

20
2ej

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE
MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

TESIS QUE PARA OBTENER EL TITULO DE FISICO PRESENTA

ALEJANDRO CUEVAS SALGADO

CON EL TITULO DE

LIMITE DE MOMENTO ANGULAR PARA UNA GOTTA LIQUIDA

DIRIGIDA POR

DR. ARTURO MENCHACA ROCHA

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

MEXICO, AGOSTO DE 1991



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE

AGRADECIMIENTOS	ii
INDICE	iii
I. INTRODUCCION	1
II. MODELO DE COLISIONES ENTRE GOTAS LIQUIDAS	
A. Modelos de Cohen-Plasil-Swiatecki y de Beringer-Knox	4
B. Hipótesis	6
C. Cálculo del Area de la Superficie del Sistema Compuesto	10
D. Aplicación a Núcleos	16
III. DESARROLLO EXPERIMENTAL Y RESULTADOS	
A. Instrumento Experimental	25
B. Experimentación	27
C. Sistemas de Referencia	28
D. Transición determinada por L'	29
E. Momento Angular Crítico vs. Masa	31

IV. APLICACION DEL MODELO DE SUPERFICIE A GOTAS MACROSCOPICAS	
A. Aplicación Directa del Modelo de Superficie	37
B. El Modelo de Superficie Modificado (Elipsoides)	40
C. Energía de Vibración	48
V. CONCLUSIONES	50
APENDICE 1	52
APENDICE 2	74
REFERENCIAS	78

CAPITULO I

Introducción

La similitud entre las fuerzas atractivas de corto alcance que unen a los núcleos y las de Van der Waals que ocasionan la tensión superficial en gotas líquidas ha justificado el uso de modelos hidrodinámicos para simular fenómenos nucleares. Uno de los puntos de contacto más evidente entre las interacciones nucleares y las colisiones entre gotas es que, cuando ambas ocurren a bajas energías (por encima de la barrera coulombiana), el mecanismo dominante es la "fusión", o "coalescencia", de los dos núcleos, o gotas, interactuantes. Este es el mecanismo responsable del crecimiento de gotas de lluvia en nubes. Las condiciones que determinan la fusión nuclear también son de gran importancia en la naturaleza, toda vez que es en base a este mecanismo que se genera la energía de las estrellas, incluido el Sol. Es por esto que los físicos nucleares se han interesado en encontrar el parámetro que condiciona que dos núcleos se fundan o no. Recientemente Cohen, Plasil y Swiatecki¹, usando un modelo hidrodinámico del núcleo, propusieron que este parámetro es el momento angular. Desde entonces, varios estudios experimentales parecen haber confirmado las predicciones de esos autores. Sin embargo, a la fecha, no existe

ningún intento experimental por verificar este modelo en el caso de gotas macroscópicas.

En esta tesis se presenta un estudio experimental diseñado para probar la idea de que el parámetro que determina la fusión o fisión de gotas líquidas es el momento angular. En el capítulo II se hará una revisión del modelo de Cohen et al. En el mismo capítulo se describe un modelo simplificado que nos permitirá aplicar las ideas de esos autores al caso de gotas líquidas. En el tercer capítulo se describe el instrumento diseñado para observar las colisiones entre gotas de mercurio, y la metodología empleada hasta la obtención de resultados. En el capítulo IV se comparan los datos obtenidos con la predicción simple propuesta en el capítulo II. Dado que los resultados indican una falla en la teoría, en este mismo capítulo se discute el posible origen de la discrepancia, realizando los cambios necesarios al modelo hasta obtener un modelo más adecuado. Finalmente, en el capítulo V se presentan los resultados y las perspectivas para futuros estudios en el tema.

CAPITULO II

Modelo de Colisiones entre Gotas Líquidas

Este capítulo comienza explicando brevemente el modelo hidrodinámico de Cohen et al. para reacciones nucleares y el modelo de Beringer-Knox², para núcleos poco deformados. Luego, se detalla la formulación de un modelo, para describir el proceso de colisión de dos gotas líquidas iguales (misma masa y substancia). Se trata de establecer las condiciones que originan la transición entre la fusión y la fisión (o fragmentación) del sistema compuesto por las dos gotas. El modelo, de Cohen et al., postula que esta transición ocurre debido a la competencia entre un potencial atractivo, causado por la tensión superficial, y otro repulsivo al que contribuyen las fuerzas centrífuga y coulombiana. Al final del capítulo se muestran los cálculos realizados con nuestras propias aproximaciones para el caso de reacciones nucleares y se comparan con las predicciones de los modelos de Cohen et al. y de Beringer-Knox.

A. Modelos de Cohen-Plasil-Swiatecki y de Beringer-Knox

Cohen et al. han encontrado que cuando se tiene un núcleo en rotación, éste se mantendrá estable si su momento angular no excede un cierto valor L_c , en caso contrario se fragmentará en dos o más partes. Cohen et al. suponen que el núcleo tiene un comportamiento como el de un fluido, de tal forma que es posible asociarle una tensión superficial y, en consecuencia, obtener una energía debida a su superficie libre. Luego, para determinar la estabilidad del sistema consideran la interacción de tres potenciales que determinan la estabilidad del sistema nuclear: el debido a la superficie, el centrífugo o de rotación y el coulombiano.

Para obtener un sistema líquido con alguna perturbación que altere su estabilidad, suponen que el sistema posee una energía de rotación variable y, en consecuencia, un momento angular variable. A medida que el momento angular crece, la fuerza centrífuga tiende a deformar al sistema hasta fisiónarlo. La evolución del sistema es la siguiente: para valores muy pequeños del momento angular con respecto al L_c el sistema se achata, es decir, adquiere la forma de un esferoide con simetría en el plano normal al eje de rotación; para valores próximos al L_c se tienen dos esferoides unidos por un cuello, cuyo eje de simetría es normal al eje de rotación. Un hecho importante es que la región del esferoide en donde surge el cuello no se puede determinar matemáticamente, debido a que en el esferoide achatado existe una simetría en todo el plano normal

al eje de rotación, entonces cualquier región tiene la misma probabilidad de ser elegida, siendo por ello que ésta se determina arbitrariamente. Finalmente, para valores iguales o mayores a L_c el sistema se fisiona en dos fragmentos simétricos. Durante toda la evolución del sistema la energía es minimizada, por lo que el sistema tiende siempre a alcanzar la mayor estabilidad.

Desafortunadamente, por la naturaleza hidrodinámica de su estudio, Cohen *et al.* no muestran una expresión matemática que describa la evolución de la forma geométrica que adquieren los sistemas deformados como función del tiempo. Es por ello que, como una primera aproximación, se hacen aquí algunas hipótesis para obtener la forma analítica de las ecuaciones de superficie, para así tener un potencial de superficie completamente analítico, necesario para hacer los cálculos relacionados al momento angular límite para sistemas líquidos microscópicos y macroscópicos, como se verá en éste y en los capítulos siguientes.

Por otro lado, Beringer y Knox, en un trabajo previo al de Cohen *et al.*, aproximaron la forma de un núcleo compuesto por un elipsoide de revolución. A dicho sistema se le asocian condiciones análogas a las propuestas por Cohen *et al.*; el cálculo hidrodinámico reveló la existencia de un límite de momento angular, entre fusión y fisión, para sistemas nucleares.

B. Hipótesis

Las hipótesis hechas para la formulación del modelo son las siguientes:

a) El tratamiento es realizado desde el punto de vista de la la Mecánica Clásica. Es decir, aún cuando se aplique a núcleos, se desprecia todo tratamiento cuántico.

b) Se desprecia toda interacción entre las gotas y el medio circundante: las gotas se mueven en el espacio libre en todo momento.

c) Cada gota es un sistema único y en equilibrio interno y cuenta con una cierta energía cinética inicial.

d) El proceso de colisión es adiabático y conservativo.

e) El volumen y la masa del sistema se mantienen constantes durante todo el proceso.

f) A partir del instante en el que las gotas se tocan, éstas dejan de existir como dos sistemas individuales, para constituir un sistema único, llamado *sistema compuesto*. Este nuevo sistema, se encuentra inicialmente en estado de desequilibrio, y tiende a alcanzar un equilibrio estable por medio de las fuerzas internas (de corto alcance) que mantienen la cohesión del sistema, y que se

manifiestan macroscópicamente como la energía de superficie.

Entonces, el potencial efectivo del sistema es:

$$W(\mathbf{r}) = \frac{L^2}{2\mu r \cdot r} + V_s(\mathbf{r}) + V_l(\mathbf{r}) \quad 2.1$$

El primer término es el potencial centrífugo, donde L es el momento angular, μ es la masa reducida y r es el vector que une los centros de masa de las dos gotas. El segundo término es el potencial atractivo, que es proporcional a la superficie del sistema, y tiene la forma:

$$V_s(\mathbf{r}) = -\sigma (S_0 - S(\mathbf{r})) \quad 2.2$$

donde σ es el coeficiente de tensión superficial, $S(\mathbf{r})$ es el área de la superficie total del sistema en cualquier instante; S_0 es la suma de las áreas de las dos gotas antes de la interacción. El tercer término, en la ecuación 2.1, representa una interacción de largo alcance que, en el caso de núcleos o gotas cargadas, sería el potencial electrostático. Sustituyendo el potencial $V_s(\mathbf{r})$ en la ecuación 2.1:

$$W(\mathbf{r}) = \frac{L^2}{2\mu r \cdot r} - \sigma(S_0 - S(\mathbf{r})) + V_l(\mathbf{r}) \quad 2.3$$

De acuerdo con la ecuación 2.3 es posible, para ciertos valores de L , r y $S(\mathbf{r})$, la existencia de un mínimo en la función $W(\mathbf{r})$. Si este es el caso, existirá un pozo de potencial, lo que se

considerara en esta tesis como la condición necesaria para que el sistema compuesto se fusione. Si, por el contrario, no existe pozo alguno, se supone que habrá una fragmentación del sistema inicial. Entonces, para una misma función de área $S(r)$, existe un cierto valor límite de L , llamado momento angular crítico L_c , para cuyo valor se cumple que, si L es menor que L_c habrá un mínimo en el potencial efectivo, que desaparece para valores superiores a L_c . La figura 2.1 muestra el potencial efectivo $W(r)$ para varios valores del momento angular L .

Una vez que se ha efectuado el choque, su descripción puede ser realizada por la ecuación 2.3, previo conocimiento de las variables L , μ y de los potenciales $V_s(r)$ y $V_l(r)$. Pero, $V_s(r)$ depende de la función de área $S(r)$ del sistema compuesto y ésta depende de la forma que adquiere la gota durante el tiempo de transición.

Como una primera aproximación para la función $S(r)$, en esta tesis se ha tratado de calcular el área de las gotas de la manera siguiente: (ver figura 2.2a) antes de la colisión se supone que las gotas son esféricas; durante la colisión se consideran las siguientes etapas en la evolución del sistema compuesto. Primera etapa: a partir del instante en que ocurre el contacto, se idealiza al sistema compuesto como formado por dos casquetes esféricos, cuyos centros están separados por una distancia $|r|$, unidos por un paraboloide de revolución, que tiene una curvatura dependiente de r (fig. 2.2b). Segunda etapa: los dos casquetes esféri-

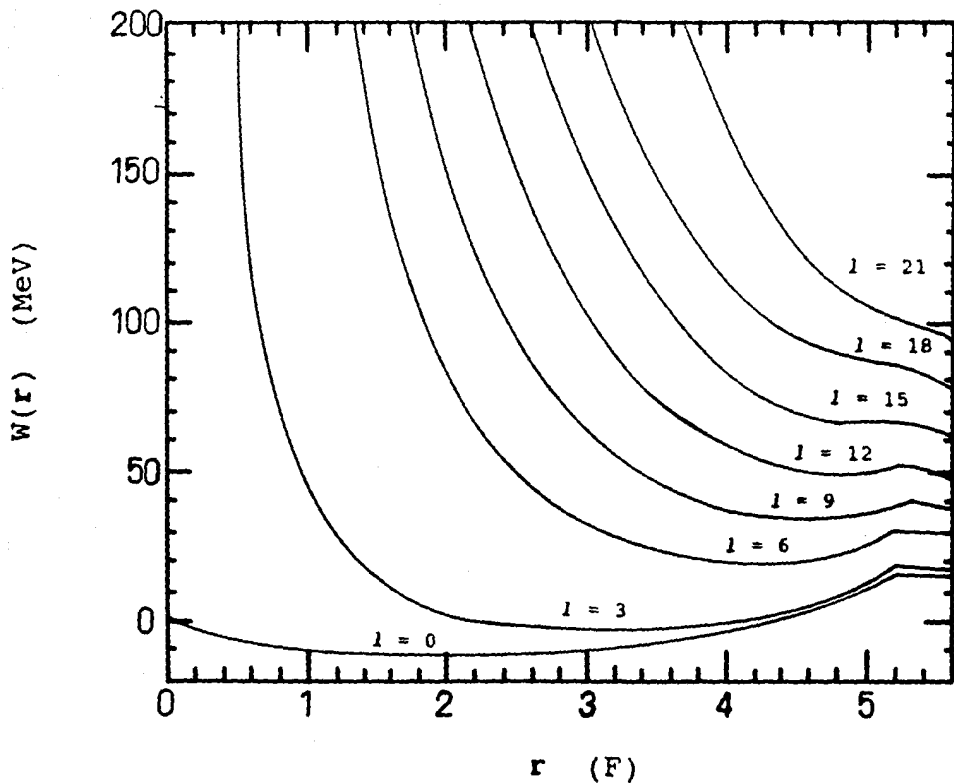


Figura 2.1 Ejemplo de un potencial nuclear efectivo $W(r)$ vs. r , para varios valores del momento angular. Obsérvese que para valores del momento angular tales que $l > 21$ desaparece el pozo de potencial.

cos tienden a juntarse hasta el punto en el cual la curvatura del paraboloides es cero, donde ambos casquetes quedan unidos por un cilindro (fig. 2.2c). A partir de este punto se supone que el sistema compuesto adquiere la forma de un *elipsoide de revolución*, cuyo eje de rotación se encuentra sobre la trayectoria de movimiento (fig 2.2d). La forma de la gota sigue evolucionando (fig. 2.2e) hasta alcanzar la forma esférica cuando $r = 0$, en donde la excentricidad del elipsoide es cero (fig 2.2f). En esta etapa, la norma del vector r se calcula a partir de la distancia entre los focos del elipsoide. En la próxima sección se desarrolla el cálculo de la función del área $S(r)$, para la evolución descrita.

C. Cálculo del Área de la Superficie del Sistema Compuesto

Por simplicidad, el cálculo del área $S(r)$ se realiza en el sistema del centro de masa de las dos gotas. Se supone que el movimiento ocurre a lo largo del eje X. Antes de la colisión, la ecuación de la superficie de las gotas individuales tiene la siguiente forma:

$$x > 0 \qquad (x - d)^2 + y^2 + z^2 = R^2 \qquad 2.4a$$

$$x < 0 \qquad (x + d)^2 + y^2 + z^2 = R^2 \qquad 2.4b$$

donde R es el radio de cada gota y d es la distancia del origen al centro de cada esfera. La figura 2.2a muestra un esquema de la idealización de las gotas un instante antes de entrar en contacto.

A partir de la colisión la forma de las ecuaciones de la superficie cambia como sigue. (En esta parte, sólo se ha resuelto el problema para el primer cuadrante, ya que las figuras son simétricas). Las ecuaciones son:

$$\text{si } x < \xi \quad y^2 + z^2 = (h + 4px^2)^2 \quad 2.5a$$

$$\text{si } x > \xi \quad (x - d)^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad 2.5b$$

donde h es el desplazamiento del vértice del paraboloides; p es la distancia focal de la familia de parábolas que constituyen al paraboloides; y ξ es el punto en la frontera entre el casquete esférico y el paraboloides. De esta manera, el área de la superficie puede ser determinada mediante las fórmulas del área de sólidos de revolución:

$$2\pi \int (1 + (df/dx)^2)^{1/2} dx$$

Así, las ecuaciones $f(x)$ a partir de las ecuaciones 2.5 son:

$$y_1 = h + 4px^2 \quad 2.6a$$

$$y_2 = (R^2 - (x - d)^2)^{1/2} \quad 2.6b$$

Y las derivadas son:

$$y_1' = 8px \quad 2.7a$$

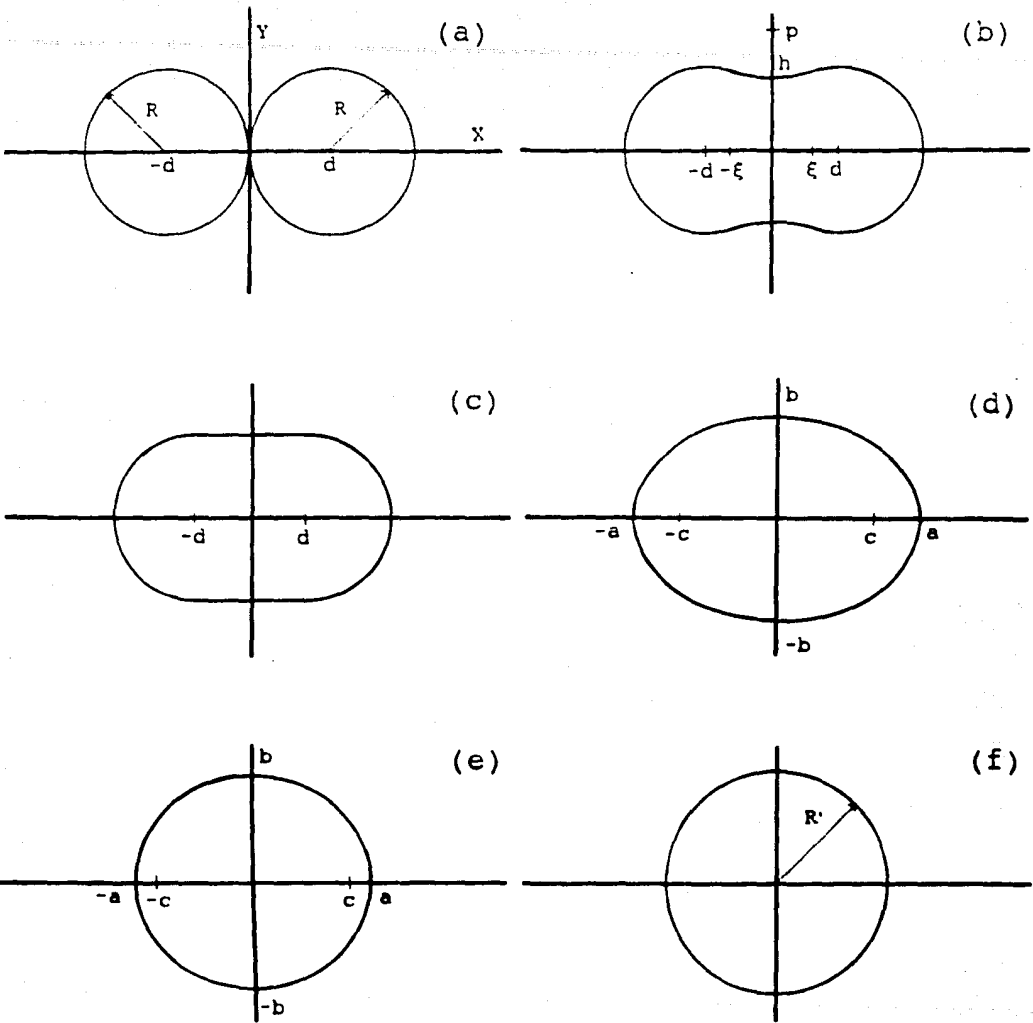


Figura 2.2 Aproximación de la forma de la gota según el modelo.

$$y_2' = \frac{-(x-d)}{\{R^2 - (x-d)^2\}^{1/2}} \quad 2.7b$$

Entonces, el área Σ_1 de la superficie es:

$$\Sigma_1(d) = 2\pi \int_0^{\xi} y_1 (1 + (y_1')^2)^{1/2} dx + 2\pi \int_{\xi}^{R+d} y_2 (1 + (y_2')^2)^{1/2} dx \quad 2.8$$

Calculando las integrales de la ecuación 2.8 se obtiene:

$$\begin{aligned} \Sigma_1(d) = 2\pi \left(\frac{h}{8p} - \frac{1}{512p^2} \right) \left(4p\xi\eta + \log(8p\xi + \eta)^{1/2} \right) + \frac{2\pi\xi\eta^3}{64p} + \\ + 2\pi R(R + d - \xi) \end{aligned} \quad 2.9$$

$$\text{con } \eta = (64p^2\xi^2 + 1)^{1/2}.$$

Existen varios parámetros por determinar: h , p y ξ , para lo cual se deben tomar en cuenta algunas condiciones:

1) el volumen permanece constante durante todo el proceso:

$$V_0 = \pi \int_0^{\xi} y_1^2(x) dx + \pi \int_{\xi}^{R+d} y_2^2(x) dx \quad 2.10$$

2) por continuidad, en el punto ξ las funciones y_1 y y_2 deben ser iguales:

$$h + 4p\xi^2 = (R^2 - (\xi - d)^2)^{1/2} \quad 2.11$$

3) y también sus derivadas:

$$3p\xi = \frac{-(\xi - d)}{(R^2 - (\xi - d)^2)^{1/2}} \quad 2.12$$

Es así como se obtienen tres ecuaciones 2.10, 2.11 y 2.12 con tres incógnitas h , p y ξ . Los parámetros d y R son constantes para cualquier posición dada. Al despejar se obtienen los siguientes resultados:

$$p = \frac{-(\xi - d)}{\xi(R^2 - (\xi - d)^2)^{1/2}} \quad 2.13a$$

$$h = -4p\xi^2 + (R^2 - (\xi - d)^2)^{1/2} \quad 2.13b$$

$$V_0 = \pi \left(h^2 \xi + \frac{8ph\xi^3}{3} + \frac{16p^2\xi^5}{5} \right) + \pi \left(R^2(d + R - \xi) - \frac{R^3}{3} + \frac{(R - d)^3}{3} \right) \quad 2.13c$$

donde V_0 es el volumen una de las esferas iniciales: $4\pi R^3/3$. El primer término de la ecuación 2.13c corresponde al volumen del paraboloides de revolución y el segundo término al volumen del casquete esférico. El sistema 2.13 se resuelve calculando primeramente el valor de ξ pero, de la ecuación 2.13c no se puede despejar ξ , por lo que el cálculo se tiene que hacer numéricamente, sustituyendo los valores de p y h dados por las ecuaciones 2.13a y 2.13b. Con el objeto de calcular los valores de h , p y ξ numéricamente, para alguna posición r y una masa dada se elaboró un programa de cómputo. Conocidos h , p y ξ se aplica la ecuación 2.8 y $S(r)$ queda determinada.

De esta manera, se puede obtener el valor de la función $S(r)$ hasta cierto punto d_0 , en el cual las ecuaciones del paraboloide y de los casquetes esféricos tienen que cambiarse por las de un elipsoide de revolución. La ecuación del área del elipsoide es:

$$\Sigma_2(d) = 2\pi \left(b^2 + \frac{ba^2}{c} \arcsen(c/a) \right) \quad 2.14a$$

y se tienen además las relaciones:

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad 2.14b$$

$$V_0 = \frac{4\pi ab^2}{3} \quad 2.14c$$

$$c = kd^n \quad 2.14d$$

A partir de las ecuaciones 2.14 y de la condición de continuidad de las funciones del área Σ_1 y Σ_2 (el valor de las funciones de área y de sus derivadas en el punto d_0 deben ser iguales), se obtienen los valores de a , b , c , k y n . El valor de d_0 se obtiene igualando el volumen del cilindro que une a los dos casquetes esféricos, al volumen que ocupa la parte esférica (cuando $p = 0$ y $h = R$, ver figura 2.2c), esto es:

$$\pi R^2 d_0 = \pi \int_{-R+d}^{d_0} (R^2 - (x-d)^2) dx$$

Integrando y despejando d_0 se obtiene el valor:

$$d_0 = 2R/3$$

El problema del cálculo numérico de dichas variables, se realizó con el programa de cómputo mencionado.

Finalmente, $\Sigma_1(d)$ y $\Sigma_2(d)$ devuelven el valor de la mitad de la superficie total, ya que sólo se ha integrado la mitad del área del sólido de revolución. El valor final de $S(r)$ es:

$$\text{si } |r| > d_0 \qquad S(r) = 2\Sigma_1(|r/2|) \qquad 2.15a$$

$$\text{si } |r| < d_0 \qquad S(r) = 2\Sigma_2(|r/2|) \qquad 2.15b$$

Sustituyendo en 2.2 se obtiene el potencial $V_s(r)$. En la sección siguiente se efectúa la aplicación del modelo desarrollado al caso de núcleos atómicos.

D. Aplicación a Núcleos

Para describir a los núcleos atómicos existe, entre otros modelos, el llamado *modelo de la gota líquida*. La descripción de un sistema nuclear es muy rigurosa cuando se trata desde el punto de vista de la mecánica cuántica, pero es posible llegar a una estimación de la energía total del sistema mediante consideraciones clásicas.

El comportamiento del núcleo, como un todo, se idealiza como un *fluido nuclear incompresible*, con una densidad casi uniforme de masa y de carga eléctrica, y con una energía de amarre constante

por partícula. Esta energía toma en cuenta la interacción electrostática entre las diferentes partes del fluido nuclear y el déficit de amarre de las partículas de la superficie, que es proporcional al área nuclear, y que da origen al fenómeno de la tensión superficial³. Un sistema de este tipo es susceptible de deformaciones. Entonces, si a un núcleo se le aplica una cierta energía de deformación se genera un movimiento en el fluido nuclear, análogo al de las oscilaciones de una esfera de fluido común. Para núcleos pesados, la alta carga nuclear tiende a contrarrestar a la fuerza nuclear atractiva de corto alcance. En consecuencia, una pequeña perturbación da lugar a oscilaciones. Dentro de este contexto, se supone que el núcleo posee una superficie que está descrita en base a una superficie de revolución, generada por la rotación de la función: $R'(\theta) = Rf(\theta)$, donde $f(\theta)$ puede expresarse como una serie de Legendre^{4, 5}:

$$f(\theta) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n P_n(\cos\theta) \quad 2.16$$

La figura 2.3 muestra a varias gotas líquidas deformadas para los casos $n = 2, 3, 4$. (Para el valor $n = 0$ no se muestra una figura porque este caso correspondería a oscilaciones radiales, es decir, pulsaciones simétricamente esféricas y, en un fluido incompresible, como se ha idealizado al núcleo, esto es imposible; tampoco hay figura para $n = 1$ ya que el movimiento sería un movimiento de traslación del núcleo como un todo).

La perturbación en un sistema compuesto, como ya se dijo, da

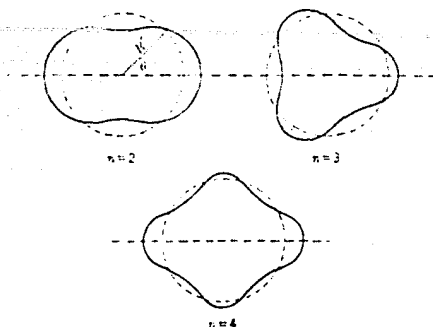


Figura 2.3 Deformaciones pequeñas para una gota líquida, según Bohr y Wheeler (ver ref. 4,5).

lugar a un estado oscilatorio, el cual puede terminar en una fisión si la energía agregada sobrepasa algún valor. En el caso de una colisión entre dos núcleos también se forma un sistema compuesto; este nuevo sistema se encuentra inicialmente perturbado por la energía que traían consigo los dos núcleos colisionantes. Este sistema es el mismo que el del caso que han estudiado Bohr y Wheeler, salvo que la perturbación hecha al sistema es rotacional y no vibracional.

Entonces, para hacer la aplicación del modelo de las secciones anteriores, el sistema compuesto puede tratarse como una gota líquida en la cual se tomarán tres interacciones: (1) la energía de rotación, (2) la energía de superficie y (3) la repulsión electrostática. Las dos primeras interacciones corresponden a los primeros dos términos de la ecuación 2.1; mientras que la repul-

sión electrostática se encuentra dentro del tercer término. Siendo así, la ecuación 2.1 toma la forma:

$$W(r) = \frac{L^2}{2\mu r^2} + V_n(r) + V_c(r) \quad 2.17$$

donde V_c es el potencial electrostático o coulombiano. Esta ecuación es clásica, y corresponde al problema de dos gotas cargadas. Para aplicar esta última ecuación a núcleos es necesario hacer algunos cambios, cuyos detalles aparecen a continuación.

Cohen et al. han calculado el valor del coeficiente de tensión superficial nuclear σ . Este coeficiente es el siguiente:

$$\sigma = \frac{17.9439(1 - 1.7826 I^2)}{4\pi r_0^2} \quad 2.18$$

donde $r_0 = 1.2249 F$ e $I = (N - Z)/A$. ($r_0 = 1.2249 F$; N es el número de neutrones; Z es el número de protones; y A es la masa atómica). La ecuación 2.18 cuenta con el término de exceso de neutrones, el cual es muy significativo para núcleos pesados.

Para el caso de núcleos, el momento angular L está cuantizado y, por lo tanto, tiene que hacerse la sustitución L^2 por $\hbar^2 l(l+1)$, donde \hbar es la constante reducida de Planck y l es el número cuántico de momento angular.

El tercer término de la ecuación 2.17 es muy difícil de calcular, siendo por ello que aquí sólo se ha hecho una

aproximación. Para $|r| > R$ (donde R es el radio de los núcleos iniciales), el valor del potencial $V_e(r)$ para cada núcleo es conocido. Luego, antes de la colisión el valor de la energía $V_e(r)$ total es $2V_e(r)$, hasta $|r| = 2R$ (punto 1); pero, cuando los núcleos se tocan y, en el caso de quedar fusionados, llegan a cierto estado de forma esférica en $|r| = 0$ (punto 2), es posible calcular el valor de $V_e(r)$ para la esfera resultante de la fusión de los núcleos iniciales. Como una aproximación se ha supuesto que existe una función parabólica que une ambos puntos en el intervalo:

$$0 < |r| < 2R$$

La forma que adquiere $V_e(r)$ según esta aproximación es:

$$V_e(r) = V_2 + (V_1 - V_2)r \cdot r / R^2 \quad 2.19$$

donde $V_1 = 1.4106 Z^2 A^{-1/3}$, $V_2 = 2.8212 Z^2 A^{-2/3}$ y R es el radio de un núcleo antes de la colisión.

Entonces, sustituyendo los valores para L y σ en la ecuación 2.17 se llega a:

$$W(r) = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r \cdot r} + V_s(r) + V_e(r) \quad 2.20$$

donde $V_e(r)$ está definido por 2.19.

Los valores de los L_c nucleares como función de la masa A han sido calculados, en base a la ecuación 2.20. La gráfica de la figura 2.4 muestra los distintos valores L_c obtenidos para algunos núcleos.

Los tres modelos presentados tienen resultados equivalentes en la región de núcleos ligeros (ver figura 2.4), en donde la carga nuclear es pequeña.

El modelo aquí desarrollado genera la forma elipsoidal, base del modelo de Beringer-Knox, para el sistema compuesto en la última etapa de su evolución, después de decaer de una deformación más compleja. Además, el modelo de Beringer-Knox emplea, como ya se dijo, un potencial centrífugo combinado con otro electrostático, además del potencial de superficie, análogamente a los usados en el modelo aquí desarrollado y en el de Cohen et al., siendo entonces, que el modelo de Beringer-Knox es un caso particular del modelo que en este capítulo se ha formulado, en la región de núcleos ligeros. Por el contrario, para núcleos pesados el modelo aquí desarrollado predice una fisión espontánea, $L_c = 0$, para núcleos cuyas masas ni siquiera sobrepasan las 200 u.m.a., en cambio, los otros modelos también predicen fisión espontánea pero para valores superiores a las 200 u.m.a. Esta diferencia puede deberse a la forma aproximada en la que se calculó el potencial coulombiano, lo mismo que el potencial centrífugo.

Con respecto a los cálculos de Cohen et al. la situación es

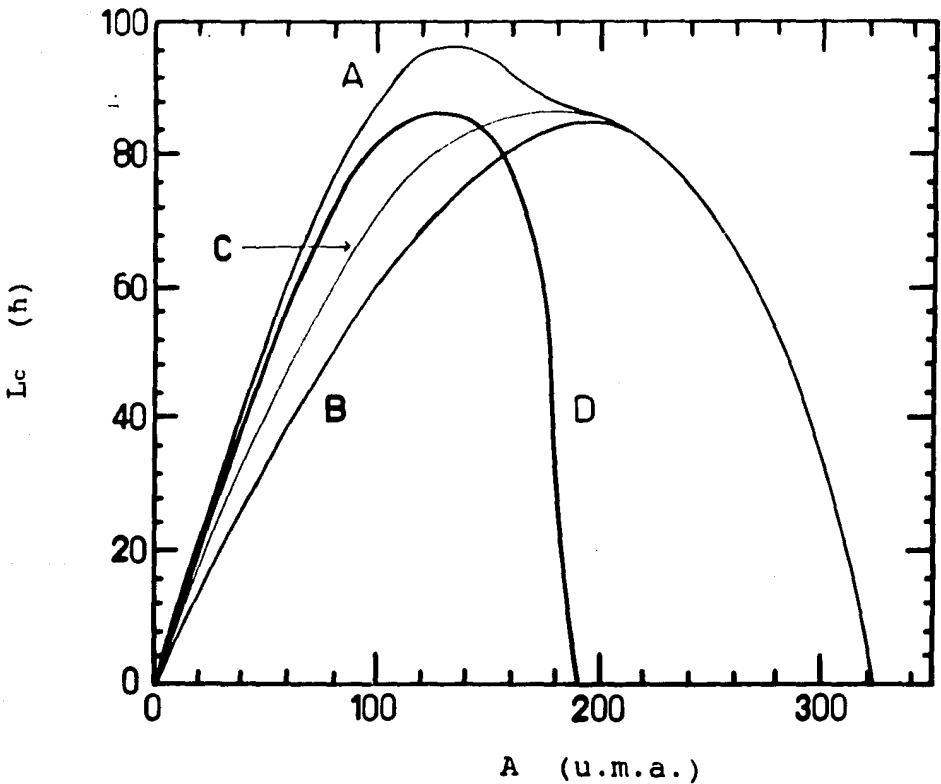


Figura 2.4 Momento Angular Crítico vs. Masa, según los modelos de Cohen (curvas A y B), Beringer-Knox (curva C) y el desarrollado en el capítulo (curva D). La curva A es obtenida cuando la barrera de fisión es cero, contrariamente a la curva B. L es el número cuántico de momento angular (límite).

equivalente a la del caso anterior: existe una similitud en los resultados de ambos modelos para núcleos ligeros, en cambio, para núcleos pesados la discrepancia entre ambos modelos es muy notable.

Cohen et al. realizaron sus predicciones en base a un cálculo dinámico, tratando al núcleo como un sistema líquido macroscópico en rotación, al cual se le minimizó la energía en cada instante de su evolución, partiendo de propiedades y ecuaciones dinámicas, en las cuales no se requiere conocer la forma de la superficie del sistema líquido, contrariamente a lo que postula el modelo aquí formulado, en el cual todos los potenciales son estacionarios y la forma del sistema es fundamental. Esta es la razón por la cual el modelo aquí formulado tiene grandes discrepancias para núcleos pesados con el modelo de Cohen et al., además de la mencionada aproximación al potencial electrostático.

En todo el desarrollo del modelo se ha presentado al momento angular como el responsable de la transición de estado de un sistema líquido deformado. En el caso nuclear existen observaciones experimentales de algunos autores que explican que, efectivamente, para valores superiores a cierto momento angular, el sistema compuesto formado por el choque de dos núcleos termina fisionado. Por otro lado, existen en la naturaleza otros sistemas líquidos, en los cuales también se encuentran presentes los fenómenos de colisiones entre gotas líquidas, como en el caso de la nucleación y crecimiento de gotas en las nubes. El hecho de que exista

un límite de momento angular para núcleos, el cual se ha encontrado tratando a éste como un fluido, se sugiere la idea de encontrar un límite de momento angular para sistemas macroscópicos, es decir, de hacer la extensión de esta propiedad física a gotas comunes. Por tal motivo se ha diseñado un experimento para analizar choques entre gotas macroscópicas y verificar que el momento angular es el agente físico responsable del estado final de un sistema compuesto, en el caso macroscópico. En los capítulos siguientes se muestra el desarrollo experimental y, además, la aplicación del modelo desarrollado al estudio de gotas macroscópicas.

CAPITULO III

Desarrollo Experimental y Resultados

El experimento descrito a continuación tuvo por objeto, establecer si el parámetro que determina la transición entre fusión y fisión (o fragmentación) del sistema compuesto es, como se plantea en el capítulo anterior, el momento angular. Una vez resuelta esta duda, se procedió a la obtención de una serie de valores del momento angular límite L_c en la colisión de un sistema simétrico de gotas de mercurio, como función de su masa.

A. Instrumento Experimental

El instrumento de experimentación fue diseñado para grabar en video el desarrollo de las colisiones de dos gotas de mercurio que se deslizan sobre una superficie de vidrio.

El Instrumento (como se le llamará en lo subsecuente) consiste, esencialmente, de dos rampas situadas en los extremos opuestos de un vidrio plano, desde donde las gotas se deslizan adquiriendo energía por efecto de la gravedad, mientras que una cámara de

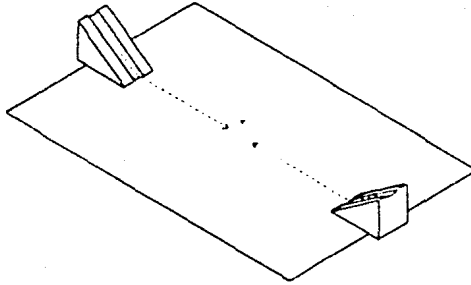


Figura 3.1 Esquema simplificado del Instrumento Experimental, mostrando las trayectorias que siguen las gotas hasta la colisión.

video graba la acción. La figura 3.1 muestra un esquema simplificado de lo que es el instrumento. Los detalles de construcción del instrumento aparecen en el Apéndice 1.

El líquido elegido, para hacer las gotas es el mercurio, el cual cuenta con las siguientes propiedades útiles al fin propuesto:

- a) El mercurio es un líquido que se evapora lentamente.

b) Se le puede conseguir fácilmente con un alto grado de pureza.

c) Es un líquido que moja poco al vidrio, por lo que puede resbalar fácilmente sin impregnarse en él.

Esta última propiedad es muy importante, ya que es la principal interacción con respecto al medio que sufren las gotas. La movilidad de las gotas de mercurio en vidrio ha sido estudiada por A. Menchaca⁶, quien encontró que ésta depende de la rugosidad de la superficie del vidrio y que es óptima si el vidrio ha sido rayado con granos de carborundum de 40 μm de diámetro. El vidrio empleado como superficie experimental cuenta, por lo tanto, con la rugosidad descrita. Además, bajo estas condiciones, M. Chapa P.⁷ demostró que la autointeracción del sistema compuesto formado por la colisión de gotas de mercurio, es mucho mayor que la interacción gota-vidrio.

B. Experimentación

Para establecer si el momento angular es el factor que determina el que haya o no fusión en la colisión entre dos gotas, se necesita variar sistemáticamente el valor del momento lineal p y/o del parámetro de impacto b . Con este objeto, el instrumento permite variar p cambiando la altura desde donde se lanzan las gotas en cada rampa, y variar b cambiando el ángulo de lanzamiento de cada

rampa. Si bien, a partir de la grabación se pueden determinar p y b , se requirió una calibración que permitiera establecer la relación entre altura en la rampa y p , y otra que relacionara los ángulos de lanzamiento con b . Este procedimiento de calibración se explica en el Apéndice 1.

El siguiente paso es, para cada colisión, obtener los valores del momento angular total del sistema en el momento de la colisión. Por tal motivo, se ha empleado un digitalizador de imágenes para analizar las imágenes grabadas y obtener las trayectorias del sistema inicial de gotas. El digitalizador proporciona las coordenadas exactas del centro de masa de cada gota, a lo largo de su trayectoria sobre el vidrio, en un sistema cartesiano fijo en el laboratorio, como función del tiempo. El mecanismo empleado en el digitalizador para obtener las trayectorias de las gotas se describe, con todo detalle, en el Apéndice 1.

C. Sistemas de Referencia

Con el objeto de hacer un análisis de la dinámica de las gotas se han definido dos sistemas de referencia: *el sistema del Laboratorio y el sistema del Centro de Masa.*

El sistema del Laboratorio se ha definido como el sistema cartesiano dado por los ejes del digitalizador y transformado, de su escala intrínseca en "píxeles", a centímetros. El sistema del

centro de masa, como su nombre lo indica, es el sistema ubicado en el centro de masa del sistema formado por las dos gotas. En todo lo sucesivo los valores experimentales estarán dados en unidades del sistema CGS.

En el resto del capítulo se emplearán los símbolos primados ($'$) para denotar a las variables en el sistema del centro de masa. Para el caso de gotas simétricas, el momento angular total en ambos sistemas (centro de masa y laboratorio) coinciden; la demostración se encuentra en el Apéndice 2.

D. Transición determinada por L'

Las posiciones de las gotas, obtenidas por medio del digitalizador, tal como se explica en el Apéndice 1, tienen la información de la trayectoria como función del tiempo. El ajuste de los puntos de la trayectoria permite obtener la posición (r'_i) de cada gota como función del tiempo. A partir de esa información se obtiene el valor del momento angular total en el sistema del centro de masa de las dos gotas, en el instante en el cual se alcanza la distancia mínima entre los centros de masa de cada gota. ($L' = |r'_1 \times m_1 v'_1 + r'_2 \times m_2 v'_2|$, donde r'_1 y r'_2 son las posiciones y v'_1 y v'_2 son las velocidades de cada gota en el centro de masa).

Una vez conseguida la calibración del Instrumento, se hicieron los experimentos correspondientes para medir el L' de

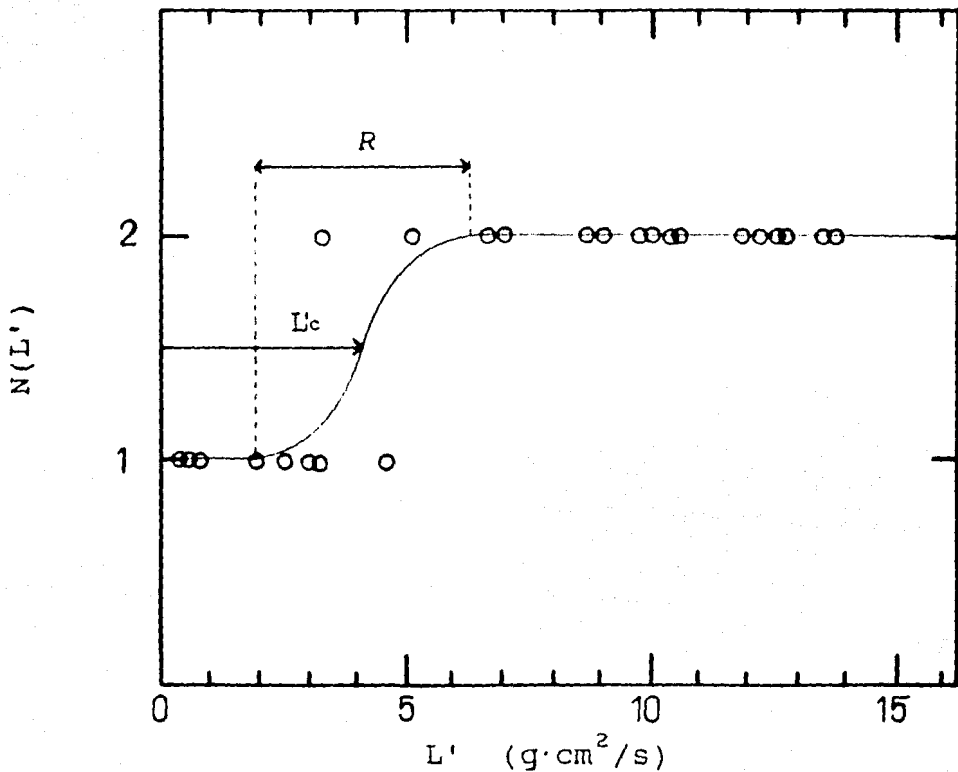


Figura 3.2 Region de transición entre los estados de fusión y fisión para colisiones entre gotas de 1 gramo. Obsérvese que la función binaria $N(L')$ ajusta los resultados experimentales.

parejas de gotas (iguales) con una masa m determinada, variando la velocidad de las gotas y el ángulo entre sus trayectorias. El resultado de 27 experimentos para $m = 1$ g se muestran en la figura 3.2. En ella, el valor de L' se grafica como función de una variable binaria N , tal que $N = 1$ significa que el sistema se fundió (una sola gota final) y $N = 2$ implica que hubo cualquier otro resultado final (rompimiento en dos o más gotas). Como se puede apreciar en una región restringida de valores de L' existe una transición entre $N = 1$ y $N = 2$. Esta es una evidencia de que existe un valor del momento angular L'_c que determina si hay o no fusión, de acuerdo con lo predicho por el modelo del capítulo anterior.

E. Momento Angular Crítico vs. Masa

El próximo paso fue realizar una serie de medidas variando la masa de las gotas para así obtener la dependencia de L'_c en función de m . Las masas empleadas fueron ocho: 0.3, 0.5, 0.8, 1.0, 1.3, 1.5, 1.8 y 2.0 gramos. Cada una de las gráficas 3.3 muestran los 27 valores obtenidos experimentalmente para el momento angular L' de una masa determinada en función de su estado final.

Como puede apreciarse, para cada una de las gráficas 3.3 existe una zona de transición, tal como la explicada en la sección anterior, en la que los valores del momento angular L' correspondiente a los casos de fusión o de fisión se encuentran mezclados,

es decir, no están completamente delimitados por un valor L'_c . Como se puede verificar en todas las gráficas 3.3, cuando las gotas han alcanzado un cierto valor para el momento angular (fuera de la región de transición) ya no se tiene fusión, sino únicamente fisión. Análogamente en el caso inverso.

La función que se empleó para ajustar estos resultados es:

$$N(L') = 2 - \frac{1}{1 + \exp((L' - L'_c)/R)} \quad 3.1$$

La ecuación 3.1 es ampliamente conocida en la física nuclear, pues tiene la funcionalidad de un potencial del tipo Wood-Saxon⁸. Esta ecuación cumple con la definición experimental mencionada arriba: cuando L' es cercana a cero el denominador del segundo término tiende a 1, y el valor de N es 1; cuando el L' es grande el segundo término tiende a cero. Además, R y L' son constantes a determinar mediante un ajuste. Ese ajuste en los datos de las figuras 3.3 se realizó empleando un programa de cómputo que utiliza el criterio de minimizar χ^2 . La ecuación 3.1 proporciona los valores del momento angular crítico L'_c y el valor de R , que representa el ancho de la región de transición. Este último proporciona una estimación de la incertidumbre en los valores obtenidos para el momento angular límite, dada por $\pm R/2$.

Al ajustar todos los valores de los puntos de las gráficas 3.3 por medio de la ecuación 3.1, con el programa 3, se llega a un conjunto de parejas ordenadas (L'_c, m) . La figura 3.4 muestra la

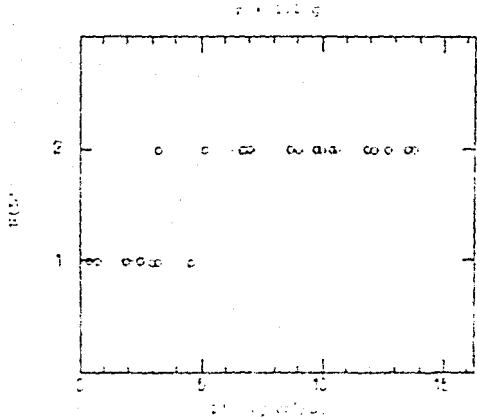
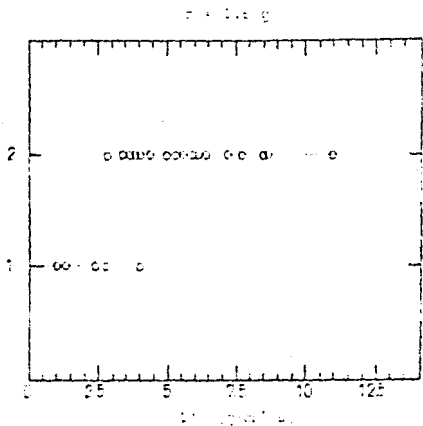
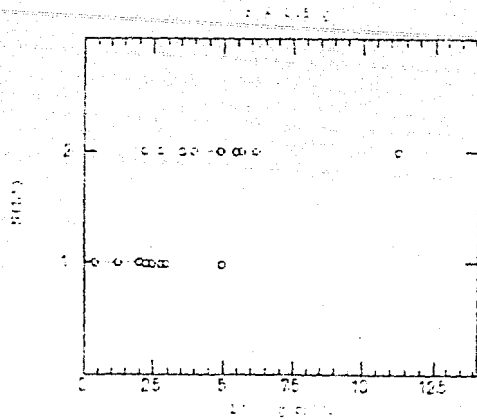
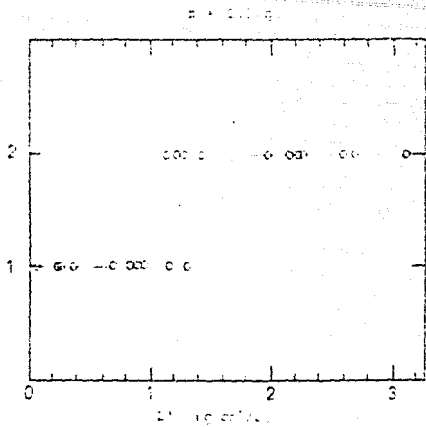


Figura 3.3 Gráficas experimentales del momento angular total vs. su estado final. Las curvas continuas son el ajuste con respecto a la ecuación 3.1.

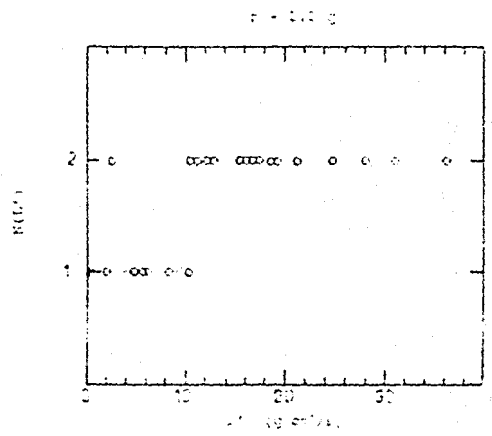
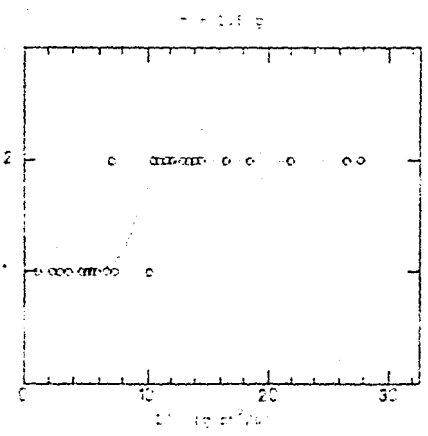
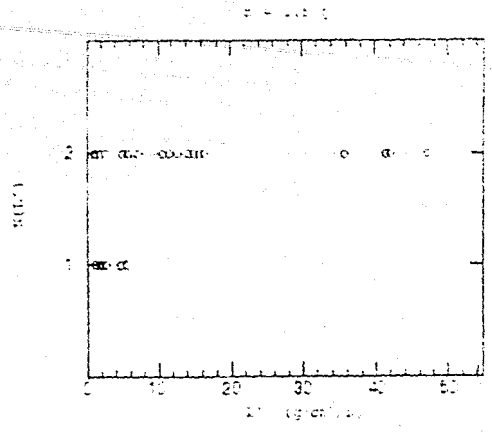
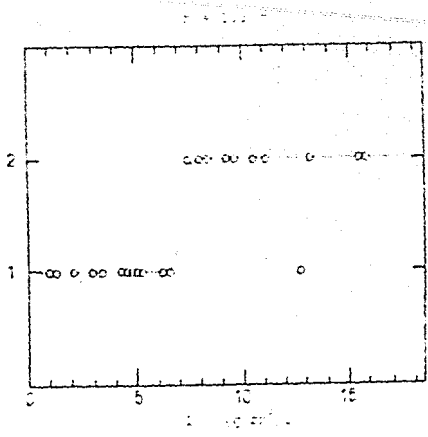


Figure 3.3 Continuación.

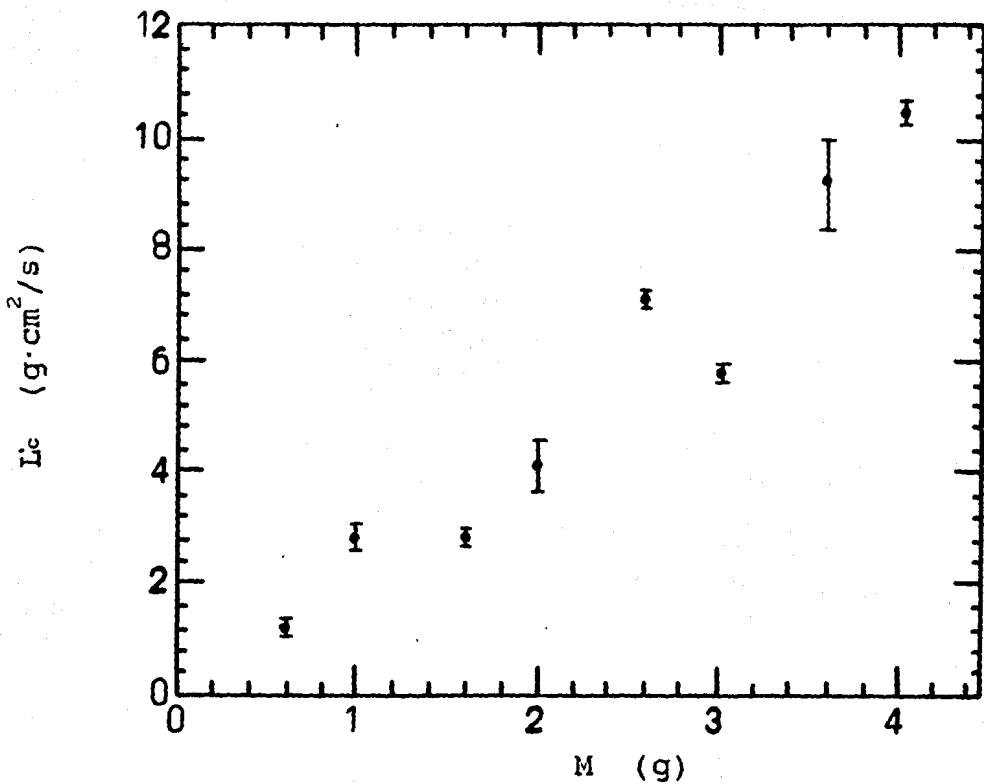


Figura 3.4 Resultados experimentales: Momento Angular Crítico vs. Masa. M es la masa total del sistema compuesto.

gráfica de $L'c$ vs. masa.

En la figura 3.4 se puede apreciar que el comportamiento del momento angular $L'c$ vs. masa es similar al encontrado en el capítulo II para núcleos en la región de núcleos ligeros; en ambos casos la funcionalidad de $L'c$ con respecto a la masa podría aproximarse por una recta.

En el próximo capítulo se comparan estos resultados con la predicción del modelo expuesto en la teoría del capítulo II.

CAPITULO IV

Aplicación del Modelo de Superficie a Gotas Macroscópicas

En el capítulo anterior se describe como se obtuvieron ocho valores experimentales del momento angular crítico como función de la masa del sistema de gotas empleado. En este capítulo se comparan estos resultados con las predicciones del modelo desarrollado en el capítulo II. Como se verá, al aplicar directamente el modelo se encontró que no hay un ajuste satisfactorio, por lo que fue necesario hacer nuevas hipótesis. Como un primer paso se toma en cuenta la forma no esférica de las gotas apoyadas sobre el vidrio. Ya que esta corrección al modelo tampoco reproduce las observaciones, se hace una nueva hipótesis, ahora sobre la posible influencia de la energía vibracional sobre el sistema. Finalmente se verá como, este último efecto, que introduce un nuevo parámetro en el modelo, permite reproducir satisfactoriamente los resultados experimentales.

A. Aplicación directa del Modelo de Superficie

La ecuación 2.3 provee la información necesaria para el

cálculo del momento angular crítico, salvo que en el caso de gotas líquidas sin carga eléctrica, el tercer término $V_e(r)$ no existe, es así como la ecuación para este caso es:

$$W(r) = \frac{L^2}{2\mu r \cdot r} + V_s(r) \quad 4.1$$

Al igual que en el caso nuclear, existe un *pozo de potencial*, el cual determina el estado final del sistema. Por lo tanto, análogamente, para cada masa existe un valor del *momento angular crítico* L_c , para el que se cumplen las condiciones de fusión y fisión descritas en el capítulo II.

El potencial $V_s(r)$, dado por la ecuación 2.2 requiere la tensión superficial del líquido en estudio, que en este caso fue el mercurio. Este elemento tiene una tensión superficial de σ : 435.5 dinas/cm a una temperatura de 20°C, que se considerará como constante para todo el experimento.

Las predicciones de L_c para cada una de las masas experimentales se obtuvieron utilizando un programa de cómputo. La gráfica 4.1 muestra los resultados obtenidos mediante el modelo del capítulo II para gotas de las mismas masas empleadas en la parte experimental. Según se observa en la gráfica de la figura 4.1, la curva calculada mediante el modelo pasa muy por encima de los resultados experimentales.

Dentro de la hipótesis de un potencial, para poder llegar a

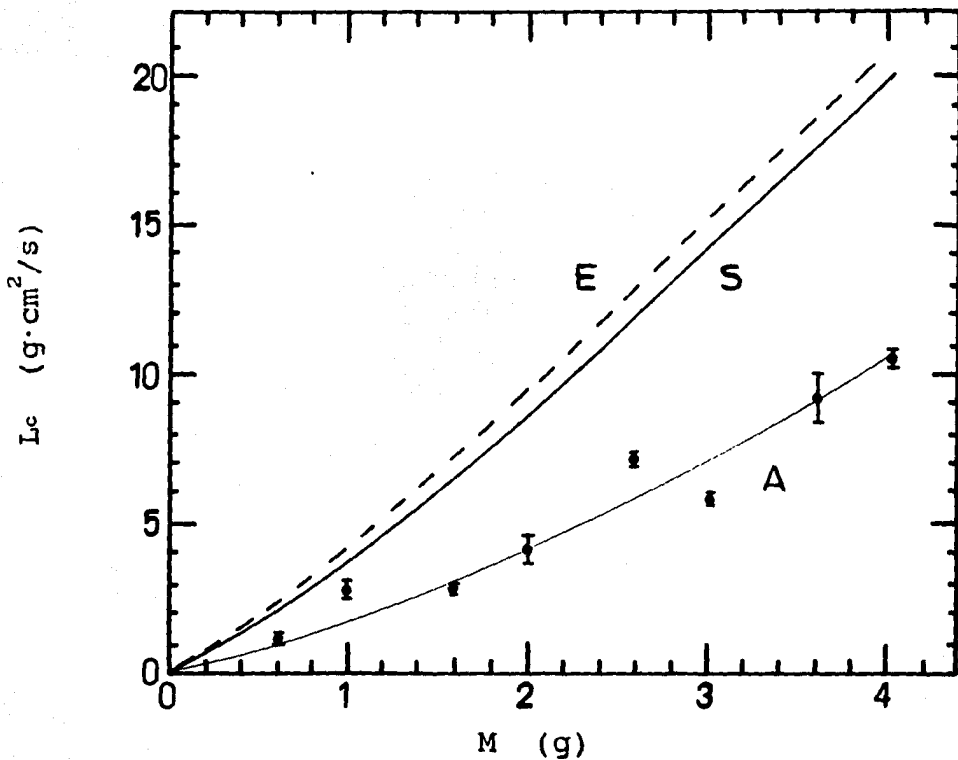


Figura 4.1 Límite de Momento Angular para Gotas vs. Masa, según el modelo de superficie y resultados experimentales. La curva S describe la aplicación directa del modelo esférico del capítulo II; curva E se refiere a la corrección hecha al modelo esférico; y la curva A es el ajuste hecho con el modelo del capítulo II a los resultados experimentales. M es la masa total del sistema compuesto.

un ajuste, habría que reducir su profundidad. ¿Cuál podría ser el origen de esta reducción?

Una aproximación del modelo del capítulo II que podría influir, es aquella que supone que las gotas en colisión poseen una forma esférica. Esta suposición, que es correcta para gotas libres, se encuentra muy alejada de la forma real de gotas que se deslizan sobre una superficie plana en presencia de gravedad.

A continuación se describen los cambios que se efectúan cuando, en lugar de esferas, se supone que las gotas poseen la forma de un elipsoide de revolución.

B. El Modelo de Superficie Modificado (Elipsoides)

La forma geométrica, cuya ecuación es simple y que se parece más que la esfera a la forma que la gota adquiere sobre el vidrio, es la de un elipsoide de revolución oblató, cuyo eje de rotación es normal al plano de movimiento de las gotas. La figura 4.2 muestra la nueva aproximación a la forma de las gotas experimentales: al lado derecho se muestran en un corte horizontal y a la izquierda en uno vertical.

Para revisar los cálculos, en este nuevo modelo de superficie se supondrá que, en la primer etapa, cuando las gotas recién se han tocado, el sistema adquiere la forma de dos casquetes elipsoi-

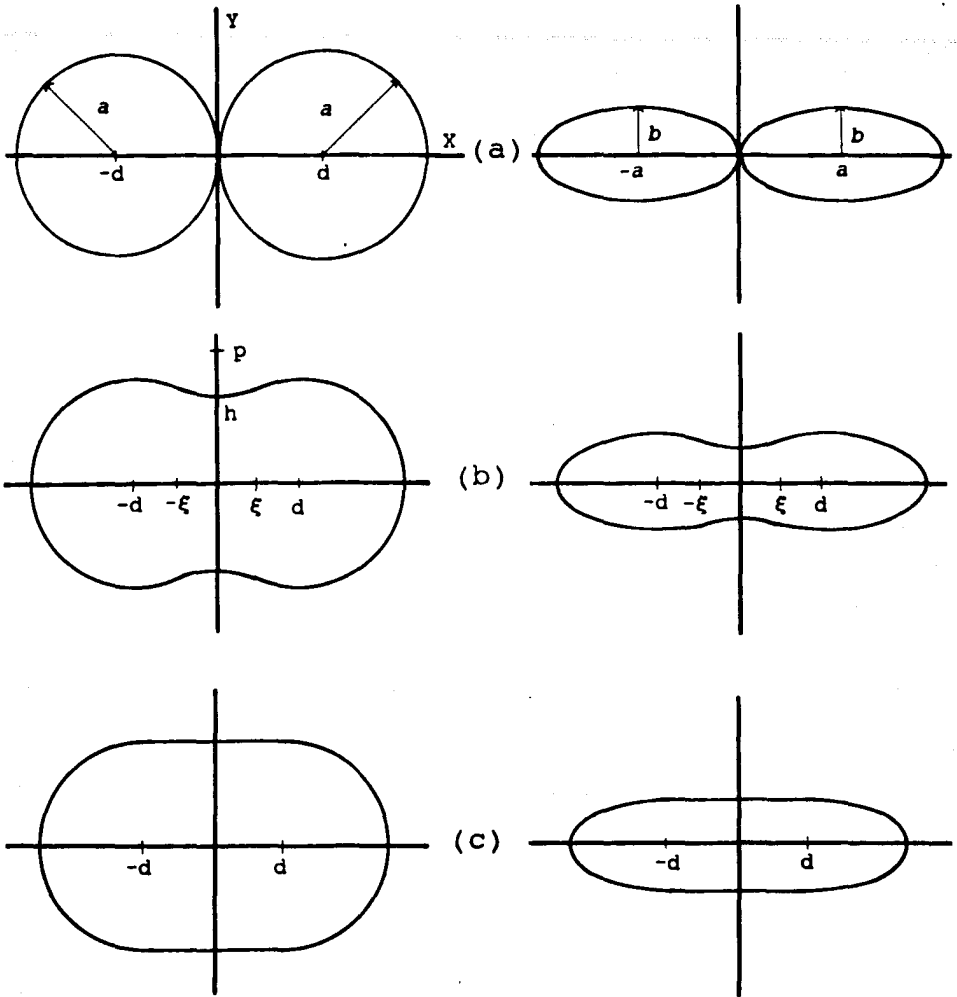


Figura 4.2 Aproximación a la forma de la gota mediante elipsoides oblatos. Únicamente se muestran las formas dadas por el modelo en la región donde $S(r)$ es conocida. Las figuras del lado izquierdo muestran la forma de la gota en el plano de movimiento de las gotas, mientras que las figuras del lado derecho dan la forma de la gota en el plano normal al plano de movimiento.

dales, que se encuentran unidos por un cuello, el cual es una especie de paraboloides de revolución elíptico. En estos cálculos no habrá una segunda etapa, ya que como se verá, la región de distancias r en las que ocurre el mínimo del potencial efectivo se encuentra comprendido dentro de la primera etapa.

Para tener la gráfica de L_c vs. masa, el primer paso es calcular el valor del área de la superficie de la nueva forma de la gota.

El procedimiento para obtener la función $S(r)$ es paralelo al del capítulo II. (La deducción de $S(r)$ únicamente se ha hecho en el primer cuadrante por la simetría de las figuras). Las ecuaciones de la superficie, antes de la colisión son:

$$x > 0 \quad b^2(x - d)^2 + b^2y^2 + a^2z^2 = a^2b^2 \quad 4.2a$$

$$x < 0 \quad b^2(x + d)^2 + b^2y^2 + a^2z^2 = a^2b^2 \quad 4.2b$$

Y después del primer instante de contacto son (ver la figura 4.2):

$$\text{si } x < \xi \quad z^2 + (1 - e^2)y^2 = (h + 4px^2)^2 \quad 4.3a$$

$$\text{si } x > \xi \quad b^2(x - d)^2 + b^2y^2 + a^2z^2 = a^2b^2 \quad 4.3b$$

donde e es la excentricidad del elipsoide y ξ es el punto de la frontera del paraboloides y del casquete elipsoidal.

La excentricidad e del elipsoide se obtiene:

$$e = (a^2 - b^2)^{1/2}/a \quad 4.4$$

Los valores de a y b son obtenidos experimentalmente a partir de las gotas de una masa determinada, cuando éstas se encuentran en reposo. El eje a de algunas masas de gotas de mercurio se ha medido experimentalmente; los resultados pueden verse en la tabla I.

Tabla I

Masa (g)	a (cm)
0.3	0.225
0.5	0.245
0.8	0.300
1.0	0.330
1.3	0.375
1.5	0.400
1.8	0.420
2.0	0.465

Al igual que en el capítulo II, se tienen tres incógnitas: h , p y ξ , y se tienen las mismas condiciones de continuidad. Análogamente, tomando en cuenta las condiciones de continuidad, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\text{si } x < \xi \quad z_1 = h + 4px^2 \quad 4.5a$$

$$\text{si } x > \xi \quad z_2 = \frac{b}{a} (a^2 - (x - d)^2)^{1/2} \quad 4.5b$$

Y las derivadas son:

$$z_1' = 8px \quad 4.6a$$

$$z_2' = -\frac{b}{a} (x - d) / (a^2 - (x - d)^2)^{1/2} \quad 4.6b$$

De las ecuaciones 4.5 y 4.6 se sustituye x por ξ para calcular el valor de p y h :

$$p = \frac{-b}{8ax} (\xi - d) / (a^2 - (\xi - d)^2)^{1/2} \quad 4.7a$$

$$h = -4p\xi^2 + ab / (a^2 - (\xi - d)^2)^{1/2} \quad 4.7b$$

La ecuación del volumen es:

$$V_0 = \frac{\pi}{\beta} \left(h^2 \xi + \frac{8hp\xi^3}{3} + \frac{16p^2\xi^5}{5} \right) + \frac{\pi b}{a} \left(a^2(d + a - \xi) - \frac{a^3}{3} + \frac{(\xi - d)^3}{3} \right) \quad 4.7c$$

donde V_0 es el volumen de uno de los elipsoides iniciales y es $4\pi a^2 b / 3$, y $\beta = (1 - e^2)^{1/2}$.

De esta manera es como se pueden calcular numéricamente los valores de los tres parámetros h , p y ξ , sustituyendo los valores de h y p en la ecuación 4.7c, y mediante un programa de cómputo.

El área de una superficie en tres dimensiones se obtiene por medio de la fórmula siguiente:

$$\iint \left(z_x^2 + z_y^2 + 1 \right)^{1/2} dy dx \quad 4.8$$

donde $z = z(x, y)$, $z_x = \partial z(x, y) / \partial x$ y $z_y(x, y) = \partial z(x, y) / \partial y$; y las integrales son sobre la proyección de la superficie en el plano (x, y) . El área de la superficie está formada por dos partes: el cuello, que es el paraboloide, y los casquetes, que es el elipsoide. El área del paraboloide Σ_1 , en la mitad del sistema compuesto es, calculando las derivadas y sustituyendo en la ecuación 4.8:

$$\Sigma_1(d) = 4 \int_0^{\xi} \frac{(h + 4px^2)(64p^2x^2 + 1)^{1/2}}{\alpha} E(e^2/(64p^2x^2 + 1)) dx \quad 4.9$$

donde $\alpha = (1 - e^2)^{1/2}$ y E es la integral elíptica completa de segunda clase⁹. La función E está definida como:

$$E(\gamma) = \frac{\pi}{2} \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma^n}{2n-1} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^2 \right) \quad 4.10$$

Y el área del casquete del elipsoide es:

$$\begin{aligned} \Sigma_2(d) = & 4 \int_0^a \frac{(a^4 - c^2x^2)^{1/2}}{a} E(c^2(a^2 - x^2)/(a^2 - c^2x^2)) dx + \\ & + 4 \int_0^{d-\xi} \frac{(a^4 - c^2x^2)^{1/2}}{a} E(c^2(a^2 - x^2)/(a^2 - c^2x^2)) dx \end{aligned} \quad 4.11$$

Entonces, el área de la superficie total es:

$$S(r) = 2\Sigma_1(|r/2|) + 2\Sigma_2(|r/2|) \quad 4.12$$

donde las integrales Σ_1 y Σ_2 se calculan numéricamente.

Al igual que en el modelo para esferas, según el capítulo II, se puede calcular una distancia d_0 , para la cual un cilindro de sección elíptica sirve de cuello para los dos casquetes elipsoidales. El resultado es:

$$d_0 = 2a/3 \qquad 4.13$$

Según los cálculos del capítulo II para esferas, se sabe que en las cercanías del punto de contacto entre las gotas ($r = 2R$), la superficie decae muy rápidamente (ver las gráficas S y E de la figura 4.3), y para el resto del intervalo la superficie decae lentamente. Esto tiene como consecuencia que, cuando hay pozo atractivo, este ocurre en la zona correspondiente a la primer etapa (cuando las gotas recién se tocan). Así, a pesar de que para la segunda etapa (cuando los dos casquetes están unidos por un "cilindro" de sección elíptica), no se pudo encontrar una solución analítica, en la práctica sólo fue necesario encontrar el potencial efectivo en la región de la primer etapa. La figura 4.3 muestra una gráfica del potencial $V_s(r)$ para los dos casos del modelo: esferas y elipsoides oblatos. Como se puede apreciar, el valor de L_c queda determinado en las cercanías del punto de contacto, o sea en el intervalo $r \in (2d_0, 2R)$. En la figura 4.1 se muestra la predicción de L_c vs. masa que da esta aproximación "elipsoidal". Obsérvese que la corrección al modelo no sólo no ajusta a los resultados experimentales, sino que pasa por encima

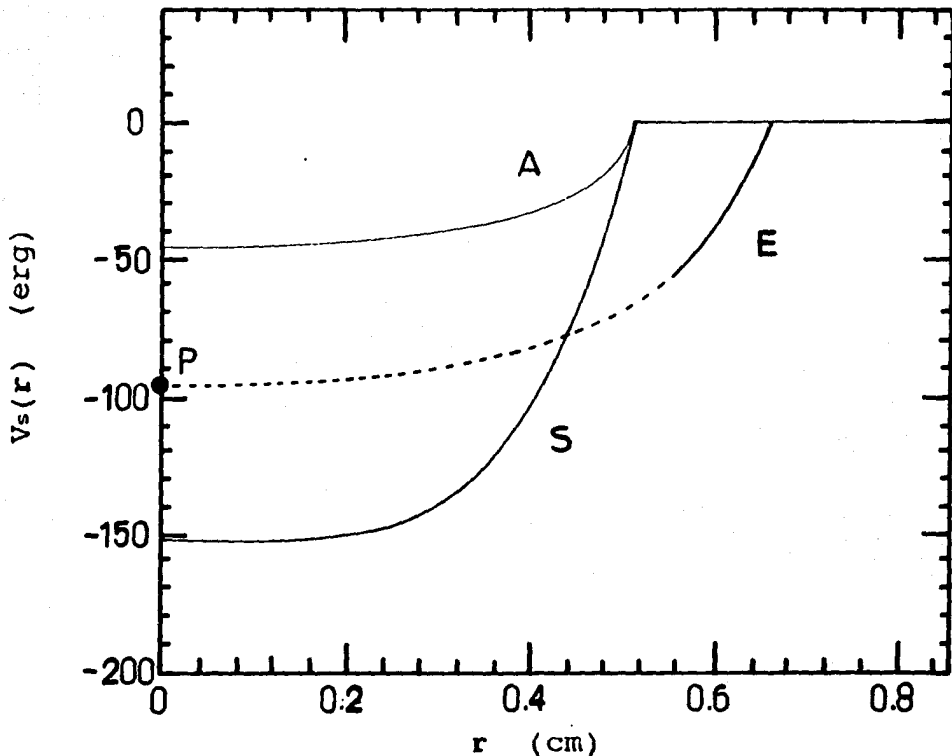


Figura 4.3 Potenciales $V_s(r)$ del Modelo de Superficie para gotas de forma esférica (curva S) y elipsoidal (curva E). La parte discontinua de la curva E corresponde al comportamiento esperado por la curva S(r) en analogía con el caso esférico. El punto P es conocido, ya que las dimensiones del sistema compuesto, en equilibrio, se pueden calcular experimentalmente. La curva A es la reducción hecha al modelo esférico para ajustar los resultados experimentales. Estos potenciales fueron obtenidos para gotas iniciales de 1 gramo.

de los resultados del capítulo II, obtenidos previamente.

El resultado, a primera vista, es un tanto sorprendente si se toma en cuenta que la profundidad del potencial (figura 4.3) para el caso de elipses de revolución, es menor que para el caso de esferas. Esto, por sí mismo, implicaría que las gotas sienten una atracción menor y, por lo tanto, los valores de L_c deberían reducirse. Sin embargo, debe también notarse que, por estar deformes a lo largo de su línea de movimiento, las gotas se tocan para valores de r mayores que en el caso esférico. En esa zona, el potencial centrífugo es menor y, por lo tanto, la suma es dominada por V_s (que es atractivo) para valores de L aun más grandes que en el caso esférico.

C. Energía de Vibración

La deficiencia de los modelos anteriores, podría tener su origen en haber ignorado la energía de vibración del sistema. Esto es, al colisionar, el sistema compuesto adquiere dos tipos de excitación: vibracional y rotacional. Los modelos descritos, tanto para núcleos como para gotas, sólo toman en cuenta un término centrífugo.

La inclusión detallada de deformaciones dinámicas complica el problema considerablemente. Hasta ahora, la rotación no ha sido considerada como una "inelasticidad", es decir, como un mecanismo

que transforme energía relativa, en energía interna. Sin embargo, la vibración es un grado de libertad interno del sistema compuesto. De observar los datos experimentales se puede deducir que la energía de vibración tiene el efecto de reducir la profundidad del potencial, sin aumentar su dimensión radial.

Esto podría deberse al efecto combinado de que, primero, las gotas poseen más superficie que cuando están quietas, por la vibración, pero su radio promedio sigue siendo el de la gota estática, resultando en un menor momento angular crítico L_c .

Si bien no existen medidas experimental de la energía de vibración, lo anterior se puede probar intentando un ajuste de los datos experimentales según el modelo esférico. La figura 4.1 muestra tal ajuste en el que el potencial $V_s(r)$ debió ser reducido en un 73%. La figura 4.3 muestra la reducción hecha al potencial esférico $V_s(r)$. Como se puede apreciar, el concepto de deformación dinámica con un radio promedio fijo reproduce la forma de las observaciones.

CAPITULO V

Conclusiones

Después del análisis de los datos experimentales y de la aplicación del modelo formulado, se llegó a las siguientes conclusiones:

1) Para gotas macroscópicas el momento angular es determinante en la fusión, es decir, existe un valor crítico (L_c) a partir del cual el sistema se fusiona o no.

2) El momento angular crítico depende de la masa del sistema.

3) Tal efecto se puede modelar cualitativamente, en base a considerar la competencia entre dos fuerzas, una atractiva (la de superficie) y otra repulsiva (la centrífuga).

4) Una comparación cuantitativa del modelo con los datos, aún tomando en cuenta los efectos geométricos de una deformación estática, discrepa considerablemente de las observaciones.

5) Cuando el efecto de una deformación dinámica es tomado en cuenta, es posible ajustar los datos experimentales.

6) Este modelo reproduce, al menos en la zona de masas pequeñas, los resultados de cálculos hidrodinámicos más complejos.

7) Un término vibracional, no considerado en el caso nuclear, debería ser incluido, cuando se trate del análisis de colisiones nucleares.

APENDICE 1

Este Apéndice detalla el diseño y construcción del Instrumento experimental, de las etapas del desarrollo de las colisiones de las gotas de mercurio y el análisis de las grabaciones efectuadas, por medio de un digitalizador de imágenes.

A. El Instrumento Experimental

El Instrumento ha sido diseñado para grabar las colisiones de las gotas de mercurio de la forma siguiente: la superficie del vidrio es iluminada por debajo, para obtener únicamente la sombra de las gotas dentro de un campo totalmente blanco (el vidrio), consiguiéndose una imagen con prácticamente dos colores: el color blanco, que es el fondo, y el color negro, que es la gota. Por tal motivo la grabación tiene que ser efectuada en un cuarto oscuro. Como ya se mencionó en capítulos anteriores, el Instrumento cuenta con tres elementos principales: una superficie de vidrio, una cámara y dos rampas, los que a su vez tienen algunos dispositivos auxiliares los que, en las líneas siguientes se describen detalladamente.

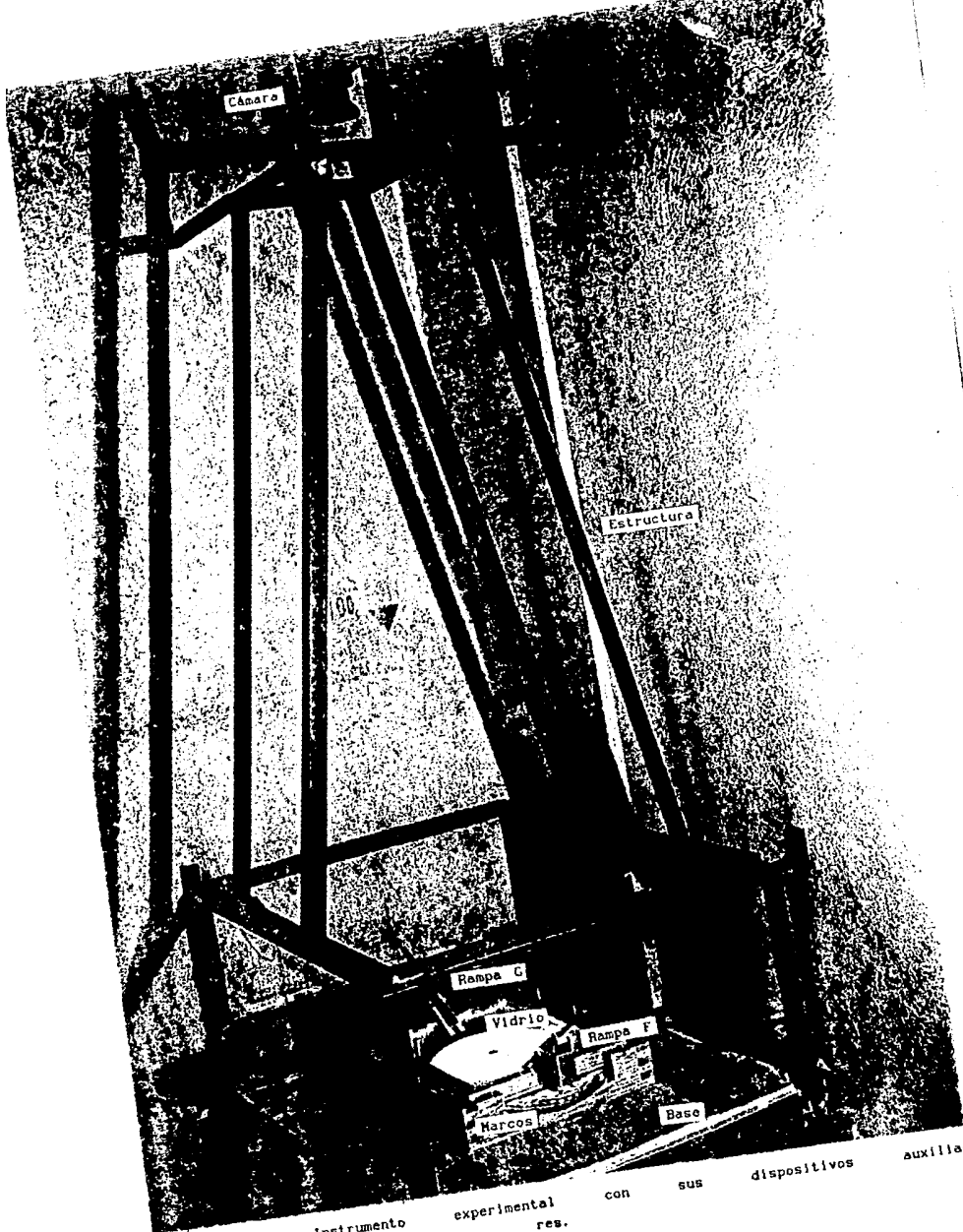


Figura A1.1 Instrumento experimental con sus dispositivos auxilia-

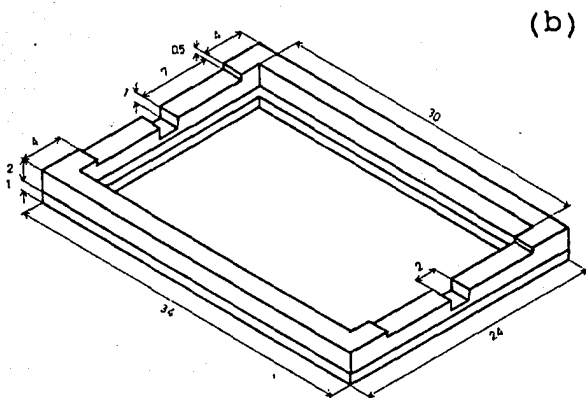
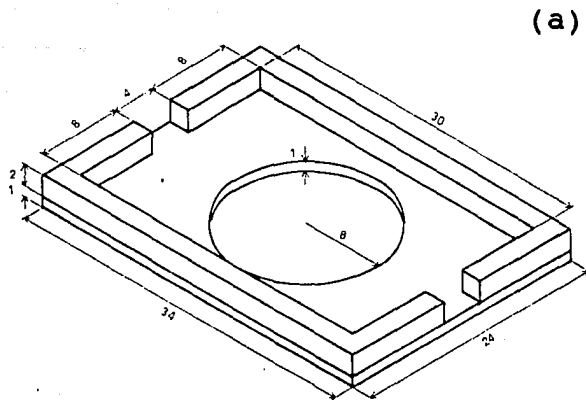


Figura A1.2 Marcos superior e interno. Escala en centímetros.

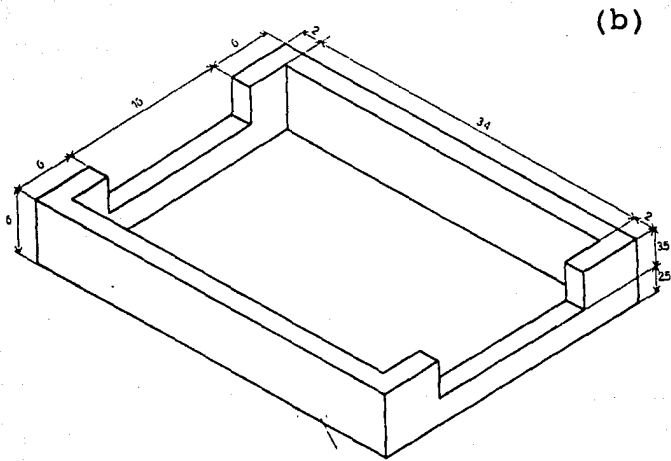
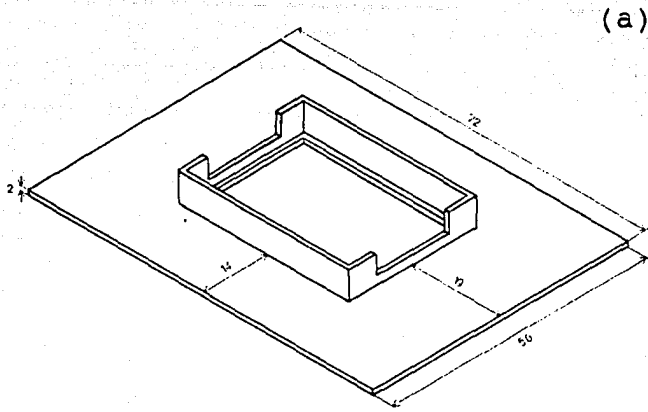


Figura A1.3 Base de madera y marco de apoyo. Escala en centímetros.

La superficie de vidrio y las dos rampas se encuentran contenidas dentro de un marco de madera, al que se le denomina marco superior. (Ver la figura A1.2). Las rampas son removibles, ya que son atornilladas al marco. El vidrio es sujetado con cinta adhesiva al marco superior, la cual evita que las gotas puedan derramarse durante una colisión. Además, el marco superior tiene, en su región central, un agujero circular por donde penetra la luz durante la grabación.

Bajo el marco superior se localiza otro marco de madera (ver la figura A1.2), llamado marco interno. Este marco sostiene un vidrio rayado, cuya función es dispersar la luz proveniente de una lámpara situada por debajo de él (ver figura A1.1). Entre los dos vidrios existe una cavidad vacía (sólo contiene aire), la cual sirve para reducir la cantidad de calor que llega al vidrio principal. El vidrio principal no debe calentarse mucho, ya que ello contribuye a que el mercurio se vaporice más rápido y pueda ser nocivo para los experimentadores.

Los dos marcos mencionados, conjuntamente con los elementos a los que sirven de apoyo, se localizan dentro de una base, también de madera, y sobre la estructura metálica (ver figura A1.1 y A1.3). Según se observa en la figura A1.3a, se ha hecho un agujero en el centro de la base para permitir el paso de la luz.

La construcción de las rampas se puede apreciar en la figura A1.4a. Las rampas han sido construidas en lucita, contando con un

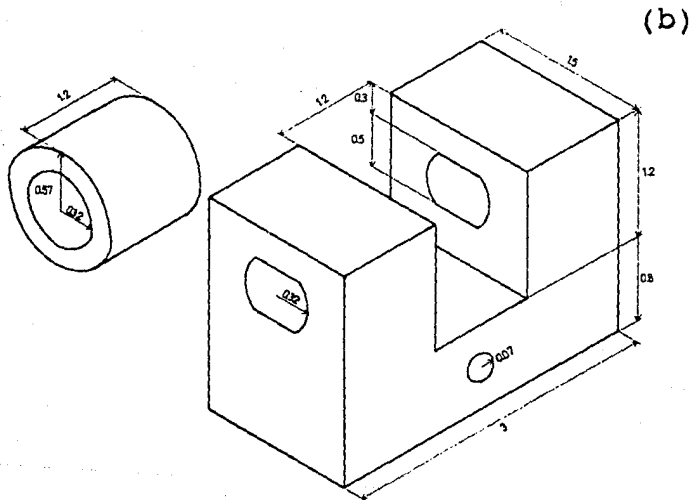
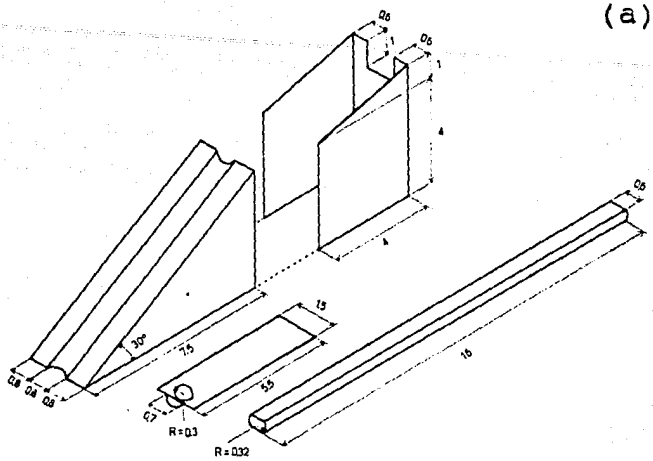


Figura A1.4 Rampa, lengüeta, tornillo y placa de sostén. Escala en centímetros.

canal cilíndrico en su centro, por donde resbalan las gotas. La lucita es fácil de cortar y moldear, además de que no sufre efecto químico alguno al ponerse en contacto con el mercurio. Las dimensiones del canal son ligeramente diferentes para cada rampa, denominándose como sigue: rampa F para la que tiene el canal angosto (4 mm de diámetro) y rampa G (6 mm de diámetro) la que lo tiene más amplio. Cada rampa tiene una escala, hecha en papel milimétrico, paralela al canal. Una placa metálica circunda a cada rampa en su parte posterior, la cual sirve de apoyo a un tornillo que tiene dos cortes longitudinales paralelos (ver figura A1.4a); este cuenta con una pequeña placa metálica en su extremo interior, la cual termina con una lengüeta; esta lengüeta detiene a las gotas sobre el canal; además, indica el valor de la altura a la que suelta la gota de acuerdo con la escala de la rampa. El tornillo es sujetado al resto de la estructura metálica de la rampa mediante el dispositivo metálico de la figura A1.4b; este pequeño buje permite al tornillo deslizarse hacia adentro o hacia afuera, sin que el tornillo gire, haciendo girar la tuerca. Sobre el tornillo que mantiene unido al buje con la placa metálica se ha colocado un resorte; este resorte jala al buje para que el tornillo principal esté lo más sujeto posible al canal; evitándose así que la gota pueda resbalar. Este mecanismo permite dejar caer a las gotas de diferentes alturas. Los tornillos y las placas metálicas han sido construídas de acero inoxidable para evitar el fenómeno de amalgamación con el mercurio.

Por último, la cámara ha sido situada en la parte superior de

la estructura metálica, a una distancia de 1.20 m, a la cual se consigue el foco mínimo.

B. Preparación

La preparación del Instrumento antes de la grabación es la siguiente:

Lavado del vidrio. El vidrio se lava primeramente con agua y jabón varias veces, para quitar cualquier tipo de basura y partículas macroscópicas; luego se lava con un sistema de ultrasonido, el cual elimina todo tipo de partículas microscópicas. Finalmente, se utiliza alcohol para quitar el exceso de agua adquirida durante el lavado previo.

Nivelar el vidrio por medio de los tornillos.

Ajustar el enfoque y la velocidad de obturación de la cámara. El tiempo de obturación para este tipo de experimentos es de $1/4000$ de segundo, y el enfoque mínimo, como ya se mencionó, es a una distancia de 1.20 m.

Ajustar el ángulo de las rampas al cual se lanzarán las gotas. Este ángulo es sumamente importante ya que es el que define el parámetro de impacto al instante de la colisión. El ángulo puede ser modificado haciendo rotar las rampas.

Ajustar la altura a la cual se dejarán caer las gotas.

C. Calibración del momento lineal de las gotas

El objetivo de la calibración es conseguir un buen número de colisiones simétricas en el centro de la superficie experimental, coincidiendo con el centro del campo de la cámara. De esta manera, si las colisiones son simétricas la cámara filmará el mismo número de imágenes para ambas gotas.

El número de imágenes tomadas por la cámara constituye el número de puntos de la trayectoria de cada gota. Es importante tener el número más grande posible de puntos, para conseguir así un mejor ajuste en la trayectoria. Para resolver este problema se ha hecho la calibración de los momentos lineales de las gotas, en función de las alturas de las escalas de las rampas.

En esta sección se llamará altura al valor observado en las escalas de las rampas, pero el cual no es propiamente la altura a la cual se deja caer la gota, sino únicamente un parámetro que sirve para indicar el valor del momento lineal de la gota sobre la superficie experimental, en el instante en que aparece en el campo de la cámara.

La calibración se ha hecho para diferentes masas y para las

dos rampas. El procedimiento de calibración para cada rampa se describe a continuación:

1) *Elegir una masa.* Las masas de las gotas empleadas para la calibración fueron: 0.5 g, 1 g ó 1.5 g para la rampa F, mientras que para la rampa G las masas fueron 1 g y 1.5 g (no se hizo la calibración para gotas de 0.5 g porque su movimiento a lo largo del canal de la rampa es un poco caótico y al llegar a la superficie del vidrio no siempre se mueven en línea recta; pero esto no impide hacer colisiones entre gotas de esta masa, ya que lo importante, desde el punto de vista de la colisión, es que el choque tenga lugar). Se han elegido sólo estos valores porque únicamente se requiere tener una aproximación en el momento lineal para hacer las colisiones; la calibración de una rampa para una masa, se usó con buenos resultados para las otras masas; es por ello que sólo se efectuaron las calibraciones para las masas citadas anteriormente.

2) *Elegir una altura.* Los valores de las alturas fueron los siguientes: 7 mm, 14 mm, 21 mm, 28 mm, 35 mm y 42 mm. La escala se dividió en 6 partes iguales.

3) *Anotar el tiempo dado por la cámara.* El tiempo que da la cámara es importante para saber a qué masa corresponde la trayectoria filmada.

4) *Filmar la escala sobre el vidrio.* Se filman dos escalas: una

vertical y otra horizontal (ortogonales entre sí).

5) Grabación de la colisión.

6) Repetir los pasos 3, 4 y 5 cinco veces. Esto se hace con el fin de tener una serie de datos, a partir de los cuales se pueda hacer un promedio.

7) Cambio de altura. Repetir del paso 3 al 6 cinco veces, para obtener datos para las seis alturas definidas anteriormente.

8) Cambio de masa. Repetir desde el paso 1. Así se hacen los experimentos para cada masa.

9) Cambio de rampa. Repetir desde el paso 1 para la nueva rampa.

Los valores de la masa de cada gota y del tiempo de inicio de filmación son registrados. El procesamiento de la cinta es el siguiente:

La grabación es mostrada en una televisión común (blanco y negro), de donde se miden las distancias del centro de masa de la imagen de cada gota (el centro de masa se tomó por tanteo), con respecto al punto inicial de la pantalla de la televisión. Las escalas filmadas al principio de cada serie de experimentos proporciona la información necesaria para hacer una transformación lineal: se multiplica el valor de las distancias medidas directa-

mente sobre la pantalla de la televisión por el factor que depende de la razón del valor real de la escala entre el valor de la escala medida sobre la pantalla. De esta manera se obtiene una serie de parejas ordenadas (x_i, t_i) , donde x_i son las distancias y t_i son los tiempos a partir de la primera imagen (donde el tiempo se considera 0); el intervalo entre dos imágenes consecutivas de gotas siempre fue de 1/30 s, que es el tiempo que proporciona la cámara entre cada cuadro.

En el citado trabajo de A. Menchaca⁶ se muestra que la velocidad de una gota sobre la superficie del vidrio es:

$$v(t) = v_0 \exp(-\beta t/m) \quad \text{A1.1}$$

donde m es la masa de la gota, v_0 es la velocidad inicial de la gota en el instante en el cual aparece en el campo de la cámara, y β es un parámetro que depende de las fuerzas disipativas de fricción.

Para obtener los valores de v_0 y β se utilizó un programa de cómputo. Como se tienen cinco valores diferentes de v_0 y β para cada altura y una misma masa, se hace un promedio de ellos. Finalmente, se llega a una serie de parejas ordenadas de la forma (h_i, p_i) , donde h_i son las alturas de las rampas y p_i son los momentos iniciales.

Las gráficas de la figura A1.5 muestran la calibración de p_i

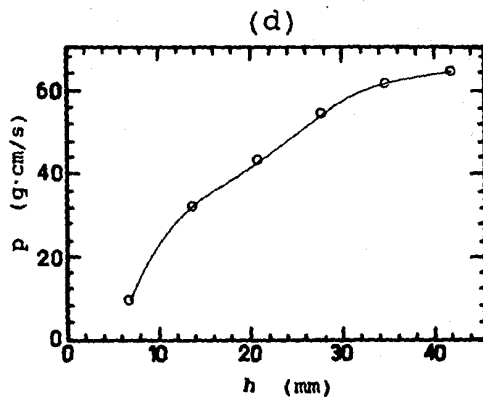
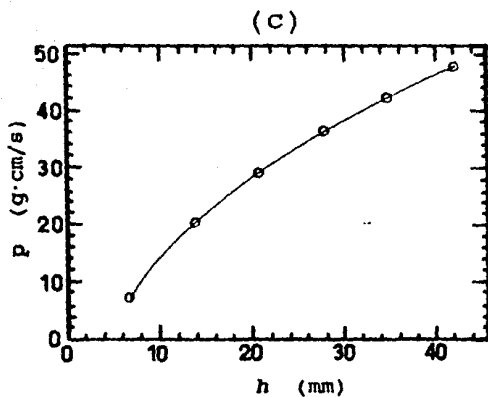
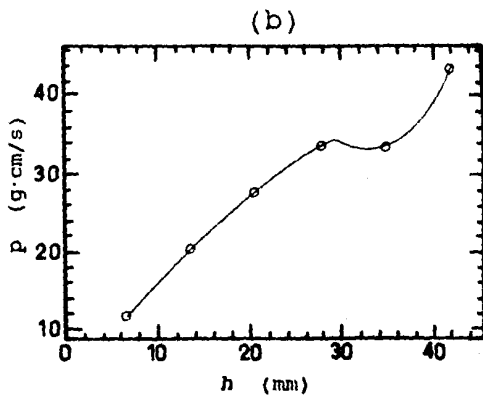
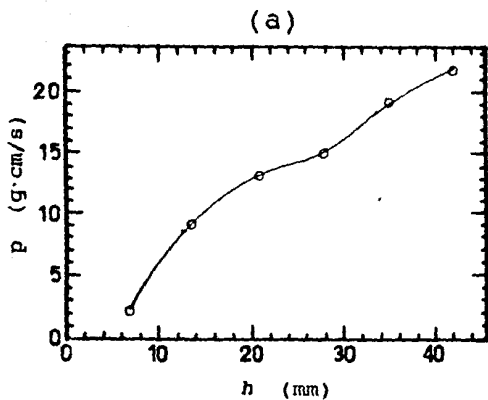


Figura A1.5 Calibración de las rampas: p vs. h: (a) rampa F-0.5 g; (b) rampa F-1.0 g; (c) rampa F-1.5 g; (d) rampa G-1.0 g. La incertidumbre en h es tan pequeña que no sobrepasa las acotaciones de los puntos experimentales; la incertidumbre en p es menor del 10%.

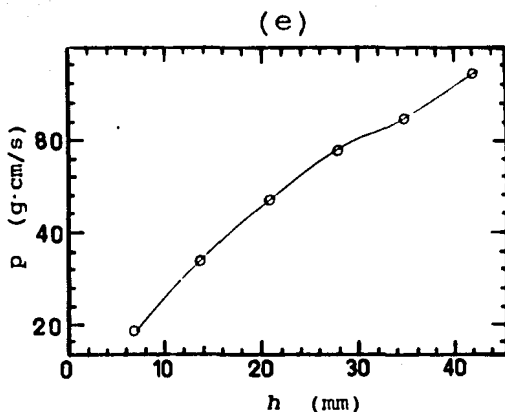


Figura A1.5 Continuación. Rampa G-1.5 g.

respecto de h para masas de 0.5, 1.0 y 1.5 gramos. Los puntos experimentales no han sido unidos por medio de ajuste alguno, sino únicamente por medio del paquete de graficación *Top-Drawer*, el cual se encuentra implementado en el sistema de la MVAX-39 del IFUNAM. Esto se hizo así porque la calibración es sólo aproximada.

D. Medición de las masas de las gotas

Un punto muy importante dentro de todo el desarrollo

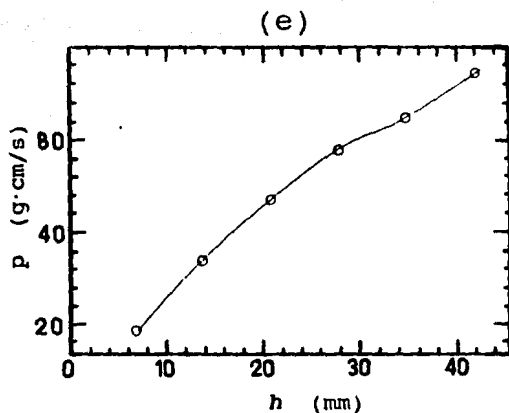


Figura A1.5 Continuación. Rampa C-1.5 g.

respecto de h_1 para masas de 0.5, 1.0 y 1.5 gramos. Los puntos experimentales no han sido unidos por medio de ajuste alguno, sino únicamente por medio del paquete de graficación *Top-Drawer*, el cual se encuentra implementado en el sistema de la MVAX-39 del IFUNAM. Esto se hizo así porque la calibración es sólo aproximada.

D. Medición de las masas de las gotas

Un punto muy importante dentro de todo el desarrollo

experimental lo constituye el *pesado de las gotas*. Las masas de todas las gotas empleadas, desde la calibración hasta el último choque, son determinadas por medio de una *balanza analítica*; este aparato permitió conocer la masa de una gota hasta una precisión de ± 0.0001 gramos, más que suficiente para nuestro propósito, ya que la masa más pequeña empleada fue de 0.3 gramos.

Antes de proceder a medir las masas de las gotas se hicieron ciertos arreglos. El mercurio, por ser un líquido, se evapora según el medio ambiente en el que se encuentre, por lo que necesita estar dentro de un recipiente. Para este efecto se dispuso de una serie de *pequeñas botellas* en las cuales, una vez medida la gota, se depositaba en ellas, para evitar así la evaporación del mercurio; de esta forma fue posible manejar al mercurio de una manera adecuada y segura. (Las gotas de la masa en cuestión fueron obtenidas mediante un jeringa hipodérmica la que, sobre su aguja, contaba con un tubo capilar; este tubo fue graduado previamente para conseguir, por el simple llenado del tubo, una masa de mercurio muy próxima a la que se quería obtener). Estas botellas fueron numeradas previamente desde el número 1 hasta el 60. Las botellas fueron obtenidas de la conocida solución inyectable (agua destilada) de uso médico, en su presentación de 3 ml. Las botellas fueron vaciadas y puestas a secar; su masa también fue determinada por medio de la balanza analítica y registrada, para luego ser usadas como recipientes.

E. Desarrollo de las colisiones entre las gotas

Como ya se ha mencionado anteriormente, el objetivo de los experimentos es obtener una gama de valores diferentes para el momento angular, en el instante mismo de la colisión, relacionando a éste con la información del número de partículas resultantes después de la colisión. Para lograr este objetivo es necesario variar de alguna manera el momento angular. El momento angular es una magnitud física, que en el caso de colisiones, depende de dos parámetros fundamentales: el parámetro de impacto entre las gotas y la velocidad de cada gota. El diseño del Instrumento experimental permite variar ambos parámetros. En las líneas siguientes se explica el procedimiento para variar adecuadamente el momento angular.

El parámetro de impacto ha sido variado de la siguiente forma: las rampas pueden rotarse un cierto ángulo, de tal forma que si se rotan las dos rampas sólo unos cuantos grados se tendrá un ángulo más grande. Se han definido los siguientes términos para identificar el tipo de choque dependiendo de la variación que se haga sobre el parámetro de impacto:

1) *Colisiones frontales*. El parámetro de impacto es casi cero; el choque se realiza totalmente de frente.

2) *Colisiones rasantes*. Una gota apenas toca a la otra tangencialmente.

3) *Colisiones poco rasantes.* Un caso intermedio entre los dos anteriores; una gota se acerca lo suficiente a la otra para poder interactuar más ampliamente que en el caso rasante.

Para conseguir un ángulo entre las rampas que proporcione uno de los tres casos anteriores se requiere hacer una serie de choques previos (con gotas de la misma masa de la cual se efectuarán los choques que serán procesados posteriormente), de tal forma que se pueda ver, a simple vista, que ya se tiene el caso deseado. Este proceso tiene que hacerse cada vez que se cambia de altura y de ángulo.

Para variar la velocidad únicamente se necesita colocar más arriba a la gota (la velocidad se incrementa) o más abajo (la velocidad disminuye). Los valores utilizados para las velocidades quedan entonces determinados, según la calibración explicada anteriormente en esta sección.

Un aspecto muy importante de todas las colisiones es el siguiente: *no se ha visto en todos los eventos efectuados que exista un choque exactamente igual a otro anterior, bajo las mismas condiciones de altura, masa y velocidad.* Entonces, para obtener un momento angular distinto, aunque del mismo orden que otros, sólo se necesita hacer otro choque bajo las mismas condiciones ya especificadas.

Debido a lo mencionado en el párrafo anterior, se tomaron las siguientes condiciones para el desarrollo de colisiones para una misma masa:

**ESTA TESIS NO DEBE
SALIR DE LA BIBLIOTECA**

Se elige un altura de las tres que se tienen según la calibración; una vez establecida una altura se varía el ángulo entre las rampas para tener los tres casos del parámetro de impacto, según se han definido; para cada ángulo se han hecho tres experimentos bajo las mismas condiciones. Se repite todo para cada una de las tres alturas calibradas, filmando y registrando el tiempo como ya se ha explicado. El número total de choques realizados, para una misma masa fue de 27. Este número de eventos proporciona la información suficiente para poder obtener el ajuste deseado.

Al igual que en el caso de la calibración, antes de empezar a hacer cualquier filmación de colisiones es necesario filmar la escala: tanto en el eje vertical como en el horizontal. Esto se tiene que hacer en dos casos: cuando se monta la cámara y se establecen las condiciones de filmación, y cuando la cámara se apaga automáticamente cuando no se está utilizando (ocurre cada 5 minutos). Cualquier movimiento que se haga sobre la cámara, por pequeño que sea, puede traer como consecuencia la inutilidad de la escala filmada previamente.

Una vez filmados todos los choques para todas las ocho masas, se procede a determinar la trayectoria de cada gota, y para cada

experimento, como función del tiempo. Los detalles aparecen en el apartado siguiente.

F. Cálculo de la trayectoria

La filmación proporciona una serie de cuadros (imágenes) espaciados a intervalos iguales de tiempo. Estas imágenes fueron analizadas por medio de un *digitalizador de imágenes*. El digitalizador muestra en una pantalla de video un sólo cuadro a la vez. La pantalla cuenta con una escala en *pixeles*. Cada pixel representa una área muy pequeña de la imagen filmada, en la cual sólo existe un color, que tiene una representación por medio de un número entero.

El digitalizador reconstruye las imágenes de la película por medio de *pixeles* en su propia pantalla. La resolución del digitalizador empleado es de 512×512 , localizados en un sistema de coordenadas cartesianas. Entonces, el digitalizador cuenta con dos ejes ortogonales: eje X y eje Y, cada uno con 512 *pixeles* de longitud. Este digitalizador cuenta con una escala de 128 tonos, los cuales van desde el negro hasta el blanco. El digitalizador no deforma las imágenes ya que la escala en los dos ejes es la misma. Luego, como la gota es oscura casi en su totalidad y la superficie experimental es muy clara, puede hacer una diferenciación muy precisa entre la gota y la superficie por medio del digitalizador, ya que existen una diferencia del orden de 120 tonos entre la gota

y la superficie.

Una vez que se ha mostrado una imagen en la pantalla del digitalizador el siguiente paso consiste en generar un archivo con el valor del tono de todos los pixeles que constituyen la imagen; pero este proceso es demasiado lento y se producen algunos problemas muy graves durante la creación del archivo.

La solución a este problema consiste en determinar manualmente el centro de masa de cada imagen por medio del cursor de mouse del digitalizador (el digitalizador es manejado siempre con este mecanismo). El digitalizador proporciona el valor de las coordenadas de la posición en donde se encuentra el cursor; estas coordenadas son dadas en términos de los ejes (X,Y) de la pantalla del digitalizador. Este procedimiento es válido por la razones siguientes:

Los tamaños de las imágenes completas de las gotas, en términos de pixeles, no son mayores de 2000 pixeles para toda la superficie de la imagen. Este número comparado con los 252,144 pixeles, que es el total de la pantalla, es prácticamente despreciable. Entonces, los errores en la posición del centro de masa pueden ser del orden de algunos pixeles. Este error escasamente afecta a la trayectoria, ya que esta se encuentra determinada en el rango de 250 pixeles. El caso que resulta más afectado es cuando se tienen más imágenes (a lo más se han llegado a tener 15 imágenes de cada gota, en total) porque las diferencias entre las distintas (por

cada 1/30 segundo) posiciones de las gotas son menores cuando están más cercanas entre sí, y son del orden de 20 pixeles en promedio. En este caso existe un error más sensible en los centros de masa, pero el número de imágenes es grande. Por otro lado, cuando se tienen algunas imágenes (cuatro o cinco en caso extremo) las distancias entre los centros de masa es bastante grande (del orden de 50 pixeles en promedio) y, por lo tanto, algunos pixeles más o menos no son muy significativos para cálculos posteriores.

En los dos casos anteriores el error en la determinación de los centros de masa se traduce en una mayor o menor incertidumbre en la trayectoria y, finalmente, en el momento angular.

Para cada imagen de la película se calculó la posición del centro de masa por el método ya descrito. En caso de encontrarse alguna escala (las cuales se filmaron al principio de cada experimento) también se tomaron ciertas posiciones para obtener el factor de transformación, el cual lleva de las posiciones en pixeles, a posiciones en centímetros. Se hizo un archivo para cada colisión de la manera siguiente: en el primer renglón los valores del factor de transformación para los dos ejes coordenados; en el segundo se colocan los índices de inicio y término de las imágenes: a la primera imagen se le asigna el valor 1 y así sucesivamente hasta que finaliza la colisión; a partir del tercer renglón las posiciones de la gota como parejas ordenadas (x_1, y_1) en términos de pixeles, luego se repitió lo mismo para la otra gota. En realidad se tienen ternas ordenadas de la forma (x_1, y_1, t_1) , en

donde el término t_i se encuentra dentro de los archivos en forma implícita: el intervalo entre cada imagen siempre es de $1/30$ seg. Estos archivos se encuentran en la memoria externa de la MVAX-39 del IFUNAM.

APENDICE 2

Los resultados reportados en el capítulo III fueron obtenidos en el sistema del centro de masa. En el caso en el que se tiene un sistema simétrico, los valores de L'_c en el centro de masa coinciden con los de L_c en el sistema relativo, según se demuestra a continuación.

Sea L' el momento angular total en el centro de masa:

$$L' = L'_1 + L'_2 \quad A2.1$$

donde:

$$L'_1 = \mathbf{r}'_1 \times m_1 \mathbf{v}'_1 \quad A2.2a$$

$$L'_2 = \mathbf{r}'_2 \times m_2 \mathbf{v}'_2 \quad A2.2b$$

Los vectores de posición en el centro de masa son:

$$\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{R} \quad A2.3a$$

$$\mathbf{r}'_2 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{R} \quad A2.3b$$

Donde \mathbf{R} es la posición del centro de masa respecto al sistema de laboratorio y \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 son las coordenadas de cada partícula en el sistema del laboratorio. El vector \mathbf{R} tiene la forma:

$$\mathbf{R} = (m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2)/(m_1 + m_2) \quad \text{A2.4}$$

Análogamente, el vector \mathbf{V} tiene la forma:

$$\mathbf{V} = (m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2)/(m_1 + m_2) \quad \text{A2.5}$$

Las velocidades en el centro de masa son:

$$\mathbf{v}'_1 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{V} \quad \text{A2.6a}$$

$$\mathbf{v}'_2 = \mathbf{v}_2 - \mathbf{V} \quad \text{A2.6b}$$

donde \mathbf{V} es la velocidad del centro de masa respecto al sistema de laboratorio, y \mathbf{v}_1 y \mathbf{v}_2 son las velocidades de cada partícula en el sistema de laboratorio.

Sustituyendo A2.4 en A2.3 se obtiene:

$$\mathbf{r}'_1 = m_2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)/(m_1 + m_2) \quad \text{A2.7a}$$

$$\mathbf{r}'_2 = m_1(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)/(m_1 + m_2) \quad \text{A2.7b}$$

Paralelamente, sustituyendo A2.5 en A2.6 se obtiene:

$$\mathbf{v}'_1 = m_2(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)/(m_1 + m_2) \quad \text{A2.8a}$$

$$\mathbf{v}'_2 = m_1(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)/(m_1 + m_2) \quad \text{A2.8b}$$

Sustituyendo las ecuaciones A2.7 y A2.8 en la ecuación A2.2, se tiene:

$$\mathbf{L}'_1 = m_2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)/(m_1 + m_2) \times m_1 m_2(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)/(m_1 + m_2)$$

$$\mathbf{L}'_2 = m_1(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)/(m_1 + m_2) \times m_2 m_1(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)/(m_1 + m_2)$$

Y como las masas de ambas gotas son iguales: $m_1 = m_2 = m$, se llega a:

$$\mathbf{L}'_1 = \frac{m}{4} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \quad \text{A2.9a}$$

$$\mathbf{L}'_2 = \frac{m}{4} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \quad \text{A2.9b}$$

Finalmente, sustituyendo las ecuaciones A2.9 en A2.1 se tiene:

$$\mathbf{L}' = \frac{m}{2} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \quad \text{A2.10}$$

Luego, el momento angular \mathbf{L} en el sistema relativo es:

$$\mathbf{L} = \mu (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \quad \text{A2.11}$$

donde μ es la masa reducida:

$$\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2) \quad \text{A2.12}$$

Pero como $m_1 = m_2 = m$, se obtiene:

$$\mu = m/2$$

Sustituyendo el valor de μ en la ecuación A2.11:

$$\mathbf{L} = \frac{m}{2} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \quad \text{A2.13}$$

Comparando las ecuaciones del momento angular en los dos sistemas: centro de masa (ecuación A2.10) y sistema relativo (ecuación A2.13), se llega a que el valor del momento angular es el mismo ($\mathbf{L}' = \mathbf{L}$), siempre y cuando se cumpla que $m_1 = m_2$.

REFERENCIAS

- 1 S. Cohen, F. Plasil and W. J. Swiatecki, *Equilibrium Configurations of Rotating Charged or Gravitating Liquid Masses with Surfaces Tension*, Annals of Physics 82, 1974, pag. 557-596.
2. R. Beringer and W. J. Knox, *Liquid-Drop Nuclear Model with High Angular Momentum*, Physical Review, Vol. 121, Num. 4, 1961, pag. 1195-1200.
- 3 D. L. Hill and J. A. Wheeler, *Nuclear Constitution and the Interpretation of Fission Phenomena*, Physical Review, Vol. 89, Num. 5, 1953, pag. 1102-1121.
- 4 N. Bohr and J. A. Wheeler, *The Mechanism of Nuclear Fission*, Physical Review, Vol. 56, 1939, pag. 426-450.
- 5 A. E. S. Green, *Nuclear Physics*, McGraw Hill, N.Y., 1955, pag. 281-316.
- 6 A. Menchaca Rocha, *The Mobility of Mercury Drops on Rough Glass Surfaces*, J. Coll. Int. S.C., aceptado, Abril de 1991.

- 7 *Pérdida de Energía en Colisiones entre Gotas de Mercurio que se Deslizan Sobre un Vidrio Rugoso*, M. Chapa Plata, Tesis de Licenciatura, FCUNAM, 1991.
- 8 Cohen, *Concepts of Nuclear Physics*, McGraw-Hill, N. Y.
- 9 *Handbook of Chemistry and Physics*, CR Press, Inc., Boca Raton, Florida, 63 edición, 1982-83, pag. F-25.
- 10 G. Arfken, *Mathematical Methods for Physicists*, Academic Press, Segunda edición, N. Y., 1970.