



22
201
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ALGUNOS RESULTADOS EN INMERSIÓN
DE GRÁFICAS EN SUPERFICIES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

M A T E M Á T I C O

P R E S E N T A :

BENITO FERNANDO MARTÍNEZ SALGADO



México, D. F.

FALLA DE ORIGEN

1991



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE

INTRODUCCION	0
CAPITULO I	
1.1 Definiciones básicas	1
1.2 Algunas clases importantes de gráficas	2
1.3 Nuevas gráficas de otras	20
1.4 Superficies	24
CAPITULO II	
2.1 Gráficas de Kuratowski	28
2.2 Género de superficies y gráficas	32
2.3 Operaciones sobre aristas y conexidad	36
2.4 Planaridad	38
2.5 Un eslabón entre el teorema de la curva de Jordan y el teorema de Kuratowski.	50
CAPITULO III	
3.1 Superficies y complejos simpliciales	55
3.2 Complejos simpliciales geométricas	55
3.3 Complejos simpliciales abstractos	58
3.4 Inmersiones celulares	60
3.5 Orientaciones	61
3.6 Representando superficies por polígonos	62
3.7 Descomposiciones de bandas e inmersiones de gráficas	63
3.8 Orientabilidad y esquemas de inmersión generalizados	65
BIBLIOGRAFIA	90

INTRODUCCION

Una inmersión de un espacio X en otro espacio Y , es una idea topológica. En el caso particular de que X sea una gráfica y Y una superficie requiere de herramientas combinatorias para poder ser definido precisamente.

El capítulo uno de este trabajo está dedicado a conceptos de T. de gráficas, Algebra y Topología con algunas relaciones entre ellas.

En el segundo capítulo se estudia el Teorema de Kuratowski, el cual da un criterio de planaridad. La forma en que es abordado este teorema nos proporciona un algoritmo de planaridad que nos da la inmersión de la gráfica con todas las regiones convexas y todas las aristas representadas por líneas rectas en el caso de gráficas planas 3-conexas. También se trata la relación entre el T. de Kuratowski y el T. de la curva de Jordan.

En el último capítulo mediante el teorema de Stahl obtenemos una caracterización de la inmersión de una gráfica en una superficie utilizando tanto métodos topológicos básicos como herramientas combinatorias.

CAPITULO I

En este capítulo se desarrollan los conceptos de teoría de gráficas y topología necesarios para la elaboración de este trabajo. Los conceptos relacionados con la teoría de grupos tales como : grupo, homomorfismo, generador, orden de un elemento, etc. pueden hallarse en un libro de Algebra Moderna por ejemplo: A first course in Abstract Algebra de Fraleigh [4].

1.1 Definiciones básicas.

Una gráfica G consiste de un conjunto V_G de vértices y un conjunto E_G de aristas. Cada arista e tiene un conjunto de vértices $V_G(e)$ a los que llamaremos puntos extremos de e , este conjunto puede tener uno o dos elementos de V_G . Definimos la estructura de incidencia de G como el conjunto $I_G = \{ V_G(e) \mid e \in E_G \}$. Si es claro a que gráfica nos estamos refiriendo usaremos V y E para denotar los conjuntos de vértices y aristas de la gráfica. Si $V_G(e) = \{v\}$ diremos que e es un lazo, si existen aristas con el mismo conjunto de puntos extremos entonces les llamaremos aristas múltiples.

Una gráfica es simplicial si no tiene lazos ni aristas múltiples, se prefiere el término simplicial al comunmente utilizado de "simple", porque en el sentido topológico una de tales gráficas es un 1-complejo simplicial como se verá posteriormente.

Si en una gráfica G , V y E son finitos entonces diremos que G

es una gráfica finita, en este trabajo consideraremos exclusivamente gráficas finitas.

Una gráfica G tiene una representación geométrica que se obtiene de la siguiente manera : cada vértice v de G por un punto en el plano y cada arista e por un arco de modo tal que no corte otros puntos que no representen sus puntos extremos.

Ejemplo 1. Definimos G con $V=(v_1, v_2, v_3)$ y $E=(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ y estructura de incidencia $(V(e_1)=(v_1, v_2), V(e_2)=(v_2, v_3), V(e_3)=(v_1, v_3), V(e_4)=(v_1, v_2), V(e_5)=(v_2, v_3))$. G no es simplicial pues tiene al lazo e_5 y las aristas múltiples e_3 y e_4 , en la figura 1.1 se dan tres representaciones geométricas de esta gráfica.

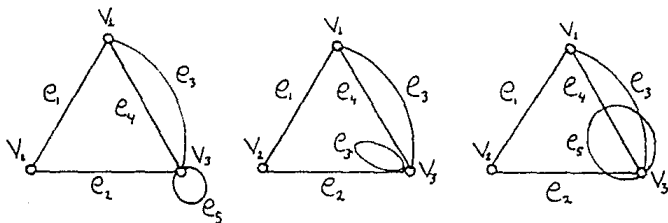


Fig. 1.1

Si una representación de una gráfica G es tal que para todo par de arcos distintos e_i y e_j se tiene $e_i \cap e_j = \emptyset$, entonces diremos que la representación es plana, las representaciones (a) y

(b) de la fig.1.1 son planas, la (c) no lo es.

Ejemplo 1.2. Sea G definida por $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$; $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$; $V(e_1) = \{v_1, v_3\}$, $V(e_2) = \{v_1, v_2\}$, $V(e_3) = \{v_2, v_5\}$, $V(e_4) = \{v_2, v_3\}$ y $V(e_5) = \{v_3, v_4\}$. G es una gráfica simplicial, ver representaciones geométricas de esta gráfica en la figura 1.2.

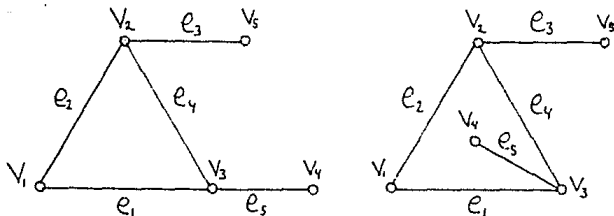


Figura 1.2

La mátriz de incidencia de una gráfica G tiene $\#V$ renglones y $\#E$ columnas, donde $\#S$ denota la cardinalidad de un conjunto S , la entrada en el renglón i y la columna j es 1 si $v_i \in V(e_j)$ y $\#V(e_j) = 2$, es 2 si $\{v_i\} = V(e_j)$ y 0 si $v_i \notin V(e_j)$ por ejemplo para las gráficas de los ejemplos 1.1 y 1.2 tenemos las siguientes matrices de incidencia:

$$\begin{array}{c}
 v_1 \\
 v_2 \\
 v_3
 \end{array}
 \begin{array}{ccccc}
 e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \\
 \left[\begin{array}{ccccc}
 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 1 & 1 & 2
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 v_1 \\
 v_2 \\
 v_3 \\
 v_4 \\
 v_5
 \end{array}
 \begin{array}{ccccc}
 e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \\
 \left[\begin{array}{ccccc}
 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

Al número de aristas que inciden en un vértice v se le llama

matrices de adyacencia de las gráficas 1.1 y 1.2 :

$$v_1 \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ 0 & 1 & 2 \\ v_2 & 1 & 0 & 1 \\ v_3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$v_1 \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ v_2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ v_3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ v_4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ v_5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Gráficas dirigidas.

Una dirección para una arista e es una función sobre de $(\text{comienzo}, \text{fin}) \rightarrow V(e)$ las imagenes de comienzo y fin son llamadas punto inicial y punto terminal respectivamente.

A menudo se considera a una arista e con dos direcciones arbitrariamente distinguidas como dirección positiva e^+ y dirección negativa e^- . En una representación geométrica una punta de flecha es usada para mostrar la dirección positiva, con el punto inicial detrás de la punta de flecha y el punto final frente a ella .

Una arista e con una dirección positiva o negativa es llamada una arista dirigida y es denotada por e^+ o e^- . Una gráfica en la que todas sus aristas tienen dirección es una gráfica dirigida o dirigida.

Ejemplo 1.3. En la figura 1.3 se tiene la representación de una gráfica dirigida.

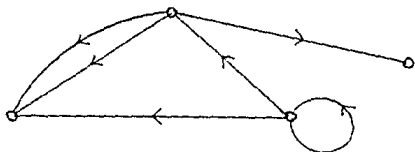


Figura 1.3

Mapeos e isomorfismos de gráficas

Sean G y G' gráficas. Un mapeo de gráficas es una función $f: G \rightarrow G'$ que consiste en un par de funciones $g: V_G \rightarrow V_{G'}$ y $h: A_G \rightarrow A_{G'}$ tales que : se preserva la incidencia en el sentido que para toda arista $e \in A_G$, la función h manda los puntos extremos de e en los puntos extremos de su imagen $f(e)$. Es común utilizar el símbolo f para las funciones de vértices y aristas g y h .

Ejemplo 1.4. Sean G y G' las gráficas de la figura 1.4. un mapeo $f: G \rightarrow G'$ está dado por: $f(v_1)=f(v_2)=v'_1$; $f(v_3)=f(v_4)=v'_2$; $f(v_5)=f(v_6)=v'_3$; $f(e_1)=e'_1$; $f(e_2)=f(e_3)=e'_2$; $f(e_4)=f(e_5)=e'_3$; $f(e_6)=e'_4$.

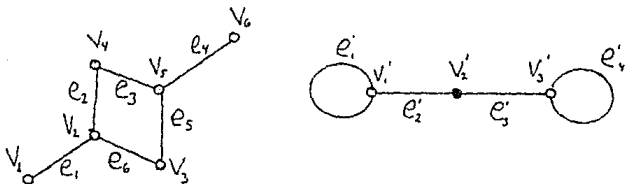


Fig. 1.4

Un mapeo $G \rightarrow G'$ es llamado un isomorfismo si ambas funciones g y h de vértices y aristas son 1-1 y sobre. Dos

gráficas se dice que son isomorfas si existe un isomorfismo entre ellas.

Ejemplo 1.5. Sean H y H' las gráficas de la figura 1.5 definimos $f: H \rightarrow H' : f(v_i) = v'_i$ para $i=1, \dots, 5$; $f(e_i) = e'_i$ para $i=1, \dots, 8$.

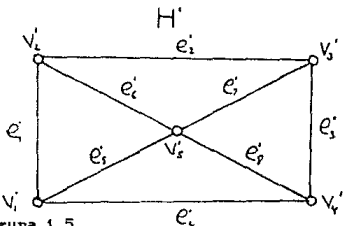
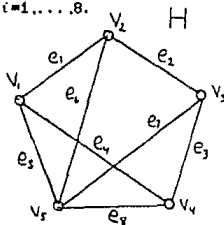


Figura 1.5

Observemos que las gráficas de la figura 1.5 resultan ser isomorfas, mientras que las de la figura 1.4 no lo son.

Un isomorfismo de una gráfica en sí misma es llamado un automorfismo. Bajo la operación de composición de funciones los automorfismos de una gráfica forman un grupo llamado el grupo de automorfismos de la gráfica y es denotado por $\text{Aut}(G)$.

Ejemplo 1.6. En la gráfica H' de la figura 1.5 consideremos el mapeo: $h(v'_5) = v'_5, h(v'_1) = v'_2, h(v'_2) = v'_3, h(v'_3) = v'_4, h(v'_4) = v'_1$. Claramente h es un automorfismo. Usando notación de permutaciones cíclicas, h puede ser expresado como: mapeo de vértices de $h = (v'_1 v'_2 v'_3 v'_4)(v'_5)$; mapeo de aristas de $h = (e'_1 e'_2 e'_3 e'_4)(e'_5 e'_6 e'_7 e'_8)$.

Las gráficas de la figura 1.6 tienen como grupo de automorfismos al grupo identidad.

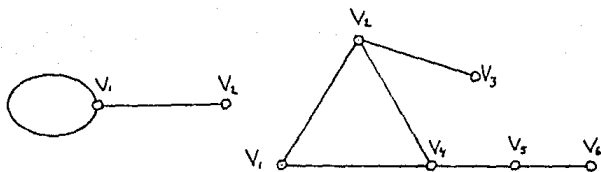


Figura 1.6

La sucesión de valencias de una gráfica está formada por la lista de todas las valencias de sus vértices.

Ejemplo 1.7. La gráfica de la figura 1.7 tiene como grupo de automorfismos a Z_2 .

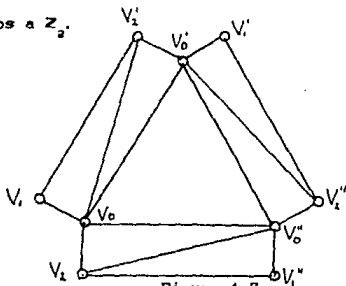


Figura 1.7.

Los automorfismos de la gráfica son : id el automorfismo identidad : $1(v_1)=v_1'$, $1(v_1'')=v_1''$, $1(v_1''')=v_1$; $2(v_1)=v_1''$, $2(v_1'')=v_1$, $2(v_1''')=v_1'$; con $i=0,1,2$. tenemos que $1 \cdot 1 = 2$, $1 \cdot 2 = id$, $2 \cdot 1 = id$ por lo tanto el grupo de automorfismos de la gráfica es isomorfo a Z_2 .

1.2 Algunas clases importantes de gráficas.

Sean $u, v \in V(G)$, un camino dirigido de u a v en la gráfica G es una sucesión de vértices y aristas dirigidas

$W = v_0, e_1^{\sigma_1}, v_1, e_2^{\sigma_2}, \dots, e_n^{\sigma_n}, v_n$ (donde $e_i^{\sigma_i} = e^+$ o $e_i^{\sigma_i} = e^-$) , la arista dirigida $e_i^{\sigma_i}$ va del vértice v_{i-1} al v_i , a $v_0 = u$ se le llama vértice inicial y $v_n = v$ se llama vértice final. Si $u=v$ entonces se dice que W es un camino abierto en otro caso se dice que W es un camino cerrado.

Un camino abierto es una trayectoria si todos sus vértices son distintos . En general se denota por P_n a una trayectoria con n vértices . Si el camino es cerrado y además todo par de puntos son distintos excepto el punto inicial y el final diremos que éste es un ciclo . Cuando el número de vértices es n se denota C_n .

Al referirnos a un camino en una gráfica simplicial omitimos los vértices y solo escribiremos $W = e_1, e_2, \dots, e_n$.

Una gráfica es conexa si para todo par de vértices u y v , existe una trayectoria de u a v .

Un árbol es una gráfica conexa sin ciclos. En la figura 1.8 se muestran varios ejemplos de árboles.

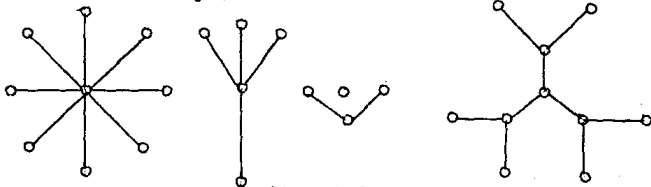


Figura 1.8.

Los teoremas siguientes son de utilidad en algunas de las demostraciones de este trabajo. Para su prueba ver Curcó [1].

Teorema 1.2.1. Sean u y v vértices de un árbol T entonces

existe una única trayectoria de u a v .

Teorema 1.2.2. Sea T un árbol, entonces $\#V = \#E+1$.

Teorema 1.2.3. Todo árbol no trivial T tiene al menos dos vértices de valencia 1.

Una gráfica simplicial se llama gráfica completa si para todo par de vértices u y v de G $u \neq v$, u y v son adyacentes. La gráfica completa con n vértices se denota K_n . En la figura 1.9 se dan varios ejemplos de gráficas completas.

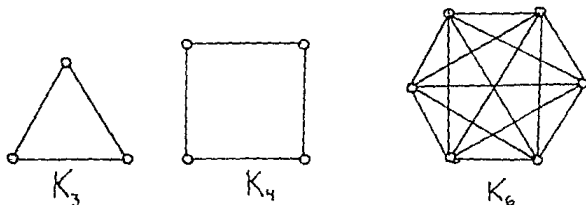


Figura 1.9.

Gráficas de Cayley

Sean \mathcal{A} un grupo y $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ un conjunto generador de \mathcal{A} . La gráfica de color de Cayley $\mathcal{C}(\mathcal{A}, X)$ tiene como conjunto de vértices a los elementos del grupo \mathcal{A} . las aristas están dadas por los elementos del producto cartesiano $X \times \mathcal{A}$. La arista (x, a) tiene como puntos extremos los vértices a y ax , con la dirección positiva de a a ax . Es conveniente escribir x_a en lugar de (x, a) . Diremos que la arista x_a es de color x . Si el grupo no es abeliano entonces ax puede ser distinto de xa , ya que x opera a

los elementos de \mathcal{A} por la derecha, a la gráfica de color de Cayley se le llama gráfica de color derecha de Cayley. si tuvieramos xa en lugar de ax como x opera a a por la izquierda tendríamos la gráfica de color izquierda de Cayley. Consideraremos solamente gráficas de color derechas de Cayley y nos referiremos a ellas como gráfica de color de Cayley.

Si las direcciones y los colores son suprimidos a la gráfica resultante se le llama Gráfica de Cayley para el grupo \mathcal{A} y el conjunto generador X y lo denotaremos $\mathcal{C}(\mathcal{A}, X)^0$.

Ejemplo 1.8. Consideremos los grupos $Z_2 \times Z_2$, Z_8 y Z_4 . Respectivamente $X = \{(0,1), (1,0)\}$, $X = \{1,2\}$ y $X = \{1\}$ conjuntos generadores de éstos. La gráfica de color de Cayley junto con la gráfica de Cayley de cada uno se muestra en las figuras 1.10 y 1.11.

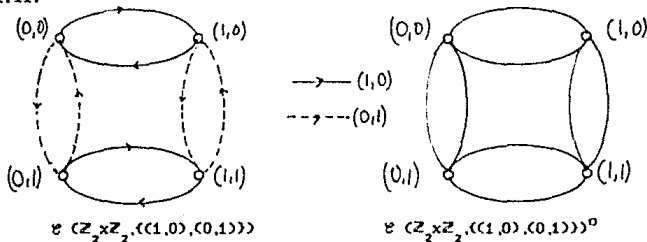


Figura 1.10

$i=0, \dots, 3$ f es consistente en color por definición ; todas las aristas de $\mathcal{G}(\mathcal{A}, X)$ tienen color i y las aristas imagen tienen color 2 . La función f preserva direcciones, sea a punto inicial de 1_a entonces $f(a)=a+a$ es punto inicial de 2_{a+a} ; además f fija identidad , $f(0)=0 \pmod 8$, $0 \in \mathbb{Z}_4$, $0 \in \mathbb{Z}_8$.

El siguiente teorema muestra la conexión entre gráficas de color de Cayley y los homomorfismos de grupos.

Teorema 1.2.4. Sea f un mapeo $\mathcal{G}(\mathcal{A}, X) \rightarrow \mathcal{G}(\mathcal{A}', X')$ consistente en color , preservador de direcciones y que deja fija a la identidad . Su función de vértices coincide con un homomorfismo de grupos $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$. Inversamente , cualquier homomorfismo de grupos $h: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$, tal que $h(X) \subset X'$ coincide con una función de vértices de un mapeo de gráficas $\mathcal{G}(\mathcal{A}, X) \rightarrow \mathcal{G}(\mathcal{A}', X')$ consistente en color , preserva dirección y fija a la identidad.

Demostración. \Rightarrow P.D. que f es un homomorfismo.

Para poder hacer la demostración probaremos primero la siguiente propiedad :

a) $f(ax^0)=f(a)f(x)^0 \forall a \in \mathcal{A} , x \in X$ y $0 \equiv 1$, donde $x^i = x$ y x^{-1} es el inverso de x en \mathcal{A} .

Tomemos una arista en la gráfica de Cayley con extremo inicial a y ax respectivamente de color " x " . se sigue que en la gráfica de Cayley $\mathcal{G}(\mathcal{A}', X')$ existe una arista que va de $f(a)$ a $f(ax)$. Además , esta arista tiene el mismo color que la arista que va de 1_a a $f(x)$, ya que f es consistente en color , preserva dirección y fija identidad . La arista de 1_a a $f(x)$ debe ser

coloreada con " $f(x)$ " por lo tanto la arista que va de $f(a)$ a $f(ax)$ debe tener color " $f(x)$ ". Por la definición de gráfica de color de Cayley se sigue que $f(ax)=f(a)f(x)$. Para mostrar que $f(ax^{-1})=f(a)f(x)^{-1}$ simplemente observemos que $f(a)=f(ax^{-1}x)=f(ax^{-1})f(x)$.

La igualdad $f(ab)=f(a)f(b)$ se sigue expresando b en términos de elementos de X : $b=x_1^{\sigma_1} \cdots x_n^{\sigma_n}$ y aplicando la propiedad (a) tenemos que $f(b)=f(x_1)^{\sigma_1} \cdots f(x_n)^{\sigma_n}$ por lo que $f(ab)=f(a)f(x_1)^{\sigma_1} \cdots f(x_n)^{\sigma_n} = f(a)f(b)$.

*) Sea $h: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ un homomorfismo de grupos tal que $h(X) \subset h(X')$. Definimos el mapeo de gráficas $f: \mathcal{G}(\mathcal{A}, X) \rightarrow \mathcal{G}(\mathcal{A}', X')$ como sigue: si a es un vértice de $\mathcal{G}(\mathcal{A}, X)$, entonces $f(a)=h(a)$. Si e es una arista con extremo inicial a y final ax , de color x entonces $f(e)$ es la arista que va de $f(a)$ a $f(ax)=f(a)f(x)$ de color $f(x)$. Observemos que f es consistente en color ya que si e y d son dos aristas de color x es decir que pueden ir de a a ax y b a bx entonces $f(e)$ va de $f(a)$ a $f(ax)=f(a)f(x)$ y $f(d)$ va de $f(b)$ a $f(bx)=f(b)f(x)$ y las dos tienen color $f(x)$.

f preserva dirección pues por definición manda puntos origen en puntos origen. Sea e la arista que va de 1_A a x entonces $f(e)$ va de $f(1_A)$ a $f(1_A x)=f(x)$ por lo tanto $f(1_A)=1_{A'}$.

Una gráfica alternativa de Cayley se define como una gráfica de Cayley excepto que cuando un generador x tiene orden 2 (e.d. $x^2=1_A$) en el grupo \mathcal{A} , para todo elemento $a \in \mathcal{A}$ las dos aristas: x_a y x_{ax} de una gráfica de color de Cayley $\mathcal{G}(\mathcal{A}, X)$ se identifican en

una sola arista denotada x_a o x_{ax} . La gráfica alternativa la designamos $\mathcal{C}(\mathcal{A}, \mathcal{X})^1$. $\mathcal{C}(\mathcal{A}, \mathcal{X})^0$ y $\mathcal{C}(\mathcal{A}, \mathcal{X})^1$ son llamadas gráficas de Cayley.

Ejemplo 1.10. Sea Z_6 con conjunto generador $\mathcal{X} = \{1, 2, 3\}$, en la figura 1.12 se muestran sus gráficas de Cayley.

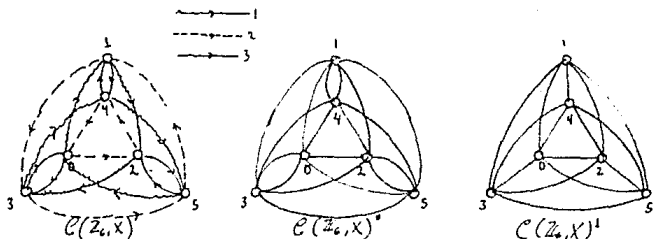


Figura 1.12.

Ejemplo 1.11. Toda gráfica completa K_n es una gráfica de Cayley. Ya que si $n=2p+1$, tomemos a Z_n como grupo y $\mathcal{X} = \{1, 3, \dots, 2p-1\}$ como conjunto generador aseguramos que $\mathcal{C}(Z_n, \mathcal{X})^0 \cong K_n$. Sean $a, b \in Z_n$ entonces $a-b$ o $b-a$ es impar y por lo tanto $a-b$ o $b-a \in \mathcal{X}$ lo que implica que existe una arista de a a b o de b a a .

Si n es par igual a $2p$ entonces el conjunto generador que nos sirve es $\mathcal{X} = \{1, 2, \dots, p\}$. Sean $a, b \in Z_n$ entonces $a-b$ o $b-a \in \mathcal{X}$ ahora \mathcal{X} tiene un elemento de orden 2 por lo tanto $\mathcal{C}(Z_n, \mathcal{X})^1 \cong K_n$.

Una gráfica es n -regular (o solamente regular) si todo vértice tiene valencia n . Si un grupo finito es presentado con a

generadores entonces la correspondiente gráfica de Cayley es $2q$ -regular. La gráfica alternativa de Cayley es también regular, pero la valencia depende del número de generadores de orden 2.

La gráfica G es transitiva en vértices si para todo par de vértices u y v existe un automorfismo de G que lleva u a v .

Para cada $a \in \mathcal{A}$ definimos el automorfismo de gráficas i_a de acuerdo a las reglas:

$$i_a(u) = au \text{ para todo vértice } u \in \mathcal{A}.$$

$$i_a(x, u) = (x, au) \text{ para toda arista } (x, u) \in \mathcal{X}\mathcal{A}.$$

Del automorfismo de gráficas i_a decimos que es una traslación izquierda de la gráfica de Cayley.

Ejemplo 1.12. Considérese a S_3 y $\mathcal{X} = \{ (123), (12) \}$. La gráfica $\mathcal{C}(S_3, \mathcal{X})$ y la correspondiente bajo la imagen de la traslación izquierda se muestran en la figura 1.13.

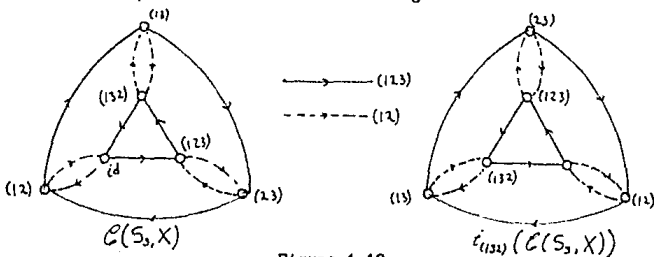


Figura 1.13.

Teorema 1.2.5 Cualquier gráfica de Cayley es transitiva en vértices.

Demostración. Sea $\mathcal{C}(\mathcal{A}, \mathcal{X})$ una gráfica de Cayley y $u, v \in \mathcal{A}$

entonces la traslación izquierda $i_v = i_{v_u}$ lleva u a v .

El siguiente ejemplo utiliza el teorema anterior para demostrar que no todas las gráficas $2q$ -regulares son de Cayley.

Ejemplo 1.13. La gráfica 4 -regular que se muestra en la figura 1.14 no es gráfica de Cayley pues no existe automorfismo que lleve u a otro punto.

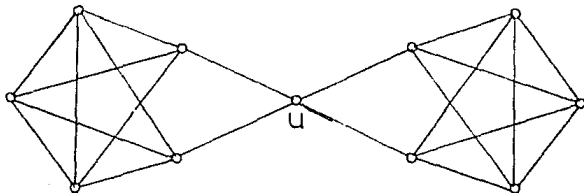


Figura 1.14.

El recíproco del teorema 1.2.5 no es cierto como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.14. La gráfica de Petersen G , veáse la figura 1.15, es transitiva en vértices como se puede probar usando como conjunto generador del grupo de automorfismos al siguiente: $\{f_i$ con $i=0, \dots, 4$ donde $f_i(w_j) = w_{i+j \pmod 5}$ para $w_j \in E_G$ y g definida como sigue $g(u_0) = v_0$, $g(u_1) = v_1$, $g(u_2) = v_2$, $g(u_3) = v_3$, $g(u_4) = v_4$, $g(v_0) = u_2$, $g(v_1) = u_2$, $g(v_2) = u_1$, $g(v_3) = u_0$ y $g(v_4) = u_4$. Sin embargo la gráfica de Petersen no es una gráfica de Cayley, lo cual probaremos en seguida.

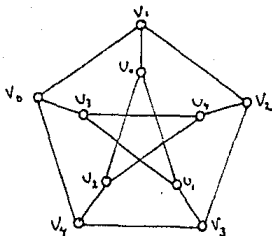


Figura 1.15

G tiene 10 vértices y solo existen dos grupos de orden 10 : Z_{10} y D_5 , ya que G es 3-regular debemos tener un elemento de orden 2 y tanto Z_{10} como D_5 lo tienen , veremos como pueden ser los conjuntos generadores en cada caso .

El único elemento de Z_{10} que tiene orden 2 es 5 , así que $5 \in X$ el conjunto generador , el otro elemento puede tener orden 10 o 5 en el primer caso tenemos $X = (5, b)$ donde $b=2,4,6,8$ la gráfica $\mathcal{G}(Z_{10}, X)^1$ se muestra en la figura 1.15 ,si $X = (5, a)$ donde $a=1,3,5,7,9$ la gráfica $\mathcal{G}(Z_{10}, X)^1$ se ilustra en la figura 1.16.

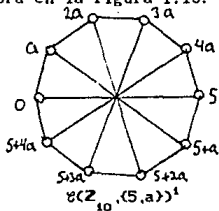
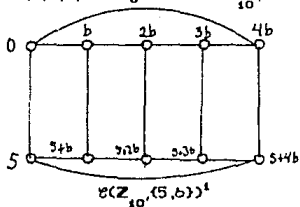


Figura 1.16.

D_5 el grupo diedro de grado 5 , el grupo de simetría del pentágono regular es generado por una rotación que tiene orden 5 y una reflexión que tiene orden 2 como el conjunto de generadores

debe de tener dos elementos entonces X siempre tendrá los elementos con los ordenes mencionados y tendremos gráficas de Cayley isomorfas . En la figura 1.17 se pueden ver las gráficas de Cayley cuando $X = \{ (12345), (15)(24)(3) \}$.

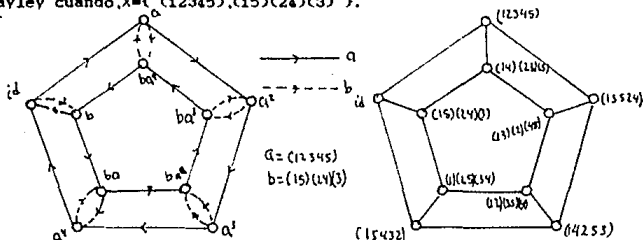


Figura 1.17

Una gráfica es bipartita si su conjunto de vértices puede ser dividido en dos conjuntos ajenos U y W tal que cada arista tiene un extremo en U y el otro en W . Si además todo vértice de U es adyacente a W entonces diremos que es bipartita completa. si $\#U=m$ y $\#W=n$ la gráfica se denota por $K_{m,n}$.

Ejemplo 1.15. Sea Z_5 con conjunto generador $X = \{1,3\}$, en la figura 1.17 están representadas $\mathcal{C}(Z_5, X)^0$ y $\mathcal{C}(Z_5, X)^1$.

Un bouquet de n círculos es una gráfica con n lazos en donde todos tienen un vértice en común, véase la figura 1.18.

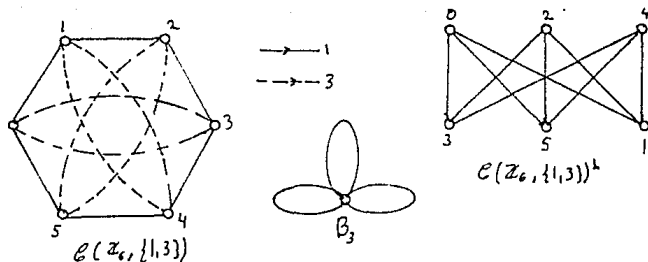


Figura 1.18.

1.3 Nuevas gráficas de otras.

Sean G y G' , decimos que G' es una subgráfica de G si y sólo si $V_{G'} \subset V_G$, $E_{G'} \subset E_G$ e $I_{G'} \subset I_G$. Si además $V_{G'} = V_G$ entonces se dice que G' genera a G . Si una subgráfica es un árbol y genera a la gráfica entonces es llamado un árbol generador.

Una representación topológica de una gráfica G consiste en asignar a cada vértice un punto distinto y a cada arista un arco distinto homeomorfo al intervalo cerrado $[0,1]$. Los puntos frontera de un arco corresponden a los extremos de la arista asignada. Los interiores de los arcos son ajenos y no cortan a la representación de los vértices.

La subdivisión de la arista e con puntos extremos v_1 y v_2 consiste en aumentar un vértice v y dos aristas e' , e'' , que van de v_1 a v y de v a v_2 respectivamente.

En general, una subdivisión de una gráfica es obtenida por una sucesión de subdivisiones de aristas.

Dos gráficas G y H son homeomorfas si existen G' y H' subdivisiones respectivas que son gráficas isomorfas, bajo esta

definición dos gráficas son homeomorfas si y sólo si son homeomorfas como espacios topológicos . Ejemplo 1.16 . Un lazo es homeomorfo a un ciclo de cualquier longitud , veáse la figura 1.19.

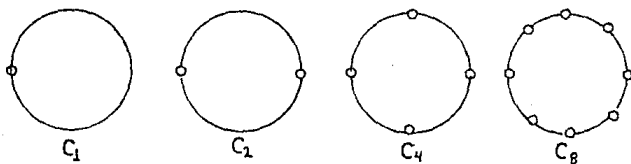


Figura 1.19.

El producto cartesiano de dos gráficas G y G' es denotado por $G \times G'$ y definido como la gráfica cuyo conjunto de vértices es $V_G \times V_{G'}$ y conjunto de aristas $(E_G \times E_{G'}) \cup (V_G \times E_{G'})$. Si la arista $(e, v') \in E_G \times V_{G'}$ y los puntos extremos de la arista e son v_1 y v_2 entonces los puntos extremos de la arista (e, v') son los vértices (v_1, v') y (v_2, v') . Si $(v, e') \in V_G \times E_{G'}$ y los puntos extremos de e' son v'_1 y v'_2 entonces los extremos de la arista (v, e') son (v, v'_1) y (v, v'_2) . En la figura 1.20 se ilustra el producto $K_2 \times K_{1,2}$.

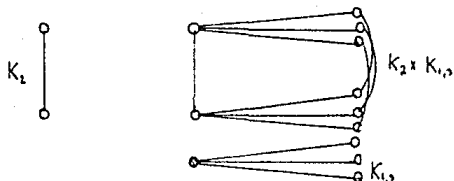


Figura 1.20.

Un poliedro es un sólido limitado por planos , los planos que limitan un poliedro se llaman caras ; sus intersecciones aristas , y las intersecciones de las aristas , vértices del poliedro .

La gráfica asociada a un poliedro con los vértices y aristas del mismo donde dos aristas son incidentes si tienen intersección no vacía en el poliedro . Dicha gráfica es llamada el 1-esqueleto del poliedro .

Un n-cubo Q_n es el 1-esqueleto del cubo n-dimensional . Se puede definir recursivamente usando la operación de producto cartesiano con $Q_1=K_2$ y para $n \geq 1$ $Q_{n+1} = K_2 \times Q_n$ obsérvese la figura 1.21.

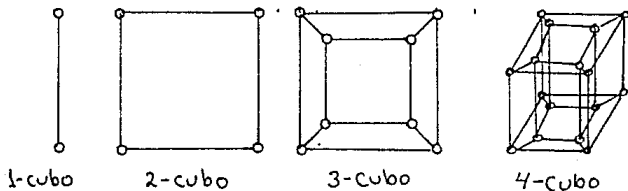
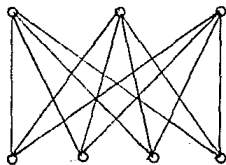


Figura 1.21.

El complemento de una gráfica simplicial G es denotado por G^c y es definido como la gráfica con el mismo conjunto de vértices que G , en donde dos vértices son adyacentes en G^c si y sólo si no

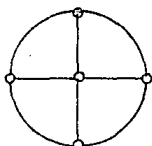
lo son en G . En general se tiene que $(K_m \cup K_n)^c = K_{m,n}$.

La suspensión de una gráfica G con respecto a una gráfica G' se denota $G + G'$ y es aquella que se obtiene añadiendo a $G \cup G'$ todas las aristas que tienen un extremo en V_G y el otro en $V_{G'}$. De esta forma esta nueva gráfica tiene como conjunto de vértices a $V_G \cup V_{G'}$ y de aristas a $E_G \cup E_{G'} \cup (V_G \times V_{G'})$.



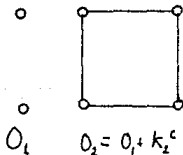
$$(K_3 \cup K_4)^c = K_{3,4}$$

Figura 1.22.

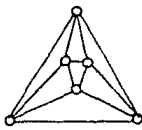


$$K_1 + C_4$$

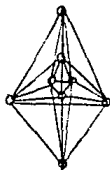
La gráfica n-octaedro O_n es definida recursivamente con $O_1 = K_2^c$ y para $n \geq 1$ $O_{n+1} = O_n + K_2^c$.



$$O_2 = O_1 + K_2^c$$



$$O_3 = O_2 + K_2^c$$



$$O_4 = O_3 + K_2^c$$

Figura 1.23.

Sean G , G' gráficas y $f: H \rightarrow H'$ un isomorfismo entre las subgráficas H , H' de G y G' respectivamente. La amalgamación $G *_f G'$ es obtenida de la unión de G y G' identificando H y H' de

acuerdo al isomorfismo f .

Ejemplo 1.18. El bouquet B_{n+k} es una amalgamación de los bouquets B_n y B_k en un vértice, veáse la figura 1.24.

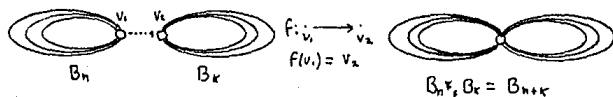


Figura 1.24.

1.4. Superficies.

El concepto topológico de superficie es una abstracción matemática del concepto familiar de superficie hecha de papel, lámina metálica, plástico u otro material delgado cualquiera.

Comenzaremos considerando dos superficies conocidas: la esfera y el toro abstracciones matemáticas de una pelota y una cámara de llanta respectivamente, observense los dibujos de la figura 1.24.

Una asa es un toro al que se le ha quitado un disco. Una esfera con n asas es una superficie esférica con asas distintas pegadas a n agujeros circulares de la esfera, en la figura 1.25 se puede observar una esfera con una y con dos asas.

A las superficies homeomorfas a una esfera con n asas las denotaremos S_n . Así S_0 es la esfera, S_1 es el toro, S_2 es el doble toro, S_3 el triple toro, etc. todas estas superficies las llamaremos superficies cerradas orientables (fig. 1.25.).

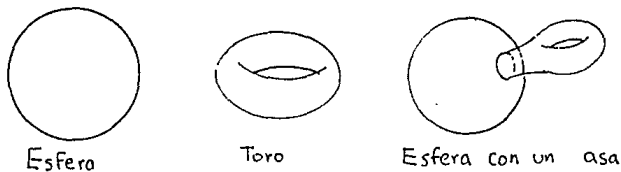


Figura 1.25.

La banda de Moebius se puede obtener de una pieza rectangular de papel dandole un medio giro intercambiando los extremos inferior y superior de un lado y finalmente pegando el lado derecho con el izquierdo como puede observarse en la figura 1.26. A la operación de pegar se le da el nombre formal de identificar cuando se trate de superficies abstractas. De esta manera se puede obtener el toro identificando lados opuestos en direcciones opuestas (Fig. 1.26).

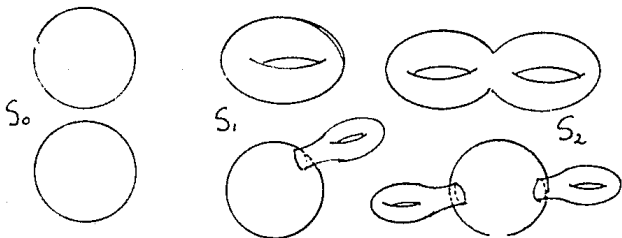


Figura 1.26.

Al obtener la banda de Moebius , la línea central de la tira rectangular pasa a ser un círculo tras la unión o identificación de los dos extremos , si especificamos un sistema de coordenadas dirigidas y lo trasladamos por ese círculo hasta que complete una vuelta una de las direcciones queda invertida ,informalmente diremos que por este hecho la banda de Moebius es no orientable.

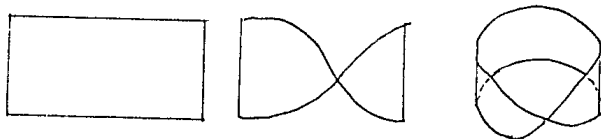


Figura 1.27.

Si uno quita un disco a la esfera , la frontera de esta superficie esférica es homeomorfa al círculo . La superficie obtenida al identificar la frontera de la banda de Moebius con la frontera de un disco , es una superficie a la que se llamará plano proyectivo .

La botella de Klein es obtenida quitando dos discos a una esfera e identificando dos bandas de Moebius una en cada hoyo. El plano proyectivo y la botella de Klein son superficies no

orientables . Para $k = 0, 1, \dots$, la superficie obtenida de hacer k hoyos en la esfera y taparlos con k bandas de Moebius se denota N_k . Una superficie que contenga un subespacio homeomorfo a una banda de Moebius se dice que es no orientable .

Una inmersión de una gráfica en una superficie es una función continua 1-1 de una representación topológica de una gráfica en la superficie .

Si una gráfica conexa es inmersa en una esfera , entonces el complemento de su imagen es una familia de regiones o caras , cada una homeomorfa a un disco abierto . En superficies más complicadas las regiones no necesariamente son discos abiertos . Si llega a suceder que todas las regiones son discos abiertos , entonces la inmersión es llamada una inmersión 2-celular .

F_G denotará al conjunto de regiones de una inmersión $i:G \rightarrow S$ si se considera más de una inmersión de la gráfica , entonces se denotará en el subíndice a que inmersión se refiere . Si G es la única gráfica que se considera entonces se usará F en lugar de F_G .

El número de lados o tamaño de una región f es definido como el número de lados-aristas que se encuentran al recorrer el circuito que es frontera de la región y se denota por S_f . Si toda región de una inmersión de una gráfica tiene 3 lados entonces se dice que la inmersión es triangular.

CAPITULO II

El problema de determinar si una gráfica es inmergible en la esfera S_0 es equivalente al de saber si una gráfica es plana o no, es decir si tiene una inmersión en el plano . Esto se puede probar si se usa la proyección estereográfica de la esfera en el plano . El primero en abordar este problema fue Kuratowski en un artículo publicado en 1930 [8] dando las condiciones necesarias y suficientes para determinar si una gráfica es plana o no a este resultado se le conoce como el teorema de Kuratowski .

El presente capítulo contiene las definiciones de género de una superficie y una gráfica , una demostración del T. de Kuratowski dada por Thomassen en 1979 [13] donde utiliza la operación de contracción de aristas , a la vez demuestra los teoremas de Fary y de Tutte , produciendo todo esto un algoritmo de planaridad para gráficas 3-conexas en el caso que la gráfica sea plana una inmersión donde todas las caras son regiones convexas y todas las aristas son líneas rectas . Por último se da un teorema publicado por Thomassen en 1990 [16] en el que establece una relación entre el teorema de la curva de Jordan y el teorema de Kuratowski .

2.1 Gráficas de Kuratowski

La expresión $\#V - \#E + \#F = 2$ que relaciona los números de vértices , aristas y caras de un poliedro esférico ya era conocida por Descartes en 1640 [] pero la primera demostración fue dada

por Euler en 1752 . Al lado izquierdo de la ecuación se le llama fórmula de Euler , el lado derecho es la característica de Euler de la superficie . La característica de Euler de la esfera es 2 .

Para la demostración de la fórmula de Euler para la esfera se necesita el siguiente teorema conocido como el teorema de la curva cerrada de Jordan :

Teorema 2.1.1. Sea C una curva cerrada en la esfera S_0 . Entonces $S_0 - C$ tiene precisamente dos componentes , cada una de las cuales tiene a C como frontera.

Para la demostración de este teorema véase Munkres [11] .

Teorema 2.1.2. Sea $i:G \rightarrow S_0$ una inmersión de una gráfica conexa en la esfera , entonces $\#V - \#E + \#F = 2$.

Demostración . Inducción sobre el número de renglones $\#F$. Si $\#F=1$, entonces G debe ser un árbol ya que del T. de la curva de Jordan se sigue que cualquier ciclo debe separar a la esfera . Así por el teorema 1.2.2 ($\#V = \#E + 1$) $\#V - \#E + \#F = 2$. Ahora supóngase que la ecuación de Euler vale cuando el número de regiones es n y supóngase $\#F = n + 1$. Entonces alguna arista e se encuentra en la frontera de dos regiones distintas por lo tanto la subgráfica G' obtenida de quitar la arista e es conexa . De aquí que $\#F' = \#F - 1 = n$ y por hipótesis de inducción $\#V' - \#E' + \#F' = 2$, ya que $\#V' = \#V$, $\#E' = \#E - 1$ y $\#F' = \#F - 1$ entonces $\#V - \#E + \#F = 2$. ■

El siguiente teorema establece una desigualdad entre el número de aristas y el número de caras.

Teorema 2.1.3. Sea $i:G \rightarrow S$ una inmersión de una gráfica simplicial conexa en cualquier superficie, entonces $2\#E \geq 3\#F$.

Demostración. La suma $\sum_{f \in F} S_f$ de los lados de regiones cuenta toda arista exactamente dos veces. Así $2\#E = \sum_{f \in F} S_f$, ya que la gráfica es simplicial no existen monógonos (ciclos de tamaño 1) ni dígonos (ciclos de tamaño 2) en la inmersión. Así $\forall f \in F, S_f \geq 3$ de donde se sigue $2\#E \geq 3\#F$. ■

Kuratowski demostró en 1930 que si una gráfica no puede ser inmersida en el plano entonces contiene copias homeomorfas de K_5 o $K_{2,2}$ por este motivo a estas gráficas se les conoce como gráficas de Kuratowski como se establece en el siguiente teorema:

Teorema 2.1.4 (Teorema de Kuratowski). Una gráfica G tiene una inmersión en la esfera si y sólo si no contiene subgráficas homeomorfas a K_5 o $K_{2,2}$.

En esta sección demostraremos solo la parte fácil del teorema probando que ni K_5 ni $K_{2,2}$ tienen una inmersión en el plano. La parte restante será demostrada en la sección 2.4.

Afirmación. K_5 no es esférica, es decir no tiene una inmersión en el plano. Si K_5 fuera esférica cumpliría la fórmula de Euler para la esfera $\#V - \#E + \#F = 2$ de donde se obtiene $\#F = 2 + 10 - 5 = 7$ ahora se debe cumplir $2\#E \geq 3\#F$ por el T. 2.1.3 lo que implicaría $20 \geq 21$ una contradicción por lo tanto K_5 no tiene una inmersión en la esfera.

El cuello de una gráfica es el número de aristas de un ciclo

Ejemplo 2.1. La figura 2.1 a) representa a la gráfica de Petersen y la figura 2.1 b) es una subgráfica de Petersen homeomorfa a $K_{2,3}$.

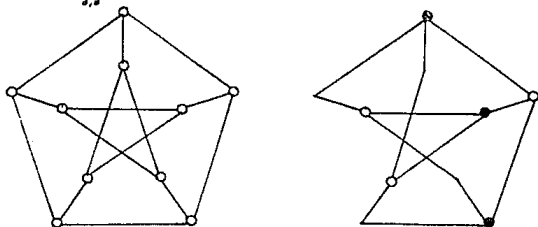


Figura 2.1

Utilizando el T. de Kuratowski se comprueba que la gráfica de Petersen no es plana.

2.2 Género de superficies y gráficas.

En el capítulo anterior se dio una noción intuitiva de las superficies que nos van a interesar en este trabajo. Basandonos en esto daremos la definición de género de superficies y de gráficas.

Recordando que una superficie cerrada orientable es aquella que es homeomorfa a una esfera con n asas, el género de una de estas superficies es el número de asas, así el género de la superficie orientable S_g es g . Si la superficie es no orientable entonces se define su género no orientable como el número de bandas de Moebius ajenas entre sí que contenga la superficie, de esta forma el género no orientable de N_k es k para $k \geq 1$. N_0 es la

esfera.

El género de una gráfica G se denota $\gamma(G)$ o simplemente γ si G es la única gráfica en el contexto y se define como el número g más pequeño tal que la gráfica G tiene una inmersión en S_g .

El número de género no orientable de una gráfica G denotado por $\bar{\gamma}(G)$ o simplemente $\bar{\gamma}$, corresponde al menor entero k tal que G tiene una inmersión en la superficie N_k .

Obsérvese que el toro se puede obtener de un rectángulo identificando lados opuestos en direcciones opuestas (Fig. 2.2).

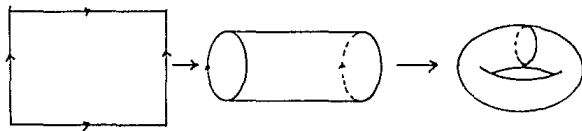


Figura 2.2

Dada una gráfica conexa G , una superficie cerrada S y una inmersión 2-celular $i:G \rightarrow S$, se definen la gráfica dual y una inmersión dual de la siguiente forma: primero para cada región f de la inmersión i , tomamos un punto f^* en su interior. Para cada arista e de la gráfica G dibujamos una arista e^* que una a los vértices de las caras que contienen a e (si ambos lados de la arista e son frontera de la misma región f , entonces e^* es un lazo basado en f^*). A la gráfica formada con los vértices f^* y aristas e^* , se le llama gráfica dual de $i:G \rightarrow S$ y es denotada

Una estrella es el conjunto de aristas incidentes a un vértice v y lo denotamos $S(v)$.

Afirmación 2.2.7. Si $\forall v \in V \quad \text{val}(v) \leq 3$ entonces $\chi(L(G)) \leq \chi(G)$.

Para probar esto último utilizaremos sin demostrar el siguiente teorema véase Harary [6].

Teorema 2.2.8. H es una gráfica de líneas si y sólo si el conjunto de líneas de H puede ser dividido en subgráficas completas de tal forma que ningún punto esté en más de dos subgráficas.

Demostración de la afirmación. Sea $i: G \rightarrow S$ una inmersión celular, construiremos $j: L(G) \rightarrow S$ de la siguiente manera: para cada vértice $v \in V_G$ tenemos una vecindad N_v de manera tal que si $v, w \in V_G \rightarrow N_v \cap N_w = \emptyset$ y lo sustituimos por N_v^j de la manera que se muestra en la figura 2.5 a cada estrella $S(v)$ en N_v le corresponde una gráfica completa $G_{S(v)}^1$ en N_v^j ya que $\text{val}(v) \leq 3$ N_v^j contiene una gráfica completa K_2 o K_3 que se dibujan utilizando los puntos de intersección de la vecindad N_v con la arista $e \in S(v)$ incidente en v . Tenemos una gráfica H inmersa en S , para obtener $L(G)$ simplemente utilizamos el teorema anterior para dos aristas que sean adyacentes en v . Si dos vértices v, w de esta construcción son tal que son iguales y pertenecen a distintas vecindades entonces los une un segmento de arco, para tener $L(G)$ inmersa en S simplemente contraemos topológicamente este arco y obtenemos $j: L(G) \rightarrow S$.

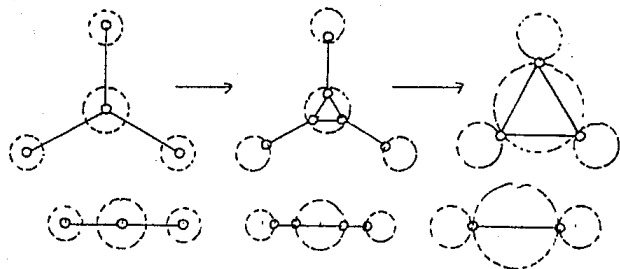


Figura 2.5.

2.3 Operaciones sobre aristas y conexidad.

En esta sección se dan dos operaciones sobre aristas que son fundamentales para la demostración del T. de Kuratowski : el complemento de una subgráfica con respecto a su gráfica y la contracción de aristas . La primera operación nos da la propiedad de conexidad de una gráfica en el sentido de cuántos vértices hay que "quitarle" para desconectarla .

Si H es una subgráfica de G o un subconjunto de aristas de G , entonces $G-H$ es la gráfica que se obtiene de suprimir de G las aristas de H . La gráfica $G-H$ se llama el complemento de H en la gráfica G . Si G es una gráfica completa podemos usar la notación H^c .

Dos subgráficas H_1 y H_2 de G son llamadas equivalentes si existe un automorfismo de G que lleve H_1 en H_2 . Si los vértices y aristas de una gráfica H no pertenecen a G , y si todas las

subgráficas de G isomorfas a H son equivalentes entonces la notación $G-H$ es usada para denotar el complemento en G de cualquiera de ellas.

Ejemplo 2.4. La figura 2.6 ilustra la operación anterior, en este caso H es isomorfa a las estrellas $S(v_i) = 0, \dots, 3$ todas las $S(v_i)$ son equivalentes utilizando los automorfismos $\langle f_j(v_i) = v_{i+j \bmod 4} \mid v_i \in V(K_4), j=0, \dots, 3 \rangle$.

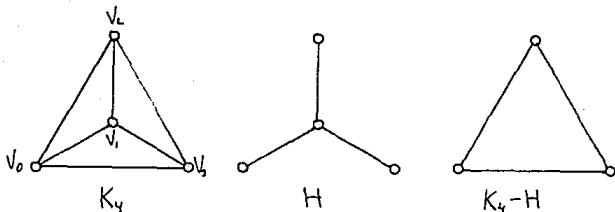


Figura 2.6

Una contracción de una gráfica G a lo largo de la arista e es el resultado de borrar la arista e de G e identificar topológicamente sus puntos extremos y lo denotaremos G/e . A la gráfica resultante de esta operación la llamaremos la contracción.

En el contexto de gráficas simpliciales los lazos y aristas múltiples se eliminan es decir $(G/e)^{sim}$ es considerada en un abuso de terminología como la contracción de la gráfica.

Conexidad

¿Cuál es el mínimo número de vértices que hay que quitar a una gráfica conexa para dejar una gráfica no conexa? La respuesta a esta pregunta nos da un concepto muy importante en teoría de gráficas: la conexidad.

Un punto de corte de una gráfica G es un vértice v que al eliminarlo de la gráfica incrementa el número de componentes conexas, donde por eliminar debemos entender $G-S(v)$. A una gráfica conexa sin puntos de corte se le llama bloque. Los bloques de una gráfica son las subgráficas máximas de G con la propiedad de ser bloques.

La conexidad de una gráfica G se define como el mínimo número de puntos cuya eliminación da origen a una gráfica desconexa, trivial o un bouquet de círculos. Se puede observar que G tiene la misma conexidad que G^{olmp} .

Una gráfica cuya conexidad es mayor o igual que k se dice que es k -conexa. Por ejemplo una gráfica 3-conexa comprende a las gráficas de conexidad 3, 4, 5 y mayores.

2.4. Planaridad.

En esta sección se completará la demostración del T. de Kuratowski que publicó Thomassen en 1980 [13]. Nos restringiremos primeramente a gráficas 3-conexas y junto con este demostraremos el T. de Tutte sobre la convexidad de las caras de una gráfica plana y el T. de Fary sobre la condición de que las aristas de una gráfica plana sean líneas rectas.

Se considera después a gráficas que no son 3-conexas para completar la demostración del T. de Kuratowski obteniéndose un algoritmo de planaridad para gráficas 3-conexas que en caso de ser planas se obtiene una inmersión plana con las propiedades del T. de Tutte y del T. de Fary.

Se probó anteriormente que una gráfica que contenga subgráficas homeomorfas a K_5 o $K_{2,2}$ no puede ser plana, así que la demostración del T. de Kuratowski estará completa si se prueba el siguiente teorema:

Teorema 2.4.1. Si la gráfica G no contiene subgráficas homeomorfas a K_5 o $K_{2,2}$ entonces G es plana.

El resultado siguiente es importante para la demostración del teorema.

Lema 2.4.2. Sea G una gráfica que no contiene subgráficas homeomorfas a K_5 o $K_{2,2}$. Entonces el resultado de contraer simplicialmente a la arista e es una gráfica G' que no contiene subgráficas homeomorfas a K_5 o $K_{2,2}$.

Demostración. Supóngase que la gráfica G' contiene copias homeomorfas de K_5 o $K_{2,2}$. Entonces G debe contener una subgráfica H tal que la contracción de una arista e de H produce las copias homeomorfas a K_5 o $K_{2,2}$, si reconstruimos la arista e tenemos solamente tres posibilidades que se ilustran en la figura 2.7

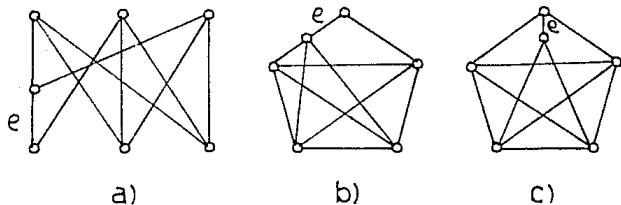


Figura 2.7

(a) es homeomorfa a $K_{2,2}$, (b) es homeomorfa a K_5 y (c) contiene una subgráfica homeomorfa a $K_{2,2}$ contradiciendo en cada caso la hipótesis de que G no contiene subdivisiones de K_5 o $K_{2,2}$.

La demostración del T. de Kuratowski se hará usando la operación de contracción de aristas, el siguiente lema da la validez de este procedimiento.

Lema 2.4.3. Sea G una gráfica 3-conexa con al menos cinco vértices. Entonces G contiene una arista e tal que G/e es 3-conexa.

Demostración. Por contradicción, supongamos que para toda arista e $V(e) = \{x, y\}$, G/e tiene conectividad 2, ya que G/e tiene al menos cuatro vértices posee un conjunto separador de dos vértices, uno de esos vértices debe ser el obtenido al identificar x y y de aquí que G tenga un conjunto separador $\{x, y, z\}$. Escojamos $e = V(e) = \{x, y\}$ y z tal que la mayor componente H de $G - \{x, y, z\}$ sea la más grande posible. Sea H' otra componente y u un vértice de H' adyacente a z , entonces G

tiene un conjunto separador de la forma $\{z, u, v\}$, porque $G - \{z, u, v\}$ es 2-conexa. Ahora $H \cup \{x, y\} - v$ es conexa de aquí que esté contenida en una componente H'' de $G - \{z, u, v\}$ pero $|V(H'')| > |V(H)|$ por lo tanto tenemos una contradicción a la maximalidad de H .

El lema anterior nos va a permitir reducir toda gráfica 3-conexa con al menos cinco vértices a K_5 que tiene una representación convexa en el plano, en la que se entiende por representación convexa una inmersión en el plano en donde las caras son subconjuntos convexos en el plano excepto la cara no acotada.

Teorema 2.4.4. (de Tutte) Sea G una gráfica 3-conexa que no contiene subdivisiones de K_5 o $K_{2,3}$, entonces G tiene una representación convexa en el plano.

El T. de Tutte no vale para gráficas 2-conexas planas como se ilustra en la gráfica de la figura 2.8.

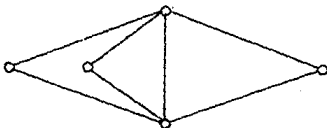


Figura 2.8

Para la demostración del T. de Tutte es importante el siguiente teorema :

Teorema 2.4.5. Toda región de una inmersión plana G tiene un ciclo simple para su frontera si y sólo si G es 2-conexa .

Demostración . Si la frontera de una región R no es un ciclo pero es otra clase de camino cerrado tal que un vértice v , es recorrido dos veces , entonces existe una trayectoria cerrada en el plano que deja al vértice v entre dos aristas de la frontera de R . entonces al recorrer la frontera de R , y al pasar por v , tenemos que el camino cerrado separa al plano en dos partes que contienen puntos de G (véase la figura 2.9) por lo tanto v es un punto de corte , una contradicción .

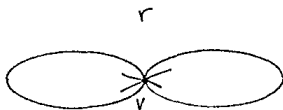


Figura 2.9

Inversamente si G tiene un punto de corte , entonces se le puede ver como la amalgamación de dos gráficas H y K en el vértice v , entonces para cualquier inmersión de G la cara no acotada de G no es un ciclo simple . pues al recorrer la frontera de esta cara tocaríamos v dos veces.

Demostración del T. de Tutte . Por inducción sobre $n = \#V(G)$ si $n=4$ o 5 es válida la afirmación . Supóngase válido para valores menores que n con $n \geq 6$.

Sea e con puntos extremos (x,y) una arista tal que G/e es

3-conexa y sea z el vértice obtenido al identificar x y y G/e no contiene subdivisiones de K_5 o $K_{2,2}$ por el lema 2.4.2, por hipótesis de inducción G/e tiene una representación convexa Γ , $\Gamma-(z)$ es 2-conexa y por el T. 2.4.5 $\Gamma-(z)$ la región donde está z tiene como frontera un ciclo C_2 . si regresamos a la representación Γ , la gráfica generada por C_2 y $\{x\}$ es una rueda véase la figura 2.10 (a).

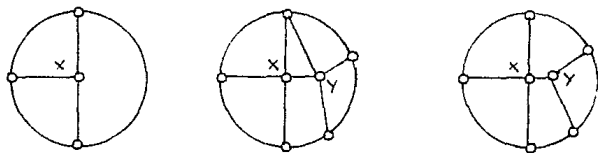
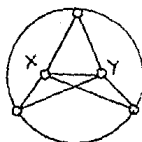
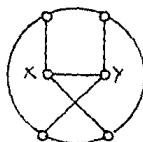


Figura 2.10

Denotamos por P_i el segmento de C_2 que une v_i con v_{i+1} donde v_i es adyacente a x , el orden de las i es el orden en que aparecen al recorrer C_2 . Si los vértices adyacentes a y pero diferentes de x pertenecen a una sola trayectoria P_i entonces podemos construir la inmersión deseada, véase la figura 2.10 (b). Si no x e y tienen tres o más vértices en común con lo que al recuperar la arista e obtenemos una gráfica homeomorfa a K_5 fig. 2.11 a) o existen dos vértices adyacentes a y que pertenecen al interior de dos trayectorias P_i , P_j distintas. En este caso obtenemos una gráfica homeomorfa a $K_{2,2}$ Fig. 2.11. b).



a)



b)

Figura 2.11.

Los dos siguientes teoremas nos permitirán tener una demostración completa del T. de Kuratowski .

Teorema 2.4.6. Sean H y K gráficas planas , entonces la gráfica obtenida por amalgamación de H y K en un vértice v o a través de una arista sencilla e es plana .

Demostración . Tomemos inmersiones planas de H y K de forma tal que cada una quede en la cara exterior de la otra , entonces , podemos hacer la identificación del vértice v como se muestra en la figura 2.12 de esta forma obtenemos la inmersión de $H \vee K$.

Para el caso de amalgamación en una arista e procedemos a hacer las inmersiones de H y K de forma tal que las aristas e tengan la misma longitud figura 2.12.



Figura 2.12

El siguiente teorema nos permite reducir el problema de inmersión a gráficas 3-conexas en el sentido de que toda gráfica se puede ver como una subgráfica de una gráfica 3-conexa.

Teorema 2.4.7. Sea G una gráfica que no contiene subdivisiones de K_5 o $K_{2,3}$ tal que la adición de cualquier arista a G crea tal subdivisión entonces G es 3-conexa .

Demostración . Por inducción sobre $n = |V(G)|$, el teorema es cierto para $n = 5$ ya que $K_5 - e$ es 3-conexa . Supongámos que es válido para las gráficas con un número de vértices menor que n con $n > 5$, y que G tiene n puntos .

Si G fuera solamente 2-conexa , G sería la amalgamación de dos gráficas H y K en dos vértices u y v , hay dos posibilidades : que u y v sean adyacentes o no , si no lo son entonces la gráfica obtenida de añadir la arista uv no contiene subdivisiones de K_5 o $K_{2,3}$ ya que tal subdivisión debe estar contenida en G con una trayectoria P de u a v jugando el papel de la arista uv una contradicción . Podemos suponer entonces que G es 2-conexa y que existen dos vértices u y v adyacentes tal que $G - \{u,v\}$ es disconexa . Entonces G es la amalgamación de dos gráficas H y K en una arista $e = uv$. Ahora la adición de una arista a H o K crea una subdivisión de K_5 o $K_{2,3}$ en ellas , por hipótesis de inducción H y K son 3-conexas y por el teorema de Tutte tienen inmersiones planas convexas , por el teorema anterior la gráfica es plana y

todas las caras tienen tres lados, si no trazando una diagonal en una cara con más de tres lados se tendría una inmersión plana de G conteniendo una copia de K_5 o $K_{2,3}$ una contradicción. La gráfica y su inmersión satisfacen entonces el corolario 2.1.7 y se tiene $\#E = 3\#V - 6$ para los conjuntos de aristas y vértices de G , H y K respectivamente pero G es la amalgamación de H y K a través de una arista por lo tanto $\#V(G) = \#V(H) + \#V(K) - 2$ y $\#E(G) = \#E(H) + \#E(K) - 1$ por lo tanto $\#E(G) = \#E(H) + \#E(K) - 1 = 3\#V(H) + 3\#V(K) - 3 = 3(\#V(G) + 2) - 13 = 3\#V(G) - 6$ una contradicción por lo tanto G no puede ser la amalgamación de dos gráficas H y K en dos vértices por lo tanto G es 3-conexa.

Combinando los teoremas 2.4.7 y el T. de Tutte tenemos:

Teorema 2.4.8. (Teorema de Fary y de Kuratowski) Una gráfica es plana si y sólo si no contiene subdivisiones de K_5 o $K_{2,3}$. si es plana tiene una representación en la que las aristas son segmentos de rectas.

Algoritmo de planaridad.

Ahora presentamos el algoritmo de planaridad para gráficas 3-conexas basado en la demostración de Thomassen de los teoremas de Tutte, Fary y de Kuratowski.

Algoritmo de planaridad. Supongamos que nos dan una gráfica 3-conexa entonces:

- 1.- Si la gráfica tiene más de $3n-6$ aristas aplicamos el corolario 2.1.7 y por lo tanto la gráfica no es plana si no;
- 2.- Aplicamos el lema 2.4.3. hasta llegar a una gráfica

homeomorfa a K_4 entonces :

3.- Aplicamos el método desarrollado para la demostración del T. de Tutte hasta encontrar una copia homeomorfa a K_5 o $K_{3,3}$, en caso de que no se encuentre se tiene la inmersión plana deseada.

Ejemplo 2.5 Sea la gráfica de la figura 2.13 , en la figura 2.14 se muestra el proceso de contraer sucesivamente una arista hasta llegar a K_4 , en la figura 2.15 se muestra el proceso del paso 3 hasta encontrar una inmersión plana de la gráfica.

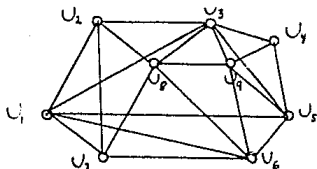


Figura 2.13

$$(U_4 U_7) = \omega_1$$

$$(U_7 \omega_1) = \omega_2$$

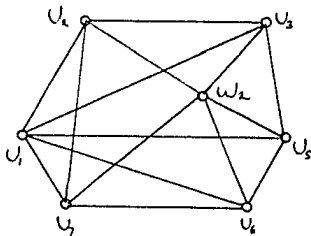
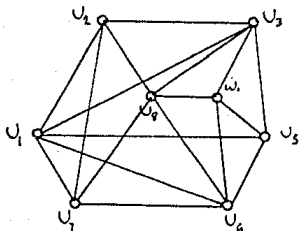


Figura 2.14

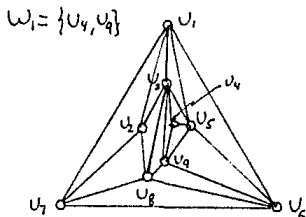
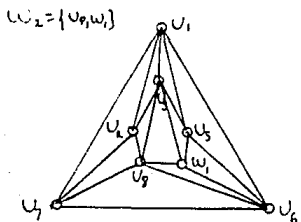
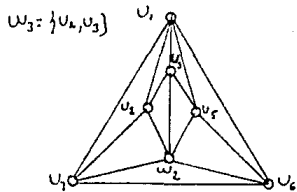
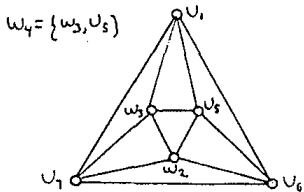
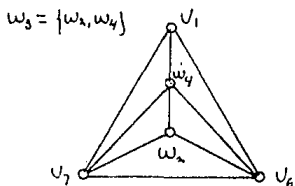
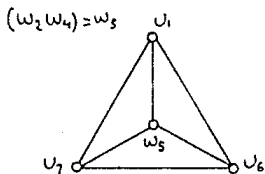
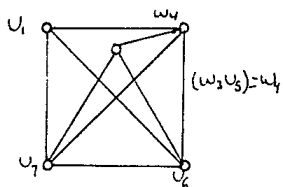
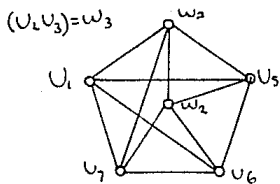


Figura 2.15

2.5. Un eslabón entre el Teorema de la Curva de Jordan
y el T. de Kuratowski.

Thomassen demostró en una nota aparecida en 1990 [16] que bajo ciertas condiciones en un espacio topológico es válido el T. de la curva de Jordan si y sólo si es válido el T. de Kuratowski . Las condiciones son que el espacio sea Hausdorff , que satisfaga el T. de no separación veáse Munkres [11] , que no sea homeomorfo a S^1 y que sea conectable por trayectorias El plano euclidiano \mathbb{C} y S^1 satisfacen estas condiciones , el teorema restringido a \mathbb{C} es :

Teorema 2.5.1 Las siguientes proposiciones son equivalentes:

- (a) Toda curva cerrada simple separa al plano \mathbb{C} .
- (b) Toda curva cerrada simple separa a \mathbb{C} en precisamente dos componentes conexas por trayectorias veáse Munkres [11].
- (c) $K_{2,2}$ no puede ser inmerso en \mathbb{C} .
- (d) Ni K_5 ni $K_{2,2}$ pueden ser inmersos en \mathbb{C} .

Demostración (b) \leftrightarrow (a) y (d) \leftrightarrow (c) son obvias.

(c) \leftrightarrow (d). Supongámos que K_5 está inmerso en \mathbb{C} , sean v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 los vértices de K_5 , sean p_1, p_2 puntos en la arista v_1v_2 tal que v_1, p_1, p_2, v_2 son distintos . Consideremos un arco A que conecta p_1 y p_2 y que contiene a v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 ya que $\mathbb{C}-A$ es conectable por trayectorias contiene un arco B de un punto q_1 sobre la arista v_1v_2 a un punto q_2 sobre otra arista tal que $B \cap K_5 = \{ q_1, q_2 \}$ es ahora fácil hallar $K_{2,2}$ en $K_5 \cup B$. obsérvese la figura 2.17.

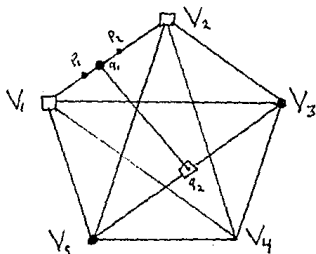


Figura 2.17.

(c) \rightarrow (b). Sea C cualquier curva cerrada simple en $\mathbb{C} - C$, tomemos un punto $p \in \mathbb{C} - C$. Sea A un arco simple de p a C tal que $A \cap C$ consiste de un punto q . sea A_1 un segmento de A de q a un punto $p_1 \neq p$ ya que $\mathbb{C} - A_1$ es conectable por trayectorias contiene un arco A_2 de $A - A_1$ a C teniendo sólo sus puntos terminales en común con $A \cup C$. Ahora $A \cup A_2$ contiene un arco simple A_3 conectando q con otro punto q' sobre C tal que $A_3 \cap C = \{q, q'\}$, sean A_4, A_5 los dos segmentos de C de q a q' , ya que $\mathbb{C} - A_3$ es arco conexo, existe un arco simple A_6 que une un punto r sobre $A_4 - \{q, q'\}$ con un punto r' sobre $A_5 - \{q, q'\}$ tal que $A_6 \cap (A_2 \cup A_4 \cup A_5) = \{r, r'\}$. Ahora $A_3 - \{q, q'\}$ y $A_6 - \{r, r'\}$ pertenecen a distintas componentes arco conexas de $\mathbb{C} - C$ ya que un arco simple de A_3 a A_6 en $\mathbb{C} - C$ (teniendo sólo sus puntos terminales en común con A_3 y A_6) junto con $A_2 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6$ nos dan una inmersión de $K_{2,2}$ en el plano, por lo tanto $\mathbb{R}^2 - C$ tiene al menos dos componentes arco conexas, figura 2.18.

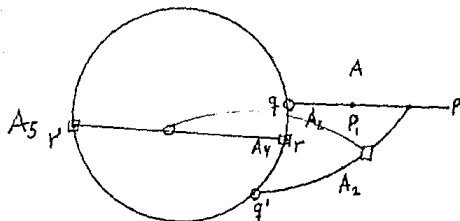


Figura 2.18.

Para ver que $C - C$ no puede tener más de dos componentes arco conexas, supongámonos por reducción al absurdo que p_1, p_2 y p_3 pertenecen a tres distintas componentes arco conexas de $C - C$. Sean A_1, A_2 y A_3 segmentos disjuntos dos a dos de C , ya que $C - (C - A_i)$ es arco conexo tiene un arco simple de p_1 a p_2 . Este arco contiene un arco simple de p_1 a p_2 . Este arco contiene un arco A_{11} de p_1 a un punto q_{11} sobre A_1 tal que $A_{11} \cap C = \{q_{11}\}$. Simultáneamente existe un arco simple A_{1j} de p_1 a q_{1j} sobre A_j tal que $C \cap A_{1j} = \{q_{1j}\}$ con $i, j = 1, 2, 3$. Claramente $A_{1i} \cap A_{k,p} = \emptyset$ o $\{q_{1i}\}$ cuando $i \neq k$. Podemos suponer que $A_{1i} \cap A_{i,p} = \{p_1\}$ cuando $j \neq p$. Para $j = 1, 2, 3$, sea B_j el segmento de A_j que contiene $q_{1,j}$, $q_{2,j}$ y $q_{3,j}$. Entonces los nueve arcos $A_{i,j}$ ($i, j = 1, 2, 3$) junto con B_1, B_2, B_3 forman una inmersión de $K_{3,3}$. Esta contradicción prueba que $C - C$ tiene precisamente dos componentes arco conexas Figura 2.19.

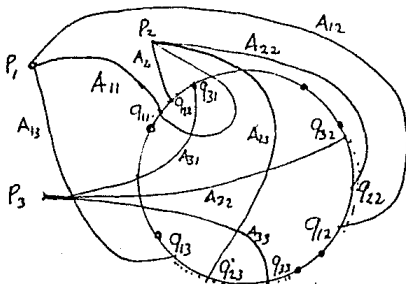


Figura 2.19.

a) \rightarrow c). Supongámos que C contiene una inmersión de $K_{2,2}$. En $K_{2,2}$ sólo tenemos 4-ciclos o 6-ciclos. $K_{2,2}$ tiene nueve 4-ciclos y seis 6-ciclos, cada uno de los cuales separa a C . Consideremos un 4-ciclo C . $K_{2,2} - C$ está en una componente conexa de $C-C$ pues los dos vértices restantes son adyacentes. Existe pues otra componente de $C-C$ la cual se denotará $Q(C)$. $Q(C)$ es también una componente de $C - K_{2,2}$. Si A es un arco simple de $Q(C)$ a $K_{2,2}$ tal que A tiene solo un punto final q común con $K_{2,2}$ entonces decimos que q es un punto de contacto de $Q(C)$ sobre $K_{2,2}$. Todos los puntos de contacto de $Q(C)$ están sobre C . Los puntos de contacto de $Q(C)$ son densos sobre C .

Tomemos un 6-ciclo C de $K_{2,2}$ tal que los vértices de $K_{2,2}$ sean denotados por $v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$ y que $K_{2,2}$ tiene las diagonales $v_i v_{i+2}$ ($i=0,1,2$) los índices se toman mod 6. Para cada arista $e_i = v_i v_{i+1}$ tenemos el 4-ciclo $C_i = v_i v_{i+1} v_{i+2} v_{i+3} v_i$. y en $Q(C) \cup e_i$ seleccionamos un arco A_i que une dos puntos p_i y q_i sobre e_i tal que $A_i \cap K_{2,2} = \{p_i, q_i\}$. En e_i reemplazamos el segmento B_i de e_i entre p_i y q_i para A_i , $i=1,2,3,4,5,6$. La curva simple resultante es

denotada por C' . Aseguramos que $C-C'$ es conexa p.t.. $K_{2,2}$ tiene tres 4-ciclos que contienen dos diagonales de C . Para cada uno de ellos existe una correspondiente componente de $C - K_{2,2}$, para cada uno de estos ciclos a los que denotaremos C_1, C_2 y C_3 obtenemos $Q(C_1), Q(C_2)$ y $Q(C_3)$ desde cada uno de estos podemos conectar los segmentos B_i y todas las diagonales de C figura 2.20 por lo que podemos concluir que todas las diagonales y segmentos B_i están en una misma componente R . Supongámos que $p \in X \setminus (C' \cup R)$ Ya que $C' \setminus (A_1 \setminus \{p_1, q_1\})$ no separa C , se sigue que C tiene un arco simple D de p a A_1 . Ya que $p \notin R$, D no interseca $K_{2,2}$. Pero entonces $D \subseteq Q(C_1)$. En particular $p \in Q(C_1)$. De manera similar se prueba que $p \in Q(C_2)$. Pero $Q(C_1)$ y $Q(C_2)$ son ajenas. Esta contradicción completa la demostración.

CAPITULO III

En este capítulo se estudian los conceptos de superficie , gráficas , inmersión de gráficas en superficies desde un punto de vista más formal hasta llegar al importante teorema del esquema de inmersión generalizado de Stahl [12].

3.1 Superficies y complejos simpliciales

En esta sección se dan las definiciones de superficie , gráfica y orientabilidad usando el concepto topológico de complejo simplicial.

Un espacio topológico M se llama variedad de dimensión n , o simplemente n -variedad , si cada punto $z \in M$ tiene una vecindad homeomorfa a D^n (el disco de dimensión n) y además es de Hausdorff y 2-numerable . para una mejor comprensión de los conceptos utilizados en este trabajo consultar Munkres [11].

$z \in M$ el interior de M si y sólo si existe una vecindad U de z en M tal que exista un homeomorfismo η de U en D^n tal $\eta(z)=0$.
 $z \in \partial M$ la frontera de M si para toda vecindad U de z en M existe un homeomorfismo η de U en D^n tal que $|\eta(z)| = 1$. M es cerrada si es compacta y $\partial M = \emptyset$, M es abierto si no es compacta y $\partial M \neq \emptyset$.

3.2. Complejos simpliciales geométricos

Consideremos los puntos $x_0, \dots, x_q \in \mathbb{R}^n$, $T = \{ x = x_0 + \sum_{i=1}^q \lambda_i x_i \mid \lambda_i \in \mathbb{R} \}$ es el espacio afín generado por $\{ x_0, \dots, x_q \}$. Sean v_1, \dots, v_q vectores en \mathbb{R}^n , $V = \{ x = \sum_{i=1}^q \lambda_i v_i \mid \lambda_i \in \mathbb{R} \}$ es el

espacio vectorial generado por $\{v_1, \dots, v_q\}$.

Si hacemos que $\lambda_0 = 1 - \sum_{i=1}^q \lambda_i$ tenemos el espacio $T = \{x = \sum_{i=0}^q \lambda_i x_i \mid \lambda_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=0}^q \lambda_i = 1\}$. T es afín es decir $\sum_{i=0}^q \lambda_i x_i = \sum_{i=0}^q \mu_i x_i$, $\sum_{i=0}^q \lambda_i = 1 = \sum_{i=0}^q \mu_i$ implica $\lambda_i = \mu_i$ para toda i si y sólo si $\dim(T) = q$. $\lambda_0, \dots, \lambda_q$ son las coordenadas baricentricas de x respecto a $\{x_0, \dots, x_q\}$.

Si $x_0, \dots, x_q \in \mathbb{R}^n$ están en posición general (afín. indep.) entonces $\sigma = \sigma^q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = \sum_{i=0}^q \lambda_i x_i, \sum_{i=0}^q \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0\}$ es el q-simplejo (abierto) con vértices x_0, \dots, x_q . La $\dim(\sigma) = q$. $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}^q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \dots, \lambda_i \geq 0\}$ es el q-simplejo cerrado $\bar{\sigma} = \bar{\sigma} - \sigma$ es la frontera de σ . Un q-simplejo es tal que $(\bar{\sigma}, \partial\sigma) \cong (\mathbb{D}^q, S^{q-1})$ son homeomorfos como parejas. Consideremos q-simplejos cerrados, el 0-simplejo $\sigma^0 = \{x_0\}$, el 1-simplejo $\sigma^1 = [x_0, x_1]$, el 2-simplejo $\sigma^2 = [x_0, x_1, x_2]$, el 3-simplejo $\sigma^3 = [x_0, x_1, x_2, x_3]$ están representados en la figura 3.1.

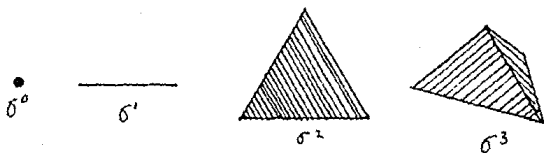


Figura 3.1.

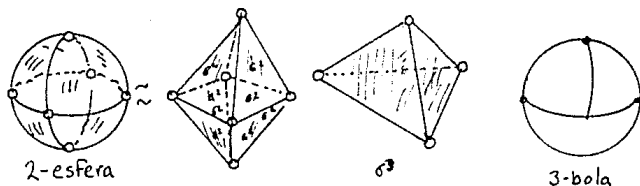


Figura 3.2

3.3. Complejos simpliciales abstractos.

Un complejo simplicial abstracto (V, C) es un conjunto finito V junto con una colección C de subconjuntos de V cuya unión es V y tal que si $\sigma \in C$ y $\tau \subset \sigma$ entonces $\tau \in C$.

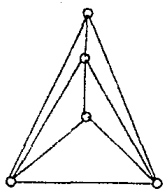
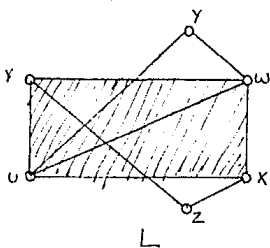
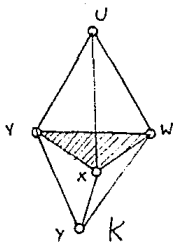
El baricentro $\hat{\sigma}$ de un q -simplejo σ es el punto de coordenadas baricéntricas $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_q = \frac{1}{q+1}$, es decir $\hat{\sigma} = \frac{1}{q+1} \sum_{i=0}^q x_i$, si $(x_0, \dots, x_q) \in \sigma$.

Para un complejo simplicial K existe un complejo simplicial K' su subdivisión baricéntrica tal que :

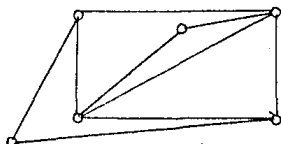
- Los vértices de K' son los baricentros de los simplejos de K .
- Los vértices de $\hat{\sigma}_0, \dots, \hat{\sigma}_q$ generan un q -simplejo de K' si y sólo si para algún orden se tiene $\sigma_0 \subset \sigma_1 \subset \dots \subset \sigma_q$.
- $|K'| = |K|$ $\dim K' = \dim K = n$.

Ejemplo 3.2. Los 1-esqueletos de los complejos simpliciales de la figura 3.3 son planos sin embargo los 1-esqueletos de sus

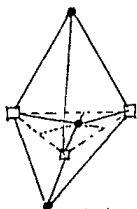
subdivisiones baricentricas no lo son .



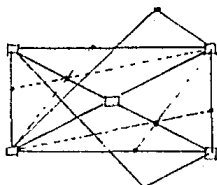
Inmersión en el plano del 1-esqueleto de K.



Inmersión en el plano del 1-esqueleto de L.



La 1era subdivisión baricéntrica de K tiene 1-esqueleto que contiene a K_{33}



La 1era subdivisión baricéntrica de L tiene 1-esqueleto que contiene a K_5

Figura 3.3

Ejemplo 3.3 El 2-complejo de la figura 3.4 no tiene inmersión en ninguna superficie pues el punto x no tiene vecindades homeomorfas ni a \mathbb{D}^2 ni a \mathbb{D}^2 el semidisco, pero su primera subdivisión baricéntrica tiene un 1-esqueleto con una inmersión en el plano como se muestra en la misma figura.

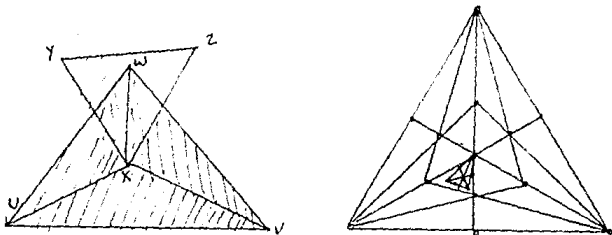


Figura 3.4.

3.4. Inmersiones celulares

Una representación topológica de una gráfica es la realización topológica de un 1-complejo simplicial geométrico, tal que a todo vértice de G corresponde un vértice del 1-simplejo y para toda arista $[x_1, x_2]$ de G el 1-simplejo $[x_1, x_2]$.

Una inmersión de una gráfica G en la superficie S es una función continua uno a uno $\iota: G \rightarrow S$. En casi todos los casos la gráfica G se puede ver como un subconjunto de la superficie S , y la función $\iota: G \rightarrow S$ como el mapeo inclusión. La inmersión es entonces denotada simplemente $G \rightarrow S$. Dada una inmersión $G \rightarrow S$ las componentes del complemento $S - G$ son llamadas "regiones". Si cada región es homeomorfa a un disco abierto, la inmersión se

la inmersión $G \rightarrow S$ es llamada una orientación de la triangulación . Una superficie es orientable si tiene una inmersión con una orientación. En la figura 3.6 se da una orientación del toro y el intento de una orientación de la banda de Moebius en el que se nota que todo intento de orientar produce una sucesión de 2-simplejos y el problema es orientar el último 2-simplejo de manera que al identificar los extremos de la cinta no haya problema.

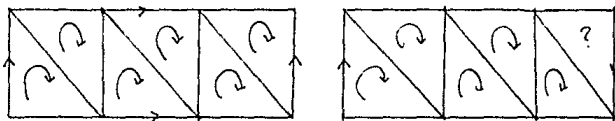


Figura 3.6

3.6. Representando superficies por polígonos

Una forma muy útil de representar una superficie es usar polígonos con aristas dirigidas e identificar los dos lados que tengan la misma etiqueta en la dirección coincidente como ya se vió anteriormente para el plano proyectivo y el toro.

Definición para $\gamma \geq 1$ sea $E_{4\gamma} \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ el 4γ -gono regular con vértices $z_k = e^{2\pi i k / 4\gamma}$ $k = 1, 2, \dots, 4\gamma$. $E_{4\gamma}$ es un subespacio convexo compacto de $\mathbb{R}^2 (= \mathbb{C})$, considérese la identificación dada

de la banda b , y los arcos $((j) \times I)$ para $j=0,1$, son llamados los lados de b . Una 0-banda es simplemente un espacio homeomorfo al disco unidad , al igual que las 2-bandas que son las correspondientes a cada cara de la inmersión .

Una descomposición de bandas de la superficie S es una colección B de 0-bandas , 1-bandas y 2-bandas satisfaciendo estas condiciones :

1. Bandas diferentes se intersecan solamente a lo largo de arcos en sus fronteras .
2. La unión de todas las bandas es S .
3. Cada final de cada 1-banda está en una 0-banda.
4. Cada lado de cada 1-banda está contenido en una 2-banda.
5. Las 0-bandas son disjuntas dos a dos y las 2-bandas son disjuntas dos a dos .

La correspondiente descomposición reducida de bandas B omite las 2-bandas .

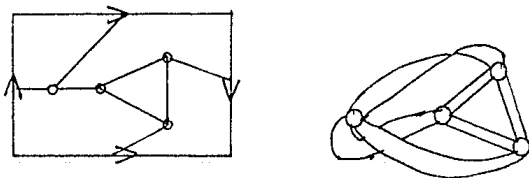


Figura 3.7 Una inmersión de K_4 y su descomposición reducida de bandas .

Una descomposición reducida de bandas es llamada orientada localmente , si a cada 0-banda le es asignada una orientación . Entonces una 1-banda es llamada preservadora de orientación si las direcciones inducidas sobre sus extremos por adjuntamiento de las 0-bandas son las mismas que aquellas inducidas por una de las dos posibles orientaciones de la 1-banda , en otro caso la banda es llamada revertidora de orientación . Esas dos posibilidades están ilustradas en la figura 3.8.

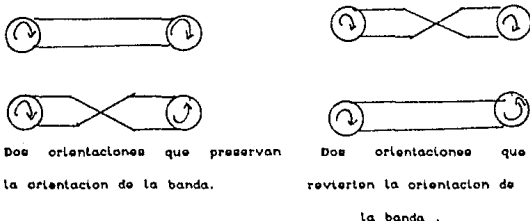


Figura 3.8

Una arista e en la inmersión de una gráfica asociada con una descomposición de bandas localmente orientada se dice que tiene una orientación tipo 0 si su correspondiente 1-banda es preservadora de orientación y orientación tipo 1 en otro caso . Un camino en la gráfica asociada tiene tipo 1 si tiene un número impar de aristas tipo 1 y tiene tipo 0 en otro caso .

Ahora podemos pensar en el problema de que nos den una descomposición reducida de bandas y obtener la inmersión de la

gráfica en la superficie y saber de que superficie se trata . Esta idea fue desarrollada en su caso orientable por Edmonds en 1960 [3] demostrada por Youngs en 1963 [18] de la forma siguiente :

Dada una gráfica con conjunto de vértices $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ y de aristas $E = \{e_1, \dots, e_n\}$, Para $i=1, \dots, n$ definimos a $V(i)$ como el conjunto de vecinos de v_i y P_i como una permutación cíclica de los elementos de $V(i)$ a cada elección (P_1, \dots, P_n) se le llama un sistema de rotaciones de la gráfica G .

Teorema 3.8.1. El teorema de Edmonds establece que cada elección de (P_1, \dots, P_n) determina una inmersión celular $G \rightarrow S$ de G en una superficie orientable S y que para cada inmersión celular $G \rightarrow S$ con S orientable existe un sistema de rotaciones (P_1, \dots, P_n) la cual determina la inmersión en cuestión .

Demostración . Dado (P_1, \dots, P_n) existe un algoritmo el cual produce la inmersión deseada . Primero estableceremos como encontrar las caras de la inmersión .

Algoritmo de trazo de caras . Elijáse un vértice inicial v_1 de G y una primera arista e_1 incidente a v_1 , sea v_2 el otro vértice extremo de e_1 , la segunda arista e_2 en la frontera de la cara es la arista posterior a e_1 en v_2 tomando esta relación en P_2 . Si la arista e_1 es un lazo , entonces e_2 es la arista posterior a la otra ocurrencia de e_1 en v_2 . En general si el camino trazado hasta aquí termina con la arista e_i en el vértice v_{i+1} , entonces la próxima arista e_{i+1} es la arista posterior a e_i en v_{i+1} . El

camino frontera es finalizado en la arista e_k si las dos próximas aristas en el camino son e_1 y e_2 otra vez .Pues entonces recorreríamos el camino trazado anteriormente . Para hacer otro camino diferente empezamos en la segunda arista de cualquier esquina que no aparezca en cualquier cara previamente trazada . Si no existen esquinas no usadas , entonces todas las caras han sido trazadas y las llamaremos F_1, \dots, F_k .

Una vez trazadas todas las caras procedemos a identificar topológicamente las aristas de las caras correspondientes con las aristas de la gráfica G . El espacio M así obtenido es una superficie cerrada orientable . Para ver que M es una superficie tomemos un punto x en M y verifiquemos que existe una vecindad de él homeomorfa al disco D^2 , existen tres posibilidades para x :

- i) x pertenece al interior de una cara .
- ii) x está en el interior de una arista .
- iii) x es un vértice de la gráfica.

En el primer caso no hay problema tomando un disco completamente contenido en la cara a la que pertenece x tenemos lo que queremos.

En el segundo caso sea e la arista a la que pertenece x y sean v_1 y v_2 vértices terminales de e en v_1 una parte de la permutación es $\dots e_1 - e - e_2$ y en v_2 $\dots f_1 - e - f_2$ véase la figura 3.9.1 . La arista e sólo es usada como arista de una cara dos veces , la cara que tiene como aristas $\dots e_1 - e - f_2 \dots$ y la cara que tiene como aristas $\dots f_1 - e - e_2 \dots$, por lo que ahora

es fácil tomar una vecindad de x homeomorfa a \mathbb{D}^2

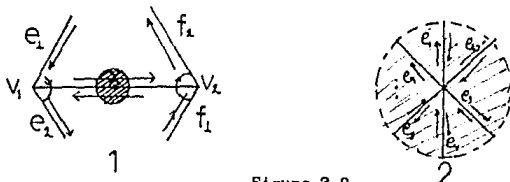


Figura 3.9

En el caso iii) sea $x = v$ y sea (e_1, e_2, \dots, e_n) una permutación de aristas en v , véase la figura 3.9.2, puesto que cada esquina es usada sólo una vez, entonces para cada pareja e_i, e_{i+1} existe una cara con la que es identificada. Podemos de esta forma tomar una vecindad de x homeomorfa al disco \mathbb{D}^2 . Como todo punto de M tiene una vecindad homeomorfa a \mathbb{D}^2 con x en su interior entonces M es cerrada por la definición dada en 3.1.

M es compacto. Para demostrar que M es compacto usaremos el siguiente teorema véase Massey [9].

Teorema iv). Supongamos que Y tiene la topología cociente determinada por una aplicación $f: X \rightarrow Y$. Si X es compacto entonces también lo es Y .

Una representación topológica de una gráfica G es homeomorfa a un espacio cociente \mathcal{P}/\sim donde \mathcal{P} es una unión disjunta finita de segmentos homeomorfos a I el intervalo cerrado $[0,1]$ (las aristas de G) y $x \sim y$ con $x \neq y$ implica que x y y son vértices de segmentos distintos e y f y que es adyacente a f en el vértice $x=y$ debido a que la unión finita de compactos es compacta, tenemos

por el teorema anterior que la representación topológica de una gráfica es compacta. La superficie M es homeomorfa a un espacio cociente T/\sim donde T es la unión disjunta de polígonos homeomorfos a \mathbb{D}^2 compactos y la representación topológica de la gráfica G y donde $x \sim y$ con $x \neq y$ implica que existen:

- a) Lados e_1, e_2 de polígonos distintos con $x \in e_1, y \in e_2$.
- b) Una arista e en la gráfica G tal que $e = e_1$ y $e = e_2$ en el algoritmo de trazo de caras y
- c) Un homeomorfismo $\mathcal{U} : e_1 \rightarrow e_2$ tal que los polígonos se identifiquen con e en la forma que indica el algoritmo.

Por el teorema iv) M es compacto pues T es compacto por ser unión finita de compactos.

Ya que G se puede ver como un subespacio de M , entonces la inmersión $G \rightarrow M$ está determinada por la inclusión. En 3.5 definimos que una superficie es orientable si tiene una inmersión con una orientación donde se entiende por esto un asignamiento de orientación a todas las caras tal que a regiones adyacentes induce direcciones opuestas sobre su arista común. Supongamos que existen caras F_1 y F_2 tal que inducen la misma dirección en una arista e , una parte de la frontera de F_1 se describe: $\dots, v_1, e, v_2, f, \dots$ de la misma para F_2 tenemos $\dots, v_1, e, v_2, g, \dots$ por el algoritmo de trazo de caras la arista que continúa después de e es la arista posterior a e en v_2 por lo tanto $f=g$ y de aquí que $F_1 = F_2$. Por lo tanto M es orientable.

Hemos demostrado que M es una superficie compacta, cerrada y

orientable .

Las superficies cerradas compactas son triangulables como se puede ver en Massey [9] , y se define la característica de Euler de una superficie M , como : $\chi(M) = \#(V) - \#(E) + \#(T)$ donde V denota el conjunto de vértices , E el conjunto de aristas y T el conjunto de triángulos de la triangulación .

Se demuestra también que no es necesario que se cubra a M con triángulos y más generalmente se define la característica de Euler de una superficie compacta como $\chi(M) = \#(V) - \#(E) + \#(\text{Regiones})$ donde las regiones pueden ser polígonos cualesquiera .

Los dos siguientes teoremas son importantes para el resto del trabajo ver una demostración en Massey [9] .

Teorema 3.8.2 . Toda superficie compacta es homeomorfa a una esfera , a S_γ superficie orientable de género γ o a N_γ superficie no orientable de género γ . Que implica el siguiente :

Teorema 3.8.3. Sean S_1 y S_2 superficies compactas . Entonces S_1 y S_2 son homeomorfas si y sólo si sus características de Euler coinciden y las superficies son ambas orientables o ambas no orientables.

Por último tenemos la siguiente relación entre el género g y la característica de Euler χ de una superficie compacta :

$$\chi = \begin{cases} 2-2g & \text{en el caso orientable.} \\ 2-2g-1 & \text{en el caso no orientable.} \end{cases}$$

Regresando al teorema de Edmonds una vez obtenida la superficie M aplicamos la fórmula de Euler a la superficie obtenida donde el número de vértices y el número de aristas son los de la gráfica dada y el número de regiones es el encontrado en el algoritmo de trazo de caras . De esta forma obtenemos el género de la superficie M y usando los teoremas anteriores sabemos de que superficie se trata.

Ahora dada una inmersión celular de una gráfica G en una superficie orientable M , obtenemos su descomposición reducida de bandas , asignamos la orientación a las 0- bandas que sea compatible con las 1 - bandas de forma tal que las 1- bandas sean del tipo 0 , esto nos da una permutación cíclica de los vértices adyacentes al vértice que representa la 0-banda , de esa forma obtenemos las permutaciones que nos piden .y procediendo con el algoritmo de trazo de caras reconstruimos la superficie y la inmersión dada.

Saul Stahl en un artículo publicado en 1978 [12] generaliza estos sistemas haciendo uso de las gráficas de voltaje que introduce Gross en 1974 [5]. Ahora daremos unas definiciones que nos serán útiles :

Sea G una gráfica y sea \mathcal{A} un grupo , una función α de \mathcal{A} a las aristas de G es llamada un asignamiento de voltajes . La gráfica (G, α) es llamada una gráfica ordinaria de voltajes . Para representar estas gráficas se dibujan y se escriben los voltajes sobre las aristas . Llamaremos a (G, α) la gráfica base o

simplemente base para obtener la gráfica derivada que denotaremos G^α . El conjunto de vértices de G^α es el producto cartesiano $V_G \times \mathcal{A}$ y el conjunto de aristas de G^α es el producto cartesiano $E_G \times \mathcal{A}$, en lugar de usar (v, a) y (e, a) para vértices y aristas de G^α usaremos simplemente v_a y e_a si la arista dirigida e^+ de la gráfica G va del vértice u al vértice v , y si b es el voltaje asignado a e^+ , entonces la arista dirigida e_a^+ de la gráfica dirigida G^α va del vértice u_a al vértice v_{ab} . Véase la figura 3.10.

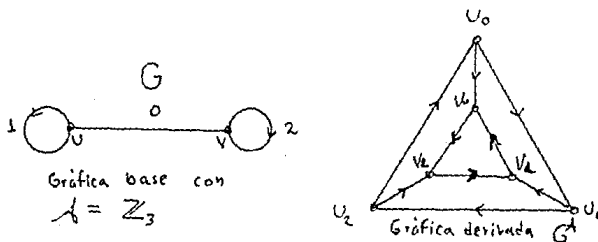


Figura 3.10

Sean los voltajes asignados en un grupo \mathcal{A} a una gráfica base G , entonces para todo vértice v de G , el conjunto de vértices v_a en la gráfica derivada es llamada la fibra sobre v . También para toda arista e en G el conjunto e_a es llamada la fibra sobre e . G^α es un espacio cubriente de G de $|\mathcal{A}|$ hojas.

Un esquema de inmersión generalizado (P, λ) para una gráfica dirigida G , consiste de un sistema de rotaciones P y un

asignamiento de voltajes λ sobre G con valores en \mathbb{Z}_2 . La gráfica cubriente derivada de esta gráfica de voltaje es denotada por G^λ . Ya que G^λ es un espacio cubriente de dos hojas de G , toda arista e de G es la proyección de dos aristas (e_0, e_1) de G^λ . Ocasionalmente serán denotados por (e, e') y el símbolo " $\hat{}$ " será usado para denotar el otro elemento en una pareja dada, así en \mathbb{Z}_2 $\hat{0}=1$ y $\hat{1}=0$. Definimos un sistema de rotación P^λ para G^λ por levantamiento de P_ν a v' y levantando P_ν^{-1} la permutación inversa cíclica de P_ν a \hat{v}' para cada vértice v de G . Así si d, e y f son arcos consecutivos en v , e.d. $P_\nu(d)=e$ y $P_\nu(e)=f$ sean d', e' y f'

sus levantamientos en v_i para $i=0,1$, entonces:

$$\begin{aligned} P_{v_0}^\lambda(e_0') &= f_0' & P_{v_1}^\lambda(e_1') &= d_1' \\ P_{v_0}^\lambda(d_0') &= e_0' & P_{v_1}^\lambda(f_1') &= e_1' \end{aligned} \quad (1)$$

El sistema de rotación P^λ determina la inmersión auxiliar de G^λ . La siguiente definición y lema aparea las regiones de esta inmersión de una manera natural. Si los arcos e_1, e_2, \dots, e_n constituyen un camino en G , entonces el camino $e_n^{-1}, e_{n-1}^{-1}, \dots, e_1^{-1}$ es el camino inverso.

Lema 3.8.4. Sea (P, λ) un esquema de inmersión para la gráfica G . Entonces el conjunto de regiones de la inmersión auxiliar de G^λ puede ser dividido en parejas (R, \hat{R}) con $R \neq \hat{R}$ tal que las fronteras de R y \hat{R} se proyectan a caminos inversos sobre G .

Demostración. Sean e' y f' dos arcos consecutivos sobre la frontera de una región R con sus vértices como se indica en la

figura 1. Por \hat{R} denotaremos la región cuya frontera contiene el arco \hat{f}'^{-1} se sigue de (1) que $P_{\nu}^{\lambda}(\hat{f}'^{-1}) = \hat{e}'^{-1}$ y aplicando el principio de inducción a las fronteras de R y \hat{R} concluimos que se proyectan a caminos inversos en G .

Por construcción \hat{R} es única y tal que $\hat{R} = R$, por verificar que $\hat{R} \neq R$, supongámos que $\hat{R} = R$, entonces las porciones de la frontera de R se describen por:

$$\dots - e' - f' - \dots - (\hat{f}')^{-1} - (\hat{e}')^{-1} - \dots$$

Si el número de aristas entre f' y $(\hat{f}')^{-1}$ es par entonces la frontera de R tiene las siguientes porciones:

$$\dots - e' - f' - \dots - x' - (\hat{x}')^{-1} - \dots - (\hat{f}')^{-1} - (\hat{e}')^{-1} - \dots$$

Lo que implica que x' y $(\hat{x}')^{-1}$ tienen los mismos vértices terminales que es absurdo. Si el número de aristas entre f' y $(\hat{f}')^{-1}$ es impar entonces la frontera de R se puede expresar como:

$$\dots - e' - f' - \dots - x' - y' - (\hat{x}')^{-1} - \dots - (\hat{f}')^{-1} - (\hat{e}')^{-1} - \dots$$

Lo que ocasiona que $y' = (\hat{y}')^{-1}$ sea absurdo por lo tanto tenemos que $R \neq \hat{R}$.

Dos inmersiones celulares de una gráfica G se dice que son idénticas si existe una correspondencia uno a uno entre sus regiones tal que las fronteras orientadas de regiones correspondientes son los mismos caminos de G .

Ahora podemos presentar el teorema principal:

Teorema 3.8.5. Si G es una gráfica, entonces todo esquema de inmersión (P, λ) determina una inmersión 2-celular de G y toda inmersión 2-celular de G es determinada por alguno de tales

esquemas .

Demostración . Dado un esquema de inmersión (P, λ) de G , sea ρ la colección de las regiones de la inmersión auxiliar de G^λ tal que para cada región R , un elemento de la pareja (R, \hat{R}) está en ρ , pero no ambos . Sea e'_1, e'_2, \dots, e'_n la frontera de una región R , donde los e'_i son los levantamientos de arcos e_i en G . Entonces sea $P(R)$ un polígono plano cuya frontera orientada es etiquetada $e'_1 - e'_2 - \dots - e'_n$, se sigue del Lema 3.8.4 que cada arista e de G es dos veces como el lado de algún $P(R)$. En otras palabras , o existen dos regiones en ρ en donde e está en la frontera de cada una , o existe una región simple en ρ sobre cuya frontera e ocurre dos veces. Si e' es un levantamiento de e entonces está sobre la frontera de dos regiones R_1 y R_2 de G^λ . Pero entonces \hat{R}_1 y \hat{R}_2 contienen a \hat{e}' sobre sus fronteras . Ya que ρ contiene exactamente un elemento de la pareja (R_i, \hat{R}_i) para cada $i=1,2$, la afirmación de arriba es válida . Es ahora claro que una aplicación del proceso clásico de identificación de lados a la colección $P(\rho) = \{P(R) \mid R \in \rho\}$ da una inmersión 2-celular de G . claramente p debe ser visto como proyección cubriente orientable de dos hojas $p : \tilde{S} \rightarrow S$ donde S es la superficie sobre la cual G es inmersa por (P, λ) .

Inversamente , supongámonos que G está inmersa sobre la superficie S_1 , y sea $p_1 : \tilde{S} \rightarrow S_1$ una proyección cubriente orientable de dos hojas (Si S_1 es orientable , entonces \tilde{S} es la unión disjunta de dos copias de S_1) véase Coxeter [1] . Para todo

vértice v de G sobre S_1 asignemos los nombres v_0 y v_1 arbitrariamente a los dos puntos en $P^{-1}(v)$. Si e es un arco con puntos terminales u y v , entonces un levantamiento e' de e tiene puntos terminales u_1 y v_1 , definimos $\lambda(e)=1$ si $i \neq j$ y $\lambda(e)=0$ en otro caso. Claramente entonces $P^{-1}(G)$ es una inmersión de G^λ sobre \tilde{S} . Ya que \tilde{S} es orientable existe un sistema de rotación $\tilde{P} = \{P_{v_i} \mid v_i \in V(G^\lambda)\}$ el cual determina esta inmersión. Para cada vértice v de G definimos $P_v(e) = f$ siempre que $\tilde{P}_v(e') = f'$. Aseguramos que (P, λ) induce la inmersión dada de G sobre S_1 . Ahora las cubiertas orientables de dos hojas son reversoras de orientación en el sentido siguiente. Supongáse que N es un subconjunto abierto, simplemente conexo, conexo y orientado de S , y N_1 y N_2 son las preimagenes de N sobre \tilde{S} . Entonces la proyección P levanta las orientaciones de N a orientaciones de N_1 y N_2 una de las cuales es coherente con cualquier orientación de \tilde{S} y la otra es opuesta. De aquí dado que $\tilde{P}_{v_0}(e') = f'$, se sigue que $\tilde{P}_{v_1}(\hat{e}') = \hat{e}'$. Consecuentemente la inmersión de G^λ definida por P^λ es en efecto la inmersión de G^λ sobre \tilde{S} .

Supóngase ahora que (P, λ) determina una inmersión de G sobre la superficie S , y sea $p: \tilde{S} \rightarrow S$ la proyección cubriente orientable de dos hojas definida por (P, λ) como en la primera parte de la demostración. Es claro que con un pequeño abuso de notación, $p \mid G^\lambda = p_1 \mid G^\lambda$. Por lo tanto se sigue que si R y \hat{R} son regiones de G^λ sobre \tilde{S} apareadas por (P, λ) , entonces $p_1(R) = p_1(\hat{R})$. Esto define una correspondencia entre las dos regiones de las dos

inmersiones de G sobre S_1 y S tal que las fronteras de las regiones correspondientes consisten de los mismos caminos en G , ya que tales inmersiones son idénticas, se sigue que (P, λ) determina la inmersión dada sobre S . ■

¿ Cuándo dos esquemas definen la misma inmersión, y cuándo una inmersión determina una inmersión orientable? Estas preguntas serán contestadas con dos teoremas para lo cual se necesitan las siguientes definiciones.

Una gráfica se dice que es homeomórficamente irreducible si tiene un solo vértice o todo vértice tiene grado al menos 3. En la siguiente discusión la gráfica G es fija, irreducible y Π denota el conjunto de todos los esquemas de inmersión generalizado de G . Si U es un subconjunto de $V(G)$, entonces σ_U , el interruptor o cambio de voltaje en U , es una permutación de Π cuya acción se define como sigue: para cualquier esquema de inmersión (P, λ) de G , $(P, \lambda)_{\sigma_U}$ es el esquema (Q, μ) con Q definido por $Q_v = P_v$ si $v \notin U$; $Q_v = P_v^{-1}$ si $v \in U$, y $\mu(e) = \lambda(e)$ si y sólo si exactamente uno de los puntos terminales de e está en U . Definimos el grupo interruptor $\Sigma = \{ \sigma_U \mid U \subseteq V(G) \}$. Si U es el simplete $\{v\}$, escribimos σ_v en lugar de $\sigma_{\{v\}}$. Definimos $\sigma_U \sigma_V = \sigma_{U-V}$ donde $U-V$ denota la diferencia simétrica de U y V .

Teorema 3.8.6 Dos esquemas de inmersión de una gráfica irreducible G determinan la misma inmersión si, y sólo si están en la misma órbita de Π bajo la acción de Σ .

Demostración . Comencemos por demostrar que dos esquemas en la misma órbita determinan la misma inmersión . Sea v un vértice arbitrario de G y $\langle P, \lambda \rangle$ un esquema para G . Supongáse que $\langle P, \lambda \rangle_{\sigma_v} = \langle Q, \mu \rangle$ definimos la biyección de $V(G^\lambda)$ sobre $V(G^\mu)$ por

$$\phi(u_i) = u_i \text{ si } u \neq v \text{ e } i=0,1. \quad (1)$$

$$\phi(v_i) = v_i \text{ para } i=0,1.$$

Es claro de la forma que σ_v actúa sobre los elementos de Π , que ϕ es un isomorfismo de G^λ a G^μ . Más aún

$$Q_u = P_u \text{ si } u \neq v, Q_v = P_v^{-1} \quad (2)$$

De aquí que en las inmersiones auxiliares de G^λ y G^μ .

$$Q_{\phi(u_i)} = P_{u_i} \text{ para todo } u_i \in V(G^\lambda) = V(G^\mu) . \quad (3)$$

Esto significa que el isomorfismo ϕ es conforme con esas inmersiones . Sin embargo , las fronteras de las regiones de las dos inmersiones de G definidas por $\langle P, \lambda \rangle$ y $\langle Q, \mu \rangle$ son determinadas por la sucesión de las primeras coordenadas (vértices de G) a través de las fronteras de las regiones levantadas en las inmersiones auxiliares de G^λ y G^μ . En vista de (1) , (2) y (3) de arriba , esas sucesiones son idénticas . Así $\langle P, \lambda \rangle$ y $\langle P, \lambda \rangle_{\sigma_v}$ determinan la misma inmersión de G . Ya que $\{ \sigma_v \mid v \in V(G) \}$ generan el grupo interruptor Γ la demostración de suficiencia está concluida.

Inversamente , supóngase que $\langle P, \lambda \rangle$ y $\langle Q, \mu \rangle$ determinan la misma inmersión de G . Para cada $v \in V(G)$ P_v, Q_v describen una de las dos posibles permutaciones cíclicas inducidas sobre los arcos en v por

la inmersión . De aquí que $P_v = Q_v^{\varepsilon(v)}$ donde $\varepsilon(v) = \pm 1$.

Sea $U = \{ v \in V(G) \mid \varepsilon(v) = -1 \}$ y definimos $(Q'', \mu'') = (P, \lambda)_{\sigma_U}$.

Por la manera en la cual los elementos de U fueron seleccionados , sabemos que $Q''_v = Q_v$ para todo vértice v de G . Por la primera parte de este teorema , los esquema (Q'', μ'') y (P, λ) definen la misma inmersión de G , y por lo tanto también (Q'', λ'') y (Q, μ) . Ya que con anterioridad sabemos que $Q'' = Q$, la demostración estará completa cuando se demuestre que $\mu'' = \mu$. Entonces , debido a la simetría de la situación , debemos suponer que para alguna arista $e = uv$, tenemos $\mu''(e) = 0$ y $\mu(e) = 1$. Supóngase que el sistema de rotación Q es tal que $Q_v(g) = e$, $Q_v(e) = h$, $Q_u(d) = e^{-1}$, $Q_u(e^{-1}) = f$. Se sigue de la definición de Q^λ y Q^{μ} que la fig. 3.11 describe las inmersiones auxiliares de G^μ y $G^{\mu''}$ cerca de e' y \hat{e}' . Ahora sin embargo , se sigue que la inmersión determinada por (Q'', μ'') tiene una región a saber $P(R_1)$ cuya frontera contiene la porción $\dots - f - e - g^{-1} - \dots$. Un examen de la inmersión de $G^{\mu''}$ revela que esto es inconsistente con el requerimiento que cada vértice tiene valencia al menos 3 (El teorema vale claramente para gráficas irreducibles excepcionales con valencia mínima menor que 3) . Así tenemos que $\mu'' = \mu$ y de aquí que $(P, \lambda)_{\sigma_U} = (Q'', \mu'') = (Q, \mu)$.

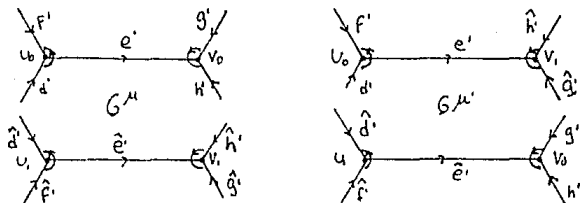


Figura 3.11

Es ahora muy fácil determinar, cuando dos esquemas (P, λ) y (Q, μ) definen la misma inmersión de G . Primero debemos tener $P_v = Q_v^{F(v)}$ con $\varepsilon(v) = \pm 1$ para todo $v \in V(G)$, en adición $(P, \lambda)_{\sigma_U}$ debe ser igual a (Q, μ) donde $U = \{v \in V(G) \mid \varepsilon(v) = \pm 1\}$.

La siguiente definición y teorema da la respuesta a la segunda de nuestras preguntas. Dado un esquema de inmersión (P, λ) de G un ciclo de G es λ -trivial si contiene un número par de aristas e tal que $\lambda(e) = 1$.

Teorema 3.8.7. Si G es una gráfica irreducible, entonces el esquema de inmersión (P, λ) define una inmersión orientable de G sobre una superficie S si y sólo si todo ciclo de G es λ -trivial.

Demostración. Supóngase que todo ciclo de G es λ -trivial. Se sigue que para cualquier vértice v de G , v_0 y v_1 pertenecen a diferentes componentes de G^λ . Porque si suponemos que v_0 y v_1 están conectadas por un camino ω de G^λ . Entonces la proyección de ω en G es un camino cerrado con un número impar de aristas e tal que $\lambda(e) = 1$. Ya que esto contradice la hipótesis de λ -trivialidad. Se sigue que G^λ es por lo tanto desconexo. Así la superficie \tilde{S} sobre la cual G^λ es inmersa tiene dos componentes orientables cada una de las cuales debe ser homeomorfa a S y por lo tanto S es orientable.

Inversamente . Supóngase que S es orientable . Entonces esta inmersión puede también ser definida por algún esquema $(Q,0)$ donde $0(e)=0$ para todos los arcos e . De aquí que existe un subconjunto U de $V(G)$ tal que $(P,\lambda)\sigma_U=(Q,0)$. No obstante es fácil verificar que la operación de cambio de voltaje preserva la λ -trivialidad de los ciclos . Así , ya que los ciclos de G son 0 -triviales , deben ser también λ -triviales .

Podemos ahora en lugar de usar una descomposición reducida de bandas trabajar con esquemas de inmersión generalizados.

Una forma de representar un esquema de inmersión generalizado es escribir la permutación cíclica de cada vértice señalando con un superíndice i si la arista tiene voltaje i y la ausencia de superíndice el voltaje 0 .

Ejemplo.3.4 Considérese el siguiente sistema de rotaciones:

- u. cbd. x. abg.
- v. ajh. y. idf.
- w. ecfe. z. hijg.

La figura 3.12 ilustra una proyección de este sistema de rotaciones

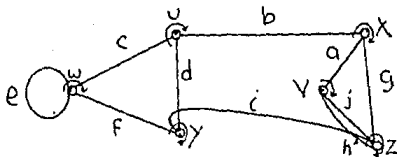


Figura.3.12.

Sus caras son : $cbghabdfe$, gaj , e , $cfijhd$, la inmersión tiene 4 caras y es orientable pues todas sus aristas tiene voltaje 0 , por el T. de Euler $\chi(G)=6-10+4=0$ por lo tanto por el T. 3.8.3 $g = \frac{1}{2}(2-0)=1$ por lo tanto la superficie S_g donde está inmersa G es S_1 el toro.

El tipo de un camino se define como la suma de todos los voltajes de sus aristas , así los caminos serán de tipo 0 o tipo 1 con esto podemos completar el algoritmo de trazo de caras para un esquema de inmersión generalizado de la siguiente manera : para determinar la siguiente arista se tomará en cuenta el tipo de camino trazado hasta ese paso , si el camino trazado es de tipo 0 se tomará la arista posterior y si es de tipo 1 se tomará la arista anterior en el vértice terminal .

Algoritmo de orientabilidad

El último teorema nos da un criterio para determinar cuando la superficie que determina un esq. de inm. gen. (P, λ) de una gráfica G es orientable o no , Para hacerlo tomemos un árbol generador T de la gráfica G y cambiemos las permutaciones cíclicas por su inversa en los vértices de T de forma tal que todas las aristas de T tengan voltaje 0 . llamemos U al conjunto de vértices que cambiaron su permutación entonces $(P, \lambda)_U$ determina una inmersión idéntica de G que (P, λ) , cualquier arista con voltaje 1 en $G - T$

nos da un ciclo que no es trivial en $(P, \lambda)_U$, por lo tanto la superficie es no orientable si y sólo si alguna arista en $G - T$ tiene voltaje 1.

Ejemplo 3.5 Una inmersión de K_4 en la botella de Klein N_2 veáse la figura 3.13.

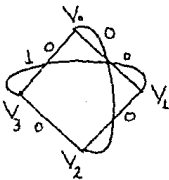
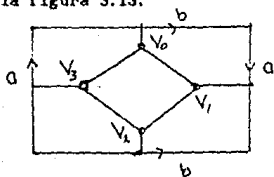


Figura 3.13.

Su esquema de inmersión es

$$\begin{aligned} v_0 &\cdot v_1 v_2 v_2 \\ v_1 &\cdot v_0 v_2^i v_2 \\ v_2 &\cdot v_1 v_0 v_2 \\ v_3 &\cdot v_0 v_2 v_1^i \end{aligned}$$

La gráfica de voltaje respectiva se ilustra en la figura 3.12, las caras de esta inmersión son $(v_0 v_1 v_2 v_0 v_2 v_1 v_2)$ y $(v_1 v_0 v_2 v_2)$, aplicando la fórmula de Euler tenemos $\chi = 4 - 6 + 2 = 0$ entonces $g = 2 - 0 = 2$ superficie no orientable de género 2 como se tenía originalmente.

Ejemplo 3.6. En la figura 3.14 a). tenemos representado un esquema de inmersión λ de una gráfica G , en la Fig. 3.13 b) la misma gráfica con las permutaciones cambiadas en los vértices v_0 y v_2 .

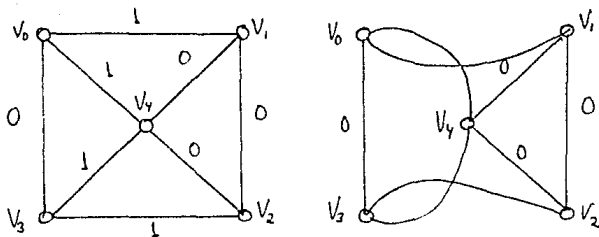


Figura 3.14

La segunda representación tiene todas sus aristas con voltaje 0 por lo que la gráfica de 3.12 a) es orientable, sus caras son $(v_1 v_2 v_3 v_4 v_0)$, $(v_2 v_1 v_4)$ y $(v_4 v_1 v_0 v_2 v_4 v_2 v_0)$ aplicando el teorema de Euler $\chi = 5 - 8 + 3 = 0$, la superficie de esta inmersión es orientable de género 1 el toro.

Una forma de describir un esq. de inm. gen. de una gráfica simplicial es a partir de una matriz de adyacencia, en la que se use signo negativo si la arista en cuestión tiene voltaje 1 y sin signo si el voltaje es 0, se usan subíndices para indicar la permutación cíclica por renglones, las siguientes matrices describen las inmersiones de los ejemplos 3.5 y 3.6.

$$\begin{matrix}
 & v_0 & v_1 & v_2 & v_3 \\
 v_0 & \left[\begin{array}{cccc} 0 & 1_1 & 1_3 & 1_2 \\ 1_1 & 0 & 1_2 & -1_2 \\ 1_2 & 1_1 & 0 & 1_3 \\ 1_1 & -1_2 & 1_2 & 0 \end{array} \right] \\
 v_1 & \\
 v_2 & \\
 v_3 &
 \end{matrix}
 \qquad
 \begin{matrix}
 & v_0 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\
 v_0 & \left[\begin{array}{cccccc} 0 & 1_2 & 0 & 1_3 & 1_1 \\ 1_2 & 0 & 1_1 & 0 & 1_2 \\ 0 & 1_2 & 0 & 1_3 & 1_1 \\ 1_2 & 0 & 1_1 & 0 & 1_2 \\ 1_1 & 1_2 & 1_3 & 1_4 & 0 \end{array} \right] \\
 v_1 & \\
 v_2 & \\
 v_3 & \\
 v_4 &
 \end{matrix}$$

Ejemplo 3.7. La siguiente es la matriz de adyacencia de K_7 con todas las entradas positivas, cualquier otra inmersión de K_7 en

una superficie orientable es idéntica a una de estas , por lo que podemos asegurar que éstas son todas las inmersiones orientables de K_7 .

$$\begin{array}{c}
 v_0 \\
 v_1 \\
 v_2 \\
 v_3 \\
 v_4 \\
 v_5
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 v_0 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\
 0 & 1_{p0} & 1_{p0} & 1_{p0} & 1_{p0} & 1_{p0} \\
 1_{p1} & 0 & 1_{p1} & 1_{p1} & 1_{p1} & 1_{p1} \\
 1_{p2} & 1_{p2} & 0 & 1_{p2} & 1_{p2} & 1_{p2} \\
 1_{p3} & 1_{p3} & 1_{p3} & 0 & 1_{p3} & 1_{p3} \\
 1_{p4} & 1_{p4} & 1_{p4} & 1_{p4} & 0 & 1_{p4} \\
 1_{p5} & 1_{p5} & 1_{p5} & 1_{p5} & 1_{p5} & 0
 \end{pmatrix}$$

Para cada vértice tenemos $6!/6$ permutaciones cíclicas son 7 vértices , entonces tenemos $(5!)^7$ inmersiones orientables no idénticas.

¿Qué fracción de todas éstas inmersiones tienen todas sus caras triangulares ? Contaremos primero las inmersiones que tienen seis caras de tres lados que cortan al vértice v_0 .

Sea $(v_5, v_1, v_2, v_3, v_4, v_0)$ una permutación cíclica de los vértices v_0 , la inmersión contiene la esquina $((v_1 v_0), (v_0 v_2))$ por lo tanto contiene la arista $(v_1 v_2)$ entonces v_2 tiene como permutación $(\dots v_1 v_0)$ las cuatro aristas restantes pueden ser acomodadas en $3!$ permutaciones cíclicas . para una permutación cíclica de $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_0)$ se tienen $(3!)^4$ posibilidades , ya que el número de permutaciones cíclicas de v_0 es $5!$ entonces el número de inmersiones orientables con estas condiciones es a lo más $5!(3!)^4$.

Si queremos que todas las caras de una inmersión sean triangulares entonces debe ser una de las que tiene seis caras triangulares que inciden con v_0 . La fracción es menor que

$$\frac{5!(3!)^6}{(5!)^7} = \frac{(3!)^6}{(5!)^6} = \frac{1}{(2 \times 10)^6} < \frac{1.6}{10^8}$$

En una inmersión dada una región se dice que es autocolindante coherente a lo largo de la arista e , si la arista e aparece dos veces en sentido opuesto (autocolindante no coherente) si aparece en sentido idéntico) sobre la frontera orientada de la región .

Si (P, λ) y (Q, μ) son esquemas de inmersión para la gráfica G , decimos que (Q, μ) es una perturbación de (P, λ) si $P = Q$ y existe una arista e de G tal que para todas las aristas d de G $\mu(d) = \lambda(d)$ si y sólo si $d \neq e$. De la misma forma decimos que (P, λ) es perturbado en e y produce (Q, μ) .

Los efectos que puede producir una perturbación sobre el número de regiones y la característica de Euler son contestados en los siguientes resultados :

Lema 3.8.8 . Supóngase que el esquema de inmersión (P, λ) de la gráfica G es perturbado en la arista e y produce (P, μ) . Entonces todas las regiones determinadas por (P, λ) que no contienen a e son también regiones de (P, μ) pero :

(a) Si e está sobre la frontera de dos regiones distintas de (P, λ) , estas se identifican en una región simple de (P, μ) la cual es autocolindante coherente a lo largo de e .

(b) Si una región R de (P, λ) es autocolindante coherente a lo largo de e , es cambiada en otra región autocolindante coherente de (P, μ) .

(c) Si una región R de (P, λ) es autocolindante a lo largo de e . Se descompone en dos regiones de (Q, μ) .

Demostración :

(a) Si las dos regiones de (P, λ) tienen fronteras e_m, e_1 y f_n, e^{-1}, f_1 entonces la nueva región tiene frontera $e_1, \dots, e_m, e, f_n^{-1}, \dots, f_1^{-1}, e$, véase la figura 3.15.

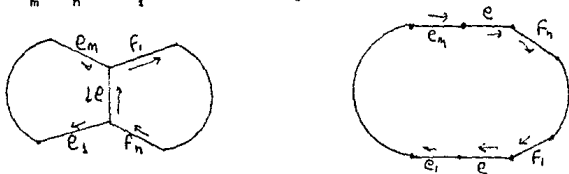


Figura 3.15 .

(b) Si la región de (P, λ) tiene frontera $e_1, \dots, e_m, e^{-1}, f_1, \dots, f_n, e$ la nueva región tiene frontera $e_1, \dots, e_m, e^{-1}, f_1^{-1}, \dots, f_n^{-1}, e$, ver figura 3.16.

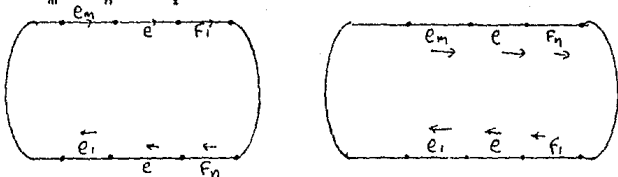


Figura 3.16.

(c)

tiene inmersiones no orientables de ese género .

Teorema 3.8.11 Sea $r(G)$ el número máximo de regiones en cualquier inmersión de la gráfica G sobre cualquier superficie cerrada . Si G es conexa entonces posee inmersiones 2-celulares no orientables con r regiones sobre superficies cerradas , para cualquier r entero tal que $1 \leq r \leq r(G)$.

Demostración . Sea (P,λ) un esquema de inmersión que determina una inmersión de G con $r(G)$ regiones . Si $r(G) \neq 1$ entonces existen dos regiones las cuales comparten una arista e , Sea (P,μ) el esquema obtenido de perturbar (P,λ) a lo largo de e , se sigue del teorema que (P,μ) determina una inmersión de G con $r(G)-1$ regiones y que la nueva región es autocolindante no coherente , por lo tanto la inmersión definida por (P,μ) es no orientable . Si $r(G)-1 = 1$ entonces terminamos , si no continuamos hasta que $r(G)-1 = 1$.

Corolario 3.8.12 Supóngamos que la gráfica G tiene p vértices y q aristas . Entonces G tiene una inmersión 2-celular sobre la superficie no orientable N_k k entero tal que :

$$\tilde{\gamma}(G) \leq k \leq q-p+1 .$$

Demostración . Por el T. anterior G tiene una inmersión celular con exactamente una cara , por la fórmula de Euler la inmersión es sobre S_{q-p+1}^- y aplicamos el teorema anterior. ■

BIBLIOGRAFIA

- [1] H. S. M. Coxeter y W. O. Moser . Generators and Relations for Discrete Groups . Springer Verlag (1972).
- [2] M. G. Curc6 Cobos . Una introducci6n a la teoria de gráficas . Tesis UNAM (1989).
- [3] J. P. Edmonds . A combinatorial representation for polyhedral surfaces . American Mathematical Society Notices . 7 (1960) 646 .
- [4] J. B. Fraleigh . A first course in Abstract Algebra . Adisson - Wesley . New York 1987 .
- [5] J.L. Gross and T.W. Tucker . Topological Graph Theory . Adisson - Wesley . New York 1987 .
- [6] F. Harary . Graph Theory . Adisson Wesley 1969 .
- [7] P. Hoffman and Bruce Richter . Embedding graphs in surfaces . Journal of Combinatorial Theory Series B 36 (1984) 65 - 84 .
- [8] K.Kuratowski . Sur le probleme des courbes gauches en topologie . Fund. Math. 15 (1930) 271 - 283 .
- [9] W. S. Massey . Introducci6n a la topologia algebraica . Revert6 Barcelona (1972).
- [10] E. Michael . Cuts . Acta Mathematica (1964) 1 - 36 .
- [11] J.R. Munkres . Topology a first course . Prentice Hall . Englewood Cliffs 1975 .
- [12] S.Stahl . Generalized Embedding Schemes . Journal of Graph Theory Vol. 2 (1978) 41 - 52 .
- [13] G. Thomassen . Planarity and duality of finite and infinite graphs . Journal of Combinatorial Theory Series B 29 (1980) 244-271 .

[14] C. Thomassen . Kuratowski's Theorem . Journal of Graph Theory Vol. 5 (1981) 225-241 .

[15] C. Thomassen . Non separating induced cycles in graphs . Journal of Combinatorial Theory Series B 31 (1981) 199-224 .

[16] C. Thomassen . A link between The Jordan curve theorem and The Kuratowski planarity criterion . American Mathematical Monthly (1990) 216-218 .

[17] A T. White . Graphs Groups and Surfaces . North Holland Mathematics Estudies 8 Amsterdam 1973 .

[18] J.W.T. Youngs . Minimal Imbedding and the genus of graph . Journal of Mathematics and Mechanics Vol. 12 (1963) 303-315.