29
29

# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

# SOBRE LA DIMENSION UNIFORME Y SU CONCEPTO DUAL.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

LEOPOLDO PANTALEON MARTINEZ

México, D.F.



1991

# TESIS CON FALLA DE ORIGEN

INDICE.

Introducción:

El concepto de dimensión uniforme de un módulo $M$, se conoce también como el rango de $M$, (ó como la dimensión de Goldie de $M$ en honor de A. W. Goldie). Se dice que un módulo $M$ tiene dimensión uniforme finita (ó rango finito), si no contiene sumas directas infinitas de submódulos distintos de cero. Esto es equivalente, [ver Cap. 3, Prop. 3.2] a decir que para cualquier sucesión creciente $M_1 \leq M_2 \leq M_3 \leq \cdots$ de submódulos de $M$, existe un $i$ tal que $M_i$ es esencial en $M_j$ $\forall j \geq i$.

Motivado por ésto, Patrick Fleury [5] propone una noción dual: Un módulo $M$ tiene finite Spanning dimension (Nosotros diremos que $M$ tiene dimensión de Fleury finita), si dada cualquier sucesión estrictamente creciente $M_1 > M_2 > M_3 > \cdots$ de submódulos de $M$, existe un $i$ tal que $M_j$ es superfluo en $M$ $\forall j \geq i$.

Existe otra manera de intentar dualizar la noción de dimensión uniforme. Para éste propósito recordemos (Veáse el Cap. 3, Teo. 3.9) que si $M$ es de rango finito, el rango de $M$ es un entero $r \geq 0$ caracterizado por los siguientes propiedades:

a) $\bigoplus_{i=1}^{k} M_i \subset M$, $M_i \neq 0$ para cada $i \Rightarrow k \leq r$

b) Existe una suma directa $\bigoplus_{i=1}^{r} V_i \subset M$ con cada $V_i \neq 0$.

Dualmente, podemos considerar módulos $M$ con la propiedad que no existan epimorfismos $M \longrightarrow \prod_{i=1}^{\infty} L_i$ con cada $L_i \neq 0$. Sin embargo, rápidamente tendremos problemas, pues existe un módulo con la propiedad anterior para el cual, dado un entero $k \geq 1$ es posible hallar un epimorfismo $M \rightarrow \prod_{i=1}^{k} V_i$ con cada $V_i \neq 0$. (En el cap. 3 damos un ejemplo). A causa de ésta dificultad K. Varadajan en [6] define que un módulo $M$ tiene corango finito si existe un entero $\ell \geq 1$ tal que no existen epimorfismos $M \rightarrow \prod_{j=1}^{\ell} M_j$ con cada $M_j \neq 0$.

En éste trabajo, estudiamos el concepto de corango finito:

Su relación con el concepto de dimensión uniforme y con el concepto de dimensión de Fleury finita. Veremos que los resultados principales de A. W. Goldie sobre módulos de rango finito (Teoremas 3.9, 3.12 y 3.13) tienen duales correspondientes para módulos de corango finito. En relación a la dimensión de Fleury finita, veremos que el concepto de corango finito tiene algunas ventajas sobre el concepto propuesto por P. Fleury.

Dividimos el trabajo en la siguiente manera:

En el capítulo uno presentamos conceptos básicos y sus relaciones que utilizamos a lo largo del trabajo.

En el capítulo dos presentamos las propiedades $(P_1)$ y $(P_2)$ y desarrollamos las propiedades de los módulos que las poseen y que nos servirán para destacar posteriormente, que en presencia de la propiedad $(P_2)$, los conceptos de rango finito y corango finito son completamente duales en el ámbito de los resultados principales.

En el capítulo tres, desarrollamos las propiedades de un módulo de rango finito y las de un módulo de corango finito, destacando en la parte final las propiedades de un módulo de corango finito con la propiedad $(P_2)$.

Finalmente, en el capítulo cuatro, comparamos los conceptos de corango finito y dimensión de Fleury finita. Veremos que todo módulo de dimensión de Fleury finita, es un módulo de corango finito. También damos un ejemplo de un módulo de corango finito que no tiene dimensión de Fleury finita.

# I.- Complementos, Suplementos y Suplementos directos.

En este trabajo todos los módulos considerados son R-módulos izquierdos unitarios, donde R es un anillo con uno. Escribiremos $H \leq M$ para indicar que H es un submódulo del módulo M. Cuando $H \leq M$ pero $H \neq M$ usaremos la notación $H < M$. También denotamos a la familia de submódulos de M por $\mathcal{G}(M)$.

<u>Definición</u> 1.1 Sea $E \leq M$. Diremos que E es esencial en M si $\forall K \leq M$, $K \cap E = 0 \Rightarrow K = 0$.

<u>Notación</u>: $E \leq_e M$

<u>Definición</u> 1.2 Un módulo $\mathcal{U}$ es uniforme si $\mathcal{U} \neq 0$ y $K \leq_e \mathcal{U}$ $\forall K$ tal que $0 < K \leq \mathcal{U}$.

<u>Ejemplos</u> 1.3

1) si $n > 1$, $\mathbb{Z}_n$ es uniforme $\Longleftrightarrow n = p^r$ p.a primo p y p.a $r \in \mathbb{N}$

<u>Demostración</u>: Sea $n > 1$, por tanto $n = p^r m$ para algunos naturales $p, r, m$ tales que p es primo y $(p^r, m) = 1$. Si $m \neq 1$, $\mathbb{Z}_n \approx \mathbb{Z}_{p^r} \times \mathbb{Z}_m$ y este producto claramente no es uniforme. Por tanto $\mathbb{Z}_n$ uniforme implica $m = 1 \therefore n = p^r$. Recíprocamente, si $n = p^r$ entonces $\mathcal{G}(\mathbb{Z}_{p^r})$ está constituida por la cadena:

$$0 < \mathbb{Z}_p < \mathbb{Z}_{p^2} < \cdots < \mathbb{Z}_{p^r}$$

Por lo cual es inmediato comprobar que $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}_{p^r}$ es uniforme.

2) Para todo primo $q$, $\mathbb{Z}_{q^\infty}$ es uniforme.

Esto es consecuencia de que $G(\mathbb{Z}_{q^\infty})$ esta formada por la cadena $0 < \mathbb{Z}_q < \mathbb{Z}_{q^2} < \cdots < \mathbb{Z}_{q^i} < \cdots \leq \mathbb{Z}_{q^\infty}$

3) Sea $D$ un dominio entero (i.e. un dominio conmutativo), y $K$ su campo de cocientes, entonces $K$ es un $D$-módulo uniforme.

<u>Demostración</u>: Sean $K_1, K_2 \leq K$ con $K_i \neq 0$, $\therefore \exists \frac{p_i}{q_i} = x_i \in K_i$ tal que $p_i \neq 0$ $\therefore$ $0 \neq p_i = q_i x_i \in K_i$ $\therefore$ $p_1 p_2 \in K_1 \cap K_2$ y $p_1 p_2 \neq 0$ $\therefore$ $K_1 \cap K_2 \neq 0$ $\therefore$ $K$ es uniforme.

<u>Proposición 1.4</u>.

a) Si $L \leq H \leq M$ entonces $L \leq_e M \Leftrightarrow L \leq_e H \leq_e M$.

b) Si $L_i \leq_e M_i \leq M$ $(i=1,2)$ entonces $L_1 \cap L_2 \leq_e M_1 \cap M_2$

c) Si $f: M \to N$ es un morfismo y $A \leq_e N$ entonces $f^{-1}(A) \leq_e M$.

d) Si $\{L_\alpha\}_\alpha$ es una familia independiente de submódulos de $M$ y $L_\alpha \leq_e M_\alpha \leq M$ $\forall \alpha$, entonces $\{M_\alpha\}_\alpha$ es una familia independiente y $\bigoplus_\alpha L_\alpha \leq_e \bigoplus_\alpha M_\alpha$.

<u>Demostración</u>: Ver la proposición 1.1 de [1].

<u>Definición 1.5</u>. Sea $L \leq M$. Diremos que $L$ es un submódulo superfluo en $M$ si $\forall H \leq M$, $H + L = M \Rightarrow H = M$.

<u>Notación</u>: $L \leq_s M$.

Definición 1.6. Un módulo $H$ es hueco si $H \neq 0$ y $\forall\ L < H$ se tiene que $L \leq_s H$.

Ejemplos 1.7.

1) Todo módulo simple es simultáneamente uniforme y hueco.

2) si $n > 1$ $\mathbb{Z}_n$ es hueco $\Leftrightarrow$ $n = p^r$ p.a primo $p$ y algún natural $r$. (Prueba análoga a la de 1.3 (1))

3) $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ es hueco $\forall$ primo $p$ (Demostración análoga a la de 1.5 (2)).

4) si $R$ es un anillo s.s (semisimple), los únicos $R$-módulos que son huecos (Resp. uniformes) son los módulos simples.

En efecto. $R$ s.s $\Rightarrow$ $M$ s.s $\forall\ M \in R$-mod, por lo cual si $M$ es hueco (Resp. uniforme) no puede tener un submódulo propio pues éste, sería necesariamente un sumando directo de $M$.

5) Sea $M \in R$-mod. Se dice que $M$ es un módulo local si tiene un único submódulo máximo el cual contiene a cualquier otro submódulo propio de $M$. El anillo $R$ es un anillo local si como $R$-módulo es local. Es claro que un módulo local es hueco.

Proposición 1.8

a) si $A \leq B \leq_s M$ entonces $A \leq_s M$

b) si $A_i \leq_s M$ $(i = 1, 2)$ entonces $A_1 + A_2 \leq_s M$.

c) $A_i \leq_s B_i \quad (i=1,2) \Rightarrow A_1+A_2 \leq_s B_1+B_2$

d) $L_i \leq_s M_i \quad (1\leq i\leq k) \Rightarrow \prod_{i=1}^{k} L_i \leq_s \prod_{i=1}^{k} M_i$

e) Si $A\leq_s B\leq M$ entonces $L\leq_s M \quad \forall\, L\leq A$

f) Si $f: M\to N$ es un morfismo y $A\leq_s M$ entonces $f(A)\leq_s N$.

g) Sea $\varphi: M\to N$ un epimorfismo con $\ker\varphi\leq_s M$. Entonces $L\leq_s N \iff \varphi^{-1}(L)\leq_s M$.

<u>Demostración</u>. a) y b) son inmediatas de la definición.

c) Sean $A_i\leq_s B_i \quad (i=1,2)$ $\therefore$ $A_i\leq_s B_1+B_2 \quad (i=1,2)$ esto por e) $\therefore$ $A_1+A_2\leq_s B_1+B_2$ según b).

d) Es suficiente demostrar el caso $k=2$. Sean $L_i\leq_s M_i$ $(i=1,2)$, es claro que $L_1\times 0\leq_s M_1\times 0$ y $0\times L_2\leq_s 0\times M_2$ $\therefore$ Se sigue de c) que:

$$L_1\times L_2 = (L_1\times 0)+(0\times L_2)\leq_s (M_1\times 0)+(0\times M_2) = M_1\times M_2 .$$

e). Antes de pasar a la demostración, resaltaremos el siguiente hecho que utilizaremos frecuentemente:

Si $N\leq M\leq N+L$ entonces $M=N+L\cap M$ y ésta suma es directa si $N+L$ es directa. En efecto, la ley modular implica que $M\cap(L+N)=N+L\cap M$ $\therefore$ $M\leq M\cap(L+N)=N+L\cap M$ $\therefore$ $M=N+L\cap M$. Si además $L+N$ es directa te-

tenemos que $0 = L\cap N \supseteq (L\cap M)\cap N$ $\therefore$ $(L\cap M)\cap N = 0$ $\therefore$ $M = N \oplus L\cap M$.

Pasemos a la demostración de e). Supongamos que $A \leq_s B \leq M$. P.D. $L \leq_s M$ $\forall$ $L \leq A$. Sean $L \leq A$ y $T \leq M$ tales que $L + T = M$ $\therefore$ $L \leq B \leq L + T$ $\therefore$ $B = L + T\cap B$ y como $L \leq_s B$ (por a)), se tiene que $T\cap B = B$ $\therefore$ $L \leq T$, pero por hipótesis $T + L = M$ $\therefore$ $T = M$ $\therefore$ $L \leq_s M$.

f) Sea $g: M \to N$ un morfismo y $A \leq_s M$. P.D. $g(A) \leq_s N$.

Por el inciso a) es suficiente demostrar f) para cuando $g: M \to N$ es un epimorfismo, lo cual haremos.

Sea $L \leq N$ tal que $g(A) + L = N$. Haciendo $T := g^{-1}(L)$ se tiene que $g(T) = L$ (pues $g$ es epimorfismo) $\therefore$ $g(A) + L = g(A+T) = N$ $\therefore$ $A + T + \ker g = M$ $\therefore$ $T + \ker g = M$ (pues $A \leq_s M$) $\therefore$ $g(T) = N$ i.e. $L = N$ $\therefore$ $g(A) \leq_s N$.

g) Sea $\varphi: M \to N$ un epimorfismo con $\ker\varphi =: K \leq_s M$.
Entonces $L \leq_s N \Leftrightarrow \varphi^{-1}(L) \leq_s M$.

<u>Demostración</u>: $\Leftarrow]$ Se sigue de f) y de que $\varphi(\varphi^{-1}(L)) = L$ por ser $\varphi$ epimorfismo.

$\Rightarrow]$ Sea $A \leq_s N$ y $L \leq M$ tales que $L + \varphi^{-1}(A) = M$ $\therefore$ $\varphi(L) + A = \varphi(M) = N$ y como $A \leq_s N$ se tiene que $\varphi(L) = N$ $\therefore$ $M = \varphi^{-1}(N) = \varphi^{-1}(\varphi(L)) = L + K$, pero $K \leq_s M$ $\therefore$ $L = M$, es decir $\varphi^{-1}(A) \leq_s M$.

<u>Lema 1.9</u>. Sea $\varphi: M \to \overline{M}$ un epimorfismo con $M \neq 0$ y $\ker\varphi =: K \leq_s M$. Entonces $M$ es hueco $\Leftrightarrow$ $\overline{M}$ es hueco.

Demostración: $\Rightarrow]$ Sea $L < \overline{M}$. Por la hipótesis tenemos que $\varphi^{-1}(L) \leq_s M$ pues $\varphi^{-1}(L) < M$ $\therefore$ $\varphi(\varphi^{-1}(L)) = L$ es superfluo en $\overline{N}$ (f) de 1.8) $\therefore$ $\overline{N}$ es hueco.

$\Leftarrow$] Sea $L < M$ $\therefore$ $\varphi(L) < \overline{N}$ $\therefore$ $\varphi(L) \leq_s \overline{N}$ $\therefore$ $\varphi^{-1}(\varphi(L)) = L + K$ es superfluo en $M$ (inciso g de 1.8) $\therefore$ $L \leq_s M$ (por a) de 1.8).

<u>Definición 1.10</u> Sean $K, L \leq M$. Diremos que $K$ es un complemento (ó un complemento relativo) de $L$ en $M$ si $K \cap L = 0$ y $N \cap L \neq 0$ $\forall N$ tal que $K < N \leq M$.

<u>Notación</u>:

$C(M) = \{ K \leq M$ : $K$ es complemento en $M$ p.a. $H \leq M \}$

<u>Definición 1.11</u> Sean $H, N \leq M$. $H$ es un suplemento de $N$ en $M$ si

$$M = H + N \quad \text{pero} \quad M \neq H' + N \quad \forall H' < H.$$

<u>Notación</u>:

$S(M) = \{ H \leq M$ : $H$ es un suplemento en $M$ p.a. $L \leq M \}$

<u>Definición 1.12</u>. Sea $H \leq M$. Diremos que $V \leq M$ es un suplemento directo de $H$ en $M$ si: $M = V \oplus H$.

$D(M)$ denotará a la familia de submódulos de $M$ que tienen la propiedad de ser suplemento directo en $M$ de algúno submódulo de $M$.

<u>Observaciones</u> 1.13

1) $0, M \in C(M)$ y $0, M \in S(M)$ $\forall M \in R\text{-mod}$.

Lema 1.14 Si $H$ es un complemento de $L$ en $M$ entonces: 1) $H\oplus L \leq_e M$

2) Si $H \leq_e \bar{H} \leq M \Rightarrow H=\bar{H}$

Demostración. 1) Sea $L' \leq M \ni (H\oplus L)\cap L' = 0$ por tanto, $(H\oplus L)+L'$ es una suma directa $\therefore (L'\oplus H)\oplus L = (H\oplus L)\oplus L'$ $\therefore (L'+H)\cap L = 0$. Pero $H$ es un complemento de $L$ en $M$ y $H \leq L'+H$ $\therefore L'=0$ $\therefore H\oplus L \leq_e M$.

2) Como $H \leq_e \bar{H}$ y $H\cap(L\cap\bar{H})=0$ tenemos que $L\cap\bar{H}=0$ pero $H\leq\bar{H}$ y $H$ es un complemento en $M$ de $L$ $\therefore H=\bar{H}$.

Lema 1.15 Sea $H$ un suplemento de $\bar{H}$ en $M$. Entonces

a) $H\cap\bar{H} \leq_s H$ (y por tanto $H\cap\bar{H} \leq_s M$)

b) $K \leq H$ y $K$ superfluo en $M \Rightarrow K$ superfluo en $H$.

Demostración: a) Sea $L \leq H$ tal que $H\cap\bar{H}+L=H$, entonces $M = H+\bar{H} = (H\cap\bar{H}+L)+\bar{H} = \bar{H}+L$ $\therefore L=H$ pues $H$ es un suplemento de $\bar{H}$ en $M$ $\therefore H\cap\bar{H} \leq_s H$.

b) Sea $L \leq H$ tal que $K+L=H$, por tanto: $M = \bar{H}+H = \bar{H}+(K+L) = (\bar{H}+L)+K$. Pero $K \leq_s M$ $\therefore \bar{H}+L=M$ $\therefore L=H$ pues $H$ es un suplemento de $\bar{H}$ en $M$.

Lema 1.16 Sea $H \in C(M)$ y $\Gamma \leq M$ un submódulo que satisface: i) $H\cap\Gamma=0$, ii) $H+\Gamma \leq_e M$. Entonces $H$ es un complemento de $\Gamma$ en $M$.

Demostración. Sea $N \leq M$ tal que $H\cap N=0$ y $K\cap N \neq 0$ $\forall K > H$ con $K \leq M$. Supongamos que $H \leq H' \leq M$ y $H'\cap\Gamma=0$

Lema 1.20. Sea $H \leq_e M$. Entonces $H \in C(M) \Leftrightarrow H = M$.

Demostración: $\Leftarrow]$ es clara. Recíprocamente, sea $H \in C(M)$. Como $H \leq_e M$, tenemos que $0$ es un complemento de $H$ en $M$, pero $H \in C(M)$ $\therefore$ $H$ es un complemento de $0$ en $M$ (Lema 1.18) $\therefore$ $H = M$.

Lema 1.21. Supongamos que $H$ es superfluo en $M$. Entonces $H \in S(M) \Leftrightarrow H = 0$.

Demostración. $\Leftarrow]$. Es clara. Recíprocamente sea $H \in S(M)$. $H \leq_s M$ implica que $M$ es un suplemento de $H$ en $M$. El lema 1.19 implica que $H$ es un suplemento de $M$ en $M$ $\therefore$ $H = 0$.

Proposición 1.22. Si $M$ es un módulo semisimple y $W \leq M$. Entonces cualquier complemento ó suplemento de $W$ en $M$, es un suplemento directo de $W$ en $M$.

Demostración: Por la observación 1.13 6), se tiene que $C(M) = S(M) = D(M) = \mathcal{G}(M)$. Sea $A$ un complemento de $W$ en $M$ $\therefore$ $A \oplus W \leq_e M$ (Lema 1.14). Como $A \oplus W \in \mathcal{G}(M) = C(M)$ el lema 1.20 implica que $A \oplus W = M$. Es decir $A$ es un suplemento directo de $W$ en $M$.

Sea $H$ un suplemento de $W$ en $M$ $\therefore$ $H \cap W$ es superfluo en $H$ (lema 1.15), pero $H \cap W \in \mathcal{G}(M) = S(M)$ $\therefore$ $H \cap W = 0$ según el lema 1.21. $\therefore$ $M = H \oplus W$.

**Proposición 1.23** $C(M) = G(M) \Leftrightarrow M$ es semisimple.

**Demostración:** Solo tenemos que demostrar la implicación $\Rightarrow]$.
Sea $H \leq M$ $\therefore$ $H \in G(M) = C(M)$ $\therefore$ $\exists\ \bar{H} \leq M$ tal que $H \oplus \bar{H} \leq_e M$, nuevamente $H \oplus \bar{H} \in G(M) = C(M)$ $\therefore$ el lema 1.20 implica que $H \oplus \bar{H} = M$; es decir todo submódulo es un sumando directo de $M$.

**Proposición 1.24** $S(M) = G(M) \Leftrightarrow M$ es semisimple.

**Demostración:** Solo tenemos que demostrar $\Rightarrow]$.
Sea $H \leq M$, por hipótesis $\exists\ \bar{H} \leq M$ tal que $H$ es un suplemento de $\bar{H}$ en $M$, $\therefore$ $H + \bar{H} = M$. Además $H \cap \bar{H} \leq_s M$ (lema 1.15(a)), pero $H \cap \bar{H} \in S(M)$ $\therefore$ $H \cap \bar{H} = 0$ (lema 1.21), $\therefore$ $H \oplus \bar{H} = M$. Es decir todo submódulo de $M$ es un sumando directo de $M$.

**Proposición 1.25** Sean $H \in C(M)$ y $K \leq H$. Entonces:
$$K \in C(H) \Leftrightarrow K \in C(M).$$

**Demostración:** $\Leftarrow]$ Por hipótesis $\exists\ L \leq M$ tal que $K$ es un complemento de $L$ en $M$. Probaremos que $K$ es un complemento de $L \cap H$ en $H$: i) $K \cap (L \cap H) = 0$ pues $K \cap L = 0$.
ii) Supongamos que existe $\bar{H}$ tal que $K \leq \bar{H} \leq H$ y $\bar{H} \cap (L \cap H) = 0$. Por tanto $\bar{H} \cap L = 0$ (pues $\bar{H} \leq H$) y como $K$ es un complemento de $L$ en $M$ con $K \leq \bar{H}$, tenemos que $K = \bar{H}$. Es decir $H \cap L$ tiene como un complemento en $H$ a $K$.

$\Rightarrow]$ Ver las proposiciones 1.4 y 1.5 de [1].

Proposición 1.26 Sean $H \in S(M)$ y $K \leq H$. Entonces:
$$K \in S(H) \Leftrightarrow K \in S(M).$$

Demostración: $\Rightarrow]$ Sea $H$ suplemento de $N$ en $M$ y $K$ suplemento de $L$ en $H$ $\therefore M = H + N$ y $H = L + K$ $\therefore M = K + (L + N)$. Por otra parte, sea $K' \leq K$ tal que $M = K' + (L + N)$. Como $K' + L \leq H$ y $H$ es suplemento de $N$ en $M$ tenemos que $K' + L = H$ $\therefore K = K'$ pues $K' \leq K$ y $K$ es un suplemento de $L$ en $H$. Así, hemos mostrado que $K$ es un suplemento de $(L + N)$ en $M$.
$\Leftarrow]$ Sea $K$ suplemento de $P$ en $M$ $\therefore K + P = M \geq H \geq K$ $\therefore H = K + P \cap H$. Sea $L \leq K$ t.q. $H = L + P \cap H$ $\therefore L + P \cap H = H \geq K \geq L$ $\therefore K = L + (P \cap H \cap K)$ $\therefore M = K + P = (L + P \cap H \cap K) + P = L + P$; pero $L \leq K$ y $K$ es suplemento de $P$ en $M$ $\therefore L = K$. Así $K$ es un suplemento de $P \cap H$ en $H$.

Proposición 1.27 Sea $M \xrightarrow{\varphi} M' \to 0$ una sucesión exacta con $\ker \varphi = K$. y sea $K \leq N \leq M$. Si $H$ es un suplemento de $N$ en $M$, entonces $\varphi(H)$ es un suplemento de $\varphi(N)$ en $M'$.

Demostración: $H$ es un suplemento de $N$ $\therefore H + N = M$ $\therefore \varphi(H) + \varphi(N) = M'$. Sea $\Gamma' \leq \varphi(H)$ t.q. $\Gamma' + \varphi(N) = M'$; $\therefore M = \varphi^{-1}(\Gamma' + \varphi(N)) = \varphi^{-1}(\Gamma') + \varphi^{-1}(\varphi(N))$ (pues $\varphi$ es epimorfismo), $\therefore M = \varphi^{-1}(\Gamma') + \varphi^{-1}(\varphi(N)) = \varphi^{-1}(\Gamma') + (N + K)$ y como $N \geq K$, tenemos: $M = \varphi^{-1}(\Gamma') + N$. Por otra parte $\Gamma' \leq \varphi(H)$ implica $\varphi^{-1}(\varphi(H)) = H + K \geq \varphi^{-1}(\Gamma') \geq K$ $\therefore K + \varphi^{-1}(\Gamma') \cap H = \varphi^{-1}(\Gamma')$ $\therefore M = (K + \varphi^{-1}(\Gamma') \cap H) + N = \varphi^{-1}(\Gamma') \cap H + N$, pero $H$ es un suplemento de $N$ en $M$ $\therefore \varphi^{-1}(\Gamma') \cap H = H$ $\therefore \varphi^{-1}(\Gamma') = K + H$ $\therefore \Gamma' = \varphi(\varphi^{-1}(\Gamma')) = \varphi(H)$. Esto es, hemos mostrado que $\varphi(H)$ es un suplemento de $\varphi(N)$ en $M'$.

## II.— Las propiedades $(P_1)$ y $(P_2)$.

**Proposición 2.1** Si $K, H \leq M$ son tales que $K \cap H = 0$, entonces existe un complemento $\bar{H}$ de $H$ en $M$ tal que $K \leq \bar{H}$.

**Demostración**: $K \in \mathcal{F} = \{L \leq M : L \cap H = 0 \text{ y } L \geq K\}$, y es fácil verificar que $\mathcal{F}$ satisface las hipótesis del lema de Zorn, por lo cual tiene un elemento máximo $\bar{H}$ $\therefore$ $K \leq \bar{H}$ y $H \cap \bar{H} = 0$ además $\bar{H} < E \leq M \Rightarrow H \cap E \neq 0$, es decir $\bar{H}$ satisface las condiciones enunciadas.

**Corolario 2.2** $\forall\, \bar{N} \leq M$, $\bar{N}$ tiene un complemento en $M$.

Desafortunadamente, dado un submódulo $H$ de $M$, no siempre tiene un suplemento en $M$, por ejemplo si $M = \mathbb{Z}$ y $H = 2\mathbb{Z}$, tenemos que $\forall\, K \leq \mathbb{Z}$ tal que $H + K = \mathbb{Z}$, $K = r\mathbb{Z}$ p.a $r \in \mathbb{Z}$ con $(r,2) = 1$, en consecuencia $(3r,2) = 1$ y por tanto:
$H + 3r\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ donde $3r\mathbb{Z} < r\mathbb{Z} = K$; es decir $H = 2\mathbb{Z}$ no tiene un suplemento en $\mathbb{Z}$. Lo anterior justifica la:

**Definición 2.3** Un módulo $M$ tiene la propiedad $(P_1)$, si dado cualquier $H \leq M$, existe un suplemento $\bar{H}$ de $H$ en $M$.

Diremos que $M$ tiene la propiedad $(P_2)$, si dados cualesquiera dos submódulos $L, H$ de $M$ con $L + H = M$, existe un suplemento $\bar{H}$ de $H$ en $M$ tal que $\bar{H} \leq L$.

Obsérvese que si un módulo tiene la propiedad $(P_2)$, tam

Lema 2.5. Si $M$ es un módulo semisimple, entonces $M$ tiene la propiedad $(P_2)$.

Demostración: Sean $L, N \leq M$ tales que $L+N=M$. Como $L$ es semisimple y $L\cap N \leq L$, $\exists\ H \leq L$ tal que $L = H \oplus (L\cap N)$ $\therefore$ $M = L+N = H\oplus(L\cap N) + N = H+N$. Además $H\cap N = (H\cap L)\cap N = H\cap(L\cap N) = 0$ $\therefore$ $M = H\oplus N$ $\therefore$ $H$ es un suplemento directo de $N$ en $M$ $\therefore$ $H$ es un suplemento de $N$ en $M$ (Observación 1.13 (5)), tal que $H \leq L$ $\therefore$ $M$ tiene la propiedad $(P_2)$.

Denotamos al radical de Jacobson del módulo $M$ por $J(M)$.

Proposición 2.6 Sea $M$ un módulo con $J(M)=0$. Entonces $M$ tiene la propiedad $(P_1)$ $\Leftrightarrow$ $M$ es semisimple.

Demostración: $\Leftarrow]$ $M$ tiene la propiedad $(P_2)$ (Lema 2.5) $\therefore$ $M$ tiene la propiedad $(P_1)$.

$\Rightarrow]$ Sea $N \leq M$. Por hipótesis $\exists\ L \leq M$ tal que $L$ es un suplemento de $N$ en $M$ $\therefore$ $M = L+N$ y $L\cap N \leq_s M$ (Lema 1.15(a)) $\therefore$ $L\cap N \leq \sum\{ R \leq M \,;\, R$ es superfluo en $M\} = J(M) = 0$ $\therefore$ $L\cap N = 0$ $\therefore$ $M = N\oplus L$ $\therefore$ todo submódulo de $M$ es sumando directo de $M$ $\therefore$ $M$ es semisimple.

Observación 2.7.

(1) Si $R$ es un dominio (es decir un anillo sin divisores propios de cero) con $J(R)=0$, entonces:

R tiene la propiedad $(P_1) \Leftrightarrow$ R es un anillo con división.

Demostración: $\Leftarrow]$ Si R es un anillo con división, entonces R es semisimple $\therefore$ R tiene $(P_2)$ (Lema 2.5) $\therefore$ R tiene $(P_1)$

$\Rightarrow]$ Por la proposición 2.6, R es semisimple $\therefore$ cada ideal izquierdo es principal generado por un idempotente, pero R es un dominio $\therefore$ los únicos elementos idempotentes de R son 0 y 1 $\therefore$ los únicos ideales de R son los triviales $\therefore$ R es un anillo con división.

(2) Si R es un anillo tal que $R/J(R)$ es un dominio, entonces R tiene la propiedad $(P_1) \Leftrightarrow$ R es local.

Demostración: $\Leftarrow]$ R local implica que R es hueco $\therefore$ R tiene la propiedad $(P_2)$ (Ejemplo 2.4(2)) $\therefore$ R tiene la propiedad $(P_1)$.

$\Rightarrow]$. R con la propiedad $(P_1)$ implica que $R/J(R)$ tiene la propiedad $(P_1)$ (proposición 2.8) $\therefore$ $R/J(R)$ es un anillo con división (2.7(1)) $\therefore$ R es local (Ver la proposición 15.15 de [4]).

Proposición 2.8. Sea $M \xrightarrow{\varphi} M' \to 0$ una sucesión exacta. Si $M$ tiene la propiedad $(P_1)$ entonces $M'$ también tiene la propiedad $(P_1)$.

Demostración; Sea $H' \leq M'$, entonces $\varphi^{-1}(H') =: H \leq M$ y $H \geq \ker\varphi$. Por hipótesis $\exists\, L \leq M$ tal que $L$ es un suplemento de $H$ en $M$ $\therefore$ $\varphi(L)$ es un suplemento de $\varphi(H) = H'$ en $M'$ (Lema-proposición 1.27).

Proposición 2.9. Sea $M \xrightarrow{\varphi} M' \to 0$ una sucesión exacta. Si $M$ tiene la propiedad $(P_2)$, $M'$ también la tiene.

Demostración: Sean $L', H' \leq M'$ tales que $L' + H' = M'$ $\therefore$ $\varphi^{-1}(L') + \varphi^{-1}(H') = \varphi^{-1}(M') = M$. $M$ tiene $(P_2)$ $\therefore$ existe un suplemento $L \leq \varphi^{-1}(L')$ para $\varphi^{-1}(H')$ ($\geq \ker\varphi$) en $M$.

Por lo tanto $\varphi(L)$ es un suplemento para $\varphi(\varphi^{-1}(H')) = H'$ en $M'$ (proposición 1.27), tal que $\varphi(L) \leq \varphi(\varphi^{-1}(L')) = L'$.

Proposición 2.10. Si todo submódulo de $M$ tiene la propiedad $(P_1)$ entonces $M$ tiene la propiedad $(P_2)$

Demostración: Sean $L, N \leq M$ tales que $L + N = M$. Sea $H$ un suplemento de $L \cap N$ en $L$ $\therefore$ $M = L + N = (H + L\cap N) + N = H + N$.

Por otra parte si $H' \leq H$ es tal que $H' + N = M$, entonces $H' \leq L \leq H' + N$ $\therefore$ $L = H' + L \cap N$, y como $H$ es un suplemento de $L \cap N$ en $L$ tenemos que $H' = H$. En consecuencia $H$ es un suplemento de $N$ en $M$, y por tanto $M$ tiene la propiedad $(P_2)$.

Lema 2.11. Las siguientes condiciones para un anillo $R$ son equivalentes:

(1) Todo $M \in R$-mod tiene la propiedad $(P_2)$

(2) Todo $M \in R$-mod tiene la propiedad $(P_1)$

Demostración: $(1) \Rightarrow (2)$: Si $M$ tiene $(P_2)$, $M$ tiene $(P_1)$.

$(2) \Rightarrow (1)$: Sea $M \in R$-mod. (2) implica que todo submódulo de $M$ tiene la propiedad $(P_1)$ $\therefore$ $M$ tiene la propiedad $(P_2)$ (proposición 2.10).

<u>Definición 2.12</u>. Diremos que el anillo $R$ es un S-anillo, si satisface cualquiera de las condiciones del lema 2.11.

<u>Ejemplo 2.13</u>. Sea $R$ un anillo con $J(R)=0$. Por la proposición 2.6 es inmediato que ${}_RR$ tiene la propiedad $(P_1)$ $\Leftrightarrow$ $R$ es un anillo semisimple. En este caso, todo $M \in R$-mod. tiene la propiedad $(P_2)$ (Ver lema 2.5).

<u>Observación 2.14</u>. Sea $R$ un anillo e $I$ un ideal bilateral de $R$. Si $M \in R/I$-mod entonces $M \in R$-mod y los $R/I$-submódulos de $M$ son los mismos que los $R$-submódulos de $M$.

En efecto. El epimorfismo canónico $\eta : R \to R/I$, induce en $M$ una estructura de $R$-módulo, por lo cual si $L$ es un submódulo de $M$ en $R/I$-mod, tambien lo es en $R$-mod.

Recíprocamente: $M \in R/I$-mod $\Rightarrow$ $I \cdot M = 0$ en $R$-mod $\therefore$ si ${}_RL \leq {}_RM$ entonces $I \cdot L \leq I \cdot M = 0$ $\therefore$ $I \cdot L = 0$ $\therefore$ $L \in R/I$-mod $\therefore$ $L$ es un $R/I$-submódulo de $M$.

<u>Lema 2.15</u>. Sea $R$ un S-anillo e $I$ un ideal bilateral de $R$. Entonces $R/I$ es un S-anillo.

<u>Demostración</u>: Es inmediato de que $R$ es un S-anillo y de la observación 2.14.

$k$ elementos. En particular, cualquier $H \in S(M)$ es cíclico si $M$ es cíclico.

Demostración: Existe $L \leq M$ tal que $H+L=M$ y si $H' \leq H$ es tal que $L+H'=M \Rightarrow H=H'$. Sea $\{x_1,\dots,x_k\}$ un conjunto de generadores de $M$. Dado que $x_i \in M$, $x_i = h_i + l_i$ con $h_i \in H$, $l_i \in L$.
$\therefore$ $x_i \in (\sum_{i=1}^{k} Rh_i)+L$ $\therefore$ $(\sum_{i=1}^{k} Rh_i)+L=M$ $\therefore$ $\sum_{i=1}^{k} Rh_i = H$.

Proposición 2.19. Si $M$ posee la propiedad $(P_2)$ y $H \in S(M)$ entonces $H$ tiene la propiedad $(P_2)$.

Demostración: Por hipótesis $\exists$ $H' \leq M$ tal que $H'+H=M$ y $L \lneq H$ $\Rightarrow H'+L \neq M$. Sean $X, Y \leq H$ tales que $X+Y=H$ $\therefore$ $M=H+H'=X+Y+H'$. $M$ posee la propiedad $(P_2)$, $\therefore$ $\exists$ $X' \leq X$ tal que $X'$ es un suplemento de $Y+H'$ en $M$ $\therefore$ $M=X'+Y+H'$ y como $X'+Y \leq H$ se sigue que $X'+Y=H$. Supongamos que $X'' \leq X'$ y $X''+Y=H$ $\therefore$ $X'' \leq X' \leq X''+Y=H$ $\therefore$ $X'=X''+Y\cap X'$ y como $M=X'+Y+H'$ tenemos que $M=(X''+Y\cap X')+Y+H' = X''+Y+H'$, pero $X'' \leq X'$ y $X'$ es un suplemento de $Y+H$ en $M$ $\therefore$ $X''=X'$ $\therefore$ $X'$ es un suplemento de $Y$ en $H$ y $X' \leq X$ $\therefore$ $H$ tiene la propiedad $(P_2)$.

Lema 2.20. Si $\varphi: M \to M'$ es un epimorfismo con $\ker\varphi = K \in C(M)$ entonces: $H' \in C(M') \Rightarrow \varphi^{-1}(H') \in C(M)$.

Demostración: Por hipótesis existen $L' < M'$ y $N < M$ tales que $H' \cap L' = 0$ y $N' > H' \Rightarrow N' \cap L' \neq 0$; $N \cap K = 0$ y $L > K \Rightarrow L \cap N \neq 0$.
Por tanto $\varphi^{-1}(H') \cap \varphi^{-1}(L') = \varphi^{-1}(0) = K$. Sea $\bar{R} = \varphi^{-1}(L') \cap N$
$\therefore$ $\varphi^{-1}(H') \cap \bar{R} = 0$. Demostraremos que $\varphi^{-1}(H')$ es un

complemento de $\bar{R}$ en $M$. Sea $H \leq M$ tal que $H > \varphi^{-1}(H')$
$\therefore\ \varphi(H) > \varphi(\varphi^{-1}(H')) = H'$ $\therefore\ \varphi(H) \cap L' \neq 0$ $\therefore\ \varphi^{-1}(\varphi(H) \cap L') \neq K = \ker\varphi$
y como $\varphi^{-1}(\varphi(H) \cap L') = \varphi^{-1}(\varphi(H)) \cap \varphi^{-1}(L') = (H+K) \cap \varphi^{-1}(L') = H \cap \varphi^{-1}(L')$
(pues $H \geq K$), tenemos que $H \cap \varphi^{-1}(L') > K$ y por tanto
$H \cap \varphi^{-1}(L') \cap N = H \cap \bar{R} \neq 0$. Resumiendo: si $\varphi^{-1}(H') < H \leq M$
entonces $H \cap \bar{R} \neq 0$ $\therefore\ \varphi^{-1}(H')$ es un complemento en $M$ para $\bar{R}$.

Corolario 2.21. Sea $M \xrightarrow{\varphi} M' \to 0$ un epimorfismo con $\ker\varphi = K$ y sea $C_K(M) = \{H \in C(M) : H \geq K\}$. Si $K \in C(M)$ entonces $H \longmapsto \varphi(H)$ establece una correspondencia bigectiva $C_K(M) \longrightarrow C(M')$ que preserva inclusiones.

Demostración: Se sigue del lema 1.28 y del lema 2.20.

Lema 2.22. Sea $M \xrightarrow{\varphi} M' \to 0$ exacta con $\ker\varphi = K \in S(M)$.
Si $M$ tiene la propiedad $(P_2)$ y $H' \in S(M')$ entonces $\varphi^{-1}(H') \in S(M)$.

Demostración: Sea $N' \leq M'$ tal que $N' + H' = M'$ y $X < H' \Rightarrow X + N' \neq M'$ ... (1)
Sea $Y \leq M$ tal que $M = Y + K$ y $Z < K \Rightarrow Z + Y \neq M$ ... (2).
Por (1) tenemos que $\varphi^{-1}(N') + \varphi^{-1}(H') = \varphi^{-1}(M') = M$ ... (3).
Como $K \leq \varphi^{-1}(N') \leq M = K + Y$ (Esta igualdad por (2)) tenemos que
$\varphi^{-1}(N') = K + Y \cap \varphi^{-1}(N')$ ... (4) $\therefore$ por (4) y (3) $M = K + Y \cap \varphi^{-1}(N') + \varphi^{-1}(H')$
$\therefore\ M = Y \cap \varphi^{-1}(N') + \varphi^{-1}(H')$ ... (5). $M$ tiene $(P_2)$ $\therefore$ existe un suplemento $H \leq \varphi^{-1}(H')$ de $Y \cap \varphi^{-1}(N')$ en $M$ ... (6). Por tanto
$H + Y \cap \varphi^{-1}(N') = M \geq Y \geq Y \cap \varphi^{-1}(N')$ $\therefore\ Y = Y \cap \varphi^{-1}(N') + H \cap Y$ y por (2)
tenemos $M = K + Y \cap \varphi^{-1}(N') + H \cap Y$ $\therefore\ M' = \varphi(M) = \varphi(K + Y \cap \varphi^{-1}(N') + H \cap Y)$
$= \varphi(Y \cap \varphi^{-1}(N')) + \varphi(H \cap Y) \leq \varphi(\varphi^{-1}(N')) + \varphi(H \cap Y)$ [pues $Y \cap \varphi^{-1}(N') \leq \varphi^{-1}(N')$]
$\therefore\ M' = N' + \varphi(H \cap Y)$, por (1) tenemos que $\varphi(H \cap Y) = H'$, puesto

(2) $\Rightarrow$ (1). Supongamos que $H$ es uniforme y $H \in C(M)$.

P. D. $H$ es un elemento mínimo de $C(M)-\{0\}$.

Sea $H' \in C(M)-\{0\}$ tal que $H' \leq H$ $\therefore$ $H' \in C(H)$ (prop 1.25) y $H' \neq 0$, pero $H$ es uniforme y por tanto $C(H)=\{H, 0\}$ (1.13 (2)) $\therefore$ $H'=H$ $\therefore$ $H$ es un elemento mínimo de $C(M)-\{0\}$.

Proposición 2.25. Sea $M$ un módulo distinto de cero con la Propiedad $(P_2)$.

Las siguientes condiciones son equivalentes.

(1) $H$ es un elemento mínimo de $S(M)-\{0\}$

(2) $H$ es hueco y $H \in S(M)$.

Demostración: (1) $\Rightarrow$ (2). $H \in S(M)$ $\therefore$ $H$ tiene la propiedad $(P_2)$ (proposición 2.19) por lo que es suficiente demostrar que $S(H)=\{H, 0\}$ para probar que $H$ es hueco (Véase 2.4 (4)). Sea pues $0 < H' \leq H$ tal que $H' \in S(H)$ $\therefore$ $H' \in S(M)$ (prop. 1.26) $\therefore$ $H'=H$ ($H$ es mínimo en $S(M)-\{0\}$) $\therefore$ $S(H)=\{H, 0\}$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Supongamos que $H$ es hueco y $H \in S(M)$.

Sea $H' \in S(M)-\{0\}$ tal que $H' \leq H$ $\therefore$ $H' \in S(H)$ (prop. 1.26) y $H' \neq 0$; pero $H$ es hueco y por tanto $S(H)=\{H, 0\}$ (1.13 (3)) $\therefore$ $H'=H$ $\therefore$ $H$ es un elemento mínimo de $S(M)-\{0\}$.

Definición 2.26. Sea $M$ un módulo distinto de cero con la Propiedad $(P_2)$.

Diremos que $H \leq M$ es un suplemento mínimo en $M$, si satisface cualquiera de las condiciones de la proposición 2.25.

por lo que $M$ tendría una suma directa infinita de submódulos $\varphi(H_k) \neq 0$ si $H_k \neq 0$ $\forall k$.

b) $\Rightarrow$ c). Sea

$$0 \to \bigoplus_{\alpha \in I} M_\alpha \xrightarrow{\varphi} M \quad \text{exácta en } R\text{-mod}.$$

P.D. $M_\alpha = 0$ $\forall \alpha$.

Supongamos que no es cierto que $M_\alpha = 0$ $\forall \alpha$ $\therefore$ existe un subconjunto infinito $I' \subset I$ tal que $M_\beta \neq 0$ $\forall \beta \in I'$, por tanto es posible obtener una suma $\bigoplus_{\rho=1}^{\infty} M_\rho$ contenida en $\bigoplus_{\alpha \in I} M_\alpha$ tal que $M_\rho \neq 0$; al restringir $\varphi$ a $\bigoplus_{\rho=1}^{\infty} M_\rho$ tenemos un monomorfismo con $M_\rho \neq 0$ lo cual contradice b).

c) $\Rightarrow$ d). Sea $\{M_\alpha\}_\alpha$ una familia independiente de submódulos de $M$. Como $0 \to \bigoplus_\alpha M_\alpha \hookrightarrow M$ es una suc. exácta, tenemos que $M_\alpha = 0$ $\forall \alpha$ $\therefore$ $M$ no contiene familias independientes infinitas de submódulos $\neq 0$.

d) $\Rightarrow$ e). Sea $H_1 \leq H_2 \leq H_3 \leq \cdots$ una suc. creciente de submódulos de $M$. Si no existe un número natural con las propiedades declaradas, se tiene que $\forall j \in \mathbb{N}$ $\exists k > j$ t.q. $H_j$ no es esencial en $H_k$ $\therefore$ existe una suc. $H_{\alpha_1} \leq H_{\alpha_2} \leq H_{\alpha_3} \leq \cdots$ tal que $H_{\alpha_i}$ no es esencial en $H_{\alpha_{i+1}}$ $\therefore$ existe una familia $\{M_r\}_{r \in \mathbb{N}}$ t.q. $H_{\alpha_r} \cap M_r = 0$ con $0 < M_r \leq H_{\alpha_{r+1}}$ y por tanto $M_1 + \cdots + M_k \leq H_{\alpha_{k+1}}$ $\therefore$ $(M_1 + \cdots + M_k) \cap M_{k+1} \leq H_{\alpha_{k+1}} \cap M_{k+1} = 0$, es decir $\{M_r\}_r$ es una familia independiente.
(hemos usado el criterio: $\{A_1, A_2, A_3, \ldots\}$ es una familia independiente $\Leftrightarrow$ $A_{n+1} \cap (A_1 + \cdots + A_n) = 0$ $\forall n$).

intersección, con $\rho\in B_t$, $h\in H$ y $c\in C_t$, se sigue que $c=\rho-h$ es un elemento de $B_{t+\ell}$ $\therefore c\in B_{t+\ell}\cap C_t=B_{t+\ell}\cap C_{t+\ell}=0$ $\therefore c=0$ $\therefore \rho=h$ $\therefore \rho\in B_t\cap H=0$ $\therefore \rho=0$, por lo cual $H=0$ pues $C_t$ es máximo con la propiedad $C_t\cap B_t=0$ $\therefore B_t\leq_e B_{t+\ell}$ $\therefore M_{t+\ell}=0$ $\forall \ell$ $\therefore M$ no contiene sumas directas infinitas de submódulos $\neq 0$ $\therefore M$ tiene rango finito.

<u>Proposición</u> 3.3 Si $H$ es un submódulo esencial de $M$ y $H$ tiene rango finito, entonces $M$ es de rango finito.

<u>Demostración</u>: si $\{H_i\}_i$ es una familia independiente de $M$, $\{H_i\cap H\}_i$ también es independiente por lo cual se tiene la siguiente suc. exacta $0\to \bigoplus_i H_i\cap H \hookrightarrow H$ $\therefore H_i\cap H=0$ $\forall i$ pues $H$ es de rango finito $\therefore H_i=0$ $\forall i$ pues $H\leq_e M$ $\therefore M$ no tiene familias independientes infinitas, es decir $M$ es de rango finito.

<u>Proposición</u> 3.4 Si $H$ y $M/H$ son de rango finito, $M$ es de rango finito.

<u>Demostración</u>: Sea $\{M_i\}_i$ una familia independiente de submódulos de $M$. Definamos $B_k=\bigoplus_{i=1}^{k} M_i$ $\therefore$ tenemos la siguiente sucesión creciente de submódulos de $H$ $\therefore H\cap B_1\leq H\cap B_2\leq H\cap B_3\leq\cdots$ pero $H$ de rango finito implica que $\exists\, r\in\mathbb{N}$ t.q. $H\cap B_r\leq_e H\cap B_{r+\ell}$ $\forall \ell$, y como $H\cap(\bigoplus_{i=1}^{\ell} M_{r+i})\cap(H\cap B_r)=0$ (pues $\{M_i\}_i$ es indep.), se sigue que $\forall \ell\geq 1$ : $H\cap(\bigoplus_{i=1}^{\ell} M_{r+i})=0$ y por tanto $H\cap(\bigoplus_{i=1}^{\infty} M_{r+i})=0$ $\therefore$ existe un monomorfismo

$$0\longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{\infty} M_{r+i}\xrightarrow{\eta_H} M/H \;\therefore M_{r+i}=0\ \forall i, \text{ ya}$$

que $M/H$ tiene rango finito $\therefore M_k = 0$ $\forall k$ $\therefore$ cualquier familia independiente de submódulos $\neq 0$ es finita $\therefore M$ tiene rango finito.

<u>Corolario</u> 3.5. Si $\{M_i\}_{i=1}^{n}$ es una familia independiente y $\forall i$ $M_i$ es de rango finito, entonces $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ es de rango finito.

<u>Demostración</u>: Es consecuencia inmediata de la Prop. 3.4.

<u>Lema</u> 3.6 Si $M$ es de rango finito, todo submódulo distinto de cero contiene un submódulo uniforme.

<u>Demostración</u>:

Sea $0 \neq H \leq M$ $\therefore$ $H$ tiene rango finito y por la proposición 3.2 g), tiene D.C.C. en $C(H)$ y como:

$$H \in \mathcal{F} = \{L \leq H : L \in C(H) \text{ y } L \neq 0\} \subseteq C(H)$$

se sigue que $\mathcal{F}$ tiene un elemento mínimo $H_0 \neq 0$. La proposición 2.24 implica que $H_0$ es uniforme.

<u>Proposición</u> 3.7 Un módulo $M$ es de rango finito $\Leftrightarrow$ $M$ contiene un submódulo esencial el cual es una suma directa finita de submódulos uniformes.

<u>Demostración</u>: $\Leftarrow]$ si $U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_r \leq_e M$, como $U_i$ es uniforme, $U_i$ es de rango finito, ya que no contiene sumas directas de más de un elemento $\therefore \bigoplus_{i=1} U_i$ es de rango finito,

por el coro. 3.5 y como está contenida esencialmente en $M$, $M$ tiene rango finito según la prop. 3.3 .

$\Rightarrow$] Es una consecuencia del lema 3.6 ya que si

$$\Sigma = U_1 \oplus \cdots \oplus U_k \quad \text{con } U_i \text{ uniforme } \forall\ i = 1, \dots, k$$

y $\Sigma$ no es esencial, existe $H \leq M$, $H \neq 0$ tal que $H \cap \Sigma = 0$ además por el lema 3.6 $H$ contiene un submódulo uniforme $U_{k+1} \neq 0$. Es decir $\Sigma$ se puede extender $\Sigma \oplus U_{k+1}$.

Puesto que $M$ es de rango finito, $\exists\ r \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\Sigma \oplus U_{k+1} \oplus \cdots \oplus U_{k+r}$$

es esencial en $M$.

<u>Proposición</u> 3.8 Si existe una familia independiente finita de submódulos uniformes $\{U_1, \dots, U_n\}$ tal que:
$U_1 \oplus \cdots \oplus U_n \leq_e M$, entonces $M$ no tiene familias independientes con más de $n$-elementos.

<u>Demostración</u>: Usamos inducción: Si $n=1$, $U_1 \leq_e M$ donde $U_1$ es uniforme. Sea $0 \neq H \leq M$, $\therefore H \cap U_1 \neq 0$ $\therefore H \cap U_1 \leq_e M$ $\therefore H \leq_e M$ (Ver prop. 1.4) $\therefore$ $M$ es uniforme

Supongamos que 3.8 se cumple para módulos que contienen esencialmente una suma directa de $n-1$ submódulos uniformes, y supongamos que $U_1 \oplus \cdots \oplus U_n \leq_e M$, con $U_i$ uniforme $\forall i$.

Si $\{B_1, \dots, B_{n+1}\}$ es una familia independiente de $n+1$ submódulos $\neq 0$, definamos $B = B_1 \oplus \cdots \oplus B_n$, $\therefore$ $B_{n+1} \cap B = 0$ $\therefore$ $B \not\leq_e M$ (i.e., $B$ no es un submódulo esencial de $M$) y en particular $B \cap U_1 \oplus \cdots \oplus B \cap U_n \not\leq_e M$, pues esta última suma está con para cada $i$. Luego, como $\{u_1,\dots,u_n\}$ es una familia independiente y $\bar{u}_1\oplus\cdots\oplus\bar{u}_k \leq_e M$ con $\bar{u}_i$ uniforme para cada $i$, la Prop. 3.8 implica que $n\leq k$. Análogamente se ve que $k\leq n$.

2) Sea $\bigoplus_{i=1}^{k} H_i \leq M$ con $H_i\neq 0$ $\forall i$ $\therefore$ $\{H_1,\dots,H_k\}$ es una familia independiente de submódulos $\neq 0$ $\therefore$ $k\leq n$ (Prop. 3.8).

3) Sea $H\leq M$ t.q. $H\leq_e M$, como $M$ es de rango finito $H$ también lo es $\therefore$ existen $B_1,\dots,B_r$ submódulos uniformes de $H$ tal que $B_1\oplus\cdots\oplus B_r \leq_e H$ (Prop. 3.7), pero $H\leq_e M$ $\therefore$ $B_1\oplus\cdots\oplus B_r\leq_e M$ (prop 1.4 (a)) $\therefore$ $r=n$ por 1).
Recíprocamente, supongamos que $H_1\oplus\cdots\oplus H_n \leq H$ donde $B_i$ es uniforme para cada $i$, $\therefore$ $\forall i$, $B_i\neq 0$. Si $H$ no fuese esencial en $M$, existe $L\leq M$, $L\neq 0$ tal que $H\cap L=0$ $\therefore$ $M$ contiene a la suma directa $H_1\oplus\cdots\oplus H_n\oplus L$ lo cual contradice 2) $\therefore$ $H\leq_e M$.

<u>Definición</u> 3.10 Si $M$ es de rango finito, el único entero $n$ que satisface las condiciones del teorema 3.9 es llamado el rango de $M$ y se denota $n=\operatorname{rang} M$. En otro caso definimos $\operatorname{rang} M=\infty$.

<u>Observaciones</u> 3.11

1) Si $H\leq M$ entonces $\operatorname{rang} H\leq \operatorname{rang} M$ y en el caso $\operatorname{rang} M<\infty$ se da la igualdad si y sólo si $H\leq_e M$.

2) $\operatorname{rang} M=0 \Leftrightarrow M=0$
3) $\operatorname{rang} M=1 \Leftrightarrow M$ es uniforme.

Teorema 3.13. Sea $M$ un módulo de rango finito y $H \in C(M)$. Entonces $\operatorname{rang} M = \operatorname{rang} H + \operatorname{rang} M/H$ .

Demostración: Sea $H \in C(M)$, por el corolario 2.21, tenemos que $\{\hat{H} \in C(M) : \hat{H} \geq H\}$ está en correspondencia biyectiva con $C(M/H)$, y esta correspondencia preserva inclusiones, por tanto según el teorema 3.12, debemos tener que $\operatorname{rang} M \geq \operatorname{rang} H + \operatorname{rang} M/H$. Por otra parte, dado que $H \in C(M)$, $\exists$ $L \leq M$ tq. $H \oplus L \leq_e M$ $\therefore$ $\operatorname{rang} H + \operatorname{rang} L = \operatorname{rang} M \geq \operatorname{rang} H + \operatorname{rang} M/H$ $\therefore$ $\operatorname{rang} L = \operatorname{rang} M/H$ [pues $L \cong (L \oplus H)/H$], y por tanto $\operatorname{rang} H + \operatorname{rang} M/H = \operatorname{rang} M$ .

Proposición 3.14. Los únicos $\mathbb{Z}$-módulos uniformes, (salvo isomorfismos), son los siguientes : $\mathbb{Z}_{p^\infty}$, $\mathbb{Z}_{p^k}$ para cualquier primo $p$ y todo grupo abeliano $\Gamma$, libre de torsión con $\dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \Gamma)$ igual a 1, donde $\dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \Gamma)$ denota la dimensión del $\mathbb{Q}$-espacio vectorial $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \Gamma$ .

Demostración: Se sabe que todo grupo abeliano $\Gamma$, se puede expresar como $\Gamma = D \oplus R$, donde $D$ es un grupo abeliano divisible y $R$ es reducido. Más aún $D = L \oplus T$, donde $L$ es libre de torsión y $T$ es de Torsión. Tenemos los siguientes casos, necesariamente, si $\Gamma$ es uniforme:

Caso 1) $R = 0$. Entonces $\Gamma = D = L \oplus T$ y siendo $\Gamma$ uniforme $\Gamma = L$ ó $\Gamma = T$. Si $\Gamma = L$, es decir si $\Gamma$ es libre de torsión y es divisible, entonces $\Gamma \cong \mathbb{Q}^{(X)}$ p.a. conjunto $X$ que en vista de que $\Gamma$ es uniforme, $X$ debe tener cardinal $= 1$ $\therefore$ $\Gamma \cong \mathbb{Q}$.

Si se da el caso $\Gamma = T$, entonces $\Gamma$ es divisible y de tor-

$\Delta_k^i =: \{1, 2, \ldots, \hat{i}, \ldots, k\}$, es decir $\Delta_k$ menos $\{i\}$. Dado un morfismo $\varphi: M \longrightarrow \prod_{i\in J} H_i$ denotaremos la composición $P_i \circ \varphi$ por $\varphi_i$, donde $P_i$ denota la proyección $\prod_{i\in J} H_i \longrightarrow H_i$. En lo sucesivo $k$ denota un entero $\geq 1$.

El siguiente lema es una forma generalizada débil del teorema chino del residuo.

Lema 3.15. Sea $\varphi: M \longrightarrow \prod_{i=1}^{k} H_i$ tal que $\varphi_i : M \longrightarrow H_i$ es un epimorfismo para cada $i$. Entonces $\varphi$ es epimorfismo $\Leftrightarrow$

$$\ker\varphi_i + \bigcap_{j\in\Delta_k^i} \ker\varphi_j = M \quad \forall\, i, (1 \leq i \leq k).$$

Demostración: $\Rightarrow$] Sea $m \in M$ $\therefore \exists\, x \in M$ tal que $\varphi(x) = (0, \ldots, 0, \varphi_i(m), 0, \ldots, 0)$ $\therefore$ $\varphi_i(x) = \varphi_i(m)$ y $\varphi_j(x) = 0$ para $j \in \Delta_k^i$ $\therefore$ $m - x \in \ker\varphi_i$ y $x \in \bigcap_{j\in\Delta_k^i} \ker\varphi_j$, además $m = (m-x) + x$ $\therefore$ $M = \ker\varphi_i + \bigcap_{j\in\Delta_k^i} \ker\varphi_j$.

$\Leftarrow$] P.D. $\varphi$ es sobre. Basta probar que existe $x_i \in M$ tal que $\varphi(x_i) = (0, \ldots, 0, y_i, 0, \ldots, 0)$ para $y_i \in H_i$ (pues si $y \in \prod_{i=1}^{k} H_i$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_k) = (y_1, 0, \ldots, 0) + \cdots + (0, \ldots, 0, y_k)$ y por tanto $\varphi(x_1 + \cdots + x_k) = \sum \varphi(x_i) = y$ ). Sea pues $m \in M$ tal que $\varphi_i(m) = y_i$, por hipótesis tenemos que $m = k_0 + x$ con $k_0 \in \ker\varphi_i$ y $x \in \bigcap_{j\in\Delta_k^i} \ker\varphi_j$. Definimos $x_i = x$ $\therefore$ $\varphi_i(x_i) = \varphi_i(m - k_0) = \varphi_i(m)$ y para $j \in \Delta_k^i$ tenemos $\varphi_j(x_i) = \varphi_j(x) = 0$ y por tanto:

$\varphi(x_i) = (0, \ldots, 0, \varphi_i(m), 0, \ldots, 0) = (0, \ldots, 0, y_i, 0, \ldots, 0)$, que es lo que se quería demostrar.

Lema 3.16. Sea $\varphi: \mathbb{Z} \longrightarrow A_1 \times A_2$ un epimorfismo en $\mathbb{Z}$-mod, con $A_i \neq 0$. Entonces $A_i \overset{h_i}{\cong} \mathbb{Z}_{d_i}$ con $d_i > 1$ y $(d_1, d_2) = 1$.

y tal que $\eta_{d_i\mathbb{Z}} = h_i^{-1} \circ \varphi_i$

Demostración: Por el lema anterior $\mathbb{Z} = \ker\varphi_1 + \ker\varphi_2$, y

$\pi_i(\bar{x})=1$ si $i=1$. Sea $m\in\mathbb{Z}$ tal que $f(m)=\bar{x}$ $\therefore$ $\eta_{d_i\mathbb{Z}}(m)=0$ si $i\geq 2$ y $\eta_{d_1\mathbb{Z}}(m)=1$ $\therefore$ $m\equiv 1 \bmod d_1$ y $m\equiv 0 \bmod d_i$ si $i\geq 2$, pero como $(d_i,d_j)=1$ para $i\neq j$, se tiene que $m=0$ $\therefore$ $0\equiv 1 \bmod d_1$ $\S$.

<u>Observación 3.18</u>. Sean $p_1,\ldots,p_k$ primos distintos y $n=p_1\cdots p_k$, entonces para cada $k\in\mathbb{N}$ existe un epimorfismo:

$$\mathbb{Z}\xrightarrow{\eta_{n\mathbb{Z}}}\mathbb{Z}_n\cong\prod_{i=1}^{k}\mathbb{Z}_{p_i} \quad \text{en } \mathbb{Z}\text{-mod}.$$

Esto combinado con la proposición 3.17 muestra que el "dual estricto" de 2) del teorema 3.9 no es cierto en general.

<u>Definición 3.19</u>. Un módulo $M$ tiene corango $\geq k$ si existen módulos $M_i\neq 0$, $1\leq i\leq k$ y un epimorfismo $\varphi: M\to\prod_{i=1}^{k}M_i$.

<u>Notación</u>: $\operatorname{corang} M\geq k$.

<u>Observaciones 3.20</u>.

1) Si $M\neq 0$; $\operatorname{corang} M\geq 1$, puesto que $id_M: M\to M$ es un epimorfismo.

2) Si $M\to M'\to 0$ es una suc. exacta y $\operatorname{corang} M'\geq k$, claramente $\operatorname{corang} M\geq k$.

3) Si $k\geq l$ y $\operatorname{corang} M\geq k$ entonces $\operatorname{corang} M\geq l$.

Esto es porque si $\varphi: M\to\prod_{i=1}^{k}M_i$ es un epimorfismo con $M_i\neq 0$ $\forall i$, se tiene la siguiente sucesión de epimorfismos

$$M\xrightarrow{\varphi}\prod_{i=1}^{k}M_i\xrightarrow{\eta}\prod_{i=1}^{k}M_i\Big/\prod_{i=l+1}^{k}M_i\cong\prod_{i=1}^{l}M_i$$

donde $\eta$ es el epimorfismo canónico y por abuso de notación escribimos $\prod_{i=l+1}^{k}M_i$ en lugar de $0\times\cdots\times 0\times M_{l+1}\times\cdots\times M_k$.

<u>Proposición 3.21</u>. Si $M \xrightarrow{h} M' \to 0$ es una sucesión exacta con $\ker h \leq_s M$ y $\operatorname{corang} M \geq k$ entonces $\operatorname{corang} M' \geq k$.

<u>Demostración</u>: Sea $H = \ker h$, por hipótesis $H \leq_s M$.

$\operatorname{Corang} M \geq k$ implica la existencia de un epimorfismo $\varphi: M \to \prod_{i=1}^{k} L_i$ con cada $L_i \neq 0$. Sea $F_i =: \ker \varphi_i$, entonces $F_i \neq M$ (pues $L_i \neq 0$) $\therefore$ $H + F_i \neq M$ (pues $H \leq_s M$). Sea $H_i = H + F_i$ y $\eta_i : M \to M/H_i$ el epimorfismo canónico. Como $H = \ker h < H_i$ se sigue que existe un morfismo $\alpha_i$ que hace conmutativo el diagrama. Más aún como $\eta_i$ es epimorfismo, $\alpha_i$ también es epimorfismo.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\eta_i"'] & M' \arrow[r] \arrow[dl, dashed, "\alpha_i"] & 0 \\ M/H_i & & \end{tikzcd}$$

Consideremos el morfismo $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) : M' \to \prod_{i=1}^{k} M/H_i$

Sabemos que $M/H_i \neq 0$, $\alpha_i : M' \to M/H_i$ es epimorfismo y que $\ker \alpha_i = h(H_i)$. Además $\varphi$ es epimorfismo por lo cual el lema 3.15 implica que $F_i + \bigcap_{j \in \Delta_k^i} F_j = M$ para $1 \leq i \leq k$, y puesto que $F_i \leq H_i$ tenemos:

$$H_i + \bigcap_{j \in \Delta_k^i} H_j = M \quad \text{para } 1 \leq i \leq k.$$

Por otra parte, $h(\bigcap_{j \in \Delta_k^i} H_j) = \bigcap_{j \in \Delta_k^i} h(H_j)$ [por el teorema de la correspondencia entre los submódulos de $M$ que contienen a $\ker h$ y los los submódulos de $h(M) = M'$] por lo tanto:

$$h(H_i) + \bigcap_{j \in \Delta_k^i} h(H_j) = h(M) = M' \quad \text{para } 1 \leq i \leq k$$

es decir:

$$\ker \alpha_i + \bigcap_{j \in \Delta_k^i} \ker \alpha_j = M' \quad \text{para } 1 \leq i \leq k \quad \therefore$$

$\alpha : M' \to \prod_{i=1}^{k} M/H_i$ es un epimorfismo (Lema 3.15), tal que $M/H_i \neq 0$ $\therefore$ $\operatorname{corang} M' \geq k$.

Observemos que la Prop. 3.21 es recíproca parcial de la obs. 3.20 (2).

$\varphi = (\pi_L, \pi_K) : H \longrightarrow H/L \times H/K$ , es un epimorfismo y en consecuencia $H/K = 0$ pues corang $H = 1$ y $L < M$, $\therefore$ $H = K$, es decir $L \leq_s H$ $\therefore$ $H$ es hueco.

<u>Observación 3.25</u>. Puede suceder que corang $M' >$ corang $M$ donde $M'$ es un submódulo de $M$.

En efecto, sea $K$ un campo y $R = K[x,y]$, luego $P$ el ideal de todos los polinomios en $R$ con termino constante cero es máximo en $R$ (puesto que es el kernel del epimorfismo $R \to K$ que aplica $f \in R$ a $f(0)$) $\therefore$ $P$ es un ideal primo de $R$ tal que $\langle x \rangle + \langle y \rangle = P$.

Sea $A = R_{(P)}$ (La localización de $R$ en $P$). El corolario 3.13 de [3] nos asegura que si $P$ es un ideal primo de $R$, los ideales primos de $R_{(P)} = A$ estan en correspondencia biyectiva con los ideales primos de $R$ contenidos en $P$, y puesto que $\langle x \rangle, \langle y \rangle \leq P$ son ideales primos de $R$, (pues $x, y$ son elementos irreducibles de $R$ y $R$ tiene factorización única), tenemos ideales primos $P'$ y $P''$ (correspondientes a $\langle x \rangle$ y $\langle y \rangle$ resp.) en $A = R_{(P)}$, $\therefore$ corang $(P' + P'') \geq 2$ pues claramente $P' + P''$ no es hueco. Sin embargo siendo $A$ un anillo local, $A$ es hueco y por tanto corang $A = 1$ (Prop. 3.24) $\therefore$ corang $(P' + P'') >$ corang $A$, con $P' + P'' < A$ en $A$-mod.

<u>Observación 3.26</u>. Sea $M \to M' \to 0$ una suc. exacta, con $M' \neq 0$.

a) Si $M$ es hueco entonces $M'$ es hueco.

De lo contrario corang $M' \geq 2$ $\therefore$ corang $M \geq 2$ lo cual contradice a la prop. 3.24.

b). Si corang $M < \infty$ entonces corang $M' < \infty$.

Pues si no, corang $M' \geq k$ $\forall k$ $\therefore$ corang $M \geq k$ $\forall k$ $\not\!\!\!\nabla_0$ .

**Proposición 3.27.** Si $0 \neq \Gamma$ es un subgrupo de $\mathbb{Q}$ entonces
$$\operatorname{corang}\Gamma = \infty .$$

**Demostración:** Sea $D_\Gamma = \{p : p \text{ es un primo y } p\Gamma = \Gamma\}$.

Supongamos que $D_\Gamma$ es un conjunto infinito.

Como ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ es uniforme, $0 \neq \mathbb{Z}\cap\Gamma$ $\therefore$ $\mathbb{Z}\cap\Gamma = m_0\mathbb{Z}$ p.a $0 \neq m_0 \in \mathbb{Z}$.
Sea $p \in D_\Gamma$; como $m_0 \in \Gamma$, $\exists\, \gamma \in \Gamma$ tal que $m_0 = p\gamma$, ahora bien $\gamma \notin \mathbb{Z}$
[De lo contrario $\gamma \in \Gamma\cap\mathbb{Z} = m_0\mathbb{Z}$ $\therefore$ $\gamma = m_0 l$ p.a $l \in \mathbb{Z}$ $\therefore$ $m_0 = p\gamma = pm_0 l$ $\therefore$ $(m_0 \neq 0 \Rightarrow 1 = pl)$ ↯ ]. $\gamma = \frac{m_0}{p} \in \Gamma$ y $\Gamma = p\Gamma$ implican que $\frac{m_0}{p^i} \in \Gamma$ $\forall\, i \in \mathbb{N}$ $\therefore$ $\forall i$ $\overline{\left(\frac{m_0}{p^i}\right)} =: x_i \in \Gamma/m_0\mathbb{Z}$, además $px_1 = \overline{m_0} = \bar{0}$ y
$px_{i+1} = x_i$ $\forall\, i$ y por tanto
$$\mathbb{Z}_{p^\infty} = \langle x_i, i \in \mathbb{N} : px_1 = 0 \text{ y } px_{i+1} = x_i \rangle \leq \Gamma/m_0\mathbb{Z}$$
$\therefore$ $\bigoplus_{p\in D_\Gamma} \mathbb{Z}_{p^\infty} \leq \Gamma/m_0\mathbb{Z}$ y como $\bigoplus_{p\in D_\Gamma} \mathbb{Z}_{p^\infty}$ es inyectivo, $\exists$ B tal que

$\Gamma/m_0\mathbb{Z} = \left(\bigoplus_{p\in D_\Gamma} \mathbb{Z}_{p^\infty}\right) \oplus B$ $\therefore$ si $D_\Gamma$ es infinito $\operatorname{corang}\Gamma/m_0\mathbb{Z} = \infty$
$\therefore$ $\operatorname{corang}\Gamma = \infty$ (obs. 3.20(2))

Por otra parte si $D_\Gamma$ es un conjunto finito, $\bar{D}_\Gamma = \{p : p \text{ es un primo y } p\Gamma \neq \Gamma\}$ es un conjunto infinito. Sea $p \in \bar{D}_\Gamma$ $\therefore$ $\Gamma/p\Gamma \neq 0$ y $\Gamma/p\Gamma$ es un $\mathbb{Z}_p$-espacio vectorial $\therefore$ para algún conjunto $A \neq \emptyset$, $\Gamma/p\Gamma \overset{\varphi}{\cong} \mathbb{Z}_p^{(A)}$.
Sea $\alpha \in A$ tal que $\varphi_\alpha \neq 0$ hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} \Gamma/p\Gamma \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\varphi_\alpha"'] & \mathbb{Z}_p^{(A)} \arrow[d, "\pi_\alpha"] \\ & \mathbb{Z}_p \end{tikzcd}$$

Como $\varphi_\alpha \neq 0$ tenemos que $\ker\varphi_\alpha = H_p/p\Gamma$ p.a $H_p < \Gamma$ que satisface $\Gamma/H_p \cong \mathbb{Z}_p$ [puesto que $(\Gamma/p\Gamma)/\ker\varphi_\alpha \cong \mathbb{Z}_p$ ].

Sea $S \subset \bar{D}_\Gamma$ y $|S| < \infty$. Se afirma que $\Gamma/\bigcap_{p\in S} H_p \cong \prod_{p\in S} \Gamma/H_p$.
Demostración: Usaremos inducción sobre el cardinal de S.

Si $|S|=1$, no hay nada que demostrar. Supongamos que la afirmación es válida para cuando $S' \subset \overline{D}_p$ y $|S'|=n-1$ y demostraremos que si $S \subset \overline{D}_p$ y $|S|=n$ la afirmación se cumple. Sea $p \in S$ fijo. Por la hipótesis de inducción tenemos que $\Gamma / \bigcap_{q \in S-p} H_q \cong \prod_{q \in S-p} \Gamma/H_q$.

Por otra parte, supongamos que $H_p \supseteq \bigcap_{q \in S-p} H_q$ $\therefore$ tenemos el siguiente diagrama con renglones exactos y cuadro izq. conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \bigcap_{q\in S-p} H_q & \hookrightarrow & \Gamma & \longrightarrow & \prod_{q\in S-p} \Gamma/H_q & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \| & & \downarrow \overline{\varphi} & & \\
0 & \longrightarrow & H_p & \hookrightarrow & \Gamma & \longrightarrow & \Gamma/H_p & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

$\therefore$ existe un morfismo $\overline{\varphi}: \prod_{q \in S-p} \Gamma/H_q \longrightarrow \Gamma/H_p$ que hace conmutativo el cuadro derecho $\therefore$ $\overline{\varphi}$ es un epimorfismo. Sea $x \neq 0$ en $\Gamma/H_p$ $\therefore$ $o(x)=p$, además $x=\overline{\varphi}(y)$ p.a $0 \neq y \in \prod_{q \in S-p} \Gamma/H_q$ $\therefore$ $o(y)=\prod_{q \in S-p} q^{\beta_q}$ donde $\beta_q$ es un entero $\geq 0$. Como $o(y)x=0$ se sigue que $p/o(y)$ $\text{\char"21AF}$ $\therefore$ no es cierto que $H_p \supseteq \bigcap_{q \in S-p} H_q$ $\therefore$ $H_p + \bigcap_{q \in S-p} H_q = \Gamma$ pues $H_p$ es máximo en $\Gamma$ $\therefore$ por el lema 3.15 tenemos que $\eta: \Gamma \longrightarrow \prod_{p \in S} \Gamma/H_p$ el morfismo inducido por los epimorfismos $\eta_p: \Gamma \to \Gamma/H_p$ (con $p \in S$) es un epimorfismo $\therefore$ $\Gamma / \bigcap_{p \in S} H_p \cong \prod_{p \in S} \Gamma/H_p$. De esto último se desprende que $\forall\, k \in \mathbb{N}$ $\operatorname{corang}\Gamma \geq k$ $\therefore$ $\operatorname{corang}\Gamma = \infty$.

<u>Corolario 3.28</u>. Sea $0 \neq \Gamma$ cualquier grupo abeliano libre de torsión. Entonces $\operatorname{corang}\Gamma = \infty$.

<u>Demostración</u>: Sea $0 \neq r \in \Gamma$. Como $\Gamma$ es libre de torsión $\langle r \rangle \cong \mathbb{Z}$. Además $\mathbb{Q}$ es inyectivo por lo cual $\exists$ un morfismo $\overline{\varphi}: \Gamma \longrightarrow \mathbb{Q}$ que hace conmutativo el siguiente diagrama en $\mathbb{Z}$-mod.

(Ver la siguiente hoja)

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \langle r \rangle \arrow[r, hook] \arrow[d, "\cong"] & \Gamma \arrow[ddl, dashed, "\overline{\varphi}"] \\ & \mathbb{Z} \arrow[d, "\varphi"'] & \\ & \mathbb{Q} & \end{tikzcd}$$

Claramente $\overline{\varphi} \neq 0$ $\therefore$ $\operatorname{Im} \overline{\varphi} \neq 0$ $\therefore$ $\operatorname{corang}(\operatorname{Im} \overline{\varphi}) = \infty$ por la proposición 3.27 $\therefore$ $\operatorname{corang} \Gamma = \infty$ pues en $\mathbb{Z}$-mod tenemos la siguiente suc. exacta: $\Gamma \xrightarrow{\overline{\varphi}} \operatorname{Im} \overline{\varphi} \longrightarrow 0$.

<u>Proposición 3.29</u>. Un grupo abeliano $A$ es hueco $\Leftrightarrow$ $A \cong \mathbb{Z}_{p^\infty}$ ó $A \cong \mathbb{Z}_{p^k}$ para algún primo $p$.

<u>Demostración</u>: La implicación $\Leftarrow$ es clara.

Recíprocamente supongamos que $A$ es hueco. Sea $T$ el subgrupo de torsión de $A$. Entonces $A/T$ es libre de torsión. Si $A/T \neq 0$, por la observación 3.26 (a), $A/T$ es hueco $\therefore$ $\operatorname{corang} A/T = 1 < \infty$, lo cual contradice el corolario 3.28 $\therefore$ $A/T = 0$ $\therefore$ $A = T$. Por otro lado sabemos que $T \cong D \oplus R$ donde $D$ es divisible y $R$ es reducido. Si $D \neq 0$, entonces para algún primo $p$, $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ es un sumando directo de $D$ y por tanto $T \cong \mathbb{Z}_p \oplus D' \oplus R$, pero $T$ es hueco y por lo cual $\operatorname{corang} T = 1$ $\therefore$ $D' \oplus R = 0$.

Si en cambio $D = 0$, entonces $T = R$ es un grupo abeliano reducido de torsión distinto de $0$ y por lo tanto tiene a $\mathbb{Z}_n$ como sumando directo para algún $n > 1$ (vease el teorema 9 de [2]). Así $T = \mathbb{Z}_n \oplus H'$ pero $\operatorname{corang} T = 1$ y por tanto $H' = 0$ $\therefore$ $T = \mathbb{Z}_n$ $\therefore$ $n = p^k$ para algún primo $p$ (según el ejemplo 1.7 (2)).

<u>Teorema 3.30</u>. Sean $k, l$ enteros $\geq 1$, $f: M \longrightarrow \prod_{i=1}^{k} V_i$ y $g: M \longrightarrow \prod_{j=1}^{l} H_j$ epimorfismos donde $V_j, V_i, H_j, V_i$ son huecos. Supongamos que $\ker f \leq_s M$ y $\ker g \leq_s M$. Entonces $k = l$.

que $V_1 \times [H_1 \times \prod_{i=2}^{k} V_i] \approx H_1 \times \prod_{i=1}^{k} V_i$, se tiene que el morfismo:

$$(g_1,(f_1,\dots,f_k)) : M \longrightarrow H_1 \times \prod_{i=1}^{k} V_i \quad \text{es un epimorfismo}$$

$\therefore L_1 + \ker(f_1,\dots,f_k) = M$ (Lema 3.15), i.e. $\ker g_1 + \bigcap_{i=1}^{k} F_i = M$.

Resumiendo, lo que hemos mostrado es:

$$F_1 + \ker \varphi^{(1)} = M \Rightarrow L_1 + \ker f = M.$$

Pero por hipótesis $\ker f \leq_s M \therefore L_1 = M$ i.e. $\ker g_1 = M \therefore H_1 = 0$ ↯

Por tanto $F_1 + \ker \varphi^{(1)} \neq M \therefore f_1(F_1 + \ker \varphi^{(1)}) \neq V_1$, es decir $f_1(\ker \varphi^{(1)}) \neq V_1$ y como por hipótesis $V_1$ es hueco, tenemos que $f_1(\ker \varphi^{(1)}) \leq_s V_1 \therefore f_1(\ker \varphi^{(1)}) \times 0 \leq_s V_1 \times (\prod_{i=2}^{k} V_i)$ (Prop. 1.8 d))

Como $f$ es epimorfismo y $\ker f \leq_s M$, la proposición 1.8 g), implica que $f^{-1}(f_1(\ker \varphi^{(1)}) \times 0) = (F_1 + L_1 \cap H) \cap H \leq_s M$. Pero

$\ker \varphi^{(1)} = L_1 \cap H \leq (F_1 + L_1 \cap H) \cap H$, por tanto $\ker \varphi^{(1)} \leq_s M$.

Así $\varphi^{(1)} = (g_1,(f_2,\dots,f_k)) : M \rightarrow H_1 \times \prod_{i=2}^{k} V_i$, es un epimorfismo con $\ker \varphi^{(1)} \leq_s M$. Repitiendo este argumento (renumerando los $H_j$ si fuese necesario), podemos mostrar que $\varphi^{(k)} = (g_1,\dots,g_k) : M \rightarrow \prod_{i=1}^{k} H_i$ es un epimorfismo con $\ker \varphi^{(k)} = L_1 \cap \dots \cap L_k$ superfluo en $M$ y como estamos suponiendo que $k<\ell$, la sobreyectividad de $g$ implica que $(g_1,\dots,g_{k+1}) : M \longrightarrow \prod_{i=1}^{k+1} H_j$ es un epimorfismo y en virtud del lema 3.15 se tiene que $(L_1 \cap \dots \cap L_k) + L_{k+1} = M \therefore L_{k+1} = M \therefore H_{k+1} = 0$ ↯

Es decir $k \neq \ell$ no es posible.

<u>Proposición</u> 3.31 Sea $M$ un módulo con $\operatorname{corang} M = k$. Supongamos que $\varphi : M \longrightarrow \prod_{i=1}^{k} H_i$ es un epimorfismo con $H_i \neq 0$ para cada $i$. Entonces $\ker \varphi$ es superfluo en $M$ y $H_i$ es hueco $\forall i$.

<u>Demostración</u>: Si $\ker \varphi = F$ no es superfluo en $M$ existe $L < M$ t.q. $F + L = M$. Sea $\eta_L : M \rightarrow M/L$ el epimorfismo canónico.

El lema 3.15 implica que $g=(\eta_L,\varphi): M \longrightarrow M/L \times \prod_{i=1}^{k} H_i$, es un epimorfismo $\therefore$ corang $M \geq k+1$ $\not{}_{0}$.

Por otra parte, si algún $H_i$ no es hueco para algún $1 \leq i \leq k$, no perdemos generalidad si suponemos que $H_1$ no es hueco, por tanto corang $H_1 \geq 2$ $\therefore$ existe una sobreyección $h: H_1 \longrightarrow A \times B$, con $A, B \neq 0$, por lo cual podemos construir un epimorfismo $\alpha: H_1 \times \prod_{i=2}^{k} H_i \longrightarrow A \times B \times \prod_{i=2}^{k} H_i$ tal que $(x_1, x_2, \ldots, x_k) \stackrel{\alpha}{\longmapsto} (h_1(x_1), h_2(x_1), x_2, x_3, \ldots, x_k)$, y en consecuencia $\alpha \circ \varphi: M \longrightarrow A \times B \times \prod_{i=2}^{k} H_i$ es una sobreyección $\therefore$ corang $M \geq k+1$, lo cual es una contradicción.

Estamos en condiciones para probar un resultado que puede considerarse como el "dual" del teorema de Goldie (Teorema 3.9).

<u>Teorema 3.32</u>. Sea $k$ un entero $\geq 1$ y $M$ un módulo de corango $k$.

Entonces:

(1) Existe un epimorfismo $\varphi: M \longrightarrow \prod_{i=1}^{k} L_i$ con $L_i \neq 0$ $\forall i$.
Y para cualquier epimorfismo $g: M \longrightarrow \prod_{i=1}^{k} H_i$, $H_i \neq 0$ $\forall i$ se tiene que $\ker g$ es superfluo en $M$ y $H_i$ es hueco $\forall i$.

(2) Si $g: M \longrightarrow \prod_{i=1}^{\ell} H_i$ es un epimorfismo con $\ker g$ superfluo en $M$ y $H_i$ - hueco para toda $i$ entonces $\ell = k$.

(3) Si $h: M \to M'$ es un epimorfismo, entonces $\ker h$ es superfluo en $M$ $\Leftrightarrow$ corang $M' = k$.

<u>Demostración</u>: (1) La existencia del epimorfismo es por por definición del corango. La parte restante es la proposición

3.31.

(2) Es consecuencia de (1) y del teorema 3.30.

(3) Supongamos que $\ker h \leq_s M$. Puesto que $\operatorname{corang} M = k$, en particular $\operatorname{corang} M \geq k$ $\therefore$ $\operatorname{corang} M' \geq k$ (Prop. 3.21), además por la observación 3.20(2) $\operatorname{corang} M' \not\geq k+1$ $\therefore$ $\operatorname{corang} M' = k$.

Recíprocamente, supongamos que $\operatorname{corang} M' = k$ $\therefore$ existe un epimorfismo $\rho : M' \longrightarrow \prod_{i=1}^{k} V_i$ con $V_i \neq 0$ $\forall i$. Entonces $\rho \circ h : M \longrightarrow \prod_{i=1}^{k} V_i$ es un epimorfismo y por (1) $\ker \rho\circ h$ es superfluo en $M$, pero $\ker h \leq \ker \rho\circ h \leq_s M$ $\therefore$ $\ker h \leq_s M$.

<u>Corolario 3.33</u>. (I) Si $M_1$ ó $M_2$ tienen corango infinito, entonces

$$\operatorname{corang} M_1 \times M_2 = \infty$$

(II) Supongamos que $M \times N$ tiene corango finito. Entonces $M$ y $N$ tienen corango finito y $\operatorname{corang} M\times N = \operatorname{corang} M + \operatorname{corang} N$.

<u>Demostración</u>: (I) se sigue de que existe un epimorfismo $h_i : M_1 \times M_2 \longrightarrow M_i$ y de la observación 3.26 (6).

II) Observemos que (I) implica que si $M\times N$ tiene corango finito, entonces $M$ y $N$ tienen corango finito. Además es suficiente probar II) para el caso $N, M \neq 0$. Sea pues $m = \operatorname{corang} M$ y $n = \operatorname{corang} N$, entonces existen epimorfismos $f : M \longrightarrow \prod_{i=1}^{m} V_i$, $g : N \longrightarrow \prod_{j=1}^{n} W_j$ con $V_i, W_j$ huecos $(\forall i, \forall j)$ tal que $\ker f$ y $\ker g$ son superfluos en $M$ y $N$ respectivamente. Luego entonces, $f\times g : M\times N \longrightarrow (\prod_{i=1}^{m} V_i) \times (\prod_{j=1}^{n} W_j)$ es una sobreyección con $\ker f\times g = (\ker f) \times (\ker g)$ superfluo en $M\times N$ y como $\{V_i\}_i$, $\{W_j\}_j$ son huecos se tiene por el teorema 3.32 (2) que

$\operatorname{corang} M\times N = m+n = \operatorname{corang} M + \operatorname{corang} N$ .

Lema 3.34. Si $N$ es superfluo en $M$ entonces

$$\operatorname{corang} M = \operatorname{corang} M/N$$

Demostración: Cuando $\operatorname{corang} M<\infty$, el lema 3.34 es consecuencia del teorema 3.32 (3). Por otra parte, sea $\eta: M\to M/N$ el epimorfismo canónico, por tanto $\ker\eta = N \leq_s M$ y entonces por la proposición 3.21, tenemos que $\operatorname{corang} M\geq k$ implica $\operatorname{corang} M/N\geq k$ $\therefore$ $\operatorname{corang} M=\infty$ implica $\operatorname{corang} M/N=\infty$

Lema 3.35. Si $\operatorname{corang} M<\infty$ y $H, L\leq M$ son tales que $H+L=M$ y $H\cap L\leq_s M$, entonces

$$\operatorname{corang} M = \operatorname{corang} H/H\cap L + \operatorname{corang} L/H\cap L$$

Demostración: Como $H\cap L\leq_s M$, el lema 3.34 implica que $\operatorname{corang} M = \operatorname{corang} M/H\cap L$, por tanto $M/H\cap L$ tiene corango finito. Por otra parte: $M/H\cap L = (H+L)/H\cap L = (H/H\cap L)\oplus(L/H\cap L)$.
$\therefore$ $M/H\cap L \cong (H/H\cap L)\times(L/H\cap L)$, por tanto, por el corolario 3.33 (II), tenemos que $\operatorname{corang} M/H\cap L = \operatorname{corang}(H/H\cap L) + \operatorname{corang}(L/H\cap L)$ $\therefore$ $\operatorname{corang} M = \operatorname{corang} H/H\cap L + \operatorname{corang} L/H\cap L$.

Proposición 3.36. Si $\operatorname{corang} M<\infty$ y $H\in S(M)$ entonces

$$\operatorname{corang} M = \operatorname{corang} H + \operatorname{corang} M/H$$

En particular, $\operatorname{corang} L<\operatorname{corang} M$ si $L\in S(M)$ y $L\neq M$.

Demostración: Existe $E\leq M$ tal que $H$ es suplemento de $E$ en $M$. $\therefore$ $M=H+E$ y $H\cap E$ superfluo en $H$ (en consecuen

es superfluo en $M$) $\therefore$ $\operatorname{corang} H = \operatorname{corang} H/H\cap E$ (Lema 3.34).
Por el lema 3.35 tenemos que $\operatorname{corang} H = \operatorname{corang} H/H\cap E + \operatorname{corang} E/H\cap E$,
y como $M/H = (H+E)/H \cong E/H\cap E$ tenemos que:

$$\operatorname{corang} M = \operatorname{corang} H + \operatorname{corang} M/H .$$

<u>Corolario 3.37</u>. Si $\operatorname{corang} M < \infty$ y $H_i \in S(M)$ $(i=1,2)$ con $H_1 < H_2$ entonces $\operatorname{corang} H_1 < \operatorname{corang} H_2$.

<u>Demostración:</u> $H_2 \in S(M)$ y como también $H_1 \in S(M)$ la proposición 1.26 implica que $H_1 \in S(H_2)$. Además $\operatorname{corang} H_2 \leq \operatorname{corang} M < \infty$ (Prop. 3.36) $\therefore$ $\operatorname{corang} H_1 < \operatorname{corang} H_2$ pues $H_1 \in S(H_2)$ y $H_1 < H_2$.

<u>Proposición 3.38</u>. Si existe una cadena estrictamente creciente de longitud $k$ $0 < H_1 < H_2 < \cdots < H_k$ con cada $H_i \in S(M)$, entonces $\operatorname{corang} M \geq k$.

<u>Demostración:</u> Si $\operatorname{corang} M = \infty$, no hay nada que demostrar.
Supongamos que $\operatorname{corang} M < \infty$ y que existe la cadena:

$$0 < H_1 < H_2 < \cdots < H_k \quad \text{tal que } H_i \in S(M) \text{ para toda } i .$$

En vista del corolario 3.37 tenemos la siguiente cadena de naturales:
$1 \leq e_1 < e_2 < e_3 < \cdots < e_{k-1} < e_k$ donde $e_i = \operatorname{corang} H_i$, por lo tanto
$k \leq e_k$ $\therefore$ $k \leq \operatorname{corang} H_k \leq \operatorname{corang} M$.

<u>Corolario 3.39</u>.
Si $\operatorname{corang} M < \infty$, $S(M)$ satisface las condiciones de cadena (A.C.C. y D.C.C.).

**Proposición 3.40:** Sea $H$ un módulo con la propiedad $(P_2)$.

Si $\operatorname{corang} H \geq k$, entonces existe una cadena estrictamente creciente de longitud $k$: $0 < S_1 < \cdots < S_k$ con cada $S_i \in S(H)$.

**Demostración:** Si $\operatorname{corang} H \geq k$, existe un epimorfismo $\varphi: H \to V$ tal que $V = \prod_{j=1}^{k} V_j$ y cada $V_j \neq 0$. Sea $\mu_j: V_j \to V$ la inclusión canónica. Si $\overline{V}_i = \sum_{j=1}^{i} \mu_j(V_j)$, tenemos una cadena estrictamente creciente: $\overline{V}_1 < \overline{V}_2 < \cdots < \overline{V}_k = V$. Observemos que $\forall\, 1 \leq i \leq k-1$, $\overline{V}_i$ es un suplemento directo de $\mu_{i+1}(V_{i+1}) + \cdots + \mu_k(V_k)$ en $V$ por lo que $\forall i$ $(1 \leq i \leq k)$, $\overline{V}_i \in S(V)$ (Obs. 1.13 (5)). Si $H_i = \varphi^{-1}(\mu_i(V_i))$ y $\overline{H}_i = \sum_{j=1}^{i} H_j$ entonces $H_i \geq \ker \varphi$ y $\overline{H}_i \geq \ker \varphi$ $\therefore$ por ser $\varphi$ epi. se cumple que $\varphi(H_i) = \mu_i(V_i)$ y $\varphi(\overline{H}_i) = \overline{V}_i$ $\therefore$ tenemos una cadena estrictamente creciente en $H$: $0 < \overline{H}_1 < \cdots < \overline{H}_k = H$. Como $H$ tiene $(P_2)$ podemos construir una cadena $S_k = H \geq S_{k-1} \geq \cdots \geq S_1 \geq S_0 = 0$ t.q. $\forall\, 0 \leq i \leq k$, $S_{k-i}$ es un suplemento en $H$ de $\overline{H}_i$ $\therefore$ $\varphi(S_{k-i})$ es un suplemento en $V$ de $\varphi(\overline{H}_i) = \overline{V}_i$ (lema 1.27) y como $\overline{V}_i \in S(V)$ entonces $\overline{V}_i$ es un suplemento de $\varphi(S_{k-i})$ en $V$ (lema 1.19), o lo que es lo mismo $\overline{V}_{k-j}$ es un suplemento en $V$ de $\varphi(S_j)$ $\forall\, 0 \leq j \leq k$, por tanto $V = \varphi(S_j) + \overline{V}_{k-j}$ $\forall\, 0 \leq j \leq k$.
Supongamos que para alguna $i$, se cumple $S_i = S_{i+1}$. Entonces $V = \varphi(S_{i+1}) + \overline{V}_{k-(i+1)} = \varphi(S_i) + \overline{V}_{k-(i+1)}$, i.e: $V = \varphi(S_i) + \overline{V}_{k-(i+1)}$ con $\overline{V}_{k-(i+1)} < \overline{V}_{k-i}$, lo cual contradice que $\overline{V}_{k-i}$ es un suplemento de $\varphi(S_i)$ en $V$ $\therefore$ $S_i = S_{i+1}$ no es posible $\therefore$

$$0 < S_1 < S_2 < \cdots < S_k = H$$

es una cadena estrictamente creciente con cada $S_i \in S(H)$.

Una consecuencia inmediata de las proposiciones 3.39 y 3.40 es el siguiente teorema:

cia inmediata de a).

Lema 3.44. Sea $H$ un módulo. Dada cualquier familia $\{H_i\}_{i\in I}$ de submódulos de $H$ con $\sum_{i\in I} H_i = H$ e $I$ finito, existe un subconjunto $I_0 \subset I$ tal que:

$H = \sum_{i\in I_0} H_i$ es una suma irredundante.

Demostración: Para cualquier conjunto $J$, $|J|$ denotará su cardinal. Sea $E = \{J \subset I \,;\, H = \sum_{i\in J} H_i\}$, $E \neq \emptyset$ pues $I \in E$. Sea $I_0 \in E$ tal que $|I_0| = \min\{|J| : J \in E\}$. Es inmediato que $H = \sum_{i\in I_0} H_i$ es una suma irredundante.

Teorema 3.45. Sea $H$ un módulo distinto de cero con la propiedad $(P_2)$. Si corang $H = r$ entonces:

(1) Existen $r$-suplementos mínimos $c_1, \cdots, c_r$ en $H$ tales que $H = \sum_{i=1}^{r} c_i$ es una suma irredundante.

(2) Si $D_1, \cdots, D_s$ son suplementos mínimos en $H$ tales que $H = \sum_{i=1}^{s} D_i$, entonces $s \geq r$. Más aún la suma $\sum_{i=1}^{s} D_i = H$ es irredundante $\Leftrightarrow$ $r = s$.

Demostración: Probaremos (1) usando inducción. Cuando $r=1$ $H$ es hueco $\therefore$ $H$ es un suplemento mínimo y $H=H$ es una expresión del tipo (1). Sea $r>1$ y supongamos válido el resultado para $r-1$. Por 3.42 existe un suplemento mínimo $c_1$ en $H$ $\therefore$ $\exists\ L \leq H$ tal que $c_1 + L = H$. Usando la propiedad $(P_2)$ de $H$, existe un suplemento $A$ de $c_1$ en $H$ con $A \leq L$; la proposición 2.19

implica que $A$ tiene (P2). Además $A\cap C_1 \leq_s A$ ( proposición 1.15(a)).

$\therefore$ $\operatorname{corang} A = \operatorname{corang} A/A\cap C_1 = \operatorname{corang} (A+C_1)/C_1 = \operatorname{corang} H/C_1 = \operatorname{corang} H - \operatorname{corang} C_1$

$\therefore$ $\operatorname{corang} A = r-1$ y en particular $A < H$ (corolario 3.37).

Por hipótesis de inducción existen suplementos mínimos $C_2, C_3, \ldots, C_r$ de $A$ tales que $A = \sum_{i=2}^{r} C_i$ es una suma irredundante. En particular para $2 \leq i \leq r$, $C_i$ es hueco y $C_i \in S(A)$ y como $A \in S(H)$, tenemos que $C_i \in S(H)$ (prop. 1.26) $\therefore$ $\forall i$ $(2 \leq i \leq r)$ $C_i$ es un suplemento mínimo en $H$. También si $2 \leq i \leq r$, $C_2 + \cdots + \hat{C}_i + \cdots + C_r < A$ y puesto que $A$ es un suplemento de $C_1$ en $H$ tenemos que $C_1 + C_2 + \cdots + \hat{C}_i + \cdots + C_r \neq H$ esto junto con $C_2 + \cdots + C_r = A < H$ implica que $H = \sum_{i=1}^{r} C_i$ es una suma irredundante.

Demostración de (2). Por el lema 3.44, existe $I_0 \subset I = \{1, 2, \ldots, s\}$ tal que $\sum_{i \in I_0} D_i = H$ es una suma irredundante e $|I_0| = \min\{|J| : J \subset I$ con $\sum_{i \in J} D_i = H\}$. Renombrando los índices, podemos asumir que $I_0 = \{1, 2, \ldots, k\}$

Para probar (2) demostraremos que $k = r = \operatorname{rang} H$.

Definimos para $1 \leq j \leq k$, $H_j = D_1 + \cdots + \hat{D}_j + \cdots + D_k$. Dado que la suma es irredundante vemos que $H_j < H$. También se cumple $D_j + H_j = H$ $\therefore$ $H_j \cap D_j < D_j$ $\therefore$ $H_j \cap D_j \leq_s D_j$ pues $D_j$ es hueco $\forall i$, $\therefore$ $H_j \cap D_j \leq_s H$.

Por otra parte es claro que $D_j \leq H_i$ para cualquier $i \neq j$ $\therefore$ $H_j \cap D_j \leq \bigcap_{i=1}^{k} H_i$ $\therefore$ $\sum_{j=1}^{k} (H_j \cap D_j) \leq \bigcap_{i=1}^{k} H_i$. Tambien $\forall y \in H$ existen $d_1, \ldots, d_k$ tales que $d_i \in D_i$ y $y = d_1 + \cdots + d_k$. Supongamos que $y \in \bigcap_{i=1}^{k} H_i$ $\therefore$ $y \in H_j$ $\forall j$ $(1 \leq j \leq k)$ $\therefore$ existen $\delta_1, \ldots, \delta_k$ tales que $y = \delta_1 + \cdots + \delta_k$ con $\delta_r \in D_r$ y $1 \leq r \neq j \leq k$ $\therefore$ $y = d_1 + \cdots + d_j + \cdots + d_k = \delta_1 + \cdots + \delta_{j-1} + \delta_{j+1} + \cdots + \delta_k$, es decir $d_j = \sum_{i \in \Delta_k^j} \bar{d}_i$ donde $d_i - \delta_i = \bar{d}_i \in D_i \leq H_j$ (pues $i \neq j$) $\therefore$ $d_j \in H_j$ $\therefore$ $d_j \in D_j \cap H_j$ para toda $j$, y por tanto $y \in \sum_{j=1}^{k} (D_j \cap H_j)$ $\therefore$ $\bigcap_{i=1}^{k} H_i \leq \sum_{j=1}^{k} (D_j \cap H_j)$ $\therefore$ $\bigcap_{i=1}^{k} H_i = \sum_{j=1}^{k} (D_j \cap H_j)$ $\therefore$ $\bigcap_{i=1}^{k} H_i \leq_s H$ (pues $\bigcap_{i=1}^{k} H_i$ es una suma de submódulos superfluos en $H$).

Ahora bien, sabemos que $D_i \leq \bigcap_{j \in \Delta_k^i} H_j$ y en consecuencia tenemos

$H_0 + \bigcap_{i\in\Delta_k^i} H_i = H$ para $1\le i\le k$. Por tanto, el lema 3.15 implica que

$$\varphi = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k) : H \longrightarrow \prod_{i=1}^{k} H/H_i \quad \text{es un epimorfismo}$$

(donde $\eta_i : H \to H/H_i$ es el epimorfismo canónico).

Recordemos que $H = D_i + H_i$ y $H_i < H$ $\therefore$ $0 \neq H/H_i \cong D_i/D_i\cap H_i$ y por tanto $\forall i$ $(1\le i\le k)$ $H/H_i \neq 0$ es hueco (pues $D_i/D_i\cap H_i$ es hueco por el lema 1.19) y puesto que $\ker\varphi = \bigcap_{i=1}^{k} H_i$ es superfluo en $H$, el teorema 3.32 (2) implica que $k = r = \operatorname{rang} H$.

<u>Corolario 3.46</u>. Sea $H \neq 0$ un módulo con la propiedad $(P_2)$. Si $\operatorname{corang} H = r$, entonces

a) Existen $H_1, H_2, \ldots, H_r$ submódulos huecos de $H$ tales que $H = \sum_{i=1}^{r} H_i$ es una suma irredundante.

b) Si $H_1, \ldots, H_\ell$ son submódulos huecos de $H$ tales que $H = \sum_{i=1}^{\ell} H_i$ es una suma irredundante, entonces $\ell = r$.

<u>Demostración</u>: a) es clara consecuencia del teorema 3.45 (1).

b) Por la <u>observación</u> 3.43 (b), si $H = \sum_{i=1}^{\ell} H_i$ es una suma irredundante y cada $H_i$ es hueco, entonces cada $H_i \in S(H)$ $\therefore$ $H_i$ es un suplemento mínimo en $H$ para cada $i$, $(1\le i\le \ell)$ y por tanto el teorema 3.45 (2) implica que $\ell = r$.

## IV. Comparación entre el corango y la dimensión de Fleury.

Como comentamos en la introducción, en [5] Patrick Fleury, intentando dualizar la noción de rango finito, introduce el concepto de "finite spanning dimension" (que nosotros llamaremos dimensión de Fleury finita) y muestra que los módulos con dimensión de Fleury finita pueden expresarse como una suma irredundante de un número finito de submódulos huecos y que el número de submódulos que ocurren en cualquier expresión de $M$ como una suma irredundante de submódulos huecos de $M$ es un invariante de $M$ (Teorema 3.1 de [5]). El se refiere a este número como la "Spanning dimension" de $M$ y lo abrevia $S.d(M)$. También prueba que cualquier módulo con dimensión de Fleury finita tiene la propiedad $(P_2)$ (Lema 2.3 de [5]). En esta sección daremos un ejemplo de un módulo de corango finito que no tiene la propiedad $(P_2)$, es decir que no es de dimensión de Fleury finita. Sin embargo mostraremos que si un módulo $M$ tiene dimensión de Fleury finita entonces

$$\operatorname{corang} M = S.d(M).$$

Definición 4.1. (Fleury). Un módulo $M$ tiene dimensión de Fleury finita si para toda sucesión estrictamente decreciente $H_1 > H_2 > H_3 > \cdots$ de submódulos de $M$, existe un entero $i$ tal que $H_j \leq_s M \quad \forall\, j \geq i$. Escribiremos $S.d(M) < \infty$ para indicar que $M$ tiene dimensión de Fleury finita.

<u>Observación 4.4.</u> Sea $M$ un módulo distinto de cero con la propiedad $(P_2)$ y corang $M = k$.

Recordemos que el corolario 3.46 afirma lo siguiente:

a) Existen $H_1, H_2, \ldots, H_k$ submódulos huecos de $M$ tales que $M = \sum_{i=1}^{k} H_i$ es una suma irredundante.

b) Si $H_1, H_2, \ldots, H_\ell$ son submódulos huecos de $M$ tales que $M = \sum_{i=1}^{\ell} H_i$ es una suma irredundante, entonces $\ell = k$.

En otras palabras, el corolario 3.46 asevera que $M$ es una suma irredundante de $k$ submódulos huecos y que cualquier expresión de $M$ como una suma irredundante de submódulos huecos, necesariamente tiene exactamente $k$ sumandos. Osea que el corolario 3.46 es el equivalente exacto del teorema 3.1 de [5], pero su rango de validez es la familia de módulos con la propiedad $(P_2)$ y corango finito. Una conjetura de K. Varadajan (Observación 4.8(1) de [6]) es que esta clase de módulos contiene estrictamente, a la clase de módulos de dimensión de Fleury finita (La contención la garantizan el lema 2.3 de [5] y el teorema 4.3).

A continuación daremos algunos preliminares que nos ayudarán a mostrar que para cada $2\leq k\in\mathbb{N}$, existe un módulo de corango $k$, que no tiene la propiedad $(P_2)$.

**4.5.** Sea $\{D,\bar{D}\}$ una partición de los números naturales primos tal que $2\leq |D|<\infty$.

Si $n,\bar{n}\in\mathbb{Z}$ son tales que $(n,p)=(\bar{n},p)=1$ $\forall\, p\in D$ entonces $(n\bar{n},p)=1$ $\forall\, p\in D$, por lo cual

$$L=:\{\tfrac{m}{n}\in\mathbb{Q} : (n,p)=1\ \forall\, p\in D\}\ \text{es un subanillo de}\ \mathbb{Q}.$$

Definimos para cada $p\in\bar{D}$, $H_p=\{\frac{m}{p^i}\in\mathbb{Q} : m,i\in\mathbb{Z}$ con $i\geq 0\}$. Es claro que $H_p$ es un subgrupo de $\mathbb{Q}$ y que $H_p\leq L$ para cada $p\in\bar{D}$. Por tanto $\sum_{p\in\bar{D}} H_p\leq L$. Por otra parte, se puede ver que si $n=q_1^{\alpha_1}\cdots q_r^{\alpha_r}$ es la descomposición de $n$ en números primos entonces $\frac{1}{n}=\frac{\rho_1}{q_1^{\alpha_1}}+\cdots+\frac{\rho_r}{q_r^{\alpha_r}}$ para algunos $\rho_i\in\mathbb{Z}$; en consecuencia

si $x\in L$, $x=\frac{m}{n}$ con $(n,p)=1$ $\forall\, p\in D$ y donde $n=q_1^{\alpha_1}\cdots q_r^{\alpha_r}$, tenemos que $x=\frac{m}{n}=\frac{a_1}{q_1^{\alpha_1}}+\cdots+\frac{a_r}{q_r^{\alpha_r}}$ y $q_i\notin D$, por tanto $x\in\sum_{p\in\bar{D}}H_p$ $\therefore$

$L\leq\sum_{p\in\bar{D}}H_p$ $\therefore$ $L=\sum_{p\in\bar{D}}H_p$. y en consecuencia:

$$L/\mathbb{Z}=\Big(\sum_{p\in\bar{D}}H_p\Big)/\mathbb{Z}=\sum_{p\in\bar{D}}H_p/\mathbb{Z}=\bigoplus_{p\in\bar{D}}\mathbb{Z}_{p^\infty}\quad \text{pues } H_p/\mathbb{Z}=\mathbb{Z}_{p^\infty}$$

$$\therefore\ \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\big/L/\mathbb{Z}=\Big(\bigoplus_{p\in D\cup\bar{D}}\mathbb{Z}_{p^\infty}\Big)\Big/\Big(\bigoplus_{p\in\bar{D}}\mathbb{Z}_{p^\infty}\Big)\cong\bigoplus_{p\in D}\mathbb{Z}_{p^\infty}\quad\therefore$$

**4.6** $\quad\mathbb{Q}/L\cong\bigoplus_{p\in D}\mathbb{Z}_{p^\infty}$ en $\mathbb{Z}$-mod.

<u>4.7.</u> $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ es un L-módulo $\forall\, p \in D$.

En efecto, sean $\frac{m}{n} \in L$ y $g \in \mathbb{Z}_{p^\infty}$. Siendo $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ divisible, existe $g' \in \mathbb{Z}_{p^\infty}$ tal que $mg = ng'$. $g'$ es único pues si $g''$ es tal que $mg = ng''$ tenemos que $n(g'-g'')=0$, pero $(n,p)=1$ y por lo tanto $g'-g''=0$ ya que $\forall\, x \neq 0 \in \mathbb{Z}_{p^\infty}$, $o(x) = p^k$ (p.a $k \in \mathbb{N}$).

Definimos $\frac{m}{n} \cdot g = g'$. Verificar que $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ es L-módulo con este producto es de rutina.

<u>4.8.</u> $$Q/L \cong \bigoplus_{p \in D} \mathbb{Z}_{p^\infty} \quad \text{en L-mod}.$$

<u>Demostración</u>: Esto es consecuencia de 4.6, 4.7 y de la siguiente observación: $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A,B) \subseteq \mathrm{Hom}_L(A,B)$. En efecto: si $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A,B)$, $a \in A$ y $\frac{m}{n} = \ell \in L$ tenemos que:

$$\varphi(a) = \varphi(\tfrac{n}{n} \cdot a) = \varphi(n(\tfrac{1}{n} \cdot a)) = n\varphi(\tfrac{1}{n} \cdot a) \quad \therefore$$

$\frac{1}{n} * \varphi(a) = \frac{1}{n} * (n\varphi(\frac{1}{n} \cdot a)) = \frac{n}{n} * \varphi(\frac{1}{n} \cdot a) = 1 * \varphi(\frac{1}{n} \cdot a) = \varphi(\frac{1}{n} \cdot a)$, es decir $\frac{1}{n} * \varphi(a) = \varphi(\frac{1}{n} \cdot a)$ de lo cual se sigue que $\varphi(\frac{m}{n} \cdot a) = \frac{m}{n} * \varphi(a)$ $\therefore$ $\forall\, a \in A$, $\forall\, \ell \in L$, $\varphi(\ell \cdot a) = \ell * \varphi(a)$. En particular si $H \cong K$ en $\mathbb{Z}$-mod y $H, K \in$ L-mod entonces $H \cong K$ en L-mod.

<u>4.9</u> $$\mathrm{Corang}\, Q \geq |D| \quad \text{en L-mod}.$$

Es consecuencia de 4.8.

Antes de continuar recordemos que si $H \overset{\varphi}{\cong} K$ entonces $H/H' \cong K/\varphi(H')$.

<u>4.10.</u> Sea $0 \neq A$ cualquier L-submódulo de Q. $\therefore \exists\, 0 \neq \alpha \in A$ $\therefore L\alpha \leq A$ $\therefore \alpha L \leq A$. Sea $\varphi : Q \to Q$ tal que $\varphi(q) = \alpha q$

$\varphi$ es un isomorfismo de grupos abelianos, por lo cual $Q/L \cong Q/\alpha L$ en $\mathbb{Z}$-mod $\therefore$ $Q/\alpha L \cong Q/L$ en L-mod $\therefore$ $Q/\alpha L \cong \bigoplus_{p\in D} \mathbb{Z}_{p^\infty}$ en L-mod (por 4.8) y como $Q/A \cong Q/\alpha L / A/\alpha L$ tenemos que $Q/A$ es un cociente de $\bigoplus_{p\in D} \mathbb{Z}_{p^\infty}$ en L-mod.

Por otra parte, consideremos el siguiente diagrama en L-mod.

$$\begin{tikzcd}
\prod_{p\in D} \mathbb{Z}_{p^\infty} \arrow[r, "h"] & H \\
\mathbb{Z}_{p^\infty} \arrow[u, "u_p"] \arrow[ur, "h_p"'] &
\end{tikzcd}$$

Supongamos que $h$ es un epimorfismo y que $u_p : \mathbb{Z}_{p^\infty} \longrightarrow \bigoplus_{p\in D} \mathbb{Z}_{p^\infty}$ es la inclusión canónica. Sea $h_p = h \circ u_p$. Entonces $H = \sum_{p\in D} \operatorname{Im} h_p$, pero $\operatorname{Im} h_p \cong \mathbb{Z}_{p^\infty}/\ker h_p$ $\therefore$ $\operatorname{Im} h_p \cong \mathbb{Z}_{p^\infty}$ ó $\operatorname{Im} h_p = 0$

En todo caso $\operatorname{Im} h_p \leq t_p(H)$ $\therefore$ $\{\operatorname{Im} h_p\}_{p\in D}$ es una familia independiente $\therefore$ $H = \bigoplus_{p\in D} \operatorname{Im} h_p$ $\therefore$ $H \cong \prod_{p\in D} \operatorname{Im} h_p \cong \prod_{p\in D} A_p$ donde $A_p = 0$ ó $A_p = \mathbb{Z}_{p^\infty}$.

En particular $Q/A \cong \prod_{p\in D} A_p$ con $A_p = \mathbb{Z}_{p^\infty}$ ó $A_p = 0$ y por tanto $\operatorname{Corang} Q \leq |D|$ en L-mod, esto y 4.9 tiene como consecuencia:

<u>4.11</u> $\operatorname{Corang} Q = |D|$ en L-mod.

<u>4.12</u> Para terminar, demostraremos que en L-mod $Q$ no tiene la propiedad (P2)

Para esto, sean $r, q$ primos fijos de $D$. Definimos: $H_r = \{\frac{m}{n} \in Q : (n,r) = 1\}$ y $H_q = \{\frac{m}{n} \in Q : (n,q) = 1\}$. Sean $x \in H_r$ y $l \in L$ $\therefore$ $x = \frac{m_1}{n_1}$ con $(n_1, r) = 1$ y $l = \frac{m_2}{n_2}$ con $(n_2, p) = 1$ $\forall p \in D$, en particular $(n_2, r) = 1$ $\therefore$ $(n_2 n_1, r) = 1$ $\therefore$ $lx \in H_r$ $\therefore$ $H_r$ es un L-módulo. Análogamente se ve que $H_q$ es un L-módulo. Se afirma que $H_r + H_q = Q$. Demostración: Sea $\frac{m}{n} \in Q$. Si $(n,r) = 1$ ó $(n,q) = 1$ es claro que $\frac{m}{n} \in H_r + H_q$. En el caso de que $r | n$ y $q | n$

existen $\mu, \alpha, \beta \in \mathbb{N}$ tales que $n = r^{\alpha} q^{\beta} \mu$ con $(q^{\beta}\mu, r^{\alpha}) = 1$ $\therefore$ $\exists\, a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$ tales que $1 = a_1 q^{\beta}\mu + a_2 r^{\alpha}$ $\therefore$ $m = a_1' q^{\beta}\mu + a_2' r^{\alpha}$ para algunos $a_i' \in \mathbb{Z}$ $\therefore$ $\frac{m}{n} = \frac{a_1'}{r^{\alpha}} + \frac{a_2'}{q^{\beta}\mu}$ $\therefore$ $\frac{m}{n} \in N_q + N_r$ $\therefore$ $Q \leq N_r + N_q$ $\therefore$ $Q = N_r + N_q$ .

Supongamos que $N_r$ tiene un suplemento $H$ en $Q$, (considerados como L-módulos), con $H \leq N_q$, entonces $H + N_r = Q$ y por tanto $H \neq 0$. Sea $0 \neq h \in H \leq N_q$ $\therefore$ $h = \frac{m}{n}$ con $(n,q) = 1$ $\therefore$ existe $m = nh \in H \cap \mathbb{Z}$ y $m \neq 0$. Esto nos da pie para demostrar que $qH < H$.

Pues si suponemos que $qH = H$, existe $h' \in H$ (con $h' = \frac{m'}{n'}$ y $(n', q) = 1$) tal que $m = qh' = q\frac{m'}{n'}$ $\therefore$ $qm' = mn'$ $\therefore$ $q/m$ $\therefore$ existen $\alpha \in \mathbb{N}$, $\mu \in \mathbb{Z}$ tales que $(q, \mu) = 1$ y $m = q^{\alpha}\mu$ $\therefore$ $\frac{m}{\mu} = q^{\alpha} \in H$ $\therefore$ $q^{\alpha} = qh_2$ p.a $h_2 \in H$ $\therefore$ $q^{\alpha-1} = h_2$ (pues $Q$ es dominio entero), procediendo de manera análoga se obtiene que $q \in H$ $\therefore$ $q = qh^*$ p.a $h^* \in H$ $\therefore$ $h^* = 1 \in H$ $\therefore$ existe $h_0 \in H$, $h_0 = \frac{m_0}{n_0}$ con $(n_0, q) = 1$ tal que $1 = qh_0$ $\therefore$ $1 = q\frac{m_0}{n_0}$ $\therefore$ $n_0 = qm_0$ $\therefore$ $q/n_0$ ↯. Por tanto debe tenerse que $qH < H$.

De la relación: $Q = H + N_r$ tenemos que si $y \in Q$, existen $h \in H$ y $x \in N_r$ tales que $y/q = h + x$ y por tanto $y = qh + qx$, es decir $Q \leq qH + N_r$ $\therefore$ $Q = qH + N_r$. Es fácil verificar que $qH$ es un L-módulo por lo cual en L-mod $Q = qH + N_r$ con $qH < H$. Esto contradice el que $H$ es un suplemento de $N_r$, en consecuencia $N_r$ no tiene un suplemento $H$, con $H \leq N_q$; es decir $Q$ como L-módulo no tiene la propiedad $(P_2)$.

## Bibliografía.


[1] Goodearl K. R. "Ring Theory: Nonsingular Rings and Modules", Marcel Dekker, New York (1976).

[2] Kaplansky I. "Infinite Abelian Groups", University of Michigan Press, Ann Arbor, Michigan (1956).

[3] Atiyah M. F. y Mac Donald I. G. "Introducción al Algebra Conmutativa", Reverté, Barcelona (1973).

[4] Anderson F. W. y Fuller K. R. "Rings and Categories of Modules", Springer Verlag, New York (1974).

[5] Fleury P. "A note on dualizing Goldie dimension", Canadian Math. Bull. (1974) pp 379-385.

[6] Varadajan K. "Dual Goldie dimension", Communications in Algebra, 7(6), Marcel Dekker, New York (1979) pp 379-385.


## Lecturas complementarias.


(1) Cárdenas H. y Lluis E. "Módulos semisimples y Representación de Grupos Finitos", Trillas, México (1970).

(2) Gentile E. R. "Estructuras Algebraicas II", monografía No 12, Serie de Matemática, OEA, Washington D.C. (1979)