



881201
4
26

**ESCUELA DE ACTUARIA
DE LA
UNIVERSIDAD ANAHUAC**

CON ESTUDIOS INCORPORADOS A LA UNAM

**TITULO: " LA DISTRIBUCION WEIBULL EN UNA PRUEBA
SECUENCIAL "**

TESIS QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

ACTUARIO

PRESENTA EL ALUMNO:

ROBERTO FERRO AGUIRRE

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

MEXICO, D.F., 1991



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

" LA DISTRIBUCION WEIBULL EN UNA PRUEBA SECUENCIAL"

INDICE

DEDICATORIA	i
INDICE	1
INTRODUCCION	4
CAPITULO 1	
1.1 Introducción	6
1.2 La Función de Pérdida	8
1.2.1 El Riesgo	8
1.2.1.1 La Decisión de Bayes	9
1.2.1.2 Ejemplo	9
1.2.2 El Riesgo con n Muestras	10
1.2.2.1 Ejemplo	12
1.2.3 Distribuciones a Priori y a Posteriori	15
1.2.3.1 Familias Conjugadas	16
1.2.4 Elección de las Distribuciones a Priori y a Posteriori	18
1.2.4.1 Ejemplo	18
1.2.5 Costo Bayesiano	19

CAPITULO 2

2.1 La Teoría de la Contabilidad	21
2.2 Proceso de Fallas	21
2.3 Proceso Exponencial de Fallas	23
2.4 Proceso Weibull de Fallas	24
2.5 Confiabilidad de un Sistema de n Componentes	24
2.6 Un Ejemplo de Aplicación de la Distribución Weibull	25

CAPITULO 3

3.1 Introducción	28
3.2 La Descompostura de un Sistema	28
3.3 La Familia Conjugada a la Densidad Weibull	30
3.3.1 Densidad a Priori y a Posteriori	31
3.4 El Riesgo Mínimo	32
3.4.1 Obtención de la Decisión Óptima	33
3.4.1.1 Justificación Intuitiva de la Pérdida Cuadrática	33
3.4.1.2 La Decisión Óptima	34
3.4.1.3 El Riesgo	36
3.5 La Prueba Secuencial	38
3.5.1 La Prueba después de k Ensayos	39
3.5.2 La Prueba Condicional de k Ensayos después de n Ensayos Anteriores	39

CAPITULO 4

4.1	Introducción	40
4.2	Comparación del Costo contra Riesgo	40
4.2.1	La Prueba Secuencial	46
4.3	El Desarrollo de la Prueba Secuencial	46
4.3.1	Ejemplos	46
4.4	La Prueba Secuencial con el Conocimiento de la Probabilidad de Parar en n Ensayos	52
4.4.1	Ejemplos	53
4.5	El Uso del Método Montecarlo en la Prueba Secuencial	60
4.5.1	Ejemplos	62
4.6	Conclusiones	63
	BIBLIOGRAFIA	66

A mi padre, en su memoria.

**A mi madre, como
muestra de gratitud a su
esfuerzo, amor y
apoyo siempre brindado.**

INTRODUCCION

INTRODUCCION

Este trabajo tiene como finalidad desarrollar un modelo de costo-beneficio para ayudar a determinar si es conveniente o no el mantenimiento o reparación de máquinas con componentes similares que tienen fallas independientes .

El modelo propuesto se diseña utilizando como herramienta básica la Teoría de Decisiones, que nos da la oportunidad de elegir, en un marco de posibles opciones a tomar, la más adecuada, por ejemplo, la de mayores ganancias o menores pérdidas. Esa Teoría se basa en la Probabilidad y en la Estadística; con lo cual, y en base al conocimiento de una función de densidad que simule al experimento, podemos inferir la posible decisión y el riesgo. Este último no puede ser concebido de la misma manera para casos diferentes que se evalúan con esa Teoría. Es necesario, por lo tanto, conocer el problema y establecer, en primera instancia, de dónde se quiere seleccionar la solución y en base a cuál criterio. Es decir, algunas veces se determinará la decisión óptima en base al costo, otras será considerando las modificaciones por la penetración de mercado o con la influencia de algún otro factor. Lo importante es establecer la guía que permita distinguir con claridad cuándo una decisión es mejor que otra en un caso particular.

En el caso que se presenta, el riesgo es evaluado en función de

las fallas que pueden producirse en los componentes de determinada máquina. El tiempo de espera para las fallas tienen una distribución probabilística que permite prever en forma general un proceso de descomposturas.

Esa distribución, conocida con el nombre de Weibull, ayuda a elaborar un procedimiento alternativo sobre la conveniencia de componer estas máquinas o no hacerlo a partir de un análisis de costo-beneficio. Este método requiere el muestreo de una o varias máquinas. O sea, es posible hacer pruebas que permitan evaluar un lote de maquinaria sabiendo que existe un costo asociado a cada prueba.

Por último, en la prueba que se diseña incluimos un modelo para determinar con qué probabilidad se tiene la "decisión óptima" después de "n" ensayos, a partir del análisis de dos diferentes formas: por una parte con la aplicación del uso directo de la distribución y por otra por el Método de Moncarlo.

CAPITULO I

1.1 Introducción

La Teoría de Decisiones es una herramienta que proporciona las guías generales para tomar una decisión. El estadístico, con esta teoría, debe tener una visión general del problema y buscar las normas para satisfacer que una decisión sea razonable.

Para ello, debe conocer las características para que un proceso de decisión sea satisfactorio y además encontrar el tipo de medidas adecuado para la toma de una decisión.

Dado este esquema general, lo primero que debe hacer el estadístico es saber cuáles son las posibles alternativas de decisión, la lista de posibles decisiones d_1, \dots, d_n . Este conjunto de alternativas debe cubrir todas las posibilidades de decisión y la elección de una de ellas debe excluir a las demás. Es por ello que se dice que el conjunto D de las posibles decisiones debe ser exclusivo y exhaustivo.

La dificultad de la selección de la mejor elección es generalmente debido a la incertidumbre, a no saber la consecuencia con precisión si se toma alguna decisión.

Por tanto, los problemas que abarca la Teoría de Decisiones se resumen de la siguiente forma: se considera un conjunto Ω de sucesos inciertos o experimentos. Se debe tomar alguna decisión con respecto a estos sucesos. Se requiere de un conjunto R de posibles ganancias que se pueden tener al tomar alguna decisión d en el conjunto o espacios de posibles decisiones D .

La Teoría de Decisiones permite hacer un análisis cuantitativo de la ganancia de tomar alguna decisión en particular. Así, para cada decisión de que se tome existe una ganancia p asociada en un conjunto o espacio R de posibles ganancias. Esta ganancia p es función de la decisión y del resultado del suceso y debe cumplir con las siguientes condiciones:

1. Si p_1 y p_2 son resultados de la función de ganancia p , se tienen tres opciones:

a) p_1 es preferible a p_2 .

b) p_2 es preferible a p_1 .

c) p_1 es semejante a p_2 .

entendiendo por semejante que el resultado de la ganancia p_1 es indiferente a la de p_2 .

2. Si p_1, p_2, p_3 son resultados de la función de ganancia p en R donde p_1 es preferible a p_2 y p_2 es preferible a p_3 , entonces p_1 es preferible a p_3 .

En resumen, de la posible lista de decisiones d_1, \dots, d_n en D y de los sucesos inciertos o experimentos w_1, \dots, w_k en Ω , el problema es elegir un único elemento d^* de la primera sin conocer el resultado experimental de la segunda.

1.2 La Función de Pérdida

Al analizar las consecuencias de tomar la decisión d_i ($i=1,2,\dots$) se introduce una función de utilidad $U[p(d_i,w)]$ que expresa la recompensa al hacer bien la elección. Similarmente, se puede introducir una función de pérdida que exprese la gravedad del error al tomar la decisión d , y por ello esta función puede ser representada como menos la función de utilidad:

$$L(w,d) = -U[p(w,d)]$$

en donde $L(w,d)$ representa la pérdida cuando el valor del parámetro Ω es w y la decisión es d .

1.2.1 El Riesgo.

El Riesgo se define como el valor esperado de la pérdida al tomar la decisión d y el resultado experimental w :

$$R_d = E(L(w,d)) = \int_w L(w,d) p(w) dw$$

la mejor decisión será aquella que minimice el riesgo, es decir:

$$R_d = \inf_d R_d(w)$$

1.2.1.1 La Decisión de Bayes.

Esta selección del riesgo es conocida como la decisión de Bayes, así, el Riesgo de Bayes representa al más grande límite inferior para los riesgos $R(w,d)$ en todas las decisiones d en D posibles.

1.2.1.2 Ejemplo.

Se puede ejemplificar el riesgo bayesiano con un caso discreto:

Si se parte que el espacio de parámetros Ω es $\{w_1, w_2\}$ y que $D=\{d_1, d_2\}$ y además se considera la pérdida como :

L:

	d_1	d_2
w_1	0	5
w_2	10	0

donde $p(w=w_1)=\beta$ y $p(w=w_2)=1-\beta$

en donde β es un parámetro conocido

por tanto el riesgo para d_1 estaría representado por

$$R_w(d_1) = E[L(w,d_1)] = 10(1-\beta)$$

similarmente para d_2 :

$$R_w(d_2) = 5\beta$$

en el caso de $\beta=1/4$, $R(d_1)= 15/2$ y $R(d_2)= 5/4$, la decisión bayesiana en este ejemplo es d_2 .

1.2.2 El Riesgo con n muestras

En todo problema de incertidumbre, como son los tratados por la Teoría de Decisiones, el decisor tiene la posibilidad de obtener información que le ayude a disminuir la incertidumbre. Si el espacio o conjunto de donde se obtiene la información es X , las probabilidades iniciales $p(w_1)$, $p(w_2)$, .. $p(w_n)$, por el efecto de la información adicional se ven modificadas en $p(w_1|x)$, $p(w_2|x)$, .. $p(w_n|x)$.

El espacio del suceso incierto o parámetro llega a depender de la información obtenida:

$$\Omega \text{ -----} \Omega \times X \quad ; \quad X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$$

El problema de decisión involucra ahora a un conjunto de densidades $\{f(x|w), w \in \Omega\}$, un espacio X asociado al parámetro, un espacio de decisiones D y una función de pérdida L .

El estadístico se aboca a encontrar una decisión en base a estos espacios, para buscar la decisión, ahora dependiente de X , que se puede denotar como $d(x)$.

Es obvio que vale la pena disponer de más información a fin de eliminar la incertidumbre, pero normalmente afecta nuestras opiniones del suceso pero se mantiene la incertidumbre, tal vez en menor grado. El espacio X debe estar relacionado con los sucesos inciertos w y se suponen conocidas las probabilidades $p(x|w_j)$.

El estadístico dispone así de nuevas probabilidades y su objetivo debe ser minimizar la pérdida esperada, con estas nuevas probabilidades.

Aunque la información es incompleta, es decir, no elimina la incertidumbre, el valor esperado de esta información es no negativa, por tanto es bueno obtenerla. Lo más que puede pasar es que la información después de obtenidos los datos de X no proporcionen nada adicional y la decisión óptima siga siendo la misma. Sin embargo, lo más natural es pensar que cada prueba que se hace para obtener información tenga un costo asociado. Si la utilidad de la información es mayor que su costo se debe continuar con el muestreo, si no, se debe parar. En general, el valor esperado de la información parcial que es proporcionada al hacer una muestra más, es marginalmente decreciente, y, por tanto, llegará el momento en que el costo adicional será mayor que la utilidad que la nueva información proporcione.

El riesgo depende ahora de la muestra:

$$R = \int_w \int_x L(w, d(x)) f(w, x) dx dw + C(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

es decir, este procedimiento debe establecer la elección de

una observación más siempre y cuando se minimice el riesgo.

1.2.2.1 Ejemplo

Ejemplifiquemos el caso discreto:

Sea $\Omega = \{w_1, w_2\}$, $D = \{d_1, d_2\}$, Π distribución a priori de w ,

L:

	d_1	d_2
w_1	0	5
w_2	5	0

donde $p(x=1|w_1)=1/2$, $p(x=2|w_2)=1/4$

$\Pi(w_1)=\beta$; $X=\{0,1\}$

sin muestra, para la decisión d_1 :

$$\begin{aligned}R(d_1) &= E[L(w), d_1] = L(w_1, d_1)\Pi(w_1) + L(w_2, d_1)\Pi(w_2) \\ &= 0\beta + 5(1-\beta)\end{aligned}$$

$R(d_1) = 5(1-\beta)$; similarmente para d_2 : $R(d_2) = 5\beta$

d^* , la decisión óptima es d_1 si y sólo si $R(d_1) \geq R(d_2)$

$$\Leftrightarrow 5(1-\beta) \geq 5\beta; \beta \leq 1/2$$

Así,

$$R_0 = \begin{cases} 5\beta & \text{si } \beta \leq 1/2 \\ 5(1-\beta) & \text{si } \beta \geq 1/2 \end{cases}$$

en el caso de muestra de tamaño 1:

ahora β pasa a ser $\beta(x)$ donde

$$\beta(x) = p(w=w1|x) = \frac{p(x|w=w1)p(w=w1)}{p(x|w=w1)p(w=w1) + p(x|w=w2)p(w=w2)} \geq 1/2$$

Como ya se sabe, d_1 es óptimo si $\beta(x) \geq 1/2$. Si $x=1$, d_1 es óptimo si:

$$p(w=w1|x) = \frac{1/2\beta}{1/2\beta + 1/4(1-\beta)} \geq 1/2$$

$$4\beta \geq 1/2\beta + 1/4(1-\beta) \quad ; \quad \beta \geq 1/3$$

Similarmente para $x=0$, d_1 es óptimo si:

$$\beta \geq 3/5$$

Con estos resultados es posible observar que, no importando el valor de x , la decisión óptima será para $\beta \leq 1/3$ d_2 , y para $\beta \geq 3/5$ d_1 .

Para valores entre $1/3 \leq \beta \leq 3/5$, se evalúa la función de riesgo, suponiendo un costo por observación de $c=0.5$:

$$R = \{0(1/2)+5(1/2)\}\beta + \{5(1/4)+0\}(1-\beta) + 0.5$$

$$R = 5/4\beta + 7/4$$

comparando en el intervalo $1/3 \leq \beta \leq 3/5$ se tiene que:

$$R = \begin{cases} 5\beta & \beta < 1/3 \\ \min(5\beta, 5/4\beta + 7/4) & 1/3 < \beta < 1/2 \\ \min(5(1-\beta), 5/4\beta + 7/4) & 1/2 \leq \beta < 3/5 \\ 5(1-\beta) & \beta \geq 3/5 \end{cases}$$

por tanto,

$$R = \begin{cases} 5\beta & \beta \leq 7/15 \\ 5/4\beta + 7/4 & 7/15 < \beta < 13/25 \\ 5(1-\beta) & \beta \geq 13/25 \end{cases}$$

1.2.3 Distribuciones a Priori y a Posteriori

Como ya se ha visto, es muy difícil eliminar la incertidumbre en un evento probabilístico, pero existen soluciones parciales obteniendo información relevante y se sabrá más de la situación real que en un principio.

Para un problema de toma de decisiones, el estadístico cuenta con un conjunto de probabilidades $p(w_1), \dots, p(w_n)$ que expresan su incertidumbre y a la vez cuál es su creencia del comportamiento de determinado evento. Esta distribución inicial es conocida como distribución a priori. El efecto de la información adicional es el de modificar, revisar estas probabilidades y así se tendrán valores más precisos de las probabilidades. Si X representa la información, los valores de las probabilidades son $p(w_1|x), \dots, p(w_n|x)$ y la distribución es conocida con el nombre de distribución a posteriori.

Es obvio que existe una relación entre las probabilidades $p(w_i)$ y $p(w_i|x)$ y se obtiene a través del **Teorema de Bayes**. Este teorema es el resultado de la aplicación de las leyes de probabilidad condicional:

$$p(w_i|x) \propto p(x|w_i)p(w_i)$$

$$\text{dado que: } p(w_i|x) = \frac{p(x|w_i)p(w_i)}{p(x)} = \frac{p(x|w_i)p(w_i)}{p(x)}$$

$\Rightarrow p(w_j|x) \propto p(x|w_j)p(w_j)$ para valores fijos de x .

a la probabilidad $p(x|w_j)$ se le conoce como de verosimilitud y encadena a las distribuciones a priori y a posteriori. El teorema se expresa de la siguiente forma:

TEOREMA: Si w_1, w_2, \dots, w_n son sucesos inciertos exhaustivos y exclusivos y X denota ciertos datos cuya probabilidad $p(x)$ no es cero, entonces la probabilidad de w_j , después de haberse observado X , es proporcional al producto de la verosimilitud de w_j y la distribución a priori de w_j .

El Teorema de Bayes expresa los cambios de opinión por la información. Es por ello recomendable el uso de una distribución a priori adecuada y no utilizar probabilidades nulas a sucesos inciertos, puesto que la probabilidad final siempre será nula a pesar de los datos.

1.2.3.1 Familias Conjugadas

En Teoría de Decisiones, se facilita el análisis de los experimentos si la distribución a posteriori de Ω (después de haber obtenido información de una muestra de orden n) pertenece a la misma familia de densidades de la a priori. Una familia de distribuciones con esta propiedad es llamada **conjugada**.

Si se puede sumarizar la información proporcionada por las observaciones en una estadística, llamada **suficiente**, se tiene la

posibilidad de encontrar una familia conjugada asociada al experimento.

La estadística suficiente T para la familia de densidades $\{f(\cdot|w), w \in \Omega\}$ debe cumplir que para cualquier distribución a priori f y cualesquiera dos puntos x_1, x_2 tales que $T(x_1) = T(x_2)$ se tiene que $f(x_1) = f(x_2)$.

El teorema que permite identificar a la estadística suficiente de una familia de densidades es el siguiente:

TEOREMA Una estadística T es suficiente para una familia de densidades $\{f(\cdot|w), w \in \Omega\}$ si y sólo si puede ser factorizado como sigue para todos los valores $x \in X, w \in \Omega$:

$$f(x|w) = u(x)v\{T(x), w\}$$

la función u es positiva y no depende de w y la función v es no negativa y depende de x sólo a través de $T(x)$.

Un caso particular es el de la familia exponencial. Si se puede expresar a una función de densidad de la muestra como:

$$f(x|w) = a(w)b(x)\exp\left\{\sum_1^k g_i(w) h_i(x)\right\}$$

se dice que las distribuciones del parámetro forman una familia exponencial.

De la densidad conjunta x_1, x_2, \dots, x_n

$$f(\mathbf{x}|\mathbf{w}) = \prod_1^n f(x_i|\mathbf{w})$$

se puede encontrar una estadística suficiente que nos conduce a la familia conjugada, relacionada a la exponencial.

1.2.4 Elección de las Distribuciones a Priori y a Posteriori

Un problema que tiene que atacar el estadístico es la elección de una distribución a priori adecuada.

Se sabe que la distribución a posteriori es proporcional al producto de las distribuciones a priori y de verosimilitud de la muestra:

$$\Pi(\mathbf{w}|\mathbf{x}) \propto \Pi(\mathbf{w})f(\mathbf{x}|\mathbf{w})$$

lo más recomendable es la elección de una distribución a priori que dicho producto pertenezca a la misma familia de densidades.

1.2.4.1 Ejemplos

a) En el caso de la distribución binomial se tiene que su función de densidad es:

$$f(x|\mathbf{w}) = w^{\sum x} (1-w)^{n-\sum x}$$

para que la distribución a posteriori pertenezca a la misma familia de la a priori se escoge la distribución beta con parámetros (μ, B) :

$$\Pi(W) \propto w^{\mu-1} (1-w)^{\beta-1} ; w \in [0,1]$$

$$\implies \Pi(w) \propto w^{\mu+\sum x} (1-w)^{n+\beta+\sum x}$$

es decir, la densidad a posteriori es la distribución beta con parámetros $(\mu+\sum x, \beta+n+\sum x)$.

b) Para la distribución exponencial:

$$f(x|w) = w^n \exp\{-w\sum x\}$$

se selecciona la densidad gama con parámetros (μ, β) :

$$f(x|w) = \frac{\beta^\mu w^{\mu-1} \exp\{-w\sum x\}}{\Gamma(\mu)}$$

$$\text{gamma}(\mu) = \int_0^\infty u^{\mu-1} \exp\{-u\} du$$

$$\implies f(w|x) = w^{\mu+n-1} \exp\{-w(\beta+\sum x)\}$$

la distribución a posteriori es proporcional a la distribución gama con parámetros $(\mu+n, \beta+\sum x)$.

1.2.5 Costo Bayesiano

Ya se ha mencionado que la labor del estadístico, en una decisión de Bayes, es evaluar el costo de la observación y compararlo

con la información proporcionada por la muestra. El costo está dado como una función de la muestra y del valor del parámetro Ω , y, por tanto, puede expresarse como $C(x,w)$. Por ello, el costo esperado por observación es:

$$\int_{\Omega} \int_X C(w,x) f(x|w) \Pi(w) dx dw$$

donde $\Pi(w)$ es la función de densidad de w .

Prácticamente, la evaluación de la información proporcionada por la muestra se da al calcular el riesgo observado teniendo X , que es la suma del riesgo y el costo esperado de la observación. Si es menor que el riesgo antes de la muestra, es natural que esta información ha sido de ayuda, pues ha reducido el riesgo total. Este razonamiento explica el procedimiento óptimo, que es explicado a continuación en un teorema:

TEOREMA Para un procedimiento secuencial en donde no más de n observaciones son hechas, el proceso óptimo es:

Si $R_0(\pi) \leq R_n(\pi)$ se hace una decisión sin ninguna observación.

Si ya se han hecho $X=x_1, \dots, X=x_k$ observaciones, y la distribución Ω es π_k :

Si $R_0(\pi_k) \leq R_{n-k}(\pi_k)$ la decisión en D se hace sin más observaciones. Si no, X_{k+1} es observado.

Con este teorema se infiere lo siguiente:

$R_n(\pi) \geq R_{n+1}(\pi)$; es decir, este procedimiento debe establecer la elección de una observación más siempre y cuando se minimice el riesgo.

CAPITULO II

2.1 La Teoría de la Confiabilidad

Esta Teoría se enfoca a elaborar un análisis de las condiciones para que un sistema, o un componente de un sistema funcionen, suponiendo un modelo probabilístico para la falla del mismo. Por tanto es necesario desarrollar una prueba de falla al mencionar la Teoría de la Confiabilidad. Para esta prueba se requiere de un tiempo inicial $t=0$. A partir de este momento el tiempo de descompostura del sistema (o del componente) es una variable aleatoria la cual se puede representar con un modelo de probabilidad

En base a esto se define a la confiabilidad del sistema en el tiempo t como la probabilidad de que en este instante el sistema siga funcionando. Como la duración del sistema es una variable aleatoria T , la confiabilidad se representa como una función de esa variable:

$$C(t) = P(T>t) = 1-P(T\leq t)$$

Si la función de densidad de la duración del sistema la llamamos f , entonces:

$$C(t) = P(T>t) = \int_t^{\infty} f(s)ds$$

$$\text{por lo que } 1-C(t) = \int_0^t f(s)ds ; f(t) = -C'(t)$$

2.2 Proceso de Fallas

Considerando la probabilidad de que el sistema falle en un pequeño intervalo de tiempo dado que no ha sufrido fallas hasta t ,

se encuentra la tasa de falla en el instante t :

$$P(t \leq T \leq t + \Delta t | T > t) = \frac{P((t \leq T \leq t + \Delta t) \cap (T > t))}{P(T > t)}$$

$$P(t \leq T \leq t + \Delta t | T > t) = \frac{P(t < T \leq t + \Delta t)}{P(T > t)}$$

$$P(t \leq T \leq t + \Delta t | T > t) = \frac{\int_t^{t + \Delta t} f(s) ds}{P(T > t)}$$

por la continuidad de f y el teorema del valor intermedio se tiene:

$$P(t \leq T \leq t + \Delta t | T > t) = \frac{\Delta t f(\pi t)}{P(T > t)}$$

lo que a su vez implica que:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t \leq T \leq t + \Delta t)}{\Delta t} = \frac{f(t)}{C(t)}$$

es decir, la tasa de falla S asociada a la función de densidad de la duración sin falla de un sistema es:

$$S(t) = \frac{f(t)}{C(t)}$$

donde C es la confiabilidad del sistema en el instante t.

2.3 Proceso Exponencial de Fallas.

Este proceso consiste en considerar a través del tiempo un crecimiento lineal en la tasa de fallas $Z(t)=\beta t$. Por ello, y dados los resultados de secciones anteriores, se evalúa la función de densidad de esta tasa de fallas:

$$S(t) = \frac{f(t)}{C(t)}$$

$$\int_0^t S(k)dk = \int_0^t \frac{f(k)}{C(k)} dk = \int_0^t \frac{-C'(k)}{C(k)} dk$$

$$\beta t = -\ln C(t) + \ln C(0)$$

como

$$C(0) = P(T>0) = 1 \Rightarrow \ln C(0) = 0$$

por tanto

$$-\beta t = \ln C(t)$$

$C(t) = \exp\{-\beta t\}$; por lo que

$$C(t) = 1 - \int_0^t f(s)ds = \exp\{-\beta t\} \Rightarrow f(t) = \frac{d}{dt} (1 - \exp\{-\beta t\})$$

$$\Rightarrow f(t) = \beta \exp\{-\beta t\};$$

la función de densidad asociada a una tasa de fallas con crecimiento constante a través del tiempo es una distribución exponencial, de ahí el nombre de proceso exponencial de fallas.

2.4 Proceso Weibull de Fallas

Muchas veces la tasa de fallas no es lineal y por ello debe expresarse como $Z(t) = \mu t^\beta$ para incluir casos de crecimiento cuadráticos, cúbicos, etc., en un proceso de descomposturas. El nombre de este proceso se explica por la densidad asociada a esta tasa que es Weibull con parámetros (μ, β) .

Siguiendo el mismo procedimiento que en la exponencial se tiene que:

$$\mu t^\beta = -\ln C(t)$$

$$C(t) = \exp\{-\mu t^\beta\}$$

$$\Rightarrow f(t) = - \frac{d}{dt} \exp\{-\mu t^\beta\} = (\mu \beta) t^{\beta-1} \exp\{-\mu t^\beta\}$$

2.5 Confiabilidad en un Sistema de n componentes

Estos sistemas funcionan si las n componentes funcionan simultáneamente (en el caso de independencia entre componentes); si se denomina a la variable aleatoria V como el tiempo sin falla del sistema, ésa a su vez puede ser separada en n variables aleatorias que

representen la duración sin descompostura de las n componentes. Como existe independencia en estas componentes, la probabilidad de que falle el sistema después de t es igual al producto de las probabilidades de que todas las componentes sin excepción fallen después de t:

$$C(t) = P(V > t) = P(V_1 > t)P(V_2 > t) \dots P(V_n > t)$$

$$= C_1(t)C_2(t) \dots C_n(t)$$

en el caso del proceso de fallas exponencial se tiene, para un sistema de n componentes que:

$$C(t) = \exp\{-\mu_1 t\} \dots \exp\{-\mu_n t\} = \exp\{-(\mu_1 + \dots + \mu_n)t\}$$

para la densidad Weibull:

$$C(t) = \exp\{-\mu_1 t^{\beta_1}\} \dots \exp\{-\mu_n t^{\beta_n}\}$$

Si, además, se tiene que $\beta = \beta_1 = \dots = \beta_n$ el proceso de fallas de un sistema de confiabilidad Weibull de sus n componentes es también Weibull con parámetros $(\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n, \beta)$.

2.6 Un Ejemplo de Aplicación de la Distribución de Weibull

Una aplicación muy utilizada por los ingenieros es la consideración de la distribución de Weibull para la determinación de la fuerza de materiales que son resistentes pero quebradizos. Esta práctica se debe a que esta intensidad o fuerza está sujeta a una t

tensión y que esta distribución representa adecuadamente la fuerza:

$$F(x) = 1 - \exp[-(m(x/x_0)^\mu)] ; x \geq 0$$

donde μ representa el parámetro de forma, x_0 es el parámetro de la escala de longitud y m es la dimensión actual. La media de esta distribución es:

$$E(x) = m^{-1/\mu} x_0 \Gamma(1 + 1/\mu)$$

analizando los parámetros de esta función podemos inferir que la fuerza disminuye cuando crece la longitud. Además, estudios previos indican que materiales quebradizos se encuentran en el rango de $3 \leq \mu \leq 20$. También es obvio que, dada esta fórmula, la fuerza del material es menor que la correspondiente a material semejante con menos área sujeta a tensión. Esta interpretación puede generalizarse diciendo que la dependencia no sólo es del área comprometida, sino también del volumen.

Estas consideraciones nos llevan a pensar en la factibilidad de crear materiales en base a fibras de materiales que, dado su menor volumen conformen en conjunto un material de mayor resistencia. Esto, adicionado con un pegamento es de mucha ayuda para mejorar las características de durabilidad del material.

Muchos estudios se han hecho al respecto, y la premisa usada para realizarlos es: cuando una falla se presenta en un material

constituido por fibras de menor volumen, la transmisión de la falla se da sobre fibras adyacentes y la ruptura del mismo dependerá de cuánta carga puedan resistir estas fibras. El modelo más usado consiste en separar artificialmente las fibras en paquetes que contienen una pequeña parte de cada una de ellas. Si se consideran en un principio n fibras que forman el material y se supone una división de m paquetes, el material está formado por mn estructuras, cuyas fuerzas son variables aleatorias independientes, y que cada una tiene distribución Weibull.

Este caso puede generar un proceso recursivo en el cual se tomen en cuenta que la fuerza del material en total sea, primero, la fuerza de los n componentes de cada estructura correspondiente a cada fibra y después la consideración de la fuerza en función de los m paquetes del material. En primer lugar, para los n componentes del paquete se tiene una variable aleatoria común $G_n(x)$; por tanto, para los m paquetes la fuerza está representada por:

$$H_{m,n}(x) = 1 - [1 - G_n(x)]^m \quad ; x \geq 0$$

que describe la resistencia total del material. Esta fórmula ayuda a encontrar un procedimiento recursivo para la determinación de la falla y, con ello y a través del límite al infinito de los n componentes del paquete conocer la resistencia del material en su conjunto.

CAPITULO III

3.1 Introducción

Un gran número de máquinas de alto desarrollo tecnológico tienen una diversidad de componentes independientes de fallas y en los cuales la cantidad de éstas crece a través del tiempo. Las máquinas tienden a descomponerse por lo siguiente: por la poca resistencia del material con el que están hechas; por microcomponentes con alta reposición; o bien, por el uso desmedido de las mismas.

Es por ello que muchas veces resulta difícil suponer que el número de fallas de máquinas de este tipo no varía a través del tiempo. Haciendo un análisis de lo revisado en el Capítulo 2, resultaría imposible considerar el proceso exponencial de descomposturas de estos equipos. Esto implicaría tener una tasa constante de fallas $Z(t)=\mu$ en el tiempo, como ya se ha visto.

Por tanto, es adecuado utilizar una tasa de la forma $Z(t)=(\mu\beta)t^{\beta-1}$, la cual determina un proceso creciente o decreciente en el transcurso del tiempo t si $\beta \neq 1$ (si $\beta=1$ es el caso de la exponencial). Este proceso es el de Weibull y la función de densidad asociada a esta tasa es:

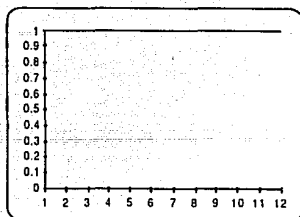
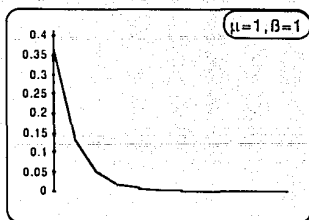
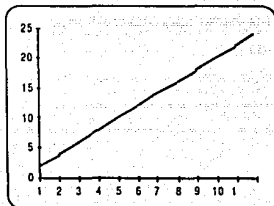
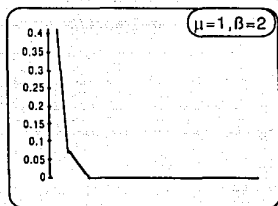
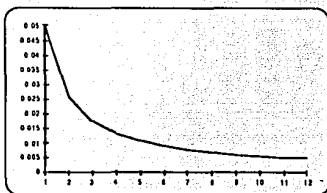
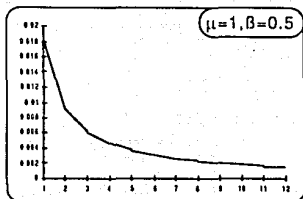
$$f(t) = (\mu\beta)t^{\beta-1} \exp\{-\mu t^\beta\}$$

3.2 La Descompostura de un Sistema

Esta función de densidad se comporta en forma semejante a la función que los componentes de las máquinas tienen. Adicionalmente se

Función de densidad Weibull

Tasa de Fallas



Ejemplos donde se muestran la tasa de fallas y la distribución de probabilidad Weibull manteniendo μ constante e igual a 1.

debe utilizar el parámetro β fijo para simular mejor este comportamiento. El hecho de incluir β fijo implica que al tener n componentes de la misma máquina con distribuciones Weibull con parámetros $(\mu_1, \beta), (\mu_2, \beta), \dots, (\mu_n, \beta)$ respectivamente, la máquina como un sistema global de componentes tendrá también función de densidad Weibull con parámetros $(\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n, \beta)$. Si se analiza el caso de dos componentes se puede verificar. Sean \emptyset, Π variables aleatorias de dos mecanismos independientes de la máquina con distribuciones Weibull $(\mu_1, \beta), (\mu_2, \beta)$ respectivamente. La probabilidad del mínimo de estas variables representará al sistema en general. Es decir, la descompostura del sistema está directamente relacionado a la falla de una de estas componentes. Por tanto:

$$P\{\min(\emptyset, \Pi) > t\} = P(\emptyset > t) P(\Pi > t) = \exp\{-\mu_1 t^\beta\} \exp\{-\mu_2 t^\beta\}$$

$$P\{\min(\emptyset, \Pi) > t\} = \exp\{-(\mu_1 + \mu_2) t^\beta\}$$

es por ello la importancia del uso del parámetro β como constante. De ahora en adelante se denota como β' . El parámetro en estudio será w .

3.3 La Familia Conjugada a la Densidad Weibull

Nuestro objetivo radica ahora en encontrar una función a priori tal que, dada la muestra de la función de densidad Weibull se pueda obtener una distribución a posteriori que se acerque al parámetro, dadas las observaciones. Es decir, lo que se busca es una

familia conjugada asociada a la distribución Weibull.

Si se considera el caso de n máquinas a ser analizadas, la densidad conjunta de la muestra sería:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n | w) = (\beta'w)^n \prod x_i^{\beta-1} \exp\{-w \sum x_i^\beta\}$$

esta función se puede expresar como :

$$f(x) = a(w) b(x) \exp[\sum h_i(w) f_i(x)]$$

donde:

$$a(w) = (\beta'w)^n$$

$$b(x) = \prod x_i^{\beta-1}$$

$$h_i(x) = \sum x_i^\beta$$

por tanto, es posible encontrar una familia conjugada asociada a la densidad conjunta Weibull, ya que es de la forma exponencial.

3.3.1 Densidad a Priori y a Posteriori

Si se evalúa una función de densidad a priori gama con parámetros (α, β) se observa que:

$$\Pi(w) = w^{\beta-1} \exp(-w\beta)$$

y, por tanto,

$$f_x \Pi \propto (\beta)^{\beta} \Pi x_i^{\beta-1} w^{\beta+d-1} \exp\{-(\beta + \sum x_i^{\beta}) w\}$$

es decir, la distribución a posteriori es proporcional a una distribución gama con parámetros $(n+\beta, \beta + \sum x_i^{\beta})$.

3.4 El Riesgo Mínimo

Ya se ha obtenido una función que se aproxime al comportamiento de los tiempos de falla de las máquinas. Resta evaluar al estimador bayesiano del parámetro que minimice el riesgo.

Como ya se ha definido, el riesgo es:

$$Rd = \int_x P(w)dw \int_{\Omega} L[d(x),w]p(x|w) dx$$

$$Rd = \int_x p(x)dx \int_{\Omega} L[d(x),w]\Pi(w|x)dw$$

como $p(x)$ es no negativa, la función R del riesgo puede ser minimizada con la integral interior para cada x fijo y así determinar la solución de Bayes.

Es decir, se obtiene el estimador del parámetro minimizando:

$$\int_{\Omega} L[d(x),w]\Pi(w|x)dw$$

o bien,

$$\int_{\Omega} L[d(x),w]\Pi(w)p(x|w)dw$$

3.4.1 Obtención de la Decisión Óptima

Usando la pérdida cuadrática se puede obtener la decisión d' óptima. Utilizar la pérdida cuadrática implica tener como estimador el que menor error cuadrado posee. Es decir d' es de tal forma que:

$$E\{d' - w\}^2 \leq E\{d - w\}^2$$

para cualquier otra decisión d .

3.4.1.1 Justificación Intuitiva de la Pérdida Cuadrática

Como el error cuadrado es la varianza, que representa una medida de dispersión, lo más recomendable es que sea mínima. Es decir, que la variable aleatoria tienda a acercarse a su media y que la pérdida sea una función del error al estimar el parámetro. O sea, que la decisión tenga una pérdida de acuerdo a la falla al estimar w .

Por ello, lo más natural es considerar a esta pérdida como una función del error $w-d$:

$$L(w,d) = f(w)g(w-d)$$

donde $g(0)=0$ (la pérdida del no error es 0) y f es no negativa y sólo pondera el error al tomar distintos valores del parámetro.

Del hecho de que L depende del error $w-d$, se toma a f como una constante:

$$L(w,d) = h(w-d) = ag(w-d)$$

como $g(0)=0$ implica que $h(0)=0$.

Expendiendo la función en una serie de Taylor se tiene que:

$$L(w,d) = a_0 + a_1(w-d) + a_2(w-d)^2 + \dots$$

El tener suficiente información del parámetro nos hace desechar los términos mayores o iguales a tres, puesto que el parámetro es cercano a d :

$$L(w,d) = a_0 + a_1(w-d) + a_2(w-d)^2$$

como $h(0)=0$, eso implica que $a_0=0$ y como h es no negativo $a_1=0$ y $a_2 \geq 0$.

De ahí el considerar la función de pérdida:

$$L(w,d) = (w-d)^2$$

3.4.1.2 La Decisión Óptima

Para obtener la decisión óptima minimizamos

$$\int_0^{\infty} (d'-w)^2 (b'w)^n \prod x_i^{n-1} \exp\{-w \sum x_i\} w^{n-1} \exp\{-w\beta\} dw$$

diferenciando con respecto a d' e igualando a 0

$$\frac{\partial}{\partial d'} \int_0^{\infty} (d'-w)^2 (b'w)^n \prod x_i^{b'-1} \exp\{-w \sum x_i^{b'-1}\} w^{d'-1} \exp\{-w\beta\} dw = 0$$

$$2b' \prod x_i^{b'-1} \int_0^{\infty} (d'-w) w^{n+d'-1} \exp\{-w(\sum x_i^b + \beta)\} dw = 0$$

$$\int_0^{\infty} d' w^{n+d'-1} \exp\{-w(\sum x_i^b + \beta)\} dw - \int_0^{\infty} w^{n+d'-1} \exp\{-w(\sum x_i^b + \beta)\} dw = 0$$

$$d' = \frac{\int_0^{\infty} w^{n+d} \exp\{-w(\sum x_i^b + \beta)\} dw}{\int_0^{\infty} w^{n+d-1} \exp\{-w(\sum x_i^b + \beta)\} dw}$$

$$\int_0^{\infty} w^{n+d-1} \exp\{-w(\sum x_i^b + \beta)\} dw$$

$$d' = \frac{\frac{n+d}{(\sum x_i^b + \beta)} \int_0^{\infty} w^{n+d-1} \exp\{-w(\sum x_i^b + \beta)\} dw}{\int_0^{\infty} w^{n+d-1} \exp\{-w(\sum x_i^b + \beta)\} dw}$$

$$\int_0^{\infty} w^{n+d-1} \exp\{-w(\sum x_i^b + \beta)\} dw$$

$$d' = \frac{n+d}{(\sum x_i^b + \beta)}$$

; d' es la media de la distribución a posteriori.

Dado que la pérdida L es cuadrática y como la media de la distribución a posteriori es d' , la integral:

$$\int_{\Omega} L[d(x), w] \Pi(w|x) dw$$

de la ecuación del riesgo representará a la varianza de la distribución a posteriori ya que es igual a $\{w - E(w)\}^2$, la varianza.

3.4.1.3 El Riesgo al Muestrear n Componentes

En base a esto, es fácil conocer el valor de esta integral:

$$\int_0^{\infty} (d' - w)^2 \frac{(\beta + \sum x_i^{\beta}) (\beta + x_i^{\beta})^{n+\partial-1} w^{n+\partial-1} \exp\{-w(\beta + \sum x_i^{\beta})\}}{\Gamma(n+\partial)} dw$$

$$\frac{n+\partial}{(\beta + \sum x_i^{\beta})^2}$$

resultado de la varianza de la distribución gama con parámetros $(n+\partial, \beta + \sum x_i^{\beta})$.

Ahora se evalúa

$$\int_x p(x) \frac{n+\partial}{(\beta + \sum x_i^{\beta})^2} dx$$

para conocer el riesgo asociado a esta prueba.

Para esto es indispensable el conocimiento de la función de densidad $p(x)$, la cual es igual a:

$$p(x) = \frac{\Pi(w)p(x|w)}{\Pi(w|x)}$$

donde $\Pi(w) \sim \text{gama}(\partial, \beta)$.

$\Pi(w|x) \sim \text{gama}(n+\partial, \beta+\sum x_i^{\beta})$

$p(x|w) \sim \text{Weibull}(w, \beta')$

$$p(x) = \frac{(\beta/\Gamma(\partial))(\beta w)^{\partial-1} \exp[-w\beta] (\beta' w)^n \prod x_i^{\beta'-1} \exp[-w \sum x_i^{\beta}]}{\left[\frac{(\beta + \sum x_i^{\beta})(\beta + \sum x_i^{\beta})^{n+\partial-1} w^{n+\partial+1} \exp[-w(\sum x_i^{\beta} + \beta)]}{\Gamma(n+\partial)} \right]}$$

$$= (\Gamma(n+\partial) \beta^{\partial} \beta'^n \prod x_i^{\beta'-1}) / \Gamma(\partial) (\beta + \sum x_i^{\beta})^{n+\partial}$$

sustituyendo este valor en la integral del riesgo se obtiene:

$$R = \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} \frac{\beta'^n \Gamma(n+\partial) \beta^{\partial} \prod x_i^{\beta'-1} (n+\partial)}{\Gamma(\partial) (\beta + \sum x_i^{\beta})^{n+\partial} (\beta + \sum x_i)^2} dx_1 \dots dx_n$$

$$R = \frac{\beta^{-n} \Gamma(n+\partial) \beta^{\partial} \Gamma(n+\partial) \int \dots \int \frac{\prod x_i^{\beta-1}}{(\beta + \sum x_i^{\beta})^{n+\partial+2}} dx_1 \dots dx_n}{\Gamma(\partial)}$$

$$R = \frac{\beta^{-n} \Gamma(n+\partial) \beta^{\partial} \Gamma(n+\partial)}{\Gamma(\partial) (\beta^{-n}) (n+\partial+1) (\partial+2) \beta^{\partial+2}}$$

$$R = \frac{(n+\partial) \Gamma(n+\partial) \Gamma(\partial+2)}{\Gamma(\partial) \Gamma(n+\partial+2) \beta^2}$$

$$R = \frac{(\partial+1) \partial}{(n+\partial+1) \beta^2}$$

3.5 La Prueba Secuencial

Lo que interesa realmente es la minimización del riesgo, es decir, tener el costo total a posteriori. La herramienta que se debe usar es: contar con la muestra y tener el número de observaciones

adecuado. Esta pérdida debe incluir el costo por la muestra, lo cual implica la suma de la varianza a posteriori más el costo por observación y se puede denotar como:

3.5.1 La Prueba después de k ensayos

$$Q_0 + nc = \frac{n+d}{(\beta+r)^2} + nc$$

$$r = \sum x_i^2$$

si se deciden hacer k ensayos más para estimar w, nuestro costo mínimo a posteriori es:

$$Q_k(x) + nc = \frac{n+k+d}{(\beta+r+\sum^k x_i^2)^2} + (n+k)c$$

3.5.2 La Prueba Condicional de k Ensayos después de n Ensayos Anteriores

En la posición actual, o sea después de n ensayos, $Q_k(x)$ sólo se puede estimar y para ello se calcula $\underline{Q}_k = E[Q_k(x)|r]$, denotando el costo como:

$$\underline{Q}_k + (n+k)c$$

CAPITULO IV

4.1 Introducción

Después de haber calculado el riesgo condicional de realizar k ensayos cuando ya se han hecho n , sólo resta comparar este resultado con el costo asociado al experimento, como fue expuesto en la Sección 1.5 del Capítulo I.

Esta revisión auxiliará a desarrollar el análisis para tratar a las máquinas que tengan un proceso de fallas de la distribución Weibull. En este Capítulo se mostrarán dos métodos para, con una certeza conocida, parar después de realizados n ensayos.

El primer método se basa principalmente en el conocimiento de una estadística de la muestra, que es esencial para resolver la desigualdad resultante de la prueba costo-beneficio.

El segundo método, aproximado, pero más general que el anterior, es el uso de la ley fuerte de los grandes números para simular la distribución que en el primer caso se resolvió. Este procedimiento utiliza el método de Monte Carlo y es aplicado a la función de densidad de Weibull.

4.2 Comparación del Costo contra Riesgo

Como ya fue analizado en la última parte del Capítulo III, el costo mínimo a posteriori esperado es $Q_0 + nc$ si no se observa más y $Q_k = (n+k)c$ la estimación para el caso de k ensayos.

Si se cumple para toda k que $Q_0 + nc < Q_k + (n+k)c$, se debe parar puesto que el costo esperado es mayor con k ensayos. Si, por otra parte, $Q_0 + nc > Q_k + (n+k)c$ entonces en promedio es recomendable

tomar más observaciones puesto que el costo esperado es menor con más ensayos.

Para la evaluación de $E\{Q_k(x)|r\}$ se requiere del conocimiento de $p(x|r)$ y a que $E\{Q_k(x)|r\} = \int_x Q_k(x)p(x|r)dx$, por ello se encuentra:

$$p(x|r) = \frac{p(x,r)}{p(r)} = \int_{\Omega} \frac{p(x,r,w)}{p(r)} dw$$

$$p(x|r) = \int_{\Omega} \frac{p(x,r,w)\Pi(w)}{p(r)} dw = \int_{\Omega} \frac{p(x|w)p(r|w)\Pi(w)}{p(r)} dw$$

$$p(x|r) = \int_{\Omega} \frac{p(x|w)p(r,w)}{p(r)} dw = \int_{\Omega} p(x|w)p(w|r) dw$$

con los resultados antes obtenidos de

$$p(x|w) = (\beta'w)^n \prod x_i^{\beta-1} \exp\{-w\sum x_i^{\beta}\}$$

$$y p(w|r) = \frac{(\beta+r)^{n+\beta} w^{n+\beta-1} \exp\{-w(\beta+r)\}}{\Gamma(n+\beta)}$$

para k casos:

$$p(x|r) = \frac{\int_0^{\infty} (\beta'w)^k \prod x_i^{\beta'-1} \exp\{-w(\sum x_i^{\beta'})\} (\beta+r)^{n+\partial} w^{n+\partial-1} \exp\{-w(\beta+r)\} dw}{G(n+\partial)}$$

$$= \frac{\beta^{-k} \prod x_i^{\beta'-1} (\beta+r)^{n+\partial} \int_0^{\infty} w^{n+k+\partial-1} \exp\{-w(\beta+r+\sum x_i^{\beta'})\} dw}{G(n+\partial)}$$

dado que la distribución acumulada de la función de densidad $\text{gama}(\partial, \beta)$ de 0 a ∞ es 1, es decir

$$\int_0^{\infty} \frac{\beta^{\partial} w^{\partial-1} \exp\{-w\beta\} dw}{G(\partial)} = 1$$

=>

$$\int_0^{\infty} \frac{(\beta+r+\sum x_i^{\beta'})^{n+k+\partial} w^{n+k+\partial-1} \exp\{-w(\beta+r+\sum x_i^{\beta'})\} dw}{G(n+k+\partial)} = 1$$

=>

$$\int_0^{\infty} w^{n+k+\vartheta-1} \exp\{-w(\beta+r+\sum x_i^{\beta})\} dw = \frac{\Gamma(n+k+\vartheta)}{(\beta+r+\sum x_i^{\beta})^{n+k+\vartheta}}$$

∴

$$p(x|r) = \frac{\beta^n \Gamma(\beta-1) (\beta+r)^{n-\vartheta}}{(\beta+r+\sum x_i^{\beta})^{n+k+\vartheta} \Gamma(n+\vartheta)}$$

teniendo esta función es fácil deducir $Q_k(x)$:

$$E[Q_k(x)|r] = \int_x Q_k(x) p(x|r) dx$$

$$= \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} \frac{(n+k+\vartheta) \beta^k \prod x_i^{\beta-1} (\beta+r)^{n+\vartheta} \Gamma(n+k+\vartheta) dx_1 \dots dx_k}{(\beta+r+\sum x_i^{\beta})^2 \Gamma(n+\vartheta) (\beta+r+\sum x_i^{\beta})^{n+k+\vartheta}}$$

$$= \left\{ \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} \frac{\beta^{k-1} (n+k+\vartheta) \prod x_i^{\beta-1} (\beta+r)^{n+\vartheta} \Gamma(n+k+\vartheta) dx_2 \dots dx_k}{\Gamma(n+\vartheta)} \right\}$$

$$\times \left\{ \int_0^{\infty} \frac{\beta \cdot x_1^{\beta-1} dx_1}{(\beta+r+\sum x_i^{\beta})^{n+k+\vartheta+2}} \right\}$$

$$= \frac{(n+k+\partial)(\beta+r)^{n+\partial}}{G(n+\partial)} \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} \beta^{-k-1} \prod_2 x_i^{\beta-1} \int_0^{\infty} \frac{\beta x_1^{\beta-1} dx_1}{(\beta+r+\sum x_i^{\beta})^{n+k+\partial+2}} dx_2 \dots dx_k$$

haciendo cambio de variables:

$$\begin{aligned} u &= \beta + r + \sum x_i^{\beta} \\ du &= \beta \sum x_i^{\beta-1} dx_i \\ x=0 & \Rightarrow \\ u &= \beta + r + \sum_2 x_i^{\beta} \end{aligned}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\beta x_1^{\beta-1}}{(\beta+r+\sum x_i^{\beta})^{n+k+\partial+2}} dx_1$$

$$= \int_{\beta+r+\sum_2 x_i^{\beta}}^{\infty} \frac{du}{u^{n+k+\partial+2}}$$

$$= \frac{1}{-(n+k+\partial+1)u^{n+k+\partial+1}} \Big|_{\beta+r+\sum_2 x_i^{\beta}}^{\infty}$$

$$= \frac{1}{(n+k+\partial+1)(\beta+r+\sum_2 x_i^{\beta})^{n+k+\partial+1}}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} \frac{(n+k+\partial)\beta^{-k} \prod x_i^{\beta-1} (\beta+r)^{n+\partial} G(n+k+\partial) dx_1 \dots dx_k}{(\beta+r+\sum x_i^{\beta})^2 G(n+\partial) (\beta+r+\sum x_i^{\beta})^{n+k+\partial}}$$

$$= \frac{(n+k+\partial)(\beta+r)^{n+\partial}}{G(n+\partial)(n+k+\partial+1)(n+k+\partial) \dots (n+\partial+2)(\beta+r)^{n+\partial+2}}$$

$$= \frac{(n+k+\partial) \Gamma(n+k+\partial)(n+\partial+1)(n+\partial) \Gamma(n+\partial)}{(\beta+r)^2 \Gamma(n+\partial) (n+k+\partial+1)(n+k+\partial) \Gamma(n+k+\partial)}$$

$$= \frac{(n+\partial+1)(n+\partial)}{(n+k+\partial+1)(\beta+r)^2}$$

Como se ha establecido se continúan haciendo ensayos si el costo esperado de hacer más pruebas es menor que el costo de la posición actual, es decir, si:

$$Q_0 + nc - (Q_k(x) + (n+k)c) \geq 0$$

$$\frac{n+\partial}{(\beta+r)^2} + nc - \frac{(n+\partial+1)(n+\partial)}{(n+k+\partial+1)(\beta+r)^2} - nc - kc \geq 0$$

$$\frac{(n+\partial)(n+k+\partial+1) - (n+\partial+1)(n+\partial)}{(n+k+\partial+1)(\beta+r)^2} \geq kc$$

$$\frac{(n+\partial)\{(n+k+\partial+1) - (n+\partial+1)\}}{(n+k+\partial+1)(\beta+r)^2} \geq kc$$

$$\frac{k(n+\partial)}{(n+k+\partial+1)(\beta+r)^2} \geq kc$$

4.2.1 La Prueba Secuencial

Entonces, la prueba para determinar si se siguen haciendo ensayos o no se reduce a:

$$\frac{(n+\partial)}{(n+k+\partial+1)(\beta+r)^2} \leq kc$$

Es obvio que si esta desigualdad es satisfecha para $k=1$ se cumple para todos los valores de $k>1$.

Esto nos conduce a parar los ensayos si:

$$\frac{(n+\partial)}{(n+\partial+2)(\beta+r)^2} \leq c$$

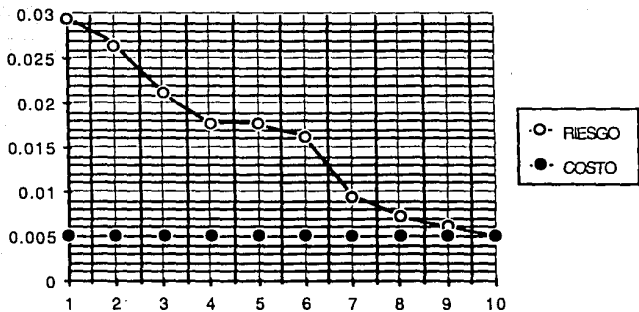
En la prueba a realizar se considera el caso de tomar una muestra aleatoria de la función de densidad Weibull con parámetros $\beta' = 2$, es decir, aplicando una tasa de fallas $Z(t) = 2wt$, la cual se explica como una tasa de crecimiento lineal.

4.3 El Desarrollo de la Prueba Secuencial

4.3.1 Ejemplos

En base a cálculos en computadora, evaluando la distribución

CASO A



GRAFICA #1

de Weibull con muestras de 100 casos, se consideran los ejemplos (obteniendo los valores de la función Weibull aleatoriamente):

a) $w=.8$, $\partial=.5$, $\beta=3$, $c=.005$. La prueba de costo-riesgo es:

N	RIESGO	COSTO
1	0.0295	0.005
2	0.0265	0.005
3	0.0211	0.005
4	0.0178	0.005
5	0.0177	0.005
6	0.0162	0.005
7	0.0095	0.005
8	0.0072	0.005
9	0.0061	0.005
10	0.0049	0.005

es decir, hasta el décimo ensayo se para evaluando el riesgo mínimo.

b) Para el caso $w=.2$, $\partial=.1$, $\beta=2$, $c=.005$:

N	RIESGO	COSTO
1	0.004	0.005

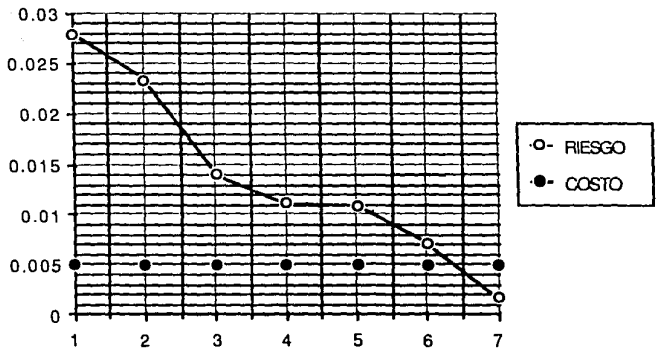
c) Con $w=.5$, $\alpha=.5$, $\beta=3$, $c=.005$:

N	RIESGO	COSTO
1	0.0279	0.005
2	0.0233	0.005
3	0.0141	0.005
4	0.0112	0.005
5	0.0109	0.005
6	0.0071	0.005
7	0.0017	0.005

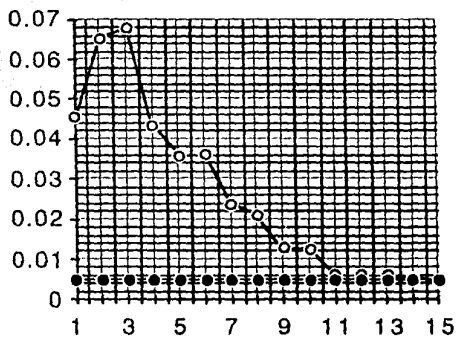
d) y para $w=1$, $\alpha=.1$, $\beta=2$, $c=.005$:

N	RIESGO	COSTO
1	0.0455	0.005
2	0.0654	0.005
3	0.0679	0.005
4	0.0434	0.005
5	0.0359	0.005
6	0.0362	0.005
7	0.0238	0.005
8	0.0209	0.005
9	0.0128	0.005
10	0.0126	0.005
11	0.0061	0.005
12	0.0061	0.005
13	0.0061	0.005
14	0.0055	0.005
15	0.0045	0.005

CASO C



CASO D



GRAFICA #3

4.4 La Prueba Secuencial con el Conocimiento de la Probabilidad de Parar en n Ensayos

En base a lo que se ha desarrollado, siguiendo un esquema prestablecido, resulta altamente sugerente atacar este problema pensando que es conveniente tener la seguridad de que, al hacer n ensayos, se conozca la probabilidad de parar en k ensayos más:

$$\Pr\left(\frac{n+\partial}{(n+\partial+2)(\beta+r)^2} \leq c\right) = 1-\alpha$$

Como la estadística $r = \sum x_i^2$ está tomada de n variables aleatorias X_1, X_2, \dots, X_n de la distribución Weibull, se encuentra su función de densidad. Para ello, primero se analiza el caso de f^2

$$\text{como } f \sim f(x) = (2w)x \exp\{-wx^2\}$$

eso implica que:

$$P(f^2 \leq x) = P(f \leq \sqrt{x}) = F(\sqrt{x})$$

$$f^2 \sim \frac{dF(\sqrt{x})}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad f(\sqrt{x}) = 2w \frac{1}{2\sqrt{x}} \sqrt{x} \exp\{-wx\}$$

$$f^2 \sim w \exp\{-wx\} : \text{exponencial}(w)$$

De ahí que la función de densidad de $\sum x_i^2$ es $\text{gama}(n,w)$.

$$f(x) = \frac{1}{(n-1)!} w^n x^{n-1} \exp\{-wx\}$$

y así, la función de distribución acumulada es:

$$F(x) = 1 - \sum_0^{n-1} \frac{(wx)^k}{k!} \exp\{-wx\} \quad (A)$$

Aprovechando el conocimiento de la variable aleatoria $\sum x_i^2$, se puede evaluar (A):

$$\Pr\left(\frac{n+\partial}{(n+\partial+2)(\beta+r)^2} \leq c\right) = 1-\alpha$$

$$\Pr\left(\frac{1}{(\beta+r)^2} \leq \frac{c(n+\partial+2)}{(n+\partial)}\right) = 1-\alpha$$

$$\Pr\left((\beta+r)^2 \geq \frac{n+\partial}{c(n+\partial+2)}\right) = 1-\alpha$$

$$\Pr\left(r \geq \sqrt{(n+\partial)/c(n+\partial+2)} - \beta\right) = 1-\alpha$$

4.4.1 Ejemplos

Haciendo referencia de los mismos ejemplos antes expuestos, se puede ver con qué probabilidad ocurren. En el primer caso, ($w=.8$,

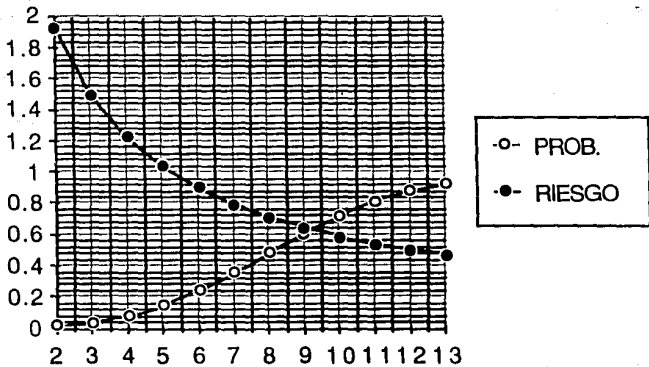
$\mu=5$, $\beta=3$, $c=.005$, $n=13$) se obtienen las siguientes probabilidades:

N	PROBABILIDAD
2	0.024107
3	0.03922
4	0.08106
5	0.14826
6	0.24214
7	0.35762
8	0.48416
9	0.60888
10	0.72044
11	0.81168
12	0.88038
13	0.92826

para el segundo caso:

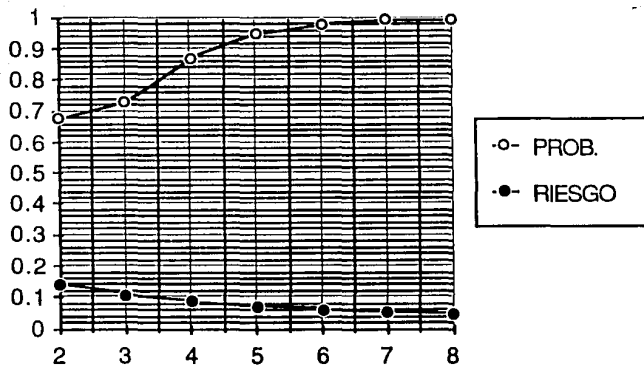
N	PROBABILIDAD
2	0.67717
3	0.72923
4	0.87146
5	0.9476
6	0.98138
7	0.99416
8	0.99836

CASO A



GRAFICA #4

CASO B



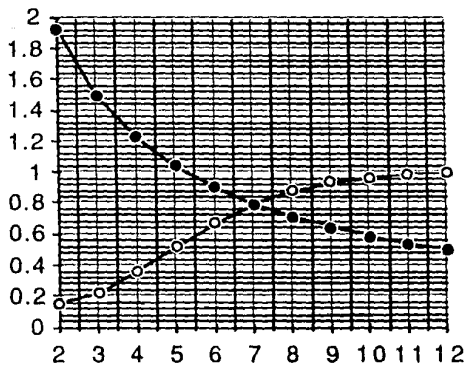
para el tercer caso: ($w=.5$, $\partial=.5$, $\beta=3$, $c=.005$, $n=12$)

N	PROBABILIDAD
2	0.15335
3	0.21819
4	0.36233
5	0.52164
6	0.67131
7	0.7932
8	0.88062
9	0.93657
10	0.96886
11	0.98582
12	0.99398

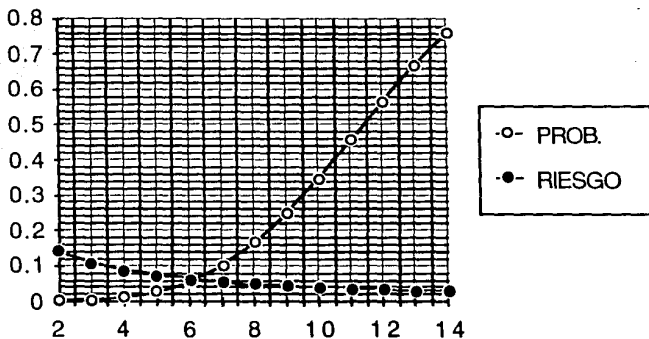
para el cuarto ($w=1$, $\partial=.1$, $\beta=2$, $c=.005$):

N	PROBABILIDAD
2	0.00391
3	0.0061
4	0.01388
5	0.02952
6	0.05744
7	0.10205
8	0.16618
9	0.24947
10	0.34918
11	0.45775
12	0.56723
13	0.6697
14	0.75951

CASO C



CASO D

ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA

GRAFICA #7

Los casos enmarcado presentan a los ejemplos previos. En el primer caso, la prueba secuencial para con un tamaño de muestra 10 con una probabilidad de 72%.

4.5 El Uso del Método Montecarlo en la Prueba Secuencial

La obtención de la función de densidad de $r = \sum xi^2$ resulta algunas veces difícil. Es por ello necesario encontrar un método general que permita resolver el problema sin recurrir a funciones de densidad. El método más recomendado es usar Monte Carlo. Consiste en hacer un número repetitivo de pruebas de comparación de costo y riesgo, determinando en cada evento el tamaño óptimo de muestra. Sumarizando todos los tamaños de muestra óptimos, se puede evaluar fácilmente la probabilidad de que el número de ensayos óptimo sea menor o igual a un valor fijo k:

$$\Pr(\text{Tamaño de Muestra} \leq k) = \frac{(\text{número casos} \leq k)}{\text{total de casos}}$$

La aplicación de Monte Carlo se explica de la siguiente manera:

Sea D el evento de parar antes de k ensayos.

Sean las variables aleatorias:

$$\varnothing_i = \begin{cases} 1 & \text{si ocurre } D \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

Se define a $P_{\varnothing}(D) = P(\varnothing \in D)$

por la ley fuerte de los grandes números se infiere que:

$$\frac{\varnothing_1 + \dots + \varnothing_n}{n} \xrightarrow{\text{cs}} E(\varnothing)$$

Aplicándolo al evento y a las variables aleatorias, se deduce el método:

$$\frac{\varnothing_1 + \dots + \varnothing_n}{n} \xrightarrow{\text{cs}} 0 P(1-D) + P(D) = P(D)$$

4.5.1 Ejemplos

De los ejemplos antes estudiados se pueden hacer las siguientes comparaciones:

En el primer caso ($w=.8$, $\partial=.5$, $\beta=3$, $c=.005$) y analizando el caso de tamaño de muestra $n=13$ (con corridas en computadora de 1000), en el caso de Monte Carlo se obtiene 929/1000 contra .92826 conociendo la distribución $r=\sum xi^2$.

Sumarizando, se tiene, para los 4 ejemplos, el siguiente cuadro comparativo:

	<u>PARAMETROS</u>	<u>TAMAÑO</u>	<u>USANDO</u> <u>r</u>	<u>USANDO</u> <u>MONTECARLO</u>
<u>EJEMPLO A</u>	w=0.8	10	0.72	0.717
	$\partial=0.5$			
	$\beta=3$	13	0.928	0.929
	c=0.005			
<u>EJEMPLO B</u>	w=0.2	3	0.729	0.712
	$\partial=0.1$			
	$\beta=2$	4	0.871	0.871
	c=0.005			
<u>EJEMPLO C</u>	w=0.5	7	0.793	0.796
	$\partial=0.5$			
	$\beta=3$	9	0.937	0.94
	c=0.005			
<u>EJEMPLO D</u>	w=1	15	0.832	0.839
	$\partial=0.1$			
	$\beta=2$	17	0.929	0.93
	c=0.005			

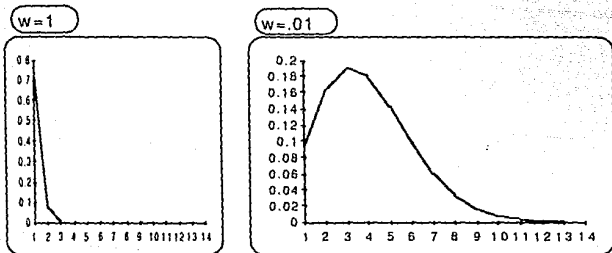
4.6 Conclusiones

En este trabajo se han considerado máquinas que tienen componentes independientes y que además el comportamiento de las fallas de estos componentes pueden ser simulados por la densidad Weibull $(w,2)$.

Cada componente tiene densidad:

$$f(t) = 2wt \exp(-wt^2)$$

Esta función depende del parámetro w y es muy variable de acuerdo a su valor.



Del conocimiento de estas densidades independientes, se llegó a la densidad conjunta:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n | w) = (2w)^n \prod x_i \exp(-w \sum x_i^2)$$

Se ha encontrado que el estimador que minimiza el riesgo

(utilizando pérdida cuadrática) es:

$$W = \frac{n+\partial}{\sum x_i^2 + \beta}$$

para muestras de tamaño n fijo.

Posteriormente se ha diseñado el modelo de parar en k ensayos después de haber hecho n iniciales, comparando el riesgo inicial $Q_0 + nc$ contra $Q_k + (n+k)c$, obteniendo como resultado el parar si se cumple que:

$$\frac{n+\partial}{(n+\partial+2)(\beta+r)^2} \leq c$$

donde ∂ y β son los parámetros de la distribución Weibull (∂, β) , n son los ensayos iniciales y $r = \sum x_i^2$ tomados de los k ensayos adicionales.

El objetivo ha sido determinar, si se tiene oportunidad de muestrear componentes para conocer con mayor precisión el estimador, cuál es el momento adecuado para parar, sabiendo que cada muestra tiene un costo y que el propósito de una prueba secuencial es la de minimizar el costo total.

Ya teniendo este desarrollo, se diseñó la probabilidad de parar con cierto grado de confiabilidad σ :

$$P\left(\frac{n+\partial}{(n+\partial+2)(\beta+r)^2} \leq c\right) = 1-\sigma$$

Se han usado dos métodos alternativos para calcular la probabilidad de parar en cualquier ensayo y, por consiguiente, conocer el valor estimado del parámetro y el riesgo total asociado. El primero, con el conocimiento de una estadística de la función de densidad. El segundo, usando el Método Monte Carlo.

Con este trabajo, el decisor estadístico tiene la posibilidad de modelar un proceso de fallas de una máquina (dada la gran variedad de distribuciones Weibull que se pueden tener, los tiempos de falla de los componentes de las máquinas pueden ser simulados por la misma, y, por tanto, la máquina como un todo) y se puede analizar con mucho detalle cuál es el comportamiento de esta máquina y hasta cuándo resulta óptima su utilización teniendo en cuenta las ganancias involucradas y los tiempos de reparación de las mismas.

BIBLIOGRAFIA

- 1 Optimal Statistical Decisions
De Groot, M.H.
McGraw Hill
1974
- 2 Introducción a la Teoría de Probabilidades y
sus Aplicaciones, Vol 1
Feller, W.
LIMUSA
1973
- 3 Introduction to the Theory of Statistics
Modd, Graybill, Boes
McGraw Hill
1974
- 4 Probabilidad y Aplicaciones Estadísticas
Meyer, P.L.
Fondo Educativo Interamericano
- 5 Statistical Inference
Silvey, S.D.
Chapman and Hall
1975
- 6 Introducción a la Probabilidad Moderna
Sztaszschneider, W.
(por editar)
1986

BIBLIOGRAFIA

- 7 Statistical Decision Theory, Foundations, Concepts
 and Methods
 O. Berger, J.
 Springer Verlag
 1972
- 8 Probability Distributions for the Strength of
 Fibrous Material under Local Load Sharing
 Harlow, G., Phoenix, L.
 Applied Probability
 1982