- Redes equivalentes

Si dos redes con diferente estructura, realizan la misma partición en el Universo, entonces éstas son equivalentes.

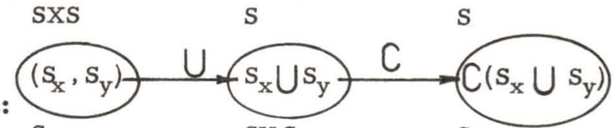
- Leyes de A. De Morgan

Sean x, y, dos propiedades en U, si éstas definen el mismo subconjunto del Universo, entonces son equivalentes.

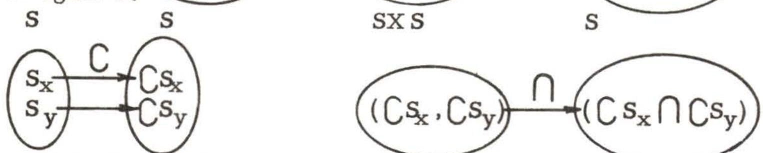
A partir de un par de redes equivalentes se puede determinar que:

1) NAxy = KNxNy

2) NKxy = ANxNy ; en el inciso 1 , se tiene :



lo cuál es igual a:



A partir del inciso 2, observamos que es lo mismo obtener el complemento del conjunto intersección de dos subconjunto de U, que obtener la unión de sus complementos.

- Involución

Esta ley se refiere a la operación de la complementación :

NNx = x

- Conmutatividad

Las operaciones de unión e intersección, obedecen la ley conmutativa :

lo que se representa : Axy = Ayx Kxy = Kyx

- Cyx = ANyx

Dado que una condicional, es un enunciado que define un subconjunto de un conjunto unión, si tenemos un conjunto descrito mediante una condicional podemos inferir el conjunto unión del cuál forma parte.

Si $S_1 = \{a \in U / \text{Cyx}\}$, entonces $S_1 \subset S$, donde $S = \{b \in U / \text{ANyx}\}$, la recíproca es cierta: Si $S = \{b \in U / \text{ANyx}\}$, entonces existe $S_1 \subset S$, tal que $S_1 = \{a \in U / \text{Cyx}\}$ y $S_2 \subset S$, tal que $S_2 = \{c \in U / \text{CNxNy}\}$.

- Razonamiento deductivo

Cada propiedad de un objeto, es descriptible en la medida en que ésta se ubique dentro de un conjunto que agrupe propiedades semejantes. Asi, cada propiedad dentro del conjunto, es un valor de la condición, que define al conjunto.

Las propiedades, es decir, los valores de condiciones que delimitan un 'objeto' dentro de un contexto determinan lo que se llama la estructura del objeto. En la fig. 12 podemos apreciar la estructura del objeto U que estudiamos, no obstante, en la fig. 14 observamos una disposición diferente. Es decir, para la estructura de un objeto no solo hay que tomar en cuenta las propiedades que lo delimitan sino también el arreglo de éstas Este arreglo, forma o disposición de las partes nos conduce a la estructura del objeto.

Habrá que agregar por otro lado que este arreglo, obedece a leyes de ordenamiento, sin las cuáles la estructura no sería consistente, es decir, no existiría. Precisamente, las leyes -relaciones de propiedades- que gobiernan operaciones y los valores de las propiedades, integran y dan forma a una estructura.

Supongamos que de una estructura en el objeto U, se obtiene el dato :

Cxy -premisa-

que en conjunción con las leyes , se transforma en descripción :

Cxy = ANxy = NKNNxNy = NKxNy -razonamiento-

Por lo tanto, al tomar los valores x : no rojo ;y : cuadrado ;la estructura estará dada por dos conjuntos "no rojo o cuadrado" y "no rojo y no cuadrado", véase fig. 14. -conclusión-.

En esta sección, en primer término 'inducimos' un conjunto de leyes que gobiernan el campo de datos, posteriormente mediante la conjunción de estas leyes -razonamiento- con datos iniciales del objeto -premisas-, deducimos su estructura. -conclusión-.

Actividades

Dada la estructura de la red 26, si no existiera un cruce al final, a la salida obtendríamos ANxNy, sin embargo, al darse negamos lo que obtendríamos, es decir, es cierta la descripción 'NANxNy' a la salida. Lo mismo sucedería en el complemento, el cruce impide la salida de un conjunto definido por 'Kxy', por lo cuál se obtiene NKxy.

1. Da los mismos valores a las propiedades x, y, en las redes 25 y 26, y comprueba si éstas son equivalentes.

ruta proceso a : (1-2-3-4-5-2-1-3-4-5-6-7-4-8)

2. Verfica si el anterior par de redes se relaciona con alguna de las leyes tratadas en esta sección.

3. Determina el enunciado en S y C, de las redes 27 y 28. Si son redes equivalentes, enuncia la ley que se deriva.

ruta proceso a : (1-2-3-4-5-2-1-3-4-5-6-7-4-8)

4. Construye una red lógica que te permita verificar la ley de Involución.

ruta proceso a : (8-4-7-6-5-4-3-2-1)

5. Dada la premisa 'Cxy', y los valores x: 'verde', y:'no chico', concluye CNyNx. Dibuja la estructura.

ruta proceso b : (1-2-3-4-5-6-2-1)

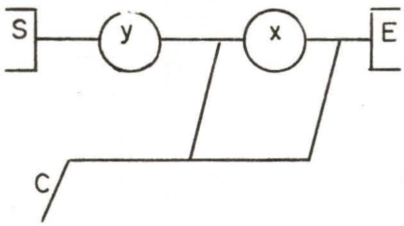


fig 25

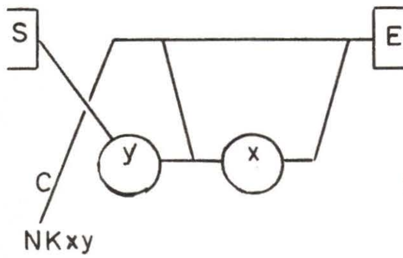


fig 26

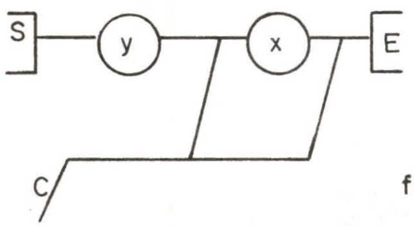


fig 27

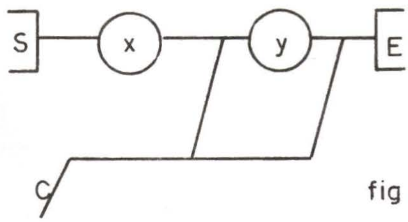


fig 28

Capitulo 3
Lógica simbólica

Sección IX

Objetivos

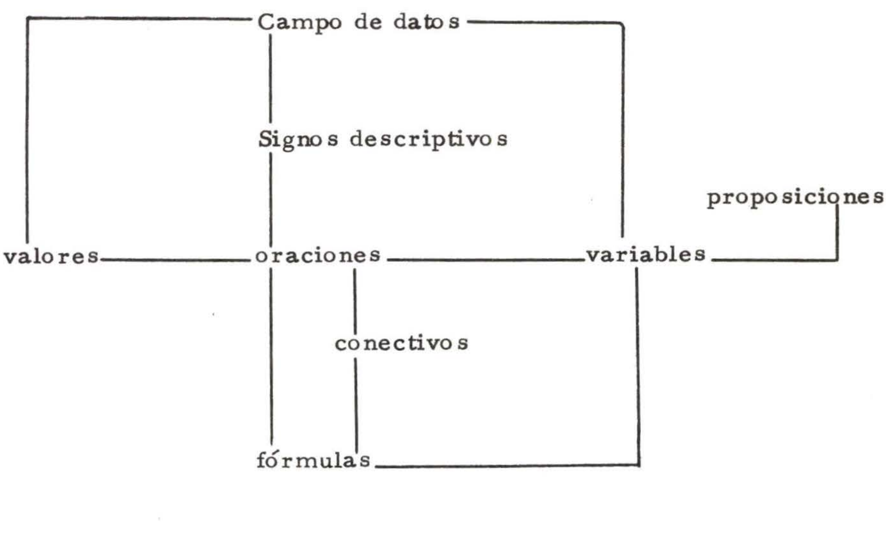
Al concluir esta sección :

3.1 Traducirás material de un campo de datos al lenguaje proposicional.

3.2 Comprenderás la función de los signos del sistema de lenguaje a estudiar.

1. Identificarás las partes de una oración
2. Distinguirás entre : oración, fórmula y proposición.
3. Identificarás el uso de cada signo dentro del contexto dado.

Proceso



Información

El propósito de un esquema de lenguaje

Se tiene una cuerda de seda, la cuál ha sido tejida a mano, utilizando una combinación de operaciones 1 -derecho, revés, etc. -, por otro lado tenemos una cuerda de mecate, tejida en máquina, con una combinación de operaciones 2. Estas dos cuerdas son lo que llamamos estructuras, es decir, un conjunto de propiedades -flexibilidad, dureza, resistencia, etc- en un determinado arreglo-forma de la cuerda- que crea con la seda o el mecate y las operaciones realizadas una cuerda con determinada forma y funciones.

Asi pues, llamaremos a la cuerda de seda, estructura T_1 y a la del mecate, T_2, las cuáles se determinan por una serie de valores.

Si se coloca en T_1 un determinado peso p_1, ésta se romperá, p_1 es el peso mínimo que rompe la cuerda, asimismo a T_2 le corresponde p_2. A partir de T_1 y p_1 se puede dar una explicación causal de porque la cuerda con estructura T_1 se rompe al sostener un peso p_3.

Esta explicación se puede desglosar en:

a)condiciones iniciales

Esta es una cuerda de estructura T_1.

El peso que va sostener es p_3.

p_3 es mayor que p_1.

b)leyes universales

Para cada cuerda de estructura T, existe un peso p, tal que, si cualquier peso excede a p, la cuerda se rompe.

Para cada cuerda de estructura T_1, el peso característico es p_1.

c)Predicción

La cuerda al sostener p_3 se va a romper.

La conjunción de las condiciones iniciales con las leyes universales, nos permite deducir la predicción. Asi pues, dar una explicación causal de un evento, significa dar una proposición que lo describa.

El tratado teórico de cualquier universo de objetos, consiste en establecer un sistema de proposiciones -como las leyes derivadas en la sección anterior- concernientes al universo. Dicho sistema de proposiciones, constituye la descripción del universo.

Para estas secciones se presentará un sistema de Lógica simbólica, el cuál no es una teoría -sistema de afirmaciones acerca de objetos- sino un esqueleto de lenguaje -un conjunto de símbolos con reglas para su uso-. Al ser sustituídos los signos en el esqueleto, se obtiene un lenguaje; de tal manera, que en este sistema simbólico en el que pueden traducirse algunos eventos de un campo de datos, ya sea, éste perteneciente a una teoría física, química, etc., se podrá dar una explicación causal de un evento en particular. Esto es, que cualquier evento que puede predecirse deductivamente, puede ser explicado causalmente.

Oración

El proceso de abstracción parte de una cosa real y desprende de ella lo que llamamos concepto, la interpretación parte de un concpto y busca alguna cosa real que lo lleve consigo. Por ello, es que la interpretación de una forma abstracta consiste en buscar los conjuntos de objetos que la definen.

El triángulo chico rojo, el grande , el azul, todos son interpretaciones de una forma abstracta, son contenidos del concepto 'triángulo'.

Las formas abstractas tratadas por un sistema de lenguaje son los signos disponibles para formar oraciones concernientes a los objetos de un universo en discusión.

En primer término tenemos dos clases de signos:

a)Los que representan a los objetos y que llamaremos constantes.

'a', 'b', 'c', 'd', ...

b)Los que representan las propiedades o relaciones de los objetos, llamados predicados.

'P', 'Q', 'R', 'S', 'T'.

Una oración esta compuesta de un predicado y una o mas constantes. Asi: P(a) significa "el objeto a es rojo", siendo P :"rojo".

R(a, b) indica "el objeto a es más grande que el objeto b", en donde R : "más grande que".

Conectivos lógicos

Una oración es un signo de scriptivo -no lógico- del campo de datos, otros signos de importancia son aquellos que aún cuando no refieren una descripción sirven para dar forma al contenido. Estos signos se utilizan de acuerdo a las reglas lógicas del lenguaje, o sea, son signos lógicos. Asi : "$P(a) \vee P(b)$" es llamada la disyunción de las oraciones P(a) y P(b). El signo de disyunción '$\vee$', corresponde a la palabra "o".

"$P(a) \wedge P(b)$" es llamada la conjunción de 'P(a)'y'P(b)'. El signo '$\wedge$'llamado conectivo de conjunción corresponde en el español a "y".

"$P(a) \rightarrow P(b)$" corresponde a una oración condicional, el signo '$\rightarrow$' corresponde en el español 'a "si___entonces___".

"$P(a) \leftrightarrow P(b)$" es una oración bicondicional, en donde el conec tivo '$\leftrightarrow$' equivale a "si y solo si".

Mientras que los anteriores son conectivos que unen dos oracionesel signo '$\sim$'de negación es usado en conección con una sola oración, en "$\sim P(a)$" el conectivo equivale a "no".

Formulas y variables

'x', 'y', 'z' son signos que sustituyen en una oración a las constantes. Estos signos abiertos, ya que contienen un conjunto de valores son llamados variables. Las constantes son los valores que pueden tomar.

'F', 'G', sustituyen cualquier predicado, por lo que también son variables. Por fórmula entenderemos ya sea una oración, o una expresión que contiene variables y que al tomar valores se convierte en oración. Una fórmula que contiene al menos una variable es abierta, de otra manera es cerrada. Una fórmula se dice que es molecular si contiene al menos un conectivo, en caso contrario se dice que es atómica.

Proposiciones

Cuando sustituimos a cualquier fórmula cerrada y atómica, utilizamos una variable, llamada proposición :

'p', 'q', 'r', 's' son signos que refieren proposiciones.

Una proposición se dice atómica si no contine un solo conectivo, molecular si consta de dos proposiciones atómicas y uno o más conectivos, y compuesta cuando consta de dos proposiciones moleculares y uno o más conectivos, en este último tipo de proposiciones se llamará conectivo principal, aquel que une a las dos proposiciones moleculares.

Por ejemplo :

En $\sim(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$

el conectivo principal es : "$\vee$"

Actividades

A partir de cinco objetos, tres propiedades y dos relaciones que selecciones en el campo de datos -fig. 1-.

Forma :

dos oraciones con una constante

dos oraciones con dos constantes

cinco fórmulas, en las que se tenga para cada una un conectivo lógico diferente.

una fórmula abierta, una cerrada, una molecular, una atómica.

una proposición atómica, una molecular y una compuesta en la cuál especifiques el conectivo principal.*

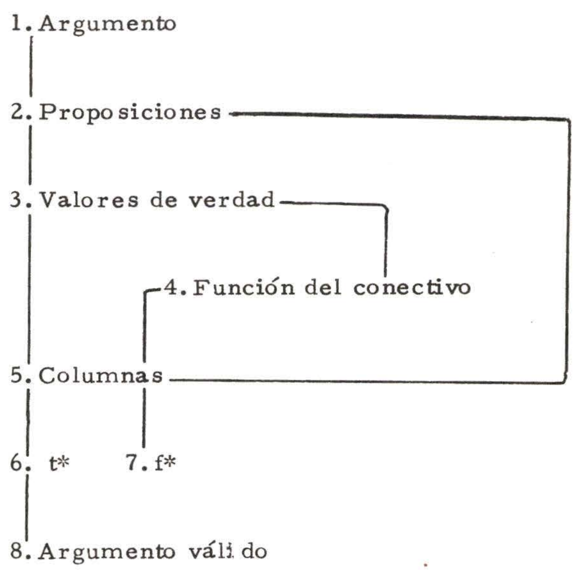
*Considérese el proceso para esta sección.

Sección X

Objetivos
Al concluir está sección :

3. 3Identificarás el uso adecuado de cada conectivo lógico.
1. Distinguirás la función de cada conectivo
2. Traducirás en columnas de valores una proposición dada.
3. Formularás conclusiones válidas a partir de las tablas de verdad.
4. Representarás por medio de diversas proposiciones una columna.
5. Identificarás un argumento válido.

Proceso



*tautología y contradicción

Información

Tablas de verdad

Los conceptos verdadero -V- y falso -F-, son los posibles valores de verdad de una oración. Si S : "cuadrado" y Q : "verde" y a : V "c_6"
Asignaremos el valor de verdad V a $Q(a)$, mientras que a $S(a)$ el de F.
Cuando tratamos con una proposición, ésta se caracteriza por cualquiera de dos valores F o V.
Sean $s : S(a)$ y $q : Q(a)$, cada una de las cuáles posee una de dos características : V o F.
Por lo que '$\sim s$', lo cuál se lee "a es no S", tine un valor de verdad V.
y '$\sim q$', lo que se lee "a es no Q", tiene un valor de verdad F.
Asi observamos que la función del conectivo '$\sim$', es la de cambiar el valor de verdad de una proposición.
Las reglas de uso, en el sistema de lenguaje que tratamos, se derivan para los conectivos lógicos a partir de los valores de verdad que asignan a una proposición, sea ésta atómica, molecular o compuesta.
Para una proposición molecular, los valores de verdad dependen de las combinaciones de valores -casos posibles- de las proposiciones atómicas;por ejemplo : '$s \vee q$', que se lee "a es S, o a es Q, o es ambas", tiene cuatro casos posibles de valores de verdad :

"s es V, q es V"	VV
"s es V, q es F"	VF
"s es F, q es V"	FV
"s es F, q es F"	FF

La función del conectivo '$\vee$', es la de asignar a los tres primeros casos el valor V, mientras que al último le asigna el de F.
La función de cada conectivo queda determinada por los valores de verdad que asigna según el caso. En la tabla 6, pág. 85, se define la función de cada conectivo por medio de su correspondiente tabla de verdad. En ésta el circulo obscuro corresponde al valor V, el anillo al valor F.
Cuando se tiene ya sea una proposición molecular o compuesta, sus valores de verdad quedan determinados por el conectivo principal -tabla 6-.

Tautología

Cuando una proposición tiene valores V para cada uno de sus casos de valor de verdad, se dice que es una tautología o una proposición lógicamente cierta (t);cuando una proposición tiene valores F para cada uno de sus casos de valor de verdad, se dice que es una contradicción o una proposición lógicamente falsa (f).
La proposición : $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim p \vee q)$ es una tautología -tabla 6-.
La proposición : $(p \wedge (q \vee r)) \leftrightarrow (\sim p \vee (\sim q \wedge \sim r))$ es una contradicción.

Relaciones lógicas

Implicación

En la lógica un argumento válido es valioso instrumento puesto que permite percibir regularidades entre los objetos.

Un argumento es un conjunto de proposiciones, una de ellas llamada conclusión y las otras premisas. Un argumento es válido si y solo si para los casos de valor de verdad en los que las premisas todas tienen un valor de verdad V, también la conclusión tiene el valor de verdad V.

Un argumento con premisas $p_1, p_2, p_3, \ldots$ y conclusión q_1 es válido si y solo si la proposición $(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \cdots \wedge p_n) \rightarrow q_1$ es una tautología.

De aqui se dice que $p \Rightarrow q$ (p implica q), si la condicional $p \rightarrow q$ es una tautología. $p \Rightarrow q$ es una implicación o regla de inferencia.

En la proposición : $((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$; se tienen las premisas : $p \rightarrow q$, p ; y la conclusión: q . Analizando la tabla de verdad (tabla 6) observamos que solo en un caso las premisas tienen ambas el valor V, y en ese mismo caso la conclusión también tiene el valor V; además la condicional es una tautología, por lo tanto el argumento es válido, de aqui se dirá que : $((p \rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$ es una implicación o regla de inferencia.

Esta regla de inferencia es llamada Modus Ponens. Y se dirá que siendo $p \rightarrow q$ cierta, es condición suficiente que p sea cierta , para que q sea cierta. "p es condición suficiente para q".

Otras reglas de inferencia son :

Modus tollens : $((p \rightarrow q) \wedge \sim q) \Rightarrow \sim p$

Siendo $p \rightarrow q$ cierta, es condición necesaria que q sea falsa ($\sim q$ cierta), para que p sea falsa ($\sim p$ cierta). "q es condición necesaria para p".

Regla del silogismo: $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \Rightarrow (p \rightarrow r)$.

Equivalencia

Se puede observar que cualquier columna se expresa mediante los conectivos : $\wedge$, $\vee$, $\sim$. Además se pueden encontrar que diferentes proposiciones son la misma columna. En tal caso se tienen proposiciones equivalentes. Y se dirá que si $p \leftrightarrow q$ es una tautología , entonces p y q son equivalentes. Estas proposiciones equivalentes permiten obtener una serie de propiedades entre los conectivos, las cuáles se conocen como leyes.

Leyes de A. De Morgan	1. $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$	14. $p \wedge t \equiv p$
	2. $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$	15. $p \vee f \equiv p$
Leyes conmutativas	3. $p \vee q \equiv q \vee p$	16. $p \vee t \equiv t$
	4. $p \wedge q \equiv q \wedge p$	17. $p \wedge f \equiv f$
Ley de involución	5. $\sim(\sim p) \equiv p$	18. $\sim t \equiv f$
Leyes de idempotencia	6. $p \vee p \equiv p$	19. $\sim f \equiv t$
	7. $p \wedge p \equiv p$	20. $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$
Leyes asociativas	8. $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$	21. $p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$
	9. $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$	22. $p \vee \sim p \equiv t$
Leyes distributivas	10. $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	
	11. $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	
Leyes modulares	12. $p \vee (p \wedge q) \equiv p$	23. $p \wedge \sim p \equiv f$
	13. $p \wedge (p \vee q) \equiv p$	24. $p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$

Actividades

1. Utilizando los conectivos '$\vee$', '$\wedge$', '$\sim$', y las proposiciones p, q lista las proposiciones adecuadas, para cada una de las 16 columnas que se presentan a continuación: (véase tabla 6)

p	q	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
●	●	●	○	○	○	●	○	○	●	○	●	○	●	●	○	●	●
●	○	○	●	○	○	●	●	○	○	●	●	●	○	●	○	○	●
○	●	○	○	●	○	○	●	●	●	○	●	●	●	○	○	○	●
○	○	○	○	○	●	○	○	●	○	●	○	●	●	●	○	●	●

ruta : (5-2-3-4-5)

2. Identifica las columnas que se pueden nombrar con p, q y '$\rightarrow$', '$\leftrightarrow$'.

(5-2-3-4-5)

3. Construye las tablas de verdad de las siguientes proposiciones y verifica cuáles de ellas son tautologías (t) y cuáles contradicciones (f).

1. $((p\rightarrow q)\wedge p)\rightarrow q$
2. $((p\rightarrow q)\wedge \sim q)\rightarrow \sim p$
3. $((p\rightarrow q)\wedge (q\rightarrow r))\rightarrow (p\rightarrow r)$
4. $(p\rightarrow r)\rightarrow((p\rightarrow q)\wedge (q\rightarrow r)$
5. $((p\vee q)\wedge \sim q)\rightarrow p$
6. $(p\wedge q)\rightarrow p$
7. $p\rightarrow(p\wedge q)$
8. $(p\rightarrow q)\rightarrow((r\vee p)\rightarrow(r\vee q))$
9. $(p\rightarrow q)\rightarrow(\sim q\rightarrow \sim p)$
10. $(\sim q\rightarrow \sim p)\rightarrow(p\rightarrow q)$
11. $(p\wedge \sim q)\rightarrow(r\wedge \sim r)$
12. $t\rightarrow(p\vee \sim p)$
13. $\sim t\rightarrow(p\vee \sim p)$
14. $f\leftrightarrow(p\wedge \sim p)$
15. $\sim f\leftrightarrow(p\wedge \sim p)$
16. $(\sim(p\vee q))\leftrightarrow(\sim p\wedge \sim q)$
17. $(p\wedge q)\leftrightarrow(\sim p\vee \sim q)$
18. $(p\vee q)\leftrightarrow(q\vee p)$
19. $\sim(p\wedge q)\leftrightarrow(q\wedge p)$
20. $(p\wedge(q\vee r))\leftrightarrow((p\wedge q)\vee(p\wedge r))$
21. $(p\vee(q\wedge r))\leftrightarrow((p\vee q)\wedge(p\vee r))$
22. $(p\leftrightarrow q)\leftrightarrow((p\wedge q)\vee(\sim p\wedge \sim q))$
23. $(p\rightarrow q)\leftrightarrow(\sim p\vee q)$
24. $(\sim(\sim p))\leftrightarrow p$
25. $(p\vee p)\leftrightarrow p$
26. $(p\wedge p)\leftrightarrow p$
27. $(p\vee t)\leftrightarrow t$
28. $\sim(p\wedge t)\leftrightarrow p$
29. $(p\vee f)\leftrightarrow p$
30. $\sim(p\wedge f)\leftrightarrow f$

(2-3-4-3-5-6, 7)

4. Comprueba cuáles de los siguientes son argumentos válidos.

1. $p_1 : p\wedge q$
   $q_1 : p\vee q$
2. $p_1 : p$
   $p_2 : p\wedge q$
   $q_1 : q$
3. $p_1 : p$
   $p_2 : \sim p$
   $q_1 : t$
4. $p_1 : p$
   $p_2 : q\vee \sim q$
   $q_1 : p\wedge t$
5. $p_1 : p\wedge r$
   $p_2 : q\wedge r$
   $p_3 : p\vee r$
   $p_4 : q\vee r$
   $q_1 : p\leftrightarrow q$
6. $p_1 : \sim q$
   $p_2 : t$
   $p_3 : p$
   $q_1 : p\leftrightarrow \sim q$

Tabla 6

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$	$p \wedge \sim p$	$p \vee \sim p$
●	●	○	○	●	●	●	●	○	●
●	○	○	●	○	●	○	○	○	●
○	●	●	○	○	●	●	○	○	●
○	○	●	●	○	○	●	●	○	●

p	q	$(p \rightarrow q)$	$\leftrightarrow$	$(\sim p \vee q)$
●	●	●	●	●
●	○	○	●	○
○	●	●	●	●
○	○	●	●	●

p	q	r	$(p \wedge$	$(q \vee r))$	$\leftrightarrow$	$(\sim p \vee$	$(\sim q \wedge \sim r)$
●	●	●	●	●	○	○	○
●	●	○	●	●	○	○	○
●	○	●	●	●	○	○	○
○	●	●	○	●	○	●	○
○	○	●	○	●	○	●	○
○	●	○	○	●	○	●	○
●	○	○	○	○	○	●	●
○	○	○	○	○	○	●	●

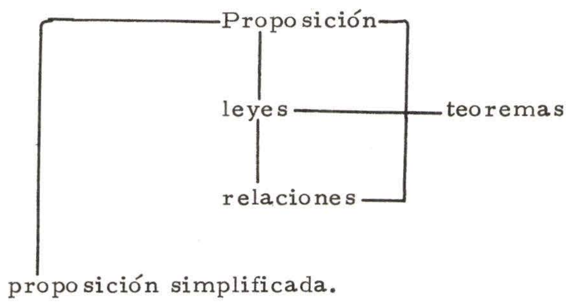
p	q	$((p \rightarrow q)$	$\wedge p))$	$\rightarrow q$
●	○	○	○	●
○	●	●	○	●
●	●	●	●	●
○	○	●	○	●

Sección XI

Objetivos
Al concluir esta sección :

3.4Integrarás el sistema de lenguaje
   1.Relacionarás las diversas leyes que forman el esqueleto de lenguaje.
   2.Formularás conclusiones válidas.
   3.Identificarás en un modelo las relaciones.

Proceso



Información

Algebra proposicional

Una estructura es descrita , mediante las relaciones que guardan sus elementos entre sí, y que los llevan a ocupar una posición del sistema. fig. 12.

Dentro de estas relaciones existe un número finito que por su carácter universal genera las demás, y que por tales características son el esqueleto que sostiene el sistema.

Si queremos describir una parte del sistema, o demostrar ciertas relaciones en él, unas y otras sabremos que están contenidas en las leyes -relaciones universales-, esto es, las leyes generan descripciones dado lo infinito de la estructura o sistema, y relaciones que llamaremos teoremas.

En los siguientes ejemplos, se muestra este método de demostración , descripción o reducción , según la tarea que se enfrenta :

1. $p \rightarrow q = \sim p \vee q$ ley 22
   $= q \vee \sim p$ ley 2
   $= \sim q \rightarrow \sim p$ ley 22, a esta expresión se le llama ley contrapositiva

2. La recíproca de $p \rightarrow q$ es : $q \rightarrow p = \sim q \vee p$ ley 22
   $= p \vee \sim q$ ley 2
   $= \sim p \rightarrow \sim q$ ley 22, llamada la inversa de $p \rightarrow q$

3. $\sim((p \vee q) \vee r) = (\sim(p \vee q) \wedge \sim r)$ ley 1
   $= (\sim p \wedge \sim q) \wedge \sim r$ ley 1

4. $\sim((p \wedge q) \wedge r) = (\sim(p \wedge q) \vee \sim r)$ ley 2
   $= (\sim p \vee \sim q) \vee \sim r$ ley 2
   $= \sim p \vee (\sim q \vee \sim r)$ ley 8

5. $(\sim p \wedge (r \wedge q)) \vee (\sim p \wedge (\sim r \wedge q)) \vee (p \wedge (\sim q \wedge r)) \vee (p \wedge (\sim q \wedge \sim r)$
   $= ((\sim p) \wedge ((r \wedge q) \vee (\sim r \wedge q))) \vee ((p) \wedge ((\sim q \wedge r) \vee (\sim q \wedge \sim r)))$ ley 11
   $= ((\sim p) \wedge ((q \wedge r) \vee (q \wedge \sim r))) \vee ((p) \wedge ((\sim q \wedge r) \vee (\sim q \wedge \sim r)))$ ley 3
   $= ((\sim p) \wedge (q \wedge (r \vee \sim r))) \vee ((p) \wedge (\sim q \wedge (r \vee \sim r)))$ ley 11
   $= (\sim p \wedge (q \wedge t)) \vee (p \wedge (\sim q \wedge t))$ ley 14
   $= (\sim p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q)$ llamada diferencia simétrica ley 16

Diagramas de Carroll

A fin de observar con mayor claridad estas descripciones o demostraciones de la parte de un sistema, introducimos un nuevo modelo, llamado Diagrámas de Carroll.

En éste cada proposición ocupa una zona de la estructura, y dentro de ésta se advierte la función de los conectivos.

	p	q	r
1	●	●	●
2	●	●	○
3	○	○	●
4	●	○	●
5	○	●	○
6	○	●	●
7	●	○	○
8	○	○	○

	p	$\sim$p	p	$\sim$p
q	1	6	2	5
$\sim$q	4	3	7	8
	r	r	$\sim$r	$\sim$r

Actividades

Simplifica las siguientes proposiciones:

1. $q \wedge (\sim(p \vee r))$
2. $(p \wedge (q \wedge r)) \wedge \sim((p \wedge q) \wedge r)$
3. $((p \wedge q) \vee ((p \wedge r) \vee (q \wedge r))) \wedge \sim((p \wedge q) \wedge r)$
4. $(r \wedge \sim q) \wedge (p \wedge q)$
5. $((\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee r)) \rightarrow (\sim p \vee r)$
6. $(p \wedge \sim q) \rightarrow (r \wedge \sim r)$

Demuestra que :

7. $\sim(\sim p \vee (q \vee r)) = ((p \wedge \sim q) \wedge \sim r)$
8. Si $p \rightarrow q = \sim p$, entonces $q = f$
9. $(q - (r \wedge \sim r)) \vee q = t$

Sin utilizar las leyes modulares , demuestra que :

10. $p \vee (p \wedge q) = p$.

Efectúa los anteriores ejercicios, utilizando los diagramas de Carroll.*

*Considera el proceso de aprendizaje propuesto.

Conclusiones

Actual mente se puede, en gran parte, observar que la enseñanza-aprendizaje sigue un modelo de realización, basado más en las costumbres, que en una fundamentación científica.

La Psicología, hoy día, aporta datos con base científica, respecto a las funciones intelectuales.

La utilización de esta disciplina genera una serie de posibilidades, en las que, se siguen secuencias de aprendizaje que coinciden con el proceso que la mente efectúa, conduciendo asi al aprendizaje verdadero.

Para ello, los profesores a cualquier nivel, requieren de una preparación psicopedagógica adecuada, que les proporcione el dominio de esta metodología.

Además, la Ingenieria de Procesos, al aplicarse al diseño de un sistema, nos permitirá optimizar las operaciones del proceso enseñanza-aprendizaje.

Referencias Bibliográficas

J. Piaget , Seis estudios de Psicología , Barral editores S.A. , Barcelona, 1970

J. Piaget , Psicología , Lógica y Comunicación , Ediciones Nueva Visión, Buenos Aires , 1970

J. Piaget , La formación del símbolo en el niño , Fondo de Cultura economica , México , 1973

C. Gattegno, W. Servais y otros , El material para la enseñanza de las matemáticas , Aguilar , Madrid , 1967

M. Walker , El pensamiento científico , Ed. Grijalbo , México , 1968

R. W. Young , Lines og Thought , Oxford University Press. , London , 1958

T. S. Kuhn , La estructura de las revoluciones científicas , Fondo de Cultura económica , México , 1971

J. L. Jolley , Ciencia de la información , McGraw - Hill Book, Co. , Nueva York , 1968

M. L. Bittinger , Logic and Proof , Adison - Wesley , Reading Mass. , 1970

S. K. Langer , Introducción a la Lógica Simbólica , Siglo XXI editores , México , 1969

C. W. Dodge , Sets, Logic & Numbers , Prindle Weber & Schmidt , Boston Mass. , 1969

R. Faure, A. Kaufmann, M. Denis-Papin , Matemática moderna , Paraninfo , Madrid , 1969

P. R. Halmos , Teoría intuitiva de los Conjuntos , CECSA , México , 1971

P. Suppes , Axiomatic Set Theory , Dover Publications Inc. , New York , 1972

R. Carnap , Introduction to Symbolic Logic and its Applications , Dover Publications Inc. , New York , 1958

A. H. Lightstone , The axiomatic method , Prentice-Hall , Englewood Cliffs N.J. , 1964