

67
20j

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO
FACULTAD DE CIENCIAS

COEXISTENCIA Y TRANSICION DE DEFORMACIONES
EN LA CADENA DE NUCLEOS DE RUTHENIO

TESIS
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE
FISICO
PRESENTA
VICTOR MANUEL VELAZQUEZ AGUILAR

1991

FALLA DE ORIGEN



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE

INTRODUCCION	1
CAPITULO 2 COORDENADAS COLECTIVAS.....	8
CAPITULO 3 ESTRUCTURA DEL HAMILTONIANO COLECTIVO.....	15
CAPITULO 4 LA SUPERFICIE DE ENERGIA POTENCIAL.....	21
CAPITULO 5 EL MODELO ROTACION-VIBRACION (APLICACION).....	33
CAPITULO 6 EL MODELO COLECTIVO GENERALIZADO (APLICACION).....	54
CONCLUSIONES.....	99
APENDICE 1.....	104
APENDICE 2.....	107
REFERENCIAS.....	111

INTRODUCCION

La poca familiaridad que tenemos con el mundo microscópico y la dificultad de visualizarlo, nos obligan en algunos casos a tratar de entenderlo haciendo analogías con sistemas macroscópicos. Así, generalmente se propone un modelo del sistema físico que es motivo de nuestro estudio a través del cual se espera reproducir las características esenciales que muestran los datos experimentales. Al final lo que se tendrá es un modelo, una imagen, cuyo acuerdo con la realidad dependerá de su simplificación. Un modelo sobresimplificado será lo que se conoce como la primera aproximación y que por lo regular reproduce el comportamiento más esencial. La analogía o modelo será más aproximado a la realidad mientras mejor reproduzca los resultados experimentales.

Los modelos en muchas ocasiones pueden reproducir razonablemente un tipo de comportamiento de un sistema físico. En consecuencia para explicar los fenómenos presentes en un sistema físico, en muchas ocasiones es necesario utilizar varios modelos. Uno de los ejemplos en la física donde esto sucede es en la física nuclear, además en ésta la utilización de modelos ha sido fundamental para incrementar nuestro conocimiento de la estructura nuclear.

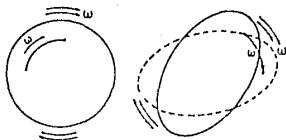
Uno de los primeros modelos desarrollados es el modelo de capas, inspirado en el modelo de capas que explica el espectro atómico, a pesar de que no hay como en el caso atómico un centro de fuerza externo que produzca un potencial en el cual se mueven los nucleones, se considera que éstos se mueven dentro de un potencial común que ellos mismos producen.

Este modelo reproduce una gran cantidad de información experimental como los números mágicos, sistemáticas del decaimiento α y β , etc. Pero no puede explicar momentos cuadrupolares de núcleos con un número grande de nucleones de valencia. Los valores calculados resultan hasta dos órdenes de magnitud mas pequeños. Además la versión estandard del modelo de capas no puede explicar satisfactoriamente espectros de energía de tipo vibracional y rotacional.

Otros fenómenos observados en física nuclear son aquellos en los que participan un gran número o todos los nucleones y que se llaman fenómenos colectivos. Este comportamiento de conjunto adquiere importancia porque permite explicar los defectos de la teoría del movimiento independiente.

Los movimientos de origen colectivo, pueden clasificarse de la siguiente manera.

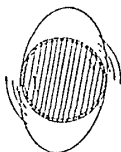
- 1) Las vibraciones superficiales contemplan movimientos de nucleones de un lado a otro de la superficie nuclear, La consecuencia son oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio, en este caso una esfera; véase fig, I.1a y I.1b



a) Figura esquemática del movimiento de los nucleones en un núcleo esférico y deformado.



Modos de compresion



b) Figura esquemática de la rotación de un núcleo deformado.

Fig 1.1

2) Las rotaciones de un núcleo deformado constituyen otro movimiento importante. Queda especificado el movimiento a núcleos deformados, ya que si no fuera así, quedaríamos en el primer caso de la fig.(I.1a). Ya que el núcleo parece una densidad de carga eléctrica, los excesos de materia que quedan fuera de la esfera señalada en la fig.(I.1a), al rotar, serán la causa de un patrón energético cuántico del tipo rotor.

3) Otros movimientos de tipo colectivo, que suceden a energías mas altas que las anteriores son las resonancias gigantes fotonucleares y los procesos de fisión. El primer caso se da cuando un fotón que incide sobre un núcleo desplaza a los protones en una dirección, luego, los neutrones se moverán en dirección opuesta para garantizar la conservación del momento total.

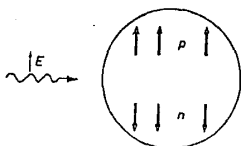


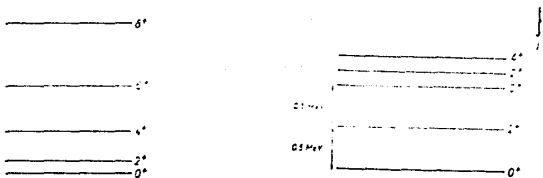
Figura esquemática del movimiento dipolar gigante en el núcleo. El campo eléctrico del rayo- γ , E mueve a los protones hacia arriba. Los neutrones son movidos hacia abajo, el centro de masa queda en el mismo lugar.

Fig. 1.2

En este trabajo, nos restringiremos a bajas energías, es decir movimientos del tipo Rotación-vibración.

Ahora cómo distinguir un espectro rotor y uno vibrador.

El espectro vibrador está señalado en la fig. (I.3a), y el típico rotor en la Fig. (I.3b)



La figura muestra el aspecto de las típicas estructuras de banda rotacional a la izquierda y vibracional a la derecha.

Fig 1.3

Al dar importancia al comportamiento colectivo, el núcleo pasa a ser conceptualizado como un continuo de masa que puede deformarse y ejecutar movimientos propios de un oscilador o un sólido rígido, como los son la vibración o la rotación respectivamente.

Los primeros modelos colectivos fueron creados teniendo como imagen una gota de líquido. Así, el modelo atómico puede

pensarse como una gota de fluido nuclear que por algunas de sus propiedades como incompresibilidad, saturación y evaporación se asemeja a un líquido. Entonces se puede aplicar la propiedad de tensión superficial a la gota nuclear y que ha sido muy útil para explicar los fenómenos de fisión y fusión nuclear.

Los primeros estudios utilizando el modelo de la gota de líquido fueron hechos por Feenberg¹ y Bohr y Wheeler², que enfocaron su estudio en la estabilidad nuclear y así describir el proceso de la fisión nuclear.

Al introducir el concepto de grados de libertad colectivos de la superficie nuclear, Flügge fue el primero en discutir las vibraciones y rotaciones de superficie; pero no reconoció la estrecha relación que existe entre la forma estática y orientación de un núcleo deformado con las variables de deformación colectivas de un núcleo esférico. Esto fue más tarde considerado en el trabajo de Bohr y Mottelson³ que al cuantizar la imagen clásica de Flügge, construyen el modelo colectivo que es fundamento de subsecuentes modelos.

El movimiento de las partículas individuales quedan fuertemente influenciadas por las variables colectivas cuantizadas siendo posible hacer una analogía más: La comparación del núcleo con una molécula: Ambos pueden tener un marco de referencia intrínseco, determinado únicamente por la disposición de los átomos (en la molécula) y deformación del núcleo, entonces es posible hablar de orientación. Las partículas independientes en el núcleo quedan identificadas con los electrones en el molécula.

Los modelos colectivos que siguieron mantuvieron la misma filosofía (Hamiltoniano), pero evidentemente tenían que ir más

allá de una simple aproximación.

Davidov^{3,4} partiendo del Hamiltoniano de Bohr-Mottelson, inició el estudio de núcleos deformados con comportamiento triaxial.

Mas tarde Faessler y Greiner^{4,5} estudian núcleos axialmente simétricos (deformados) a bajas energías (<3Mev) con bastante éxito. La lista de modelos continúa, cada vez mas ambiciosos, pero esos serán mencionados mas adelante. *****

En este trabajo de tesis tenemos como objetivo principal, el estudio de una cadena par-par de isótopos del Ruthenio, en particular de Ru96 - Ru108. Este estudio se hace mediante el modelo colectivo (GCM) desarrollado por M.seiwert, J.Maruhn, P.O. Hess y W.Greiner⁶. En particular se utiliza una rutina de este modelo para computadora elaborado por D. Troltenier et Al.

Hablar del estudio de una cadena de isótopos implica mostrar las características y propiedades globales como individuales de los nucleos de la cadena. Poner en evidencia la importancia de su comportamiento colectivo y en consecuencia poner a prueba la capacidad del GCM.

La trayectoria que se sigue en este trabajo para llegar al objetivo es la siguiente:

- a) Estudio de las variables colectivas a utilizar en esta teoria.
- b) Establecimiento de la estructura del Hamiltoniano colectivo.
- c) Propiedades de la superficie de potencial colectivo.
- d) El modelo vibración-rotación (RVM) de Faessler y Greiner⁷
- e) Aplicación del RVM
- f) Breve introducción del GCM
- g) Aplicación del GCM a Ruthenio.
- h) Resultados
- i) Conclusiones.

Los primeros cuatro puntos de esta lista son obtenidos del texto: Nuclear Models Vol 1 de Eisenberg-Greiner.

CAPITULO 2

COORDENADAS COLECTIVAS

Las variables colectivas nucleares se introducen en general, en base a una imagen clásica del movimiento nuclear, por ejemplo, una gota de líquido en vibración o un cuerpo que rota, ya que en algunos casos no se conoce la relación entre las coordenadas colectivas y las de los nucleones.

El tipo de variables colectivas para describir la dinámica nuclear, puede variar, dependiendo del tipo de movimiento nuclear que está considerándose. En este trabajo se van utilizar como variables colectivas aquellas que describen a la superficie nuclear, cuando se considera al núcleo como una gota de líquido.

Las variables de superficie $\alpha_{\lambda\mu}$ se introducen como sigue:

Supóngase que $R(\theta, \phi, t)$ es la función que describe la superficie del núcleo, y se expande en armónicos esféricos se tiene:

$$R(\theta, \phi, t) = R_0 \left\{ 1 + \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} (-1)^{\mu} \alpha_{\lambda-\mu}(t) Y_{\lambda, \mu}(\theta, \phi) \right\} \quad (2.1)$$

donde $\alpha^{(\lambda)} \equiv \{ \alpha_{\lambda-\mu} \}$ dependen del tiempo y $\mu = -\lambda, -\lambda+1, -\lambda+2, \dots, +\lambda$

Si se conjuga (2.1), teniendo en cuenta que R es real y con la propiedad de los armónicos esféricos:

$$Y_{\lambda, \mu}^* = (-1)^{\mu} Y_{\lambda, -\mu}$$

se tiene

$$R(\theta, \phi, t) = \text{Ro} \left\{ 1 + \sum_{\lambda, \mu} \alpha_{\lambda-\mu}^{\bullet}(t) Y_{\lambda, -\mu}(\theta, \phi) \right\}$$

haciendo el cambio $-\mu \quad \mu$.

$$R(\theta, \phi, t) = \text{Ro} \left\{ 1 + \sum \alpha_{\lambda\mu}^{\bullet}(t) Y_{\lambda, \mu}(\theta, \phi) \right\} \quad (2.2)$$

y en consecuencia:

$$\alpha_{\lambda, \mu}^{\bullet} = (-1)^{\mu} \alpha_{\lambda, -\mu} \quad (2.3)$$

Ahora si rotamos el marco de referencia de la ec. (2.1)

$$R(\theta', \phi', t) = \text{Ro} \left\{ 1 + \sum \alpha_{\lambda, \mu}^{\bullet}(t) Y_{\lambda, \mu}(\theta', \phi') \right\}$$

aquí las $\alpha'_{\lambda\mu}$ definen la superficie nuclear en el marco rotado

Los armónicos esféricos se transforman ante rotaciones mediante las $D_{\nu\mu}^{\lambda}(\vartheta)$:

$$Y_{\lambda, \mu}(\theta', \phi') = \sum_{\nu} D_{\nu\mu}^{\lambda}(\vartheta) Y_{\lambda, \nu}(\theta, \phi)$$

donde las ϑ_j representan los ángulos de Euler que definen la rotación. Sustituyendo esta relación en la ecuación anterior y dado que ambos sistemas de referencia describen la misma superficie nuclear:

$$\begin{aligned} \text{Ro} \left\{ 1 + \sum_{\mu} (-1)^{\mu} \alpha_{\lambda-\mu}^{\bullet}(t) Y_{\lambda, \mu}(\theta, \phi) \right\} &= \\ &= \text{Ro} \left\{ 1 + \sum_{\mu} (-1)^{\mu} \alpha'_{\lambda-\mu}(t) \sum_{\nu} D_{\nu\mu}^{\lambda}(\vartheta) Y_{\lambda, \nu}(\theta, \phi) \right\} \end{aligned}$$

concluyéndose:

$$\sum_{\mu} (-1)^{\mu} \alpha_{\lambda-\mu}^{\bullet}(t) Y_{\lambda, \mu}(\theta, \phi) = \sum_{\mu\nu} (-1)^{\mu} \alpha'_{\lambda-\mu}(t) D_{\nu\mu}^{\lambda}(\vartheta) Y_{\lambda, \nu}(\theta, \phi)$$

utilizando (2.3) y la ortogonalidad de los armónicos esféricos

$$\alpha_{\lambda, \nu}^{\bullet}(t) = \sum D_{\mu\nu}^{\lambda}(\vartheta) \alpha'_{\lambda, \nu}(t)$$

obteniendo finalmente

$$\alpha'_{\lambda,\mu}(t) = \sum_{\mu} D_{\mu\nu}^{\lambda}(\vartheta) \alpha_{\lambda,\mu}(t) \quad (2.4)$$

ya que $D_{\mu\nu}^{\lambda}(\vartheta)$ es unitaria.

Las $\alpha_{\lambda\mu}$ se transforman bajo el operador de paridad, de la siguiente manera:

$$\hat{P}(\alpha_{\lambda,\mu})\hat{P}^{-1} = (-1)^{\lambda} \alpha_{\lambda,\mu} \quad (2.5)$$

Según lo visto anteriormente, las α 's se transforman como los armónicos esféricos ante conjugación, rotación y reflexión.

Analizando el significado de $R(\theta, \phi, t)$ según el valor de λ : Los términos con $\lambda=0$ corresponden a un cambio en el volumen nuclear. Esto puede explicarse como un cambio en la densidad nuclear, algo que se espera ocurre a altas energías, de $\approx 80 \text{ A}^{-1/3} \text{ MeV}^1$

En este trabajo estamos interesados en los estados colectivos de baja energía ($\approx 3 \text{ MeV}$) por lo que se despreciará la contribución producida por el término monopolar (α_{00}). Los términos con $\alpha^{(1)}$ quedan excluidos, ya que éstos representan una traslación completa de la superficie nuclear, para $\alpha^{(1)}$ pequeñas.

Por lo anterior las primeras $\alpha_{\lambda\mu}$ de interés que aparecen en el desarrollo de $R(\theta, \phi, t)$ son los términos con $\lambda=2$. Así restringiéndose a deformaciones nucleares del tipo cuadrupolar, es decir $\lambda=2$, el desarrollo de la superficie nuclear $R(\theta, \phi, t)$ esta dada por:

$$R(\theta, \phi, t) = R_0 \left\{ 1 + \sum \alpha_{2\mu}^{\bullet}(t) Y_{2\mu}(\theta, \phi) \right\} \quad (2.6)$$

Escribiendo los armónicos esféricos en coordenadas cartesianas⁸:

¹ E. Bertran, Nuclear Physics A354 (1981) 129c-156c

$$\begin{aligned}
 Y_{20}(\theta, \varphi) &= (16\pi/5)^{-1/2} (3\cos^2\theta - 1) = (16\pi/5)^{-1/2} (2z^2 - x^2 - y^2)/r^2, \\
 Y_{2\pm 1}(\theta, \varphi) &= \mp (8\pi/15)^{-1/2} \sin\theta \cos\theta e^{\pm i\varphi} = \mp (8\pi/15)^{-1/2} (xz \pm iyz)/r^2, \\
 Y_{2\pm 1}(\theta, \varphi) &= (32/15)^{-1/2} \sin^2\theta e^{\pm 2i\varphi} = (32/15)^{-1/2} (x^2 - y^2 \pm 2ixy)/r^2,
 \end{aligned}
 \tag{2.7}$$

utilizando la relacion entre coordenadas esféricas y cartesianas:

$$\begin{aligned}
 r &= (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \\
 \theta &= \arctan \left[(x^2 + y^2)^{1/2} / z \right] \\
 \varphi &= \arctan y/x
 \end{aligned}
 \tag{2.8}$$

y estableciendo la ecuación de la superficie en cartesianas:

$$\begin{aligned}
 R = R_0 [1 + \alpha_{xx} x^2/r^2 + \alpha_{yy} y^2/r^2 + \alpha_{zz} z^2/r^2 + \\
 + 2\alpha_{xy} xy/r^2 + 2\alpha_{xz} xz/r^2 + 2\alpha_{yz} yz/r^2]
 \end{aligned}
 \tag{2.8.1}$$

se llega a:

$$\begin{aligned}
 \alpha_{2\pm 2} &= (8\pi/15)^{1/2} [1/2(\alpha_{xx} - \alpha_{yy} \pm 2i\alpha_{xy})] \\
 \alpha_{2\pm 1} &= \mp (8\pi/15)^{1/2} [\alpha_{xz} \pm i\alpha_{yz}] \\
 \alpha_{20} &= (8\pi/15)^{1/2} [6^{-1/2} (2\alpha_{zz} - \alpha_{xx} - \alpha_{yy})]
 \end{aligned}
 \tag{2.9}$$

donde las coordenadas colectivas en cartesianas estan sujetas a la condición:

$$\alpha_{xx} + \alpha_{yy} + \alpha_{zz} = 0.
 \tag{2.10}$$

Todas estas relaciones donde el tiempo no aparece explícitamente, describen al núcleo en forma instantánea. Para cada instante, la descripción de la forma del núcleo, es mas sencilla si se hace una transformación a un sistema de ejes principales, en el que:

$$R = R_0 [1 + \alpha'_{xx} x'^2/r'^2 + \alpha'_{yy} y'^2/r'^2 + \alpha'_{zz} z'^2/r'^2$$

con $\alpha'_{xy} = \alpha'_{xz} = \alpha'_{yz} = 0$ y de acuerdo a la ec.2.9

$$\begin{aligned}
 a_{21} &= a_{2-1} = 0 \\
 a_{22} &= a_{2-2}
 \end{aligned}$$

$$a_{2\mu} = \sum_{\nu} D_{\mu\nu}^2(\vartheta) \alpha_{2\mu}(t)$$

donde se identifica $\alpha_{2\mu}^{\cdot} \equiv a_{2\mu}$. Las variables de forma $a_{22} = a_{2-2}$ y a_{20} pueden escribirse en términos de las variables introducidas por Bohr

$$\begin{aligned} a_{20} &= \beta \cos \gamma \\ a_{22} &= 2^{-1/2} (\beta \sin \gamma) \end{aligned} \quad (2.11)$$

El significado físico de estas variables puede visualizarse evaluando los semiejes principales del núcleo, esto es:

$$\begin{aligned} R &= R_0 [1 + a_{20}^{\cdot} Y_{20}(\theta', \varphi') + a_{22}^{\cdot} (Y_{22}(\theta', \varphi') + Y_{2-2}(\theta', \varphi'))] \\ R_1 &= R (\theta' = \pi/2, \varphi' = 0) = R_0 (1 + \delta r_x) \\ R_2 &= R (\theta' = \pi/2, \varphi' = \pi/2) = R_0 (1 + \delta r_y) \\ R_3 &= R (\theta' = 0) = R_0 (1 + \delta r_z) \end{aligned}$$

con

$$\delta r_k = (4\pi/5)^{-1/2} \beta \cos(\gamma - 2\pi k/3) \quad k=x, y, z \quad (2.12)$$

Entonces, el núcleo es axialmente simétrico para $\gamma = 0^\circ, 60^\circ, 120^\circ$, ya que dos de los semiejes son iguales.

El momento canónico conjugado $\Pi^{(\lambda)}$ de las variables colectivas $\alpha^{(\lambda)}$ tiene que cumplir las reglas de conmutación:

$$[\hat{\Pi}_{\lambda\mu}, \hat{\alpha}_{\lambda'\mu'}] = -i\hbar \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{\mu\mu'} \quad (2.13)$$

$$[\hat{\Pi}_{\lambda\mu}, \hat{\Pi}_{\lambda'\mu'}] = [\hat{\alpha}_{\lambda\mu}, \hat{\alpha}_{\lambda'\mu'}] = 0 \quad (2.14)$$

De la invariancia de las expresiones (2.13) y (2.14) ante rotaciones y reflexiones espaciales, se pueden derivar las propiedades de transformación de los momentos canónicos conjugados $\Pi_{\lambda\mu}$

Considérese la ec. 2.13 para el caso especial $\lambda = \lambda', \mu = \mu'$

$$\hat{\Pi}_{\lambda\mu} \hat{\alpha}_{\lambda\mu} - \hat{\alpha}_{\lambda\mu} \hat{\Pi}_{\lambda\mu} = -i\hbar \quad (2.15)$$

esto implica que $\hat{\Pi}_{\lambda\mu}$ actuando en $\hat{\alpha}_{\lambda\mu}$ es simplemente $-i\hbar$, esto es

$$(\hat{\Pi}_{\lambda\mu}, \hat{\alpha}_{\lambda\mu}) = -i\hbar \quad (2.16)$$

Esta relación es independiente del sistema de coordenadas y consecuentemente $\hat{\Pi}_{\lambda\mu}$ ha de transformarse bajo rotaciones de una manera contragradiente a $\hat{\alpha}_{\lambda,\mu}$, es decir, por medio de la matriz rotación $D^{(\lambda)*}$. Como la ec. (2.16) es invariante ante transformaciones de paridad y

$$\text{entonces} \quad \hat{P}(\hat{\alpha}_{\lambda,\mu})\hat{P}^{-1} = (-1)^\lambda \hat{\alpha}_{\lambda,\mu} \quad (2.17)$$

$$\hat{P}(\hat{\Pi}_{\lambda\mu})\hat{P}^{-1} = (-1)^\lambda \hat{\Pi}_{\lambda\mu} \quad (2.18)$$

Las propiedades ante inversiones temporales de $\hat{\Pi}_{\lambda\mu}$ son obtenidas si se tiene en cuenta que:

$$\hat{\Pi}_{\lambda\mu} = (\hbar/i) \partial/\partial\alpha_{\lambda,\mu} \quad (2.19)$$

entonces

$$\hat{\Pi}_{\lambda\mu}^* = (-\hbar/i) \varepsilon/\varepsilon\alpha_{\lambda,\mu}^* \quad (2.19.1)$$

utilizando (2.3), resulta

$$\hat{\Pi}_{\lambda\mu}^* = -(-1)^\mu \hat{\Pi}_{\lambda-\mu} \quad (2.20)$$

La cantidad $\hat{\Pi}^{(\lambda)}$ forma un tensor irreducible de rango λ y paridad $(-1)^\lambda$ transformándose con las $D^{(\lambda)*}$ y consecuentemente si el sistema de coordenadas es rotado

$$\hat{\Pi}'_{\lambda\mu} = \sum_{\mu} D_{\mu\nu}^{2*}(\vartheta) \hat{\Pi}_{\lambda\nu} \quad (2.21)$$

A menudo resulta necesario introducir un conjunto de operadores de creación y aniquilación de fonones $\hat{\beta}_{\lambda\mu}^+$ y $\hat{\beta}_{\lambda\mu}$, respectivamente

$$\hat{\alpha}_{\lambda\mu} \rightarrow \hat{\alpha}'_{\lambda\mu} = [\hbar/(2B_\lambda \omega_\lambda)]^{1/2} (\hat{\beta}_{\lambda\mu}^+ + (-1)^\mu \hat{\beta}_{\lambda\mu}) \quad (2.22)$$

$$\hat{\Pi}_{\lambda\mu} \rightarrow \hat{\Pi}_{\lambda\mu} = [i(\hbar B_{\lambda} \omega_{\lambda})/2]^{1/2} (\hat{\beta}_{\lambda\mu}^{+} + (-1)^{\mu} \hat{\beta}_{\lambda\mu}^{+}) \quad (2.23)$$

Expresando $\hat{\beta}_{\lambda\mu}^{+}$ y $\hat{\beta}_{\lambda\mu}$ en en términos de $\hat{\Pi}_{\lambda\mu}$ y $\hat{\alpha}_{\lambda\mu}$

$$\hat{\beta}_{\lambda\mu}^{+} = 1/2 [[\hbar/(2B_{\lambda} \omega_{\lambda})]^{-1/2} \hat{\alpha}_{\lambda\mu} - i(\hbar B_{\lambda} \omega_{\lambda})/2]^{-1/2} (-1)^{\mu} \hat{\Pi}_{\lambda-\mu}] \quad (2.24)$$

$$\hat{\beta}_{\lambda\mu} = 1/2 [[\hbar/(2B_{\lambda} \omega_{\lambda})]^{-1/2} (-1)^{\mu} \hat{\alpha}_{\lambda-\mu} + i(\hbar B_{\lambda} \omega_{\lambda})/2]^{1/2} \hat{\Pi}_{\lambda\mu}] \quad (2.25)$$

es sencillo derivar las reglas de conmutación :

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_{\lambda, \mu} \cdot \hat{\beta}_{\lambda\mu}^{+} - \hat{\beta}_{\lambda\mu}^{+} \hat{\beta}_{\lambda, \mu} &= \delta_{\lambda\lambda} \cdot \delta_{\mu\mu} \\ [\hat{\beta}_{\lambda\mu}^{+} , \hat{\beta}_{\lambda\mu}^{+}] &= [\hat{\beta}_{\lambda\mu} , \hat{\beta}_{\lambda, \mu}] = 0 \end{aligned} \quad (2.26)$$

que son justamente las reglas de conmutación ordinarias para bosones.

CAPITULO 3

ESTRUCTURA DEL HAMILTONIANO COLECTIVO NUCLEAR

Hasta el momento sabemos que el Hamiltoniano es una función de las variables colectivas $\alpha^{(\lambda)}$ y $\Pi^{(\lambda)}$, entonces en este capítulo utilizaremos las propiedades ante transformaciones de las coordenadas y momentos colectivos para determinar la estructura general que debe tener la energía cinética $T(\alpha^{(\lambda)}, \Pi^{(\lambda)})$ y la energía potencial $V(\alpha^{(\lambda)})$, posteriormente, analizaremos el caso mas sencillo del Hamiltoniano propuesto (oscilador armónico) construyendo sus funciones de onda en términos de operadores de creación y aniquilación de bosones (para un número de fonones ≤ 30). Finalmente se mencionaran algunas aplicaciones del modelo de oscilador armónico.

ESTRUCTURA

El Hamiltoniano nuclear colectivo debe ser invariante ante rotaciones, reflexiones espaciales e inversión en el tiempo [ver tabla III.1]. Por tanto, únicamente combinaciones de $\Pi^{(\lambda)}$ y $\alpha^{(\lambda)}$ que son rotacionalmente invariantes, etc. deben ser considerados.

Al restringirnos a movimiento de tipo cuadrupolar $\lambda=2$, el Hamiltoniano se desarrolla en serie como sigue:

$$T(\alpha^{[2]}, \Pi^{[2]}) = (\sqrt{5/2} B_2) [\Pi^{[2]} \times \Pi^{[2]}]^{[0]} + P_3 [[\Pi^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[2]} \times \Pi^{[2]}]^{[0]} + \dots \quad (3.1)$$

$$V(\alpha^{[2]}) = (\sqrt{5}/2B_2)[\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[0]} + C_3[[\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[0]} + \\ C_4[\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[0]}[\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[0]} + \dots \quad (3.2)$$

Los B's y C's caracterizan los parámetros de inercia y rigidez del potencial respectivamente. Estos pueden obtenerse al comparar con el experimento, o de un modelo mas fundamental, como lo seria uno de tipo microscópico. Si no consideramos términos divergentes como $\{[\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[0]}\}^{-1}$ es posible mostrar que la ecs. 3.1 y 3.2 son las únicas estructuras posibles hasta ese orden de aproximación (tercero para T y cuarto para V de cuarto orden del tipo:

$$\{[\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[m]} \times [\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[m]}]^{[0]}, \quad m=1,2,3,4$$

desaparecen si m es impar, de lo contrario no son independientes⁷ a $[\alpha \cdot \alpha]^{[0]}[\alpha \cdot \alpha]^{[0]}$

Las ecs. 3.1 y 3.2 constituyen lo que podríamos denominar el modelo general, y modelos específicos dependerán del número de términos que se consideren en el Hamiltoniano.

EL MODELO DEL OSCILADOR ARMÓNICO CUADRUPOLEAR

Si únicamente se toma en cuenta el primer término tanto en T como en V, es fácilmente identificable con un Hamiltoniano del tipo de oscilador armónico:

$$\hat{H}_0 = (\sqrt{5}/2B_2)[\Pi^{[2]} \times \Pi^{[2]}]^{[0]} + (\sqrt{5}C_2/2)[\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[0]} \\ = -(1/2B_2) \sum |\hat{\Pi}_{2\mu}|^2 + c_2/2 \sum |\hat{\alpha}_{2\mu}|^2 \quad (3.3)$$

Como $\Pi^{[2]}_y$ $\alpha^{[2]}$ pueden escribirse en término de operadores de creación y aniquilación de bosones y viceversa,

TIPO DE INVARIANCIA	SIGNIFICADO	CONSECUENCIA
Invariancia ante rotaciones espaciales.	Hamiltoniano escalar.	Acoplamiento a momento angular cero, para asegurar la realidad del valor esperado de H.
Invariancia ante reflexiones espaciales.	$\hat{P}(\alpha_{\lambda\mu})\hat{P}^{-1} = (-1)^\lambda \alpha_{\lambda\mu}$ $\hat{P}(\pi_{\lambda\mu})\hat{P}^{-1} = (-1)^\lambda \pi_{\lambda\mu}$	Conservación de la Paridad.
Invariancia ante inversión del tiempo.	$\hat{T}(\pi_{\lambda\mu})\hat{T}^{-1} = +\pi_{\lambda\mu}^*$	H dependerá solo de las potencias pares de π

Esta tabla muestra los aspectos invariantes del Hamiltoniano que se describen aquí.

Tabla III.4

es posible reescribir la ec 3.3 como:

$$\hat{H}_0 = \hbar\omega_2 \sum \{ \beta_{\lambda\mu}^+ \hat{\beta}_{\lambda\mu} + 1/2 \} \quad (3.4)$$

aquí $\omega_2 = \sqrt{C_2/B_2}$

La ecuación (3.4) puede escribirse también en términos del operador de número de fonones:

$$\hat{n}_{2\mu} = \beta_{\lambda\mu}^+ \hat{\beta}_{\lambda\mu} \quad (3.5)$$

que es un buen número cuántico ya que conmuta con \hat{H}_{0a}

$$\hat{H}_{0a} = \hbar\omega_2 \sum (\hat{n}_{2\mu} + 1/2) \quad (3.6)$$

Para la construcción de los diferentes estados, partimos del estado correspondiente a cero fonones, identificado con el vacío $|0\rangle$ y si aplicamos operadores de creación sucesivamente hasta crear el estado ψ_{N_μ} con N_μ como el número de fonones de clase

μ contenidos en este estado.

$$| \psi_{N_\mu} \rangle = (\beta_{2\mu}^*)^{N_\mu} |0\rangle \quad (3.7)$$

al aplicar el operador de número $\hat{n}_{2\mu}$ en la ec. 3.7 obtenemos

$$\hat{n}_{2\mu} \psi_{N_\mu} = N_\mu \psi_{N_\mu} \quad (3.8)$$

Si el estado que consideramos tiene N_μ fonones del tipo μ , El operador de número se define:

$$\hat{N} = \sum \hat{n}_{2\mu} \quad (3.10)$$

Así la ec. 3.6 puede escribirse como :

$$\hat{H}_0 = (\hat{N} + 5/2)\hbar\omega_2 \quad (3.11)$$

en consecuencia

$$\hat{H}_0 \psi_{N-2, N-1, N_0, \dots, N_2} = (N + 5/2) \hbar \omega_2 \quad (3.12)$$

donde $N = N-2 + N-1 + N_0 + N_1 + N_2$ es el número total de fonones, cada con energía $\hbar \omega_2$.

Antes de construir los estados con momento angular definido es necesario establecer lo siguiente. Como vamos a considerar núcleos par-par, el estado base tiene paridad positiva y momento angular cero. Por otra parte, el operador de creación de fonones $\hat{\beta}_{2\mu}^*$ tiene momento angular dos y proyección μ . Entonces es fácil mostrar que el estado $\hat{\beta}_{2\mu}^* | 0 \rangle$ satisface que:

$$\begin{aligned} \hat{L}^2 \hat{\beta}_{2\mu}^* | 0 \rangle &= 2(2+1) \hbar^2 \hat{\beta}_{2\mu}^* | 0 \rangle \\ \hat{L}_z \hat{\beta}_{2\mu}^* | 0 \rangle &= \mu \hbar \hat{\beta}_{2\mu}^* | 0 \rangle \end{aligned} \quad (3.14)$$

Así $\hat{\beta}_{2\mu}^* | 0 \rangle$ es un estado de un fonón, $N=1$, con momento angular dos, $I=2$ y proyección M

proyección M es directamente (el factor de normalización es 1)

$$|N=1, I=2, M \rangle = \hat{\beta}_{2\mu}^* | 0 \rangle \quad (3.15)$$

El estado con 2 fonones esta dado por

$$|N=2, I, M \rangle = A_1 \sum_{m_1, m_2} (2 \ 2 \ I | m_1 \ m_2 \ M) \hat{\beta}_{2m_1}^* \hat{\beta}_{2m_2}^* | 0 \rangle \quad (3.16)$$

donde $0 \leq I \leq 4$. Puede mostrarse rápidamente que

$$\langle N=2, I, M | N=2, I, M \rangle = |A_1|^2 (1 + (-1)^I) \quad (3.17)$$

por tanto, los estados con momento angular $I = 1, 3$ quedan excluidos. Entonces hay tres estados con energía $2\hbar\omega_2$ a saber $0^+, 2^+, 4^+$.

En el acoplamiento de tres fonones se obtienen 5 estados degenerados $0^+, 2^+, 3^+, 4^+$ y 6^+ por efecto de la normalización. Para estados con mayor número de fonones es necesario tomar en cuenta

el apareamiento de fonones a momento angular cero. Algunos ejemplos se dan en la tabla III.2

Numero de fonones	Estado	Momento Angular	Energia
0	$ 0, 00\rangle = 0\rangle$	0	0
1	$ 1, 2M\rangle = \beta_{1u}^2 0\rangle$	2	$(1+1)\hbar\omega_1$
2	$ 2, 1M\rangle = 1/\sqrt{2} \sum_{m_1, m_2} (221 m_1 m_2 M\rangle \beta_{1u}^2 \beta_{1u}^2 0\rangle$	0, 2, 4	$(2+1)\hbar\omega_1$
3	$ 3, 6M\rangle = 1/\sqrt{3} \sum_{m_1, m_2} (246 m_1 m_2 M\rangle \beta_{1u}^2 2, 4m_2\rangle$	6	$(3+1)\hbar\omega_2$
3	$ 3, 4M\rangle = 1/\sqrt{3} \left\{ \sqrt{\frac{1}{2}} \sum_{m_1, m_2} (224 m_1 m_2 M\rangle \beta_{1u}^2 2, 2m_2\rangle \right.$ $\left. + \sqrt{\frac{2}{3}} \sum_{m_1, m_2} (244 m_1 m_2 M\rangle \beta_{1u}^2 2, 4m_2\rangle \right\}$	4	$(3+1)\hbar\omega_2$
3	$ 3, 3M\rangle = 1/\sqrt{3} \left\{ \sqrt{\frac{2}{3}} \sum_{m_1, m_2} (223 m_1 m_2 M\rangle \beta_{1u}^2 2, 2m_2\rangle \right.$ $\left. - \sqrt{\frac{1}{3}} \sum_{m_1, m_2} (243 m_1 m_2 M\rangle \beta_{1u}^2 2, 4m_2\rangle \right\}$	3	$(3+1)\hbar\omega_2$
3	$ 3, 2M\rangle = 1/\sqrt{3} \left\{ \sqrt{\frac{4}{3}} (202 M 0 M\rangle \beta_{1u}^2 2, 0\rangle \right.$ $\left. + \sqrt{\frac{2}{3}} \sum_{m_1, m_2} (222 m_1 m_2 M\rangle \beta_{1u}^2 2, 2m_2\rangle \right.$ $\left. + \sqrt{\frac{1}{3}} \sum_{m_1, m_2} (242 m_1 m_2 M\rangle \beta_{1u}^2 2, 4m_2\rangle \right\}$	2	$(3+1)\hbar\omega_1$
3	$ 3, 0\rangle = 1/\sqrt{3} \sum_{m_1, m_2} (220 m_1 m_2 0\rangle \beta_{1u}^2 2, 0\rangle$	0	$(3+1)\hbar\omega_1$

Tabla III. 2

Tabla III.2

CAPITULO 4

LA SUPERFICIE DE ENERGIA POTENCIAL COLECTIVA

En este capítulo trataremos las simetrías que aparecen cuando pasamos a describir nuestro sistema nuclear desde el sistema de laboratorio al sistema intrínseco. También mostraremos algunas posibilidades para la superficie de energía potencial en dependencia de los parámetros.

Estas posibilidades están relacionadas con los diferentes estados del núcleo, ya que es posible reconocer un vibrador armónico anarmónico; si está deformado en sus estado base o es esférico en algun estado excitado. Es conveniente recordar que en este modelo solo consideraremos α^2 pequeñas, ya que para α^2 grande (tendiente a infinito) nuestra aproximación resultará inoperante. Se supondrá entonces, que la superficie del núcleo quedará descrita únicamente en términos de α 's de pequeña magnitud. Acerca de los parámetros, estos son obtenidos de la comparación con el experimento, pero también podrían ser obtenidos de modelos mas básicos (como el de capas). Cada conjunto de parámetros de la energía potencial distinguen al núcleo del cual se habla; sus mínimos, su simetría, etc.

El sistema intrínseco

La superficie nuclear en coordenadas cartesianas es:

$$R = R_0 \left(1 + \alpha'_{xx} x'^2 / r'^2 + \alpha'_{yy} y'^2 / r'^2 + \alpha'_{zz} z'^2 / r'^2 \right) \quad (4.1)$$

esta es invariante ante las transformaciones

$$x' = -x' \quad (4.2)$$

$$y' = -y' \quad (4.3)$$

$$z' = -z' \quad (4.4)$$

entonces (4.1) es invariante ante transformaciones especulares .

La transformación que se hace del sistema del laboratorio al sistema de ejes principales del núcleo, trae consigo un problema. La transformación no es uno a uno. Esto se discute a continuación, ver Fig IV.1:

$\{x_i\} = \{x, y, z\}$ Las componentes de un punto fijo en el sistema de laboratorio

$\{x_i'\} = \{x', y', z'\}$ Las coordenadas en el sistema intrínseco rotado. Tal rotación queda determinada por los ángulos de Euler.

$\{\bar{x}_i\} = \{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}\}$ Las coordenadas especiales $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ de un punto en el sistema intrínseco.

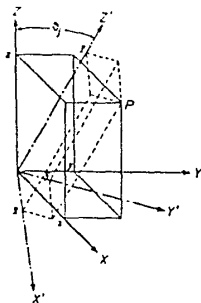


Fig. IV.1

El requerimiento de que el punto P se mueva en el sistema de laboratorio (en líneas llenas) lo fija las variables en el sistema intrínseco (en líneas de punto y rayas). Los ángulos de Euler conectan ambos sistemas.

Introduciendo las componentes esféricas r_m de (x, y, z) para reemplazar las coordenadas cartesianas.

$$r_m = r\sqrt{(4\pi/3)}Y_{1m}(\vartheta, \varphi) \quad (4.5)$$

Haciendo lo mismo para el sistema intrínseco

$$\mathbf{r}'_m = r(4\pi/3)Y_{1m}(\vartheta', \varphi') \quad (4.6)$$

donde ϑ, φ y ϑ', φ' son los ángulos polares en el sistema de laboratorio y en el sistema intrínseco.

Se requiere que las distancias se conserven, por lo tanto

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} = (x'^2 + y'^2 + z'^2)^{1/2} \quad (4.6.1)$$

Además \mathbf{r}_m puede ser representado en el sistema rotado por

$$\mathbf{r}_m = \sum_{\nu} D_{m\nu}^{1*}(\vartheta_1) \mathbf{r}'_{\nu} \quad (4.7)$$

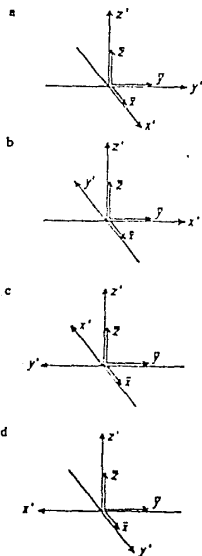
Para que esta ecuación conserve los grados de libertad, hay que definir los ángulos de Euler, de manera que en el sistema rotado un punto debe tener coordenadas fijas $\mathbf{r}'_{\nu} = \bar{\mathbf{r}}_{\nu}$

Entonces en la ec.4.7 se tiene tres grados de libertad del lado izquierdo, a saber x, y, z y del lado derecho, también tres grados de libertad : $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$.

Los números fijos $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ caracterizan las coordenadas intrínsecas del punto. Si el punto se mueve en el laboratorio: $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ $\mathbf{y} = \mathbf{y}(t)$, $\mathbf{z} = \mathbf{z}(t)$, entonces, los ángulos de Euler quedan definidos en función del tiempo $\vartheta_i = \vartheta_i(t)$ si imponemos que $\mathbf{r}'_{\nu} = \bar{\mathbf{r}}_{\nu}$

El problema consiste en que los ángulos de Euler pueden definirse de manera distinta, De hecho la definición más usual, es que en el sistema intrínseco, los ejes x', y', z' coincidan con los ejes principales de un núcleo. En ese caso, la transformación de \mathbf{r}_m a las nuevas coordenadas no es uno a uno, ya que para cada conjunto \mathbf{r}_m pertenecen diferentes conjuntos $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \mathbf{r}'_{\nu}$. Para ser exactos, es posible escoger de 24 diferentes maneras el sistema de coordenadas intrínseco coincidente con los ejes principales y aún describir el

mismo punto en el sistema de laboratorio. Algunas de estas posibilidades se muestran en la fig. IV.2



Cuatro posibilidades para escoger el sistema intrínseco. En cada una de estas posibilidades se cambia la orientación del sistema intrínseco.

Fig IV.2

La fig. IV.2a corresponde a la situación normal. El sistema intrínseco x', y', z' es el sistema original de la fig. IV.1 y esta rotado a través de los ángulos de Euler $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$, con respecto al sistema de laboratorio. En este sistema intrínseco en especial el

punto fijo tiene las coordenadas:

$$x' = \bar{x}, y' = \bar{y}, z' = \bar{z} \quad (4.8)$$

Si la misma fig.IV.2a es rotada $\pi/2$ alrededor del eje z , entonces se tiene otra posibilidad para el sistema intrinseco, teniendo entonces:

$$x' = \bar{y}, y' = -\bar{x}, z' = \bar{z} \quad (4.9)$$

Las figuras restantes, son obtenidas al hacer una rotación alrededor del eje z de π y $3\pi/2$ respectivamente, entonces se tiene :

$$\begin{aligned} x' &= -\bar{x}, y' = -\bar{y}, z' = \bar{z} \\ x' &= -\bar{y}, y' = \bar{x}, z' = \bar{z} \end{aligned} \quad (4.10)$$

Además de estas posibilidades para el sistema intrinseco, existen también los siguientes:

a) Para cada caso de las figuras anteriores, la inversión de los ejes x', z' .

b) El eje z puede ser escogido ya sea a lo largo del eje z' , del x' o del y' , ya siendo en el sentido positivo o negativo de los ejes de la fig.IV.2(a). Entonces se tiene $4 \times 3 \times 2 = 24$ posibilidades para hacer coincidir al sistema x', y', z' con los ejes principales.

Puede mostrarse que las 24 posibilidades pueden construirse en términos de únicamente tres transformaciones básicas que denotaremos : $\hat{R}_1, \hat{R}_2, \hat{R}_3$, definidos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \hat{R}_1(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3) &= (\bar{x}, -\bar{y}, -\bar{z}, \vartheta_1 + \pi, \pi - \vartheta_2, -\vartheta_3) \\ \hat{R}_2(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3) &= (\bar{y}, -\bar{x}, \bar{z}, \vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3 + \pi/2) \\ \hat{R}_3(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3) &= (\bar{y}, \bar{z}, \bar{x}, f_1(\vartheta_1), f_2(\vartheta_2), f_3(\vartheta_3)) \end{aligned} \quad (4.11)$$

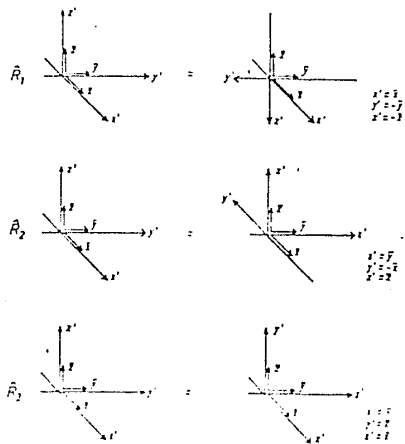
donde un caso especial puede ser (ver ref 7.1)

$$\hat{R}_3(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \vartheta_1, \vartheta_2, 0) = (\bar{y}, \bar{z}, \bar{x}, \vartheta_1, \vartheta_2 + \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

De acuerdo a los ángulos que utilizan estas transformaciones :

$$\hat{R}_1^2 = 1, \quad \hat{R}_2^4 = 1, \quad \hat{R}_3^3 = 1 \quad (4.12)$$

Estas tres transformaciones se representan a continuación, ver fig. IV.3



Las tres transformaciones básicas.

Fig. IV.3

Analizando tales transformaciones :

- \hat{R}_1 corresponde a una reflexión simultánea de y' y z' y un cambio correspondiente en las coordenadas intrínsecas $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$.
- \hat{R}_2 representa una rotación de $\pi/2$ alrededor del eje z y simultáneamente un cambio de las coordenadas intrínsecas

$$x' \rightarrow \bar{y}, \quad y' \rightarrow -\bar{x}, \quad z' \rightarrow \bar{z}$$

- \hat{R}_3 describe un intercambio cíclico de los ejes x', y', z' y esto puede verse de la definición de los ángulos de Euler.

La relación entre las coordenadas del laboratorio y las

coordenadas del sistema intrínseco $\{x_i\} \rightarrow \{x'_i\}$ esta dado por la matriz de rotación :

$$R_{ij}(\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3) =$$

$$\begin{bmatrix} \cos\vartheta_1 \cos\vartheta_2 \cos\vartheta_3 - \text{sen}\vartheta_1 \text{sen}\vartheta_3 & \text{sen}\vartheta_1 \cos\vartheta_2 \cos\vartheta_3 + \cos\vartheta_1 \text{sen}\vartheta_3 & -\text{sen}\vartheta_2 \cos\vartheta_3 \\ -\cos\vartheta_1 \cos\vartheta_2 \text{sen}\vartheta_3 - \text{sen}\vartheta_1 \cos\vartheta_3 & -\text{sen}\vartheta_1 \cos\vartheta_2 \text{sen}\vartheta_3 + \cos\vartheta_1 \cos\vartheta_3 & \text{sen}\vartheta_2 \text{sen}\vartheta_3 \\ \cos\vartheta_1 \text{sen}\vartheta_2 & \text{sen}\vartheta_1 \text{sen}\vartheta_2 & \cos\vartheta_2 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

asi

$$x'_i = \sum_{j=1}^3 R_{ij}(\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3) x_j \quad i=1, 2, 3 \quad (4.14)$$

Sustituyendo los cambios de los ángulos de Euler de acuerdo a (4.11) puede checarce rapidamente la interpretación de R_1, R_2 y R_3 . Por ejemplo, si se hace la substitución: $\vartheta_1 \rightarrow \vartheta_1 + \pi$, $\vartheta_2 \rightarrow \pi - \vartheta_2$, y finalmente $\vartheta_3 \rightarrow -\vartheta_3$; las componentes z', y' cambian su signo de acuerdo a (14) mientras que la componenete x' no. Esto corresponde a la transformación realizada por \hat{R} ; ver Fig IV.3

Cada una de las 24 posibilidades de hacer coincidir el sistema de coordenadas intrínseco x', y', z' con el sistema de ejes principales, puede obtenerse via el siguiente producto:

$$\hat{R} = \hat{R}_1^{n_1} \hat{R}_2^{n_2} \hat{R}_3^{n_3}$$

donde n_1, n_2, n_3 son enteros.

Ahora se verá como estas operaciones de simetría establecidas en (4.11) afectan a las variables colectivas.

Las variables colectivas con respecto al sistema de ejes principales son a_0 y a_2 . La superficie del núcleo en el sistema intrínseco en términos de coordenadas cartesianas es definido por la ecuación:

núcleo en el sistema intrínseco en términos de coordenadas cartesianas es dada por las ecuaciones:

$$R = R_0 [1 + \alpha'_{xx} x'^2/r^2 + \alpha'_{yy} y'^2/r^2 + \alpha'_{zz} z'^2/r^2] \quad (4.15)$$

En consecuencia, aplicando $\hat{R}_1, \hat{R}_2, \hat{R}_3$ a la última ecuación se de acuerdo a (4.13) se obtiene:

$$\begin{aligned} \hat{R}_1 \alpha'_{xx} &= \alpha'_{xx} & \hat{R}_2 \alpha'_{xx} &= \alpha'_{yy} & \hat{R}_3 \alpha'_{xx} &= \alpha'_{yy} , \\ \hat{R}_1 \alpha'_{yy} &= \alpha'_{yy} & \hat{R}_2 \alpha'_{yy} &= \alpha'_{xx} & \hat{R}_3 \alpha'_{yy} &= \alpha'_{zz} , \\ \hat{R}_1 \alpha'_{zz} &= \alpha'_{zz} & \hat{R}_2 \alpha'_{zz} &= \alpha'_{zz} & \hat{R}_3 \alpha'_{zz} &= \alpha'_{xx} , \end{aligned} \quad (4.16)$$

o

$$\begin{aligned} \hat{R}_1 a_2 &= a_2 & \hat{R}_2 a_2 &= -a_2 & \hat{R}_3 a_2 &= \sqrt{6} a_0/4 - a_2/2 , \\ \hat{R}_1 a_0 &= a_0 & \hat{R}_2 a_0 &= a_0 & \hat{R}_3 a_0 &= -a_0/2 + \sqrt{6} a_2/2 \end{aligned} \quad (4.17)$$

En la representación β - γ se tiene:

$$\begin{aligned} \hat{R}_1 \beta &= \beta & \hat{R}_2 \beta &= \beta & \hat{R}_3 \beta &= \beta \\ \hat{R}_1 \gamma &= \gamma & \hat{R}_2 \gamma &= -\gamma & \hat{R}_3 \gamma &= \gamma - 2\pi/3 \end{aligned}$$

y así las transformaciones básicas pueden escribirse como sigue:

$$\begin{aligned} \hat{R}_1(\beta, \gamma, \vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3) &= (\beta, \gamma, \vartheta_1 + \pi, \pi - \vartheta_2, -\vartheta_3) \\ \hat{R}_2(\beta, \gamma, \vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3) &= (\beta, -\gamma, \vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3 + \pi/2) \\ \hat{R}_3(\beta, \gamma, \vartheta_1, \vartheta_2, \frac{\pi}{2}) &= (\beta, \gamma - 2\pi/3, \vartheta_1 + \pi/2, \frac{\pi}{2}, \vartheta_2 + \pi/2) \end{aligned} \quad (4.19)$$

o

$$\hat{R}_3(\beta, \gamma, \vartheta_1, \vartheta_2, 0) = (\beta, \gamma, \vartheta_1, \vartheta_2 + \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

Para R_3 , tenemos casos especiales de ϑ_3 , ya que en general es muy complicado.

Supóngase ahora una única función de las coordenadas del laboratorio, $\{x_1\}, \{\alpha_{2\mu}\}$, dada por $f(x_1, \alpha_{2\mu})$. Entonces a cada conjunto de variables $\{x_1\}, \{\alpha_{2\mu}\}$ corresponde una única función a saber, $f(x_1, \alpha_{2\mu})$. Expresando esta función en términos de los

ángulos de Euler y las funciones intrínsecas, partiendo desde las variables del laboratorio $f(x_1, x_2, x_3, \alpha_{2\mu})$. Utilizando transformaciones $x_i \rightarrow x_i'$ y $\alpha_{2\mu} \rightarrow a_{2\nu}$

$$f(x_i = \sum R_i^{-1}(\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3) x_i', \alpha_{2\mu} = \sum D_{\mu\nu}^{2*}(\vartheta) a_{2\nu}) \quad (4.20)$$

$$= f(\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, x', y', z', a_0, a_2)$$

que reporta las siguientes consecuencias: Ya que $r_m = \sum D_{\mu\nu}^{2*}(\vartheta) r'_\nu$ además $\alpha_{2\mu} = \sum D_{\mu\nu}^{2*}(\vartheta) a_{2\nu}$ son invariantes ante $\hat{R}_1, \hat{R}_2, \hat{R}_3$ entonces f' es también invariante ante ellas, es decir, ante las 24 transformaciones especificadas ya.

Si se hacen cálculos con variables intrínsecas, ya sea para resolver un Hamiltoniano en estas coordenadas, en general las soluciones $\psi'_n(\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, x', y', z', a_0, a_2)$ no son invariantes ante las transformaciones $\hat{R}_1, \hat{R}_2, \hat{R}_3$.

Si se quiere tener una función que sea única en el sistema de laboratorio, que también sea única en el sistema intrínseco, entonces se necesita simetrizar de la función de onda y la cual automáticamente genera simetrías en las funciones de las variables intrínsecas.

Ahora para analizar tales tipos de simetría hay que partir del potencial superficial colectivo:

$$V(\alpha^{[2]}) = (\sqrt{5}/2B_2)[\alpha^{[2]}_x \alpha^{[2]}]^{[0]} + C_3[[\alpha^{[2]}_x \alpha^{[2]}]^{[2]}_x \alpha^{[2]}]^{[0]} +$$

$$+ C_4[\alpha^{[2]}_x \alpha^{[2]}]^{[0]}[\alpha^{[2]}_x \alpha^{[2]}]^{[0]} + \dots$$

(4.21)

Expresándolo ahora en términos de los ángulos de Euler y de las coordenadas colectivas, la forma del potencial no cambia, ya que este es un escalar.

$$V(a_0, a_2) = (\sqrt{5}/2B_2)[a^{[2]} \times a^{[2]}]^{[0]} + C_3[[a^{[2]} \times a^{[2]}]^{[2]} \times a^{[2]}]^{[0]} + \\ + C_4[a^{[2]} \times a^{[2]}]^{[0]} [a^{[2]} \times a^{[2]}]^{[0]} + \dots \quad (4.21.1)$$

escribiendo los coeficientes de Clebsh-Gordan correspondientes (en la notación de Rose)⁸.

$$V(a_0, a_2) = C_2(a_0^2 + 2a_2^2) + \sqrt{5}C_3/5 [a_0\{(222|000)a_0^2 + (222|2-20)a_2^2 + \\ + (222|-220)a_2^2 + a_2\{(222|0-2-2)a_0a_2 + (222|-20-2)a_2a_0\} + \\ + a_2\{(222|022)a_0a_2 + (222|202)a_2a_0\}] + C_4/5(a_0^2 + 2a_2^2)^2 \\ = C_2/2(a_0^2 + 2a_2^2) + \sqrt{2/35} C_3 a_0(6a_2^2 - a_0^2) + C_4/5 (a_0^2 + 2a_2^2)^2 \quad (4.22)$$

Para esta función que solo depende de a_2 y a_0 únicamente 6 de las 24 simetrías que cambian al sistema intrínseco (a_0, a_2) .

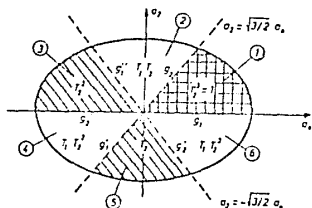
Estas 6 transformaciones pueden construirse a partir de las dos transformaciones básicas:

$$\hat{T}_1(a_0, a_2) = (a_0, -a_2) \quad \hat{T}_1^2 = 1 \\ \hat{T}_2(a_0, a_2) = (-a_0/2 + (\sqrt{6}/2) a_2, \sqrt{6}/4 a_0 - a_2/2) \quad \hat{T}_2^3 = 1 \quad (4.23) \\ \text{o en } \beta \bar{\gamma} \quad \hat{T}_1(\beta, \bar{\gamma}) = (\beta, -\bar{\gamma}) \quad \hat{T}_1^2 = 1 \\ \hat{T}_2(\beta, \bar{\gamma}) = (\beta, \bar{\gamma} - 2\pi/3) \quad \hat{T}_2^3 = 1$$

Explícitamente estas transformaciones están dadas por

$$\hat{T}_2(a_0, a_2) = (-a_0/2 + (\sqrt{6}/2) a_2, -(\sqrt{6}/4) a_0 - a_2/2) \\ \hat{T}_2^2(a_0, a_2) = (-a_0/2 - (\sqrt{6}/2) a_2, (\sqrt{6}/4) a_0 - a_2/2) \\ \hat{T}_2^3(a_0, a_2) = (a_0, a_2) \quad (4.24) \\ \hat{T}_1\hat{T}_2(a_0, a_2) = (-a_0/2 + (\sqrt{6}/2) a_2, (\sqrt{6}/4) a_0 + a_2/2) \\ \hat{T}_1\hat{T}_2^2(a_0, a_2) = (-a_0/2 - (\sqrt{6}/2) a_2, -(\sqrt{6}/4) a_0 + a_2/2) \\ \hat{T}_1\hat{T}_2^3(a_0, a_2) = (a_0, -a_2) = \hat{T}_1(a_0, a_2)$$

En la siguiente figura (fig. IV.4) se da una interpretación de estas 6 transformaciones; las líneas $a_2 = 0$, $a_2 = (\sqrt{6}/2) a_0$, $a_2 = -(\sqrt{6}/2) a_0$ generan 6 áreas en el plano $a_2 - a_0$. Por simetría, la física queda determinada en cada área. Ver fig. IV.4



El efecto de los operadores de simetría T1 y T2 en el plano $a_0 - a_2$. Cada punto (a_0, a_2) en una de las seis áreas de esta figura describe una posible forma del núcleo. Funciones definidas en las áreas nos da información de una propiedad nuclear particular (p.e. una función $V(a_0, a_2)$ puede ser un potencial colectivo) para la forma nuclear especial definida por (a_0, a_2) .

Fig. IV.4

MODELO ESQUEMATICO PARA LA SUPERFICIE DE ENERGIA POTENCIAL COLECTIVA

De la ec. (4.22) podemos darnos cuenta, que existen diferentes superficies de energía potencial, dependiendo éstas de los valores de los parámetros C_2 , C_3 , y C_4 . El modelo con estos únicos tres parámetros, ya señala algunas de las características esenciales del comportamiento colectivo nuclear a bajas energías. Estas pueden ilustrarse encontrando los máximos y mínimos⁷ de (4.22) y así

obtener conjuntos de parámetros de interés.

En la tabla IV.1 se muestran algunos de los puntos críticos de interés. En las primeras tres columnas se especifica el signo de los tres parámetros, en la siguiente columna se da el valor del valor crítico para el cual existe un mínimo. Las siguientes dos columnas indican en que parte del plano $V(a_0, a_2)$ tiene lugar el mínimo (en los ejemplos son prolatos). La última columna tiene la gráfica correspondiente, de las cuales la primera indica que para el signo de los parámetros ejemplificados siempre existe un mínimo en el origen del plano (a_0, a_2) . La siguiente es un segundo mínimo, este se da solo si el valor crítico $x > 56/9$. El otro mínimo que se ilustra solo se da si $56/9 < x < 7$.

bajas energías. Basta con hacer álgebra de máximos y mínimos⁷, para obtener el conjunto de parámetros que nos señalan un estado de interés.

En la tabla IV.1 se muestran algunos de los puntos críticos de interés, y el tipo de deformación que representa en el núcleo.

C_2	C_1	C_4	$\frac{C_3^2}{C_2 C_4}$	a_1	a_2	$V(a_0, a_2)$	Tipo de gráfico.
				0	0	0 Primer mínimo.	
			$\frac{C_3^2}{C_2 C_4} > 0$	$\frac{C_3}{C_2}$	0	Segundo mínimo.	
			$\frac{C_3^2}{C_2 C_4} < 0$	$\frac{C_3}{C_2}$	0	Tercer mínimo.	

Tabla IV.1

CAPITULO 5

EL MODELO ROTACION - VIBRACION

Este modelo es útil para describir núcleos de simetría axial y que están deformados en su estado base. De tal manera que puede desarrollarse alrededor de la posición de equilibrio

deformados en su estado base.

Expandiendo la energía potencial colectiva alrededor de la posición de equilibrio

$$\begin{aligned} a_0 &= \beta_0 + a'_0 \equiv \beta_0 + \xi \\ a_2 &= 0 + a'_2 \equiv 0 + \eta \end{aligned} \quad (5.1)$$

tenemos:

$$V(a'_0, a'_2) = (C_0 a_0'^2)/2 + (C_2 a_2'^2)/2 \equiv C_0 \xi^2 + C_2 \eta^2 \quad (5.2)$$

Considerando oscilaciones pequeñas la energía cinética clásica está dada por:

La energía cinética clásica a primera aproximación es⁷:

$$T = \frac{1}{2} B \sum_{\mu} \dot{\alpha}_{2\mu}^* \dot{\alpha}_{2\mu} \quad (5.3)$$

$$\text{o} \quad T = \sum_k \frac{M_k'^2}{2I_k(a_\nu)} + \frac{B}{2} (a_0'^2 + 2a_2'^2) \quad (5.4)$$

donde aparecen los momentos de inercia I_k :

$$\begin{aligned} I_1(a_0, a_2) &= B(3a_0^2 + 2\sqrt{6}a_0 a_2 + 2a_2^2) = 4B\beta^2 \sin^2(\gamma - 2\pi/3) \\ I_2(a_0, a_2) &= B(3a_0^2 - 2\sqrt{6}a_0 a_2 + 2a_2^2) = 4B\beta^2 \sin^2(\gamma - 4\pi/3) \\ I_3(a_0, a_2) &= 8Ba_2^3 = 4B\beta^2 \sin^2\gamma \end{aligned} \quad (5.5)$$

adelante. La energía cinética (5.3) o (5.4) es una expresión clásica y tiene que cuantizarse, para esto se utiliza el método

siguiente:

CUANTIZACION DE PAULI

Escribiendo la energía cinética como una forma bilineal en todas las velocidades \dot{q}_ν :

$$T = \frac{1}{2} \sum g_{\mu\nu}(q_\sigma) \dot{q}_\mu \dot{q}_\nu \quad \mu, \nu = 1, 2, \dots, \quad (5.6)$$

donde las $g_{\mu\nu}(q_\sigma)$ son funciones de las coordenadas unicamente.

El elemento de longitud en este espacio esta definido por la expresión:

$$LT dt^2 = ds^2 = \sum \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(q_\sigma) \frac{dq_\mu}{dt} \frac{dq_\nu}{dt} \quad (5.7)$$

Entonces la forma cuantizada de la energía cinética (5.6) toma la forma:

$$\hat{T} = - \frac{1}{2} \hbar^2 \sum \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial q_\mu} \sqrt{g} (g^{-1})_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial q_\nu} \quad (5.8)$$

donde g es el determinante de $g_{\mu\nu}$, y $(g^{-1})_{\mu\nu}$ denota la matriz inversa de $g_{\mu\nu}$. La ecuación (5.8) puede reescribirse :

$$T = \frac{1}{2} \sum I_k(a_0, a_2) \left\{ \sum V_{k1}(\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3) \frac{d\vartheta_1}{dt} \right\}^2 + \frac{1}{2} B(a_0'^2 + a_2'^2) \quad (5.9)$$

el término entre corchetes es la velocidad angular con respecto al sistema intrínseco.

Ahora identificando las coordenadas:

$$q_1 = a_0, \quad q_2 = a_2, \quad q_3 = \vartheta_1, \quad q_4 = \vartheta_2, \quad q_5 = \vartheta_3$$

y comparando las ecuaciones (5.9) y (5.7) tenemos:

$$\begin{aligned}
 g_{11} &= B \\
 g_{22} &= 2B \\
 g_{1k} &= g_{k1} = 0 \quad \text{si } k \neq 1 \\
 g_{2k} &= g_{k2} = 0 \quad \text{si } k \neq 2 \\
 g_{\mu\nu} &= \sum_k I_k (a_0, a_2) V_{k\mu}(\vartheta_1) V_{k\nu}(\vartheta_1) \quad \mu, \nu \geq 3
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

Esta métrica explícitamente esta dada como sigue:

$$\begin{array}{ccccc}
 B & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 2B & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & I_1 \sin^2 \vartheta_2 \cos^2 \vartheta_3 & -I_1 \sin \vartheta_2 \cos \vartheta_3 \sin \vartheta_3 & I_3 \cos \vartheta_2 \\
 & & + I_2 \sin^2 \vartheta_2 \sin^2 \vartheta_3 & + I_2 \sin \vartheta_2 \sin \vartheta_3 \cos \vartheta_3 & \\
 & & + I_3 \cos^2 \vartheta_2 & & \\
 0 & 0 & -I_1 \sin \vartheta_2 \cos \vartheta_3 \sin \vartheta_3 & I_1 \sin^2 \vartheta_3 + I_2 \cos^2 \vartheta_3 & 0 \\
 & & + I_2 \sin \vartheta_2 \sin \vartheta_3 \cos \vartheta_3 & & \\
 0 & 0 & I_3 \cos \vartheta_2 & 0 & I_3
 \end{array} \tag{5.11}$$

El determinante de esta matriz es facilmente calculado:

$$g = 2B^2 \sin^2 \vartheta_2 I_1 I_2 I_3 \tag{5.12}$$

Encontrando la inversa de la matriz (5.11) y utilizando las ecuaciones (5.11) y (5.12) se determina la expresión cuántica de la energía cinética

$$\hat{T} = \hat{T}_{rot} + \hat{T}_{vib} \tag{5.13}$$

donde \hat{T}_{rot} esta dada por:

$$\begin{aligned} \hat{T}_{\text{rot}} = & -\hbar^2 \left[\frac{1}{2I_1(a_0, a_2)} \left(-\frac{\cos\vartheta_3}{\sin\vartheta_2} \frac{\partial}{\partial\vartheta_1} + \sin\vartheta_3 \frac{\partial}{\partial\vartheta_2} + \cot\vartheta_2 \cos\vartheta_3 \frac{\partial}{\partial\vartheta_3} \right)^2 + \right. \\ & + \frac{1}{2I_2(a_0, a_2)} \left(\frac{\sin\vartheta_3}{\sin\vartheta_2} \frac{\partial}{\partial\vartheta_1} + \cos\vartheta_3 \frac{\partial}{\partial\vartheta_2} - \cot\vartheta_2 \sin\vartheta_3 \frac{\partial}{\partial\vartheta_3} \right)^2 + \\ & \left. + \frac{1}{2I_3(a_0, a_2)} \left(\frac{\partial}{\partial\vartheta_3} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (5.14)$$

En la ec. anterior, los términos dentro de los paréntesis redondos son las componentes del momento angular en el sistema intrínseco.

$$\hat{L}_k = \hat{L}_k(\vartheta_1)$$

Si se define:

$$\hat{M}_k = (\vartheta_1) = \hbar L_k(\vartheta_1) \quad (5.15)$$

entonces \hat{T}_{rot} se convierte en :

$$\hat{T}_{\text{rot}} = \sum_{k=1}^3 \frac{\hat{M}_k^2}{2I_k(a_0, a_2)} \quad (5.16)$$

La parte vibracional depende de la parte no diagonal de g_{ij}

$$\begin{aligned} T_{\text{vib}} = & -\frac{\hbar^2}{2} \left\{ \frac{1}{4B_2^5 a_2 (3a_0^2 - a_2^2) \sin\vartheta_2} \frac{\partial}{\partial a_0} \frac{4B^{5/2} (3a_0^2 - a_2^2)}{B} \sin\vartheta_2 \frac{\partial}{\partial a_0} \right. \\ & + \frac{1}{4B^{5/2} a_0 (3a_0^2 - a_2^2) \sin\vartheta_2} \frac{\partial}{\partial a_2} \frac{4B^{5/2} a_0 (3a_0^2 - a_2^2) \sin\vartheta_2}{2B} \sin\vartheta_2 \frac{\partial}{\partial a_2} \\ & \left. - \frac{\hbar^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial a_0^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial a_2^2} + \frac{6a_0 a_2}{a_2 (3a_0^2 - a_2^2)} \frac{\partial}{\partial a_0} + \frac{3a_0^2 - 6a_2^2}{2a_2 (3a_0^2 - a_2^2)} \frac{\partial}{\partial a_2} \right\} \end{aligned} \quad (5.17)$$

Si se hace la substitución $a_0 = \beta \cos\gamma$ y $a_2 = \frac{\beta}{\sqrt{2}} \sin\gamma$

se obtiene la forma utilizada por la escuela de Copenhage

$$\tilde{T}_{\text{vib}} = -\frac{\hbar^2}{2B} \left[\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial\beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial\beta} + \frac{1}{\beta^2} \frac{1}{\sin 3\gamma} \frac{\partial}{\partial\gamma} \sin 3\gamma \frac{\partial}{\partial\gamma} \right] \quad (5.18)$$

El elemento de volumen es :

$$d\tau = 4B^{5/2} |a_2| |3a_0^2 - 2a_2^2| |\text{sen}\vartheta_2| da_0 da_2 d\vartheta_1 d\vartheta_2 d\vartheta_3 \quad (5.19)$$

CAMBIO EN EL ELEMENTO DE VOLUMEN

Originalmente el elemento de volumen fue escogido como:

$$d\tau = d\tilde{\tau}(a_0, a_2) \cdot d\Omega$$

donde :

$$d\Omega = |\text{sen}\vartheta_2| d\vartheta_1 d\vartheta_2 d\vartheta_3 \quad (5.20)$$

y

$$d\tilde{\tau} = \sqrt{2} |a_2| |3a_0^2 - 2a_2^2| da_0 da_2 = \beta^4 |\text{sen}3\gamma| d\beta d\gamma$$

como el elemento de volumen de la parte vibracional. Las funciones han de ser normalizadas como:

$$\int \psi^*(a_0, a_2) \psi(a_0, a_2) D(a_0, a_2) da_0 da_2 = 1 \quad (5.21)$$

$$\text{Con } D = \sqrt{2} |a_2| |3a_0^2 - 2a_2^2| \quad (5.22)$$

Resulta conveniente hacer un cambio de volumen que redefina la función de onda como:

$$\varphi(a_0, a_2) = \sqrt{D} \psi(a_0, a_2) \quad (5.23)$$

que se normaliza de acuerdo al nuevo elemento de volumen

$$\begin{aligned} d\tau(a_0, a_2) &= da_0 da_2 \\ \int \psi^*(a_0, a_2) \varphi(a_0, a_2) da_0 da_2 &= 1 \end{aligned} \quad (5.24)$$

El cambio en el elemento de volumen, modifica la ecuación de eigenvalores

$$\hat{T}_{vib} (a_0, a_2) \psi (a_0, a_2) = E \psi (a_0, a_2) \quad (5.25)$$

a la siguiente :

$$\hat{T}_{vib}(a_0, a_2) \varphi(a_0, a_2) = \sqrt{D} [\hat{T}_{vib}(a_0, a_2) \frac{\varphi(a_0, a_2)}{\sqrt{D}}] = E\varphi(a_0, a_2) \quad (5.26)$$

y la función de onda : $\varphi = \sqrt{D} \psi$ satisface

$$\hat{T}_{vib} \varphi(a_0, a_2) = E \varphi(a_0, a_2) \quad (5.27)$$

donde

$$\begin{aligned} \hat{T}_{vib} &= - \frac{\hbar^2}{2} \frac{1}{\sqrt{D}} \sum_{k, \lambda=0, 2} D \frac{\partial}{\partial a_k} (g^{-1})_{k, \lambda} \frac{\partial}{\partial a_\lambda} \frac{1}{\sqrt{D}} \\ &= - \frac{\hbar^2}{2} \sum_{k, \lambda=0, 2} \frac{\partial}{\partial a_k} (g^{-1})_{k, \lambda} \frac{\partial}{\partial a_\lambda} + V_{ad} \end{aligned} \quad (5.28)$$

El potencial adicional es:

$$\begin{aligned} V_{ad} &= \frac{\hbar^2}{4D} \sum_{k, \lambda} \left\{ \frac{\partial D}{\partial a_\lambda} \frac{\partial (g^{-1})_{k, \lambda}}{\partial a_k} + (g^{-1})_{k, \lambda} \frac{\partial^2 D}{\partial a_k \partial a_\lambda} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2D} (g^{-1})_{k, \lambda} \frac{\partial D}{\partial a_k} \frac{\partial D}{\partial a_\lambda} \right\} \end{aligned} \quad (5.29)$$

Ahora :

$$\hat{T} = \sum_{k=1}^3 \frac{\hat{M}_k^2}{2Ik(a_0, a_2)} - \frac{\hbar^2}{2B} \left[\frac{\partial^2}{\partial a_0^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial a_2^2} + \frac{(3a_0^2 + 6a_2^2)^2}{8a_2^2(3a_0^2 - 2a_2^2)^2} \right] \quad (5.29.1)$$

El operador \hat{H} puede escribirse entonces :

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \sum_{k=1}^3 \frac{\hat{M}_k^2}{2Ik(a_0, a_2)} - \frac{\hbar^2}{2B} \left[\frac{\partial^2}{\partial a_0^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial a_2^2} + \frac{(3a_0^2 + 6a_2^2)^2}{8a_2^2(3a_0^2 - 2a_2^2)^2} + \right. \\ &\quad \left. + V(a_0, a_2) \right] \end{aligned} \quad (5.30)$$

donde $d\tau = d\Omega da_0 da_2$

En la representación $\beta-\gamma$ tenemos:

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \sum_k \frac{\hat{M}_k^2}{2Ik(\beta, \gamma)} - \frac{\hbar^2}{2B} \left[\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{\beta^2} \frac{1}{\sin 3\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin 3\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} \right] + \\ &\quad + V(\beta, \gamma) \end{aligned}$$

Por otra parte, la parte rotacional y vibracional quedan acopladas debido a su dependencia de a_v en los momentos de inercia.

Por la misma suposición de que se trata con núcleos axialmente simétricos, se pueden expandir los momentos de inercia hasta términos de segundo orden en a'_v / β_0 , quedando:

$$\frac{1}{I_1} = \frac{1}{I_0} \left[1 + \frac{2a'_v{}^2}{\beta_0^2} + \frac{2\sqrt{6}a'_v a'_0}{\beta_0^2} - \frac{2\sqrt{6}a'_v}{\beta_0} - \frac{2a'_0}{\beta_0} + \frac{3a_0'^2}{\beta_0^2} \right]$$

$$\frac{1}{I_2} = \frac{1}{I_0} \left[1 + \frac{2a'_v{}^2}{\beta_0^2} + \frac{2\sqrt{6}a'_v a'_0}{\beta_0^2} - \frac{2\sqrt{6}a'_v}{3\beta_0} - \frac{2a'_0}{\beta_0} + \frac{3a_0'^2}{\beta_0^2} \right] \quad (5.32)$$

$$\frac{1}{I_3} = \frac{1}{8Ba_v{}^2}$$

donde $I_0 = 3B\beta_0^2$

Haciendo una expansión similar alrededor de v_{ad} , se obtiene el Hamiltoniano del modelo Rotación-Vibración ($a'_0 \equiv \xi$, $a'_2 \equiv \eta$)

$$\hat{H} = \hat{H}_{rot} + \hat{H}_{vib} + \hat{H}_{vibrot}$$

donde:

$$\hat{H}_{rot} = \frac{\hat{M}_1^2}{2I_0} + \frac{\hat{M}_2^2}{2I_0} + \frac{\hat{M}_3^2}{16Ba_v{}^2} = \frac{\hat{M}^2 + \hat{M}_3^2}{2I_0} + \frac{\hat{M}_3^2}{16B\eta^2}$$

$$\hat{H}_{vib} = -\frac{\hbar^2}{2B} \left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right] + \frac{1}{2} C_0 \xi^2 + C_2 \eta^2 - \frac{\hbar^2}{16B\eta^2}$$

$$\hat{H}_{vibrot} = \frac{\hat{M}^2 + \hat{M}_3^2}{2I_0} \left[2 \frac{\eta^2}{\beta_0^2} - 2 \frac{\xi}{\beta_0} + 3 \frac{\xi^2}{\beta_0^2} \right] +$$

$$+ \frac{\hat{M}^2 + \hat{M}_3^2}{4I_0} \left[\frac{2\sqrt{6} \xi \eta}{\beta_0^2} - \frac{2\sqrt{6} \eta}{3\beta_0} \right] \quad (5.33)$$

Aquí se definió:

$$\hat{M}_+ = \hat{M}_1 + i \hat{M}_2$$

$$\hat{M}_- = \hat{M}_1 - i \hat{M}_2$$

$$\hat{M}_1 - \hat{M}_2 = \frac{1}{2} (\hat{M}_+^2 + \hat{M}_-^2)$$

Ahora se verá la solución de tal Hamiltoniano.

Las partes \hat{H}_{rot} y \hat{H}_{vib} tienen solución exacta. La precisión de la solución completa depende del tratamiento que se le da a la parte \hat{H}_{vibrot} . La solución exacta es obtenida al diagonalizar esta matriz. La solución aproximada es obtenida si se utiliza teoría de perturbaciones. La primera es mas conveniente si se quiere obtener estados con espín alto.

SOLUCION DE LA ECUACION DE SCHRODINGER

Para la solución exacta de $\hat{H}_{\text{rot}} + \hat{H}_{\text{vib}}$ se plantea:

$$\left[\frac{\hat{M}_+^2 + \hat{M}_-^2}{2I_0} + \frac{\hat{M}_3^2 - \hbar^2}{16B\eta^2} - \frac{\hbar^2}{2B} \left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right] + \frac{1}{2} C_0 \xi^2 + C_2 \eta^2 \right] \bar{\psi}(\vartheta, \xi, \eta) = E \bar{\psi}(\vartheta, \xi, \eta) \quad (5.34)$$

Utilizando el "anzats" para la función de onda:

$$\bar{\psi}(\vartheta, \xi, \eta) = D_{mk}^{l*}(\vartheta) \varphi(\xi, \eta)$$

Además teniendo en cuenta la ecuación de eigenvalores para el rotor simétrico, es obtenible la siguiente ecuación:

$$\left[\frac{\{I(I+1) - k^2\} \hbar^2}{2I_0} + \frac{(k^2 - 1) \hbar^2}{16B\eta^2} - \frac{\hbar^2}{2B} \left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right] + \frac{1}{2} C_0 \xi^2 + C_2 \eta^2 \right] \varphi(\xi, \eta) = E \varphi(\xi, \eta) \quad (5.35)$$

Por tanto es diagonal para k y puede separarse ξ y η

$$\psi(\xi, \eta) = \chi_n(\eta) g_{n_0}(\xi) \quad (5.36)$$

dando origen a dos ecuaciones diferenciales

$$\left[\frac{\{I(I+1) - k^2\} \hbar^2}{2I_0} + \frac{(k^2 - 1)\hbar^2}{16B\eta^2} - \frac{\hbar^2}{4B} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + C_2 \eta^2 + (E - E_0) \right] \chi_k(\eta) = 0 \quad (5.37)$$

y

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2B} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{2} C_0 \xi^2 - E_0 \right\} g(\xi) = 0 \quad (5.37.1)$$

Esta última tiene como solución al oscilador armónico, que en términos de los operadores de creación y aniquilación queda

$$g_{n_0}(\xi) = |n_0\rangle = (n_0!)^{-1/2} \underbrace{\hat{\beta}_0^+ \cdots \hat{\beta}_0^+}_{\text{No veces}} |0\rangle \quad (5.38)$$

donde se ha considerado :

$$\xi = \left\{ \frac{\hbar}{2B\omega_0} \right\}^{1/2} (\hat{\beta}_0^+ + \hat{\beta}_0) \equiv y(\hat{\beta}_0^+ + \hat{\beta}_0)$$

$$\xi = -i\omega_0 \left\{ \frac{\hbar}{2B\omega_0} \right\}^{1/2} (-\hat{\beta}_0^+ + \hat{\beta}_0) \equiv -i\omega_0 y (-\hat{\beta}_0^+ + \hat{\beta}_0) \quad (5.39)$$

$$\text{con } y \equiv \left\{ \frac{\hbar}{2B\omega_0} \right\}^{1/2} = \beta_0 \left(\frac{3\varepsilon}{2E_\beta} \right)^{1/2}, \quad \varepsilon = \frac{\hbar^2}{I_0}, \quad E_\beta = \hbar \left(\frac{C_0}{B} \right)^{1/2}$$

$$\text{e } I_0 = 3 B \beta_0^2$$

La energía E_0 para las vibraciones a_0 son:

$$E_0 = (n_0 + \frac{1}{2}) \hbar \omega_0 = (n_0 + \frac{1}{2}) \hbar \left(\frac{C_0}{B} \right)^{1/2} \equiv (n_0 + \frac{1}{2}) E_\beta \quad (5.40)$$

$$n_0 = 0, 1, 2, \dots$$

Ahora, la solución de la ecuación (5.37) para las vibraciones η (ver Eisenberg-Greiner, Aria A.P.¹⁰) queda ya normalizada.

$$\chi_{k, n_2}(\eta) = \frac{\left\{ \lambda^{l_k + 3/2} \Gamma(l_k + \frac{3}{2} + n_2) \right\}^{1/2}}{(n_2!)^{1/2} \Gamma(l_k + \frac{3}{2})} |\eta|^{1/2} \eta^{k/2} e^{-\lambda \eta^2/2} + {}_1F_1(-n_2, l_k + \frac{3}{2}; \lambda \eta^2) \quad (5.41)$$

donde las energías son:

$$E - E_0 = (l_k + \frac{3}{2} + 2n_2)h\omega_2 + (I(I+1) - k^2) \frac{c}{2} \quad (5.42)$$

donde $h\omega_2 = h(\frac{C_2}{B})^{1/2} = E_j$

En suma, la función de onda total buscada es:

$$\tilde{\psi}(\vartheta_j, \xi, \eta) = N D_{mk}^{I*}(\vartheta_j) \chi_{k, n_2}(\eta) |n_0\rangle \quad (5.43)$$

donde N es el factor de normalización .

SIMETRIZACION DE LAS FUNCIONES DE ONDA

En el capítulo 3 se mostraron las simetrías que una función de onda, en términos de los ángulos de Euler debe cumplir. Pero la ec.(5.43) no tiene estas simetrías, por tanto habrá que simetrizarla; en otras palabras, se necesita que la función de onda que está bien definida en el sistema de laboratorio no sea ambigua en el sistema intrínseco, debido a las varias maneras en las cuales puede ser escogido este último.

Aplicando el operador \hat{R}_2 a la función de onda (5.43)

$$\begin{aligned}\hat{R}_2 \bar{\psi}(\vartheta_1, \xi, \eta) &= \hat{R}_2 D_{mk}^{I^*}(\vartheta_1) \chi_{k, n_2}(\eta) |n_0\rangle \\ &= D_{mk}^{I^*}(\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3 + \frac{\pi}{2}) \chi_{k, n}(-\eta) |n_0\rangle\end{aligned}\quad (5.44)$$

De la definición de $D_{mk}^{I^*}$ (ver Rose^B) se encuentra que:

$$D_{mk}^{I^*}(\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3 + \frac{\pi}{2}) = e^{i\pi k/2} D_{mk}^{I^*}(\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3)$$

y de la función $\chi_k(\eta)$ de la ec. (5.41) se obtiene

$$\chi_{k, n_2}(-\eta) = (-1)^{k/2} \chi_{k, n_2}(\eta) \quad (5.45)$$

Así

$$\hat{R}_2 \bar{\psi}(\vartheta_1, \xi, \eta) = (-1)^k \bar{\psi}(\vartheta_1, \xi, \eta) \quad (5.46)$$

Entonces $\bar{\psi}$ es invariante bajo \hat{R}_2 solamente si k queda restringida a enteros pares:

$$k = 0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots \quad (5.47)$$

Luego, procediendo similarmente para simetrizar la función de onda bajo \hat{R}_1 es necesario que:

$$\hat{R}_1 D_{mk}^{I^*}(\vartheta_1) = (-1)^{I-2k} D_{m-k}^{I^*}(\vartheta_1) \quad (5.48)$$

esto se logra si la función de onda en cuestión es ahora :

$$D_{mk}^{I^*}(\vartheta_1) = (-1)^{I-2k} D_{m-k}^{I^*}(\vartheta_1)$$

De esta manera se determinan los eigenestados de $\hat{H}_{rot} + \hat{H}_{vib}$ que son invariantes bajo \hat{R}_1 y \hat{R}_2 :

$$\begin{aligned}|I M K n_2 n_0\rangle &= \left(\frac{(2I+1)}{16\pi^2(1+\delta_{k,0})} \right)^{1/2} (D_{mk}^{I^*}(\vartheta_1) = (-1)^{I-2k} D_{m-k}^{I^*}(\vartheta_1)) \\ \chi_{k, n_2}(\eta) |n_0\rangle &= |I M K\rangle \chi_{k, n_2}^I(\eta) |n_0\rangle\end{aligned}\quad (5.49)$$

donde

$$k = 0, 2, 4, \dots$$

$$I = 0, 2, 4, \dots \quad \text{para } k = 0 \quad (5.50)$$

$$I = k, k+1, k+2, \dots \quad \text{para } k \neq 0$$

Las correspondientes energías quedan así:

$$E_{I, k, n_2, n_0} = (I(I+1) - k^2) \frac{E}{2} + \left(\frac{|k|}{2} + 1 + 2n_2 \right) E_\gamma + \left(n_0 + \frac{1}{2} \right) E_\beta \quad (5.51)$$

En la fig. V.1 se muestra el origen de los diferentes tipos de vibraciones en el núcleo.

Por otra parte cualquier conjunto de números cuánticos k, n_2, n_0 quedan especificados como una banda. Cada conjunto lleva a una banda rotacional, ya que para un conjunto dado k, n_2, n_0 el número cuántico de momento angular (I) corre desde $I=k$ ∞ . Estas bandas siguen un patrón del tipo $I(I+1)$.

La típica estructura de bandas para un núcleo deformado se muestra en la fig. V.2.

La banda del estado base queda determinada por $|I \ 0 \ 0 \ 0 \rangle$. La banda β -vibracional por $|I \ 0 \ 0 \ 1 \rangle$ que lleva una energía $E_\beta = h \left(\frac{C_0}{B} \right)^{1/2}$ arriba del estado base. La banda γ -vibracional tiene los números siguientes $|I \ 2 \ 0 \ 0 \rangle$. La energía queda determinada por la ecuación correspondiente $E_\gamma = h \left(\frac{C_0}{B} \right)^{1/2}$

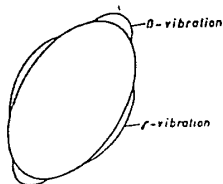
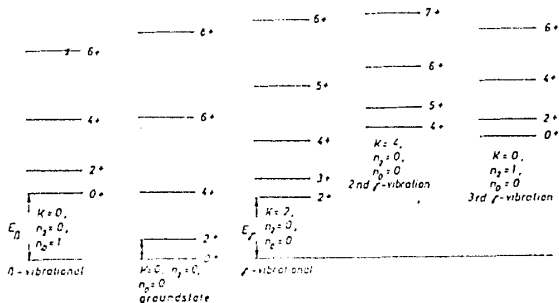


Ilustración esquemática del significado de las vibraciones $\alpha_0(\beta)$ $\alpha_2(\gamma)$.

fig V.1

La fig.V.1 ilustra el significado de las vibraciones $a'_0(\beta)$ y $a'_2(\beta)$. Donde los parámetros pueden ser obtenidos de la siguiente manera, ver Fig.V.2.



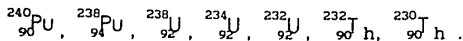
Típica estructura de bandas para un núcleo deformado par-par.

Figura V.2

- E_{β} : Es la diferencia de 0^+ de la banda β -vibracional con el 0^+ de la banda base.
- E_{γ} : Se obtiene de la diferencia del $2_1\gamma$ con el 0_1^+ de la banda base.
- c : Es obtenible, al saberse que el estado $|2200\rangle$ se halla por encima del estado base en la cantidad en la cantidad $E_{\gamma}+c$
- β : Es obtenible directamente de la transición cuadrupolar de $0_1^+ \rightarrow 2_1^+$

APLICACION

Con este modelo se hizo un cálculo por computadora. Los núcleos que se trabajaron, son los siguientes isótopos de la región actínida de la tabla periódica:



Los números cuánticos máximos que se utilizaron fueron:

$$k = 8, \quad n_2 = 4, \quad n_0 = 2$$

En las figuras V.3-10 se muestran los espectros obtenidos, tanto como transiciones y momentos cuadrupolares de los primeros estados.

A continuación se muestra una tabla con los parámetros utilizados para este cálculo (tabla V.1).

Experimental values for the parameters used in the calculation of the model

Nucleus	J ₁	J ₂	J ₃	J ₄	J ₅	J ₆	J ₇	J ₈	J ₉	J ₁₀	J ₁₁	J ₁₂	J ₁₃	J ₁₄	J ₁₅	J ₁₆	J ₁₇	J ₁₈	J ₁₉	J ₂₀	Experimental values			
																					Q ₂	Q ₄		
Sm	62	133	0.122	1.044	12.33	1040	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	64	154	0.123	0.948	11.19	940	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	64	178	0.095	1.154	21.48	1122	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	64	178	0.0789	—	21.55	1154	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Dy	64	140	0.078	—	22.33	837	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	66	160	0.0937	0.934	21.34	934	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	66	164	0.078	0.764	21.57	755	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Er	68	164	0.0906	0.788	21.33	257	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	68	168	0.0788	0.822	21.61	793	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Yb	70	168	0.087	0.817	21.28	855	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	72	172	0.0787	1.083	21.24	1043	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Th	70	172	0.0776	1.087	21.28	1027	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	74	172	0.077	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
U	74	184	0.077	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	74	184	0.077	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	74	184	0.077	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Pa	76	190	0.077	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	76	190	0.087	0.717	44.22	477	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	76	190	0.087	0.717	44.22	477	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Tb	90	230	0.073	0.783	15.28	764	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	90	232	0.090	0.700	14.58	730	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
U	92	232	0.047	0.848	13.84	831	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	92	234	0.044	0.822	11.20	904	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	92	234	0.0447	—	13.67	1047	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Pu	94	234	0.044	0.830	13.54	1014	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	94	240	0.043	0.842	12.97	934	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Tabla I

Tabla I

Los resultados no distan mucho de los experimentales. Ya que éstos cálculos son únicamente de prueba. Se confiaba en obtener buenas aproximaciones, pues se abordaron núcleos que tienen todas las características de las cuales parte el modelo Rotación-Vibración. Pensando en lo anterior, se halla un mayor acuerdo para el núcleo de Uranio-238. Se sabe que este núcleo es un rotor ejemplar. Para

los demás núcleos, las aproximaciones teóricas concuerdan satisfactoriamente con el experimento^{11,12,13,14,15} (ver Figs.

V.3-10).

Vp K KK 9~+KM A \K9 Y . *K

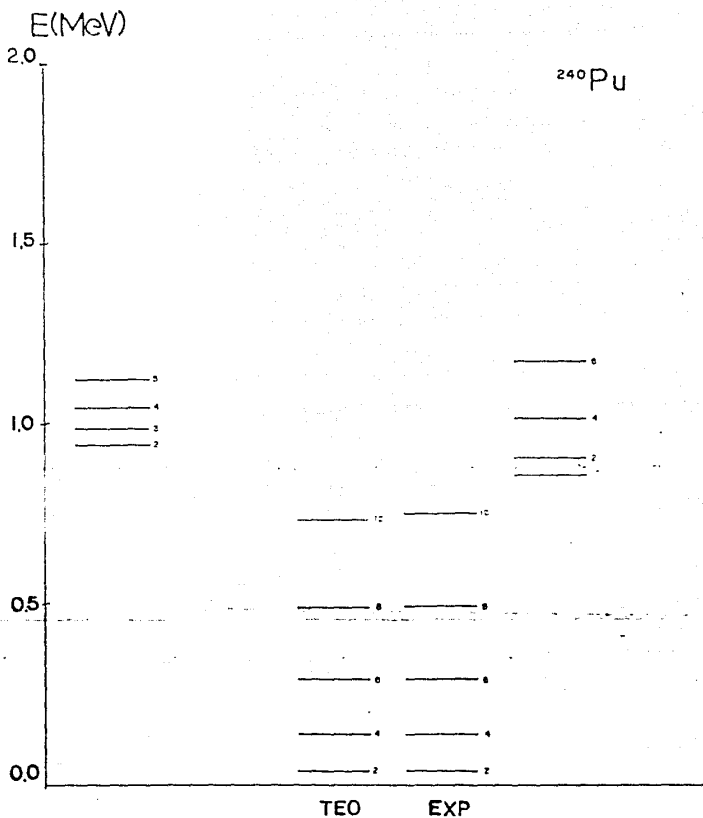


FIG. V.3

En esta figura y las demás similares, se presenta el espectro para algunos isótopos de Uranio. La energía está dada en MeV. En cada espectro se presentan tres bandas (base, gama y beta). La banda base está al centro, la gama a la izquierda y beta a la derecha. Se presenta en cada una teoría (izquierda) y exp. El número a la derecha de cada nivel es el momento angular.

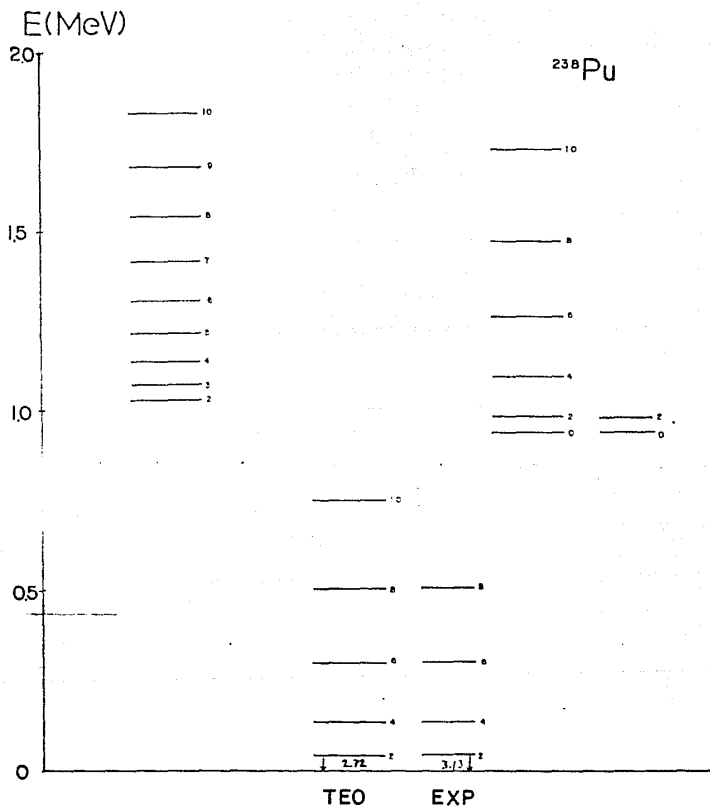


FIG. V.4

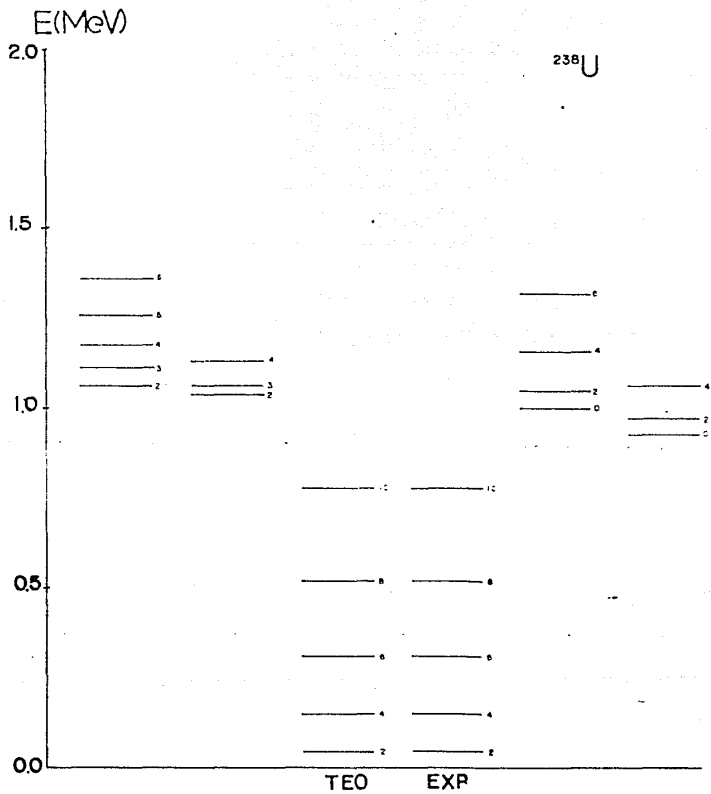


FIG. V.5

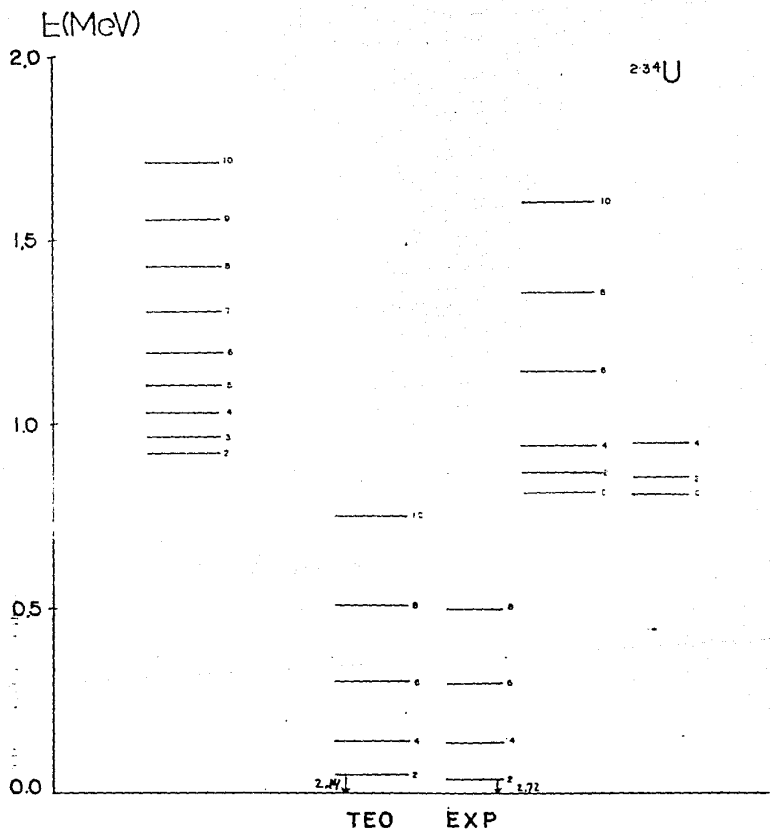


FIG. V.6

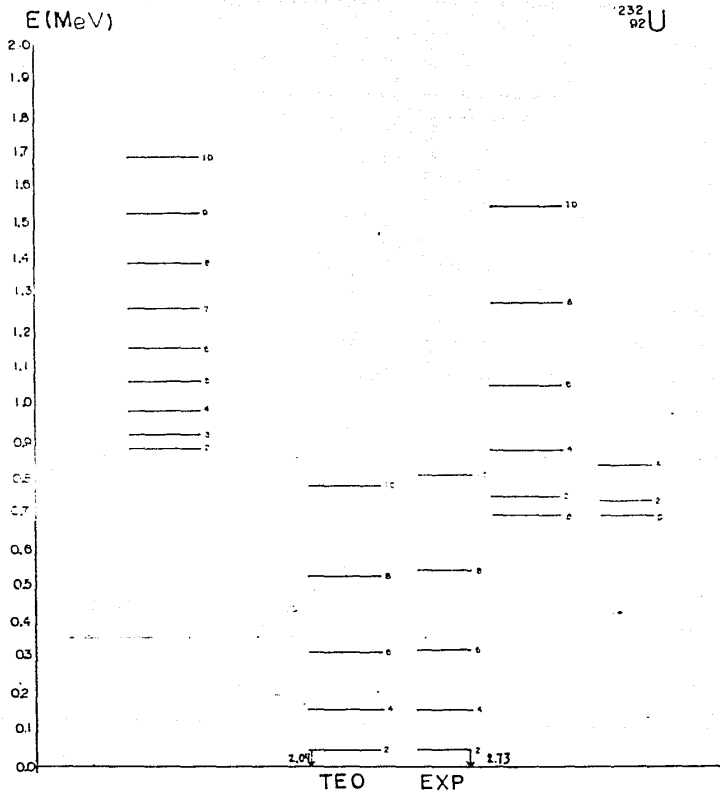


FIG. V.7

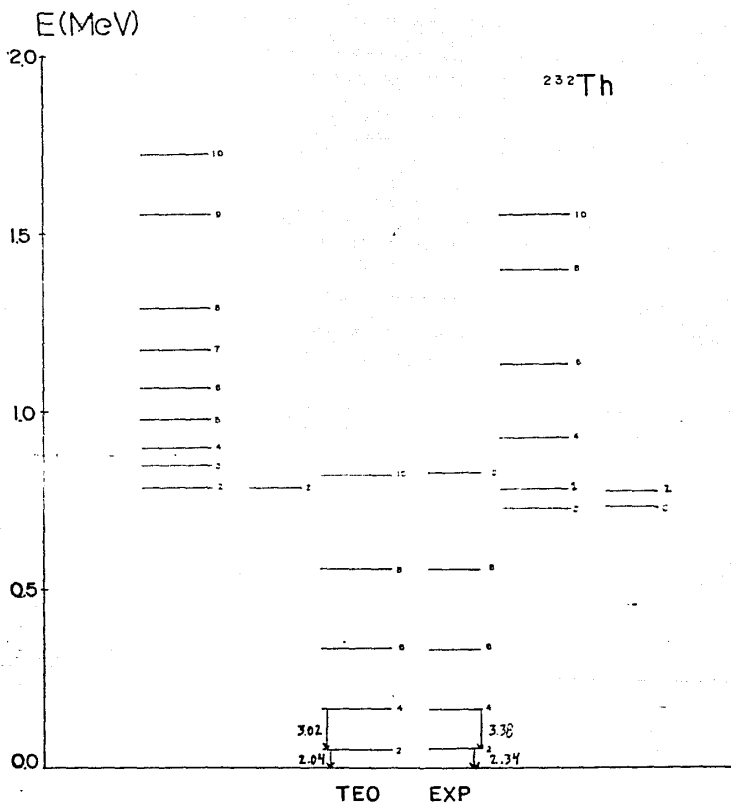


FIG. V.8

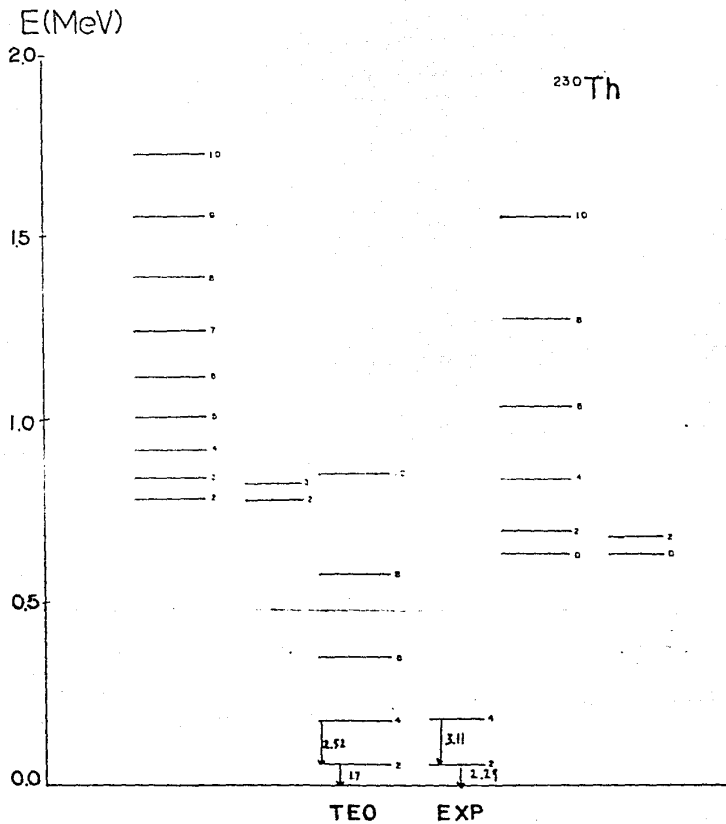


FIG. V.9

CAPITULO 6

EL MODELO GENERAL COLECTIVO Y SU APLICACION A RUTHENIO

En esta segunda parte, se hace un estudio de las características fundamentales de núcleos par-par de la cadena de Ruthenio. Para eso se utiliza el modelo GCM (General Collective Model) elaborado por P. HESS, M. SEIWERT, J. MARHUN, y W. GREINER⁶.

Este modelo fue creado ante la necesidad de tener una descripción mas exacta del comportamiento colectivo de los núcleos. Exacta en el sentido de conjuntar los diversos comportamientos que pueden presentarse en el movimiento colectivo. Como un ejemplo tómesese la aproximación estudiada en los capitulos anteriores; la de vibración- rotación introducida por Faessler y Greiner, donde solo es posible abordar núcleos deformados con simetría axial con movimientos de rotación y vibración. Pero no es esta la única posibilidad, ya que solo pocos núcleos tienen las características de los núcleos trabajados por el vib-rot.

Otro ejemplo es la aproximación hecha por Davidov y Filipov para núcleos deformados triaxialmente. Entonces los primeros modelos centraron su estudio en problemáticas particulares de la dinámica colectiva, y aún asi existen casos de interés no abordados originalmente, como lo son los llamados núcleos transicionales, que tienen deformación estática no bien definida.

Variedades de superficies de energía potencial con varios

mínimos, máximos, puntos silla; aparecen para algunas especies nucleares ; entonces se habla de coexistencia de forma , que es un concepto muy importante, especialmente en el estudio que aquí nos ocupa.

Estos últimos casos se abordaron por primera vez, al tomar Hamiltonianos más generales, como lo hicieron Kumar y Baranger.¹⁶ Evidentemente, al tratar con Hamiltonianos cada vez más generales (mayor número de términos en la energía cinética y potencial) entonces el método para resolver la ecuación de Schrödinger deben ser más sofisticados .

Gneuss-Greiner¹⁷ introducen una mayor generalidad en su Hamiltoniano, además de métodos de teoría de grupos para la solución de la ecuación de Schrödinger. La energía potencial en este modelo es un polinomio de sexto grado en la variable α . Esto permite obtener mucha información acerca de la forma o las formas que puede adoptar un núcleo bajo ciertas condiciones.

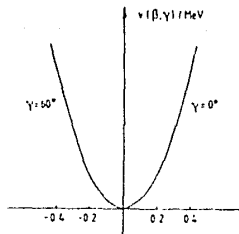
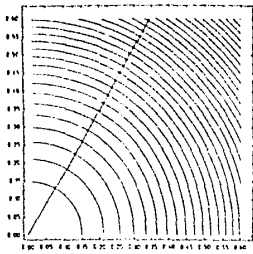
Para nuestro propósito utilizaremos el modelo de Gneuss-Greiner en el marco del GCM.

La solución numérica de la ec. de Schrödinger es hecha al diagonalizar el Hamiltoniano utilizando como base las eigenfunciones del oscilador armónico en cinco dimensiones.

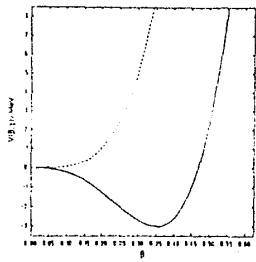
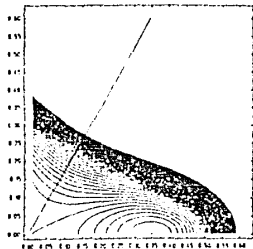
Al aplicar el modelo, las propiedades colectivas son determinadas al obtener los parámetros de masa y la superficie de energía potencial (PES).

El GCM es el más general de los modelos colectivos, al poseer una estructura capaz de describir la mayoría de los procesos colectivos . Es un modelo unificador, por contener en su aparato

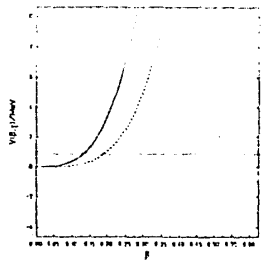
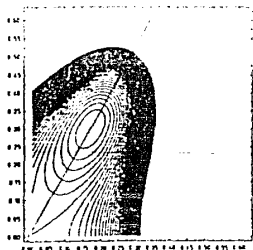
a)



b)



c)



d)

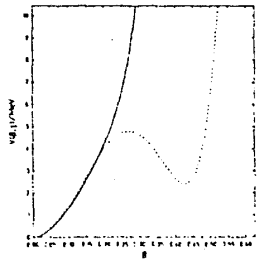
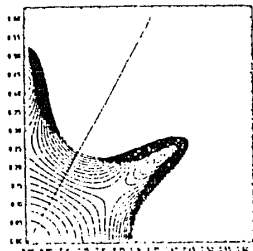


FIG. VI.1

modelos ántes creados para situaciones específicas y abordar nuevas situaciones.

La figura VI.1d es el PES de un núcleo triaxialmente deformado. Tal figura es un claro ejemplo de la flexibilidad del tipo de potencial que se utilizará aquí, ya que representa un mínimo en una zona muy importante del plano a_0 - a_2 . Dentro de la cadena de núcleos con comportamiento colectivo, son mas aquellos que tienen características triaxiales. Por tanto el tipo de potencial con seis parámetros ayuda a visualizarlos de una manera relativamente rápida

EL MODELO COLECTIVO GENERALIZADO

El GCM al igual que los demás modelos tiene su fundamento en el modelo de la gota de liquido de Bohr-Mottelson. Estudia las propiedades a bajas energias (<3 MeV) de núcleos par-par. Por ser continuación de modelos más simples, las variables colectivas son las mismas que hemos revisado en los capitulos anteriores , para el RVM.

El Hamiltoniano

El Hamiltoniano asignado :

$$\hat{H} = \hat{T} + V(\beta, \gamma) \quad (6.1)$$

ha de tener propiedades bien definidas como las mencionadas para el \hat{H} del RVM.

- a) Debe ser un escalar, para asegurar la invariancia ante rotaciones
- b) debe ser invariante ante tranformaciones de paridad (reflecciones espaciales).
- c) Invariante ante transformaciones temporales (inversión del

tiempo)

Para la parte cinética, el GCM utiliza:

$$T = \frac{\sqrt{5}}{2B_2} [\Pi^{[2]} \times \Pi^{[2]}]^{[0]} + \frac{P_3}{3} \{ [\Pi^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[2]} \times \Pi^{[2]} \}^{[0]} + \frac{P_{40}}{6} \{ \Pi^{[2]} \times \Pi^{[2]} \}^{[0]} \{ \alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]} \}^{[0]} \} \quad (6.2)$$

donde $\{ [\Pi^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[2]} \times \Pi^{[2]} \}^{[0]}$ es la permutación de $\Pi^{[2]}$ y $\alpha^{[2]}$ en $[[\Pi^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[2]} \times \Pi^{[2]}]^{[0]}$ y similarmente para el término con P_{40} .

Los términos que pueden considerarse fundamentales en la construcción de la energía potencial son:

$$I_2 = [\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[0]} = \frac{1}{\sqrt{5}} \beta^2$$

$$I_3 = [[\alpha^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[2]} \times \alpha^{[2]}]^{[0]} = - \left(\frac{2}{35} \right)^{1/2} \beta^3 \cos 3\gamma \quad (6.3)$$

para expresar esta parte como un desarrollo de potencias en estos términos. Una posibilidad es una serie de Taylor; se tiene entonces:

$$V(\beta, \cos 3\gamma) = \sum_{\rho, \mu} v_{\rho\mu} \beta^\rho (\cos 3\gamma)^\mu \quad (6.4)$$

ρ y μ varían dentro de los límites:

$$2 \leq \rho \leq 10 \quad \text{y} \quad 0 \leq \mu \leq 4 \quad (6.5)$$

Esta serie incluye el potencial V_{GC} , que como ya se dijo se utilizará en la aplicación.

LA FUNCION DE ONDA

Para obtener los eigenestados del Hamiltoniano anteriormente

señalado, debe ser diagonalizado para una cierta base. Para tal motivo, se escogen las eigenfunciones del oscilador armónico en cinco dimensiones:

$$\hat{H}_5 = \frac{\sqrt{5}}{2B_2'} [\hat{\Pi} \times \hat{\Pi}]^{(0)} + \frac{\sqrt{5}}{2} C_2' [\hat{\alpha} \times \hat{\alpha}]^{(0)}$$

$$= \frac{\hbar^2}{2B_2'} \left(\frac{1}{\beta^4} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^4 \frac{\partial}{\partial \beta} - \frac{1}{\beta} \hat{\Lambda}^2 \right) + C_2' \beta^2 \quad (6.6)$$

Donde $\hat{\Lambda}^2$ es el operador de antigüedad definido de la siguiente manera:

$$\hat{\Lambda}^2 = -\frac{1}{\sin 3\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin 3\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} + \sum_{k=1}^3 I_k^{-1} L_k'^2(\vartheta_k) \quad (6.7)$$

Aquí $I_k = 4B_2 \sin^2(\gamma - 2\pi k/3)$ es el momento de inercia con respecto al eje k .

L_k' son las componentes del momento angular en el sistema intrínseco B_2 y C_2 son los parámetros usuales de masa y dureza, respectivamente. Para el problema de la clasificación de las funciones propias se utilizan técnicas de teoría de grupos, que consiste para este caso, en obtener una cadena de grupos cuyos operadores de Casimir sean los de los números cuánticos que nos interesan.

La cadena que satisface tal necesidad es:

$$U(5) \supset O(5) \supset O(3) \supset O(2)$$

En el siguiente esquema se muestra la clasificación:

	$U(5) \supset O(5) \supset O(3) \supset O(2)$			
GRUPO				
OPERADOR DE CASIMIR	\hat{N}	$\hat{\Lambda}^2$	\hat{L}^2	\hat{L}_z^2
NUMERO CUANTICO	ν	λ	L	M
ESTADO	$ \nu\lambda\mu LM\rangle$			

Donde los dos últimos números de los grupos $O(3)$ y $O(2)$ tienen el significado usual, momento angular y proyección respectivamente.

El número ν representa el número de fonones obtenido del operador de Casimir de $U(5)$:

$$\hat{N} = \hat{H}_\xi \cdot \frac{5}{2} \omega_2 = \sum_{m=-2}^2 \hat{\beta}_m^* \hat{\beta}_m \quad (6.8)$$

con $\hat{\beta}_m^*$ y $\hat{\beta}_m$ como los operadores de creación y aniquilación mencionados en el capítulo uno.

Por otra parte λ es el número de fonones que no están acoplados por pares a cero. Este número, es obtenido del operador de Casimir de $O(5)$.

Para la completa clasificación de los estados, es necesario introducir un número cuántico adicional; este número que es denotado por μ , cuenta los estados degenerados, es decir aquellos con todos los números cuánticos iguales. Estos casos aparecen para $L \geq 6$. Luego, por construcción, si λ esta asociada a $[\alpha^{[2]_x} \alpha^{[2]_y}]^0$, es tentativo relacionar a μ con el otro término fundamental, que se utiliza en el desarrollo del potencial $[[\alpha^{[2]_x} \alpha^{[2]_y}]^{[2]_x} \alpha^{[2]_y}]^{[0]}$

y se interpretaría como el número de tripletes de fonones acoplados a cero. Esto para dar significado al número cuántico adicional.

El estado determinado por el ket $|\nu \lambda \mu L M \rangle$ puede separarse en sus partes que dependen de β, γ y ϑ_1 :

$$|\nu \lambda \mu L M \rangle = F_n^\lambda(\beta) \sum_k \Phi_k^{\lambda\mu L}(\gamma) [D_{\mu k}^{L*}(\vartheta_1) + (-1)^L D_{\mu-k}^{L*}(\vartheta_1)] \quad (6.9)$$

La parte dependiente de β es la radial y puede escribirse así:

$$F_n^\lambda(\beta) = \left[\frac{2(n!)}{\Gamma(n+\lambda+\frac{5}{2})} \right]^{1/2} \left(\frac{C_2}{\hbar\omega_2} \right)^{(5+2\lambda)/2} \beta^\lambda L^{\lambda+3/2}(\kappa) e^{-\kappa/2} \quad (6.10)$$

donde $\kappa = \left(\frac{C_2}{\hbar\omega} \right) \beta^2$ y $L^{\lambda+3/2}(\kappa)$ son los polinomios asociados de Laguerre.

La parte en γ es más difícil de obtener. Con apoyo en el trabajo de Chacón et al. se tiene una expresión para $\Phi_k^{\lambda\mu L}(\gamma)$ como una función en los polinomios de creación de bosones. Debiendo ser este un polinomio homogéneo y bien definido con respecto a la aplicación del operador de momento angular. La función completa aparece en la referencia 6.

APLICACION NUMERICA

Para la aplicación numérica de este modelo se ha elaborado un programa para computadora por D. Troltenier, J. Mahrún, W. Greiner y P. Hess.⁹ Este programa calcula energías, valores transicionales y momentos cuadrupolares. Incluye una rutina, que ajusta los parámetros de la base, para crear un potencial que satisfaga la convergencia de energías y transiciones calculadas. En ésta, la

base son las eigenfunciones, que son parametrizadas en la base óptima, que es escogida por el método de diferencias finitas.

De esto se habla en lo siguiente.

Los parámetros que son introducidos en la función de prueba sirven para calcular energías, transiciones y momentos cuadrupolares. Al compararlas con el experimento, obtenemos un error (la función de error χ^1). El programa calcula nuevos parámetros en esa corrida y vuelve a calcular energías, transiciones y momentos cuadrupolares, que comparados con el experimento, obtenemos un segundo error χ^2 . Estas dos funciones de error son comparadas; si $\chi^1 > \chi^2$ el proceso continúa, de lo contrario el proceso es iniciado nuevamente.

Es posible que después de un ajuste, exista la necesidad de reajustar los resultados manualmente, como multiplicar todas las energías por un factor o ajustar exactamente el valor de la transición $B(E2 \ 0_1^+ \ 2_1^+)$. Para ello se utiliza el método de transformación canónica, ya que con este podemos cambiar el valor de $B(E2)$ sin alterar las energías. También podemos ajustar las transiciones sin alterar las energías. Por tanto, basta encontrar el factor que transforme a nuestras variables y por consecuencia a la función de onda para tener el cambio adecuado. Cabe señalar que este factor es proporcionado en los resultados para un posterior ajuste con el experimento.

APLICACION A LOS ISOTOPOS DE RUTHENIO

Los núcleos de la cadena de Ruthenio, ya cuenta con varios

estudios hechos hasta el momento,^{20, 21, 22} aunque en diferentes modelos. Ya sea en el marco del modelo De Gneuss-Greiner o en el modelo de bosones interactuantes (IBA). La motivación para un nuevo estudio radica en el aparente desacuerdo que existe entre los resultados para uno y otro modelo en el estudio de algunos isótopos de Ruthenio.

Mientras que el modelo de GG predice una tendencia hacia la triaxialidad, por otra parte el IBA-1¹ no puede reproducir esta triaxialidad,²¹ aunque existe una sofisticación de este modelo²¹ que aporta resultados apoyando la triaxialidad para el núcleo de Ru-104, pero es muy elaborado, sin seguir una simetría dinámica, es decir, sus números cuánticos no provienen de los operadores de Casimir de una cadena de grupos determinada.

Este trabajo entonces servirá para poder tener una imagen más real del tipo de comportamiento en la cadena mencionada.

RESULTADOS

Los resultados que se han obtenido al correr el programa mencionado son los siguientes:

En Ru-96 originalmente se encontró un ajuste donde la coincidencia de niveles energéticos era buena, a excepción del primer seis, que quedaba muy por arriba del experimental. Mas tarde se hizo un nuevo ajuste, para tratar de lograr un mayor

¹ Las características fundamentales en el modelo de bosones interactuantes, viene de considerar a los núcleos par-par como un sistema de bosones monopolares con momento angular cero y paridad positiva (bosones s) y bosones cuadrupolares con momento angular 2 y también paridad positiva. Estos bosones interactúan entre sí con interacción de uno y dos cuerpos. Una condición necesaria es que el número de bosones sea fijo, es decir $Ns + Nd = N = \text{constante}$.
(ver ref 21)

acuerdo, pero eso repercutió en un aumento del momento cuadrupolar, haciendo un balance en cuanto a los acuerdos, el ajuste escogido es precisamente este último. Es mostrado en la fig. (VI.2).

Los gráficos de la superficie de potencial en el plano a_0 - a_2 y los cortes de esta superficie a $\gamma = 0, 30, 60$ grados indican que tiene comportamiento de oscilador armónico con una ligera tendencia a simetría prolata, ver figs. VI.3 y VI.4.

Para Ru-98 se ha hecho un ajuste relativamente satisfactorio, su PES indica que tiene un comportamiento de oscilador armónico. Ver fig. (VI.5-7).

Los núcleos de Ru-100 Ru-108 tienen mucho en común. Según los gráficos de cada uno, nos atrevemos a decir que tienen un comportamiento triaxial, es decir tienen o tienden a formar un segundo mínimo en la zona triaxial. Estos cinco núcleos exhiben cierta continuidad

Se aprecia en los cortes a 30 grados (el ángulo que nos da la máxima evidencia de triaxialidad) que tienen mínimos con diferente profundidad ver figs. (VI.8 VI.22).

El corte a 0 grados indica que los estados en cuestión de estos núcleos tienden un poco a tener simetría prolata. Tal tendencia difiere en magnitud de un núcleo a otro.

Partiendo del núcleo de 100 y avanzando en dirección creciente notamos que la profundidad del segundo mínimo aumenta, y así también su tendencia a prolato.

Estos mínimos triaxiales se localizan para $0.3 < \beta < 0.5$ siendo el límite inferior para el de Ru-100.

Tenemos entonces tres tipos de comportamiento dentro de la cadena de Ruthenio:

- a) Oscilador con características de prolato. (Ru-96)
- b) Oscilador armónico (Ru-98)
- c) Oscilador con segundo mínimo triaxial (Ru 100-108)

Por otra parte es necesario discutir acerca de la confiabilidad de nuestros resultados. En este contexto, debido al método utilizado para obtener el mejor conjunto de parámetros que aproximen los resultados experimentales, es posible que exista otro conjunto de parámetros que también describan al experimento² satisfactoriamente, pero que originen una superficie de potencial muy diferente. La pregunta es entonces: Cómo sabemos que tenemos los resultados que mejor describen la realidad de los núcleos que estamos abordando. Esto lo vemos a continuación.

En la cadena que nos ocupa, estamos advirtiendo que hay características triaxiales para los núcleos de 100 a 108 ; que en 96 existe oscilador un oscilador con características prolatas, siendo el 98 un oscilador más puro y por tanto divisor de entre los dos comportamientos anteriores.

Para dar confiabilidad a estas aseveraciones es necesario establecer ciertos criterios, en particular, aplicados en el intervalo 100 108.

1) Utilizar las reglas o criterios establecidos para identificar un núcleo triaxial (ver Eisenberg-Greiner⁷). La aplicación de estos quedan detallados en la tabla (VI.1). Pero esta reglas pueden resultar un tanto ambiguas en nuestro caso, ya que si bien

²

Los datos experimentales fueron obtenidos de las referencias

23,24,25,26,27,28

Núcleo	$E_1(2^+) + E_2(2^+)$		$E(3^+)$	
	Teoría	Experimento	Teoría	Experimento
RU - 96	2.429	2.762	-	-
RU - 98	2.127	2.066	2.148	2.013
RU - 100	2.046	1.904	1.877	1.882
RU - 102	1.776	1.579	1.612	1.552
RU - 104	1.417	1.251	1.310	1.242
RU - 106	1.167	1.062	1.119	1.092
RU - 108	1.086	0.950	1.034	0.970

Tabla VI.2. En esta tabla se presenta los valores obtenidos para cada núcleo, utilizando el criterio de triaxialidad (comparado con el experimento) $E(2_1^+) + E(2_2^+) = E(3_1^+)$.

TABLA VI.1

dan un carácter triaxial a nuestros núcleos (como esperábamos) también lo especifican para Ru-98, donde tenemos mayor seguridad de que sea un oscilador armónico.

2) Se propone también medir el momento monopolar y cuadrupolar del (Q_{00} y Q_{20}) núcleo, para tratar de inferir ciertas características de forma que podamos relacionar con un comportamiento triaxial. Un análisis simple puede mostrar (ver apéndice 2) que para un núcleo triaxial el valor de Q_{00} que es independiente del ángulo γ , es relativamente grande con respecto a Q_{20} que si depende de γ .

3) Otro criterio para apoyar nuestros resultados, consiste en obtener la distribución de probabilidad de la función de onda para un estado de momento angular dado, en el espacio de las coordenadas β - γ . Entonces si graficamos $|\Psi|^2$ en función de β y γ , es posible localizar un estado determinado en el plano a_0 - a_2 , ver fig. (VI.2).

Si la mayor parte de la distribución se halla dentro de un intervalo de ángulos que son considerados triaxiales, entonces tendremos con mayor seguridad un estado triaxial.

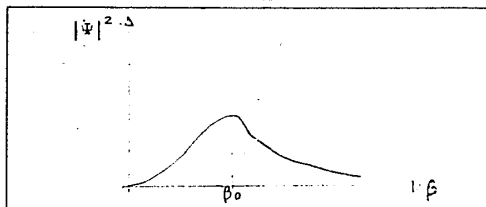


Fig. VI.2

En las gráficas de las figuras VI.3-23 se muestran las localizaciones de los tres primeros estados en 0^+ y 2^+ para los núcleos que tenemos en estudio. Cabe mencionar que no se graficó únicamente $|\Psi|^2$ sino ésta multiplicada por $\beta^4 \sin 3\gamma$ para facilitar su localización en el plano que nos interesa.

Únicamente tomaremos en cuenta los dos primeros estados de 0^+ y 2^+

En la fig.(VI.24) correspondiente al núcleo de 96 podemos observar que el primer cero guarda un carácter de oscilador armónico, en cambio el primer 2^+ es una mezcla de oscilador armónico con tendencia a prolato. En los gráficos correspondientes a los segundos 0^+ y 2^+ vemos que pueden existir como parte de un espectro de oscilador armónico simple con tendencia o con características ligeras de prolato; la probabilidad para esta segunda posibilidad es mayor. Dejando la existencia de la otra como efecto de una resonancia.

La fig. (VI.26) que corresponde a Ru-98 contiene gráficas, que bien pueden pertenecer a un oscilador armónico un poco deformado, por encontrarse los primeros estados en $\beta = .0, .2$. Los segundos estados quedan un poco deformados. Notamos, también, que este segundo 2^+ tiene buena probabilidad de estar como un oscilador armónico.

El núcleo de Ru-100 (Fig.VI.26) nos informa una tendencia triaxial, ya que para los estados $0_2^+, 2_2^+, 0_3^+$ y 2_3^+ la máxima probabilidad, se halla entre 20 y 25 grados y a una distancia suficiente del origen para considerar una deformación propia de un núcleo con comportamiento triaxial. Es decir, la función de onda se halla confinada en los límites señalados (a excepción de la parte correspondiente a la resonancia) $\beta = 0.4$, $\gamma = 25$ por tanto

pensamos que el mínimo triaxial debe estar dentro de esos límites.

Para Ru-102 tenemos un comportamiento similar al núcleo anterior, puede considerarse con comportamiento triaxial (Fig. VI.27).

La fig. (VI.28) acusa un comportamiento triaxial de manera mas segura. Los estados 0_2^+ , 2_2^+ , 0_3^+ y 2_3^+ ya tienen una deformación sobre $\beta=0.4$, mientras el ángulo γ continúa entre 20 y 25 grados (Ru-104).

La fig. VI.29, para Ru-106 muestra un comportamiento similar al del núcleo de 104. Es triaxial. En este caso, el primer 0^+ ya se distingue bien por este tipo de comportamiento.

Finalmente para Ru-108 (fig⁺ VI.30) se aprecian las mismas características, resultando que la deformación para 0_2^+ es mayor que 0.4.

El hecho de que los estados 0_2^+ y 2_2^+ se hallen repartidos entre dos máximos separados, en las gráficas de distribución de probabilidad de la función de onda, se debe a que estos estados quedan por arriba de la barrera que se forma entre primero y segundo mínimo. Por tanto, estos estados pueden existir en un momento determinado en el ámbito de oscilador armónico o de comportamiento triaxial. Entonces estos estados pueden ser considerados como resonancias entre estos dos estados. Resulta interesante aclarar además, que la mayor contribución de la distribución de probabilidad queda en la zona triaxial. Por tanto podemos considerar que los núcleos (Ru-100, Ru-108) también pueden vivir en estados triaxiales.

Los resultados anteriores confirman el comportamiento que ya sospechábamos. Los núcleos de Ru100 a Ru108 son esféricos y triaxiales.

Cabe mencionar aquí nuevamente, que un núcleo en un estado triaxial tiene un momento cuadrupolar menor que si estuviera en un estado deformado (prolato por ejemplo) axial. Por tanto, para núcleos triaxiales, una deformación grande no implica necesariamente un momento cuadrupolar grande. En el apéndice 2 ,se hace un pequeño cálculo para un conjunto de cargas discretas, puestas estratégicamente, para mostrar lo anteriormente dicho.

Entonces lo anteriormente dicho, nos ofrece un criterio para determinar experimentalmente la triaxialidad de los núcleos: Si se encuentra que comparativamente el tamaño de Q_{00} es grande y el de Q_{20} es pequeño, para un estado determinado, entonces puede inferirse que se trata de un estado triaxial.

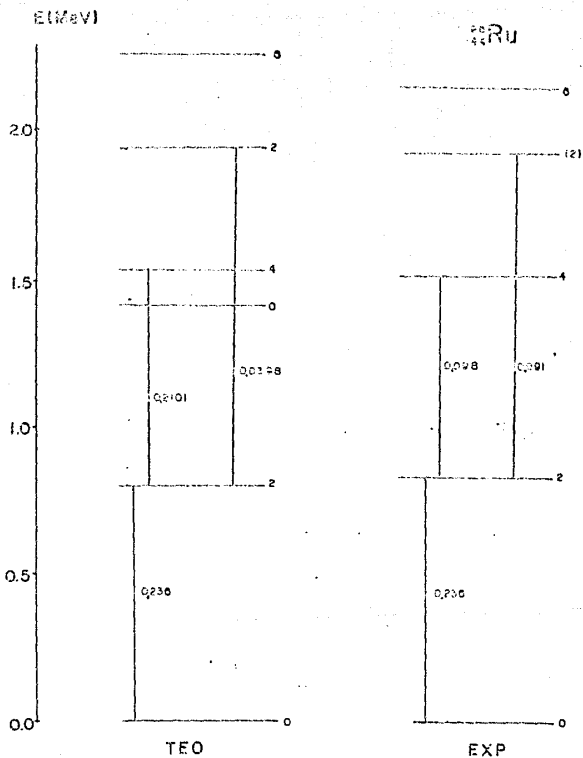


FIG. VI.3

En esta figura y las demás similares se presenta el espectro de energía para una cadena de Ruthenio. La energía está dada en Mev. El número a la derecha de cada nivel es el valor del momento angular asociado a ese nivel. Las líneas verticales que conectan dos niveles indican la posibilidad de transición entre los dos estados. Las direcciones de estas transiciones son de abajo hacia arriba. A la derecha de cada línea se da el valor de $B(E2)$.

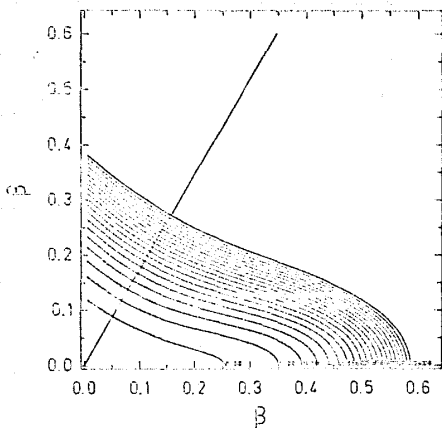


FIG. VI.4

En estas figuras y tablas, se muestra la Superficie de Energía Potencial (GPE) y un corte de la misma a $\gamma=0,30$ y 0 grados.

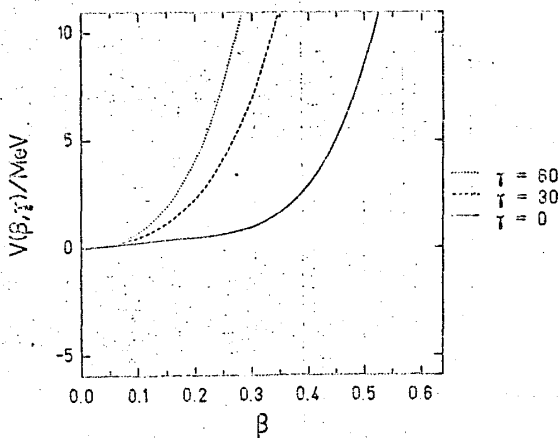


FIG. VI.5

⁸⁵₄₄Ru

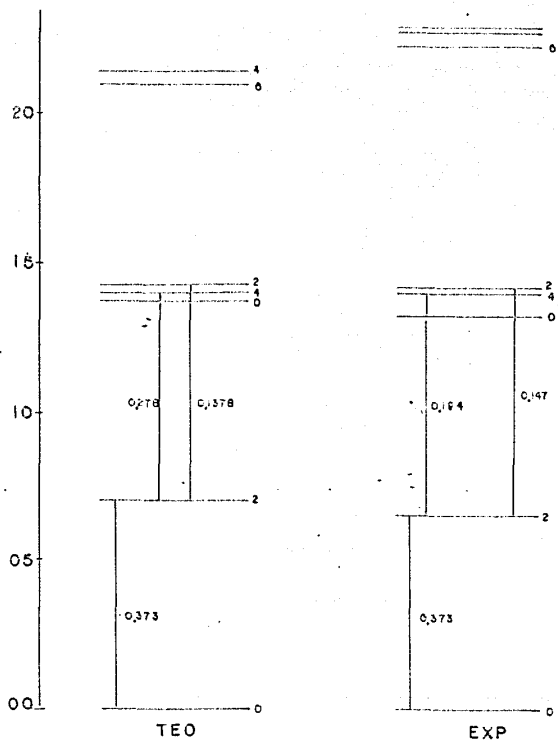


FIG. VI.6

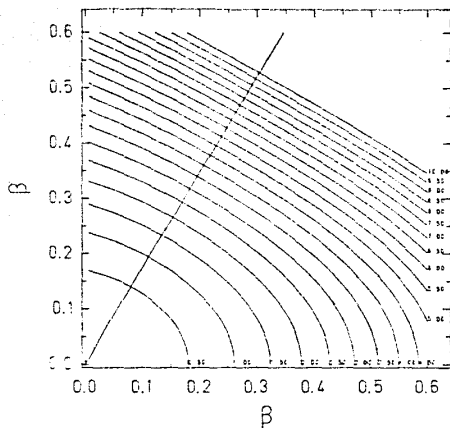


FIG. VI.7

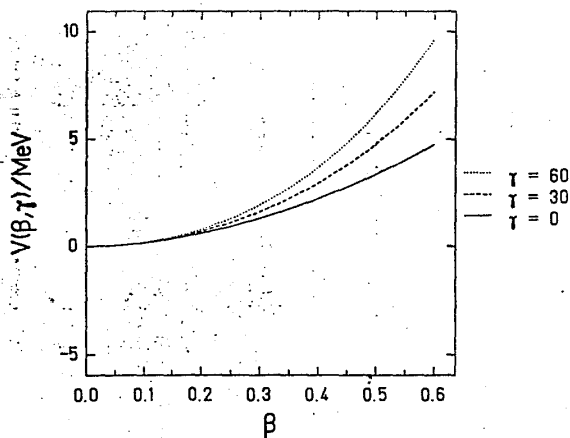


FIG. VI.8

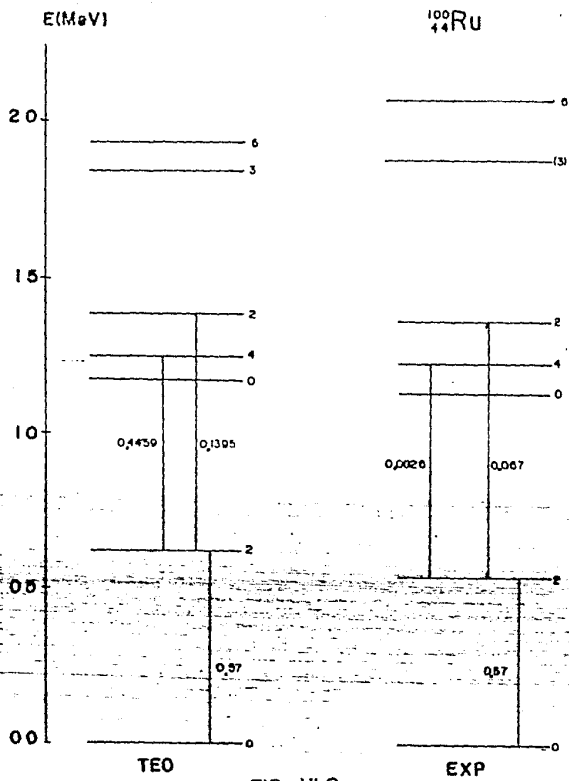


FIG. VI.9

RUI00

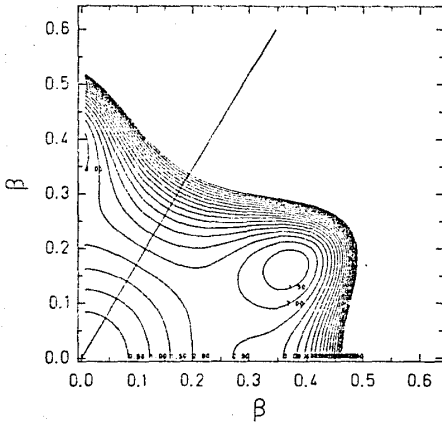


FIG. VI.10

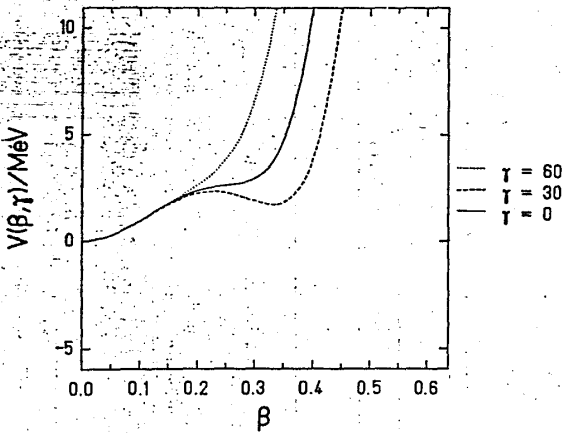


FIG. VI.11

E (MeV)

$^{102}_{44}\text{Ru}$

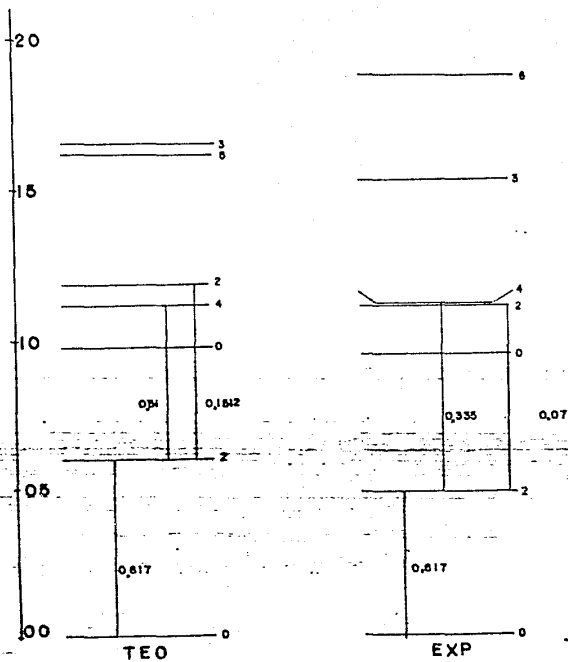


FIG. VI.12

RU 102

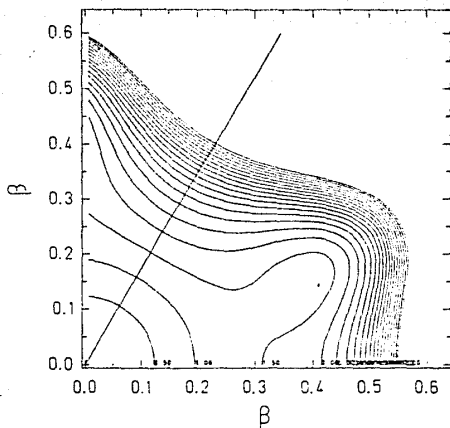


FIG. VI.13

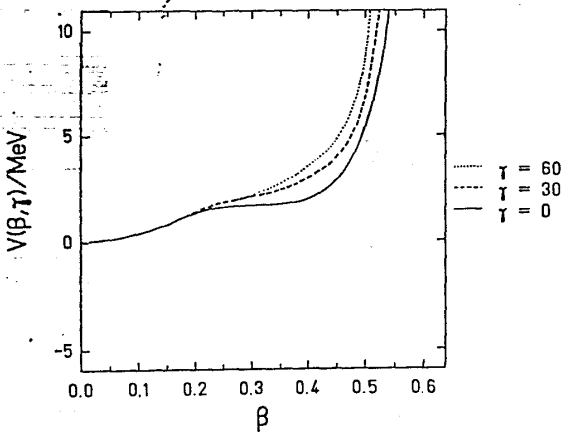


FIG. VI.14

E (MeV)

^{104}Ru

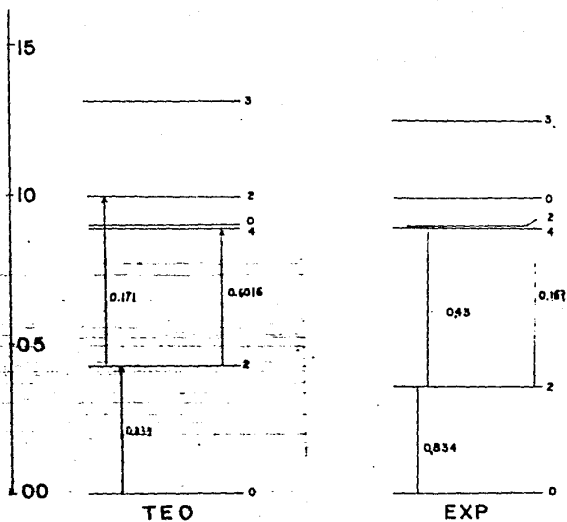


FIG. VI.15

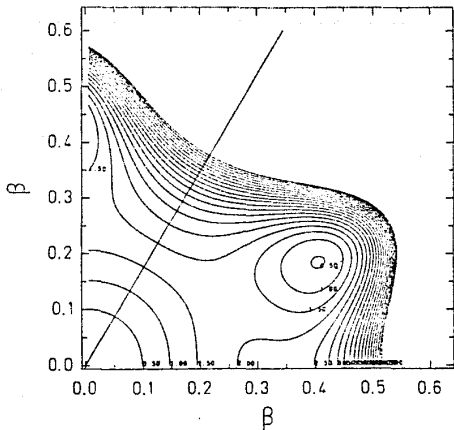


FIG. VI.16

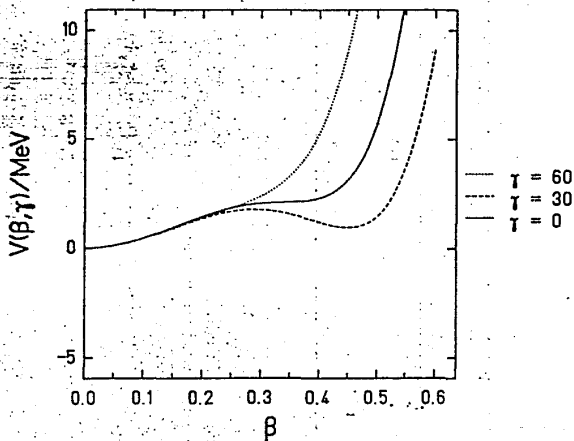


FIG. VI.17

E (MeV)

$^{100}_{44}\text{Ru}$

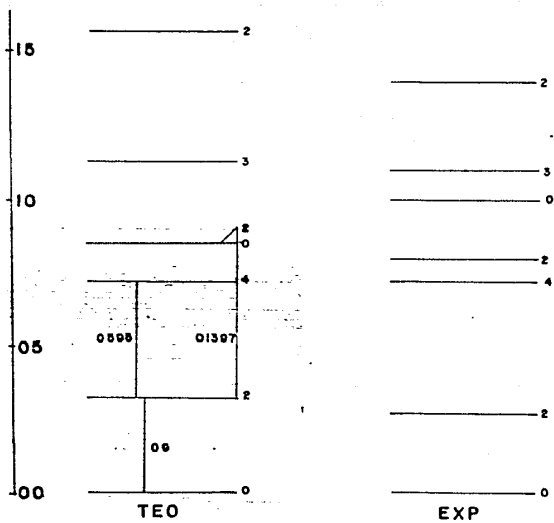


FIG. VI.18

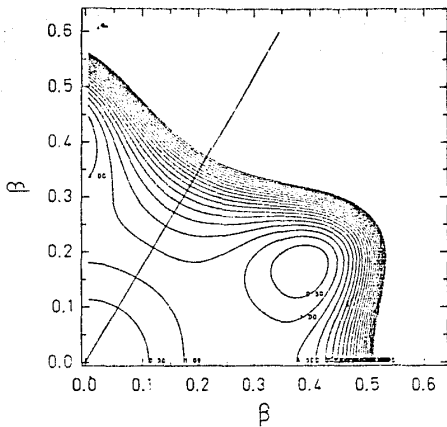


FIG. VI.19

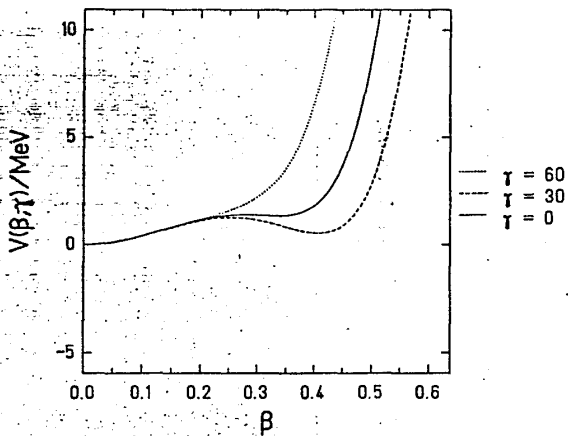


FIG. VI.20

E(MeV)

$^{106}_{44}\text{Ru}$

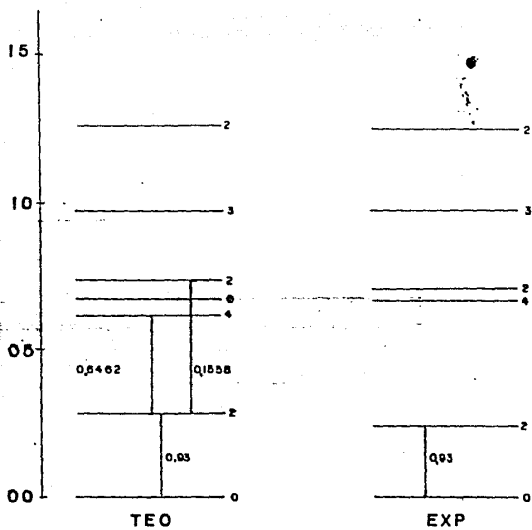


FIG. VI.21

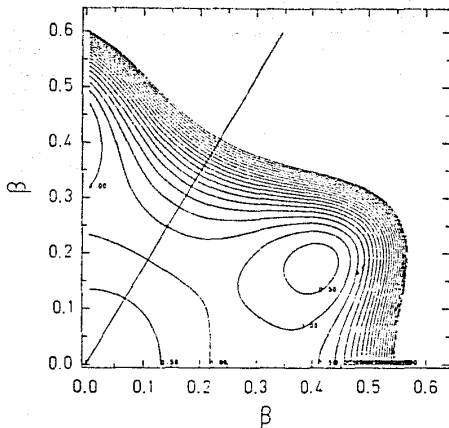


FIG. VI.22

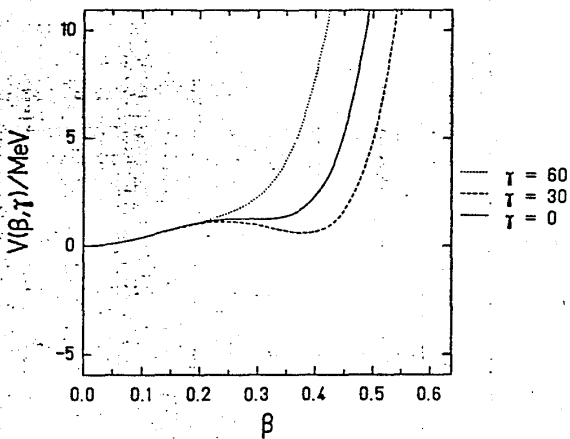


FIG. VI.23.

TRANSICIONES Y MOMENTOS CUADROPOLARES

	$0_1 2_1$	0 2	0 2	2 2	2 3	2 4	2 4	$Q(2_1^*)$	
RU- 96	0.236	0.0059	0.3046	0.0398	0.0043	0.2101	0.0007	-0.4562	T
	0.236 ± 0.007			0.091 ± 0.013		0.098 ± 0.013		-0.13 ± 0.09	E
RU- 98	0.373	.00007	0.0614	0.1378	.00004	0.2775	.00005	-0.2172	T
	0.373 ± 0.017			0.147 ± 0.025		0.194 ± 0.022		-0.20 ± 0.09	E
RU-100	0.570	0.0053	0.0192	0.1395	0.0030	0.4459	0.0088	-0.552	T
	0.572 ± 0.040			0.067 ± 0.009		.00262 ± 0.0003			E
RU-102	0.617	0.0082	0.0798	0.1512	0.0043	0.5106	0.0003	-0.617	T
	0.617 ± 0.005			0.0154 ± 0.0015		0.335 ± 0.046		-0.68 ± 0.05	E
RU-104	0.834	0.0064	0.0142	0.1712	0.0039	0.6016	0.0027	-0.6763	T
	0.834 ± 0.044			0.167 ± 0.020		0.430 ± 0.046		-0.70 ± 0.08	E
RU-106	.9003	0.0113	0.0097	0.1397	0.0072	0.5949	0.0018	-0.7337	T
									E
RU-108	.9299	0.0124	0.0186	0.1558	0.0078	0.6462	0.0012	-0.7577	T
	0.093 ± 0.08								E

TABLA VI.2

TABLE DE PARAMETROS UTILIZADOS EN EL AJUSTE DE RUTHEMIO

NÚCLEO	C ₂	C ₃	C ₄	C ₅	C ₆	D ₆	B ₂	P ₃
RU- 96	65.2203	623.293	1270.688	0.0	0.0	0.0	46.411	0.0
RU- 98	38.1938	47.3111	39.5406	0.0	0.0	0.0	34.383	0.0
RU-100	169.752	-63.277	-3928.04	4291.94	26407.7	26407.7	25.050	-.0011
RU-102	82.371	6.873	-1407.17	1450.92	8041.55	8041.55	28.379	0.0084
RU-104	122.561	-75.748	-2568.16	2881.98	14829.7	14829.7	26.289	.00098
RU-106	100.59	-52.308	-2405.12	2882.91	15471.9	15471.9	32.076	.00083
RU-108	73.8389	-36.025	-1573.81	1791.91	9258.22	9258.22	36.007	.00071

TABLA VI.3

RU 96

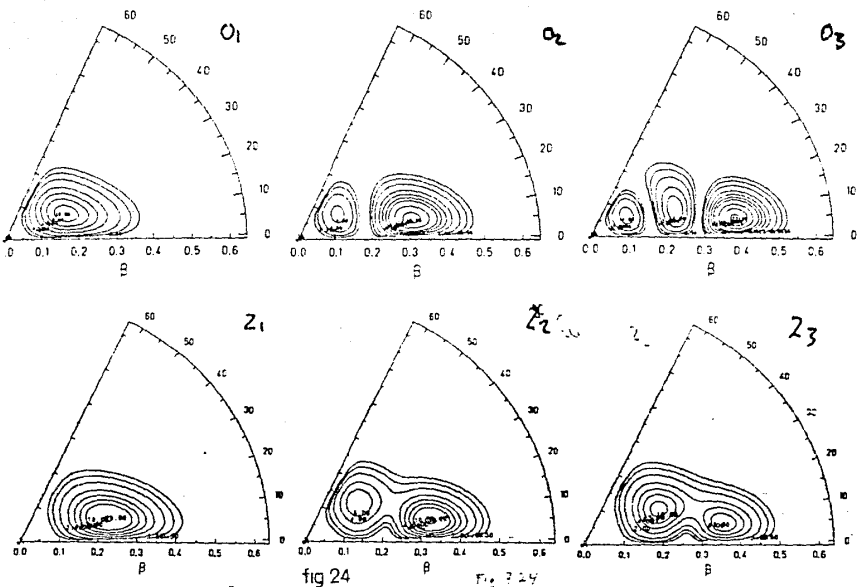


fig 24

Fig. 24

FIG. VI.24

En esta figura y similares se indica la distribución de probabilidad de la función de onda para los estados O_1, O_2, O_3 y Z_1, Z_2, Z_3 del isótopo correspondiente.

RU 98

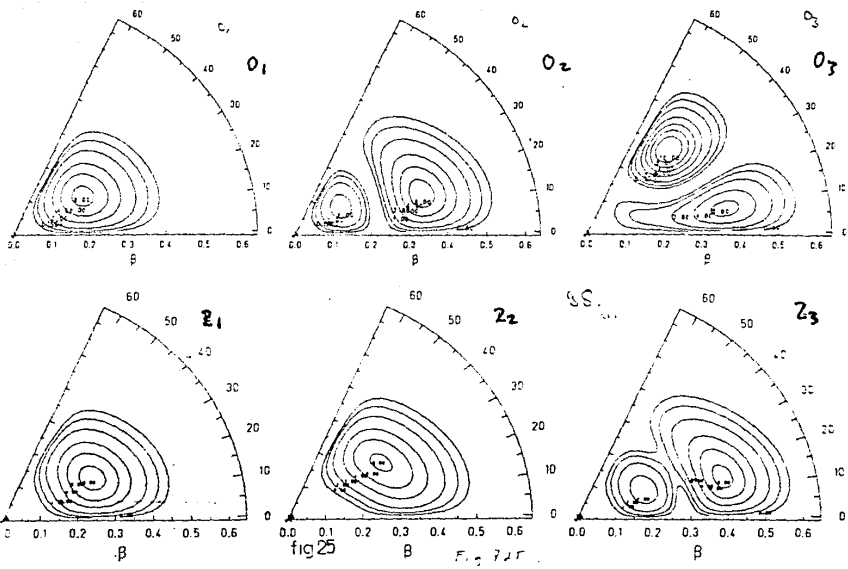


FIG. VI.25

RU 100

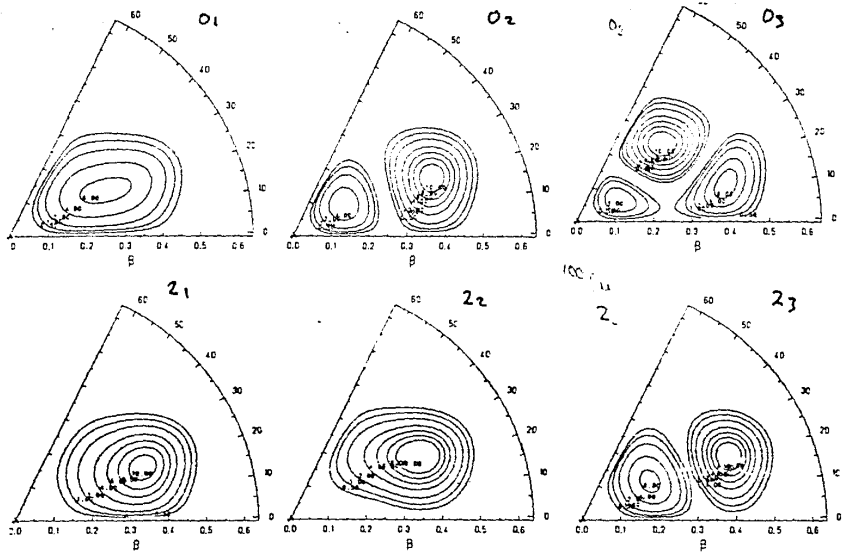


FIG. VI.26

126

RUI02

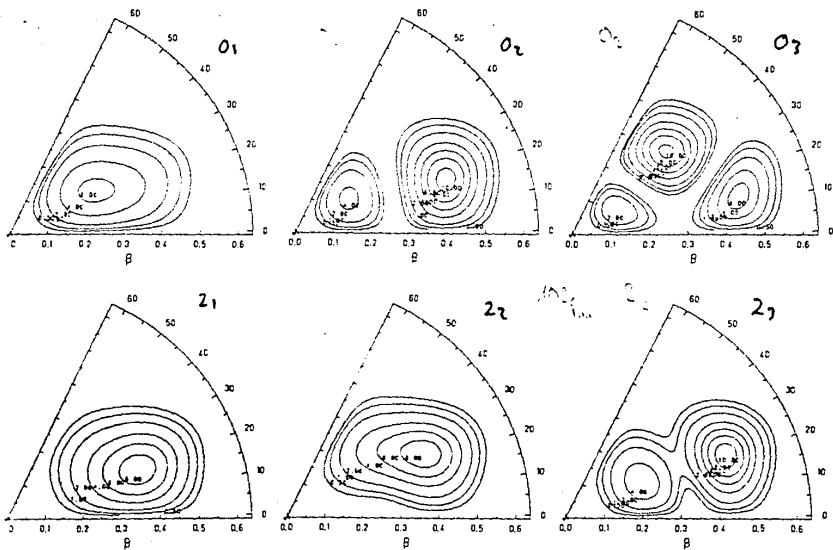


fig 27

FIG. VI.27

RUI04

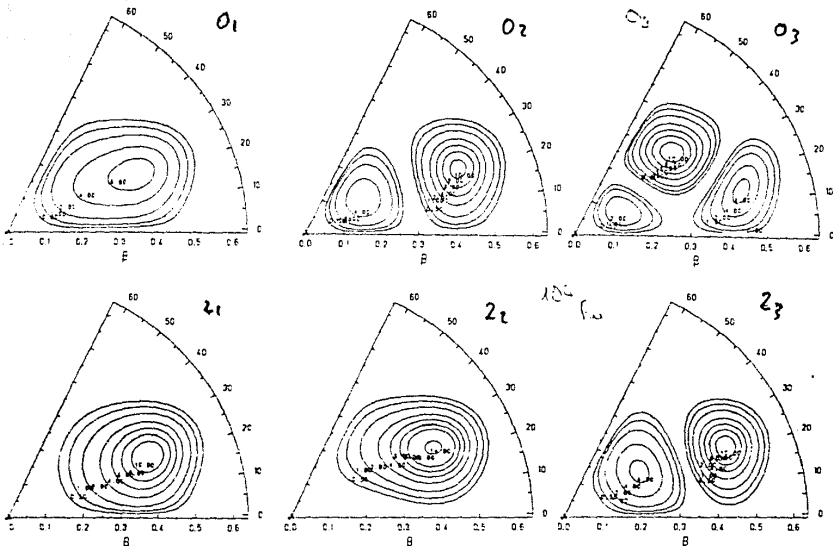


fig 28 = 7.2

FIG. VI.28

RU 106

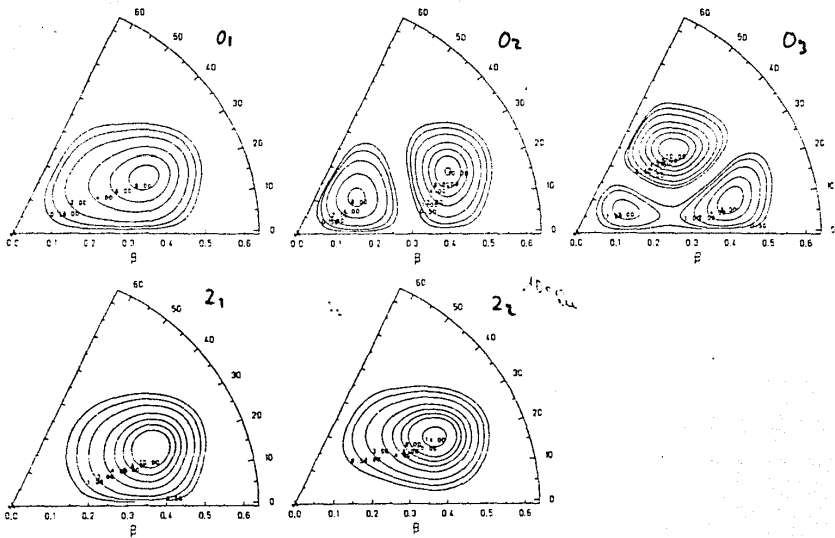


FIG. VI.29

1-1

RUI08

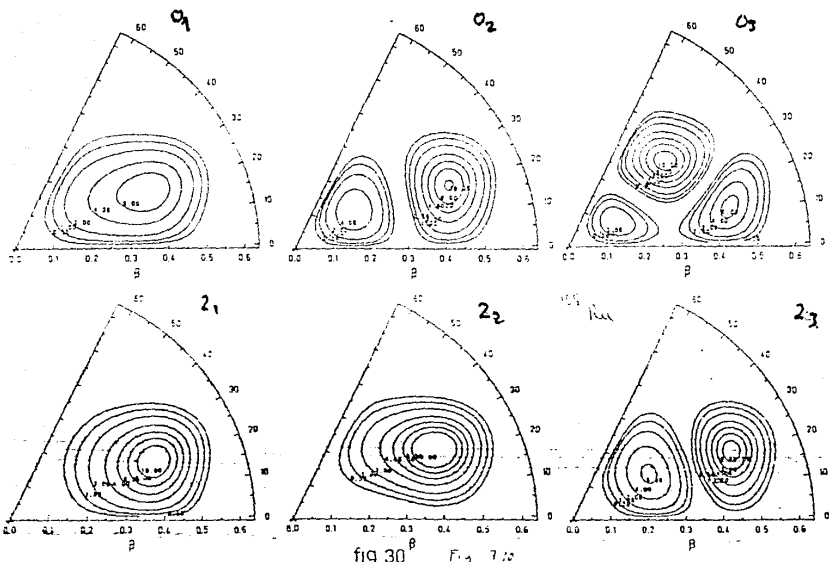


FIG. VI.30

CONCLUSIONES

Recordemos que los modelos colectivos tuvieron su origen en la necesidad de explicar ciertas evidencias experimentales, que no abordaban satisfactoriamente otros modelos, como el primer modelo de capas. Núcleos con números dentro de los números mágicos, poseen características que solamente pueden ser explicadas si se toma en cuenta el movimiento conjunto de los nucleones; o solamente si se considera al núcleo como un continuo, que tiene cuerpo. Entonces con eso se tiene salvado varios de los obstáculos que no pudieron afrontar modelos como el de capas¹. Si los nucleones se mueven conjuntamente, es posible explicar comportamientos de vibración, rotación, a bajas energías; por otro lado, resonancias gigantes y fisión para altas energías. Al tener cuerpo el núcleo resulta más fácil explicar los grandes momentos cuadrupolares

En consecuencia, surgieron varios modelos, de los cuales es considerado fundamental el de Bohr-Mottelson por su tratamiento con las variables dinámicas; más tarde Davidov aborda los núcleos con características triaxiales, con éxito. Tiempo después Faessler y Greiner hacen estudios sistemáticos con su modelo de vibración-rotación a bajas energías con buen éxito.

Posteriormente surgen los modelos que intentan generalizar el comportamiento colectivo, al considerar Hamiltonianos cada vez más generales. El primero de éstos fue el de Kumar y Baranger, luego

¹ Desarrollos recientes en el ámbito de modelo de capas, apoyados en el grupo simplectico $Sp(3, R)$ pueden abordar comportamientos que no pueden explicar modelos de capas anteriores, en este contexto.

el de Gneuss-Greiner que introduce la superficie de potencial, resultando ésta muy reveladora en cuanto al estudio de las características del núcleo. Posteriormente, surge el modelo mas general, que es el que da marco a este trabajo de tesis; El Modelo Colectivo Generalizado.

Por otra parte, los objetivos de este trabajo, fueron básicamente estudiar la cadena mencionada, tomando en cuenta tanto el comportamiento individual, como el de conjunto en la cadena. Poner en evidencia el carácter colectivo de sus principales estados y por consecuencia, poner a prueba la capacidad de predicción del modelo que se ocupa. Posteriormente, como un objetivo de conjunto y a largo plazo, reunir toda la información posible que desde el punto de vista colectivo describa a la zoología nuclear.

Cuando en este primer objetivo se habla de transiciones de fase, nos referimos al hecho de que un núcleo puede existir en diferentes estados, de distinta naturaleza, es decir puede ser un núcleo esférico o uno deformado, en un momento determinado ya sea axial o triaxialmente. La transición también puede ser internuclear en una cadena, es decir, el comportamiento para determinados estados puede variar de núcleo a núcleo.

Para cumplir tales objetivos, primero se hizo una aplicación del modelo colectivo vibrot, a manera de ejercicio, ya para la comprensión de la técnica y filosofía, ya para valorar la evolución de los modelos colectivos en la posterior aplicación.

Para tal aplicación se elaboró un programa para computadora basado en el modelo de Faessler-Greiner. Se utilizó para núcleos

de la región actínida de la tabla periódica, a saber Thorio, Uranio y Plutonio, en varios de sus isótopos. Se escogieron estos núcleos por ser ejemplo de aplicación de este modelo y así facilitar el aprendizaje de los fundamentos de los modelos colectivos.

En tal estudio se comprobó que estos núcleos tienen bandas rotacionales de fácil acuerdo con el experimento en la banda base. Esto se notó sobre todo para el núcleo de Uranio 238, cuya banda base acuerda con el experimento en grado preciso. En este mismo núcleo, transiciones y momentos cuadrupolares ajustan muy bien.

De esta manera comprobamos la efectividad de predicción del modelo vibrot; pero además, estamos concientes que tal modelo no es suficiente, ya que sus resultados en otra región de la tabla periódica, resultan inapropiados.

La siguiente tarea consistió en la aplicación del GCM a la cadena de núcleos de Ruthenio con números 96-108. En esta se utilizó otro programa para computadora, basado en el trabajo de Hess et al.⁶

Los resultados pueden resumirse de la siguiente manera:

Existen transiciones de fase a nivel nuclear, dando origen a un comportamiento transicional a nivel cadena. La primera, porque varios de estos núcleos tienen un segundo mínimo de carácter triaxial, entonces el núcleo en estado base (como oscilador armónico) puede saltar a otro estado con deformación, dando lugar a características de un oscilador anarmónico, esta característica se encontró en los núcleos de Ru100-108.

A nivel cadena se encontró que existe transición uniforme en el comportamiento de los núcleos, ya que el núcleo de 96 es un oscilador anarmónico con características de prolato; en cambio

Ru98 es un buen oscilador armónico. . Luego, el de Ru-100 muestra niveles anarmónicos, es un núcleo con comportamiento triaxial. Tal triaxialidad va en aumento hasta el núcleo de 108.

Encontramos entonces que en la cadena de Ruthenio, pueden coexistir diferentes comportamientos; y si lo vemos de otra manera, aumentar o quitar dos nucleones, puede repercutir enormemente en núcleos en las cercanías de 100 nucleones. De esta manera, podríamos predecir el comportamiento de núcleos vecinos, es decir, tendríamos justificación para aseverar que el núcleo de Ru-94 podría ser un oscilador con una mayor tendencia a prolato que el núcleo de 96. Esto únicamente si confiamos en la uniformidad del comportamiento que hemos observado en la cadena. Por lo mismo, pensamos que el núcleo de 110 tiene características triaxiales mas acentuadas que el núcleo de 108.

Respecto al ajuste que se hizo para Ru-102, que aunque mantiene el comportamiento que sus vecinos tienen, sale un poco de la uniformidad. Puede deberse a dos razones:

a) El conjunto de parámetros que se escogieron para representar este núcleo no son los adecuados, así que es posible hallar otros que se ajusten bien y que queden dentro de la uniformidad de la cadena.

b) Este núcleo tiene características especiales que hacen un poco diferente su comportamiento. Esto puede ser tomado como una posibilidad, ya que en un trabajo anterior a este²⁰, donde también se aplica a Ru-102, se hallan problemas de ajuste similares. Sin embargo, confirmar alguna de estas posibilidades tendrá que ser parte de un trabajo posterior.

Por otra parte, se halló también, que un núcleo con algún estado triaxial guarda ciertas características .

Aunque el estado triaxial se halla en una zona de deformación relativamente grande (0.4,0.5) , su momento cuadrupolar en cambio no es grande comparado con el de un estado prolato. Es decir una deformación grande no implica necesariamente un momento cuadrupolar grande. Por tanto un estado triaxial tiene un momento cuadrupolar relativamente pequeño (ver apéndice 1). Esto nos proporciona un criterio experimental para establecer cuando un estado corresponde a un núcleo triaxial.

En suma el GCM puede predecir muy bien las características colectivas en esta cadena, tanto las características simples de rotor y vibrador, como la coexistencia de estados (segundo mínimo). Esto lo aventaja sobre otros modelos que trabajan en esta área.

APENDICE 1

CAMBIO EN LA FUNCION DE ONDA

La justificación para el cambio de la función de onda, en el momento de obtener la distribución de probabilidad, se hace para facilitar la visualización de esta distribución en el plano a_0 - a_2 .

Por razones dadas en el capítulo cinco, acerca del cambio de volumen, realmente debiéramos trabajar con un Hamiltoniano efectivo H' , la función de onda en este caso queda normalizada con respecto a un elemento de volumen mas simple, esto implica un cambio en la misma función de onda, para efectos de este trabajo, esta técnica solo la utilizaremos, como ya dijimos, para desplazar un poco la mayor parte de la distribución de la función de onda fuera del origen de coordenadas. Esto facilita nuestro estudio de la localización de la función de onda. Por ejemplo el Hamiltoniano teórico del oscilador armónico, tiene una gráfica de la forma indicada en la fig.A1.1 Sin embargo, para facilitar los cálculos, introducimos el elemento de volumen en la misma función, para tener otra función de onda.

$$g^{1/2} = \beta^4 \text{sen}3\gamma$$

A1.1

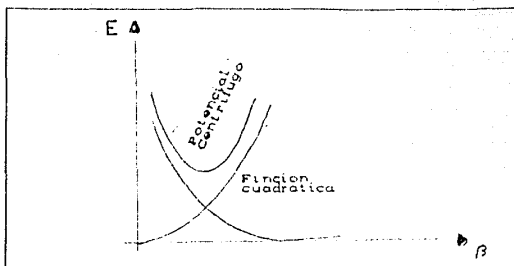


Fig. A1.1

Entonces la nueva función de onda es

$$\phi = g^{1/4} \psi \quad \text{A1.2}$$

asi, esto cambia el Hamiltoniano de la siguiente manera:

$$H' = g^{1/4} H \frac{1}{g^{1/4}} \quad \text{A1.3}$$

Este cambio da origen a un potencial diferente, (un potencial centrifugo, (ver Eisenberg-Greiner).

En la práctica, esto no lo hacemos, pero si resulta necesario para graficar las funciones de distribución de probabilidad, ya que si no se introduce esta corrección ($g^{1/2} = \beta^4 \text{sen} 3\gamma$) la gráfica queda como en la fig. A1.2; donde la línea punteada es la distribución sin la corrección y la línea llena es con corrección.

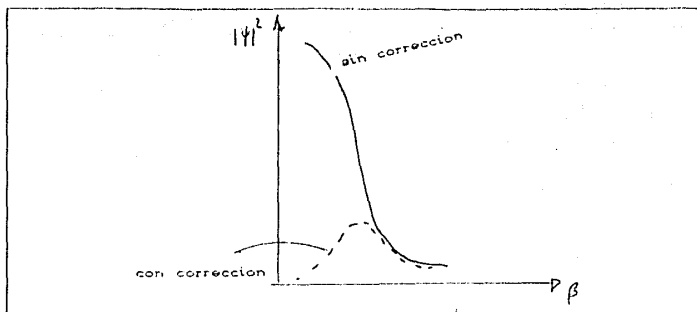


Fig a1.2

Entonces lo que tenemos es que nuestro nuevo elemento de volumen recorta el tamaño de la función de onda cerca del origen, al grado que de hecho inicia de cero, permitiendo localizar el máximo en las cercanías. El mencionado cambio de volumen mantiene a la nueva función de onda igual a la anterior para zonas alejadas del origen, por tanto nuestro cambio de volumen solo actúa en las cercanías del origen.

APENDICE 2

MOMENTO CUADRUPOLAR EN ESTADOS CON SIMETRIA AXIAL Y TRIAXIAL

En este apéndice se calcula el momento cuadrupolar para un conjunto de cargas estratégicamente colocadas, de tal manera que podamos simular con pocas cargas toda una distribución de cargas como las de los núcleos. Evidentemente esto representa una idealización.

Las cargas se colocan en un sistema cartesiano de tres dimensiones y variaremos su distancia al origen de acuerdo a nuestras necesidades, (ver fig.A2.1).

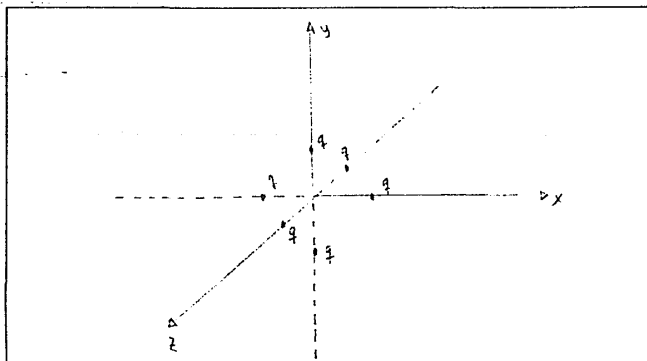


Fig. 2.1

El momento cuadrupolar para un sistema discreto de cargas, puede ser aproximado de la siguiente manera:

$$Q \approx \sum_1 (3z_1^2 - (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)) \quad A2.1$$

$$= \sum_1 (2z_1^2 - y_1^2 - x_1^2)$$

$$= 2 (2z^2 - y^2 - x^2) \quad A2.2$$

Ahora, dando forma al conjunto de cargas de acuerdo a las posibilidades de simetria que existen a nivel nuclear:

a) PROLATO ($x, y \ll z$), de acuerdo a la ec.A2.2

$$Q^{\text{prol}} \approx 4z^2 \quad A2.3$$

b) OBLATO ($z \ll x, y$; $x \approx y$)

$$Q^{\text{obla}} \approx -4x^2 \quad A2.4$$

c) ESFERICO ($x=y=z$)

$$Q = 0$$

d) TRIAXIAL (En este caso, pondremos un ejemplo, $x=2y=4z$)

$$Q^{\text{triax.}} = 2 \left(2z^2 - \frac{z^2}{4} - \frac{z^2}{16} \right) = 2 z^2 \left(2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{16} \right) \quad A2.5$$

$$= 4z^2 \left(\frac{27}{32} \right)$$

$$Q^{\text{triax.}} = \frac{27}{32} Q^{\text{prol.}} \quad \text{A2.6}$$

Enseguida se toma un caso particular. Se calcula el momento cuadrupolar para el núcleo de Ru-108, para una deformación dada, ($\beta \approx 0.3$) a diferentes cortes ($\gamma = 0^\circ$ y 30°).

a) $\gamma = 0^\circ$

Utilizando la expresión para Q en términos de las matrices D:

$$Q_{2\mu} = A \beta \left[D_{\mu 0}^{2*} \cos \gamma + \{ D_{\mu 2}^{2*} + D_{\mu -2}^{2*} \} \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \gamma \right] \quad \text{A2.7}$$

si $\gamma = 0^\circ$:

$$Q_{20} = A \beta D_{00}^{2*} \quad \text{A2.8}$$

Ya que

$$Q = \sqrt{\frac{16\pi}{5}} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \langle 2 || Q_2 || 2 \rangle \quad \text{A2.9}$$

y además

$$\langle 2 || Q_{20} || 2 \rangle = \langle 22 || Q_{20} || 22 \rangle \frac{1}{\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}} \quad \text{A2.10}$$

$$Q_{20} = \sqrt{\frac{16\pi}{5}} \langle 22 || Q_2 || 22 \rangle \cdot A C \beta \int_{\Omega} \left[(D_{22}^2 + D_{2-2}^2) D_{00}^2 (D_{-2-2}^2 + D_{-22}^2) \right] d\Omega$$

$$A = \frac{3ZR_0}{4\pi}, \quad C = \frac{5}{16\pi^2} \quad \text{A2.11}$$

$$\langle 22 | Q_{20} | 22 \rangle = 8\pi AC\beta \left[2 \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \right] \quad A2.12$$

$$= 0.98 \beta$$

entonces:

$$Q_2 = 3.1 \beta \quad A2.13$$

si $\beta=0.3$

$$Q_2 = 0.93 \quad A2.14$$

Ahora si $\gamma = 30^\circ$

Procediendo de la misma manera que para $\gamma=0^\circ$

$$\begin{aligned} \langle 22 | Q_{20} | 22 \rangle &= \\ &= \frac{AC\beta}{2} \int_{\Omega} \left[(D_{22}^2 + D_{2-2}^2) (\sqrt{3} D_{00}^{2*} + \frac{1}{\sqrt{2}} (D_{02}^{2*} + D_{0-2}^{2*})) (D_{-2-2}^2 + D_{-22}^2) \right] d\Omega \\ &= 8\pi^2 \frac{AC\beta}{2} \left[\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right] \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}^2 \quad A2.15 \end{aligned}$$

tomando las unidades adecuadas:

$$= 0.597 \beta$$

por tanto:

$$Q_2 = \sqrt{\frac{16\pi}{5}} (0.597) \beta = 1.89 \beta \quad A2.16$$

si $\beta \approx 0.3$ como se hizo anteriormente

$$Q_2 = 0.57 \quad A2.17$$

Podemos observar entonces, que el momento cuadrupolar triaxial es menor que el prolato, como se habia predicho en el cálculo con el conjunto discreto de cargas.

REFERENCIAS

- 1.- E. Feenberg, Phys.Rev. 55 (1939) 504
- 2.- N.Bohr, J.A.Wheeler, Phys.Rev.,56 (1939) 426
- 3.- A. Bohr,B.Mottelson, Kgl. Danske Videnskab Selskab Mat.Fys. Medd.27(16) 1953
- 4.- A.S. Davidov, B. Filipov, Nucl. Phys. 8 (1958)237
- 5.- Faessler A.,Greiner W. y Sheline R., Nucl. Phys. 70 (1965) 33
- 6.- Hess P.O., Seiwert M., Maruhn J.y Greiner W., Z. Physik A 296 (1980) 147.
- 7.- J. Eisenberg y W.Greiner, Nuclear Theory (North Holland),3ª edición Amsterdam 1987.
- 8.- Rose , Elementary Theory of Angular Momentum (1957), John Wiley& Sons.
- 9.- W. Greiner, B. Müller-Quantum Mechanics (Simetries) Springer Verlag 1989.
- 10.- Arya A.P., "Fundamentals of Nuclear Physics, Allyn Bacon, (1966)
- 11.- Nuclear Data Sheets 40 523 (1983) (U-234)
- 12.- Nuclear Data Sheets 40 385 (1983) (Th-230)
- 13.- Nuclear Data Sheets 53 601 (1988) (U,Pu-238)
- 14.- Nuclear Data Sheets 36 367 (1982) (Th-232)
- 15.- Nuclear Data Sheets 43 245 (1984) (Pu-240)
- 16.- Kuman K. y Baranger M., Nucl. Phys. 63 (1965) 167
- 17.- Gneuss-Greiner, Nucl. Phys. 177 (1971) 449

- 18(a).-E. Chacón, M. Moshinsky and R.T. Sharp J. Math. Phys. 17 (1976)
668
- 18(b).-E. Chacón, M. Moshinsky and R.T. Sharp J. Math. Phys. 18
(1977) 870
- 19.- D.Troltenier, P.Hess, J.Maruhn, W.Greiner, Zeitschrift für
Physik A296 (1980)147
- 20.- P.O.Hess, J. A. Maruhn, W.Greiner, "Proceedings of Future
Direction in Studies of Nuclei far from Stability". North Holland
Pub.Comp. (1980)151
- 21.- A.Frank, Physical Rev.C 39 (1989) 652
- 22.- Heyde K., P.Van Isacker, M. Waroquier y J. Moreau
Nucl. Phys. C 29 (1984)4
- 23.- Nuclear Data Sheets 35 #3 (1982) (Ru-96)
- 24.- Nuclear Data Sheets 39 #3 (1983) (Ru-98)
- 25.- Nuclear Data Sheets 11 #3 (1974) (Ru-100)
- 26.- Nuclear Data Sheets 35 #4 (1982) (Ru-102)
- 27.- Nuclear Data Sheets 41 #325 (1984) (Ru-104)
- 28.- K.Sümmerer, N.Kaffrell, E. Stender y N.Trautmann
Nucl. Phys.A 339 (1980) 74-88 (Ru-106,108).