27
2 ej.

G A B R I E L O L V E R A
ALCANTARA

LECCIONES SOBRE LA TEORIA DE PUNTO FIJO

(Teoría de punto fijo de Nielsen y Trenzas)

MATEMATICO

1991

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

Introducción

El objeto de investigación de la teoría de punto fijo es el conjunto de puntos fijos $fix(f)$ de aplicaciones f, definidas y con valores en subconjuntos del mismo espacio, y donde, por definición,

$$fix(f) = \{ x \mid f(x) = x \}.$$

En particular, la cuestión básica de la teoría de punto fijo de Nielsen es el cálculo de la cota inferior del cardinal

$$m(f) = \min \{ \# fix(g) \mid f : U \subset X \to X \ , \ g \simeq f \},$$

llamada número de Nielsen $N(f)$ de f.

De ésta teoría, dos conceptos salientes son tema para las lecciones: el número de Nielsen y su realizabilidad, es decir, decidir si $m(f) = N(f)$

Específicamente, las lecciones constan de cuatro unidades. Una vez enunciados los preliminares, se demuestran la existencia y unicidad de un índice de punto fijo α; a continuación, que efectivamente el número de Nielsen N_α es cota inferior del mínimo número de puntos fijos M_α. En el orden acostumbrado, esto se incluye en las primeras tres unidades. En la cuarta se demuestra la no realizabilidad de N_α.

La existencia de α es una pequeña generalización de [6, teorema 12.1]. La demostración expuesta de la no realizabilidad es básica mente como en [VI]. Por el método de su demostración resultó ser de las primeras conexiones entre las teorías de punto fijo y de trenzas

Gabriel Olvera

México D.F.

Notas al lector

Cuando no se incluye la demostración de algún teorema, al final de su enunciado, se cita alguna referencia donde pueda leerse. Del mismo modo, a veces, se citan la fuente de la demostración original o los textos con sultados

Al final del libro, en la bibliografía, se dan los datos completos de las referencias citadas.

Las referencias generales en topología algebraica son [D2] y [S].

Frecuentemente, por brevedad, se dice aplicación en vez de función continua. Dados los espacios X, Y y $U \subset X$, $f: U \subset X \to Y$ denota una aplicación de

U en Y. Si $X = Y$ a f también se le llama autoaplicación.

Dada

$$H : U \subset X \times I \to Y$$

para toda $t \in I$, se definen

$$U_t = \{x \in X \mid (x,t) \in U\}$$

y

$$H_t : U_t \to Y$$

$$H_t(x) = H(x,t).$$

Estas lecciones fueron presentadas para obtener el título de matemático. La dirección estuvo a cargo del Dr. Carlos Prieto. En la revisión de la última versión participarón el Dr. Carlos Prieto, la Dra. Mónica Clapp, la Mta. Ana Irene y los Drs. Francisco Gonzalez y Marcelo Aguilar.

Indice Analítico

Introducción

Notas al lector

Preliminares

1 Número de Lefschetz

2 Número de Lefschetz generalizado y aplicaciones de Lefschetz

3 Grupos

4 ANR métrico

5 Fibraciones

6 ϵ- aproximaciones

Indice de punto fijo

0 Definición y ejemplos

1 Indice en la clase de los espacios euclidianos

2 Indice en la clase de los

espacios lineales normados
3 Indice α en la clase de los ANR métricos
4 Unicidad del índice α

Número de Nielsen y Realizabilidad
1 Dominio del número de Nielsen N_α asociado al índice α.

Realizabilidad
0 Espacio de configuración y grupo puro de trenzas
1 Sucesión de Fadell-Neuwirth
2 Presentación del grupo puro de trenzas de $\mathring{P}$
3 N no es realizable

Bibliografía

Preliminares

Encontrar alguna propiedad al conjunto de puntos fijos de una autoaplicación f a través de $H(f, \mathbb{Q})$, además de ser una posibilidad afortunada, tiene su fundamento en la topología diferencial, uno de los métodos de la teoría de punto fijo. Ahí, por ejemplo, las propiedades de una aplicación generalmente son consecuencia de los de la inducida entre los haces tangentes o normales. Siguiendo la posibilidad mencionada; es decir, estudiar el conjunto de puntos fijos de una autoaplicación $f: X \to X$ con la homología como método; el determinante y la traza de $H(f, \mathbb{Q})$, cuando es posible definirlos, son dos elementos por analizar. Claramente los dos presuponen el cálculo de $H(f,\mathbb{Q})$.

Otra posibilidad, aún más usual, es considerar determinado conjunto de autoaplicaciones y definir en él una medida ó índice, cuyos valores describan geométrica ó algebraica mente el conjunto fix de la función donde se evalúa. Es decir, que describa las condiciones de "punto fijo" ó que de algún modo los mida.

A ambas se debe la elección de la clase de los ANR métricos para llevar a cabo la exposición. En realidad son la directriz y los preliminares son el principio para formalizarlas. Por ejemplo, en las primeras dos secciones, se definen una generalización de la traza λ y las autoaplicaciones f con $H(f,\mathbb{Q})$ en el dominio de λ; en la cuarta se incluyen algunas propiedades de los ANR métricos. Por otra parte, las ϵ-aproximaciones, tratadas en la última sección, son un medio para extender un índice definido en la clase de los espacios euclidianos. Las restantes secciones se incluyen solo por completez.

1. Número de Lefschetz

En ésta sección R denota un anillo conmutativo con uno y cualquier módulo u homomorfismo es R-módulo o R-homomorfismo resp.

Dados los módulos graduados $M = \{M_i\}$, $N = \{N_i\}$ se definen M^*, $M \otimes N$, $Hom(M,N)$, θ y e por

$$M^*_{-n} = Hom_R(M_n, R)$$

módulos graduados, $f = (M^* \otimes h)_0$, $g = \mathrm{Hom}(M^*, h)$ y $\theta(M, N') = \theta'$.

Para toda $(\varphi_i \otimes a_i) \in (M^* \otimes N)_0$, $b \in M_j$

$$g\theta(\varphi_i \otimes a_i)_j(b) = g_j((-1)^{j^2} \varphi_j(b) a_j)$$
$$= (-1)^{j^2} \varphi_j(b) h_j(a_j)$$

$$\theta' f(\varphi_i \otimes a_i)_j(b) = \theta'(\varphi_i \otimes f_i(a_i))_j(b)$$
$$= (-1)^{j^2} \varphi_j(b) h_j(a_j).$$

Es decir $g\theta = \theta' f$.

Análogamente se demuestra la naturalidad de θ respecto a M.

Si en la demostración anterior $N' = \{\bigoplus_{\alpha \in \Gamma_i} R\}$, $\{e_{\alpha v}\}$ es la base canónica de N'_i y $\theta(\varphi_i \otimes a_i) = 0$ ent, para toda $j \in \mathbb{Z}$ y $b \in M_j$, por la naturalidad de θ

$$(-1)^{j^2}\varphi_j(b)h_j(a_j)=0$$

Suponiendo $h_j(a_j)=\sum_{k(j)}\beta_{k(j)}e_{k(j),j}$,

$$\sum\varphi_j(\beta_{k(j)}b)e_{k(j),j}=0.$$

Luego $\varphi_j(b)=0$, para toda $j\in\mathbb{Z}$ y $b\in M_j$.
Por tanto $(\varphi_i\otimes a_i)=0$.

1.3 Definición. Si N es libre y $\varphi:N\to N$ es un homomorfismo de rango finito, se define el número de Lefschetz $L(\varphi)$ de φ por $L(\varphi)=\epsilon\,\Gamma(\varphi)$.

1.4 Ejemplos. (a) Sean N módulo graduado libre y $\beta:N\to N$ homomorfismo de grado cero con β_i de rango finito y $\beta_i=0$ para casi toda i.
Sea Γ_i base de N_i, y supóngase que

$$\beta_i(\gamma)=\sum_{\mu\in\Gamma_i}\beta_\mu^\gamma\,\mu \quad \text{si } \gamma\in\Gamma_i.$$

es como β.

Al conjunto $\{\beta_\nu^\gamma\}$ se le llama matriz de β y traza de β_i a $\sum_{\mu \in \Gamma_i} \beta_\mu^\mu = tr(\beta_i)$. Así $L(\beta) = \sum_i (-1)^i tr(\beta_i)$.

(b) Sea X espacio conexo por trayectorias con $H_n(X, \mathbb{Q}) = 1$ si $n > 1$. Si $\pi'(X)$, la abelianización del grupo fundamental de X, es finitamente generada entonces, para cada aplicación $f: X \to X$, $H(f, \mathbb{Q}) = f_*$ es de rango finito y $L(f_*) = 1 - tr(\pi'(f))$.

Demostración. En virtud de la naturalidad del isomorfismo de Hurewicz

$$h: \pi'(X) \to \pi'(X)$$

y del isomorfismo

$$\mu: H_1(X) \otimes \mathbb{Q} \to H_1(X, \mathbb{Q})$$

$$\mu([x] \otimes r) = [x \otimes r],$$

2.1 Definición. Sean E espacio lineal y $f: E \to E$ homomorfismo. Se definen

$$N(f) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \ker f^n \quad , \quad \tilde{E} = E/N(f)$$

donde f^n es la composición de f misma n veces. Si $\dim \tilde{E} < \infty$, se define la traza generalizada $Tr(f)$ de f por $Tr(f) = tr(\tilde{f})$, donde

$$\tilde{f} : \tilde{E} \to \tilde{E}$$

es el homomorfismo inducido por f.

Sean F espacio lineal graduado y $g: F \to F$ homomorfismo. Se dice que g es un homomorfismo de Leray si $\tilde{F} = \{\tilde{F}_i\}$ es espacio lineal, de tipo finito, y en tal caso se define el número de Lefschetz generalizado $\lambda(g)$ de g por $\lambda(g) = \sum_i (-1)^i Tr(g_i)$.

2.2 Ejemplos. (a) Sean $E \subset F$ espacios lineales graduados y $f: F \to F$ homomorfismo con $f(E) \subset E$. Si f ó, $f|_E$ y $f': F/E \to F/E$, es de Leray entonces f, $f|_E$ y f' son de Leray y $\lambda(f) = \lambda(f|_E) + \lambda(f')$. [L, pg. 224]

Además, si F es de tipo finito entonces f es de Leray y $\lambda(f) = \sum_i tr(f_i)$. [L, pg. 224]

(b) Propiedad Conmutativa de λ. Sean $f: E \to F$ y $g: F \to E$ homomorfismos de grado cero entre espacios lineales graduados. Si gf es de Leray entonces fg es de Leray y $\lambda(fg) = \lambda(gf)$.

(c) Corolario de (b). Si el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "u"] & F \\
E \arrow[u, "f"] \arrow[r, "u"'] & F \arrow[u, "g"'] \arrow[ul, "v"]
\end{tikzcd}
$$

de espacios lineales graduados y homomorfismos es conmutativo y f ó g es de Leray entonces g ó f resp. es de Leray y $\lambda(g) = \lambda(f)$.

(d) Si E es un espacio lineal graduado y $f: E \to E$ un homomorfismo de rango finito entonces f es de Leray y $\lambda(f) = L(f)$.

Demostración. Sea F la imagen de f. Entonces F es de tipo finito. Como $f' = 0 : E/F \to E/F$ y $f|F$ son de Leray, por (a), también f es de Leray y $\lambda(f) = L(f)$.

2.3 Definición. Sean X espacio topológico y $f: X \to X$ continua. Se dice que f es una aplicación de Lefschetz si el homomorfismo $f_*: H(X,\mathbb{Q}) \to H(X,\mathbb{Q})$ es de Leray, y en tal caso se define el numero de Lefschetz $\Lambda(f)$ de f por $\Lambda(f) = \lambda(f_*)$.

2.4 Corolario. de la conmutatividad de λ. Si el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] & Y \\ X \arrow[u, "f"] \arrow[r, "u"'] & Y \arrow[u, "g"'] \arrow[ul, "v"'] \end{tikzcd}$$

de espacios topológicos y aplicaciones es conmutativo y f ó g es de Lefschetz entonces g ó f resp. es de Lefschetz y $\Lambda(f) = \Lambda(g)$.

3 Grupos

De la teoría de grupos un par de propiedades son los requisitos. Con la segunda se efectúa la conexión entre las teorías de punto fijo y de trenzas, mencionada en la introducción.

Sean
$$1 \longrightarrow A \xrightarrow{\varphi} G \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 1$$
una sucesión exacta de grupos, y $[X,R]$, $[Y,S]$ presentaciones de A, B resp.

Sean $\varphi(R)$ y $\psi^{-1}(S)$ los conjuntos de palabras en $\varphi(X)$ y $\psi^{-1}(Y)$ resp. obtenidos de R y S al cambiar x por $\varphi(x)$ y, y por y' resp, donde $\psi(y') = y$.

Cada palabra $y'\varphi(x)y'^{-1}$ y $s' \in \psi^{-1}(S)$, donde $\psi(y') \in Y$, es una palabra v y w resp. en

4 ANR métrico.

También en la teoría de punto fijo los espacios euclidianos son prototipo para definir sus conceptos fundamentales. Junto con los espacios lineales normados permiten formulaciones directas de conceptos como el índice de punto fijo ó índice.

Aquí la teoría de punto fijo en la clase de los ANR métricos es una extensión de la establecida en la clase de los espacios lineales normados.

4.1 Definición. Un espacio métrico Y es ANR métrico si, para cada pareja de espacios métricos (X, A) con $A \subset X$ cerrado y cada aplicación $f: A \to Y$ existen una vecindad U de A y una extensión $f': U \to Y$ de f.

4.2 Ejemplos: (a) Sea X espacio métrico conexo. X es una variedad de dimensión n si para cada $x \in X$ existe una vecindad de x homeomorfa a R^n. X es una variedad con frontera de dimensión n si para cada $x \in X$ existe una vecindad de x homeomorfa a R^n ó a

$$H^n = \{ x \in R^n \mid x_n \geq 0 \}$$

X es localmente finitamente triangulable si para cada $x \in X$ existe una vecindad de x homeomorfa a un poliedro compacto.

A las variedades de dimensión dos con ó sin frontera también se les llama superficies con ó sin frontera resp.

Las variedades con o sin frontera, los espacios métricos finitamente triangulables y los espacios lineales normados son ejemplos de ANR métricos. [H2, pg 98].

(b) Si X es ANR métrico y $U \subset X$ abierto entonces U es ANR métrico. [H2, pg 97].

(c) Sea X espacio métrico. X es ANR métrico si y solo si existe un subconjunto abierto U de algún espacio lineal normado y aplicaciones

$$r : U \to X \quad , \quad s : X \to U$$

con $rs = 1_X$.

A la pareja (r,s) se le llama parametrización de X, y si $f : X \supset V \to X$ es continua se dice que $sfr : r^{-1}(V) \to X$ es equivalente a f.

Demostración. Supóngase que X es ANR. Como es métrico, existen un espacio lineal L y un encaje $\varphi : X \to L$ con imagen cerrada, [A,E]. Ya que $\varphi(X)$ es ANR cerrado y L es métrico, existen una vecindad U de $\varphi(X)$ y $e : U \to \varphi(X)$

extensión de $id_{\varphi(X)}$. Sean $r = \varphi^{-1}\varrho$ y $s = \varphi$. Entonces $rs = id$.

Inversamente; sean $A \subset Y$ cerrado, Y métrico y $f: A \to X$ continua. Como U es ANR métrico existen una vecindad $V \subset Y$ de A y $f': V \to U$ extensión de $sf: A \to U$. Entonces $rf': V \to X$ es una extensión de f.

Tanto las variedades y los poliedros como los espacios lineales normados son ejemplos de ANR métricos de suma importancia para la teoría de punto porque algunas de sus propiedades implican simplificaciones en las cuestiones que plantea. Las siguientes propiedades son un ejemplo de éste hecho porque con ellas se demuestra la existencia de una autoaplicación tal que cualquier elemento en su clase de homotopía tiene al menos dos puntos fijos.

4.3 Teorema Si M es una variedad con frontera entonces existen N una vecindad de ∂M y

$$h : (N, \partial M) \longrightarrow (\partial M \times [0,\infty), \partial M \times 0),$$

con $h(x) = (x, 0)$ si $x \in \partial M$,

un homeomorfismo. [MB]

A la pareja (h, N) se le llama collar de M.

4.4 Corolario. Si M es una variedad con frontera entonces $\mathring{M}$ es un retracto débil por deformación de M.

Demostración. Sea (h, N) un collar de M. Sean

$$f_s : [0,\infty) \to [0,\infty)$$

$$f_s(x) = \begin{cases} x + (1-x)\frac{1}{2}(1-s) & 0 \leq x \leq 1 \\ x & 1 \leq x \end{cases}$$

y $H_s : M \to M$ una extensión de

$$\begin{tikzcd} \partial M \times [0,\infty) \arrow[r, "1 \times f_s"] & \partial M \times [0,\infty) \\ N \arrow[u, "h"] & N \arrow[u, "h^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

Ya que, para cada $s \in I$, $f|_{[1,\infty)} = 1$, $h^{-1} \circ 1 \times f_s \circ h$ es la aplicación identidad en el complemento de alguna vecindad de ∂M; y por tanto H_s existe. Además cada H_s es inyectiva porque cada f_s lo es, y $H_0(M) \subset \mathring{M}$.

Sea $i : \mathring{M} \hookrightarrow M$. Claramente

$$H_s : H_0 i \simeq 1_{\mathring{M}}$$

$$H_s : i H_0 \simeq 1_M$$

4.5 Corolario. Si M es una variedad entonces $\mathring{M}\times\mathring{M}\setminus\Delta$ es un retracto débil por deformación de $M\times M\setminus\Delta$.

Demostración. Sean $i:\mathring{M}\times\mathring{M}\setminus\Delta \hookrightarrow M\times M\setminus\Delta$ y H_s la homotopía definida en 4.4. Entonces

$$H_0\times H_0\circ i \simeq \perp_{\mathring{M}\times\mathring{M}\setminus\Delta}$$

$$\text{e}\qquad i\circ H_0\times H_0 \simeq \perp_{M\times M\setminus\Delta}.$$

4.6 Corolario. Si M es una variedad con frontera entonces, para toda $n\in\mathbb{N}$, $\pi_n(\mathring{M})\cong\pi_n(M)$ y $\pi_n(\mathring{M}\times\mathring{M}\setminus\Delta)\cong\pi_n(M\times M\setminus\Delta)$.

4.7 Teorema de Extensión de Homotopía. [H]
Sean A, X poliedros, $A\subset X$ y $f:X\to Y$ una aplicación. Para cada homotopía H de $f|_A$ existe una extensión $G: X\times I\to Y$ con $H(x,0)=f(x)$.
[H1, pg 147] ó [S, pg 118]

4.8 **Corolario**. Sean M superficie compacta con frontera, $x_0 \in \mathring{M}$ y $f, g : M \to M$ aplicaciones homotópicas. Si f y g no tienen puntos fijos en $\partial M \cup x_0$ entonces existe una aplicación $h : M \to M$, $f \simeq h \text{ rel } \partial M \cup x_0$ y $\operatorname{fix}(g) = \operatorname{fix}(h)$.

Demostración. Sean (φ, N) un collar de M, $H : f \simeq g$ y $H'|_{(\partial M \cup x_0) \times I}$, y $V = H'^{-1}(N)$.

Para cada $(x,t) \in \operatorname{fix}(H')$ y cada vecindad $V_x \subset N$ de x existe una vecindad $V_{(x,t)} \subset V$ de (x,t) con $H'(V_{(x,t)}) \subset V_x$. Por la compacidad de $\operatorname{fix}(H')$, para $\{V_{(x,t)} \mid (x,t) \in \operatorname{fix}(H')\}$ existe una subcubierta finita $\{V_{(x_i,t_i)}\}$; y por el lema de Urysohn, existe una aplicación

$$\lambda : \overline{V} \to I$$

$$\lambda(\operatorname{fix}(H')) = 1$$

$$\lambda(\overline{V} \setminus \bigcup V_{(x_i,t_i)}) = 0$$

Sean $\varphi H'|_V = (\Psi_1, \Psi_2)$ y H'' la extensión de $\varphi^{-1}(\Psi_1, \Psi_2 + \chi)$ a $(\partial M \cup x_0) \times \perp \cup M \times \partial\perp$ donde

$$H''|_{(\partial M \cup x_0) \times \perp \setminus V \cup M \times \partial \perp} = H$$

Entonces existe $\theta : H'' \simeq H$ rel $M \times \partial\perp$ porque $\Psi_2 \simeq \Psi_2 + \chi$ y $H''|_{\mathring{M} \times \partial\perp} = H$. Sin pérdida de generalidad supóngase que $H''(x_0, t) \neq x_0$ para toda $t \in \perp$. Si $H''(x,t) = x$ y $x \in \partial M$ entonces

$$(\psi_1(x), \Psi_2(x) + \chi(x)) = (x, 0),$$

$H'(x,t) = x$ y $\chi(x) = 0$, en contradicción con la definición de χ. Por tanto $\mathrm{fix}(H''|_{(\partial M \cup x_0) \times \perp}) = \phi$.

Como $\sigma_0(x,t) \neq x$ si $x \in \partial M \cup x_0$, existe una vecindad W de $\partial M \cup x_0$ y $\sigma_0(x,t) \neq x$ si $x \in W$. Nuevamente por el lema de Urysohn existe una aplicación $\lambda : M \to \perp$ con $\lambda(\partial M \cup x_0) = 0$ y $\lambda(M \setminus W) = 1$.

Sean

$$\nu : M \times I \to M$$

$$\nu(x,t) = \sigma_0(x, \lambda(x)t),$$

$$h : M \to M$$

$$h(x) = \nu(x,1).$$

Por definición $\nu : f \simeq h \text{ rel } \partial M \cup x_0$, y $\mathrm{fix}(g) = \mathrm{fix}(h)$ porque $h(x) = x$ si y solo si $x \in M \setminus W$ y

$$g(x) = \sigma_0(x, 1)$$
$$= \sigma_0(x, \lambda(x)) = h(x) = x.$$

4.9 Teorema. Sea M una variedad de dimensión n. Para cada $x_0 \in M$ existe una vecindad V de x_0 homeomorfa a $D(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1\}$ y una aplicación $\theta : \mathring{V} \times V \to V$ tal que para cada $x \in \mathring{V}$

$$\theta_x : V \to V$$

$$\theta_x(y) = \theta(x,y)$$

es homeomorfismo, $\partial V \subset \mathrm{fix}(\theta_x)$ y $\theta_x(x) = x_0$.

Demostración. Claramente es suficiente demostrar la existencia de θ si $V = D(0,1)$ y $x_0 = 0$.

Sea

$$h : B(0,1) \times D(0,1) \to D(0,1)$$

$$h(x,y) = (1 - |y|)x + y.$$

Entonces $h_x : D(0,1) \to D(0,1)$ es homeomorfismo, $\partial D(0,1) \subset \mathrm{fix}(h_x)$ y $h_x(0) = x$, para toda $x \in B(0,1)$.

Se define θ por $\theta(x,y) = h_x^{-1}(y)$. Solo resta probar la continuidad de θ porque las otras propiedades claramente las satisface. Sea

$$H : B(0,1) \times D(0,1) \to B(0,1) \times D(0,1)$$

$$H(x,y) = (x, h(x,y)).$$

Como H es una identificación y φH es continua, θ es continua.

[illegible] Corolario. Sean M una variedad, $N \subset M$ y $x, y \in M \setminus N$. Si $M \setminus N$ es conexo entonces existe un homeomorfismo $h: M \to M$ con $h|_N = 1$ y $h(x) = y$.

Demostración. Se define la relación $\sim$ en $M \setminus N$ por: $u \sim v$ si y solo si u y v satisfacen la conclusión del corolario. Como $\sim$ es de equivalencia, si sus clases son abiertos y al menos dos entonces $M \setminus N$ no es conexo. Por tanto es suficiente probar que las clases de $\sim$ son abiertos. Así, es suficiente demostrar la existencia de un homeomorfismo $h: R^n \to R^n$ con $h|_{R^n \setminus B(0,1)} = 1$ y $h(0) \in B(0,1)$ un punto dado. Pero, por 4.9, h existe.

4.11 Corolario. Sean M una variedad conexa de dimensión ≥ 2 y $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_m$ puntos diferentes de M. Entonces existe un homeomorfismo $h: M \to M$ con $h(x_i) = y_i$ para $i = 1, \ldots, m$.

5 Fibraciones.

Igual que la teoría de homología, la teoría de homotopía es un instrumento de la teoría de punto fijo. Los siguientes teoremas, junto con la existencia de collares y el teorema de extensión de homotopía son los requisitos homotópicos de éstas lecciones.

5.1 Definición. Sean $p: \tilde{X} \to X$ una aplicación y $U \subset X$ un subconjunto abierto. U es cubierto parejamente por p si $p^{-1}(U)$ es unión ajena de subconjuntos abiertos en $\tilde{X}$ y la restricción de p a cada uno es un homeomorfismo, sobre U. p es aplicación cubriente si para cada $x \in X$ existe una vecindad de x cubierta parejamente por p. Si p es aplicación cubriente a $\tilde{X}$ se le llama espacio cubriente de X, 5.4 Definición. Sean E, F, G espacios topológicos y $p: E \to F$ continua; $\{U\}$ una cubierta abierta de F; y $\{h_U : U \times G \to p^{-1}(U) \mid h_U$ es homeomorfismo$\}$. $\xi = (E, F, G, p)$ es un haz fibrado respecto $\{(U, h_U)\}$ si la composición

$$U \times G \xrightarrow{h_U} p^{-1}(U) \xrightarrow{p} U,$$

para todo U, es la proyección.

5.5 Teorema. Una aplicación cubriente es una fibración. Si (E, F, G, p) es un haz fibrado y F es paracompacto entonces p es una fibración. [S, pg 67 y 96]

5.6 Teorema. Sean $p: E \to F$ fibración, $f_0 \in F$ y $e_0 \in p^{-1}(f_0)$ e $i : p^{-1}(f_0) \hookrightarrow E$. Entonces existe

$$\partial : \pi_n(F, f_0) \to \pi_{n-1}(p^{-1}(f_0), e_0)$$

tal que

$$\cdots \to \pi_n(p^{-1}(f_0), e_0) \to \pi_n(E, e_0) \to \pi_n(F, f_0) \to \pi_{n-1}(p^{-1}(f_0), e_0) \to \cdots$$

6 ϵ-aproximación.

A través de las ϵ-aproximaciones de una aplicación compacta, la cuestión de la existencia de un índice en los espacios lineales normados se reduce a los espacios euclidianos, donde la respuesta es afirmativa.

Sea $f: X \to L$ continua, L espacio lineal normado y X espacio topológico. Por definición, f es de dimensión finita si $< f(X) >$, el espacio generado por $f(X)$, es de dimensión finita. A $< f(X) >$ se le llama espacio relativo a f.

Por definición, una aplicación $f: X \to Y$, X y Y espacios topológicos, es compacta si $\overline{f(X)}$ es compacto.

6.1 Lema. Sean (X,d) y (Y,e) espacios métricos, $U\subset X$ abierto, $K\subset U$ compacto y $f:U\to Y$ continua. Dada $\eta>0$ existe ϵ, llamada ϵ de la continuidad uniforme de f en K respecto η, con $e(f(x),f(y))<\eta$ si $x,y\in B(K,\epsilon)\subset U$ y $d(x,y)<\epsilon$.

Demostración. Si para cada $n\in\mathbb{N}$ con $B(K,n^{-1})\subset U$ existen $x_n', y_n'\in B(K,n^{-1})$ con $d(x_n',y_n')<n^{-1}$ y $e(f(x_n'),f(y_n'))\geq\eta$ entonces existen subsucesiones convergentes x_n, y_n, y de $\lim x_n=\lim y_n\in K$

$$0=\lim e(f(x_n),f(y_n))\geq\eta.$$

Por tanto existe ϵ

6.2 lema Sean X espacio métrico, L espacio lineal normado y $f,g:X\to L$ continuas. Si f y g son compactas entonces

$$H:X\times I\to L$$

$$H(x\,t)=t\,f(x)+(1-t)\,g(x)$$

es compacta.

Demostración. Sea y_n sucesión en $\overline{H(V\times I)}$. Entonces existe una sucesión z_n en $H(V\times I)$ con $d(y_n, z_n) < 2^{-n}$, donde d es la métrica en L. Supóngase que $H(x_n', t_n') = z_n$. Entonces existe (x_n, t_n) subsucesión de (x_n', t_n') tal que $f(x_n)$, $g(x_n)$ y t_n son convergentes, por ejemplo a u, v y s, resp. Luego existe una subsucesión de y_n convergente a $su+(1-s)v = \lim H(x_n, t_n)$ y $\overline{H(V\times I)}$ es compacto.

6.3 lema Sean (X,d) espacio métrico, $W\subset V\subset U\subset X$ subconjuntos abiertos, $f: U\to X$ continua con $\mathrm{fix}(f)\subset W$ y $\overline{V}\subset U$. Si $f|_V$ es compacta entonces existe $\delta=\delta(f,V,W)$ y $d(f(x),x)>\delta$ si $x\in \overline{V}\setminus W$.

Demostración. Si para cada $n\in\mathbb{N}$ existe $x_n'\in\overline{V}\setminus W$ con $d(f(x_n'), x_n') < n^{-1}$ entonces existe una sub sucesión x_n con $f(x_n)$ convergente en $\overline{f(V)}$, y de $y = \lim f(x_n) = \lim x_n \in \overline{V} \setminus W$.

$$d(f(y), y) = \lim d(f(x_n), x_n) = 0$$

ó $f(y) = y$. Por tanto δ existe.

6.4 Corolario. Mismas hipótesis y notación que en 6.3, y sea $H: V \times I \to X$ compacta. Si $d(f(x), H(x,t)) < \delta$ para toda $(x,t) \in V \times I$, entonces $\text{fix}(H) \subset W$ es compacto.

Demostración. $\text{fix}(H) \subset W$ porque $d(f(x), x) > \delta$ si $x \in \overline{V} \setminus W$. Si $x \in \overline{\text{fix}(H)} \subset \overline{V}$ entonces $f(x) = x$ y x $\text{fix}(H)$. Por tanto $\text{fix}(H)$ es cerrado. Puesto que $\overline{f(V)}$ es compacto $\text{fix}(H) \subset \overline{f(V)}$ es compacto.

6.5 Proposición. Sean L espacio lineal normado, $W \subset V \subset U \subset L$ y $X \subset L$ subconjuntos abiertos, y $f: U \to L$ con $\text{fix}(f) \subset V$. Si $\overline{f(V)} \subset X$ es compacto

$$f_\epsilon(x) = \frac{\sum \lambda_i(x)\, y_i}{\sum \lambda_i(x)}$$

Claramente f_ϵ es de dimensión finita, compacta y $d(f_\epsilon(x), f(x)) < \epsilon$. Por 6.2 y 6.4, H es compacta y $\text{fix}(H) \subset W \times I$ es compacto.

6.6 Generalización de 6.3 y 6.5. Sean L espacio lineal normado; $U', X \subset L$ y $W \subset V \subset U \subset U' \times I$ subconjuntos abiertos con $\bar{V} \subset U$; $H : U \to X$ continua con $\text{fix}(H) \subseteq W$. Si $H(\bar{V}) \subset X$ es compacto entonces existen $\delta = \delta(H, V, W)$ y ϵ_0 tal que $d(H(x,t), x) > \delta$ si $(x,t) \in \bar{V} \setminus W$, y para cada $\epsilon < \epsilon_0$ existen aplicaciones $H_\epsilon : V \to X$, llamadas ϵ-aproximaciones de $H|_V$, compactas de dimensión finita con $d(H_\epsilon(y), H(y)) < \epsilon$, donde d es la métrica en L. Si además $\epsilon < \delta$ entonces

$$S : \ \times I \to X$$

$$G(y,t) = tH_{\epsilon}(y) + (1-t)H(y)$$

es compacta y $fix(G) \subset W \times I$ es compacto.

Indice de punto fijo

El contenido de la unidad es la demostración de la existencia y unicidad de α, un índice de punto fijo. Comienza con la definición de índice de punto fijo ó índice. Este es el concepto básico de la teoría de punto fijo; la formalización de las consideraciones hechas en los preliminares. Sólo su existencia implica una generalización del teorema de Lefschetz, uno de los pilares de la teoría de punto fijo de Nielsen. Se le define, entre otras (v. I.C(a)III, [J2, pg II]), como una medida algebraica del conjunto de puntos fijos de la aplicación en que se evalúa.

Entre la segunda y cuarta secciones resp. se

$$B\mathcal{H} \subset \{H : U \subset V \times I \to X \mid V \subset X, U \text{ son abier-} \\ \text{tos y } H_t \in B_1, \text{ si } t \in I\},$$

se dice que la función $\beta : B_1 \to \mathbb{Z}$ es un índice de punto fijo ó índice en B, si para cada $f : U \to X$ en B_1, $H \in B\mathcal{H}$, $g : W \to Y$ y $h : V \to Z$ en B_2 y B_3 resp., satisface:

0.2 Si $fix(f) \subset U' \subset U$ y U' es abierto entonces $f|_{U'} \in B_1$ y $\beta(f) = \beta(f|_{U'})$

0.3 Si $fix(f) \subset U_1 \cup U_2 \subset U$ y U_1, U_2 son abiertos ajenos entonces $f|_{U_1}, f|_{U_2} \in B_1$ y $\beta(f) = \beta(f|_{U_1}) + \beta(f|_{U_2})$

0.4 Si $f(U) \subset K \subset U$ y K es compacto entonces $f|_K$ es de Lefschetz y $\beta(f) = \Lambda(f|_K)$

0.5 $\beta(H_0) = \beta(H_t)$, para toda $t \in I$

0.6 Si $hg : g^{-1}(V) \to Z$ pertenece a $\mathcal{B}_1$ entonces $gh : h^{-1}(W) \to Y$ pertenece a $\mathcal{B}_1$ y $\beta(gh) = \beta(hg)$.

A las propiedades 0.2 - 0.6 se les llama resp. propiedad de escisión, aditividad, normalidad, homotopía y conmutatividad.

0.7 Ejemplos. Considérese la notación de la definición anterior y sup que β es un índice en $\mathcal{B}$.

(a) Si $\mathrm{fix}(f) = \emptyset$ entonces $\beta(f) = \beta(f|_\emptyset)$, por escisión. Por aditividad $\beta(f|_\emptyset) = 2\,\beta(f|_\emptyset)$ y $\beta(f|_\emptyset) = 0$. Por tanto $\beta(f) = 0$ si $\mathrm{fix}(f) = \emptyset$.

Equivalentemente, si $\beta(f) \neq 0$ entonces $\mathrm{fix}(f) \neq \emptyset$.

Más aún, si $\beta(f) \neq 0$ entonces

$$1 \leq \min\{\#\,\mathrm{fix}(g) \mid \exists H : f \simeq g,\ H \in \mathcal{B}\mathcal{H}\}.$$

1 Existencia del índice e.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, se define inductivamente un generador μ_n de $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus 0)$. Sea μ_1 un generador de $H_1(\mathbb{R}^1, \mathbb{R} \setminus 0)$. Suponiendo a μ_{n-1} definido, si θ es el isomorfismo de Künneth

$$H_{n-1}(\mathbb{R}^{n-1}, \mathbb{R}^{n-1} \setminus 0) \otimes H_1(\mathbb{R}, \mathbb{R} \setminus 0) \to H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus 0) \quad , [S, pg 235]$$

se define μ_n por $\theta(\mu_{n-1} \otimes \mu_1) = \mu_n$.

1.1 Así, para cada $n, m \in \mathbb{N}$, si ν es el isomorfismo de Künneth

$$H_m(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \setminus 0) \otimes H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus 0) \to H_{m+n}(\mathbb{R}^{m+n}, \mathbb{R}^{m+n} \setminus 0)$$

entonces

1.2 $$\nu(\mu_m \otimes \mu_n) = \mu_{m+n}.$$

La demostración es por inducción. Si $n = 1$

1.4 Definición. Sean $U\subset\mathbb{R}^n$ abierto y $f:U\to\mathbb{R}^n$ aplicación con $\mathrm{fix}(f)$ compacto. Entonces existe ϵ cumpliendo $\mathrm{fix}(f)\subset B(0,\epsilon)$. Sean

$$i:(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\setminus B(0,\epsilon))\hookrightarrow(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\setminus\mathrm{fix}(f))$$

$$j:(U,U\setminus\mathrm{fix}(f))\hookrightarrow(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\setminus\mathrm{fix}(f))$$

$$d:(U,U\setminus\mathrm{fix}(f))\to(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\setminus 0)$$

donde $d(x)=x-f(x)$. Por escisión j_* es isomorfism. Se define el índice $e_\epsilon(f)$ de f por

$$d_*j_*^{-1}i_*\nu_n(\epsilon)=e_\epsilon(f)\,\mu_n.$$

1.5 $e_\epsilon(f)$ no depende de ϵ.

Supóngase que $\delta\geq\epsilon$ y sean

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & (\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\setminus\mathrm{fix}(f)) \\ (\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\setminus B(0,\delta)) \arrow[ur, hook, "i'"] \arrow[dr, hook, "k"'] & \\ & (\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\setminus B(0,\epsilon)) \end{tikzcd}$$

1.6 Ya que el índice de f no depende de ϵ en vez de $e_\epsilon(f)$ se escribe $e(f)$.

1.7 El índice de f no depende del abierto U y el compacto $\mathrm{fix}(f)$ en el siguiente sentido.

Si $\mathrm{fix}(f) \subset K \subset V \subset U$, $K \subset B(0,\epsilon)$ es compacto y V abierto, $d' = d|_V$ e i', j', h, k son las inclusiones que hacen conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & H_n(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\setminus \mathrm{fix}(f)) \arrow[r, "j_*^{-1}"] & H_n(U,U\setminus \mathrm{fix}(f)) \arrow[dr, "d_*"] & \\
H_n(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\setminus B(0,\epsilon)) \arrow[ur, "i_*"] \arrow[dr, "i'_*"'] & & & H_n(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\setminus 0) \\
 & H_n(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\setminus K) \arrow[uu, "h_*"] \arrow[r, "j'^{-1}_*"'] & H_n(V,V\setminus K) \arrow[uu, "k_*"'] \arrow[ur, "d'_*"'] &
\end{tikzcd}$$

entonces $d'_* j'^{-1}_* i'_* \nu_n(\epsilon) = e(f)\mu_n$.

1.8 Ejemplos. (a) Cada $x \in \mathbb{R}^n$ se define

$$x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad x(y) = x.$$

Si $U \subset R^n$ es abierto y $x_0 \in R^n$ entonces $e(x_0) = 1$ ó 0 según $x_0 \in U$ ó $x_0 \notin U$.

(b) Si $U \subset \mathbb{R}^n$ es abierto y $H : U \times I \to \mathbb{R}^n$ continua con

$$\operatorname{fix}(H) = \{(x,t) \mid H(x,t) = x\}$$

compacto entonces $e(H_0) = e(H_t)$, para toda $t \in I$.

(c) Si $U \subset R^n$, $V \subset R^m$ son abiertos y

$$f : U \to \mathbb{R}^n$$

$$g : V \to \mathbb{R}^m$$

continuas con $\operatorname{fix}(f)$, $\operatorname{fix}(g)$ compactos entonces $\operatorname{fix}(f \times g) = F$ es compacto y $e(f \times g) = e(f)\,e(g)$.

Demostración. (a) Si $x_0 \notin U$ entonces $\operatorname{fix}(x_0) = \phi$; $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \operatorname{fix}(x_0)) = 0$ y $e(x_0) = 0$.

Supóngase que $x_0 \in U$. Si f, g, h y d son restricciones de la traslación $T(x) = x - x_0$, θ y ϵ

satisfacen

$$x_0 \cup B(0,\theta) \subset B(0,\epsilon) \cap T(B(0,\epsilon))$$

e j' es la inclusión entonces el diagrama

$$\begin{tikzcd}
H_n(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\setminus B(0,\epsilon)) \arrow[r, "i_*"'] \arrow[d, "f_*"'] & H_n(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\setminus x_0) \arrow[r, "j_*^{-1}"'] \arrow[d, "g_*"'] & H_n(U,U\setminus x_0) \arrow[r, "d_*"'] \arrow[d, "h_*"'] & H_n(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\setminus 0) \\
H_n(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\setminus B(0,\theta)) \arrow[r, "i_{\theta *}"'] & H_n(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\setminus 0) \arrow[r, "j'^{-1}_*"'] & H_n(h(U),h(U)\setminus 0) \arrow[ur, "j'_*"'] &
\end{tikzcd}$$

conmutativo y

$$d_* j_*^{-1} i_* \nu_n(\epsilon) = f_* i_{\theta *} \nu_n(\epsilon).$$

Pero f_* es igual al homomorfismo inducido por la inclusión

$$(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\setminus B(0,\epsilon)) \hookrightarrow (\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\setminus B(0,\theta)),$$

y entonces $i_{\theta *} f_* = i_{\epsilon *}$.

Por tanto

$$d_* j_*^{-1} i_* \nu_n(\epsilon) = i_{\epsilon *} \nu_n(\epsilon) = \mu_n$$

y $\rho(x_0) = 1$.

(b) Sea $p : U\times I \to U$ la proyección. Por la compacidad de $p(\mathrm{fix}(H)) = F$ existe ϵ cumpliendo $F \subset B(0,\epsilon)$. Sean

$$d_t : (U, U\setminus F) \to (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\setminus 0)$$

$$d_t(x) = x - H_t(x)$$

$$i : (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\setminus B(0,\epsilon)) \hookrightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\setminus F)$$

$$j : (U, U\setminus F) \hookrightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\setminus F).$$

Entonces $d_{0*} = d_{t*}$ para toda $t\in I$, y por 1.7

$$\begin{aligned} e(H_0)\mu_n &= d_{0*} j_*^{-1} i_* \nu_n(\epsilon) \\ &= d_{t*} j_*^{-1} i_* \nu_n(\epsilon) = e(H_t)\mu_n \end{aligned}$$

y $e(H_0) = e(H_t)$, para toda $t \in I$.

(c) Considérense los diagramas

$$\begin{tikzcd}
H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\setminus B) \arrow[r, "h_*"] & H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\setminus 0) \\
H_p(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^p\setminus B(0,\epsilon)) \otimes H_q(\mathbb{R}^q, \mathbb{R}^q\setminus B(0,\epsilon)) \arrow[u, "\alpha_1"] \arrow[r, "i_{\epsilon*}\otimes i_{\epsilon*}"] & H_p(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^p\setminus 0) \otimes H_q(\mathbb{R}^q, \mathbb{R}^q\setminus 0) \arrow[u, "\alpha_4"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\setminus B) \arrow[r, "h_*"] \arrow[d, "i'_*"'] & H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\setminus 0) \\
H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\setminus F) \arrow[r, "\bar{i}_*"'] & H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n\setminus B(0,\epsilon)) \arrow[ul, "k_*"'] \arrow[u, "i_{0*}"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
H_n(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\setminus B) \arrow[r, "i_*"] & H_n(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\setminus F) \arrow[r, "j_*^{-1}"] & H_n(W,W\setminus F) \arrow[r, "d_*"] & H_n(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\setminus 0) \\
\begin{array}{c} H_p(\mathbb{R}^p,\mathbb{R}^p\setminus B(0,\epsilon)) \\ \otimes \\ H_q(\mathbb{R}^q,\mathbb{R}^q\setminus B(0,\epsilon)) \end{array} \arrow[u, "\alpha_1"] \arrow[r, "i_{f*}\otimes i_{g*}"'] & \begin{array}{c} H_p(\mathbb{R}^p,\mathbb{R}^p\setminus fix(f)) \\ \otimes \\ H_q(\mathbb{R}^q,\mathbb{R}^q\setminus fix(g)) \end{array} \arrow[u, "\alpha_2"] \arrow[r, "j_{f*}^{-1}\otimes j_{g*}^{-1}"'] & \begin{array}{c} H_p(U,U\setminus fix(f)) \\ \otimes \\ H_q(V,V\setminus fix(g)) \end{array} \arrow[u, "\alpha_3"] \arrow[r, "d_{f*}\otimes d_{g*}"'] & \begin{array}{c} H_p(\mathbb{R}^p,\mathbb{R}^p\setminus 0) \\ \otimes \\ H_q(\mathbb{R}^q,\mathbb{R}^q\setminus 0) \end{array} \arrow[u, "\alpha_4"]
\end{tikzcd}$$

donde: $W = U\times V$, $F\subset B\subset B(0,\theta)\subset \mathbb{R}^n=\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q$ y B es el producto de las bolas de $\mathbb{R}^p$ y $\mathbb{R}^q$ de radio ϵ y centro cero, que contienen a $fix(f)$ y $fix(g)$ resp.; todas las j e i y h,k son inclusiones; $d = d_f\times d_g$ y

$$d_f(x) = x - f(x)$$

$$d_g(x) = x - g(x);$$

las α_1,α_4 son los isomorfismos de Künneth, y α_2,α_3 son restricciones de los isomorfismos de Künneth corresp.

El segundo diagrama es conmutativo porque el correspondiente diagrama de espacios y aplicaciones lo es. La conmutatividad del primero y tercero se sigue de la naturalidad de los isomorfismos de Künneth.

Si $\nu = h_*^{-1}\mu_n$, por 1.2 y la conmutatividad de los diagramas,

$$\nu = \alpha_1^{-1}(\nu_p(\epsilon)\otimes\nu_q(\epsilon))$$

$$\begin{aligned} i'_*\nu &= i'_* h_*^{-1}\mu_n \\ &= i_* i_{\theta *}^{-1}\mu_n = i_*\nu_n(\theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_* j_*^{-1} i_*\nu_n(\theta) = d_* j_*^{-1} i'_*\nu &= \alpha_4(d_{f*}\otimes d_{g*})(j_{f*}^{-1}\otimes j_{g*}^{-1})(i_{f*}\otimes i_{g*})\alpha_1\nu \\ &= \alpha_4(d_{f*}j_{f*}^{-1}i_{f*}\nu_p(\epsilon)\otimes d_{g*}j_{g*}^{-1}i'_{g*}\nu_q(\epsilon)) \\ &= \alpha_4(e(f)\mu_p\otimes e(g)\mu_q) \\ &= e(f)e(g)\mu_n \end{aligned}$$

Luego, por definición, $e(f\times g) = e(f)e(g)$.

1.9 **Teorema.** Sean (R_1, R_2, R_3) y $R\mathcal{H}$ definidos por

$$R_1 = \{ f : U \to \mathbb{R}^n \mid U \subset \mathbb{R}^n \text{ es abierto, } f \text{ continua y } \operatorname{fix}(f) \text{ compacto} \}$$

$$R_2 = R_3 = \{ f : V \to \mathbb{R}^n \mid V \subset \mathbb{R}^m \text{ es abierto y } f \text{ continua} \}$$

$$R\mathcal{H} = \{ H : U \times I \supset V \to \mathbb{R}^n \mid U \subset \mathbb{R}^n \text{ es abierto, } H \text{ es continua y } \operatorname{fix}(H) \text{ compacto} \}$$

La función e, definida en 1.4, es un índice en R.

Demostración. Sean $f : U \to \mathbb{R}^n$ en R_1, $H : U \times I \supset V \to \mathbb{R}^n$ en $R\mathcal{H}$, $g : W \to \mathbb{R}^n$ y $h : \mathbb{R}^n \supset Z \to \mathbb{R}^m$ en R_2.

1.10 Escisión. En 1.7 se demuestra que e satisface ésta propiedad.

1.11 Aditividad. Supóngase $\operatorname{fix}(f) \subset U_1 \cup U_2 \subset U$ y U_1, U_2 abiertos ajenos. Por escisión, $f|_{U_1 \cup U_2}$ pertenece a R_1 y $e(f) = e(f|_{U_1 \cup U_2})$. Como $\operatorname{fix}(f) \cap U_K$ es

Luego $e(f) = e(f|_{U_1}) + e(f|_{U_2})$.

1.12 Normalidad. Sean $S^n = \mathbb{R}^n \cup \infty$,

$$\psi : \mathbb{R}^n \hookrightarrow S^n$$

$$\varphi : \mathbb{R}^n \hookrightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B(0,\epsilon)), \quad fix(f) \subset B(0,\epsilon)$$

$$a : S^n \hookrightarrow (S^n, S^n \setminus fix(f))$$

$$b : (U, U \setminus fix(f)) \hookrightarrow (S^n, S^n \setminus fix(f))$$

$$d : (U, U \setminus fix(f)) \to (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus 0)$$

$$d(x) = x - f(x)$$

$\nu = \psi_* \varphi_*^{-1} \nu_n(\epsilon)$ e $I_f \mu_n = d_* b_*^{-1} a_* \nu$. Por escisión b_* es isomorfismo.

Si $f(U) \subset K \subset U$ y K es compacto entonces $f \in R$, $(f|_K)_*$ es de rango finito e $I_f = \chi(f|_K)_*$, [D, pg 209].

Por la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd}
H_n(S^n) \arrow[r, "a_*"] & H_n(S^n, S^n \setminus fix(f)) \arrow[r, "b_*^{-1}"] & H_n(U, U \setminus fix(f)) \arrow[r, "d_*"] & H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus 0) \\
H_n(\mathbb{R}^n) \arrow[u, "\psi_*"] \arrow[r, "\varphi_*"'] & H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus B(0,\epsilon)) \arrow[u, "\alpha_*"'] \arrow[r, "i_*"'] & H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus fix(f)) \arrow[u, "j_*^{-1}"'] &
\end{tikzcd}$$

donde α es inclusión, $I_f = e(f)$; y por (d) 2.2 I $f|_K$ es de Lefschetz y $\Lambda(f|_K) = \mathcal{L}(f|_K)_*$.

Así $e(f) = \Lambda(f|_K)$.

1.13 Homotopía. Suponiendo que para cada $r \in I$ existe ϵ y $e(H_r) = e(H_s)$ si $|s-r| < \epsilon$, de la compacidad de I se sigue $e(H_0) = e(H_t)$ para toda $t \in I$.

Demostración de la suposición. Para cada $(x,t) \in fix(H)$ existe $V = V_x \times V_t \subset U$ vecindad de (x,t) donde r no pertenece a V_t si $r \neq t$. Entonces existe $\{V_1, \ldots, V_n\}$ subcubierta de $fix(H)$. Supóngase que $r \in V_{t_i}$ solo para $i \leq k$, y sea $B(r,\epsilon) \subset I$ contenida o disjena a V_{t_i} según $i \leq k$ ó $k < i$. Luego, si $|s-r| < \epsilon$ entonces $fix(H_s) \subset \bigcup_{i \leq k} V_{x_i}$ y por escisión y (b) 1.8 $e(H_r) = e(H_s)$.

1.14 Conmutatividad. Supóngase que $hg : g^{-1}(Z) \to \mathbb{R}^m$ pertenece a R_1. Entonces $gh : h^{-1}(W) \to \mathbb{R}^n$ también pertenece a R_1 porque $\operatorname{fix}(gh) = g(\operatorname{fix}(hg))$ es compacto.

Las homotopías

$$a_t : g^{-1}(Z) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$$

$$b_t, c_t : g^{-1}(Z) \times h^{-1}(W) \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$$

$$d_t : \mathbb{R}^m \times h^{-1}(W) \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$$

definidas por

$$a_t(x,y) = (hg(x),\ tg(x) + (1-t)y_0)$$

$$b_t(x,y) = ((1-t)hg(x) + th(y),\ g(x))$$

$$c_t(x,y) = (h(y),\ tgh(y) + (1-t)g(x))$$

$$d_t(x,y) = ((1-t)h(y) + tx_0,\ gh(y))$$

pertenecen a R_1 porque $\operatorname{fix}(b) = \operatorname{fix}(c) = \operatorname{fix}(hg) \times \operatorname{fix}(gh)$,

$$\operatorname{fix}(a) = \operatorname{fix}(hg) \times h_1(\operatorname{fix}(hg) \times I),$$

$$\operatorname{fix}(d) = h_2(\operatorname{fix}(gh) \times I) \times \operatorname{fix}(gh);$$

donde

$$h_1(x,t) = t\,g(x) + (1-t)\,y_0 \,,$$

$$h_2(y,t) = (1-t)\,h(y) + t\,x_0 \,,$$

$(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$; son compactos.

Entonces, por la homotopía y 1.8

$$\begin{aligned} e(a_0) &= e(a_1) \\ &= e(b_0) = e(b_1) \\ &= e(c_0) = e(c_1) \\ &= e(d_0) = e(d_1) \end{aligned}$$

y $\quad e(hg)\,e(y_0) = e(a_0)$

$$= e(d_1) = e(x_0)\,e(gh).$$

Como $e(y_0) = e(x_0)$, $e(hg) = e(gh)$.

1.15 *Corolario. Propiedad de Restricción.* Sean m -
$p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ la proyección, $q : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ el encaje canóni ,
$f : U \to \mathbb{R}^n$ en R_1. Si $f = (f_1, \ldots, f_m, 0, \ldots, 0)$ entonces
$pfq : q^{-1}(U) \to \mathbb{R}^m$ pertenece a R_1 y $e(f) = e(pfq)$.

2 Existencia del índice ν.

Se definen (N_1, N_2, N_3) y $N\mathcal{H}$ por

$$N_1, N_2 \subset N_3 = \{ f : E \supset U \to F \mid E \text{ y } F \text{ son espacios lineales normados, } U \text{ es abierto y } f \text{ continua} \}.$$

$$N_2 = \{ f \mid f \text{ es compacta} \}$$

$$N_1 = \{ f : E \supset U \to E \mid \operatorname{fix}(f) \text{ es compacto y existe } V \text{ vecindad de } \operatorname{fix}(f) \text{ con } f|_V \text{ compacta} \}$$

$$N\mathcal{H} = \{ H : U \times I \supset V \to E \mid E \text{ es espacio lineal normado, } U \subset E \text{ y } V \text{ son abiertos, } H \text{ es continua y existe } W \text{ vecindad de } \operatorname{fix}(H) \text{ con } H|_W \text{ compacta} \}.$$

Para extender ϵ a N , para cada $f \in N_1$ y cada

Demostración. Sean $\epsilon' < \delta(f,V,W)/3$ ... 3, $f_{\epsilon'}$ e... aproxima-

ción de $f|_V$ con E' su espacio rel... ...lativo, ...

$$H : V \times I \to F$$

$$H(x,t) = t f_\epsilon(x) + (1-t) f_{\epsilon'}(x)$$

donde $F = \langle E \cup E' \rangle$.

Por 6.4 I, $H|_{W \cap F} \in R\mathcal{H}$ y por las ... propiedades de restricción y homotopía

$$\nu(f,V,W,\epsilon') = \varrho(f_{\epsilon'}|_{W \cap E'}) = \varrho(f_{\epsilon'} ... F)$$

$$= \varrho(f_\epsilon|_{W \cap F}) = \varrho(f_\epsilon ... E) = \nu(f,V,W,\epsilon).$$

2.5 $\nu(f,V,W,\epsilon)$ no depende de W

Demostración. Dada W' vecindad ... $(f, ...$

$\overline{W'} \subset V$, eligiendo $\epsilon < \delta(f,V,W \cap W')$, ...

por escisión

$$\nu(f,V,W,\epsilon) = \varrho(f_\epsilon|_{W \cap E}) = ...$$

$$= \varrho(f_\epsilon|_{W \cap E}) ...)$$

2.4 $\nu(f,V,W,\epsilon)$ no depende de V.

Demostración. Sea V' vecindad de $fix(f)$ con $\overline{V'}\subset U$ y $f|_{V'}$ compacta. Entonces $f|_{V\cup V'}$ es compacta. Sean W vecindad de $fix(f)$ con $\overline{W}\subset V\cap V'$; f_ϵ, f'_ϵ ϵ-aproximaciones de $f|_V, f|_{V'}$ con E, E' sus espacios relativos y $\epsilon < \delta(f, V\cup V', W)$; y

$$H:(V\cap V')\times I \longrightarrow F$$

$$H(x,t) = tf_\epsilon(x) + (1-t)f'_\epsilon(x)$$

donde $F = \langle E\cup E'\rangle$.

Por 6.4 I, $H|_{(V\cap V'\cap F)\times I}\in R\mathcal{H}$ y por restricción y homotopía

$$\nu(f,V,W,\epsilon) = e(f_\epsilon|_{W\cap E}) = e(f_\epsilon|_{W\cap F})$$
$$= e(f'_\epsilon|_{W\cap F}) = e(f'_\epsilon|_{W\cap E'}) = \nu(f,V',W,\epsilon)$$

En virtud de 2.2-2.4, en vez de $\nu(f,V,W,\epsilon)$ se escribe $\nu(f)$. Algunas veces, para indicar que $\nu(f)$

se calcula mediante V, W se escribe $\nu(f, V, W)$.

2.5 Ejemplos. (a) Considérese la notación de 2.1. Si $M \subset L$ es un espacio lineal de dimensión finita y $f(U) \subset M$ entonces $\nu(f) = \nu(f|_{U \cap M})$. En particular $\nu|_{R_1} = e$, es decir, ν es extensión de e.

(b) Si L es espacio lineal normado y $x_0 \in L$ entonces $x_0 \in N_1$ y $\nu(x_0) = 1$.

(c) Propiedad multiplicativa. Si $f_1, f_2 : U_1, U_2 \to L_1, L_2$ pertenecen a N_1 entonces $f_1 \times f_2 = f$ pertenece a N_1 y $\nu(f) = \nu(f_1)\nu(f_2)$.

(d) Lema de la propiedad conmutativa de ν. Si $f : L \supset U \to L'$ y $g : L' \supset U' \to L$ pertenecen a N_2 y $gf : f^{-1}(U') \to L$ pertenece a N_1 entonces $fg : g^{-1}(U) \to L'$ también pertenece a N_1 y $\nu(fg) = \nu(gf)$.

Demostración. (a) Por definición $\nu(f) = e(f_\epsilon|_{W\cap E})$. Como $E \subset M$, por la restricción $\nu(f) = e(f_\epsilon|_{W\cap M})$. Sean f'_ϵ ϵ-aproximación de $f|_{V\cap M}$ con espacio relativo E' y $\epsilon < \delta(f, V\cap M, W\cap M)/3$; y

$$H : (V\cap M)\times I \to M$$

$$H(x,t) = tf_\epsilon(x) + (1-t)f'_\epsilon(x).$$

Por 6.4 I, $H|_{(W\cap M)\times I} \in R\mathcal{K}$ y por restricción y homotopía

$$\nu(f|_{U\cap M}) = e(f'_\epsilon|_{W\cap E'}) = e(f'_\epsilon|_{W\cap M})$$
$$= e(f_\epsilon|_{W\cap M}) = \nu(f).$$

Si $f \in R_1$ entonces no solo $f \in N_1$ sino además existe una vecindad compacta de $\mathrm{fix}(f)$ contenida en U. Por ejemplo, si $\theta < d(\mathrm{fix}(f), L\setminus U)/2$ entonces

$$K = \{x \in L \mid d(x, \mathrm{fix}(f)) \leq \theta\} \subset U$$

es vecindad compacta de $\mathrm{fix}(f)$. Por otra parte, si $f \in R_1$ entonces, por restricción y homotopía,

$$\nu(f) = e(f_\epsilon|_W)$$
$$= e(f|_W) = e(f).$$

La existencia de K se basa en la compacidad local de los espacios euclidianos y si este resultado no es válido en los espacios lineales normados de dimensión infinita. Por esto la condición de la compacidad de $f \in N_1$ en una vecindad de $\mathrm{fix}(f)$ no es trivial.

(b) Cualquier aproximación de χ_0 es χ_0, y entonces, por 1.8 (a), $\nu(\chi_0) = 1$.

(c) Sean $W_1 \subset V_1 \subset U_1$ y $W_2 \subset V_2 \subset U_2$ vecindades de $\mathrm{fix}(f_1)$ y $\mathrm{fix}(f_2)$ cumpliendo

$$\overline{W}_k \subset V_k \quad y \quad \overline{V}_k \subset U_k \qquad k = 1, 2$$

donde $f_k|_{V_k}$ es compacta, $k = 1, 2$.

Entonces $f \in N_1$ porque $f|_{V_1 \times V_2}$ es compacta

Sean f_ϵ, $f_{1\epsilon}$ y $f_{2\epsilon}$ ϵ-aproximaciones de f, f_1 y f_2 con espacios relativos E, E_1 y E_2, y $\epsilon < \delta(f, V_1 \times V_2, W_1 \times W_2)/3$, $\delta(f_k, V_k, W_k)/3$; y

$$H : (V_1 \times V_2) \times I \to F$$

$$H(x,y,t) = t f_\epsilon(x,y) + (1-t) f_{1\epsilon} \times f_{2\epsilon}(x,y)$$

donde $F = \langle E \cup (E_1 \times E_2) \rangle$.

Por 6.4 I, $H|_{(W_1 \times W_2) \times I} \in R\mathcal{H}$ y por homotopía restricción y multiplicatividad

$$\begin{aligned} \nu(f) &= e(f_\epsilon|_{(W_1 \times W_2) \cap F}) = e(f_{1\epsilon} \times f_{2\epsilon}|_{(W_1 \times W_2) \cap F}) \\ &= e(f_{1\epsilon} \times f_{2\epsilon}|_{(W_1 \cap E_1) \times (W_2 \cap E_2)}) = e(f_{1\epsilon}|_{W_1 \cap E_1})\, e(f_{2\epsilon}|_{W_2 \cap E_2}) \\ &= \nu(f_1)\, \nu(f_2) \end{aligned}$$

(d) la demostración es análoga a la de 1.14. También lo es la de la invarianza homotópica correspondiente a la empleada ahí.

2.6 Teorema. ν es un índice de punto fijo en N.

En la demostración se emplea la notación de 2.1.

2.7 Escisión. Si $U' \subset U$ es vecindad de $\mathrm{fix}(f)$ entonces $f|_{U' \cap V}$ es compacta y, por tanto, $f|_{U'} \in N_1$. Eligiendo W con $\overline{W} \subset U' \cap V$, por definición

$$\nu(f, U' \cap V, W) = \nu(f|_{U'}, U' \cap V, W)$$

y $\nu(f) = \nu(f|_{U'})$.

2.8 Aditividad. Supóngase que $U_1 \cup U_2 \subset U$ es vecindad de $\mathrm{fix}(f)$ y U_1, U_2 son ajenos. Como $f|_{U_k \cap V}$ es compacta, $f|_{U_k} \in N_1$. Eligiendo $W = W_1 \cup W_2$ con $\overline{W}_k \subset U_k \cap V$, por aditividad

$$\begin{aligned} \nu(f) &= e(f_\epsilon|_{(W_1 \cup W_2) \cap E}) \\ &= e(f_\epsilon|_{W_1 \cap E}) + e(f_\epsilon|_{W_2 \cap E}). \end{aligned}$$

Sean f'_ϵ ϵ-aproximación de $f|_{U_1 \cap V}$ con E' espacio relativo, $\epsilon < \delta(f, U_1 \cap V, W_1)$, y

$$H : (U_1 \cap V) \times \mathrm{I} \longrightarrow F$$

$$H(x,t) = t f_\epsilon(x) + (1-t) f'_\epsilon(x)$$

donde $F = \langle E \cup E' \rangle$.

Por 6.4 I, $H|_{(W_1 \cap F)\times \mathrm{I}} \in R\mathcal{H}$ y por homotopía y restricción

$$\begin{aligned} e(f_\epsilon|_{W_1\cap E}) &= e(f_\epsilon|_{W_1 \cap F}) \\ &= e(f'_\epsilon|_{W_1\cap F}) \\ &= e(f'_\epsilon|_{W_1 \cap E'}) = \nu(f|_{U_1}). \end{aligned}$$

Análogamente $\nu(f|_{U_2}) = e(f_\epsilon|_{W_2\cap E})$, y por tanto $\nu(f) = \nu(f|_{U_1}) + \nu(f|_{U_2})$.

2.9 Normalidad. Supóngase que $f(U) \subset K \subset U$ y K es compacto. Eligiendo W como una vecindad de K, por 6.4 I, si

$$H : V \times \mathrm{I} \to L$$

$$H(x,t) = t f_\epsilon(x) + (1-t) f(x))$$

entonces $\overline{H(V\times \mathrm{I})} \subset W$. Como $\overline{f_\epsilon(V)}$ es compacto,

por normalidad, $f_\epsilon|_{W\cap E}$ es de Lefschetz y
$e(f_\epsilon|_{W\cap E}) = \Lambda(f_\epsilon|_{\overline{f_\epsilon(W)}})$.
De la conmutatividad de los diagramas

$$\begin{tikzcd} \overline{f_\epsilon(W)} \arrow[r, hook] & W \\ \overline{f_\epsilon(W)} \arrow[r, hook] \arrow[u, "f_\epsilon|_{\overline{f_\epsilon(W)}}"] & W \arrow[u, "f_\epsilon \simeq f|_W"'] \arrow[ul, "f_\epsilon|_W"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} K \arrow[r, hook] & W \\ K \arrow[r, hook] \arrow[u, "f|_K"] & W \arrow[u, "f|_W"'] \arrow[ul, "f|_W"'] \end{tikzcd}$$

se concluye que $f|_K$ y $f|_W$ son de Lefschetz y
$\Lambda(f_\epsilon|_{\overline{f_\epsilon(W)}}) = \Lambda(f|_W) = \Lambda(f|_K)$.
Luego $\nu(f) = e(f_\epsilon|_{W\cap E}) = \Lambda(f|_K)$.

2.10 Homotopía. Sea $H : U \times I \supset U \to L$ en $N\mathcal{H}$. Sean $W \subset V \subset U$ vecindades de $\mathrm{fix}(H)$ con $\overline{W} \subset V$, $\overline{V} \subset U$ y $H|_V$ es compacta; H_ϵ ϵ-aproximación de $H|_V'$, E su espacio relativo y $\epsilon < \delta(H,V,W)/3$.
Por 6.5 I, $H' = H_\epsilon|_{V\cap(E\times I)} \in R\mathcal{H}$ y por homotopía $e(H_0') = e(H_t')$, para toda $t \in I$.

Si f_ϵ es ϵ-aproximación de $H_s|V_s$ con espacio relativo E' y

$$G: V_s \times I \to F$$

$$G(x,t) = t\,H_{\epsilon s}(x) + (1-t)\,f_\epsilon(x),$$

donde $F = \langle E \cup E' \rangle$, entonces, por 6.4 I, $G|_{(W_s \cap F)\times I} \in R\mathcal{K}$ y por restricción y homotopía

$$\begin{aligned} \nu(H_s) &= e(f_\epsilon|_{W_s \cap F}) \\ &= e(H_{\epsilon s}|_{W_s \cap F}) \\ &= e(H_{\epsilon s}|_{W_s \cap E}) = e(H_s'). \end{aligned}$$

Así, para toda $t \in I$, $\nu(H_0) = \nu(H_t)$.

2.11 Conmutatividad. Sean $f: L' \supset U' \to L$ en N_2 y $g: L \supset U \to L'$ en N_3. Supóngase que $\mathrm{fix}(gf)$ es compacto.

Entonces $\mathrm{fix}(fg) = f(\mathrm{fix}(gf))$ también es compacto.

Sean V vecindad acotada de $\mathrm{fix}(fg)$ con

$\overline{V} \subset g^{-1}(U')$; $W_k \subset V_k$, $k=1,2$, vecindades de $\mathrm{fix}(gf)$, $\mathrm{fix}(fg)$ resp. cumpliendo

$$\overline{W_1} \subset V_1 \subset \overline{V_1} \subset f^{-1}(N) ,$$

$$\overline{W_2} \subset V_2 \subset \overline{V_2} \subset g^{-1}(W_1) \cap V .$$

Entonces $gf|_{V_1}$ y $fg|_{V_2}$ son compactas, y por tanto $gf, fg \in N_1$.

Sin perdida de generalidad, supóngase que $\delta < \delta(gf, V_1, W_1), \delta(fg, V_2, W_2)$ es la delta de la continuidad uniforme de g en $\overline{f(V_1)}$ respecto $\delta(gf, V_1, W_1)$.

Para $\epsilon < \delta$ sean f_ϵ ϵ-aproximación de $f|_{V_1}$ con E su espacio relativo y $B(\overline{f(V_1)}, \delta) \subset g^{-1}(U')$ conteniendo la imagen de

$$F : V_1 \times I \to L$$

$$F(x,t) = t f_\epsilon(x) + (1-t) f(x) ;$$

$$G : V_1 \times I \to L'$$

$$G(x,t) = g(F(x,t))$$

y

$$H : V_2 \times I \to L$$

$$H(x,t) = t f_\epsilon g(x) + (1-t) fg(x).$$

Por 6.3 I, F y H son compactas. Luego G también es compacta. Puesto que, para toda $t \in I$,

$$\| gf(x) - G(x,t) \| < \delta(gf, V_1, W_1)$$

$$\| fg(x) - H(x,t) \| < \delta(fg, V_2, W_2),$$

por 6.2 I, $\operatorname{fix}(G)$ y $\operatorname{fix}(H)$ son compactos.

Así $G, H \in N\mathcal{H}$, por homotopía

$$\nu(gf) = \nu(gf_\epsilon \quad)$$

$$\nu(fg) = \nu(f_\epsilon g|_{V_2});$$

y por 2.5 (a)

$$\nu(fg) = \nu(f_\epsilon g|_{V_2 \cap E}).$$

Como $f_\epsilon : V_1 \to E$, $g : V_2 \cap E \to V_1$ son compactas; g es compacta porque $\overline{V_2 \cap E}$ es compacto, por 2.5 (d)

$$\nu(gf_\epsilon) = \nu(f_\epsilon g|_{V_2 \cap E})$$

Luego $\nu(gf) = \nu(fg)$.

3 Existencia del índice α.

Se definen (A_1, A_2, A_3) y $A\mathcal{H}$ por

$$A_1, A_2 \subset A_3 = \{f : X \supset U \to Y \mid X, Y \in \mathcal{A},\ U \subset X \text{ es abierto y } f \text{ continua}\}$$

$$A_2 = \{f \mid f \text{ es compacta}\}$$

$$A_1 = \{f : X \supset U \to X \mid \text{existe } V \text{ vecindad de } \mathrm{fix}(f) \text{ y } f|_V \text{ es compacta}\}$$

$$A\mathcal{H} = \{H : V \times I \supset U \to X \mid V \subset X \text{ y } U \text{ son abiertos y } \overline{H} \in A_1,\ \overline{H}(x,t) = (H(x,t),t)\},$$

donde $\mathcal{A}$ es la clase de los ANR métricos.

Naturalmente al extender ν a A_1, para cada $f \in A_1$ se considera la familia $\Gamma \subset N_1$ de aplicaciones equivalentes a f, indexada por la familia de parametrizaciones del espacio que contiene su dominio se demuestra que $\nu|_\Gamma$

3.2 $\alpha(f)$ no depende de r,s.

Demostración. En virtud de la conmutatividad de ν, para cualesquiera aplicaciones

$$p: W' \to X \ , \quad q: X \to W'$$

cumpliendo $pq = 1$, donde W' es subconjunto abierto de algún espacio lineal normado,

$$\begin{aligned} \nu(qfp|_{p^{-1}(U)}) &= \nu((qfr)(sp)|_{(sp)^{-1}r^{-1}(U)}) \\ &= \nu((sp)(qfr)|_{r^{-1}(U)}) \\ &= \nu(sfr|_{r^{-1}(U)}) \end{aligned}$$

3.3 Teorema. α es índice de punto fijo en A. [6, pg 226]

Sean $f: U \to X$ en A_1, $H: U' \to Y$ en $A\mathcal{H}$, $g: Z \supset V \to Z'$ en A_2 y $h: Z' \supset V' \to Z$ en A_3. En 3.4 - 3.6 se considera la notación de 3.1.

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "s"] & S(K) \\ K \arrow[u, "f"] \arrow[r, "s"'] & S(K) \arrow[u, "sfr"'] \arrow[ul, "fr"'] \end{tikzcd}$$

$f|_K$ y $sfr|_{S(K)}$ son de Lefschetz y

$$\alpha(f) = \nu(sfr)$$
$$= \Lambda(sfr|_{S(K)}) = \Lambda(f|_K).$$

3.7 Homotopía. Por 4.2(c)I, existen W subconjunto abierto de L espacio lineal normado y aplicaciones

$$p : W \to Y \quad , \quad q : Y \to W$$

y $pq = 1$.

Si $H|_V$ es compacta y $V \subset U'$ es vecindad de $\mathrm{fix}(H)$ entonces $(p\times 1)^{-1}(V)$ es vecindad del compacto $\mathrm{fix}(qH(p\times 1)) = q\times 1(\mathrm{fix}(H))$, $qH(p\times 1)|_{(p\times 1)^{-1}(V)}$ es compacta por tanto $qH(p\times 1) \in HK$, y por homotopía

$$\alpha(H_0) = \nu((qH(p\times 1))_0)$$
$$= \nu((qH(p\times 1))_t) = \alpha(H_t).$$

3.8 Conmutatividad. Supóngase que $hg : g^{-1}(V') \to Z$ pertenece a A_1. Sean

$$p : W \to Z \quad , \quad q : Z \to W$$
$$\text{y} \quad r : W' \to Z' \ , \ s : Z' \to W'$$

parametrizaciones de Z y Z'. Entonces $sgp \in N_2$, $qhr \in N_3$ y $(qhr)(sgp) = qh^{g}p \in N_1$. Luego, por conmutatividad $(sgp)(qhr) = sghr \in N_1$ y

$$\nu(qhgp) = \nu(sghr).$$

Como también $r(sghr)s \in A_1$ y $r(sghr)s = gh$,

$$\alpha(hg) = \nu(qhgp)$$
$$= \nu(sghr) = \alpha(gh).$$

4 Unicidad de α.

Mediante el índice e se han definido los índices ν y α, y de hecho cada una de sus propiedades es consecuencia de la propiedad correspondiente de e.

La unicidad de un índice en R, [R2, pg 165], también implica la unicidad de ν, α. Para demostrarl , cosidérese la notación de 2.1 y 3.1, según sea el caso, y supóngase que ν', α' son índices en N y A.

4.1 $\nu = \nu'$

Demostración. Por 6.4 I,

$$H : V \times I \to L$$

$$H(x,t) = t f(x) + (1-t) f_\epsilon(x)$$

pertenece a $N\mathcal{K}$ y por homotopía $\nu'(f) = \nu'(f_\epsilon)$

Sea $i : E \hookrightarrow L$. Como $f_\epsilon i = f_\epsilon|_{V \cap E} \in N_1$ por conmutatividad $\nu'(f_\epsilon) = \nu'(f_\epsilon|_{V\cap E})$, y por la unicidad de e, $\nu'(f_\epsilon|_{V\cap E}) = e(f_\epsilon|_{V\cap E})$.
Es decir $\nu'(f) = e(f_\epsilon|_{V\cap E})$. Pero, por definición $\nu(f) = e(f_\epsilon|_{V\cap E})$. Así $\nu = \nu'$.

4.2 $\alpha = \alpha'$.

Demostración. De $sf|_V \in N_2$, $r \in N_3$ y $rsf|_V \in N_1$, por conmutatividad de α' y unicidad de ν

$$\alpha'(f) = \alpha'(sfr) = \nu(sfr).$$

Pero $\alpha(f) = \nu(sfr)$, por definición. Así $\alpha = \alpha'$.

Numero de Nielsen y Realizabilidad.

Considérese la autoaplicación f, en el dominio de α. Una forma de emplear el índice α para calcular una cota inferior del cardinal $\# fix(f)$ es hallar una cubierta $\{U_i \mid i \in I\}$ abierta ajena de $fix(f)$ y el conjunto

$$J = \{ j \in I \mid \alpha(f|U_j) \neq 0 \} ;$$

pues, entonces, por 0.7(a) II, $\# J \leq \# fix(f)$. Claramente, en el tipo de cubierta por encontrar, para que además

$$\# J \leq \min \{ \# fix(g) \mid \exists H : g \simeq f \, , \, H \in A\mathcal{H} \} ,$$

el cardinal de la J correspondiente a cualquier cálculo de N_α.

1. Dominio del Número de Nielsen N_α asociado al índice α.

1.1 Definición. Sea $f: U \subset X \to X$ autoaplicación en el dominio del índice θ, definido en la clase $\mathcal{B}$. En $fix(f)$ se define la relación:

$x \sim y$ si y solo si existe una trayectoria C en U de x a y y

$$f(C) \simeq C \text{ rel} \{0,1\}.$$

Sin duda, $\sim$ es de equivalencia. A sus clases se les llama clases de Nielsen de f ó clases de f.

Sean F clase de f y $V \subset U$ abierto cumpliendo

$$V \cap fix(f) = F.$$

Se define el índice $\theta(F)$ de la clase F por

$$\theta(F) = \theta(f|_V),$$

y se dice que es esencial si $\theta(F)$ no es cero.

Si el conjunto de clases $\{F_i\}$ de f es finito y existe una cubierta $\{U_i\}$ abierta y ajena de $fix(f)$ cumpliendo

$$F_i \subset U_i ,$$

se define el número de Nielsen $N_\theta(f)$ de f como el número de clases esenciales.

Sea

$$M : B_1 \longrightarrow \{card\}$$

$$M(f) = \min \{ \quad \# fix(g) \mid \exists H : g \simeq f , H \in \quad \}$$

donde B_1 es el dominio de θ.

Se dice que el número de Nielsen N_θ es realizable si $N_\theta|_{Dom M_\theta} = M_\theta$.

La existencia de

$$H : g \simeq f \quad \text{con} \quad H \in B\mathcal{H},$$

si las clases de g son esenciales y consisten de un punto, es una condición suficiente para la igualdad $N(f) = M(f)$.

1.2 Teorema. El dominio de N_α es el de α y $N_\alpha \leq M_\alpha$.

Para demostrar ambas afirmaciones, es suficiente demostrar, para cada $f : U \subset X \to X$ en A_1:

(a) En $\operatorname{fix}(f)$ cada clase F de f es una componente, [R1, pg 701], [R2, pg 86]

(b) Si $H : f \simeq g$ y $H \in A\mathcal{H}$ entonces $N_\alpha(f) = N_\alpha(g)$ [R1, pg 706], [R2, pg 95], [J2, pg 19], [K, pg 84]

Demostración. (a) Como X es ANR métrico, existen un espacio lineal normado L y un encaje $\varphi : X \to L$ con imagen cerrada, [AE]. Ya que $\varphi(X)$ es ANR cerrado y L es métrico, existen V vecindad abierta de $\varphi(X)$ y $\zeta : V \to \varphi(X)$ extensión continua de $id_{\varphi(X)}$.

Si $x \in \bar{F}$, claramente $f(x) = x$. Sea $x \in \bar{F}$, $B(\varphi(x), \epsilon) \subset V$ y $B(x, \epsilon') \subset \varphi^{-1}(B(\varphi(x), \epsilon)) \cap U$. Por ser f continua existe $\delta < \epsilon'$ con $f(B(x,\delta)) \subset B(x, \epsilon')$; y como X es localmente conexo por trayectorias, es posible suponer a $B(x, \delta)$ conexo por trayectorias.

Sea $y \in B(x, \delta) \cap F$. Entonces existe una trayectoria C en $B(x,\delta)$ de x a y; y $\varphi f C$, φC son trayectorias en $B(\varphi(x), \epsilon)$ pues $\delta < \epsilon'$. De

$$\xi(s,t) = s\,\varphi f C(t) + (1-s)\,\varphi C(t) \in B(\varphi(x), \epsilon),$$

para toda $s, t \in I$; porque $B(\varphi(x), \epsilon)$ es convexo, y considerando

$$\Psi(s,t) = \varphi^{-1}\zeta\xi(s,t)$$

se sigue $C \simeq fC$ rel $\{0,1\}$. Luego $x \in F$ y F es cerrado.

Suponiendo que $x \in F$ e $y \in B(x,\delta) \cap \operatorname{fix}(f)$, con la misma demostración, se concluye que $y \in F$, y por definición F es abierto en $\operatorname{fix}(f)$.

(b) Sea σ clase de H_0. Entonces existen E clase de $\bar{H}$ y $W \subset U \times I$ abierto, cumpliendo: $E_0 = \sigma$ y $W \cap \operatorname{Fix}(\bar{H}) = E$. Por ejemplo, sean E la clase que contiene a (x,t), donde $x \in \sigma$, y W la $\varsigma/2$ -vecindad de E, donde ς es menor que el mínimo de las distancias entre las clases de $\bar{H}$. Para cada $s \in I$, E_s es una clase de H_s, porque si $u, v \in E_s$, $C = (C_1, C_2)$ es trayectoria de (u,s) a (v,s) con $\bar{H}C \simeq C$ rel $\{0,1\}$ y $p: U \times I \to U$ es la proyección entonces

$$C(C_1, s) \simeq C \ \mathrm{rel}\{0,1\}$$

y $\quad H_s C_1 = \rho \bar{H}(C_1, s) \simeq \rho(C_1, s) = C_1 \ \mathrm{rel}\{0,1\}$,

es decir u y v son equivalentes. Por tanto $G = E_0$.

Ahora se demuestra, para toda $t \in I$, la igualdad $\alpha(E) = \alpha(E_t)$.

Sean

$$\rho : W \times I \to W$$

la proyección, y

$$G : W \times I \to U \times I$$

$$G_u(xs) = (H_{(1-u)s+ut}(x), (1-u)s+ut)$$

Claramente $G_0 = \bar{H}$ y $\rho(fix(\bar{G})) = E$. Así, por definición, $G \in A\mathcal{H}$, y por homotopía

$$\alpha(E) = \alpha(G_1).$$

Sea

$$i_t : U \to U \times I$$

$$i_t(x) = (x, t).$$

Entonces $i_t \circ H|_W = G_1$, $H \circ i_t = H_t$, y por la asociatividad del índice

$$\alpha(i_t \circ H|_W) = \alpha(H \circ i_t|_{i_t^{-1}(W)}).$$

Luego

$$\alpha(G_1) = \alpha(H_t|_{W_t})$$
$$= \alpha(E_t)$$

y

$$\alpha(E) = \alpha(E_t).$$

Por tanto, para cada $t \in I$, la función

$$\theta : \{\text{clases de } H_0\} \to \{\text{clases de } H_t\}$$
$$\theta(G) = E_t,$$

es inyectiva y $\alpha(\theta(G)) = \alpha(G)$.

Esto demuestra la existencia de una función biyectiva θ entre las clases de H_0 y H_t, para toda $t \in I$, con $\alpha(\theta(G)) = \alpha(G)$. En particular $N(f) = N(g)$.

1.3 Sean $t \in I$, y W_i la $\zeta/2$-vecindad de

la clase F_i de H_t, donde ξ es menor que el mínimo de las distancias entre sus clases.
Al menos intuitivamente, la demostración de (b) no es tan clara como que $\{W_i\}$ es cubierta de $fix(H_s)$ y cada W_i contiene solo una clase, si $|s-t|<\epsilon$ para alguna ϵ; de donde se seguiría $N(f)=N(g)$. Y en efecto, la demostración se expone en [K, pg 84]; aunque la ϵ ahí propuesta no es la adecuada. Por ejemplo, puede elegirse menor que $\xi/2$.

Aunque el número de Nielsen asociado a α no es realizable existe σ, restricción de α, donde $N_\sigma = M_\sigma$.

La cuestión de la realizabilidad de N_α, planteada por Jiang en [J2, pg 22], es del tipo de la resuelta por el teorema de Lefschetz, (determinar una cota inferior de M), y considerando 1.2 es una generalización de ésta.

1.4 Definición Sea X espacio conexo. $x \in X$ es punto de separación de X si $X \setminus x$ es disconexo. Un punto y en el espacio Y es de separación local si es un punto de separación de algún subespacio abierto conexo. Sean T la clase de los espacios compactos conexos localmente triangulables sin puntos de separación local y $S \subset T$ la de los espacios que no son superficies con característica de Euler negativa.

Se definen (T_1, T_2, T_3) y $T\mathcal{H}$, (S_1, S_2, S_3) y $S\mathcal{H}$ como (A_1, A_2, A_3) y $A\mathcal{H}$ pero respecto T y S resp.

Es claro que $\alpha|_{T_1} = i$ y $\alpha|_{S_1} = \sigma$ son índices en T y S resp.

1.5 Teorema. El número de Nielsen asociado a σ es realizable.

M y N denotan, en lo sucesivo, el mínimo número de puntos fijos y el número de Nielsen asociados al indice i.

La finalidad en la cuarta unidad, y el objetivo de las lecciones, es demostrar la existencia de una aplicación $f: \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ con $N(f) \neq M(f)$, donde $\mathbb{B}$ es el disco unitario plano con dos agujeros y $\chi(\mathbb{B}) = -1$. Es decir que N no es realizable.

El cálculo del número de Nielsen, y por tanto el de una cota inferior de M, es relativamente fácil. Las siguientes propiedades, ejemplos de las simplificaciones que implican propiedades de ciertos ANR métricos, permiten calcularlo.

1.6 Proposición (a) Para cada $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ diferenciable en $a \in U$, se definen

$$F: U \to \mathbb{R}^n$$

$$F(x) = x - f(x)$$

$$\operatorname{sig}(F'(a)) = \frac{JF(a)}{|JF(a)|}$$

si $JF(a)$, el jacobiano de F en a, no es cero.

Si f es diferenciable en $a = \operatorname{fix}(f)$ y $JF(a) \neq 0$ entonces $\alpha(f) = \operatorname{sig}(F'(a))$. [R2, pg 170]

(b) Propiedad de Removilidad. Sea $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ aplicación y $a \in U$ un punto fijo aislado. Si $B(a,\epsilon) \cap U = a$ y $\alpha(f|B(a,\epsilon)) = 0$ entonces existen $\epsilon' < \epsilon$ y $H: f \simeq f'$ cumpliendo: $\operatorname{fix}(f') \cap B(a,\epsilon') = \emptyset$ y, para toda $t \in I$, $H_t|U \setminus B(a,\epsilon') = f$.

Así, el índice de una aplicación diferenciable f, con $\operatorname{fix}(f) = a$, caracteriza salvo homotopía el aspecto geométrico de la intersección de su gráfica y la diagonal.

Realizabilidad

La conclusión de las lecciones y de la unidad es la existencia de una aplicación $f: 8 \to 8$ con $N(f)=0$ pero $M(f) \geq 2$. Es un ejemplo de lo complejo que puede ser el cálculo de $M(g)$, en sí y en relación a $N(g)$; dando relevancia al concepto de realizabilidad. Pero principalmente, muestra cómo la teoría de trenzas es campo adecuado (natural) para concluir sobre algunas cuestiones de la teoría de punto fijo, como la realizabilidad.

0. Espacio de configuración y grupo puro de trenzas.

0.1 Definición. Sea M variedad de dimensión mayor o igual a 2 y

$$F_{on}M = \{x \in M^n \mid x_i \neq x_j \text{ si } i \neq j\}.$$

x_i denota la iésima coordenada de $x \in M^n$. Se llama grupo puro de trenzas con n fibras de la variedad M al grupo fundamental de $F_{on}M$.

Dada $[f] \in \pi_1(F_{on}M)$ con $f = (f_1, \dots, f_n)$, se define la trenza $\tilde{f}$ asociada a f por

$$\tilde{f} = (\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_n)$$

donde

$$\tilde{f}_i : I \longrightarrow M \times I$$
$$\tilde{f}_i(t) = (f_i(t), t),$$

y se dice que $\tilde{f}_i$ es la iésima fibra de la trenza.

Se define el n-espacio de configuración $F_{mn}M$ de M respecto a $B=\{b_1,\dots,b_m\}\subset M$ como $F_{on}M\setminus B$.

Se ha definido el grupo puro de trenzas como $\pi_1(F_{on}M)$ porque $F_{on}M$ es conexo por trayectorias. Esto se demuestra en 2.3.

1. Sucesión de Fadell-Neuwirth

1.1 Definición. Para cada espacio X, $u,v\in X$ y $u\neq v$, se definen

$$i:(X\setminus v,u)\to(X^2\setminus\Delta,(u,v))$$
$$i(x)=(x,v),$$
$$p:(X^2\setminus\Delta,(u,v))\to(X,v)$$
$$p(x,y)=y.$$

Se llama sucesión de Fadell-Neuwirth de X a la sucesión

$$1 \to \pi_1(X \setminus v, u) \xrightarrow{i_*} \pi_1(X^2 \setminus \Delta, (u,v)) \xrightarrow{p_*} \pi_1(X, v) \to 1$$

donde i_*, p_* son los homomorfismos inducidos por i, p.

Obsérvese que dadas las presentaciones de $\pi_1(X \setminus v, u)$ y $\pi_1(X, v)$, cuando X es una variedad, si la sucesión de Fadell-Neuwirth de X es exacta, por 3.1 I, es posible exhibir una presentación del grupo puro de trenzas de X. Así, para calcular el grupo puro de trenzas de $\mathring{\wp}$ es suficiente demostrar la exactitud de su sucesión de Fadell-Neuwirth. En general, la sucesión de Fadell-Neuwirth de cualquier superficie, con ó sin frontera, distinta de S^2 y $\mathbb{R}P^2$ es exacta.

Por generalidad y simplicidad, se demuestra ésta última propiedad de las superficies distintas a S^2 y $\mathbb{R}P^2$, y se evita probar directamente la exactitud de la sucesión de Fadell - Neuwirth. de $\mathring{\wp}$.

2. Presentación del grupo puro de trenzas de $\mathring{\wp}$.

2.1 En las proposiciones 2.2 - 2.5 M denota una variedad de dimensión mayor o igual a 2, y el n-espacio de configuración $F_{kn}M$ de M respecto

$$C = \{ c_1, \ldots, c_k \} \subset M$$

se denota por F_{kn}.

2.2 Proposicion. La aplicación

$$p : F_{mn} \longrightarrow F_{mr} \qquad r \leq n$$

$$p(x_1, \ldots, x_n) = (x_{n-r+1}, \ldots, x_n)$$

es una fibración. [B, pg], [FN, pg 114]

Demostración. Sea $F = F_{m+r,n-r}$ el espacio de configuración de M respecto

$$B = \{b_1, \ldots, b_r\} \cup C$$

donde $(b_1, \ldots, b_r) \in F_{mr}$.

A continuación se prueba que $\xi = (F_{mn}, F_{mr}, F, p)$ es un haz fibrado.

En virtud de para cada $i = 1, \ldots, r$ y $a \in F_{mr}$:

(a) existe un homeomorfismo $\alpha : M \to M$ con $C \subset fix(\alpha)$ y $\alpha(b_i) = a_i$;

(b) existe una vecindad V_i de a_i homeomorfa al disco unitario de $R^{\dim M}$ y una aplicación $\theta_i : (\text{int} V_i) \times V_i \to V_i$ tal que, para cada $x \in \text{int} V_i$

$$\theta_{ix} : V_i \to V_i$$
$$\theta_{ix}(y) = \theta_i(x y),$$

es un homeomorfismo, $\theta_{ix}(x) = a_i$ y $\text{Fr} V_i \subset \text{fix}\, \theta_{ix}$. Además las V_i son ajenas y $C \subset M \setminus \cup V_i$.

Claramente, si $U = (\text{int} \times V_i) \cap F_{mr}$ y $p_r : U \times F \to U$ es la proyección entonces

$$\theta : U \times M \to M$$

$$\theta(x y) = \begin{cases} y & \text{si } y \in M \setminus \cup V_i \\ \theta_i(x_i y) & \text{si } y \in V_i \end{cases}$$

es una aplicación, para toda $z \in U$

por 5.5 I , p es una fibración.

2.3 Corolario. F_{mn} es conexo por trayectorias.

La demostración es inmediata de 2.2 y 5.3 I.

Ahora es fácil establecer una condición suficiente para la exactitud de la sucesión de Fadell-Neuwirth de M.

2.4 Proposición. (a) Si $\pi_2(F_{m1}) = \pi_3(F_{m1}) = 1$, para cada $m \geq 0$, entonces $\pi_2(F_{on}) = 1$. [B, pg .]

(b) Sean $a = (a_1, \ldots, a_n) \in F_{on}$, $F_{n-1,1}$ el espacio de configuración de M respecto a $\{a_2, \ldots, a_n\}$,

$$j : F_{n-1,1} \to F_{on}$$
$$j(x) = (x, a_2, \ldots, a_n)$$

y p la aplicación definida en 2.2

$$\pi_2(F_{m+1,n-1}) \cong \pi_2(F_{mn})$$

si $m \geqslant 0$, $n \geqslant 1$.

Por tanto $\pi_2(F_{0n}) \cong \pi_2(F_{1,n-1}) \cong \ldots \cong \pi_2(F_{n-1,1}) \overset{(*)}{=} 1$.

(b) En virtud de $\pi_2(F_{m1}) = \pi_3(F_{m1}) = 1$ para cada $m \geqslant 1$; por el inciso anterior, $\pi_2(F_{0,n-1}) = 1$.

Por 5.6 I y $\pi_0(F_{m1}) = 1$, si $i : p^{-1}(a_2, \ldots, a_n) \hookrightarrow F_{0n}$

$$\ldots \to \pi_2(F_{0,n-1}, (a_2, \ldots, a_n)) \to \pi_1(p^{-1}(a_2, \ldots, a_n), a) \xrightarrow{i_*} \pi_1(F_{0n}, a)$$

$$\xrightarrow{p_*} \pi_1(F_{0,n-1}, (a_2, \ldots, a_n)) \to \pi_0(p^{-1}(a_2, \ldots, a_n), a),$$

la sucesión de homotopía de $p : F_{0n} \to F_{0,n-1}$, definida en 2.2, es exacta.

Por tanto

$$1 \to \pi_1(p^{-1}(a_2, \ldots, a_n), a) \to \pi_1(F_{0n}, a) \to \pi_1(F_{0,n-1}, (a_2, \ldots, a_n))$$

de Fadell-Neuwirth de una superficie con o sin frontera no es exacta.

2.5 Teorema. Si $M \neq S^2, \mathbb{R}P^2$ es una superficie con o sin frontera entonces la sucesión de Fadell-Neuwirth es exacta.

Los siguientes lemas son dos partes importantes de la demostración de 2.5.

2.6 $\mathbb{R}^2$ es la cubierta universal de $\operatorname{int} M$

Demostración. Ya que $\operatorname{int} M$ es conexo, localmente conexo por trayectorias y semilocalmente simplemente conexo, existe una recubrimiento universal $(\tilde{M}, p)$

Si $\operatorname{int} M$ no es compacto entonces $\tilde{M}$ no es compacto, pues $p : \tilde{M} \to \operatorname{int} M$ es sobre.

Supongamos que $\operatorname{int} M$ es compacto. Puesto que $M \neq S^2, \mathbb{RP}^2$ también $\operatorname{int} M \neq S^2, \mathbb{RP}^2$; por tanto

$$\text{orden } \pi_1(\operatorname{int} M) \geq \aleph_0,$$

y para cada $y \in p^{-1}(x)$

$$\begin{aligned} \text{card. } p^{-1}(x) &= \text{índice}_{\pi_1(\operatorname{int} M, x)}\, p_*(\pi_1(\tilde{M}, y)) \\ &= \text{índice}_{\pi_1(\operatorname{int} M, x)}\, 1 \\ &= \text{orden } \pi_1(\operatorname{int} M, x) \geq \aleph_0, \end{aligned}$$

[M, pg 162].

Luego, si $\tilde{M}$ es compacto existe un punto de acumulación de $p^{-1}(x)$ y p no es una aplicación cubriente porque x no está cubierto parejamente. Por tanto $\tilde{M}$ no es compacto.

Así en cualquier caso $\tilde{M}$ es una superficie

triangulable
no compacta simplemente conexa y por tanto homeomorfa a R^2, [M, pg 197].

2.7 Si $C=\{c_1,\dots,m\}\subset \operatorname{int}M$ y $n>1$ entonces $\pi_n(\operatorname{int}M\setminus C)=1$.

Demostración. Por 2.6 y 5.5 I, resp, existe $p: R^2\to \operatorname{int}M\setminus C$ una aplicación cubriente y también es una fibración.

Dados $x\in \operatorname{int}M\setminus C$ e $y\in p^{-1}(x)$, por 5.6 I,

$$\dots\to \pi_n(p^{-1}(x),y)\to \pi_n(R^2,y)\to \pi_n(\operatorname{int}M\setminus C,x)\to \pi_{n-1}(p^{-1}(x),y),$$

la sucesión de homotopía de la fibración p, es exacta.

Así, si $n\geq 2$ entonces $\pi_n(R^2)=\pi_{n-1}(p^{-1}(x),y)=1$ y $\pi_n(\operatorname{int}M\setminus C,x)=1$

2.8 Demostración de 2.5. Por 2.7 y 2.4 (b) la sucesión de Fadell-Neuwirth de intM es exacta, y por 4.6 I también la de M.

2.9 Corolario. Dados $p_1, \dots, p_n \in R^2$ se definen el segmento y el polígono, resp,

$$\overline{p_1 p_2} : I \to R^2$$

$$\overline{p_1 p_2}(t) = t p_2 + (1-t) p_1$$

$$\overline{p_1 \cdots p_n} = \overline{p_1 p_2} \cdot \overline{p_2 p_3} \cdots \overline{p_{n-1} p_n} \cdot \overline{p_n p_1}$$

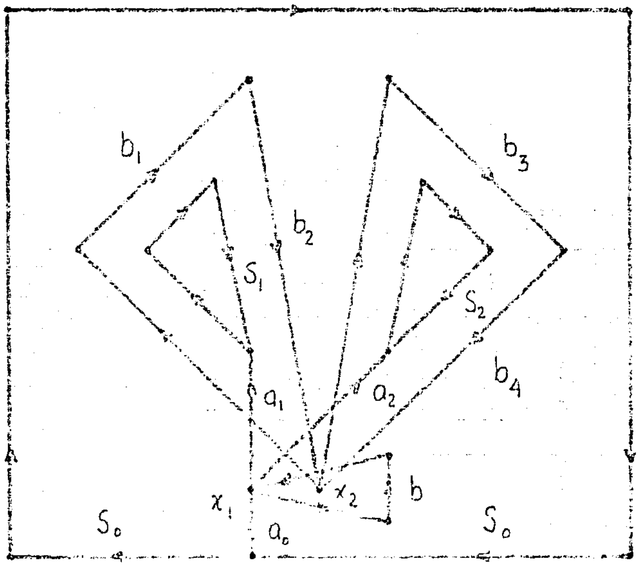
Sean $x_1, x_2 \in \wp$ y a_ν, b, b_μ, s_η los polígonos en $\wp$ cuyas imagenes han sido graficadas en fig 2. En fig 2, las direcciones sobre los polígonos indican el orden de sus vértices.

Sean

$$i, j : \wp \to \wp^2 \setminus \Delta$$

$$i(x) = (x, x_2)$$

$$j(x) = (x_1, x)$$



Gráfica de las imagenes de los polígonos a_ν, a, b_μ, S_η.

Fig 2.

$$e_{11} = i_*[a_1 S_1 a_1^{-1}]\ ,\ e_{12} = i_*[a_2 S_2 a_2^{-1}]\ ,\ B = i_*[b]\ ,$$
$$e_{21} = j_*[b_1 b_2]\ ,\ e_{22} = j_*[b_3 b_4].$$

Los generadores $e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22}, B$ y las relaciones

(a) $e_{21}^{-1} e_{11} e_{21} = e_{11} B^{-1} e_{11} B e_{11}^{-1}$

(b) $e_{21}^{-1} e_{12} e_{21} = e_{11} B^{-1} e_{11}^{-1} B e_{12} B^{-1} e_{11} B e_{11}^{-1}$

(c) $e_{21}^{-1} B\ e_{21} = e_{11} B e_{11}^{-1}$

(d) $e_{22}^{-1} e_{11} e_{22} = e_{11}$

(e) $e_{22}^{-1} e_{12} e_{22} = e_{12} B^{-1} e_{12} B e_{12}^{-1}$

(f) $e_{22}^{-1} B\ e_{22} = e_{12} B e_{12}^{-1}$,

son una presentación de $\pi_1(\mathcal{P}^2 \setminus \Delta, (x_1 x_2))$.

Demostración. En virtud de 2.5 la sucesión

$$1 \to \pi_1(F \setminus x_2, x_1) \to \pi_1(\mathcal{P}^2 \setminus \Delta, (x_1, x_2)) \to \pi_1(F, x_2) \to 1$$

es exacta.

Luego, por 3.1 I, ya que

$$[a_1 S_1 a_1^{-1}], [a_2 S_2 a_2^{-1}], [b]$$

generan a $\pi_1(\wp \setminus x_2, x_1)$ y e_{21}, e_{22} son la pre imagen de los generadores de $\pi_1(\wp, x_2)$, es suficiente probar las igualdades (a)-(f). Para demostrar (d) considérese la figura 3. Por definición

$$e_{11} = [(a_1 S_1 a_1^{-1}, x_2)],$$

$$e_{22} = [(x_1, b_3 b_4)] \quad \text{y} \quad b_3 b_4$$

$$e_{22}^{-1} e_{11} e_{22} = [(x_1 \cdot a_1 S_1 a_1^{-1} \cdot x_1, b_4^{-1} b_3^{-1} \cdot x_2 \qquad)],$$

donde

$$x_1(t) = x_1,$$

$$x_2(t) = x_2$$

para todo $t \in I$.

Gráficamente es claro que existen homotopías

$$F : \varphi_1 \simeq \psi_1 \ \text{rel } \{0,1\}$$
$$G : \varphi_2 \simeq \psi_2 \ \text{rel } \{0,1\} \ ,$$

$$\varphi_1(t) = (a_1 S_1 a_1^{-1}(t), t)$$
$$\varphi_2(t) = (x_2, t)$$
$$\psi_1(t) = (x_1 \cdot a_1 S_1 a_1^{-1} \cdot x_1(t), t)$$
$$\psi_2(t) = (b_4^{-1} b_3 \cdot x_2 \cdot a_1 S_1 a_1^{-1}(t), t) \ ,$$

entre las fibras de las trenzas asociadas a los representantes, de e_{11} y $e_{22}^{-1} e_{11} e_{22}$, dados, tales que

$$F(s,t) \neq G(u,v)$$

para todo $s,t,u,v \in I$.

Así, si $p : \mathcal{B} \times I \to \mathcal{B}$ es la proyección entonces

$$H = (pF, pG) : \quad (a_1 S_1 a_1^{-1}, x_2) \simeq (x_1 a_1 S_1 a_1^{-1} x_1, b_4^{-1} b_3^{-1}$$
$$x_2 \, a_1 S_1 a_1^{-1}$$

es una homotopía en $\wp^2 \setminus \Delta$, y por tanto

$$e_{11} = e_{22}^{-1} e_{11} e_{22}.$$

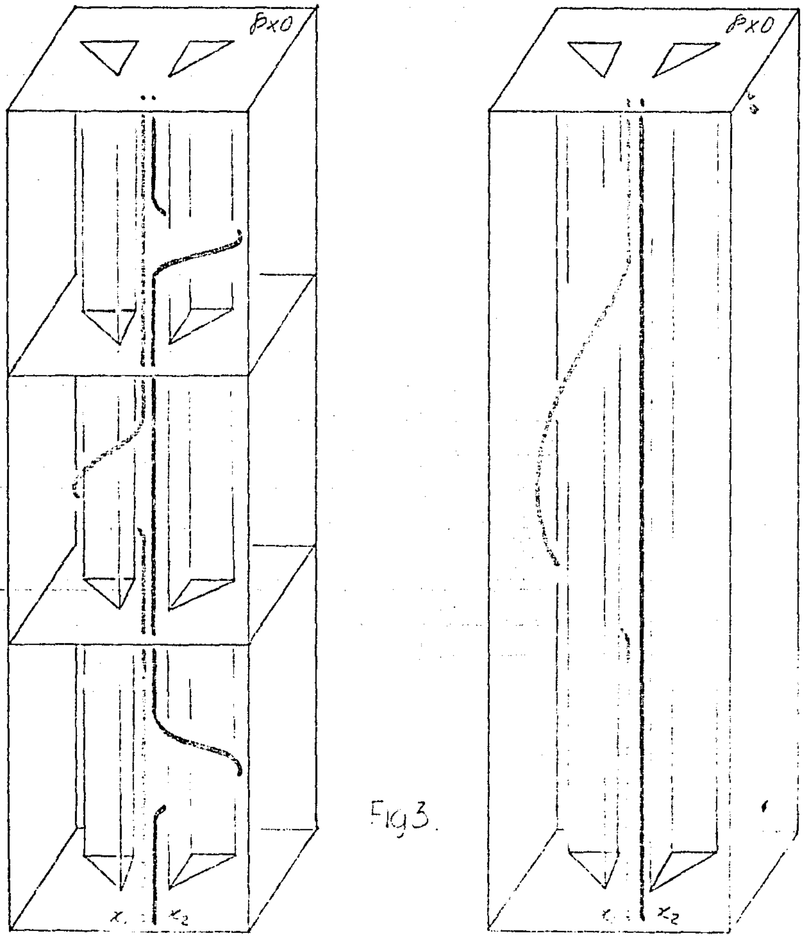


Fig 3.

fibras de la trenza asociada a [illegible]

fibras de la trenza asociada a [illegible]

3 N no es realizable

3.1 Considerando la notación de 2.9 y de la fig 4, se definen

(a) $r : \mathcal{P} \to P$

(b) $g : P \to P$,

donde $P = \operatorname{im} b_1 \cdot b_2 b_3 b_4$, por

(a) $r|_A = c_3$, $r|_B = c_6$ y $r|_C = c_0$. $r|_D$ y $r|_E$ es resp., la proyección horizontal y vertical sobre P; $r|_F$ y $r|_G$ es resp la proyección des de u y v sobre P.

(b) $\operatorname{Fix}(g) = \{C_0, C_2, C_8\}$,

$$g(C_1) = C_3 \qquad g(C_4) = C_1 \qquad g(C_9) = C_{10}$$
$$g(C_3) = C_1 , \qquad g(C_5) = C_3 \qquad g(C_{10}) = C_0$$
$$g(C_6) = C_0 \qquad g(C_{11}) = C_6$$
$$g(C_7) = C_6 \qquad g(C_{12}) = C_{10}$$

y para todo $t \in I$

$$g(tc_j + (1-t)c_{j+1}) = tg(c_j) + (1-t)g(c_{j+1}).$$

Sea $f = gr$.

3.2 Claramente r es una retracción, y por tanto

$$H(\mathcal{P}, Q) \cong H(P, Q).$$

Como P es la realización de un complejo simplicial 1-dimensional

$$H_n(P, Q) = 0$$

si $n \neq 0, 1$. Luego, por 1.2 (b) I

$$L(f) = 1 - \operatorname{tr} f'_*.$$

Pero $\operatorname{tr} f'_* = 1$, por ejemplo respecto de la base

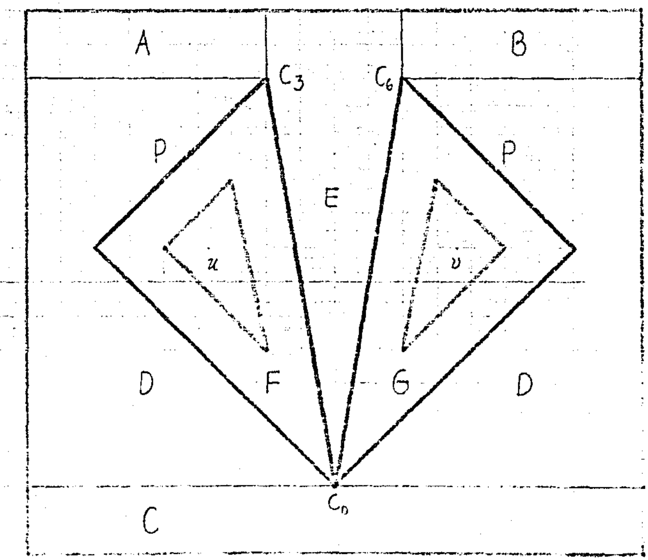
$$\{b_1 b_2, b_3 b_4\} \subset \pi_1'(P).$$

Por tanto $L(f) = 0$.

3.3 Como r es una retracción $\mathrm{fix}(f)=\mathrm{fix}(g)$, y ya que

$$f(b_1^{-1}b_3)=b_2b_2^{-1}b_1^{-1}b_3\simeq b_1^{-1}b_3 \ \mathrm{rel}\{0,1\}$$

c_2 y c_8 pertenecen a la misma clase de Nielsen de f.



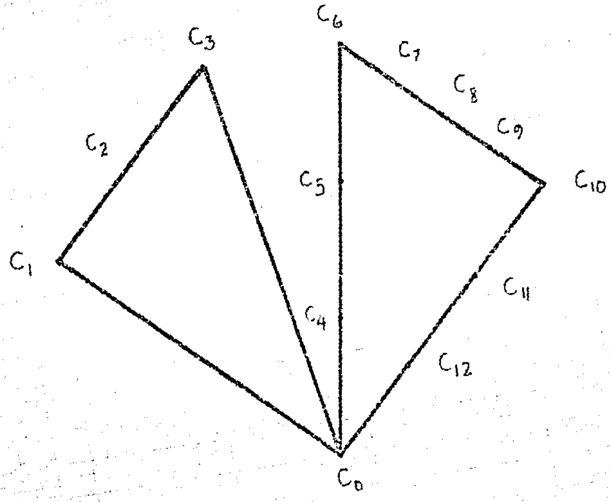


fig 4.

3.4 Teorema. El número de Nielsen no es realizable en T. [JI, pg 72]

Dado que $\wp \in T$ pero $\chi(\wp) = -1$, es suficiente probar

(a.) $N(f) = 0$

(b.) $M(f) \geq 2$.

Demostración. (a) Sean h_1, h_2, resp, la composición de la rotación del plano mediante el ángulo $-\arg(c_3-c_2)$, $\pi-\arg(c_7-c_8)$ con la traslación $x-c_2$, $x-c_8$; y $\epsilon>0$ tal que, para toda $i=0,\ldots,12$

$$B(c_i,\epsilon)\subset \wp$$

$$B(c_i,\epsilon)\cap\{c_0,\ldots,c_{12}\}=c_i.$$

Así, si

$$(\varphi_1,\varphi_2)=h_1 f h_1^{-1},\ (\psi_1,\psi_2)=h_2 f h_2^{-1}: B(0,\epsilon)\to B(0,\epsilon)$$

entonces $\varphi_2=\psi_2=0$,

$$\varphi_1(x)=-x$$

$$\psi_1(x)=2x$$

Por la conmutatividad, invarianza bajo homeomorfismos y contracción del índice, resp,

$$i(f|_{B(c_2,\epsilon)})=i(g|_{B(c_2,\epsilon)\cap F})$$

$$=i((\varphi_1,\varphi_2))=i(\varphi_1)$$

$$i(f|_{B(c_8,\epsilon)}) = i(g|_{B(c_8,\epsilon)\cap P})$$
$$= i((\psi_1, \psi_2)) = i(\psi_1).$$

Entonces, por 1.6 (a), III,

$$i(f|_{B(c_2,\epsilon)}) = i(\psi_1) = 1$$
$$i(f|_{B(c_8,\epsilon)}) = i(\psi_1) = -1.$$

En virtud de la normalidad del índice y $L(f)=0$,

$$0 = i(f|_{B(c_0,\epsilon)}) + i(f|_{B(c_2,\epsilon)}) + i(f|_{B(c_8,\epsilon)})$$
$$= i(f|_{B(c_0,\epsilon)}),$$

de donde, por 3.3, $N(f)=0$.

(b) Suponiendo que f es homotópica a alguna aplicación sin puntos fijos, por 4.8 I, existe

$$h \simeq f \text{ rel } \partial P \cup X_1$$
$$\mathrm{Fix}(h) = \phi.$$

Sean

$$\bar{h}, \bar{f} : \wp \to \wp^2$$

$$\bar{f}(x) = (x, f(x))$$

$$\bar{h}(x) = (x, h(x)).$$

Es claro que, para $i=0,1$ y 2, si $w_i = a_i S_i a_i^{-1}$ entonces.

$$\sigma_i = [\, \bar{f}(w_i)]$$

$$\tau_i = [\, \bar{h}(w_i)]$$

$$u_i = [\, \bar{h}(a_i)][\, \bar{f}(a_i)]^{-1}$$

pertenecen a $\pi_1(\wp^2 \setminus \Delta, (x_1 x_2))$ y $\tau_i = u_i \sigma_i u_i^{-1}$.

Como en 2.9 se prueban las igualdades

3.5
$$\sigma_0 = (e_{11} e_{12} B^{-1})(e_{21}^{-2} e_{22}^{2})$$

$$\sigma_1 = e_{11} (e_{21}^{-1} B)$$

$$\sigma_2 = e_{12} (B^{-1} e_{21}^{-1} e_{22} B^{-1} e_{22}).$$

Ya que $w_1 w_2 w_0^{-1}$ es contraíble a x_1 y $\tau_i = u_i \sigma_i u_i^{-1}$

$$1 = [\bar{h}(\omega_1)\cdot\bar{h}(\omega_2)\cdot(\bar{h}(\omega_0))^{-1}] = \tau_1\tau_2\tau_0^{-1} \quad y$$

$$u_1\sigma_1u_1^{-1}\cdot u_2\sigma_2u_2^{-1} = u_0\sigma_0u_0^{-1} \tag{3.6}$$

Sean α, β los generadores de $Z_2 * Z$ con $\alpha^2 = 1$
Definiendo la función θ en los generadores de $\pi_1(P^2\setminus\Delta, (x_1x_2))$ por

$$\theta(e_{11}) = \alpha \;,\; \theta(e_{12}) = 1$$

$$\theta(e_{21}) = \beta^{-1} \;,\; \theta(e_{22}) = 1 \;,\; \theta(B) = \beta^{-1}\alpha$$

se sigue que θ se anula en los relatores de $\pi_1(P^2\setminus\Delta, (x_1x_2))$, dados en 2.9; por tanto existe $\theta: \pi_1(P^2\setminus\Delta, (x_1x_2)) \to Z_2 * Z$ un homomorfismo extensión, que por 3.5 y 3.6 cumple

$$\theta(\sigma_0) = \beta^3, \; \theta(\sigma_1) = 1 \;, \theta(\sigma_2) = \alpha\beta^2\alpha\beta$$

$$\theta(\sigma_2) = \theta(u_2^{-1}u_0)\,\theta(\sigma_0)\,\theta(u_2^{-1}u_0)^{-1}$$

Es decir $\alpha\beta^2\alpha\beta$ y β^3 son conjugados, contrariamente a 3.3 I.

Luego cada aplicación $h \simeq f$ tiene al menos un punto fijo. Si $h \simeq f$ tiene sólo un punto fijo, de $i(h) = i(f) = 0$ pues $N(h) = N(f) = 0$, por 1.6 (b) III, existe $h' \simeq h$ y $\mathrm{fix}(h') = \emptyset$. Esta contradicción implica $M(f) \geqslant 2$.

Bibliografía.

[D1] Albrecht Dold. Fixed point index and fixed point theorem for euclidean neighborhood retracts. Topology Vol. 4, pp. 1-8. Pergamon Press, 1965.

[D2] ______ ______. Lectures on algebraic topology. Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1972.

[G] Andrzej Granas. The Leray-Schauder index and the fixed point theory for arbitrary ANRs. Bull. Soc. Math France, 100, pp. 209-228, 1972.

[AE] Arens and Eells. On embedding uniform and topological spaces. Pacific J. Math. t. 6, pp 397-403, 1956.

[B] Birman J. S. Braids, links and mapping class groups. Annals of Math. Studies Vol 82. Princeton University Press, 1974

[J1] Boju Jiang. Fixed points and braids. Invent. Math. 75, pp. 69-74, 1984

[J2] ___ ___. Lectures on Nielsen fixed point theory. American Mathematical Society

[J3] ___ ___ On the least number of fixed points. American J. of Math., Vol. 102, No 4, pp. 749-763

[FN] Edward Fadell and Lee Neuwirth. Configuration Spaces. Math. Scand. 10, pp 111-118, 1962.

[S] Edwin H. Spanier. Algebraic topology. Mc Graw-Hill. Book Company.

[H1] Hu S.T. Homotopy theory. New York-London. Academic Press, 1959.

[H2] ______. Theory of retracts. Wayne State University Press, 1965.

[L] Jean Leray. Théorie des points fixes: Indice total et nombre de Lefschetz'. Bull. Soc. Math. France, 87, p 221 à 233, 1959

[DL] Johnson D.L. Topics in the theory of group presentations. London: Cambridge University Press, 1980.

[MKS] Magnus, Karrass, Solitar. Combinatorial group theory. 2nd edition. New York. Dover 1976

[B] Martin Brown. Locally flat imbeddings of topological manifolds. Annals of Mathematics. Vol 75, pp. 331-341, 1962.

[R1] Robert F. Brown. On the Nielsen fixed point theorem for compact maps. Duke Math. J., 36, pp 699-708, 1969.

[R2] ______ __ ______. The Lefschetz fixed point theorem. Scott, Foresman and Company.

[K] U. Kurt Scholz. The Nielsen fixed point theory for noncompact spaces. Rocky Mountain. Journal of Mathematics. Vol 4 Number 1, 1974

[M] William S. Massey. Algebraic topology: An introduction. Harcout, Brace & World, Inc, New York