

03064  
2  
24

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

UNIDAD ACADEMICA DE LOS CICLOS PROFESIONAL Y DE POSGRADO  
DEL COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES

COMPARACION DE METODOS DE ASIMILACION DE DATOS EN PROBLEMAS  
DE CIRCULACION OCEANICA

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Tesis que para obtener el grado de  
Maestro en Ciencias del Mar  
con orientación en Oceanografía Física

P R E S E N T A:

JORGE ZAVALA HIDALGO



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## INDICE

|  |    |
|--|----|
| INTRODUCCION . . . . .   | 1  |
| CAPITULO I. EL PROBLEMA INVERSO LINEAL . . . . .   | 5  |
| CAPITULO II. TEORIA INVERSA NO LINEAL . . . . .  | 35 |
| CAPITULO III. CIRCULACION GEOSTROFICA EN EL SUR DEL GOLFO<br>DE MEXICO A PARTIR DE DOS MODELOS DE TEORIA INVERSA<br>Y NIVEL DE REFERENCIA EN 1000 M. . . . . | 43 |
| CAPITULO IV. COMPARACION DE DOS MODELOS CON METODO INVERSO<br>EN UNA RED DE ESTACIONES EN EL ESTRECHO DE YUCATAN . . . . .                                   | 49 |
| CAPITULO V. COMPARACION DE RESULTADOS AL INCORPORAR EN EL<br>MODELO LA CONSERVACION DE NUTRIENTES. EVALUACION EN EL<br>ESTRECHO DE FLORIDA . . . . .         | 58 |
| CONCLUSIONES . . . . .   | 66 |
| REFERENCIAS . . . . .  | 69 |

## INTRODUCCION

A finales de la década de los 80's, uno de los problemas de la física que trascendió el ámbito científico para llegar a ser tema de los no especialistas fué el cambio climático del planeta debido a la actividad humana. Hasta la fecha no existe claridad o acuerdo sobre los efectos que global y regionalmente producirá este fenómeno. Para el cambio de temperatura en todo el planeta, las predicciones van desde quienes señalan que no habrá ningún cambio significativo, hasta pronósticos de un calentamiento de 4° o 5°C en los próximos 50 años (Jones & Wigley, 1990). La diversidad de escenarios se debe, en parte, a que el tamaño de las computadoras disponibles obliga a hacer simplificaciones de los complejos procesos que ocurren en la atmósfera y los océanos. Para modelar estos procesos, existen actualmente distintas parametrizaciones que finalmente llevan a diferentes predicciones. Por otra parte, los datos climáticos con que se cuenta, de 100 años en las series más largas, no permiten concluir en forma significativa respecto al calentamiento que ha producido en el planeta la emisión de gases a la atmósfera producto de la actividad industrial.

En ese contexto se han establecido diversos programas para estudiar y entender el clima del planeta. Entre los más importantes están el "World Climate Research Program" (WCRP) y, como parte de él, el "World Ocean Climate Experiment" (WOCE) que se plantea profundizar en el conocimiento de la circulación oceánica y sus variaciones en escala de décadas mediante el desarrollo de modelos y la intensificación y mejoramiento del muestreo de diversos parámetros oceánicos.

Los modelos de circulación oceánica, conjuntamente con los modelos de circulación atmosférica, son esenciales para la predicción del cambio climático. En la oceanografía, como en otras ramas de la ciencia, se trabaja combinando datos con modelos. Para que los modelos sean una herramienta creíble, deben ser compatibles

con las diversas observaciones de la circulación global. Es en este contexto, en el que existen datos de diversos parámetros y de distinta calidad, distribución espacial y temporal, etc., en que los métodos para la interpretación de datos juegan un papel central en el conocimiento de la circulación oceánica, tanto global como regionalmente.

El problema más viejo e importante en la oceanografía es la descripción, explicación y predicción del movimiento de los océanos. La mayor parte de los esfuerzos en esta rama de la ciencia se han enfocado a resolver este problema. El estado actual de dicho problema se apoya en una herramienta teórica con la cual se describe el movimiento del océano; por otra parte, se han desarrollado diversas metodologías para efectuar mediciones directas o indirectas del campo de velocidad en los océanos. La mayor cantidad de ellas son calas hidrográficas. Se cuenta también con una gran cantidad de mediciones de la concentración de distintos trazadores: temperatura, salinidad, oxígeno disuelto, PH, nitritos, nitratos, sulfatos, fosfatos, e incluso diversos elementos radioactivos como tritio o carbono-14. Mediciones puntuales de estos parámetros proporcionan información sobre el movimiento del agua. Existen también mediciones directas de corrientómetros de diversos tipos incluyendo los relativamente nuevos Perfiladores Acústicos Doppler de Corriente (ADCP), e incluso datos de satélite que dan información sobre vientos, altimetría, temperatura superficial, etc. Otra técnica es la tomografía acústica que permite medir el campo de densidad en forma cuasi-continua en tres dimensiones. Toda esta información de distinto origen, época, escala espacial y calidad, junto con diversos modelos teóricos y numéricos son los elementos con que se ha venido construyendo una imagen del movimiento de los océanos.

Cuando nos enfrentamos a un problema apoyándonos en un conjunto de leyes físicas y parámetros del modelo para predecir un conjunto de parámetros observables, decimos que resolvemos un

problema directo. Resolver un problema inverso es inferir los valores de los parámetros del modelo a partir de parámetros observables.

Para estimar los parámetros de la descripción teórica se han desarrollado diversos algoritmos para integrar mediciones y teoría. Al conjunto de estos métodos los podemos agrupar bajo la denominación de *Teoría Inversa*. Esta teoría ha venido utilizándose en la oceanografía, con diversas variantes, desde finales de la década de los 70's (Wunsch, 1978), y cada vez con mayor frecuencia para la descripción de la circulación oceánica, principalmente en el Atlántico Norte.

La teoría inversa se desarrolló en la geofísica fundamentalmente con los trabajos de Backus y Gilbert (1967, 1968), Jackson (1979), Wiggins (1972) y Tarantola y Valette (1982). Estos trabajos dieron claridad sobre los casos lineales, los no lineales y sobre el manejo de errores; propusieron y analizaron diversas soluciones, y quizá lo más importante, han delimitado los resultados que se pueden obtener con estos métodos.

En la oceanografía, diversos trabajos han dado luz sobre la aplicación de estos métodos en distintas situaciones: Wunsch (1978), desarrolló modelos basados en una circulación geostrófica e imponen conservación de distintas cantidades; Killworth (1986), apoyándose en los trabajos de Welander (1983), propuso un modelo distinto introduciendo la ecuación de Bernoulli; Mercier (1986), ha venido trabajando con modelos no lineales, manejando varianzas asociadas a los datos del modelo; Wunsch (1988) y otros, han insistido en la importancia de determinar incertidumbres en los resultados obtenidos y han hecho propuestas en esta línea. Zavala (1986), introdujo modelos en que se encuentra un mínimo de una función de los parámetros del modelo, y no un mínimo de la magnitud de la solución o de su distancia a una propuesta a priori como generalmente se ha hecho en la teoría inversa, abriendo el espectro

de modelos con que se puede trabajar.

Otros algoritmos, que tradicionalmente no se han considerado como métodos inversos, se han utilizado para estimar la circulación oceánica: la  $\beta$ -espiral de Schott y Stommel (1978) y la programación lineal y no lineal por Wunsch & Minster (1982), entre otros.

Entre las dificultades de los problemas inversos radica el que, por lo general, éstos no son unideterminados; el carácter puntual de los datos y su ruido asociado, provocan que usualmente el conjunto de valores observables sobredeterminen algunos parámetros del modelo y dejan otros subdeterminados. Una discusión de estos problemas y algunas de sus soluciones aplicadas a la oceanografía son la motivación de este trabajo.

## CAPITULO I.

### EL PROBLEMA INVERSO LINEAL

#### 1.1 El problema inverso.

Dado un sistema físico  $f$ , asumamos que es posible definir un conjunto de parámetros ( $\mathbf{x}$ ) del modelo que lo describen completamente. No todos estos parámetros pueden ser directamente medibles (por ejemplo, la profundidad del océano es difícil de medir directamente). Es posible definir parámetros no observables cuyos valores dependen de los valores de los parámetros observables. Resolver un problema directo es predecir los valores de los parámetros observables; resolver un problema inverso es inferir los valores de los parámetros del modelo. El conjunto de valores observables usualmente sobredetermina algunos de los parámetros del modelo, mientras que deja otros subdeterminados. Sin embargo, dada la diversidad de problemas en que se aplican las técnicas inversas, no siempre este esquema refleja los procesos realizados. En oceanografía, por ejemplo, el método inverso se ha utilizado para determinar la circulación oceánica que se aproxima por un modelo geostrofico en que se conoce la derivada de la velocidad con respecto a la profundidad y se busca conocer el valor absoluto de la velocidad o las condiciones iniciales; en este caso la interpretación clásica no es directa.

En un problema inverso se cuenta con un conjunto de parámetros  $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  que describen un sistema, y una teoría que impone una serie de restricciones

$$f(\mathbf{x}) = 0 \quad (1.1)$$

sobre el vector  $\mathbf{x}$ . No todos los parámetros del modelo son observables, por lo que a partir de un modelo teórico y de aquellos parámetros que si son observables se busca conocer los parámetros desconocidos. En general el problema no está unideterminado sobre



los elementos de  $\mathbf{x}$ , y se busca una solución que minimice una cantidad relacionada con el modelo.

Cuando el modelo que relaciona al conjunto de datos medidos con los parámetros del modelo (ecuación 1.1) se puede separar en el conjunto de parámetros medibles o vector de datos  $\mathbf{d} = [d_1, d_2, \dots, d_M]^t$ , el conjunto de parámetros desconocidos o parámetros del modelo  $\mathbf{m} = [m_1, m_2, \dots, m_N]^t$ , y un conjunto de ecuaciones lineales  $\mathbf{A}$ , que contiene las restricciones del modelo, entonces es posible escribir el problema inverso como:

$$\mathbf{A} \mathbf{m} = \mathbf{d} \quad (1.2)$$

que forma el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\begin{aligned} A_1(m_1, m_2, \dots, m_N) &= d_1 \\ A_2(m_1, m_2, \dots, m_N) &= d_2 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ A_M(m_1, m_2, \dots, m_N) &= d_M. \end{aligned} \quad (1.3)$$

La búsqueda de una solución a este problema así como el estudio de la validez de los resultados que se obtienen y los algoritmos para lograrlo, son lo que se considera como Teoría Inversa en un sentido amplio.

El problema lineal es el más estudiado y el que se comprende mejor, habiéndose desarrollado el mayor número de algoritmos para su solución.

### 1.2. Existencia de soluciones

Del álgebra lineal estamos familiarizados con el problema  $\mathbf{A} \mathbf{m} = \mathbf{d}$ , con solución  $\mathbf{m} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{d}$  siempre que exista  $\mathbf{A}^{-1}$ , y esto sólo es

posible si el número de renglones (M) y el número de columnas (N) de  $\mathbf{A}$  son iguales y las columnas de  $\mathbf{A}$  son linealmente independientes. Como  $\mathbf{A}$  contiene la información del modelo que relaciona  $\mathbf{d}$  con  $\mathbf{m}$  es difícil pensar que este caso se pueda dar; en general  $M \neq N$ , y en particular en oceanografía, como se señala en secciones posteriores,  $M < N$ . Aún en el caso en que exista una solución única  $\mathbf{m}$ , los datos  $\mathbf{d}$  tienen ruido y es necesario entender cómo los errores en  $\mathbf{d}$  afectan a  $\mathbf{m}$ . En las siguientes secciones se aborda el problema en el que  $\mathbf{A}$  es singular y/o  $M \neq N$ .

### 1.2.1 Problema sobredeterminado.

Si  $M > N$ , entonces "existe demasiada información" en la ecuación (1.2) para que se satisfaga la igualdad. En este caso es necesario "escoger una solución" que satisfaga en algún sentido el modelo. En un caso así se ha buscado encontrar un vector  $\mathbf{m}$  que mejor se aproxime a una solución de  $\mathbf{A} \mathbf{m} = \mathbf{d}$  y el método que más se ha utilizado es el de mínimos cuadrados.

#### Método de mínimos cuadrados.

El problema que se busca resolver es  $\mathbf{A} \mathbf{m} = \mathbf{d}$  y no es posible encontrar una solución que satisfaga esta igualdad cuando  $M > N$ , por lo que se desea minimizar

$$E = (\mathbf{A} \mathbf{m} - \mathbf{d})^t (\mathbf{A} \mathbf{m} - \mathbf{d}). \quad (1.4)$$

Definamos  $e_i = \sum_j A_{ij} m_j - d_i$  y busquemos la solución que minimiza a  $E = \mathbf{e}^t \mathbf{e}$ , es decir a

$$E = \sum_i [ \sum_j A_{ij} m_j - d_i ] [ \sum_k A_{ik} m_k - d_i ]. \quad (1.5)$$

Derivando esta ecuación con respecto a  $m_p$  e igualando a cero se llega a

$$2 \sum_k m_k \sum_i A_{ij} A_{ik} - 2 \sum_i A_{ij} d_i = 0 ,$$

lo cual nos lleva a escribir a  $m$  en forma matricial como sigue:

$$m = (A^t A)^{-1} A^t d \quad (1.6)$$

que es la solución de mínimos cuadrados para el problema lineal.

La solución de mínimos cuadrados se basa en una norma  $L_2$  e implica una estadística gaussiana en el comportamiento de los datos; en los casos en que existan razones para pensar en otra estadística pueden utilizarse otras normas, como por ejemplo:

$$\begin{aligned} L_1 &= [\sum_i |e_i|]^1 \\ L_3 &= [\sum_i |e_i|]^1/3 \\ &\cdot \\ &\cdot \\ L_n &= [\sum_i |e_i|]^1/n \end{aligned}$$

Para la estimación de un valor a partir de varias mediciones, la norma  $L_1$  dará relativamente poco peso a los datos alejados, mientras que  $L_\infty$  únicamente considerará el dato más alejado en el sentido de colocar el valor estimado en el punto medio entre los dos valores más alejados, sin considerar la distribución de los datos restantes. En los casos en que existan datos alejados de la media con una frecuencia considerablemente mayor que la predicha por la estadística gaussiana es recomendable utilizar una estadística  $L_1$ . Como se señala más adelante, la solución  $L_2$  coincide con aquella de máxima probabilidad.

#### Mínimos cuadrados pesados.

Al calcular  $E = \sum e_i^2$  puede haber razones para plantearse dar mayor peso a algunos términos que a otros, por ejemplo si deter-

minadas mediciones son realizadas con mejor resolución que otras. De esta manera el error, en forma general, es

$$E = e^t W e \quad (1.7)$$

donde  $W$  es una matriz diagonal que define la contribución de cada término en el error total.

Siguiendo los mismos pasos del caso anterior este procedimiento lleva a la solución

$$m = [A^t W A]^{-1} A^t W d \quad (1.8)$$

llamada solución de mínimos cuadrados pesados.

### 1.2.2. Caso subdeterminado.

Cuando existen menos ecuaciones que incógnitas en  $A$ , esto es  $M < N$ , y no existen inconsistencias en los datos, entonces es posible encontrar un número infinito de soluciones que satisfagan  $A m = d$ .

Para elegir una de estas soluciones es necesario agregar más restricciones al sistema cuando esto es posible, o incluir información a priori que indique alguna característica buscada en la solución. Este tipo de información puede reducir el rango de probables soluciones o incluso lograr una solución única.

**Información a priori.**

**Mínima norma.**

La característica más simple que puede pedirse a la solución

es que la norma del vector  $\mathbf{m}$  sea mínima, esto es que

$$L = \mathbf{m}^t \mathbf{m} = \sum m_i^2 \quad (1.9)$$

sea mínima. La solución a este problema se obtiene con ayuda de los multiplicadores de Lagrange pidiendo que se satisfaga  $\mathbf{A} \mathbf{m} = \mathbf{d}$  y, simultáneamente, que  $L = \sum m_i^2$  sea mínima.

Sea

$$\phi(\mathbf{m}) = L + \sum_i^M \lambda_i e_i = \sum_i^N m_i^2 + \sum_i^M \lambda_i [d_i - \sum_j^N A_{ij} m_j] \quad (1.10)$$

donde  $\lambda_i$  son los multiplicadores de Lagrange. Tomando las derivadas con respecto a  $m_q$  llegamos a

$$\frac{\partial \phi(\mathbf{m})}{\partial m_q} = \sum_i^N 2 \frac{\partial m_i}{\partial m_q} m_i - \sum_i^M \lambda_i \sum_j^N A_{ij} \frac{\partial m_j}{\partial m_q} = 2m_q - \sum_i^M \lambda_i A_{iq} \quad (1.11)$$

Igualando las derivadas a cero y escribiendo el resultado en notación matricial obtenemos  $2\mathbf{m} = \mathbf{A}^t \boldsymbol{\lambda}$ , que al resolverse simultáneamente con  $\mathbf{A} \mathbf{m} = \mathbf{d}$  nos lleva a la ecuación  $\mathbf{d} = \mathbf{A}[\mathbf{A}^t \boldsymbol{\lambda} / 2]$ . La matriz  $\mathbf{A} \mathbf{A}^t$  es una matriz cuadrada  $M \times M$ ; cuando es posible encontrar una inversa para esta matriz existe una solución para los multiplicadores de Lagrange,  $\boldsymbol{\lambda} = 2[\mathbf{A} \mathbf{A}^t]^{-1} \mathbf{d}$ , y al sustituir esta expresión en  $2\mathbf{m} = \mathbf{A}^t \boldsymbol{\lambda}$  se obtiene la solución general de mínima norma para el caso puramente subdeterminado:

$$\mathbf{m} = \mathbf{A}^t [\mathbf{A} \mathbf{A}^t]^{-1} \mathbf{d} \quad (1.12)$$

La existencia de la solución sólo depende de poder invertir  $\mathbf{A} \mathbf{A}^t$ . Más adelante se analiza este problema.

La solución que se obtuvo es aquella que satisface la ecuación  $\mathbf{A} \mathbf{m} = \mathbf{d}$  y que minimiza la norma de  $\mathbf{m}$ . Sin embargo, es lógico pensar





$m_0$ ; si no es así, la solución depende directamente de qué tanto no se satisface esta igualdad.

### Otros tipos de información a priori.

Podemos tener alguna razón para suponer que uno o varios parámetros del modelo tengan valores fijos, por ejemplo como producto de mediciones. Esto puede representarse como

$$A_i m = [0 \dots, 1, \dots, 0] \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_N \end{bmatrix} = d_i$$

Se puede pensar en incluir una función de los parámetros del modelo y minimizar o maximizar esta función. A diferencia de los casos anteriores en que se minimizó el error  $E = (Am - d)^t W (Am - d)$  o la longitud del vector  $L = (m - m_0)^t W (m - m_0)$ , es posible plantearse el minimizar una función de  $m$ . Como se señaló en la sección anterior, es posible no sólo buscar una solución que minimice  $m^t m$  ó  $(m - m_0)^t (m - m_0)$ , sino incluso buscar una solución que minimice una característica del vector solución, por ejemplo las diferencias entre las componentes consecutivas de  $m$ . Estas restricciones sobre una característica del vector  $m$ , impuestas a priori para escoger una solución dentro de determinado rango, imponen condiciones sobre una función de éste y podemos considerarlas como parte del modelo con el que se trabaja.

### Función de $m$ con gradiente lineal como una propuesta a priori.

A partir del formalismo de multiplicadores de Lagrange es posible incorporar explícitamente otras cantidades a minimizar (Zavala, 1986), con la característica de que la cantidad que se



minimice pueda ser una función de  $\mathbf{m}$  con la condición de que su gradiente sea lineal.

Sea  $\phi(\mathbf{m})$  la cantidad a minimizar y  $\nabla_{\mathbf{m}}\phi$  lineal en  $\mathbf{m}$  (como en todos los casos que hemos revisado), entonces:

$$\nabla_{\mathbf{m}} \phi = \mathbf{B} \mathbf{m} + \mathbf{b} . \quad (1.18)$$

Se tiene que encontrar un extremo de  $\phi$  sujeto a las restricciones

$$e_i = \sum_j A_{ij} m_j - d_i = 0$$

$$\text{ó} \quad \mathbf{A} \mathbf{m} = \mathbf{d} .$$

De acuerdo con el algoritmo de los multiplicadores de Lagrange, inicialmente se tiene que minimizar

$$\Phi = \phi + \sum_i \lambda_i e_i \quad (1.19)$$

con

$$\nabla \Phi = \mathbf{B} \mathbf{m} + \mathbf{A}^t \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (1.20)$$

sujeto a la condición  $\mathbf{A} \mathbf{m} = \mathbf{d}$ , donde  $\boldsymbol{\lambda}$  es un vector de multiplicadores de Lagrange. De esta manera, los vectores  $\mathbf{m}$  y  $\boldsymbol{\lambda}$ , de correcciones y multiplicadores de Lagrange respectivamente, deben satisfacer el sistema

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{A}^t \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{m} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{b} \\ \mathbf{d} \end{bmatrix}$$

cuya solución está definida unívocamente si  $(\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^t)^{-1}$  existe, y está dada por

$$\begin{bmatrix} \mathbf{m} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^t (\mathbf{A} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^t)^{-1} \mathbf{A} \mathbf{B}^{-1} + \mathbf{B}^{-1} & \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^t (\mathbf{A} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^t)^{-1} \\ (\mathbf{A} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^t)^{-1} \mathbf{A} \mathbf{B}^{-1} & -(\mathbf{A} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^t)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathbf{b} \\ \mathbf{d} \end{bmatrix}$$

en este sistema el vector de parámetros del modelo es:

$$\mathbf{m} = [\mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^t (\mathbf{A} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^t)^{-1} \mathbf{A} \mathbf{B}^{-1} - \mathbf{B}^{-1}] \mathbf{b} + [\mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^t (\mathbf{A} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^t)^{-1}] \mathbf{d} . \quad (1.21)$$

### Ejemplos

En cada uno de los casos arriba mencionados, existe una funcional  $\phi(\mathbf{m})$  a minimizar. La solución final depende sólo del gradiente de  $\phi$  a través de  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{d}$ .

a) Minimizar  $\|\mathbf{m}\|$ .

Sea

$$\phi = \frac{1}{2} \sum m_j^2$$

Y

$$\frac{\partial \phi}{\partial m} = m_j \lambda_j$$

haciendo  $\mathbf{B} = \mathbf{I}$  y  $\mathbf{d} = 0$  en (1.18), y la solución es  $\mathbf{A}^t (\mathbf{A} \mathbf{A}^t)^{-1} \mathbf{d}$ , que es la solución encontrada para el modelo de mínima norma.

b) Minimizar el vector de parámetros del modelo multiplicado por una matriz de peso.

Sea

$$\phi = \frac{1}{2} \sum \alpha_j m_j^2 \quad (1.22)$$

y

$$\frac{\partial \phi}{\partial m} = \sum \alpha_j m_j \lambda_j$$

$$\nabla \phi = \mathbf{W} \mathbf{m} , \quad \mathbf{B} = \mathbf{W} , \quad \mathbf{d} = 0 ,$$

donde  $\mathbf{W}$  es una matriz diagonal con elementos  $\alpha_{jj}$ . La solución

coincide con la de mínima norma pesada:

$$\mathbf{m} = \mathbf{W} \mathbf{A}^t (\mathbf{A} \mathbf{W} \mathbf{A}^t)^{-1} \mathbf{d} \quad (1.23)$$

Pueden obtenerse otras soluciones particulares interesantes con aplicaciones a la oceanografía que se desarrollan más adelante.

### Problemas mixtos o inconsistentes.

A los problemas en que algunos parámetros están subdeterminados y otros sobredeterminados se les incluye en la categoría de problemas mixtos. Idealmente uno desearía agrupar los parámetros del modelo en sobredeterminados por un lado, y subdeterminados por otro, esto es:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\text{SOB}} & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_{\text{SUB}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{m}_{\text{SOB}} \\ \mathbf{m}_{\text{SUB}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_{\text{SOB}} \\ \mathbf{d}_{\text{SUB}} \end{bmatrix}$$

Estos serían dos problemas separados que pueden acoplarse mediante alguna función que dé un peso a cada uno de ellos, por ejemplo:

$$\phi = \mathbf{E} + \epsilon^2 \mathbf{L} = \mathbf{e}^t \mathbf{e} + \epsilon^2 \mathbf{m}^t \mathbf{m} \quad (1.24)$$

esto es, minimizar la magnitud del error y la longitud del vector  $\mathbf{m}$  dando un peso  $\epsilon^2$  a  $\mathbf{L}$  en relación a  $\mathbf{E}$ . La solución a este problema, utilizando multiplicadores de Lagrange en forma análoga a los casos anteriores, es:

$$\mathbf{m} = [\mathbf{A}^t \mathbf{A} + \epsilon^2 \mathbf{I}]^{-1} \mathbf{A}^t \mathbf{d}. \quad (1.25)$$

No todos los problemas mixtos son separables.

### 1.3. Descomposición en valores singulares

Hasta aquí se han encontrado soluciones para el problema inverso lineal dentro de lo que pueden llamarse soluciones  $L_2$ , ya sea minimizando el error, la magnitud del vector solución o alguna función de éste. Pero en todos los casos que se han discutido aparecen matrices que deben invertirse, y por lo general estas matrices son singulares y en estos casos no existe  $B$  tal que  $AB = I$ . Sin embargo, puede encontrarse una inversa que permita encontrar  $m$  tal que satisfaga  $A m = d$ , en forma aproximada para el caso sobredeterminado y exacta para el subdeterminado.

Existe una formulación de la inversa de una matriz basada en la descomposición en valores singulares (SVD). Esta descomposición se basa en el teorema espectral que señala que cualquier matriz  $M \times M$  puede representarse como el producto de tres matrices (Lanczos, 1961), y a partir de esta propiedad, como se muestra en la siguiente sección, cualquier matriz  $A$  de dimensión  $M \times N$  puede escribirse como

$$A = U \Lambda V^t . \quad (1.26)$$

La matriz  $U = [u_1, u_2, \dots, u_M]$  de  $M \times M$  es la matriz de los vectores propios que generan el espacio de las columnas de  $A$ . Los vectores propios son ortogonales entre sí y pueden ser elegidos unitarios, de tal manera que  $U^t U = I$  ( $M \times M$ ).

En forma similar  $V = [v_1, v_2, \dots, v_N]$  es una matriz ( $N \times N$ ) de vectores propios que generan el espacio de los renglones de  $A$ .

La matriz  $\Lambda$  ( $M \times N$ ) es diagonal con elementos no negativos, que corresponden a los valores propios asociados a  $U$  y  $V$ . Usualmente estos elementos son ordenados en forma decreciente de acuerdo con su magnitud. Algunos de los valores propios pueden ser cero, o numéricamente cero, por lo que podemos partir la matriz  $\Lambda$  de la manera siguiente:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

donde  $\Lambda_p$  contiene a los valores propios distintos de cero. La descomposición es entonces:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \Lambda \mathbf{V}^t = \mathbf{U} \Lambda_p \mathbf{V}^t = \mathbf{U}_p \Lambda_p \mathbf{V}_p^t, \quad (1.27)$$

donde  $\mathbf{U}_p$  y  $\mathbf{V}_p$  están formadas por las primeras columnas de  $\mathbf{U}$  y  $\mathbf{V}$  respectivamente ya que las partes restantes de las matrices de vectores propios son canceladas por los ceros de  $\Lambda$ . La matriz  $\mathbf{A}$  no tiene información en el espacio generado por los vectores propios de  $\mathbf{U}$  y de  $\mathbf{V}$  más allá de  $p$ . A esta parte la llamamos  $\mathbf{U}_0$  y  $\mathbf{V}_0$  respectivamente y corresponden al espacio nulo de  $\mathbf{A}$ .

En los casos en que  $\mathbf{A}$  es no singular, una propuesta de inversa es  $\mathbf{V}_p \Lambda_p^{-1} \mathbf{U}_p^t$ , que en analogía al caso en que  $\mathbf{A}$  es no singular, se le llama la *inversa natural generalizada*.

Nótese que si  $\mathbf{A}$  es no singular

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{V}_p \Lambda_p^{-1} \mathbf{U}_p^t, \quad (1.29)$$

con  $p = M = N = \text{rango de } \mathbf{A}$ .

En principio, es posible sustituir las matrices inversas que aparecen en las soluciones de los casos antes mencionados por esta inversa, y se cuenta con una solución para todos ellos aunque las matrices que deban invertirse sean singulares.

### 1.3.1. Derivación de la descomposición en valores singulares.

Sea  $\mathbf{A}$  una matriz  $M \times N$  y fórmese la matriz  $\mathbf{S}$  cuadrada de tamaño

$(M + N) \times (M + N)$  a partir de  $A$  y  $A^t$  como sigue:

$$S = \begin{bmatrix} 0 & A \\ A^t & 0 \end{bmatrix}$$

Esta matriz, por ser simétrica tiene valores propios reales ( $\lambda_i$ ) y un conjunto completo de vectores propios ( $w_i$ ) solución de  $Sw_i = \lambda_i w_i$ . Dividiendo  $w_i$  en dos partes, una  $u_i$  de largo  $M$  y otra  $v_i$  de largo  $N$ , se obtiene:

$$Sw_i = \begin{bmatrix} 0 & A \\ A^t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} = \lambda_i \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix}$$

Este sistema implica

$$\begin{aligned} y \quad & A v_i = \lambda_i u_i \\ & A^t u_i = \lambda_i v_i \end{aligned} \quad (1.30)$$

Manipulando estas ecuaciones se obtiene

$$\begin{aligned} y \quad & A^t A v_i = \lambda_i^2 v_i \\ & A A^t u_i = \lambda_i^2 u_i \end{aligned} ,$$

que sugieren un algoritmo para obtener  $u$ ,  $v$  y sus correspondientes  $\lambda_i$ 's.

La ecuación (1.30) puede escribirse en forma matricial como  $A v = U \Lambda$ , con  $\Lambda$  una matriz diagonal de valores propios. Multiplicando por la derecha esta ecuación por  $v^t$  se obtiene la descomposición en valores singulares

$$A = U \Lambda v^t. \quad (1.31)$$

### 1.3.2. Propiedades de la descomposición en valores singulares.

Si la matriz  $\mathbf{A} = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{V}^t$  tiene  $p$  valores propios distintos de cero, entonces los  $(M - p)$  vectores propios de  $\mathbf{U}$  que generan el espacio de parámetros se hacen cero en el producto  $\mathbf{U}_p \mathbf{\Lambda}_p$ , y al multiplicar  $\mathbf{\Lambda}_p \mathbf{V}_p^t$ , los  $(N - p)$  vectores  $\mathbf{v}_i$  que generan el correspondiente espacio de datos mayores de  $p$  se hacen cero. Esto significa que  $\mathbf{A} = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{V}^t = \mathbf{U}_p \mathbf{\Lambda}_p \mathbf{V}_p^t$ .

#### La inversa generalizada.

Si en el problema  $\mathbf{A} \mathbf{m} = \mathbf{d}$  sustituimos  $\mathbf{A}$  por su descomposición en valores singulares y calculamos su inversa se llega a

$$\mathbf{m} = (\mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{V}^t)^{-1} \mathbf{d} = \mathbf{V} \mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbf{U}^t \mathbf{d} \quad (1.32)$$

que siempre es posible sustituir por

$$\mathbf{m} = \mathbf{V}_p \mathbf{\Lambda}_p^{-1} \mathbf{U}_p^t \mathbf{d} , \quad (1.33)$$

donde  $\mathbf{V}_p \mathbf{\Lambda}_p^{-1} \mathbf{U}_p^t$  es conocida en la literatura como *inversa generalizada*.

#### Casos particulares de la solución SVD.

Para el caso sobredeterminado en que se minimiza el error se obtuvo

$$\mathbf{m} = (\mathbf{\Lambda}^t \mathbf{\Lambda})^{-1} \mathbf{\Lambda}^t \mathbf{d} ,$$

y al sustituir  $\mathbf{A}$  por su SVD:

$$\begin{aligned} \mathbf{m} &= [(\mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{V}^t)^t (\mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{V}^t)]^{-1} (\mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{V}^t)^t \mathbf{d} , \\ &= \mathbf{V} \mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbf{U}^t \mathbf{d} \end{aligned}$$

que coincide con la inversa generalizada.

Para el caso de mínima norma se llegó a

$$\mathbf{m} = \mathbf{A}^t (\mathbf{A} \mathbf{A}^t)^{-1} \mathbf{d} ,$$

sustituyendo  $\mathbf{A}$  por su descomposición en valores singulares

$$\begin{aligned} \mathbf{m} &= (\mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{V}^t)^t ((\mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{V}^t) (\mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{V}^t))^{-1} \mathbf{d} \\ &= \mathbf{V} \mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbf{U}^t \mathbf{d} , \end{aligned}$$

que coincide con el resultado anterior y por lo tanto la solución de mínimo error y la de mínima norma para el caso subdeterminado coinciden cuando se hace su descomposición en valores singulares.

**Interpretación de términos en la descomposición en valores singulares.**

Supongamos que se busca encontrar un vector unitario  $\mathbf{v}$  que mejor se aproxime a ser paralelo a los renglones de  $\mathbf{A}$  en el sentido de que  $\mathbf{v}^t \mathbf{A}^t \mathbf{A} \mathbf{v}$  tenga un valor máximo.

Como la matriz  $\mathbf{V}$  de vectores propios es una base para el espacio renglón de  $\mathbf{A}$  podemos expresar  $\mathbf{v}$  como una combinación lineal de sus elementos:

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} \boldsymbol{\alpha} , \tag{1.34}$$

donde  $\boldsymbol{\alpha}^t = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N]$ , y  $\sum \alpha_i^2 = 1$ .

Entonces el máximo de  $\mathbf{v}^t \mathbf{A}^t \mathbf{A} \mathbf{v} = \max \boldsymbol{\alpha}^t \mathbf{V}^t \mathbf{V} \mathbf{\Lambda} \mathbf{U}^t \mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{V}^t \mathbf{V} \boldsymbol{\alpha} = \max \boldsymbol{\alpha}^t \mathbf{\Lambda}^2 \boldsymbol{\alpha} = \max (\alpha_1^2 \lambda_1^2 + \alpha_2^2 \lambda_2^2 + \dots + \alpha_N^2 \lambda_N^2)$ , y como los valores propios son ordenados en forma decreciente, el valor máximo se obtiene si  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = \dots = \alpha_N = 0$ . Esto significa que el primer vector propio de  $\mathbf{V}$  correspondiente al mayor valor propio  $\lambda_1$ , es el



más cercano a ser paralelo a los renglones de  $A$ . Similarmente se puede mostrar que el segundo vector propio de  $V$  es el segundo más cercano a ser paralelo a los renglones de  $A$ .

Esta interpretación de los vectores propios de  $V$  (y en forma análoga con los de  $U$ ) permite entender que al eliminar los términos más pequeños de la matriz  $A$  se mantiene la mayor parte de la información y las componentes ortogonales que mejor representan a  $A$  en el sentido antes descrito. Una medida de lo que se está eliminando está dada por el cociente  $\lambda_1/\lambda_k$ . El criterio para considerar numéricamente cero algún elemento depende de cada caso particular. Algunas características que deben considerarse son: la resolución numérica de la computadora y la incertidumbre en el modelo y en los datos, este último criterio implica que el eliminar algunos elementos es de hecho un filtro para la información con menos presencia en el modelo.

#### **1.4. Errores e incertidumbre en el cálculo de los parámetros del modelo.**

##### **La matriz de resolución de datos.**

En las secciones anteriores se han señalado diversas soluciones al problema inverso lineal. Estas, en general, implican alguna solución que en un sentido amplio podemos considerar como una función de  $A$ , que involucra a su transpuesta, uno o varios productos matriciales, inversión de matrices, matrices de peso y alguna propuesta a priori sobre las características de los parámetros del modelo. Esto lo podemos agrupar bajo "alguna inversa"  $A^*$  y decimos que  $m = A^*d$ . Partamos de que una vez resuelto el problema de encontrar  $m$ , se calcula  $d$  con esta solución, y al nuevo resultado se le llamará  $d^a$  para distinguirla de los datos  $d$ . Es entonces lógico plantearse qué tan distintos son estos datos de los medidos.

Tenemos que:

$$\mathbf{d}^e = \mathbf{A} \mathbf{m} = \mathbf{A} (\mathbf{A}^* \mathbf{d}) = (\mathbf{A} \mathbf{A}^*) \mathbf{d} = \mathbf{N} \mathbf{d} . \quad (1.35)$$

La matriz  $\mathbf{N}$  de rango  $M$  es llamada la *matriz de resolución de datos*. Esta matriz describe qué tanto las predicciones coinciden con los datos; si  $\mathbf{N} = \mathbf{I}$ ,  $\mathbf{d}^e = \mathbf{d}$  y en ese caso el error de predicción es cero. En caso contrario,  $\mathbf{N} - \mathbf{I}$  puede ser una medida de la resolución de datos.

Si  $\mathbf{A}^*$  es la inversa generalizada,  $\mathbf{N}$  puede escribirse como:

$$\mathbf{N} = \mathbf{A} \mathbf{A}^* = (\mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{V}^t) (\mathbf{V} \mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbf{U}^t) . \quad (1.36)$$

Cuando  $\mathbf{N}$  es el rango de  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{N} = \mathbf{U} \mathbf{U}^t$ , y como  $\mathbf{d}$  está en el espacio columna de  $\mathbf{A}$ , la relación entre  $\mathbf{d}^e$  y  $\mathbf{d}$  está determinada por

$$\mathbf{d}^e = \mathbf{U} \mathbf{U}^t \mathbf{d} , \quad (1.37)$$

que es la proyección de  $\mathbf{d}$  en el espacio columna de  $\mathbf{A}$ , y  $\mathbf{d}^e = \mathbf{d}$  sólo si el rango de  $\mathbf{A}$  es igual a  $M$ .

Una medida de la inconsistencia del problema es:

$$h = \frac{|\mathbf{d}| - |\mathbf{d}^e|}{|\mathbf{d}|} .$$

Otro índice de inconsistencia puede ser:

$$h = \frac{|(\mathbf{U}_p \mathbf{U}_p^t - \mathbf{I}) \mathbf{d}|}{|\mathbf{d}|} .$$

Sustituir en el problema  $\mathbf{d}$  por  $\mathbf{d}^e$  no afectará la solución.

### La matriz de resolución del modelo.

La matriz de resolución de datos da información de cuándo los datos pueden ser independientemente predichos. La misma pregunta puede hacerse sobre los parámetros del modelo.

Partamos de que existe un conjunto de parámetros  $m^*$  (no necesariamente conocidos) del modelo, que lo satisfacen exactamente y son solución de  $A m^* = d$ . En forma análoga a la matriz de resolución de datos se plantea la pregunta de qué tan cercano es  $m^*$  a  $m$ . A partir de la expresión  $A m^* = d$ ,

$$m^* = A^* d = A^* (A m) = (A^* A) m = R m \quad (1.38)$$

en donde  $R$  es una matriz ( $N \times N$ ) llamada la *matriz de resolución* del modelo. Si  $R = I$ , entonces cada parámetro del modelo está undeterminado. Si  $R$  no es una matriz identidad, entonces las estimaciones del modelo son realmente promedios pesados de los verdaderos parámetros del modelo. En forma análoga a la matriz de resolución de datos, una buena medida de la resolución del modelo es  $R - I$ . Ambas matrices son funciones únicamente del kernel y de la información a priori del problema.

Si  $A^*$  es la inversa generalizada,  $R$  puede escribirse como:

$$R = A^* A = (V \Lambda^{-1} U^t) (U \Lambda V^t) . \quad (1.39)$$

Si el rango  $p$  de la matriz  $A$  es igual a  $M$  (caso puramente subdeterminado), tendremos:

$$A^* A = V V^t , \quad (1.40)$$

y si  $p = N$ , entonces  $V V^t = I$ . Como  $m$  está en el espacio renglón de  $A$ , la relación entre  $m$  y  $m^*$  es

$$\mathbf{m}^* = \mathbf{V} \mathbf{V}^t \mathbf{m} \quad (1.41)$$

lo que significa que  $\mathbf{m}^*$  es una proyección de  $\mathbf{m}$  en el espacio renglón de  $\mathbf{A}$ . Por lo que la solución general para el caso subdeterminado es:

$$\mathbf{m}^* = \mathbf{m} + \sum_{i=p+1}^N \alpha_i \mathbf{V}_i \quad (1.42)$$

donde  $p$  es el rango de  $\mathbf{A}$  y los  $(N - p)$  vectores  $\mathbf{V}_i$  se pueden construir a partir de los  $p$  primeros  $\mathbf{V}_i$ . Esto significa que a la solución de un problema con  $p < N$  es posible agregar términos en el espacio nulo sin que se altere la igualdad  $\mathbf{A} \mathbf{m} = \mathbf{d}$ . Desde el punto de vista de la solución de mínima norma, se obtiene la solución con  $\alpha_i = 0$  para  $i > p$ .

**La matriz de covarianza.**

La matriz de covarianza  $\mathbf{C}_m$  de los parámetros del modelo está determinada por la matriz de covarianza de los datos  $\mathbf{C}_d$  y la forma en que el modelo mapea los errores:

$$\mathbf{C}_m = \mathbf{A}^* \mathbf{C}_d \mathbf{A}. \quad (1.43)$$

### 1.5. Ejemplos de modelos lineales en oceanografía.

En una sección oceánica para la que se tienen datos de estaciones oceanográficas, el transporte geostrofico total de volumen entre dos superficies isopícnas  $\rho_i$  y  $\rho_{i+1}$  se puede estimar como

$$T_i = \sum_j \Delta_j \int_{z(\rho_i)}^{z(\rho_{i+1})} v_j(z) dz$$

donde  $T_i$  es el transporte total para la  $i$ -ésima capa,  $\Delta_j$  es la distancia entre estaciones y  $v_j$  es la velocidad geostrofica que descomponemos como

$$v_j = u_j + m_j ,$$

donde  $u_j$  es la velocidad geostrofica referida a un nivel arbitrario y donde  $m_j$  son constantes que se busca determinar con método inverso y que no es posible medir directamente (excepto por los datos de altimetría de satélite y las aproximaciones que pueden hacerse a partir de mediciones directas de corriente).

Si el muestreo es cerrado, la condición de cero transporte total de volumen para cada capa produce un sistema de ecuaciones para  $m_j$ :

$$\sum_j (\Delta_j \int_{z(\rho_i)}^{z(\rho_{i+1})} dz) m_j \equiv -\sum_j \Delta_j \int_{z(\rho_i)}^{z(\rho_{i+1})} u_j(z) dz \equiv d_i. \quad (1.44)$$

Si  $\mathbf{A}$  es la matriz cuyos elementos son  $A_{ij}$ , definidos como:

$$A_{ij} \equiv \Delta_j \int_{z(\rho_i)}^{z(\rho_{i+1})} dz \quad (1.45)$$

el vector  $\mathbf{m}$  de componentes  $m_j$  es la solución al sistema lineal

$$\mathbf{A} \mathbf{m} = \mathbf{d} , \quad (1.46)$$

donde  $\mathbf{d}$  es el vector con componentes  $d_i$ .

Si se tiene conservación de masa de algún trazador, basándose en la ecuación (1.46), el transporte para una capa es

$$T_i = \sum_j \Delta_j \int_{z(\rho_i)}^{z(\rho_{i+1})} \rho_j(z) Q_j(z) v_j(z) dz$$

y la ecuación (1.44) queda como

$$\sum_j (\Delta_j \int_{z(\rho_i)}^{z(\rho_{i+1})} dz) m_j \equiv - \sum_j \Delta_j \int_{z(\rho_i)}^{z(\rho_{i+1})} \rho_j(z) Q_j(z) u_j(z) dz \equiv d_i.$$

Los elementos  $A_{ij}$  de la matriz son ahora

$$A_{ij} \equiv \Delta_j \int_{z(\rho_i)}^{z(\rho_{i+1})} \rho_j(z) Q_j(z) dz$$

y se tiene un sistema

$$A' m' = d' .$$

Al comparar este sistema con el anterior se encuentra que  $A' \neq A$ ,  $d' \neq d$  y  $m' = m$ . En el caso de que se busque satisfacer ambas constricciones a la vez, se tiene el problema

$$\begin{bmatrix} A \\ A' \end{bmatrix} [ m ] = \begin{bmatrix} d \\ d' \end{bmatrix}$$

Si se desea dar mayor peso a una de las matrices, esta puede multiplicarse por una matriz diagonal de peso

$$W = \alpha I A$$

En general este sistema resulta ser subdeterminado, independientemente de qué condiciones de conservación se utilicen. La propuesta más común (Wunsch, 1977, 1978; Veronis, 1986) ha sido la de cerrar el problema partiendo de la velocidad geostrófica referida a una profundidad dada y minimizar alguna medida de la magnitud del vector de corrección  $\mathbf{m}$ . La solución así obtenida depende del nivel de referencia elegido inicialmente y, por lo tanto, presupone la existencia de conocimiento a priori sobre el campo de velocidad. Esta solución resulta de obtener una inversa de la matriz  $\mathbf{A}$  en (1.46) a partir de su descomposición en valores singulares (Lanczos 1961, Wunsch 1978).

Una alternativa más general que permite incorporar explícitamente otros criterios de cerradura (Zavala, 1986) se puede derivar a partir del formalismo de multiplicadores de Lagrange de acuerdo con el planteamiento hecho en las secciones anteriores.

Para resolver la ecuación (1.46) producto del modelo geostrófico con conservación de trazadores, que en general es subdeterminado, es necesario cerrar el modelo con alguna información a priori. Para cerrar el modelo es posible hacerlo a partir del planteamiento general de las ecuaciones (1.19) y (1.21). En ese sentido algunos posibles criterios son:

**Mínima norma.** Minimizar la magnitud del vector de correcciones con respecto a un nivel de referencia. Este criterio fuerza a la solución a tener velocidades bajas en un nivel de referencia a priori. Este nivel no necesariamente tiene que ser isobárico o isopicno. La función a minimizar en este caso es

$$\phi = \frac{1}{2} \sum m_j^2$$

con solución

$$\mathbf{m} = \mathbf{A}^t (\mathbf{A}\mathbf{A}^t)^{-1} \mathbf{d} \quad . \quad (1.47)$$

Minimizar la energía cinética en un nivel de referencia. En este modelo la función a minimizar es

$$\phi = \frac{1}{2} \sum \alpha_j m_j^2$$

con  $\alpha_j$  el inverso de la distancia entre la  $j$ -ésima pareja de estaciones con solución

$$m = Q A^t (A Q A^t)^{-1} d \quad (1.48)$$

donde  $Q$  es una matriz diagonal con  $Q_{jj} = \alpha_j$ . Esta solución es la de mínima norma pesada con el inverso de las distancias entre parejas de estaciones. Esta solución ha sido la base de gran parte de los trabajos realizados con método inverso en oceanografía.

**Mínima distancia a una solución propuesta.** Puede haber elementos para suponer que la velocidad en una cierta región tenga un determinado valor y dentro de esta propuesta dar mayor peso a uno u otro término. En este caso la función a minimizar es

$$\phi = \sum [(m_j - m_{0j}) W_j (m_j - m_{0j})]$$

con  $W_j$  el peso que se desea dar a cada término. La solución a este modelo es

$$m = m_0 + W A^t (A W A^t)^{-1} [d - A m_0] \quad (1.49)$$

donde  $W$  es una matriz de peso. Esta solución incluye como casos particulares a las dos anteriores y tiene la ventaja de que no hace tender forzosamente la velocidad a cero, sino a algún valor  $m_0$ . En ese sentido, al igual que los anteriores criterios de cerradura, depende de una propuesta a priori, en este caso  $m_0$ . Este modelo es útil cuando se cuenta con lecturas directas del campo de velocidad, pero con la limitación de que debe hacerse una única propuesta a priori para cada pareja de estaciones. En caso de que en algunas



regiones no se cuente con datos confiables es posible hacer propuestas con un peso menor para evitar que distorsionen la solución.

**Manejo de datos de corriente.** Cuando el modelo de mínima distancia a una solución propuesta de la sección anterior no es adecuado por el tipo de datos con que se cuenta, es posible tener una formulación que incluya sólo datos puntuales (estimación de la velocidad geostrófica entre una pareja de estaciones a un nivel dado). Esto puede hacerse agregando renglones al modelo de conservación  $A m = d$ , con  $v_{ij} = u_{ij} + m_j$ , de la siguiente manera

$$A_i = [0, 0, \dots, 1_j, \dots, 0],$$

$$d_i = v_{ij} - u_{ij},$$

con  $v_{ij}$  la velocidad absoluta estimada para ese nivel y  $u_{ij}$  la velocidad geostrófica referida a algún nivel inicial de integración (o referencia). Es posible agregar varios renglones de este tipo sin que sea necesario hacerlo para cada pareja de estaciones. Además es posible agregar más de un dato para una misma pareja de estaciones, aunque esto generará inconsistencias en el problema, lo que no impide que pueda resolverse con alguno de los modelos arriba expuestos. Esta información se agrega directamente al modelo y para encontrar una solución es necesario escoger alguna función o distancia a minimizar.

**Minimizar la energía cinética total.** Los criterios anteriores son locales en su naturaleza y suponen un conocimiento a priori de la solución: observaciones directas de corriente o la aceptación de un supuesto histórico sobre la velocidad en alguna región, que puede o no ser un nivel de referencia de velocidad cero dependiendo de si se minimiza  $m^t W m$  ó  $(m - m_0)^t W (m - m_0)$ . En ese sentido el planteamiento correcto es la solución que más se acerca a  $m_0$  y no la que minimice  $m$  en alguna región.

Uno puede pensar en minimizar la energía cinética contenida en el campo de velocidad. Se pueden dar una serie de justificaciones estéticas para este criterio (Zavala 1986) que no deja de ser particularmente atractivo. Existen en este modelo algunas características que lo hacen interesante: si se busca conocer el flujo o campo de velocidad, y no se tiene suficiente información como para aventurarse a proponer una solución a priori, el modelo de mínima energía cinética da una cota inferior del flujo de esta energía, y se acerca al mínimo del flujo acorde con las restricciones de conservación.

Ha sido argumentado por diversos autores (Fomín, 1964), que es válido suponer un mínimo de la velocidad en profundidades en donde  $\partial u/\partial z$  es pequeña. El criterio de energía cinética total mínima, necesariamente produce perfiles de velocidad con velocidades cercanas a cero donde  $\partial v/\partial z \approx 0$  sobre espacios relativamente grandes. En estas áreas, domina el criterio de energía cinética total mínima, sin la necesidad de introducir criterios de horizontalidad en la región en que la velocidad es pequeña. No hay que perder de vista que  $\partial v/\partial z$  cercana a cero no implica  $v$  cercana a cero, además es sabido que ese supuesto es cuestionable para muchas regiones oceánicas. Los resultados obtenidos con este criterio no dependen de la profundidad del nivel inicial de referencia, ni tienden a producir velocidades cercanas a cero en superficies isobáricas en algún lugar de la columna de agua. Sin embargo, como se muestra en los capítulos cuatro y cinco, produce flujos menores que los obtenidos con otros criterios como el de mínima norma.

La función a minimizar con este criterio es:

$$\phi = \sum A_{ij} (u_{ij} + m_j)^2$$

con solución

$$m = [B^{-1}A^t(A B^{-1}A^t)^{-1} A B^{-1} - B^{-1}]T - [B^{-1}A^t(A B^{-1}A^t)^{-1}]d \quad (1.49)$$

donde  $B$  es una matriz diagonal con  $B_{ii} = \sum_j A_{ij}$  y

$$T_j = \sum_j A_{ij} u_{ij}$$

es el transporte de la columna  $j$  que corresponde al campo de velocidad sin corrección.

**Minimizar el flujo total.** Dentro de la misma idea de minimizar la energía cinética total, es lógico plantearse encontrar el flujo mínimo en una región coherente con las constricciones de conservación. Si bien este resultado puede estar alejado de la situación real, da una cota mínima de los flujos. La función a minimizar sería el cuadrado del flujo total, dado por

$$\phi = \sum_i \sum_j [A_{ij} (u_{ij} + m_j)(u_{ij} + m_j)]$$

con solución

$$m = A^{-1} [A^t(I + A^t) T (A^t)^{-1} - A^t d] \quad (1.50)$$

donde  $T_i$  es el transporte del renglón  $i$ .

#### Otros modelos aplicados a la oceanografía.

Pensemos ahora en otro problema. Supongamos que se cuenta con un muestreo bidimensional uniforme (regularmente construido mediante algún proceso de interpolación) de la concentración de algún trazador y se quiere resolver la ecuación

$$u_i \nabla C = K \nabla^2 C$$

donde  $K$  es un coeficiente de difusión turbulento, que se asume conocido. En diferencias finitas esta ecuación tiene la forma:

$$\begin{aligned}
 & (C_{i,j+1} - C_{i+1,j}) \Psi_{i,j} + (C_{i+1,j} - C_{i,j-1}) \Psi_{i,j-1} + \\
 & (C_{i,j-1} - C_{i-1,j}) \Psi_{i-1,j-1} + (C_{i-1,j} - C_{i,j+1}) \Psi_{i-1,j} = \\
 & - 2K [(C_{i+1,j} + C_{i-1,j} - 2C_{i,j}) + \delta^2 (C_{i,j+1} + C_{i,j-1} - 2C_{i,j})]
 \end{aligned}$$

donde  $\Psi$  es una función de corriente evaluada en los puntos del centro de la malla y  $\delta = \Delta x / \Delta y$ .

El conjunto de ecuaciones puede ser condensado en notación matricial como

$$A \Psi = d \quad (1.51)$$

con

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Psi_{11} \\ \Psi_{12} \\ \vdots \\ \Psi_{MN} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 y \ d &= -2K [(C_{i+1,j} + C_{i-1,j} - 2C_{i,j}) + \delta^2 (C_{i,j+1} + C_{i,j-1} - 2C_{i,j})], \\
 A_{ij} &= (C_{i,j+1} - C_{i+1,j}).
 \end{aligned}$$

Un recuento de los términos de la ecuación  $A \Psi = d$  muestra que hay más incógnitas  $\Psi_{i,j}$  que ecuaciones. Si el trazador  $C$  es bioquímicamente activo (o radioactivo) se deben incluir términos de creación o consumo y la ecuación se escribe

$$A c = d', \quad \text{con} \quad d' = d + Q$$

asumiendo  $Q$  conocida o no. Estas ecuaciones tratan la distribución de trazadores como datos conocidos con la función de corriente como incógnita. Un arreglo de este sistema permite escribir la ecuación como

$$A^2 c = 0.$$

El problema usual (directo) considera el flujo conocido y por encontrar la distribución de trazadores, pero en oceanografía es

difícil asumir un conocimiento completo de la distribución de un trazador o del campo de flujo, por lo que el problema de encontrar la función de corriente en la ecuación (1.51) se puede resolver mediante metodología inversa.

## CAPITULO II

## TEORIA INVERSA NO LINEAL

Partimos del planteamiento de un problema inverso en el que existe un conjunto de datos conocidos o medidos, un conjunto de parámetros del modelo que se desea estimar y un modelo teórico que relaciona los datos con los parámetros e impone ciertas restricciones sobre los parámetros del modelo. Cuando es posible separar en forma explícita el conjunto de parámetros del modelo  $m$  del conjunto de datos  $d$ , este modelo se representa como

$$A m = d \quad , \quad (2.1)$$

y en caso de que  $A$ , determinada por las ecuaciones

$$\begin{aligned} A_1(m_1, m_2, \dots, m_N) &= d_1 \\ A_2(m_1, m_2, \dots, m_N) &= d_2 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ A_M(m_1, m_2, \dots, m_N) &= d_M, \end{aligned} \quad (2.2)$$

sea no lineal, entonces los métodos explicados en las secciones anteriores no son aplicables.

Las posibilidades de algoritmos de solución en problemas no lineales son casi tan diversas como los problemas mismos. Sin embargo, el método no lineal que más se ha utilizado en oceanografía es el de mínimos cuadrados, basado en Tarantola y Valette (1982). Por esta razón, en esta sección nos limitaremos a la discusión de ese método.

En forma análoga al caso lineal, si las distribuciones no obedecen una estadística gaussiana, el criterio de mínimos

cuadrados proporciona resultados erróneos. El planteamiento de mínimos cuadrados asociado a la gaussianidad del problema llevó a Tarantola y Valette (1982) a proponer su algoritmo de *Inversión Total*, que recoge como casos particulares los resultados para el caso lineal obtenidos por Wiggins (1972), y los resultados de Jackson (1979) y Backus (1967). La *Inversión Total* permite estimar incertidumbres a los parámetros del modelo, a los datos de entrada y al modelo mismo. Sin embargo, quizá la mayor aportación del trabajo de Tarantola y Valette, es la forma de plantear el problema, pues señalan con nitidez las limitaciones de todo problema al mostrar que tanto los datos a priori como los parámetros, e incluso el modelo teórico, tienen asociados una covarianza, y en el caso general, al resolver un problema inverso, sólo puede mejorarse el estado del conocimiento del sistema estudiado.

#### El problema inverso de mínimos cuadrados no lineales.

Definamos como  $\mathbf{x}_0$  una propuesta a priori del vector de datos y parámetros, y como  $\mathbf{C}_0$  a la matriz de covarianza asociada a  $\mathbf{x}_0$ , es decir,

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_0 \\ \mathbf{m}_0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{\text{dodo}} & \mathbf{C}_{\text{domo}} \\ \mathbf{C}_{\text{modo}} & \mathbf{C}_{\text{momo}} \end{bmatrix}.$$

La propuesta de Tarantola y Valette consiste en dar un enfoque probabilístico al problema, esto es, considerar que la mejor solución que se puede obtener es la del estimador más probable del vector  $\mathbf{x}_0$ , aceptando de antemano que no es posible resolver completamente el problema. En el planteamiento general de Tarantola y Valette no hay diferencia en el tratamiento dado a los parámetros y los datos, pues ambos conjuntos son incógnitas agrupadas en el vector  $\mathbf{x}$  y sólo se diferencian en la varianza asociada a los distintos términos. En ambos casos se asume un cierto nivel de

conocimiento del problema.

Este enfoque lleva a considerar la función de densidad de probabilidad

$$\rho(\mathbf{x}) = \text{const} [\exp(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^t \mathbf{C}_0^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))] \quad (2.3)$$

y buscar el punto en que  $\rho(\mathbf{x})$  es máxima, siempre que se cumpla la ecuación no lineal  $A \mathbf{x} = 0$ . Esto es equivalente a minimizar

$$s(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^t \mathbf{C}_0^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \quad (2.4)$$

cuando se cumple

$$A \mathbf{x} = 0. \quad (2.5)$$

La matriz de derivadas parciales

$$G^{ik} = \partial f^i / \partial x^k \quad (2.6)$$

define una aplicación lineal tangente sobre A. Sea  $S^k = \partial s / \partial x^k$  una aplicación lineal de  $s(\mathbf{x})$  y  $\mathbf{x}$  una solución, entonces derivando (2.4) obtenemos:

$$ds/d\mathbf{x} = 2(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^t \mathbf{C}_0^{-1} . \quad (2.7)$$

Si dado un vector  $\mathbf{v}$  éste es tangente a G, esto implica que  $G \cdot \mathbf{v} = 0$  y las condiciones expresadas por las ecuaciones (2.4) y (2.5) son equivalentes a:

$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^t \mathbf{C}_0^{-1} \mathbf{v} = 0 \quad (2.8)$$

$$A \mathbf{x} = 0 . \quad (2.9)$$

Esto implica que existe un vector de multiplicadores de Lagrange tal que



$$\begin{aligned} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) &= \mathbf{C}_0 \mathbf{G}^t \lambda \\ \text{y} \quad \mathbf{A} \mathbf{x} &= 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Multiplicando (2.10) por  $\mathbf{G}$ , obtenemos:

$$\mathbf{G} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = (\mathbf{G} \mathbf{C}_0 \mathbf{G}^t) \lambda$$

de donde

$$\lambda = (\mathbf{G} \mathbf{C}_0 \mathbf{G}^t)^{-1} \mathbf{G} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \quad (2.11)$$

Sustituyendo (2.11) en (2.10):

$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \mathbf{C}_0 \mathbf{G}^t (\mathbf{G} \mathbf{C}_0 \mathbf{G}^t)^{-1} \mathbf{G} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \quad (2.12)$$

que junto con la ecuación (2.9) puede escribirse como

$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \mathbf{C}_0 \mathbf{G}^t (\mathbf{G} \mathbf{C}_0 \mathbf{G}^t)^{-1} \{\mathbf{G} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) - \mathbf{A}(\mathbf{x})\} \quad (2.13)$$

y de esta ecuación

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{C}_0 \mathbf{G}^t (\mathbf{G} \mathbf{C}_0 \mathbf{G}^t)^{-1} \{\mathbf{G} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) - \mathbf{A}(\mathbf{x})\} \quad (2.14)$$

Esta ecuación se resuelve en forma iterativa de la siguiente manera:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \mathbf{C}_0 \mathbf{G}_k^t (\mathbf{G}_k \mathbf{C}_0 \mathbf{G}_k^t)^{-1} \{\mathbf{G}_k (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0) - \mathbf{A}(\mathbf{x}_k)\} \quad (2.15)$$

La ecuación (2.15) es conocida como el algoritmo de *inversión total*. Si existe sólo un mínimo no es importante en qué punto se inicie la inversión. Si existen mínimos locales entonces sí puede variar la solución. Esto puede checarse variando los puntos iniciales del proceso.

Existen limitaciones para resolver este problema debido a que la matriz  $(\mathbf{G}_k \mathbf{C}_0 \mathbf{G}_k^t)$ , a la que se calcula su inversa, puede ser singular. Este problema puede salvarse trabajando la inversa

generalizada a partir de la descomposición en valores singulares discutida en la sección de teoría inversa lineal.

Si  $A \mathbf{x} = 0$  puede separarse en  $\mathbf{d} = A \mathbf{m}$ , el problema puede expresarse como:

$$A \mathbf{x} = [I - A] \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{m} \end{bmatrix}$$

con  $A = [I - A]$  y  $\mathbf{x} = [\mathbf{d}, \mathbf{m}]^t$ ; en este caso  $A_{ij} = \partial A_i / \partial m_j$ . Para este problema se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_{k+1} = \mathbf{m}_0 + [C_{\text{momo}} A_k^t - C_{\text{modo}}] \\ [C_{\text{dodo}} - C_{\text{domo}} A_k^t C_{\text{modo}} + A_k C_{\text{momo}} A_k^t]^{-1} \\ \{ \mathbf{d}_0 - \mathbf{f}(\mathbf{m}_k) + A_k (\mathbf{m}_k - \mathbf{m}_0) \} \end{aligned} \quad (2.16)$$

y el correspondiente algoritmo para  $\mathbf{d}_{k+1}$  queda como

$$\mathbf{d}_{k+1} = \mathbf{f}(\mathbf{m}_k) + A_k (\mathbf{m}_{k+1} - \mathbf{m}_k) . \quad (2.17)$$

Si  $C_{\text{domo}} = C_{\text{modo}} = 0$ , la solución se reduce a:

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_{k+1} = \mathbf{m}_k + [A_k^t C_{\text{dodo}}^{-1} A_k + C_{\text{momo}}^{-1}]^{-1} \{ A_k^t C_{\text{dodo}}^{-1} \\ [\mathbf{d}_0 - \mathbf{f}(\mathbf{m}_k)] - C_{\text{momo}}^{-1} (\mathbf{m}_k - \mathbf{m}_0) \} . \end{aligned} \quad (2.18)$$

Cuando las restricciones a priori de los parámetros son muy débiles y tienen la forma  $C_{\text{momo}} = \sigma^2 I$ , y si  $A_k A_k^t$  es sobredeterminada en el límite cuando  $\sigma^2$  tiende a  $\infty$ , (2.18) se reduce a:

$$\mathbf{m}_{k+1} = \mathbf{m}_k + [A_k^t C_{\text{dodo}} A_k]^{-1} A_k^t C_{\text{dodo}}^{-1} \{ \mathbf{d}_0 - \mathbf{f}(\mathbf{m}_k) \} \quad (2.19)$$

que es la solución clásica no lineal de mínimos cuadrados.

Si  $A_k A_k^t$  es subdeterminada en el límite cuando  $\sigma^2$  tiende a  $\infty$ , entonces:

$$m_{k+1} = m_k + A_k^t [A_k A_k^t]^{-1} \{ d_0 - f(m_k) + A_k (m_k - m_0) \}. \quad (2.20)$$

### Caso lineal.

Si el problema es lineal se asume que las ecuaciones  $A x = 0$  son lineales y con elementos conocidos (si algunos de los elementos no lo son, deben considerarse como incógnitas y entonces el problema es no lineal).

La solución general para el caso lineal es:

$$x = x_0 - C_0 A^t (A C_0 A^t)^{-1} A C_0 \quad (2.21)$$

$$C = C_0 - C_0 A^t (A C_0 A^t)^{-1} A C_0 \quad (2.22)$$

Si el problema es separable<sup>1</sup>, entonces:

$$A x = [I - A] \begin{bmatrix} d \\ m \end{bmatrix}$$

$$d = A m,$$

y la solución está dada por

$$m = m_0 + (C_{momo} A^t - C_{modo}) [C_{dodo} - C_{domo} A^t - A C_{modo} + A C_{momo} A^t]^{-1} (d_0 - A m_0) \quad (2.23)$$

$$C_{mm} = C_{momo} + (C_{momo} A^t - C_{modo}) [C_{dodo} - C_{domo} A^t - A C_{modo} + A C_{momo} A^t]^{-1} (A C_{momo} - C_{domo}) \quad (2.24)$$

<sup>1</sup> Nótese que la relación entre  $A$  y  $A$  es:  $A = [I - A]$ .

y las otras componentes son

$$\begin{aligned} C_{dm} &= A C_{mm} \\ C_{md} &= C_{mm} A^t \\ C_{mm} &= A C_{mm} A^t . \end{aligned} \quad (2.25)$$

Si el problema es lineal y  $C_{modo} = C_{domo} = 0$ , entonces:

$$m = m_0 + C_{momo} A^t [C_{dodo} + A C_{momo} A^t]^{-1} (d_0 - A m_0) \quad (2.26)$$

$$C_{mm} = (C_{momo} - C_{momo} A^t (C_{dodo}^{-1} + A C_{momo})^{-1} A C_{momo}) . \quad (2.27)$$

Estas ecuaciones recuperan las soluciones lineales más usadas cuando el problema es separable y lineal. Utilizando las identidades (2.26) y (2.27) se pueden escribir como:

$$m = m_0 + [A^t C_{dodo}^{-1} A + C_{momo}^{-1}]^{-1} A^t C_{dodo}^{-1} (d_0 - A m_0) \quad (2.28)$$

$$C_{mm} = (A^t C_{dodo}^{-1} A + C_{momo}^{-1})^{-1} . \quad (2.29)$$

Si las restricciones sobre los parámetros son muy débiles, a partir de (2.26) y (2.27) se obtiene para el caso puramente subdeterminado:

$$m = m_0 + A^t (A A^t)^{-1} (d_0 - A m_0) , \quad (2.30)$$

$$C_{mm} = \sigma^2 (I - A (A A^t)^{-1} A) . \quad (2.31)$$

La ecuación (2.30) recupera la ecuación (1.17), que es la solución de mínima norma obtenida en el capítulo I. Para el caso únicamente sobredeterminado se obtiene, a partir de (2.28):

$$m = (A^t C_{dodo}^{-1} A)^{-1} A^t C_{dodo}^{-1} d_0 \quad (2.32)$$

que recupera la solución de mínimos cuadrados pesados obtenida en el capítulo I (ecuación 1.8). A partir de la ecuación (2.29) se llega a:

$$C_{mm} = (A^t C_{dodo}^{-1} A)^{-1} . \quad (2.33)$$

## Modelos no lineales utilizados en oceanografía.

Los modelos no lineales que más se han utilizado en oceanografía son los modelos de cajas discutidos en el capítulo I. La ventaja de los métodos no lineales, particularmente del algoritmo de inversión total de Tarantola y Vallete (1982), consiste en que se puede manejar la existencia de errores en los datos, en los parámetros del modelo y en el modelo mismo. Todos los errores son ajustados simultáneamente por este algoritmo.

En oceanografía los modelos descritos en el capítulo I han sido también trabajados con éxito con modelos no lineales, reportando mejores resultados Wunsch (1982), Mercier (1986) y Killworth (1986), entre otros.

Existe un modelo particularmente interesante debido a Killworth (1986) que se basa en una propuesta de Welander (1983) y que se le ha llamado método inverso de Bernoulli. En él se construyen las funciones de Bernoulli para cada estación que se conoce hasta una constante ( $B_{n0}$ ); se encuentran las curvas de densidad y vorticidad ( $\rho$ ,  $q$ ), en las cuales las constantes para las dos curvas tienen un mismo valor de función de Bernoulli. De esta forma se tiene una ecuación para cada intersección y con la posibilidad de varias intersecciones para cada estación. Killworth reporta del orden de  $N^3$  intersecciones donde  $N$  es el número de estaciones. El método supone: conservación de masa, de densidad y de vorticidad, y líneas de corriente sobre las isolíneas de densidad y vorticidad.

Killworth señala como una de las ventajas del método de Bernoulli que puede trabajar con estaciones separadas, y entre las desventajas está el que se asume que las estaciones pertenecen a las mismas masas de agua.

### CAPITULO III.

## CIRCULACION GEOSTROFICA EN EL SUR DEL GOLFO DE MEXICO A PARTIR DE DOS MODELOS DE TEORIA INVERSA Y NIVEL DE REFERENCIA EN 1000 M.

### Introducción

En este estudio se comparan resultados obtenidos a partir de dos modelos distintos en método inverso lineal y una estimación clásica con nivel de referencia a 1000 m. Los modelos con que se trabaja son geostroáficos con conservación de volumen en cinco capas definidas por superficies isobáricas; en un caso se utiliza el algoritmo de mínima norma, y en el otro se minimiza el campo de energía cinética total (MECT) que es compatible con la conservación de volumen y la circulación geostrofica. Se analiza la circulación geostrofica norte-sur en el sur del Golfo de México. Para hacer la comparación indicada se utilizan datos hidrográficos de CTD de la zona sur del Golfo de México a lo largo del paralelo 21°N, obtenidos durante la Campaña Oceanográfica OGMEX I que se llevó a cabo en febrero de 1987.



Figura 1. Transecto a lo largo del paralelo 21° en el Golfo de México.

## Area de estudio.

El Golfo de México es una cuenca semicerrada, conectada al exterior a través de dos bocas, el Canal de Yucatán y el Estrecho de Florida, con profundidades máximas de 1900 y 800 m respectivamente. La circulación en el Golfo está dominada, y posiblemente casi totalmente forzada, por el flujo de entrada de la Corriente de Yucatán que forma un giro anticiclónico en la parte norte del Golfo, la llamada Corriente del Lazo, antes de salir por el Estrecho de Florida. De esta corriente se desprenden grandes remolinos anticiclónicos que viajan hacia el interior del Golfo. Dentro de la cuenca también se da la presencia de giros ciclónicos por efecto de la Corriente del Lazo (Vukovich y Maul, 1985). Otros estudios (Brooks, 1984) sugieren que la circulación de la parte oeste del Golfo está dominada por pares de giros ciclónico-anticiclónico. Sin embargo, otros autores (Sturges y Blaha, 1976) sugieren que, en la zona este del Golfo, el rotacional del viento juega un papel fundamental en la circulación. La importancia relativa de cada uno de estos fenómenos en la circulación de esta área está aún por determinarse. Una de las regiones del golfo menos estudiadas en su circulación es la zona sur, que comprende la parte cercana a los estados de Veracruz, Tabasco, Campeche y Yucatán.

## Discusión y resultados

Los modelos que se utilizaron fueron el de mínima norma sin peso, cuya solución es

$$m = A^t (A A^t)^{-1} d ,$$

y mínima energía cinética total, con

$$m = [B^{-1} A^t (A B^{-1} A^t)^{-1} A B^{-1} -B^{-1}] T - [B^{-1} A^t (A B^{-1} A^t)] d$$

donde  $\mathbf{B}$  es una matriz diagonal con  $B_{ii} = \sum_j A_{ij}$  y  $T_j = \sum_j A_{ij} v_{ij}$  es el transporte de la columna  $j$  que corresponde al campo de velocidad sin corrección.

Los criterios de mínima norma y de mínima energía cinética total se aplicaron a un transecto de 13 estaciones oceanográficas realizado a lo largo del paralelo  $21^\circ\text{N}$  entre Tuxpan, Veracruz y la península de Yucatán (figura 1). Las estaciones utilizadas representan un muestreo prácticamente sinóptico, realizado del 25 al 27 de febrero de 1987 con una duración de 45 horas, y que corresponde al régimen de invierno de la circulación local.

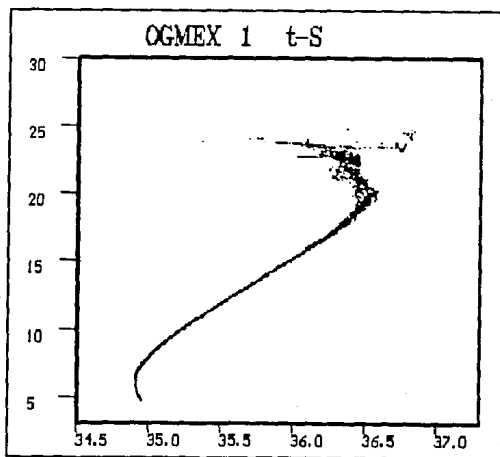


Figura 2. Diagrama T-S de las 13 estaciones del Golfo en el paralelo 21.

La estructura termohalina de la zona estudiada muestra una gran homogeneidad por debajo de la capa mezclada (figura 2) con un



mínimo de salinidad (34.85 entre 750 y 1000 m) que corresponde al agua intermedia del Antártico. Esta agua se encuentra en el Mar del Caimán y entra al Golfo de México a través del Canal de Yucatán.

A partir de una inspección de la distribución de las propiedades termohalinas en el transecto estudiado (figuras 3, 4 y 5) se determinó una segmentación de la columna de agua en cinco capas acotadas por las superficies en las que  $\sigma_t$  toma los valores 25.2, 26.5, 26.9, 27.3 y 27.61. Con esta selección, la capa mezclada en la que el flujo diapícnico no es despreciable, queda incluida en la sección más superficial.

Al evaluar las matrices inversas que aparecen en las soluciones por el método de descomposición en valores singulares es necesario adoptar un criterio para definir cuales de los valores propios son significativamente diferentes de cero y cuales, debido a los errores numéricos de truncación, deben considerarse como efectivamente iguales a cero. El criterio seguido para adoptar esta decisión se basa en el comportamiento de los flujos residuales en cada capa a medida que decrece la magnitud de los valores propios incorporados. En los dos casos analizados (figura 6), la incorporación del segundo valor propio (en orden de magnitud) hace decrecer los flujos por capa, mientras que la incorporación del tercer valor propio, dado su considerable menor tamaño relativo, incorpora ruido numérico y destruye los balances por capa. Esto define claramente un criterio de corte en la secuencia de valores propios, como ya ha sido observado en otros estudios (Wunsch, 1982, Zavala, 1986). El criterio de mínima energía cinética total (MECT), además de producir resultados independientes del nivel inicial de referencia, es más estable que el de mínima norma en el sentido de que la solución correspondiente al primer valor propio difiere poco de la solución final, en la que los valores propios siguientes sólo introducen correcciones menores. Esto no se observa en las aplicaciones del criterio de mínima norma (figuras 7, 8 y 9).

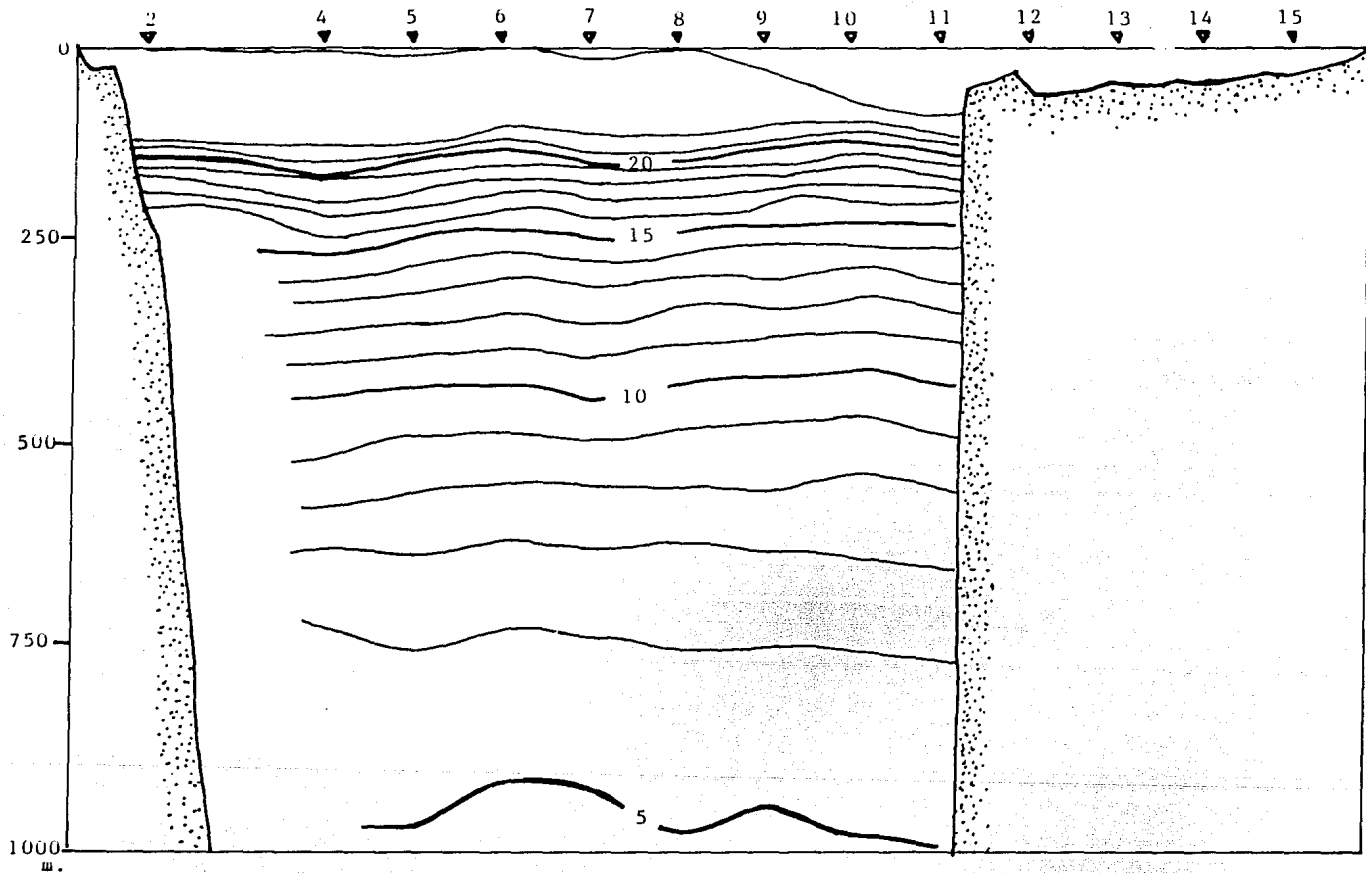


Figura 3.- Distribución vertical de temperatura ( $^{\circ}\text{C}$ ) en el paralelo 21 (OGMEX I).

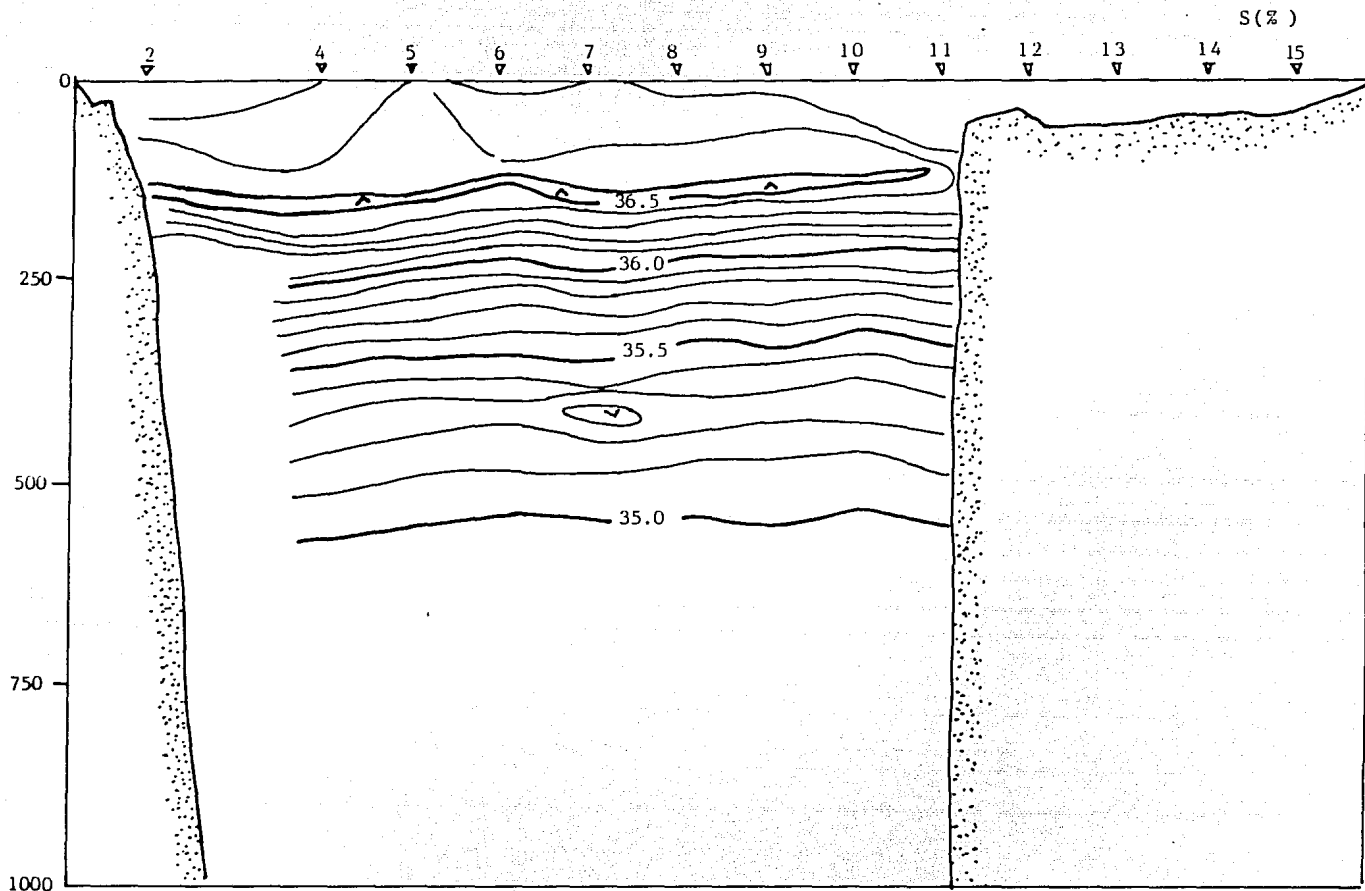


Figura 4.- Distribución vertical de salinidad en el paralelo 21 (OGMEX I).

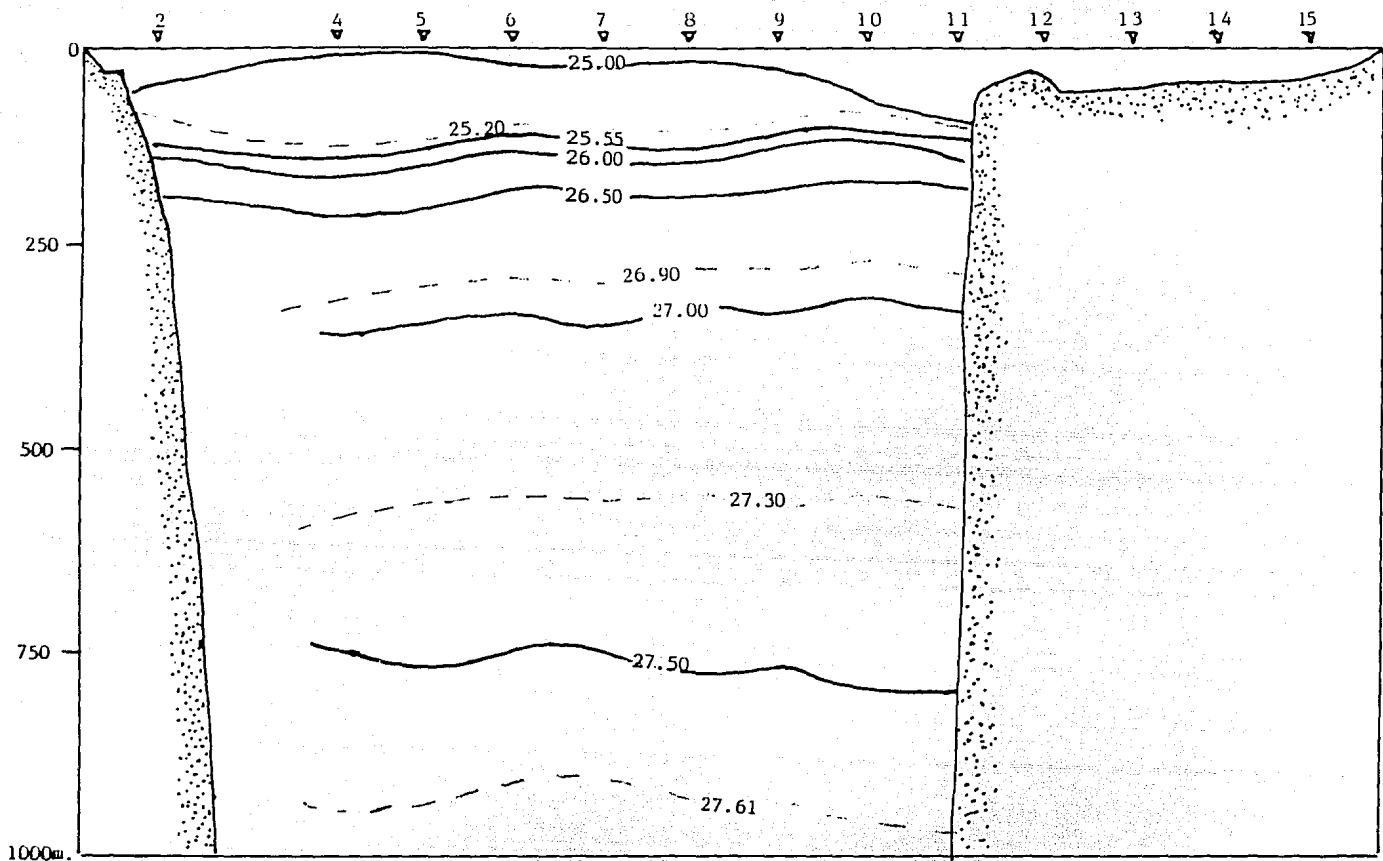
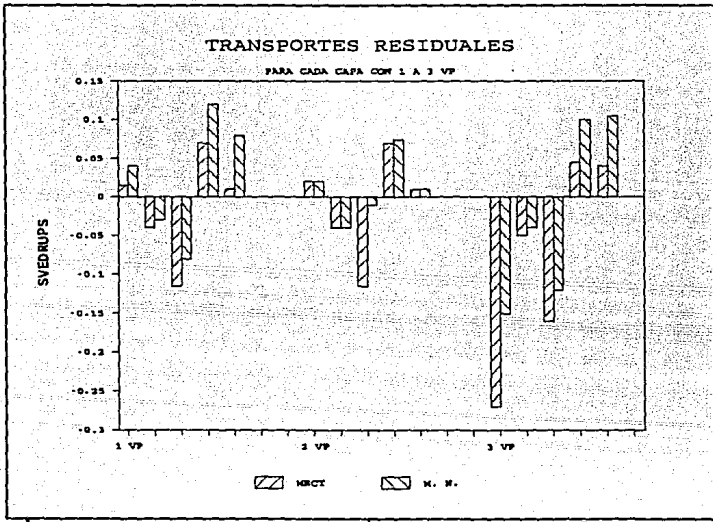
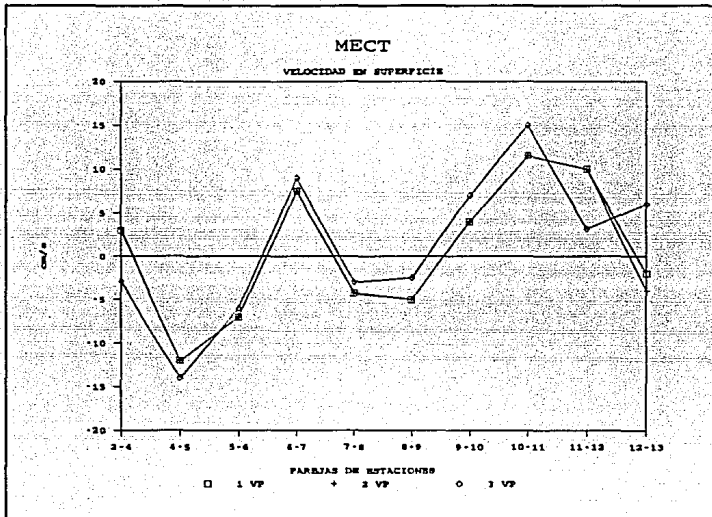


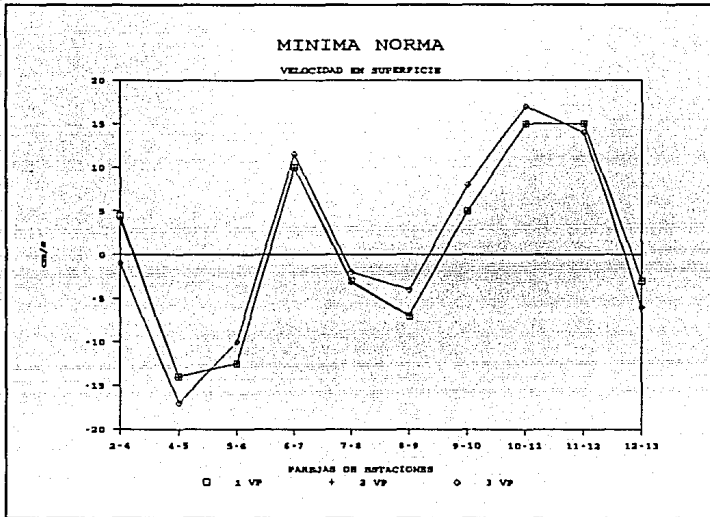
Figura 5.- Distribución vertical de  $\sigma_z$  en el paralelo 21 (OGMEX I).



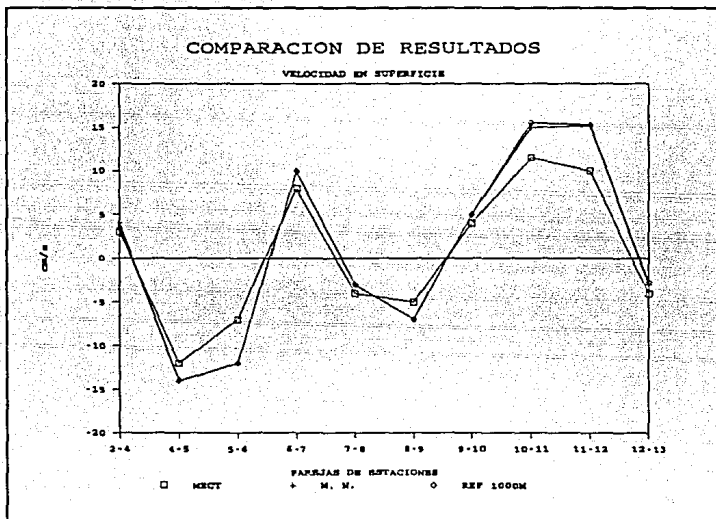
**Figura 6.** Transportes residuales para cada capa en cálculos con uno, dos y tres términos.



**Figura 7.** Velocidad en superficie con el modelo de MECT.



**Figura 8.** Velocidad en superficie con el modelo de mínima norma.



**Figura 9.** Velocidad en superficie con los dos modelos y referencia en 1000 m.



Al comparar los transectos de velocidad obtenidos a partir de los dos criterios propuestos y el obtenido a partir de un nivel de referencia en 1000 m (figuras 10, 11 y 12), se observan esencialmente los mismos resultados, probando que, en este caso, la hipótesis inicial de un nivel de referencia en la base de la columna sobre la que se tienen los datos, satisface aproximadamente las condiciones de conservación de volumen para las distintas masas de agua. En ningún caso la diferencia en velocidades absolutas entre las tres estimaciones es mayor de  $5 \text{ cm s}^{-1}$ .

Con estos resultados se obtiene un flujo norte-sur (y sur-norte) para la capa superficial de 250 m de  $2.5 \times 10^6 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$  y para la capa entre 250 y 1000 m de profundidad, un flujo de  $2.6 \times 10^6 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ . Con estos valores se obtiene un tiempo de residencia de 109 días para la capa superficial y de 215 días para la capa profunda.

Los resultados muestran un remolino anticiclónico superficial (figuras 8, 9 y 10) con un diámetro del orden de 400 km, un alcance vertical de 200 m y velocidades máximas de  $15 \text{ cm s}^{-1}$ . Su brazo de entrada se localiza en el margen oriental de la Sonda de Campeche y la salida ocurre entre  $95^\circ$  y  $96^\circ \text{ W}$ , cien kilómetros al oriente del margen occidental de la cuenca. Este patrón de circulación invernal ya ha sido reportado en la literatura (Nowlin, 1970; Hofmann y Worley, 1986 y Sturges y Blaha, 1976). En el interior de ese remolino (figuras 8, 9 y 10) es posible identificar un remolino menos intenso de sentido contrario (ciclónico), con velocidades máximas de  $9 \text{ cm s}^{-1}$  y alcance vertical de alrededor de 100 m.

### Conclusiones.

En este estudio se encontró que dentro de los rangos de error esperado, los dos criterios de método inverso dan los mismos resultados y aparentemente el sólo incluir conservación de masa en el

modelo lleva a resultados convergentes con propuestas a priori diferentes. Sin embargo, esto puede deberse a las características de la zona de estudio en que forzosamente tiene que haber flujos norte-sur y sur-norte.

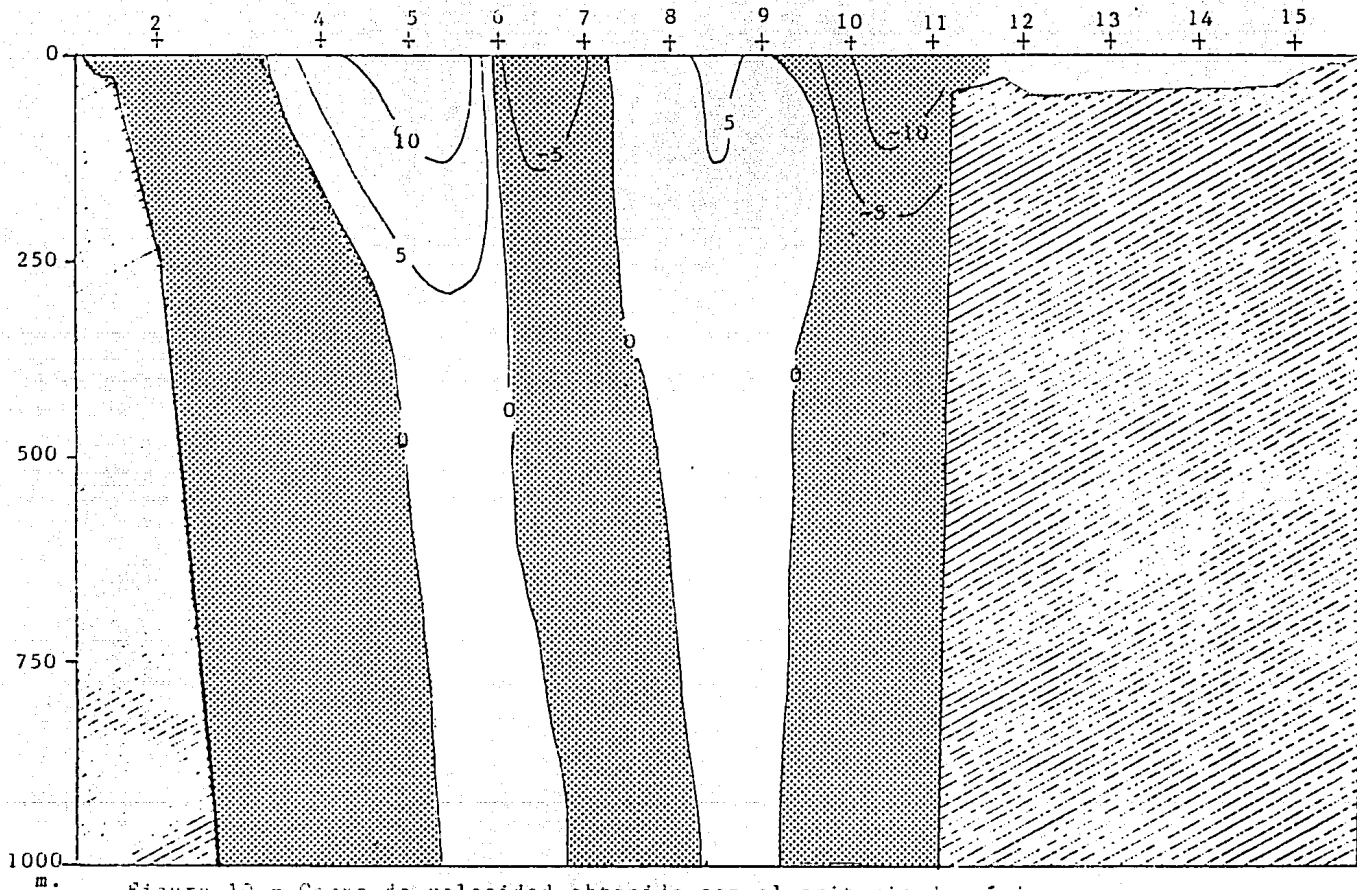


Figura 10.- Campo de velocidad obtenido con el criterio de mínima norma.

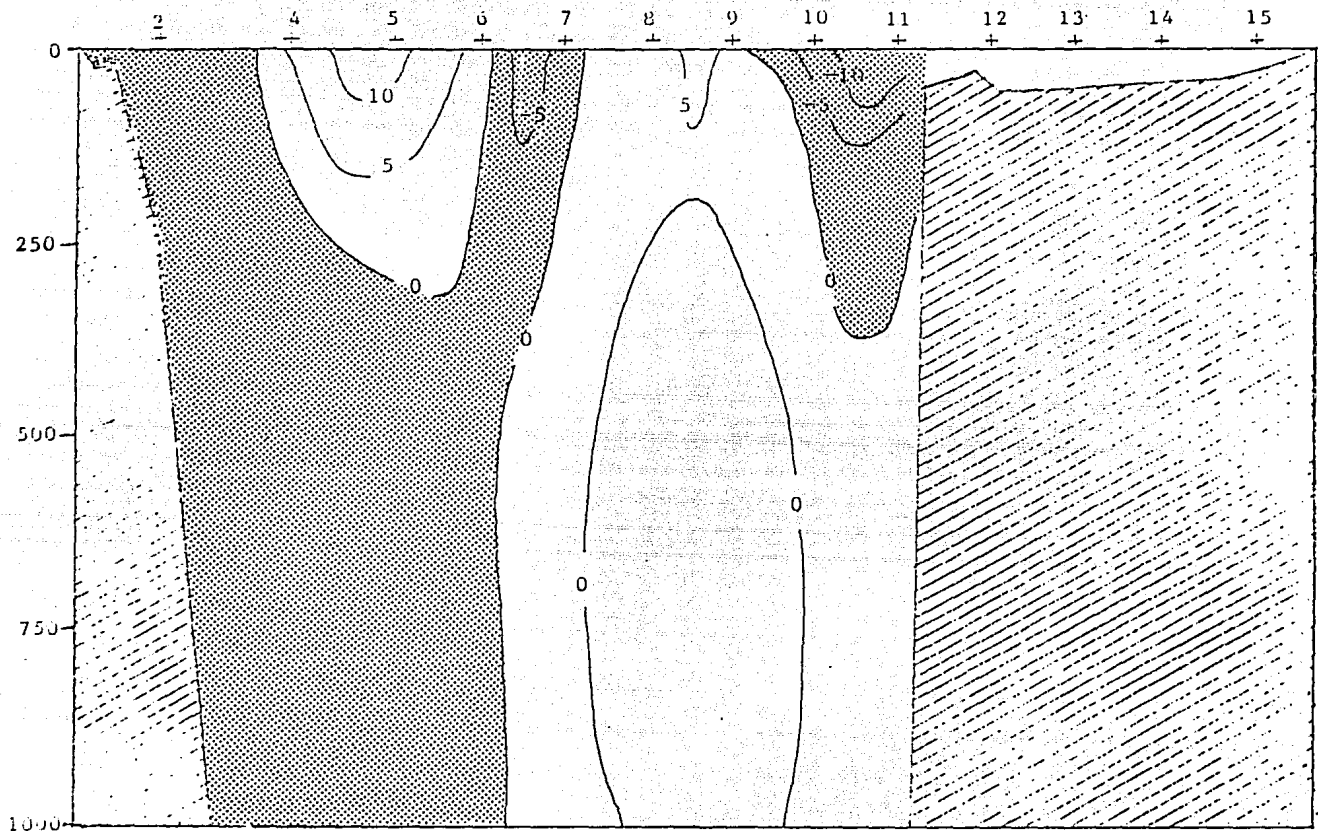


Fig.11.- Campo de velocidad obtenido con el criterio de mínima energía cinética total.

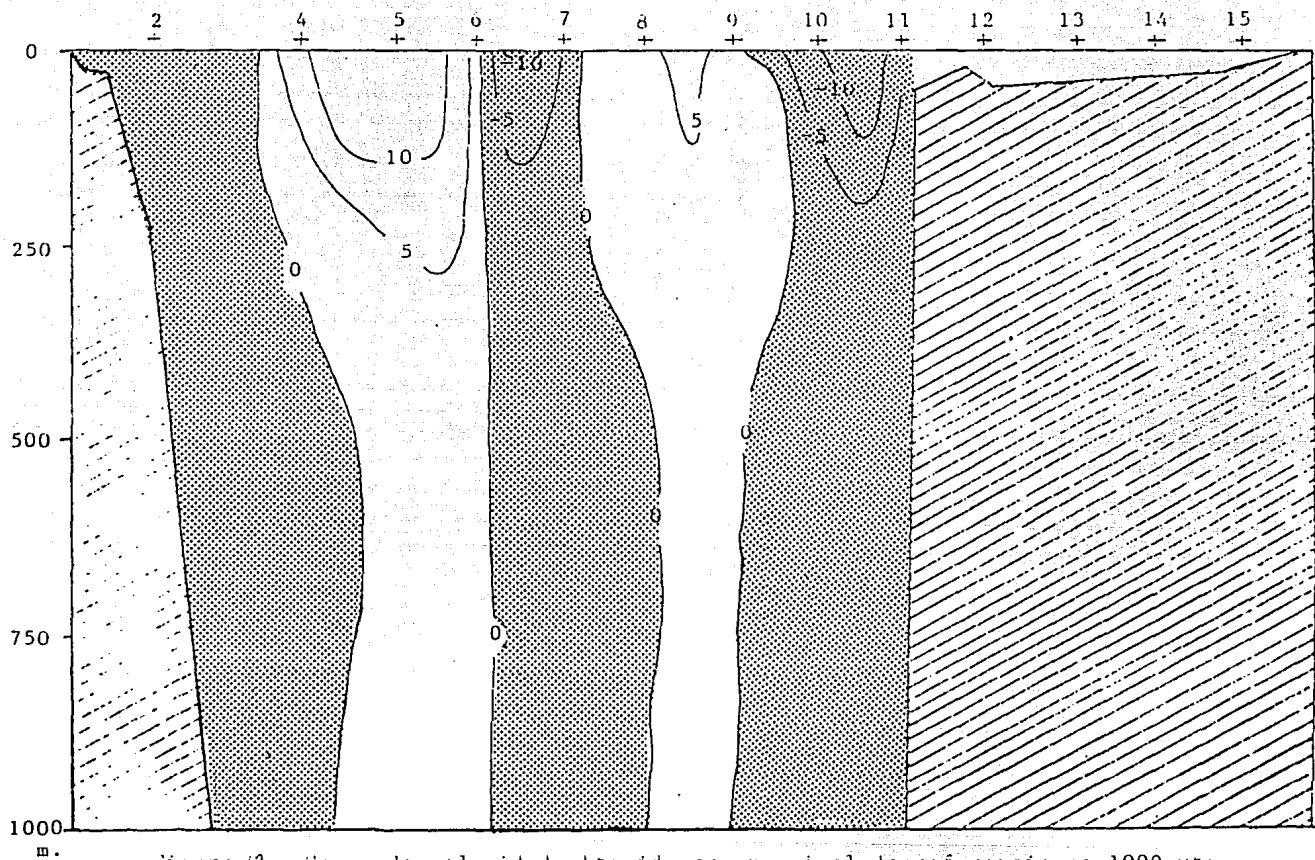


Figura 12.- Campo de velocidad obtenido con un nivel de referencia en 1000 mts.

## CAPITULO IV.

### COMPARACION DE DOS MODELOS CON METODO INVERSO EN UNA RED DE ESTACIONES EN EL ESTRECHO DE YUCATAN.

#### Introducción

En esta sección se plantea estudiar básicamente dos problemas; el primero consiste en experimentar en una cuenca no cerrada el modelo de mínima energía cinética total (MECT), y el segundo se plantea experimentar qué tanta información se gana al acoplar dos o más secciones cerradas por estaciones hidrográficas (celdas) y qué tan buena es la aproximación obtenida al sólo contar con una celda. Se comparan resultados obtenidos a partir de dos modelos distintos en método inverso lineal y se estudian dos secciones cerradas por estaciones oceanográficas con una sección común. Los modelos con que se trabaja son geostróficos con conservación de volumen en cuatro capas definidas por superficies isopícnas; en un caso con el algoritmo de mínima norma, y en el otro se minimiza el campo de energía cinética total (MECT), con las restricciones de que la circulación sea geostrófica y se conserve el volumen. Se analiza el flujo a través del Canal de Yucatán y la magnitud de las velocidades geostróficas durante mayo-junio de 1984 con datos de CTD de la campaña oceanográfica YUCA 1.

#### Area de estudio

La Corriente de Yucatán es una de las más intensas del planeta y tiene fundamental importancia por los flujos de masa y calor que transporta de latitudes tropicales hacia latitudes medias. Es parte del sistema de la Corriente del Golfo que transporta calor a lo largo de la costa Atlántica hasta alcanzar Islandia, Irlanda e Inglaterra. Para los mares de México es, sin duda, una de las principales fuentes de energía en el Golfo de México, dando origen a la

Corriente del Lazo de la que se desprenden grandes giros anticiclónicos de unos 200 kilómetros de diámetro y con corrientes reportadas de hasta  $100 \text{ cm s}^{-1}$ . Estos giros viajan hacia el oeste dando origen a pares de giros ciclónico-anticiclónico (Vukovich y Maul, 1985), hasta llegar a las costas de los estados mexicanos de Veracruz, Tamaulipas y las costas de los Estados Unidos. El sistema de la Corriente del Golfo es uno de los más estudiados del mundo; el flujo a través del Estrecho de Florida, entre Miami, Florida y las Bahamas, ha sido intensamente monitoreado mediante diversas metodologías en forma sistemática y constituye una de las series de tiempo de medición de flujos oceánicos más completa. Existen además estudios (Stommel) en el también llamado Estrecho de Florida, entre Cayo Hueso, Florida y La Habana, Cuba, en donde funcionó un cable telefónico durante 7 años con el que se hicieron mediciones del flujo neto, dos días por semana, de agosto de 1952 a enero de 1959.

La zona del Estrecho de Yucatán es la menos muestreada del sistema de la Corriente del Golfo, alcanza profundidades de hasta 1900 m, mientras que en el Estrecho de Florida hay zonas en que la profundidad es de menos de mil metros. Los flujos netos en el Estrecho de Yucatán y los de la zona Cayo Hueso-La Habana son similares debido a que el Golfo de México es una cuenca cerrada y su intercambio de agua se da a través de estos dos estrechos; por el de Yucatán entra agua proveniente del Mar del Caimán y por el Estrecho de Florida sale agua del golfo. En el Estrecho de Yucatán se han observado corrientes hacia el sur en ambas costas (Emilsson, 1971). Estudios anteriores han mostrado la presencia de una componente estacional en la variación del flujo a través de la corriente de Yucatán; Cochrane señala un máximo de la corriente durante el mes de mayo y un mínimo en noviembre. El eje de la corriente ha mostrado un control topográfico hasta la zona norte de la plataforma de Yucatán, aunque este es menos claro cuando la intensidad de la corriente disminuye. Este tipo de comportamiento se ha observado en la región del Caribe. Según Ahrens, citado por Cochrane, la corriente del Mar del Caimán y la Corriente de Yucatán

tienen a seguir las isóbatas y señala la presencia de contracorrientes costeras. Esta última característica también ha sido reportada en la sección Cayo Hueso-La Habana.

### Resultados

Los modelos que se utilizaron fueron: el de mínima norma pesado con el inverso de la distancia entre estaciones y que corresponde a minimizar la energía cinética en un nivel de referencia propuesto a priori, en este caso 1000 m, en el cual la solución está dada por

$$m = W^{-1} A^t (A W^{-1} A^t)^{-1} d ,$$

con  $W$  una matriz diagonal y  $W_{jj}$  = distancia entre la  $j$ -ésima pareja de estaciones. El otro modelo que se utilizó fué el de MECT:

$$m = [B^{-1} A^t (A B^{-1} A^t)^{-1} A B^{-1} -B^{-1}] T - [B^{-1} A^t (A B^{-1} A^t)] d$$

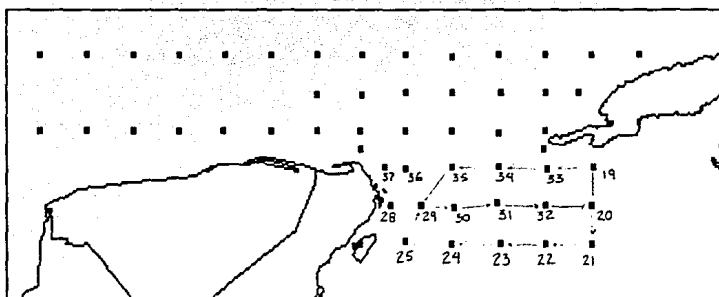
con  $B$  una matriz diagonal, donde  $B_{ii} = \sum_j A_{ij}$  y

$$T_j = \sum_j A_{ij} u_{ij}$$

es el transporte de la columna  $j$  que corresponde al campo de velocidad de referencia.

Los criterios de mínima norma y de MECT se aplicaron a dos celdas cerradas con un transecto común, y posteriormente se trabajó con un sistema con las dos celdas acopladas (figura 1). Los datos con que se trabaja provienen de CTD y fueron recolectados durante mayo-junio de 1984 en la campaña oceanográfica YUCA 1 y corresponden al periodo en que se ha reportado mayor intensidad en la corriente.





**Figura 1.** Distribución de estaciones de la campaña oceanográfica YUCA I.

A partir de una inspección de la estructura de densidad en los transectos este-oeste en la región de estudio (figura 2), se determinó una segmentación de la columna de agua en cuatro capas acotadas por las superficies en las que  $\sigma_t$  toma los valores 24.20, 26.00, 27.00 y 27.40. La primera capa de superficie a 24.20 incluye apenas la capa mezclada, buscando tener mayor resolución en los primeros 250 m, que es donde la corriente es más intensa y se observan los mayores gradientes de velocidad en la vertical.

Al evaluar las matrices inversas que aparecen en las soluciones por el método de descomposición en valores singulares es necesario adoptar un criterio para definir cuáles de los valores propios son significativamente diferentes de cero. El criterio seguido para adoptar esta decisión se basa en los tamaños relativos de los valores propios y en los cambios observados en la velocidad resultante para la zona superficial al incluir más términos en el cálculo de la solución (figuras 3 a 10).

En los casos en que se trabajaron las celdas en forma independiente, tanto con el modelo de mínima norma pesado como con el de mínima energía cinética total, la diferencia numérica entre el primero y el segundo valores propios es aproximadamente de dos órdenes de magnitud y de tres para el tercero, mientras que cuando se trabajaron las dos celdas acopladas, el primero y segundo valores propios son del mismo orden de magnitud y el tercero de dos órdenes de magnitud menor que el primero (figura 3). Considerando que buscamos la parte con una señal más intensa y aceptamos que ésta tiene la mayor parte de la información del modelo, resulta difícil plantearse incorporar más de dos términos de la descomposición en valores singulares en los cálculos para el caso de celdas separadas, y tres para el de celdas acopladas. Usualmente (Wunsch 1982, Zavala 1986) se ha planteado incluir aquellos términos que den resultados razonables dentro de los límites numéricos de la computadora con que se hacen los cálculos y mientras no aparezcan señales de alta frecuencia que den datos irreales. Sin

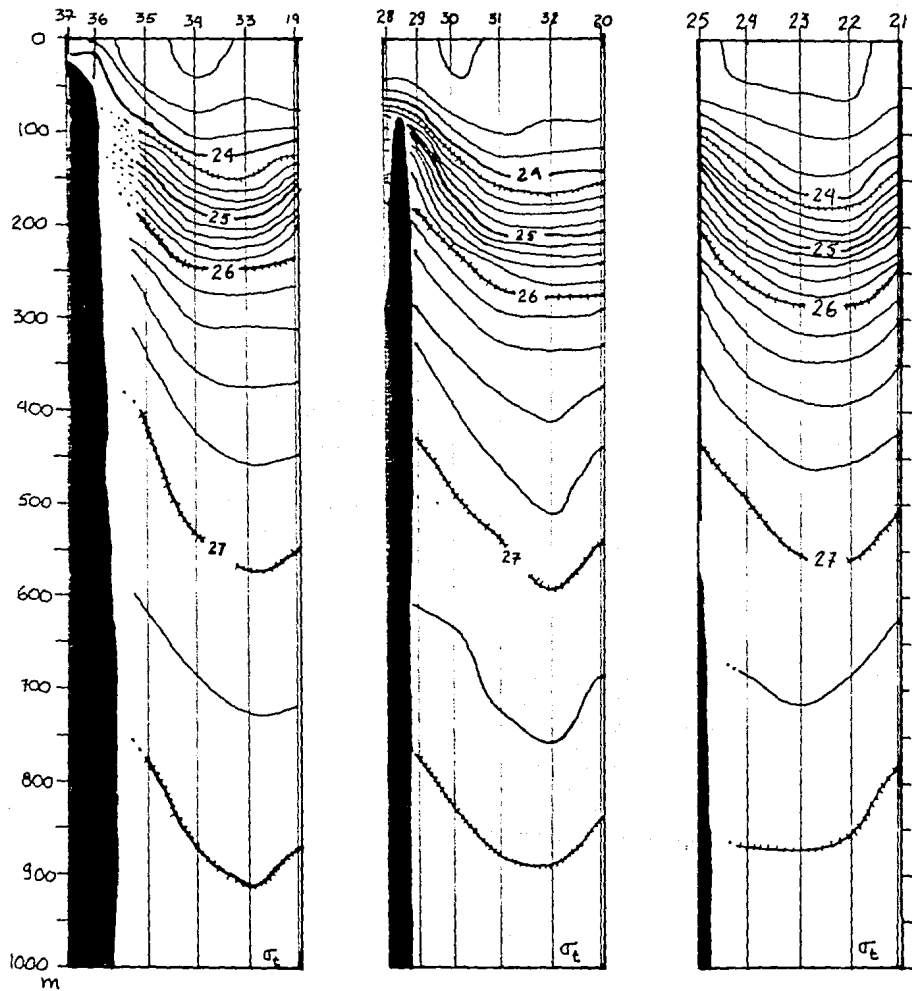
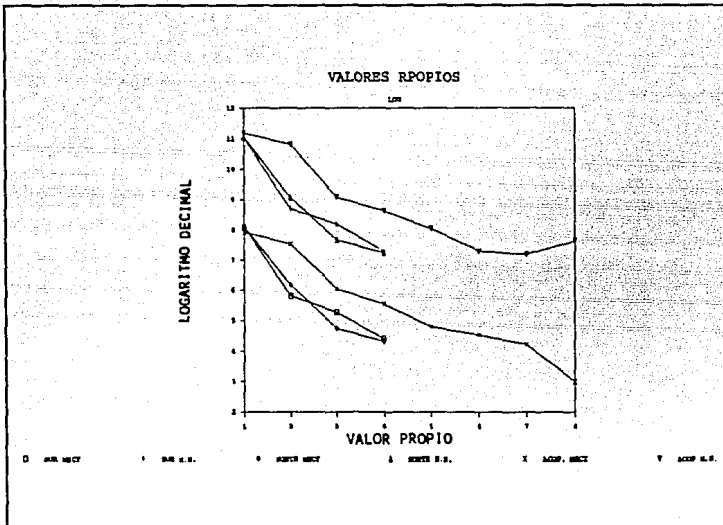
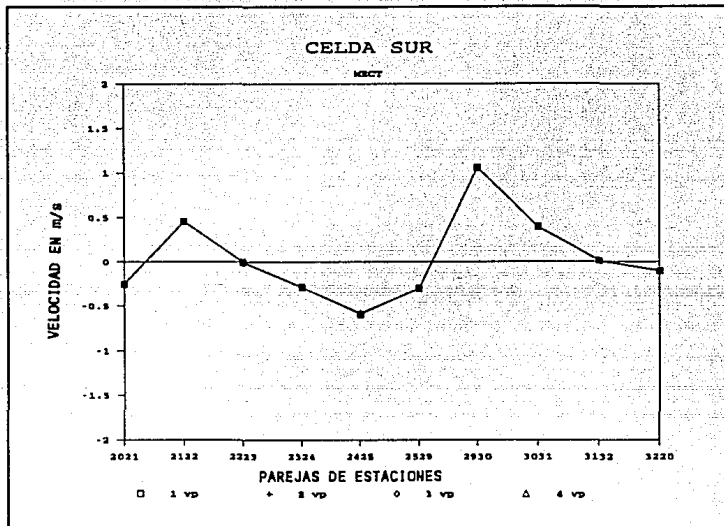


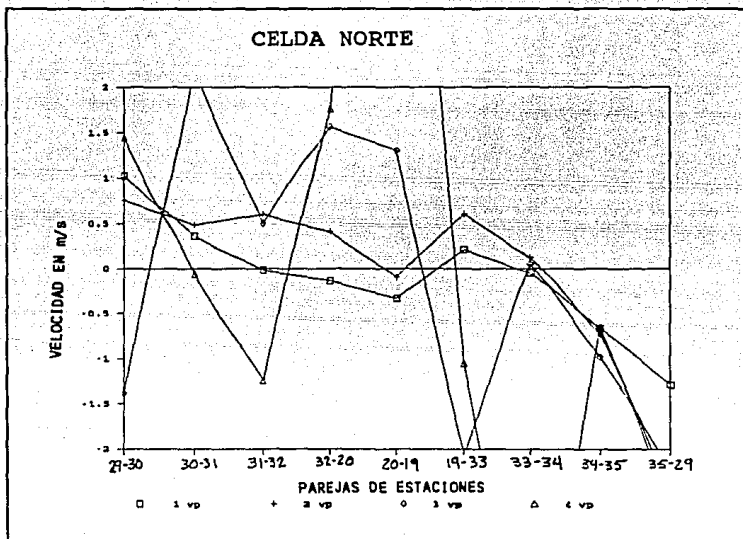
Figura 2. Distribución vertical de densidad en el área de estudio.



**Figura 3.** Logaritmo decimal de los valores propios de los modelos trabajados.



**Figura 4.** Velocidad en superficie con el modelo de MECT.



**Figura 5.** Velocidad en superficie con el modelo de mínima norma.

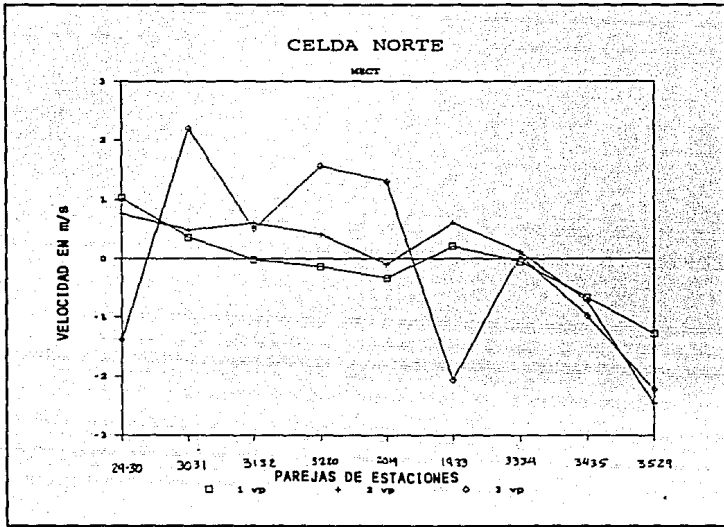
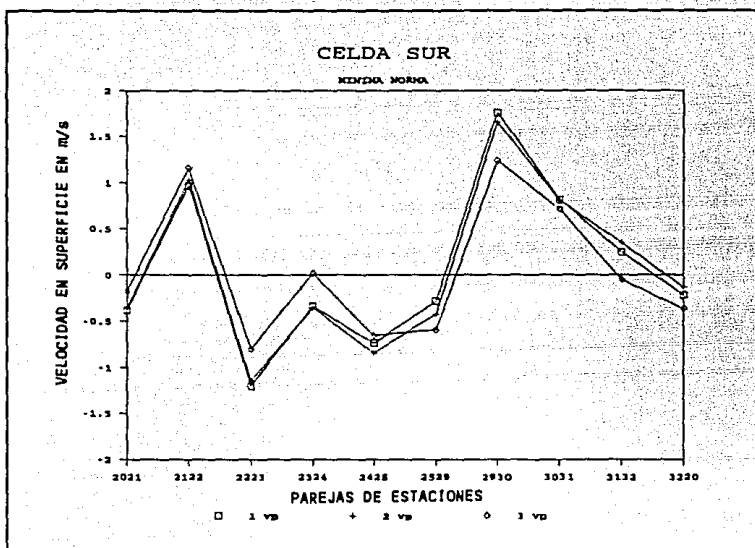
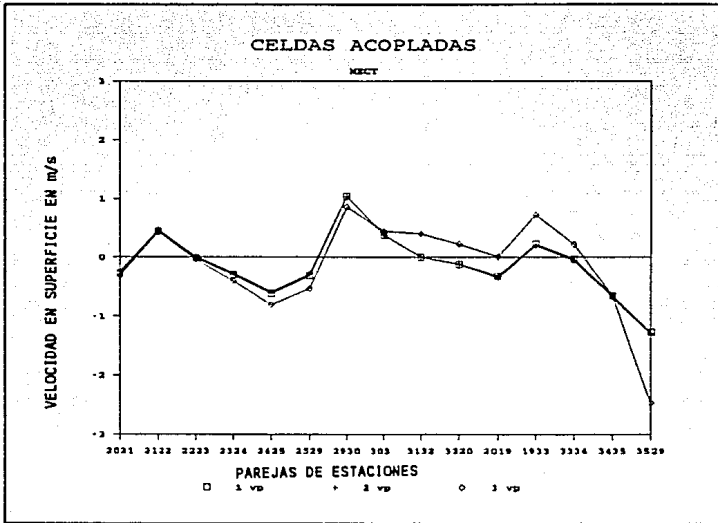


Figura 6. Velocidad en superficie con el modelo de MECT. Celda norte.

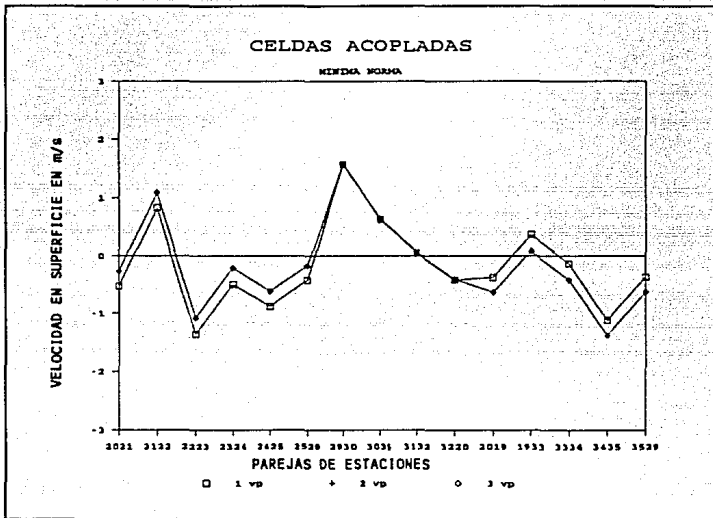


**Figura 7.** Velocidad en superficie con el modelo de mínima norma.





**Figura 8.** Velocidad en superficie con el modelo de MECT. Celdas acopladas.



**Figura 9.** Velocidad en superficie con el modelo de mínima norma.

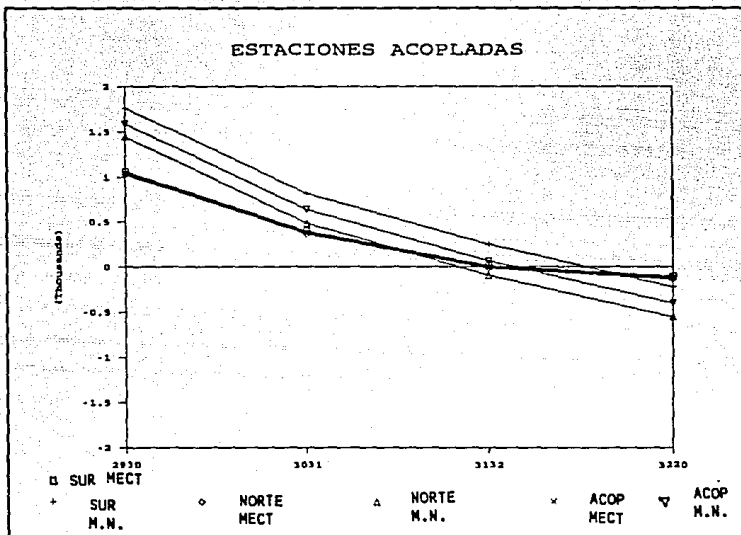


Figura 10. Velocidad en superficie con distintos modelos.

embargo, los argumentos arriba expuestos junto con el resultado sobre la sensibilidad de la matriz de covarianza al incorporar valores propios pequeños, sugieren ser muy cautelosos al incorporar más términos. Debe subrayarse que se puede afirmar que, en general, al incluir menos términos en el cálculo de la solución, se acerca uno más a la propuesta a priori del modelo. Cabe señalar que en los seis casos con que se trabajó, al incluir todos los términos en el cálculo, se satisface plenamente la condición de conservación de volumen<sup>1</sup>, aunque en casi todos los casos cuando se incluyen todos los términos en el cálculo se obtienen velocidades irreales, mayores de 10 m/s (figura 5).

Otra característica que se observa es una clara tendencia a la presencia de velocidades con mayor magnitud cuando se usa el modelo que minimiza la velocidad en el fondo en comparación con los resultados del modelo de MECT. Estos resultados difieren de los obtenidos en el estudio del Golfo de México en el capítulo anterior, en donde los resultados con los dos modelos son similares.

En el modelo de mínima norma (figura 9) coinciden los resultados en la zona acoplada al incluir los tres primeros términos. En las zonas no acopladas la coincidencia se mantiene al incluir dos o tres términos, pero difiere del resultado al incluir sólo uno.

Las restricciones en el sistema acoplado incluyen las de los sistemas separados y además la condición de una misma solución para

---

<sup>1</sup> A diferencia de los resultados observados en el estudio del capítulo anterior en que al incluir la totalidad de los valores propios los transportes residuales se disparaban, en este caso tienden a cero. Esto se atribuye a que en éste estudio se incorporaron para el cálculo numérico de la descomposición en valores singulares rutinas comerciales (Numerical Recipes 1988) y se trabajó con más dígitos por hacerlo con otro lenguaje y otro tipo de computadora.

cuatro parejas de estaciones. Esto produce un resultado consistente en esas cuatro estaciones con el modelo de mínima norma pues coinciden los resultados al incluir de uno a tres términos, no así en el modelo de MECT. Sin embargo, las tres configuraciones (dos de celdas separadas y la de celdas acopladas) dan distintos resultados para la región acoplada con el modelo de mínima norma, mientras que se observa mayor coincidencia entre los distintas pruebas con el modelo de MECT (figura 10).

Con base en la discusión arriba expuesta resulta difícil elegir una mejor solución. Aunque en principio parece lógico trabajar con el modelo de mínima norma acoplado, la elección de la solución con uno o dos términos parece difícil, pues de la pareja 20-19 a la 35-29 las velocidades tienen sistemáticamente un incremento positivo con relación a las soluciones con dos o tres términos (figura 9). Algo similar se observa de la pareja 20-21 a la 25-29 pero con un incremento negativo. El punto más polémico de estos resultados es la pareja 19-33, en la zona oeste, pues con un valor propio aparece una corriente significativa hacia el sur (del orden de  $30 \text{ cm s}^{-1}$ ), mientras que con dos o tres valores propios es menor de  $10 \text{ cm s}^{-1}$ . Al observar los resultados del modelo de MECT en esta zona y compararlo con estos resultados se observa que para el cálculo con uno y dos términos los resultados coinciden entre sí, y al compararlos con los del modelo de mínima norma, en general la magnitud de la velocidad es menor. Esta diferencia es más intensa en la pareja 22-23 en que prácticamente se obtiene un flujo cero con el modelo de MECT contra más de  $100 \text{ cm/s}$  con el de mínima norma, y en la pareja 35-29 se obtiene una corriente de más de  $100 \text{ cm s}^{-1}$ , a diferencia del modelo de mínima norma en que se obtienen corrientes de la mitad de esa magnitud en esa zona (figura 8). Para la pareja 19-33 se obtienen resultados con flujo considerable hacia el sur, similares a los que se obtienen con un término en el modelo de mínima norma.

En base a la discusión anterior, se decidió optar por el

cálculo de los flujos con el modelo de mínima norma con celdas acopladas y el de MECT con celdas acopladas. Los cálculos de transportes se realizan con dos términos. Los resultados del modelo de MECT pueden considerarse como una cota mínima al transporte en ese periodo. El flujo sur-norte y norte-sur para la capa superficial de 250 m y para la capa entre 250 y 1000 m de profundidad se presentan en la Tabla 4.1.

Tabla 4.1

| Transecto                | flujo<br>norte-<br>sur<br>0 a 250m | flujo<br>sur-<br>norte<br>0 a 250m | flujo<br>norte<br>sur<br>250 a<br>1000m | flujo<br>sur-<br>norte<br>250 a<br>1000m | flujo<br>total<br>sur-<br>norte |
|--------------------------|------------------------------------|------------------------------------|---|--|---------------------------------|
| 29 a 20<br>M. N.<br>2 vp | 12.5 Sv                            | 18.5 Sv                            | 9.5 Sv                                  | 9.4 Sv                                   | 27.9 Sv                         |
| 29 a 20<br>MECT<br>2 vp  | 1.5 Sv                             | 9.6 Sv                             | 19.6 Sv                                 | 3.4 Sv                                   | 13.0 Sv                         |

Los resultados obtenidos con ambos modelos son menores a los reportados con anterioridad. El flujo neto con el modelo de mínima norma es de 6 Sv hacia el norte, y de 8.1 Sv hacia el sur con el modelo de MECT. Los flujos reportados por Molinari (1977) son 20.8 Sv por encima de la superficie donde  $\sigma_t = 27.0$ , que se sitúa cerca de los 500 m (figura 2). Estos resultados no son muy diferentes a los que se encuentran con el modelo de mínima norma porque la mayor parte del flujo sur-norte se encuentra precisamente por encima de los 500 m y Molinari mismo encuentra flujos hacia el sur en zonas profundas. Entre Cayo Hueso y La Habana, Brooks y Niller (1975) encuentran un flujo de  $21.4 \pm 2.3$  Sv por encima de la superficie de  $\sigma_t = 27.0$  para el verano de 1972, y los resultados del cable telefónico entre Cayo Hueso y La Habana reportados por Stommel en el periodo de agosto de 1952 a mayo de 1955 dan un flujo promedio

de 25.4 Sv con una desviación estandar de 5.27 Sv. Estos resultados están por encima de los que aquí se obtuvieron con los dos modelos, siendo el de mínima norma el más cercano.

Las velocidades superficiales obtenidas con ambos modelos rebasan los 100 cm/s y son similares a las de estudios anteriores, pero en el modelo de MECT son consistentemente menos intensas.

Un aspecto que debe considerarse es que en este caso la zona occidental no está completamente incluida en los cálculos debido a las características del muestreo (figura 2), y por ello se pierde parte del flujo hacia el norte porque ahí es donde la corriente es más intensa.

### Discusión

De acuerdo con los transportes reportados por otros autores, se considera como la mejor aproximación la del modelo de mínima norma que presenta las mayores magnitudes de la velocidad; se encuentra una tendencia a disminuir la magnitud de la velocidad con el criterio de MECT, y los resultados se alejan más de los reportados para la zona que los del modelo de mínima norma. Esto se debe a que existe una tendencia en el modelo de MECT a que existan flujos en ambos sentidos en cada pareja de estaciones. En este caso se observan intensos flujos hacia el sur en las aguas profundas mientras que se dá un flujo hacia el norte en las capas superficiales, excepto para la zona oriental.

Al acoplar dos celdas no parece ganarse mucha información, en los dos modelos se observan resultados muy similares a los obtenidos con celdas separadas, (figura 10).

Los criterios de eliminación de valores propios deben acotarse a los tamaños relativos de éstos ( $\lambda_1/\lambda_n$ ) de tal suerte que se

mantengan sólo aquellos términos que representen un determinado porcentaje de la información, asumiendo que la componente geostrófica representa la parte más intensa de la señal. Uno de los aspectos que podría reforzar los modelos en esta zona es incluir conservación de trazadores (vorticidad, temperatura, oxígeno o salinidad), que son los trazadores con que se cuenta en esta campaña.



## CAPITULO V.

### COMPARACION DE RESULTADOS AL INCORPORAR EN EL MODELO LA CONSERVACION DE NUTRIENTES. EVALUACION EN EL ESTRECHO DE FLORIDA.

#### Introducción

En forma análoga al capítulo anterior se plantea estudiar dos problemas. El primero es probar los modelos con que se ha venido trabajando en otra región cerrada por estaciones oceanográficas. El segundo problema es determinar qué tanta información se gana al incorporar en el modelo la conservación de un nutriente ( $PO_4$ ) con una relación no lineal con respecto a  $\sigma_t$ , buscando que la información que aporte la conservación de nutrientes no sea redundante con relación a la del campo de densidad. Se comparan los resultados del modelo geostrófico con conservación de volumen y de un nutriente con los de otros dos modelos en método inverso lineal, ambos geostróficos con conservación de volumen en seis capas definidas por superficies isopícnas: en un caso se utiliza el algoritmo de mínima norma cuya propuesta a priori es velocidad cero en 1000 m, y en el otro el modelo de MECT. Se analiza el flujo entre Cayo Hueso y La Habana y las velocidades geostróficas durante abril de 1991 con datos de CTD de la campaña oceanográfica YUCA 3.

Diversos autores llaman indistintamente Corriente de Florida al flujo entre Cayo Hueso-La Habana y a la corriente entre Miami y los bancos de Bahamas. Estos flujos no son necesariamente iguales, generalmente es más intenso el flujo en la región de Miami por el aporte del Canal de Bahamas. Algunos autores para diferenciar una región de otra se refieren a la Corriente de Florida en Cayo-Hueso y a la Corriente de Florida en Miami. Aquí se entenderá por Corriente de Florida a la Corriente entre Florida y Cuba, excepto cuando se aclare que se está refiriendo a la zona de Miami.

La Corriente de Florida, al igual que la de Yucatán, es una de

las más intensas del planeta y tiene fundamental importancia por los flujos de masa y calor que transporta de latitudes tropicales hacia latitudes medias. Es parte del sistema de la Corriente del Golfo y en algún sentido puede decirse que es la continuación de la Corriente de Yucatán después de que ésta forma la llamada Corriente del Lazo en la región noreste del Golfo de México. Este tramo del sistema de la Corriente del Golfo ha sido objeto de interesantes estudios. En ella se ha observado un flujo máximo en mayo y mínimo en noviembre y persistentes contracorrientes costeras en el norte, (Cochrane, J.). De las variaciones que sufre el flujo de esta corriente, a la componente estacional se le atribuye el 45% (Niiler, P. y Richardson, 1973). El flujo a través de este estrecho fué monitoreado de agosto de 1952 a marzo de 1959 mediante mediciones de la diferencia de potencial entre las dos costas (Stommel, H.), tomándose muestras dos veces por semana en días consecutivos en forma casi ininterrumpida. Los resultados que se obtuvieron para el periodo agosto de 1952 a mayo de 1956 fueron de  $25.4 \times 10^6 \text{ m}^3/\text{s}$  con una desviación estandar de  $5.3 \times 10^6 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ . Este estudio constituye una de las series de tiempo más completa que existen para evaluar la variabilidad de los flujos. Brooks, I. y Niiler, P. (1975), encuentran que la contracorriente alcanza velocidades de  $25 \text{ cm s}^{-1}$ , la corriente de  $145 \text{ cm s}^{-1}$  y un transporte de  $21.4 \pm 2.3 \text{ Sv}$  por encima de la superficie donde  $\sigma_t = 27.0$ . A la latitud de Miami, Niiler y Richardson (1973) encontraron, en un estudio de 90 transectos, corrientes de  $33.6 \text{ Sv}$  a principios del verano y de  $25.4 \text{ Sv}$  a principios del invierno.

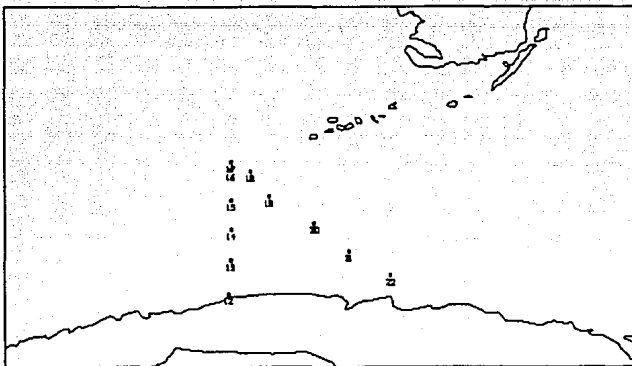


Figura 1. Localización del área de estudio. Muestreo hidrográfico con CTD.

## Resultados

Se utilizaron tres modelos: 1) mínima norma, geostrofico, con peso de acuerdo a la distancia entre estaciones, conservación de volumen en seis capas y un nivel de referencia propuesto a priori, en este caso 1000 m; 2) el modelo anterior agregando conservación de un nutriente ( $PO_4$ ) en las mismas seis capas; y 3) el modelo de mínima energía cinética total.

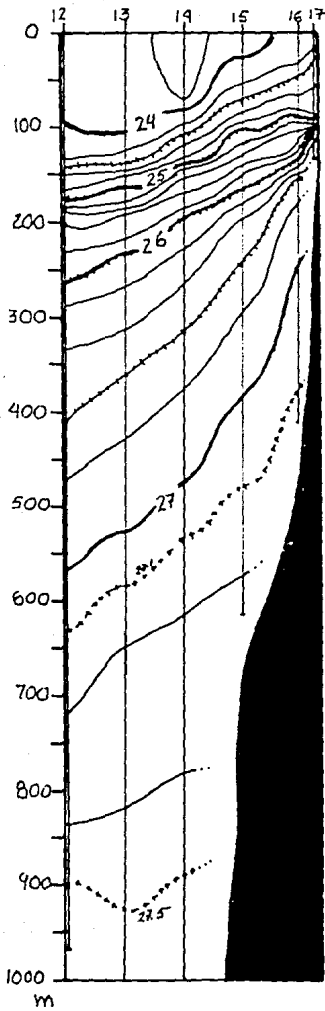
Los criterios de mínima norma y de mínima energía cinética total se aplicaron al sistema acoplado de dos transectos, La Habana-Cayo Hueso y Cayo Hueso-Cuba (figura 1). Los datos con que se trabaja provienen de CTD y representan un muestreo prácticamente sinóptico, realizado el 6 de abril de 1991 (este periodo es un mes antes del periodo en que se ha reportado mayor intensidad en la corriente).

A partir de una inspección de la estructura de densidad ( $\sigma_t$ )

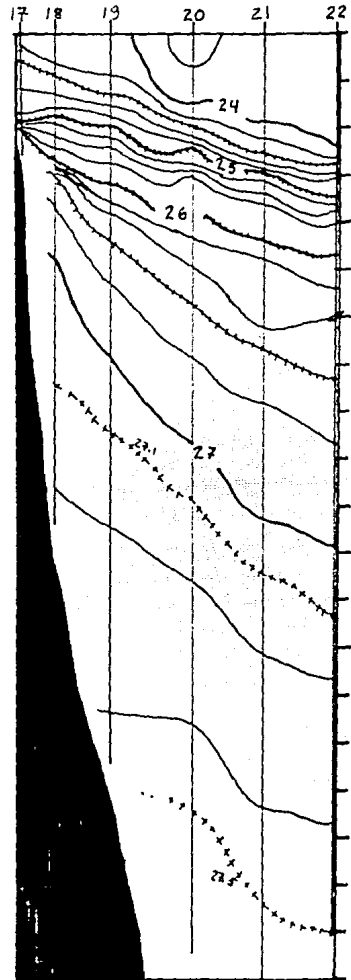
en los transectos de la región de estudio (figuras 2 y 3) se determinó una segmentación de la columna de agua en seis capas acotadas por las superficies en las que  $\sigma_t$  toma los valores 24.40, 25.00, 26.00, 26.60, 27.10 y 27.50. El aumento en el número de capas con relación a los capítulos anteriores, busca tener mayor resolución en los primeros 250 m, que es donde la corriente es más intensa y se observan los mayores gradientes de velocidad en la vertical.

Al evaluar las matrices inversas que aparecen en las soluciones por el método de descomposición en valores singulares es necesario adoptar un criterio para definir cuáles de los valores propios deben incluirse en el cálculo de la solución. En el capítulo III se utiliza el criterio de evaluar los transportes residuales y en el capítulo IV se señala que este criterio puede llevar a soluciones irreales, aún cuando los residuales disminuyan, por lo que se propone utilizar únicamente el criterio de los tamaños relativos de los valores propios y los cambios observados en la velocidad resultante para la zona superficial. En este capítulo se analizó este problema, evaluando los transportes residuales, los tamaños relativos de los valores propios y las velocidades obtenidas (figuras 4 a 7, 11 y 12).

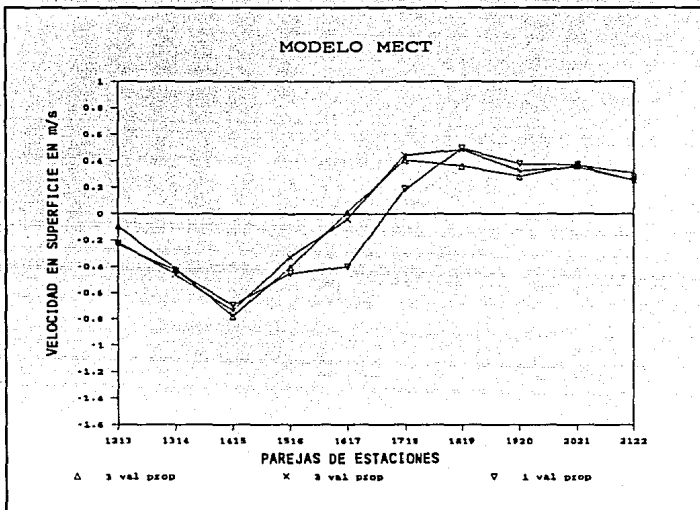
Con el modelo de MECT con dos y tres términos en el cálculo de la solución se observan resultados muy similares, y difieren, dentro de rangos aceptables, del resultado obtenido con un término. La solución que parece más consistente, de acuerdo con los criterios arriba discutidos, es la obtenida con dos términos. En el modelo de mínima norma con conservación de volumen se observan las mismas características que en el modelo de MECT pero con flujos persistentemente mayores, y la solución que parece más consistente es la de dos términos. Cuando se agrega al modelo la condición de conservación de un nutriente se observa que las soluciones obtenidas con uno y dos términos son prácticamente iguales, y al agregar un tercer término se presenta una variante dentro de los rangos aceptables, pero con un valor propio 3 órdenes de magnitud



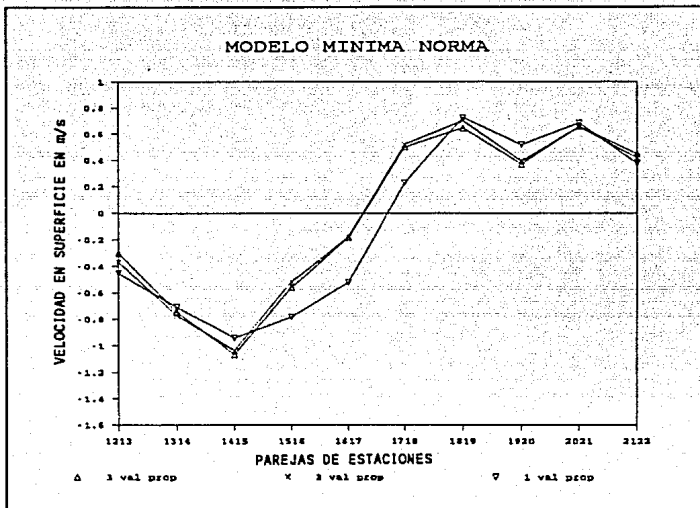
$\sigma_t$



Figuras 2 y 3. Distribución vertical de densidad en el área de estudio.



**Figura 4.** Velocidad en superficie con el modelo de MECT.



**Figura 5.** Velocidad en superficie con el modelo de mínima norma.

# MODELO MINIMA NORMA CON NUTRIENTES

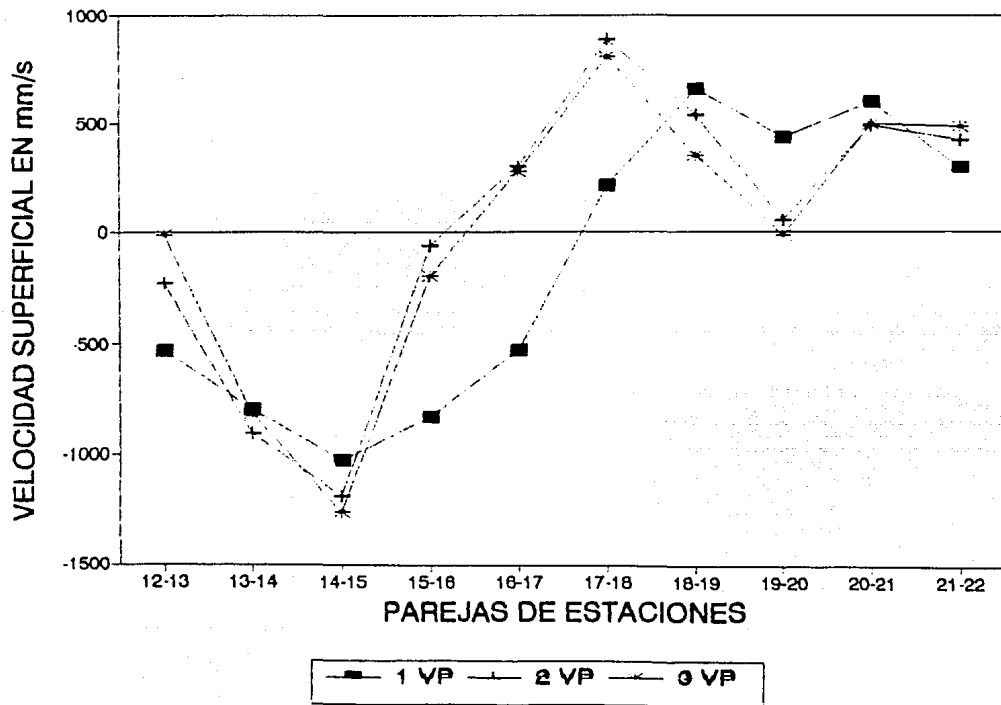
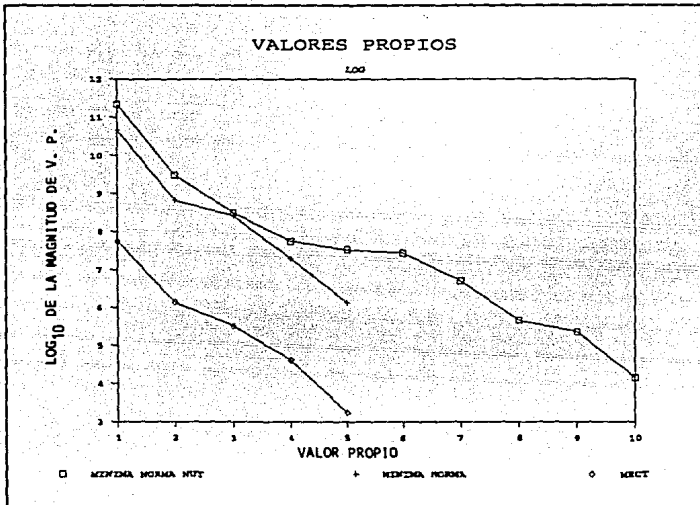


Figura 6. Velocidad en superficie con el modelo de mínima norma con nutrientes.





**Figura 7.** Logaritmo decimal de los valores propios de los distintos modelos.

## COMPARACION DE RESULTADOS 3 MODELOS DIFERENTES

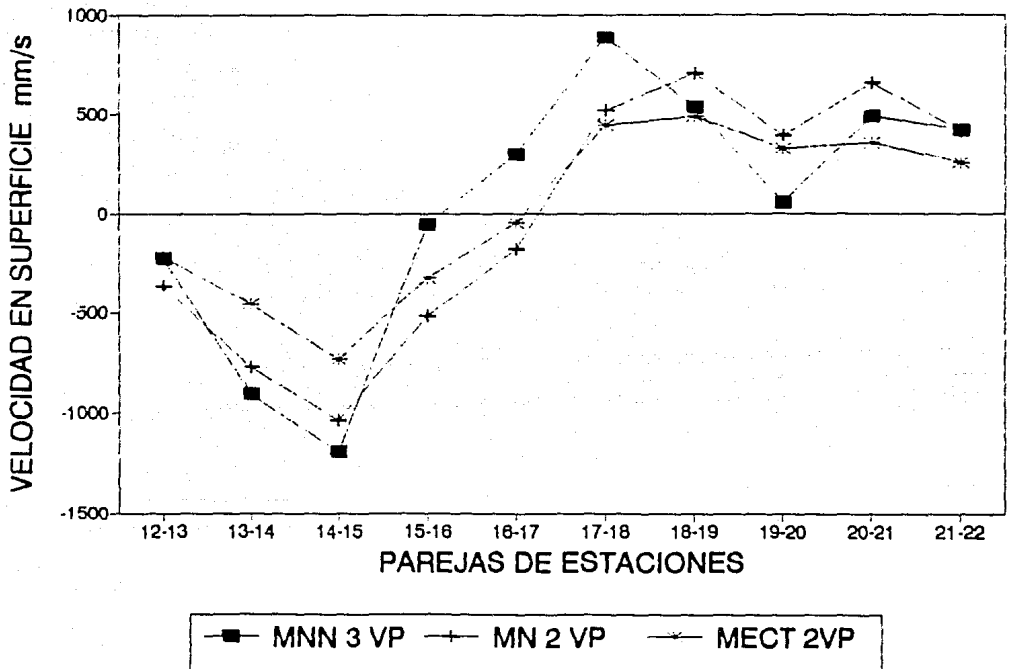


Figura 8. Velocidad en superficie con los tres modelos que se trabajaron.

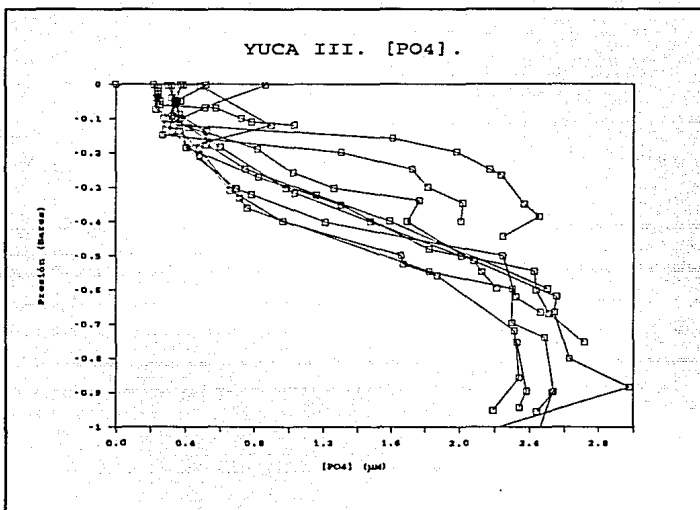


Figura 9. Concentración de PO<sub>4</sub> en distintas profundidades para el conjunto de estaciones.

más pequeño. La solución con tres términos incrementa la magnitud de la velocidad entre las estaciones 15-16 y 16-17 a diferencia de los modelos anteriores que la redujeron. Esta región es la que tiene mayor incertidumbre porque involucra estaciones someras, y para el cálculo de la velocidad entre dos estaciones de distinta profundidad se mantuvo la velocidad relativa en la zona más profunda de la estación somera. Esta extrapolación es cuestionable en regiones en donde el gradiente de la velocidad en la parte más profunda es relativamente grande. Se hicieron pruebas extrapolando la velocidad, manteniendo el gradiente en la zona profunda y haciendo tender a cero la  $\partial v/\partial z$  en un intervalo de 50 m, y se alcanzaron velocidades irreales. Al aplicar método inverso estas velocidades se corrigen, pero se mantienen más altas que cuando no se hace esta extrapolación (figura 8). La única solución razonable para este problema es un muestreo más intenso en estas zonas.

Siguiendo los argumentos del capítulo anterior y en base a los resultados de las figuras 4 a 7 se optó por hacer los cálculos de los flujos con 2 términos para el modelo de mínima norma con nutriente ( $PO_4$ ), mínima norma sin nutrientes y el de MECT.

Se calcularon los flujos para la capa de superficie hasta 250 m y para la capa entre 250 y 1000 m de profundidad; los resultados se presentan en la Tabla 5.1.

Tabla 5.1

| Transecto<br>La Habana -<br>Cayo Hueso    | flujo<br>hacia el<br>este<br>0 a 250m | flujo<br>hacia el<br>oeste<br>0 a 250m | flujo<br>hacia el<br>este<br>250 a<br>1000m | flujo<br>hacia el<br>oeste<br>250 a<br>1000m |
|---|---------------------------------------|--|---|--|
| 12 a 17<br>M. N.<br>2 vp                  | 17.0 Sv                               | 0.3 Sv                                 | 7.8 Sv                                      | 0  |
| 12 a 17<br>M.N. con<br>Nutrientes<br>2 vp | 14.1 Sv                               | 1.6 Sv                                 | 14.6 Sv                                     | 2.9 Sv                                       |
| 12 a 17<br>MECT<br>1 vp                   | 9.4 Sv                                | 0                                      | 0   | 12.1 Sv                                      |

### Discusión

Al comparar los tres modelos, el resultado más importante que se observa es una tendencia a disminuir las magnitudes de las velocidades y los flujos con el modelo de MECT en comparación con los de mínima norma. Para tener una conclusión definitiva al respecto habría que comparar estos resultados con mediciones directas de los flujos ó con mediciones basadas en otros métodos y realizadas en forma simultánea. Las diferencias que se observan entre el modelo de mínima norma con conservación de nutrientes y sin ellos, se atribuyen a las restricciones que se agregan y en ese sentido debe considerarse que al incluir nutrientes se conoce mejor la circulación, considerando con cautela los resultados de las parejas 15-16, 16-17 y 17-18. Como la distancia entre las estaciones 16 y 17 es relativamente pequeña (figura 2), el efecto de este problema en el flujo total es menor.

Comparando los resultados con los obtenidos con anterioridad para esta zona, los de mínima norma con nutrientes y sin nutrientes

TRANSPORTES RESIDUALES POR CAPAS  
MINIMA NORMA CON NUTRIENTES (PO4)

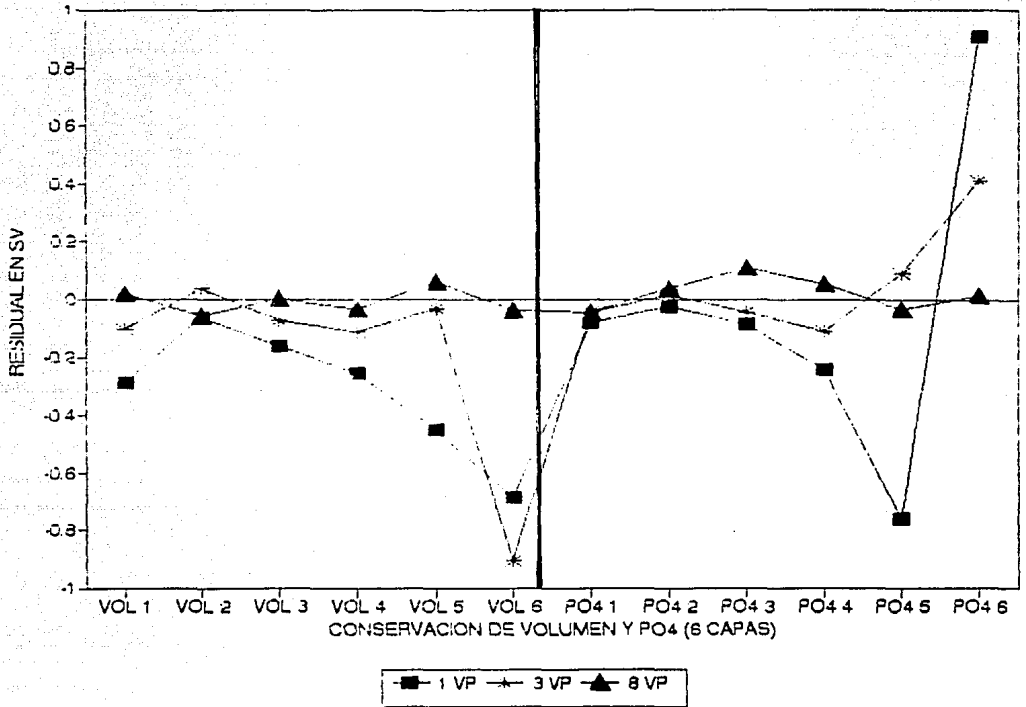


Figura 10. Transportes residuales calculados con los resultados al incluir 1, 3 y 8 valores propios. En la parte derecha de la gráfica se muestran los residuales del volumen/seg. multiplicado por la concentración de PO4 en  $\mu\text{M}$ .

## MODELO MINIMA NORMA CON NUTRIENTES

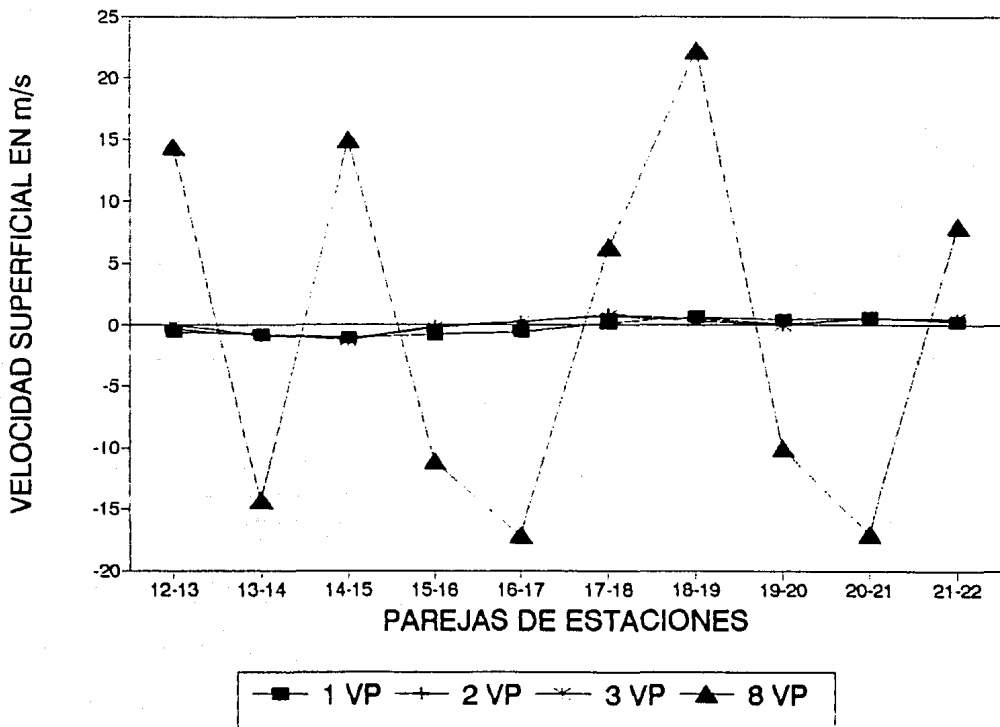


Figura 11. Comparación de la velocidad en superficie obtenida con el modelo de mínima norma con nutrientes al incluir los resultados con 1, 2, 3 y 8 términos.

están dentro del rango obtenido por otros autores:  $21.4 \pm 2.3$  Sv por encima de  $\sigma_t = 27.0$  en mayo de 1972 (Brooks & Niller, 1975) y 25.4 Sv con desviación estandar de 5.3 Sv para el periodo de agosto de 1952 a mayo de 1956 (Stommel). Los resultados del modelo de MECT reportan flujos similares en ambas direcciones, lo que no se ha reportado antes ni lo sugiere así la estructura del campo de densidad.

Uno de los puntos más interesantes que se desprenden de la discusión a lo largo de este trabajo es el problema de decidir cuántos términos incluir en el cálculo de la solución. Para ilustrar este problema se hicieron los cálculos de los transportes residuales con uno, dos y ocho términos con el modelo de mínima norma con nutrientes (figura 11), mostrándose que al incluir ocho términos los transportes residuales disminuyen, pero las velocidades alcanzan magnitudes irreales (figura 12). Esto muestra que el utilizar los transportes residuales como criterio de elección del número de valores propios es en algunos casos inadecuado.

Es posible estudiar cómo se mapean los errores al incluir distinto número de términos en el cálculo de la solución. La matriz de error asociada a los datos (ecuación 2.31), es:

$$C = (A^t C_0 A)^{-1} ,$$

suponiendo que  $C_0 = \alpha I$  es una matriz diagonal (los datos no están correlacionados) y sustituyendo  $A$  por su descomposición en valores singulares, se obtiene:

$$C = ((U \Lambda V^t)^t \alpha I (U \Lambda V^t)^{-1}) .$$

Al reducir términos se llega a:

$$C = \alpha (V^t \Lambda^{-2} V) ,$$



de donde se observa que los errores crecen con el inverso del cuadrado de la magnitud de los valores propios, concluyéndose que al incluir más términos no siempre se gana información. Esto explica los resultados de las figuras 11 y 12.

## CONCLUSIONES

1. Dentro de la teoría inversa lineal de mínimos cuadrados es posible cerrar el modelo con información a priori que minimice (maximice) una función de los parámetros del modelo ( $\mathbf{m}$ ), con un gradiente de la forma  $\mathbf{B} \mathbf{m} + \mathbf{b}$  con  $\mathbf{B}$  una matriz y  $\mathbf{b}$  un vector. Esta generalización de los mínimos cuadrados lineales debe seguirse trabajando en el sentido de acoplar varios modelos a la vez, dando distinto peso a cada uno de ellos. Las soluciones que comúnmente se han usado en oceanografía se han limitado a minimizar una distancia, pesada o no,  $(\mathbf{m} - \mathbf{m}_0)$ . El modelo de mínima energía cinética total es un buen ejemplo de esta generalización.

2. Los resultados experimentales con el modelo de mínima energía cinética total (MECT) en la Corriente de Yucatán y la Corriente de Florida mostraron una tendencia a reducir los flujos en relación con los modelos de mínima norma; estos resultados manifiestan una debilidad importante de este modelo. Una ventaja del modelo de MECT es que la solución no depende de un nivel inicial de referencia, pero hay que subrayar que sí depende de la profundidad a la cual se muestrea. Sin embargo, considerándolo como un modelo a priori como cualquier otro, sus posibilidades dependen del problema específico. Habrá que experimentar con él en distintos casos para tener más elementos para evaluarlo. Cuando se use el modelo de MECT debe buscarse un muestreo profundo para que el efecto de la disminución de flujos superficiales se vea neutralizado por las contracorrientes profundas y/o sus bajos gradientes de velocidad.

3. A pesar de que se ha hablado de un nivel de referencia, en los modelos de mínima norma no hay ningún requisito para que éste sea isobárico o isopicno, tampoco en el sentido de que la propuesta a priori sea una región de cero movimiento.

4. Se ha mostrado que se pueden agregar las más diversas restricciones al modelo: datos de corriente a priori, conservación de trazadores dinámicos, químicos, biológicos o radioactivos, y propuestas sobre el tipo de solución que se espera, como minimizar las diferencias en la magnitud de los parámetros del modelo, la distancia a una propuesta a priori o una función de los parámetros del modelo. Las posibilidades que en este sentido ofrece el método inverso lineal son muy amplias.

5. La teoría lineal no se restringe a los métodos de norma  $L_2$  que implican una estadística gaussiana. Aquí se trabajó con este modelo por ser el más desarrollado en la oceanografía. Cuando el modelo no tiene una estadística gaussiana esta no es una buena elección, pero en caso de que existan dudas sobre el comportamiento de algunos datos estos pueden manejarse dándoles poco peso en la solución del modelo. Otros algoritmos también han sido utilizados en oceanografía como la programación lineal y la no lineal (Wunsch 1982) y la  $\beta$ -espiral (Scotch y Stommel 1978). Dependiendo del problema particular, y del tipo de datos con que se cuente, los distintos métodos ofrecen ventajas y desventajas. La mayoría de las comparaciones hechas en la literatura sobre teoría inversa en oceanografía se han referido a métodos no lineales (Killworth 1988, Mercier 1986) que tienen la ventaja sobre los lineales de permitir un mejor manejo de errores.

6. En la inversa generalizada que se deriva de la descomposición en valores singulares, el criterio para incluir un cierto número de términos debe basarse en los tamaños relativos de los valores propios de la descomposición, y no en el comportamiento de los transportes residuales (semejante a la diferencia  $A m - d$ ) o en un criterio subjetivo como el comportamiento de la solución.

7. La teoría inversa juega un papel central en la integración de mediciones y teoría. En la oceanografía se ha utilizado en la evaluación de los coeficientes de difusión, el cálculo de la

circulación oceánica y los diversos trabajos con trazadores. Actualmente la teoría inversa se desarrolla y reescribe en distintas ciencias, desde la geofísica hasta la medicina.

## REFERENCIAS

- BACKUS, G. & GILBERT, J. (1967). Numerical application or a formalism for geophysical inverse problem. *Geophys. J. Roy. Astron. Soc.*, 13, 247-276.
- BACKUS, G. y GILBERT, J. (1968). The resolving power of gross earth data. *Geophys. J. Roy. Astron. Soc.* 16, 169-205.
- BROOKS, I. & NIILER, P. (1975). The Florida Current at Key West: Summer 1972. *Journal of Marine Research.* 33,1. 83-92.
- BROOKS, D. A. Current and Hydrographic variability in the northwestern Gulf of Mexico, *J. Gophys. Res.*, 89, 8022-8032.
- COCHRANE, J. Yucatan Current. (Notes).
- EMILSSON, I. (1971). Note on the Countercurrent in the Yucatan Channel and the Western Cayman Sea. *Geofísica Internacional.* 11(3): 139-149.
- FIADAIRO, M. & VERONIS, G. (1982). On the determination of absolute velocities in the ocean. *J. Mar. Res.*, 160-182.
- HOFMAN, E. & WORLEY, S. (1986). An investigation of the circulation of the Gulf of Mexico. *J. Geophy. Res.* 91, 14,221-14,236.
- JACKSON, D. (1979). The Use of A Priori Data to Resolve Non-Uniqueness in Linear Inversion. *Geophys. J. R. astr. Soc.* 57, 137-157.
- JONES, P. & WIGLWY, T. (1990). Global Warming Trends. *Scientific American*, 66-73, Aug.
- KILLWORTH, P. (1986). A Bernoulli Inverse Method for Determining the Ocean Circulation. *Journal of Physical Oceanography.* Vol 16, Dec. 2031-2051.
- KILLWORTH, P. & BIGG, G. (1988). An Intercomparison of Inverse Methods Using an Eddy-Resolving General Circulation Model. *Journal of Physical Oceanography,* Vol 18, 987-1008.
- LANCZOS, C. (1961). *Linear differential operators.* Van Nostrand-Reinhold. Princeton, New Jersey.
- MENKE, W. (1984). *Geophysical Data Analysis: Discrete Inverse Theory.* Academic Press, Inc.

- MERCIER, H. (1986). 'Determining the General Circulation of the Ocean: A Nonlinear Inverse Problem. Journal of Geophysical Research, Vol. 91. No. C4, 5103-5109.
- MOLINARI, R. & YAGER, R. (1977). Upper layer Hydrographic conditions at the Yucatan Strait during May, 1972. Journal of Marine Research, Vol. 35, 1.
- NIILER, P. & RICHARDSON, W. (1973). Seasonal Variability of the Florida Current. Journal of Marine Research. 31,3. 144-167.
- NOWLIN, W. (1970). Winter circulation patterns and property distributions. Contributions on the Physical Oceanography of the Gulf of Mexico. Capurro & Reid, Editors. Vol 2.
- SCHOTT, F. & STOMMEL, H. (1978). Beta Spirals and Absolute Velocities in Different Oceans. Deep-Sea Research, Vol. 25, pp. 961-1010.
- SCHROTER, J. & WUNSCH, C. (1986). Solution of Nonlinear Finite Difference Ocean Models by Optimization Methods with Sensitivity and Observational Strategy Analysis. Journal of Physical Oceanography. Vol. 16, 1855-1874.
- STOMMEL, H. Florida Straits Transports, 1952-1956, June 1956-July 1958, July 1958-March 1959. Bulletin of Marine Science of the Gulf and Caribbean. Contributions No. 845, 1008 of the Woods Hole Oceanographic Institution. Massachusetts.
- STURGES, W. & BLAHA, J. (1976). A western boundary current in the Gulf of Mexico. Science, Vol. 192, 367-369.
- TARANTOLA, A. & VALETTE, B. (1982). Generalized Nonlinear Inverse Problems Solved Using the Least Squares Criterion. Reviews of Geophysics and Space Physics, Vol. 20, No. 2, pp. 219-232.
- VERONIS, G. (1986). Comments on "Can a Tracer Field be Inverted for Velocity?". J. Phy. Oc., 16, 1727-1730.
- VUKOVICH, F. M. & MAUL, G. (1985). Cyclonic eddies in the eastern Gulf of Mexico, J. Phys. Oceanogr., 15, 105-117.
- WELANDER, P. (1983). Determination of the Pressure Along a Closed Hydrographic Section. Part I: The Ideal Case. Journal of Physical Oceanography. Vol. 13, 797-803.
- WIGGINS, R. (1972). The General Linear Inverse Problem: Implication of Surface Waves and Free Oscillations for Earth Structure. Reviews of Geophysics and Space Physics, Vol. 10, No. 1, pp. 251-285.

- WUNSCH, C. (1978). The North Atlantic General Circulation West of 50°W Determined by Inverse Methods. Reviews of Geophysics and Space Physics. Nov. 583-620.
- WUNSCH, C. & MINSTER, J-F. (1982). Methods for Box Models and Ocean Circulation Tracers: Mathematical Programing and Nonlinear Inverse Theory. Journal of Geophysical Research, Vol. 87, No. C8, 5647-5662.
- WUNSCH, C. (1988). Tracer Inverse Problems. Draft.
- ZAVALA, J. (1986). Estudio de la circulación en la zona sur del Golfo de California mediante el método inverso. Tesis Profesional. UNAM.