14
2ej

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ALGUNOS ASPECTOS DE LAS MATRICES NO NEGATIVAS Y EL MODELO DE INSUMO PRODUCTO DE LEONTIEF.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

A C T U A R I O

P R E S E N T A

CRISANTO CASTILLO CASTILLO

MEXICO, D. F. 1991

INTRODUCCION

El presente trabajo tiene como objetivo encontrar ejemplos de aplicación de las matemáticas en conexión con otras disciplinas, en particular con la economía. Se intenta que el trabajo resultante pueda servir como texto de consulta a los estudiantes de - economía y, a los de matemáticas, de motivación para la aplicación de conceptos del álgebra lineal tales como operaciones con matrices, o problemas de valores y vectores propios.

Este trabajo consta de dos partes bien definidas por su contenido, la parte teórica y la parte aplicada. La primera la constituyen los tres primeros capítulos, los cuales contienen resultados matemáticos relacionados con las matrices cuadradas cuyos elementos son todos no negativos, $A \gtrsim 0$. Este tipo de estructuras matemáticas se utilizan con mucha frecuencia para el estudio de algunos fenómenos económicos en donde aparecen variables que por su propia naturaleza son números reales no negativos. La segunda parte, es una aplicación de los resultados antes mencionados al modelo de insumo producto de Leontief. Dicho modelo es planteado de la siguiente manera.

Se considera un sistema económico en donde se da un equilibrio entre la oferta y la demanda, se divide la economía en n sectores de la producción X_i $(i=1,\ldots,n)$ y se supone que cada sector produce una única mercancia que es consumida por él mismo y por los otros sectores. Denotamos por X_{ij} a la parte de la producción del sector i que necesita insumir el sector j para producir X_j. De esta forma, el sector i distribuye una parte de su producción - como sigue

$$X_{i1}+X_{i2}+\dots\dots+X_{in},$$

y la otra parte, que es la diferencia entre lo que produce dicho sector i, y lo que utilizan de él los demás sectores, se le llama demanda final sobre el sector i, es decir,

$$X_i-\sum_{j=1}^{n}X_{ij}=C_i \quad (i=1,\dots,n),$$

lo cual significa que hay un excente en la produccion del sector i. Asi, si denotamos X_i - componente del vector X, C_i - componente del vector C y $A=(a_{ij})$ donde $a_{ij}=X_{ij}/X_j$, entonces, tenemos el - siguiente sistema de ecuaciones:

$$X - AX = C \text{ o equivalentemente } (I-A)X=C$$

Al cual se le denomina, el modelo abierto de insumo producto de Leontief, que es expuesto en el capítulo IV. Claramente las características del modelo, estan determinadas, por las propiedades de la matriz (I-A) conocida como la matriz de Leontief, éstas son vistas con detalle en el capítulo I. En el capítulo V se analiza el modelo antes descrito, cuando el vector de la demanda final es cero, es decir, cuando no existen excedentes en ningún sector de la producción, esto es, el sistema homogéneo de ecuaciones:

$$(I-A)X=C.$$

A este sistema se le denomina el modelo cerrado de insumo producto de Leontief. Son de interes económico, las soluciones $X\neq 0$ al sitema, por lo que en el capítulo II, se profundiza en el estudio de los valores y vectores propios de la matriz $A\gtrless 0$, enunciandose uno de los resultados más importantes de este trabajo, que es el teorema de Perrón-Frobenius. También, en el capítulo V se analizan las soluciones del sistema $(I-A)X=0$, considerándose dos casos, cuando la matriz $A \gneqq 0$ es irreducible y cuando es reducible, por esto, en el capitulo III se considera la reducibilidad e irreducibilidad de una matriz $A \gtrsim 0$, y se enuncian algunos resultados referentes a estas propiedades.

Por último, en este trabajo utilizaremos la notación tradicional de la economía matemática, esto es, llamaremos vector no negativo, a aquel vector $X \epsilon R^n$ que tiene todos sus componentes, mayores o iguales con cero y lo denotamos $X \gtrsim 0$. Cuando $X \gtrsim 0$ y $X \neq 0$, esto significa que al menos un componente es positivo, escribimos $X \gtrsim 0$, y cuando todos los componentes de X son positivos, se escribe $X > 0$. En forma análoga se introduce la notación para las matrices cuadradas de orden n que son las únicas que aparecen durante todo el trabajo, es decir, una matriz cuadrada A es no negativa cuando todos sus elementos son mayores o iguales con cero, y se denota mediante $A \gneqq 0$. Cuando $A \geqq 0$ y al menos uno de sus elementos es positivo, se escribe $A \gtrsim 0$, y cuando todos los elementos de A son positivos, escribiremos $A > 0$. Finalmente, al vector cuyos componentes son todos iguales con cero, lo denotaremos con el mismo símbolo que al cero número real (0), y distinguimos uno del otro, dependiendo el contexto en que se encuentre, es decir, si lo comparamos con números reales, entonces, nos referimos al cero número real, y si lo comparamos con vectores, entonces, nos referimos al cero vector.

INDICE

CAPITULO I

MATRICES PRODUCTIVAS

En este capítulo se analiza el sistema de ecuaciones BX=C, en donde $B=(b_{ij})$ es una matriz nxn tal que $b_{ij} \lneqq 0$ si $i \neq j$ y el vector $C \in R^n$ es no negativo. En dicho análisis se establecen las condiciones que debe satisfacer el sistema para que tenga soluciones significativas desde el punto de vista económico, esto significa que dichas soluciones sean no negativas. También de manera general se definen las matrices productivas y se relacionan con las condiciones de Hawkins-Simon.

1.1 Las condiciones de Hawkins-Simon

Consideremos un sistema de n ecuaciones lineales con n incognitas.

$$
(1.1.1) \quad
\begin{array}{l}
b_{11}X_1 + b_{12}X_2 + \dots\dots\dots\dots b_{1n}X_n = C_1 \\
b_{21}X_1 + b_{22}X_2 + \dots\dots\dots\dots b_{2n}X_n = C_2 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
b_{n1}X_1 + b_{n2}X_2 + \dots\dots\dots\dots b_{nn}X_n = C_n
\end{array}
$$

donde los coeficientes b_{ij} son números reales sujetos a la siguiente condición de signo.

(1.1.2) $\quad b_{ij} \lneqq 0 \quad$ para $i \neq j$

es decir, todos los coeficientes excepto aquellos que se encuentran en la diagonal principal son cero o negativos.

Ahora bien, estamos interesados en la condición que debe satisfacer el sistema (1.1.1) para que tenga soluciones no negativas, para ello debemos distinguir dos casos:

a) Aquel en el que el sistema (1.1.1) tiene una solución cuando se asignan ciertos valores específicos a su lado derecho y;

b) Cuando el sistema (1.1.1) tiene una solución para cualesquiera valores asignados a su derecha.

Estos casos pueden ser enunciados como condiciones que debe satisfacer (1.1.1) para que tenga soluciones no negativas.

CONDICION (I) El sistema (1.1.1) es debilmente soluble si para algún $C > 0$, tiene una solución no negativa $X \geqq 0$.

CONDICION (II) El sistema (1.1.1) es fuertemente soluble si para cualquier $C \geq 0$, tiene una solución no negativa $X \geqq 0$.

Estas dos condiciones son equivalentes y para mostrarlo enunciamos una tercera condición que (1.1.1) debe cumplir para que tenga soluciones no negativas y además proporciona una vía para mostrar la equivalencia:

LA CONDICION DE HAWKINS-SIMON (H-S)

Todos los menores principales desarrollados a partir de la esquina superior izquierda del determinante de los coeficientes de (1.1.1) son positivos, es decir:

$$b_{11} > 0, \qquad \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} > 0, \; \ldots\ldots, \qquad \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

En el siguiente teorema demostraremos la equivalencia de estas tres condiciones.

TEOREMA (1) Las tres condiciones (I), (II) y (H-S) son equivalentes.

Demostración:

La demostración la haremos en el siguiente orden, (I) implica (H-S), (H-S) implica (II), y (II) implica (I).

(I) implica (H-S).

Esta demostración se basa en el principio de la inducción matemática aplicado al número de ecuaciones.

Para n=1 el sistema (1.1.1) se reduce a $b_{11} X_1 = C_1$, por hipótesis, para algun $C_1 > 0$ existe una solución X_1 no negativa para la cual $b_{11} X_1 = C_1 > 0$, entonces $X_1 > 0$, por lo tanto podemos dividir - entre X_1, es decir $b_{11} = C_1 / X_1 > 0$, que es exactamente la condición (H-S) para n=1.

Supongamos que la condición (H-S) se cumple para n-1 ecuaciones, probaremos que se cumple para n ecuaciones suponiendo que se cumple la condición (I). Reordenando los términos de la primera ecuación de (1.1.1) obtenemos $b_{11} X_1 = C_1 - b_{12} X_2 - b_{13} X_3 - \ldots\ldots - b_{1n} X_n \geqq C_1 > 0$, esto es porque en el lado derecho tenemos que $b_{1i} X_i \geqq 0$ para i=1,2,...n, en virtud de que $b_{ij} \leqq 0$ si $i \neq j$ y la no negatividad de la solución, por lo tanto que $b_{11} X_1 > 0$ y $X_1 \geq 0$ aseguramos que $b_{11} > 0$ y $X_1 > 0$.

Ahora aplicando el método de eliminación Gaussiana, eliminamos a X_1 de las ecuaciones 2 a n de (1.1.1) sumando a la i-ésima ecuación la primera multiplicada por $i - b_{i1}/b_{11}$, para i=2,3,.......,n con $b_{11} \neq 0$, y obtenemos:

$$
(1.1.3) \qquad
\begin{aligned}
b_{11}X_1 + b_{12}X_2 + \ldots\ldots + b_{1n}X_n &= C_1 \\
b'_{22}X_2 + \ldots\ldots + b'_{2n}X_n &= C'_2 \\
b'_{32}X_2 + \ldots\ldots + b'_{3n}X_n &= C'_3 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
b'_{n2}X_2 + \ldots\ldots + b'_{nn}X_n &= C'_n
\end{aligned}
$$

donde $b'_{ij} = b_{ij} - b_{i1}\, b_{1j} / b_{11} \qquad (2 \leqq i, j \leqq n)$

y $C'_i = C_i - b_{i1}\, C_1 / b_{11} \qquad (2 \leqq i, j \leqq n)$

Las ecuaciones segunda a la n-ésima constituyen un sistema de n-1 ecuaciones en $X_2, X_3, \ldots\ldots, X_n$. Examinemos los signos de sus coeficientes, $b_{i1} \leqq 0$, $b_{1j} \leqq 0$ por (1.1.2) para $i,j=2,3,\ldots\ldots,n$ $b_{11} > 0$ tal como se probó, por lo tanto $-b_{i1} b_{1j} / b_{11} \leqq 0$, lo que implica que $b'_{ij} \leqq 0$ para $i \neq j$ $(i,j=2,\ldots\ldots,n)$. Análogamente $C'_i = C_i - b_{j1}\, C_1 / b_{11} \geqq C_i > 0$ $(2 \quad i \quad n)$. Así, los coeficientes del nuevo sistema reducido satisfacen que $b'_{ij} \leqq 0$ para $i \neq j$ $(2 \leqq i, j \leqq n)$ mientras que sus términos constantes son todos positivos. Además sabemos que $X_2 \geqq 0$, $X_3 \geqq 0$, ... , $X_n \geqq 0$ es la solución del sistema reducido. De este modo el nuevo sistema satisface la condición (I) y, mediante la hipótesis inductiva cumple la condición (H-S), entonces:

$$
\begin{vmatrix}
b'_{22} & b'_{23} & \ldots\ldots & b'_{2n} \\
b'_{32} & b'_{33} & \ldots\ldots & b'_{3n} \\
& \ldots\ldots\ldots & & \\
b'_{k2} & b'_{k3} & \ldots\ldots & b'_{kk}
\end{vmatrix} > 0 \qquad (k=2,\ldots\ldots,n)
$$

Los pasos seguidos en el proceso de eliminación para obtener el nuevo sistema reducido a partir de (1.1.1), consistieron simplemente en multiplicar la primera fila del determinante por ciertos números y sumar este resultado a las otras filas, por lo que los menores principales correspondientes tienen el mismo valor, de aquí que:

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2k} \\ & \ldots\ldots\ldots & & \\ b_{k1} & b_{k2} & \ldots & b_{kk} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1k} \\ 0 & b'_{22} & \ldots & b'_{2k} \\ & \ldots\ldots\ldots & & \\ 0 & b'_{k2} & \ldots & b'_{kk} \end{vmatrix} = b_{11} \begin{vmatrix} b'_{22} & \ldots & b'_{2k} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ b'_{k2} & \ldots & b'_{kk} \end{vmatrix}$$

con $k=2,3,\ldots\ldots,n$.

(H-S) implica (II).

Para $n=1$ el sistema (1.1.1) se reduce a $b_{11}X_1=C_1$, por hipótesis $b_{11}>0$, por lo cual obtenemos que $X_1=C_1/b_{11} \gtreqless 0$ para cualquier $C_1 \gtreqless 0$. Supongamos ahora que se ha demostrado que la condición (H-S) implica (II) para un sistema de n-1 ecuaciones.

Si la condición (H-S) se cumple para el sistema (1.1.1), tenemos en particular que $b_{11}>0$, y de la misma manera como procedimos en la primera parte de esta demostración, podemos transformar (1.1.1) en:

$$\begin{aligned} b_{11}X_1 + b_{12}X_2 + \ldots\ldots\ldots + b_{1n}X_n &= C_1 \\ b'_{22}X_2 + \ldots\ldots\ldots + b'_{2n}X_n &= C'_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ b'_{n2}X_2 + \ldots\ldots\ldots + b'_{nn}X_n &= C'_n \end{aligned}$$

que es el nuevo sistema reducido con los siguientes coeficientes con $C_i \geq 0$ para todo $i=1,2,\ldots,n$, entonces, como $C_i \geq 0$ $(2 \leq i \leq n)$ existen $X_2, X_3, \ldots, X_n$ para las ecuaciones 2 a la n de (1.1.1). Sustituyendo esta solución en la ecuación 1, tenemos que $X_1 = 1/b_{11}(C_1 - b_{12}X_2 - b_{13}X_3 - \ldots - b_{1n}X_n)$, de aqui concluimos que $X_1 \geq 0$ porque $-b_{ij} \geq 0$ para $i \neq j$, $b_{11} > 0$ y $X_i \geq 0$ $(2 \leq i \leq n)$, esto demuestra que (1.1.3) tiene una solución no negativa para cualquier $C_i \geq 0$. Evidentemente esta solución lo es también de (1.1.1) invirtiendo el proceso de eliminación. Por lo tanto, hemos demostrado que (H-S) implica (II).

La demostración de (II) implica (I) es inmediata a partir de sus propias definiciones, con lo cual el teorema (1) queda completamente demostrado.

Examinemos el siguiente sistema de ecuaciones que es mas general que (1.1.1).

$$
\begin{aligned}
(\rho - a_{11})X_1 - a_{12}X_2 - \ldots\ldots - a_{1n}X_n &= C_1 \\
-a_{21}X_1 + (\rho - a_{22})X_2 - \ldots\ldots - a_{2n}X_n &= C_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
-a_{n1}X_1 - a_{n2}X_2 - \ldots\ldots + (\rho - a_{nn})X_n &= C_n
\end{aligned}
\tag{1.1.4}
$$

donde los coeficientes estan sujetos a la condición de signo $a_{ij} \geq 0$ $(1 \leq i,j \leq n)$ y ρ es un número real.

Hagamos $b_{ii} = \rho - a_{ii}$ $(1 \leq i \leq n)$ y $b_{ij} = -a_{ij}$ $(i \neq j,\ 1 \leq i,j \leq n)$, evidentemente $b_{ij} \leq 0$ para $i \neq j$, como consecuencia tenemos el siguiente teorema:

$b'_{ij}=b_{ij}-b_{i1}\,b_{1j}/b_{11}$ y $C'_i=C_i-b_{i1}\,C_1/b_{11}$ $(2 \quad i,j \quad n)$. Entonces:

$$\begin{vmatrix} b'_{22} & \cdots\cdots & b'_{2k} \\ \vdots & & \vdots \\ b'_{k2} & \cdots\cdots & b'_{kk} \end{vmatrix} = 1/b_{11} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots\cdots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots\cdots & b_{2k} \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots\cdots & b_{kk} \end{vmatrix}$$

con $(2 \leqq k \leqq n)$.

que es la relación entre los menores del sistema original (1.1.1) y el nuevo, además

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots\cdots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots\cdots & b_{2k} \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ b_{k1} & b_{k2} & & b_{kk} \end{vmatrix} > 0$$

porque supusimos que (1.1.1) cumple (H-S). Por consiguiente el nuevo sistema satisface (H-S), es decir se ha mostrado que

$$\begin{vmatrix} b'_{22} & \cdots\cdots\cdots & b'_{2k} \\ \vdots & & \vdots \\ b'_{k2} & & b'_{kk} \end{vmatrix} > 0 \qquad (2 \leqq k \leqq n)$$

entonces, aplicando la hipótesis inductiva, el nuevo sistema tiene una solución no negativa $X_2, X_3, \ldots\ldots, X_n$ para cualesquiera términos constantes C'_i $(i=2,3,\ldots\ldots,n)$.

Sean C_1, C_2, ..., C_n términos constantes de (1.1.1)

TEOREMA (2) Las condiciones (I), (II) y (H-S) son equivalentes en (1.1.4).

En (1.1.4) las condiciones (H-S) se especifican como sigue

$$(\rho - a_{11}) > 0, \qquad \begin{vmatrix} \rho - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \rho - a_{22} \end{vmatrix} > 0, \ldots\ldots\ldots,$$

$$\begin{vmatrix} \rho - a_{11} & -a_{12} & - \ldots\ldots\ldots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \rho - a_{22} & - \ldots\ldots\ldots & -a_{2n} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & - \ldots\ldots\ldots & \rho - a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

Para enunciar el siguiente corolario de este teorema definamos la i-ésima fila suma con respecto a de (1.1.4) por:

$$r_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = a_{i1} + a_{i2} + \ldots\ldots + a_{in} \qquad (i=1,2,\ldots\ldots,n)$$

y la j-ésima columna-suma como:

$$s_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} = a_{1j} + a_{2j} + \ldots\ldots\ldots + a_{nj} \qquad (j=1,2,\ldots\ldots,n)$$

COROLARIO (1)

(i) Si $\rho > r_i$ $(i=1,2,\ldots\ldots\ldots,n)$, entonces se cumplen (I), (II) y (H-S) para (1.1.4).

(ii) Si $\rho > s_j$ $(j=1,2,\ldots\ldots,n)$, entonces se cumplen (I), (II) y (H-S) para (1.1.4).

Dichas condiciones se denominan criterios de fila suma y columna suma de Brawer-Solow.

Demostración:

Estos resultados se obtienen directamente del teorema (2).

(i) Sean $C_i=\rho-r_i>0$ $(i=1,2,\ldots\ldots,n)$ y $\rho>r_i$ entonces para estos términos constantes específicos tenemos una solución X=1, X=1,.......,X=1. Es decir se cumple la condición (I), por lo tanto, el teorema (2) de este capítulo, aseguramos que las condiciones (II) y (H-S) también se cumplen.

(ii) Trasponiendo los coeficientes de (1.1.4) con respecto a la diagonal principal, se obtiene un nuevo sistema de ecuaciones cuyas incógnitas son $P_1, P_2, \ldots\ldots, P_n$.

$$
(1.1.5)\qquad
\begin{aligned}
(\rho-a_{11})P_1 - a_{12}P_2 - \cdots\cdots - a_{1n}P_n &= \nu_1\\
-a_{21}P_1 + (\rho-a_{22})P_2 - \cdots\cdots - a_{2n}P_n &= \nu_2\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &\\
-a_{n1}P_1 - a_{n2}P_2 - \cdots\cdots + (\rho-a_{nn})P_n &= \nu_n
\end{aligned}
$$

La forma de (1.1.5) y (1.1.4) es idéntica, la columna suma de a_{ij} en (1.1.4) es la fila suma de a_{ij} en (1.1.5), por lo tanto - del inciso (i) se sigue que si $\rho>s_j$ $(j=1,2,\ldots\ldots,n)$, entonces el sistema (1.1.5) cumple (I), (II) y (H-S). Por la condición (H-S) los menores principales de (1.1.4) que son sus traspuestos tienen los mismos valores que aquellos. Esto demuestra que en este caso la condición (H-S) se cumple para (1.1.4). Entonces el teorema (2) demuestra que también se cumplen (I) y (II).

Dado que los determinantes de los coeficientes de (1.1.4) y - (1.1.5) son cada uno de ellos el traspuesto del otro, (1.1.4) y (1.1.5) se denominan cada uno de ellos dual respecto del otro. La demostración del corolario (1) indica que si uno de ellos cumple una cualquiera de las tres condiciones (I), (II) o (H-S), entonces ambos sistemas satisfacen las tres condiciones.

En el siguiente teorema analizamos la relación que guardan los coeficientes de ambos sistemas y una interesante interconexión - entre sus soluciones.

TEOREMA (3) Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ la solución de (1.1.4) y $P_1, P_2, \ldots, P_n$ la solución de (1.1.5). Entonces siempre se cumple que

$$\sum_{i=1}^{n} C_i P_i = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j X_j$$

Esta relación recibe el nombre de dualidad.

Demostración:

La solución de (1.1.4), $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$, satisface

$$\rho X_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j = C_i \qquad (i=1,2,\ldots\ldots,n)$$

mientras que la de (1.1.5), $P_1, P_2, \ldots\ldots, P_n$, satisface

$$\rho P_j - \sum_{i=1}^{n} a_{ij} P_i = \gamma_j \qquad (j=1,2,\ldots\ldots,n)$$

de aqui que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} C_i P_i &= \sum_{i=1}^{n}\Big(\rho X_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j\Big) P_i = \sum_{i=1}^{n} \rho P_i X_i - \sum_{i=1}^{n} P_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} \rho P_j X_j - \sum_{j=1}^{n} X_j \sum_{j=1}^{n} a_{ij} P_j \\ &= \sum_{j=1}^{n}\Big(\rho P_j - \sum_{i=1}^{n} a_{ij} P_i\Big) X_j = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j X_j\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\sum_{i=1}^{n} C_i P_i = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j X_j .$$

1.2 Matrices productivas

Sea el sistema de ecuaciones $BX=C$ con $B=(b_{ij})$ $b_{ij} \leqq 0$ para $i \neq j$ $X,C \in R^n$. enunciamos el siguiente teorema.

TEOREMA (4) Para que una matriz B con elementos fuera de la diagonal principal cero o negativos pueda tener una matriz inversa no negativa es necesario y suficiente que B satisfaga (H-S).

Demostración:

Supongamos que existe $B^{-1} \geqq 0$, si multiplicamos ambos lados de $BX=C$ por $B^{-1} \geqq 0$ obtenemos $X=B^{-1}C$, pero esto es exactamente la condicion (II), entonces, por el teorema (1) de este capítulo B satisface (H-S).

Inversamente, si B satisface la condición (H-S), entonces el det $B>0$, por lo tanto, existe B^{-1}. Por la condición (II), para cualesquiera valores de $C \geq 0$, existe una solucion $X \geqq 0$, que es de la forma $X=B^{-1}C \geqq 0$, en particular si tomamos a $C=(0,..,1,0,..0)$ entonces $B^{-1}C \geqq 0$, por lo tanto, $B^{-1} \geqq 0$.

COROLARIO (2) Sea A una matriz cuadrada, de orden n, no negativa, I la matriz identidad de orden n y ρ un número real. Para que $\rho I-A$ pueda tener una matriz inversa no negativa $(\rho I-A)^{-1}$, es necesario y suficiente que $\rho I-A$ satisfaga (H-S).

Demostración:

Para la demostración de este corolario bastaría con mostrar que existe un número real $\rho > 0$ y A no negativa tal que $B=\rho I-A$ con $b_{ij} \leqq 0$ para $i \neq j$ y luego aplicar el teorema (4) a $\rho I-A$.

Sea $B=\rho I-A$, $B=(b_{ij})$ tal que $b_{ij}=-a_{ij}$ para $i \neq j$, esto porque $0 \leqq -b_{ij}=a_{ij}$, entonces $A \geqq 0$ para $i \neq j$ y $b_{ij}=\rho-a_{ij}$ para $i=j$, es decir $b_{ii}=\rho-a_{ii}$, $(b_{11}, b_{22}, \ldots\ldots, b)$, tomemos a ρ de la siguiente manera, $\rho > \max(0, \max(b_{ii}))$, sabemos que $0 \leq \rho - b_{ii} = a_{ii}$, por lo tanto, el ρ que buscamos es el $\max(0, \max(b_{ii}))$, esto quiere decir que $A \geq 0$, ya que existe un $\rho = \max(0, \max(b_{ii}))$ tal que $B=\rho I-A$, y aplicando el teorema anterior queda demostrado este corolario.

Hemos visto que la matriz B la podemos descomponer en la forma $B=\rho I-A$ con ρ un número real positivo, I la matriz identidad de orden n y A una matriz cuadrada de orden n no negativa. Esto significa que nuestro sistema original BX=C es equivalente al sistema $(\rho I-A)X=C$. Consideremos el caso en que $\rho=1$, es decir, el sistema $(I-A)X=C$. Sobre este sistema podemos dar la siguiente definición acerca de la matriz A.

DEFINICION (1). Sea $A \gneqq 0$, cuadrada de orden n, se dice que A es una matriz productiva si existe un vector $X \geq 0$ tal que

$$AX < X.$$

En otras palabras A es productiva si la matriz I-A cumple la condición de solubilidad débil. Por la equivalencia de las tres condiciones del teorema (1) de este capítulo concluimos que A es productiva si la matriz I-A cumple (H-S).

CAPITULO II

EL TEOREMA DE PERRON-FROBENIUS

En este capítulo demostraremos la existencia de valores propios reales no negativos de la matriz $A \geqq 0$. Primero definiremos a $B(\rho)=\rho I-A$ donde A es una matriz cuadrada no negativa, I es la matriz identidad y ρ un parámetro real. Luego construimos el conjunto M que consta de todos aquellos números reales ρ tales que $B(\rho)$ satisface la condición (H-S). Posteriormente se prueba que el ínfimo del conjunto M al cual llamaremos $\lambda(A)$ es un valor propio de la matriz A, y lo denominaremos "la raiz de Frobenius de A". Enseguida se demuestra que existe un vector propio no negativo asociado a $\lambda(A)$.

Finalmente se vincula "la raíz de Frobenius de A" con las series de C. Neuman, que son series de la forma $1/\rho \sum_{\nu=0}^{\infty} A^{\nu}/\rho^{\nu}$.

2.1 El problema del valor propio no negativo

Sea A una matriz cuadrada de orden n no negativa, I la matriz identidad de orden n y ρ un número real positivo, definimos a $B(\rho)=\rho I-A$. Sea M la colección de todos aquellos números reales tales que $B(\rho)$ satisface la condición de (H-S).

LEMA (1) El conjunto M es no vacío.

Demostración:

Tomese un vector positivo cualquiera $X>0$, entonces para un ρ suficientemente grande, tenemos $\rho X > AX$ debido a que los componentes de X son todos positivos. De aquí que $B(\rho)X= X-AX>0$. En otras palabras, la condición (1) se cumple para un valor suficientemente grande de ρ. Por lo tanto, $B(\rho)$ satisface la condición (H-S), por lo que $\rho \in M$.

Cabe preguntarnos acerca de como son los elementos de M con - respecto a ρ. Para esto enunciamos el siguiente lema.

LEMA (2) Si $\rho \in M$ y $\eta \geqq \rho$, entonces, $\eta \in M$.

Demostración:

$B(\eta)-B(\rho)=(\eta I-A)-(\rho I-A)=\eta I-A-\rho I+A=(\eta-\rho)I \geqq 0$, se sigue que - $B(\eta)-B(\rho) \geqq 0$, por lo tanto, $B(\eta) \geqq B(\rho)$. Puesto que $\rho \in M$, podemos hacer $B(\rho)X > 0$ mediante la elección de algún $X > 0$ de acuerdo con la condición (1). Entonces, para este X obtenemos $B(\eta)X \geqq B(\rho)X>0$ por lo que $B(\eta)$ satisface la condición (I) y, por lo tanto la - condición (H-S), de lo que podemos concluir que $\eta \in M$.

¿Que ocurrirá si intentamos hacer a ρ tan pequeño como sea posible, sujeto a la condición de (H-S)?. Ante todo es muy fácil - ver que ρ no puede hacerse indefinidamente pequeño. Esto es, ρ está inferiormente acotado. De hecho, para $\rho \in M$, existe un $X \gneqq 0$ tal que $B(\rho)X > 0$ en virtud de la condición (I), entonces, $\rho X > AX \geqq 0$ y, por lo tanto $\rho > 0$, lo que indica que M esta inferiormente acotado (0 es una de sus cotas inferiores). Teniendo en cuenta esto hagamos

(2.1.1) $\lambda(A)=\inf M$ (el ínfimo para todo $\rho \in M$)

LEMA (3) $\lambda(A) \notin M$.

Demostración:

Supongamos que $\lambda=\lambda(A) \in M$, entonces existe un $X \gneqq 0$ tal que - $B(\lambda)X=\lambda X-AX > 0$, por lo tanto, si elegimos un ρ menor pero lo suficientemente cercano a λ se cumple $B(\rho)X=\rho X-AX > 0$ para el -

mismo X, por lo que $\rho \in M$, esto contradice la definición de $\lambda(A)$, por lo tanto, concluimos que $\lambda(A) \notin M$.

Los dos lemas anteriores nos muestran que M es un intervalo abierto $(\lambda(A), +\infty)$. Puesto que $\lambda=\lambda(A) \notin M$, la ecuación

(2.1.1) $\quad (\lambda I-A)X=C$

no tiene una solución no negativa X para ningún $C > 0$, por la definición de M. Entonces ¿es cierto que una ecuación homogénea en la que C=0 en (2.1.1), es decir,

(2.1.2) $\quad (\rho I-A)X=0$

tiene una solución X no negativa?, X=0 es evidentemente una solución, pero lo que nos interesa es una solución $X \geq 0$ distinta de X=0.

2.2. El problema del valor propio en general.

Una matriz A induce una aplicación lineal $X \to AX: R^n \to R^n$. Si según ésta aplicación, un vector $X \in R^n$ distinto de cero se convierte en un vector que es λ veces este mismo vector, es decir,

(2.2.1) $\quad \lambda X=AX, \quad X=0.$

Entonces recibe el nombre de valor propio de A y X recibe el nombre de vector propio asociado con λ. (2.2.1) puede volver a escribirse como

(2.2.2) $\quad (\lambda I-A)X=0, \quad X=0.$

Entonces, si λ es un valor propio, (2.2.2) tiene una solución X=0, por lo que

(2.2.3) $\quad \varphi(\lambda)=\det(\lambda I-A)=0.$

Del mismo modo, si λ es una raíz de (2.2.3), (2.2.2) tiene una solución $X \neq 0$ y puede escribirse en la forma (2.1.1). En consecuencia los valores propios de A y las raíces de (2.2.3) coinciden. A (2.2.3) se le denomina la ecuación característica de A. Para $A=(a_{ij})$, tenemos

$$\varphi(\lambda)=\begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ & \cdots\cdots & & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn} \end{vmatrix}$$

desarrollandolo en λ, $\varphi(\lambda)$ se convierte en un polinomio de orden n.

$$(2.2.4) \qquad \varphi(\lambda)=\lambda^{n}+a_1\lambda^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n.$$

Los coeficientes $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$ son polinomios de los elementos a_{ij} de A, por lo tanto (2.2.4) es un polinomio de orden n con coeficientes reales. El llamado teorema fundamental del álgebra demuestra que (2.2.3) tiene n raíces complejas que, en general, no son números reales.

A continuación, examinaremos la existencia de una solución no negativa X de $(\lambda I-A)X=0$, a la vez que la analizaremos de acuerdo a la discusión general presentada anteriormente. El punto crucial del problema reside en el notable hecho de que, para una matriz no negativa A, $\lambda(A)$ tal como lo hemos definido, no solo es una raíz de la ecuación característica, si no que también existe un vector no negativo asociado con ella.

TEOREMA (1) Sea $A\geq 0$ una matriz cuadrada no negativa. La ecuación $(\lambda I-A)X=0$ tiene una solución no negativa X, distinta de cero para $\lambda=\lambda(A)$.

Demostración:

Elijamos un $C>0$ y mantengamoslo fijo. Entonces, consideremos la ecuación

(2.2.5) $\quad (\rho I-A)X=C$

Para cualquier $\rho \in M$, donde M es el conjunto que hemos definido anteriormente en este capítulo.

Ahora puesto que para cada $\rho \in M$, el sistema (2.2.5) tiene una solución única, podemos designar a dicha solución por $X(\rho)$. Entonces, se cumple el siguiente lema.

LEMA (4) Sean $\sigma, \tau \in M$ con $\sigma \leq \tau$, entonces $X(\sigma) \geqq X(\tau)$.

Demostración:

Si restamos $(\sigma I-A)X(\sigma)=C$ a $(\tau I-A)X(\tau)=C$, obtenemos

$(\tau I-A)X(\tau)-(\sigma I-A)X(\sigma)=0$, que al desarrollar tenemos

$\tau X(\tau)-AX(\tau)- X(\sigma)+AX(\sigma)=0$

ahora bien, si sumamos un cero $(0=\sigma X(\tau)-\sigma X(\tau))$, resulta

$\tau X(\tau)-AX(\tau)-\sigma X(\sigma)+AX(\sigma)-\sigma X(\tau)+\sigma X(\tau)=0$

y trasponiendo términos

$\sigma X(\sigma)-AX(\sigma)+AX(\tau)-\sigma X(\tau)=\tau X(\tau)-\sigma X(\tau)$,

factorizamos $X(\sigma)$ y $X(\tau)$ en el lado izquierdo y en el derecho - respectivamente y obtenemos

$X(\sigma)(\sigma I-A)-X(\tau)(\sigma I-A)=X(\tau)(\tau-\sigma)$, que es igual a

$(\sigma I-A)(X(\sigma)-X(\tau))=(\tau-\sigma)X(\tau)$.

Puesto que $\sigma \in M$, entonces existe $(\sigma I-A)^{-1} \geqq 0$ tal que

$X(\sigma)-X(\tau)=(\tau-\sigma)(\sigma I-A)^{-1}X(\tau) \geqq 0$

en virtud de que $\tau \geq \sigma$ y $X(\tau) \geqq 0$. Por lo tanto $X(\sigma)-X(\tau) \geqq 0$ y de aquí concluimos que $X(\sigma) \geqq X(\tau)$.

Consideremos ahora la siguiente sucesión $\{\rho_\nu\}$, una sucesión decreciente $\rho_\nu \in M$ tal que $\lim_{\nu\to\infty} \rho_\nu = \lambda = \lambda(A)$.

La existencia de tal sucesión es evidente a partir de la definición de $\lambda(A)$ y de las propiedades del ínfimo. Entonces el lema (1) de este capítulo asegura que

$$(2.2.6) \qquad X(\rho_{\nu+1}) \geqq X(\rho_\nu) \qquad (\nu=1,2,\ldots\ldots\ldots).$$

Haciendo $\eta_\nu = \sum_{j=1}^{n} x_j(\rho_\nu)$ (la suma de los componentes de X), vemos, a partir de (2.2.6) que $\{\eta_\nu\}$ es una sucesión creciente.

Consideremos en primer lugar, el caso en el que $\{\eta_\nu\}$ esta superiormente acotada, entonces la sucesión $\{X(\rho_\nu)\}$ esta también acotada en el sentido de orden parcial de vectores. Teniendo en cuenta (2.2.6) el teorema (2) del apéndice muestra que $\lim_{\nu\to\infty} X(\rho_\nu) = X \geqq 0$. Entonces, haciendo $\nu\to\infty$ en

$$(2.2.7) \qquad (\rho_\nu I-A)X(\rho_\nu)=C,$$

obtenemos

$$(\lambda I-A)X=C, \qquad X \geqq 0$$

en el límite cuando $\nu\to\infty$, esto implica que $\lambda \in M$. Esto es una contradicción porque demostramos que $\lambda \notin M$. De modo que esta contradicción resulta de suponer que $\{\eta_\nu\}$ esta superiormente acotada, por lo tanto, por el teorema (3) del apéndice, el $\lim \eta_\nu = +\infty$.

Multipliquemos ambos lados de (2.2.7) por $1/\eta_\nu$ y hagamos $Y=X(\rho_\nu)/\eta_\nu$ para obtener.

$$(2.2.8) \qquad (\rho_\nu I-A)Y=C/\eta_\nu \qquad (\nu=1,2,\ldots\ldots).$$

Observese el conjunto $S=\{X/X$ (componente de X) $\geqq 0$ $(j=1,\ldots,n)$ $\sum_{j=1}^{n} x_j = 1\}$. Evidentemente, $Y^\nu \in S$ $(\nu=1,2,\ldots\ldots)$, y puesto que S es compacto $\{Y^{\nu}\}$ contiene una subsucesión que es convergente - dentro de S_n.

La correspondiente subsucesión de $\{\eta_\nu\}$ con los índices que le corresponden es divergente y tiende a $+\infty$.

Por lo tanto, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\{Y^{\nu}\}$ es convergente, es decir, $\lim_{\nu\to\infty} Y^{\nu}=X\in S$.

Después de estas consideraciones topológicas preeliminares, - hagamos $\nu\to\infty$ en $(\rho_\nu I-A)Y^{\nu}=C/\eta_\nu$. Su lado derecho converge hacia - cero, por lo tanto tenemos

$$(\lambda I-A)X=0, \quad X\in S_n,$$

esto es $\lambda=\lambda(A)$ es un valor propio de A que tiene un vector propio asociado no negativo.

OBSERVACION. Como ya se ha señalado, $\varphi(\lambda)=\det(\lambda I-A)$ es un polinomio en λ de orden n. Si lo consideramos como una función real de variable real λ, podemos ver, en base a los resultados anteriores que, para una matriz no negativa A, $\varphi(\lambda)=0$ cuando $\lambda=\lambda(A)$ debido a la condición (H-S). Esto pone de manifiesto que $\lambda(A)$ es la mayor raíz real de la ecuación $\varphi(\lambda)=0$. En la siguiente sección se expondrán algunos resultados importantes que incluyen la relación entre la raíz mayor y las demás raíces.

2.3 La raíz de Frobenius.

Sea A una matriz cuadrada no negativa y $\varphi(\lambda)=0$ la ecuación característica de A. Su mayor raíz cuya existencia fue demostrada en la sección anterior, recibe el nombre de "raíz de Frobenius". El siguiente teorema resume algunas de las propiedades mas importantes que incluyen las vistas en la sección anterior.

TEOREMA (2) (teorema de Perrón-Frobenius). Sea A una matriz - cuadrada, de orden n, no negativa, entonces:

(i) A tiene valores propios reales no negativos. Existe un - vector propio no negativo $X \geqq 0$ de A asociado a $\lambda(A)$.

(ii) Todo número real μ, que cumpla $AX \geq \mu X$ para algún $X \geq 0$, - satisface la desigualdad $\mu \leq \lambda(A)$.

En particular, sea w un valor propio cualquiera en general, - complejo de A. Entonces $/w/ \leqq \lambda(A)$ donde $/w/$ es el modulo de w.

(iii) $\lambda(A)$ es una función creciente de A; es decir, si $A_1 \geq A_2 \geqq 0$, entonces, $\lambda(A_1) \geqq \lambda(A_2)$.

(iv) Sea ρ un número real e I la matriz identidad de orden n, entonces $\rho I-A$ tiene una matriz inversa no negativa $(\rho I-A)^{-1}$ si y sólo si $\rho > \lambda(A)$.

(v) $\lambda(A)=\lambda(A^t)$.

Demostración:

En la sección anterior mostramos que para el conjunto M de números reales, para los que existe $(\rho I-A)^{-1} \geq 0$ se cumple:

(a) A tiene un vector propio no negativo $X \geq 0$ asociado con $\lambda(A)$,

(b) $M=(\lambda(A), \infty)$ donde $\lambda(A)=\inf M$.

Así queda demostrado (i) e (iv). Los incisos restantes se demuestran como sigue.

(ii) Sea $AX \gneqq \mu X$, $X \gtrsim 0$. Entonces, volvemos a escribir la primera desigualdad $(\mu I-A)X \leqq 0$. Si $\mu > \lambda(A)$, existe $(\mu I-A)^{-1} \geq 0$ en virtud de (iv). Si multiplicamos ambos lados de la desigualdad por $(\mu I-A)$, obtenemos $X \lneqq (\mu I-A)^{-1}0=0$, por lo que $X \lneqq 0$. Pero esto contradice la supocisión de que $X \gtrsim 0$, por lo tanto, $\mu \leqq \lambda(A)$.

Sea w un valor propio cualquiera de A, y $z \neq 0$ el vector propio asociado (cuyas componentes, por lo general, son números complejos). Entonces tenemos $Az=wz$, lo que para cada componente se expresa por:

$$wz_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j \qquad (i=1,2,\ldots\ldots,n).$$

Tomando los valores absolutos, obtenemos

$$|w||z_i| = |wz_i| = \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j\right| \leqq \sum_{j=1}^{n} a_{ij} |z_j| .$$

Designemos por $|z|$ el vector no negativo cuya j-ésima componente es $|z_j|$. Entonces, este resultado equivale:

$$A|z| \gtrsim |w|\,|z|, \qquad |z| \gneqq 0.$$

En virtud de la primera parte de este inciso, obtenemos $|w| \leqq \lambda(A)$.

(iii) Definamos M como el conjunto de números ρ para los cuales existe la matriz inversa no negativa $(\rho I-A)^{-1}$. Este conjunto varía cuando A se altera. Por consiguiente, lo representamos como $M(A)$. Consideremos $M(A_1)$ y $M(A_2)$ para $A_1 \gtrsim A_2 \gtrsim 0$. Si $\rho \in M(A_1)$, entonces $(\rho I-A_1)X > 0$ para algún $X > 0$.

Por otra parte, por hipótesis $\rho I-A_2 \gneqq \rho I-A_1$, de modo que $(\rho I-A)X > 0$ para el mismo. Por consiguiente, se cumple la condición (I) (sistema debilmente soluble) y entonces $\rho \in M(A_2)$. Esto quiere decir que el conjunto $M(A_1) \in M(A_2)$. Como el conjunto de números reales $M(A_2)$ contiene a $M(A_1)$ se cumplirá necesariamente que

$$\lambda(A_2)=\inf M(A_2) \leqq \inf M(A_1)=\lambda(A_1).$$

por lo tanto:

$$\lambda(A_2) \leqq \lambda(A_1).$$

(v) Las ecuaciones características de A y A′ son det $(\lambda I-A)=0$ y det $(\lambda I-A')=0$ respectivamente. Sus lados izquierdos son los traspuestos uno del otro, por lo que sus raíces son idénticas. En particular sus mayores raíces no negativas, o sea las raíces de Frobenius son iguales.

Con los resultados del teorema de Perrón-Frobenius, examinemos la relación que existe entre los valores propios de la matriz $B=(b_{ij})$ donde $b_{ij} \leqq 0$ para toda $i \neq j$, y las condiciones (I), (II) y (H-S). Dicha relación viene dada en el siguiente teorema.

TEOREMA (3) Sean $b_{ij} \leqq 0$ $(i \neq j)$ los elementos de la matriz B. Las trs condiciones (I), (II) y (H-S) (mutuamente equivalentes) son equivalentes a la condición:

(III) La parte real de todo valor propio de B es positiva.

Demostración:

Designemos Re (α), la parte real de un número complejo α. Puesto que los elementos fuera de la diagonal de -B son no negativos, entonces

(2.3.1) $A=\rho I-B$

es una matriz no negativa para un número positivo suficientemente grande ρ. Sea $\lambda(A)$ la raíz de Frobenius de A, demostraremos que (H-S) si y sólo si (III).

Condición necesaria. Supongamos que B cumple (H-S). Entonces, para cualquier valor propio β (en general, un número complejo) - de B, tenemos

$$0=\det(\beta I-B)=\det(-\beta I+B)=\det((\rho-\beta)I-(\rho I-B))=\det((\rho-\beta)I-A).$$

Por consiguiente, $(\rho-\beta)$ es un valor propio de A, de modo que se cumple $|\rho-\beta| \leq \lambda(A)$ por el inciso (ii) del teorema de Perrón-Frobenius, por lo tanto

$$\rho-\mathrm{Re}(\beta)=\mathrm{Re}(\rho-\beta) \leq |\rho-\beta| \leq \lambda(A).$$

Por otro lado, $\rho I-A=B$ a partir de (2.3.1), y como B satisface - (H-S), entonces $(\rho I-A)$ también la satisface. Ahora por el inciso (iv) del teorema de Perrón-Frobenius, $\rho > \lambda(A)$. Por lo que:

$\rho-\mathrm{Re}(\beta) \leq \lambda(A)$, entonces,

$-\mathrm{Re}(\beta) < 0$, y por lo tanto,

$\mathrm{Re}(\beta) > 0$.

Condición suficiente. Supongamos que la parte real de todo - valor propio de B es positiva, es decir, $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$ para α valor propio de B. Tomemos un vector característico $X \geq 0$ de A asociado a $\lambda(A)$, entonces,

$$BX=(\rho I-A)X=\rho X-AX=\rho X-\lambda(A)X=(\rho-\lambda(A))X.$$

Por lo tanto, $\rho-\lambda(A)$ es un valor propio de B, que es un número,- por consiguiente,

$$\rho-\lambda(A)=\mathrm{Re}(\rho-\lambda(A))>0$$

(por hipótesis), y, por lo tanto, $\rho>\lambda(A)$. Entonces por el inciso (iv) del teorema de Perrón-Frobenius $B=(\rho I-A)$ satisface la - condición (H-S).

Consideremos ahora una clase de matrices que será útil en el capítulo IV, para caracterizar un modelo abierto factible de Leontief.

Sea A una matriz cuadrada de orden n con elementos no negativos, I la matriz identidad de orden n, y sea ρ un número real positivo, entonces construyamos la siguiente matriz

(2.3.2) $B=\rho I-A \quad \rho>0, \; A\geq 0.$

DEFINICION (1). Cualquier matriz B de la forma (2.3.2) para la cual $\rho\geq\lambda(A)$, es llamada una M-matriz.

DEFINICION (2). Cualquier matriz B de la forma (2.3.2) para la cual $\rho\geq\lambda(A)$, es llamada una M-matriz no singular.

TEOREMA (4). Sea $B=(b_{ij})$, $b_{ij}\leq 0$ para $i\neq j$, entonces, cada una de las siguientes condiciones es equivalente a la afirmación (a) B es una M-matriz no singular.

(1) B cumple (H-S)

(2) La parte real de cada eigenvalor de B es positiva

(3) B tiene una inversa no negativa

Demostración:

La demostración la haremos en el siguiente orden:
La afirmación (a) implica (1), (1) implica (2), (2) implica (3) y la afirmación (3) implica (a).

(a) implica (1).

Por hipótesis sabemos que B es una M-matriz no singular, es decir, $\rho>\lambda(A)$, entonces, el inciso (iv) del teorema de Perrón-Frobenius asegura que existe $B^{-1}\geq 0$, por lo tanto, por el teorema (4) del capítulo I, B satisface (H-S).

(1) implica (2).

Esta implicación es inmediata a partir del teorema (3) de este capítulo.

(2) implica (3).

Supongamos que Re $(\alpha) > 0$, donde α es número complejo eingenvalor de B, entonces, por el teorema (3) de este capítulo, B cumple (H-S), pero si B cumple (H-S), entonces B tiene una inversa no negativa en virtud del teorema (4) del capítulo I.

(3) implica (a).

Sabemos que $B=\rho I-A$ $\rho>0$, $A\geq 0$. Supongamos que existe B^{-1}, es decir, existe $(\rho I-A)^{-1}$, entonces, $\rho>\lambda(A)$ en virtud del inciso (iv) del teorema de Perrón-Frobenius. Por lo tanto, B es una M-matriz no singular.

2.4. Series de C. Neumman.

Consideremos la serie infinita de vectores

(2.4.1) $C+AC+A^2C+.......+A^\nu C+.....$

y una serie de matrices

(2.4.2) $A = I+A+A^2+.....+A^\nu+.....$

Esto es una extensión al campo de las matrices, de una serie geométrica infinita:

(2.4.3) $\sum_{\nu=0}^{\infty}\alpha^\nu = 1+\alpha+\alpha^2+.......+\alpha^\nu+.....$

La suma de una serie infinita como (2.4.1), (2.4.2) y (2.4.3), se define como el valor del límite de su suma parcial hasta su ν-ésimo término, por ejemplo tomese la suma parcial de (2.4.2)

$$T_\nu = I+A+A^2+......+A^\nu.$$

Si existe el $\lim_{\nu\to\infty} T$ en el sentido de una sucesión convergente de matrices, se dice que la serie (2.4.2) es convergente y su suma se define como el límite de la sucesión.

El problema de la convergencia de la serie de vectores (2.4.1) es equivalente al de la convergencia de la serie de matrices (2.4.2). Por lo tanto, examinaremos una serie mas general

(2.4.4) $1/\rho \sum_{\nu=0}^{\infty} A^\nu/\rho^\nu = 1/\rho\,(I+1/\rho\, A+1/\rho^2 A^2+.....+1/\rho^\nu A^\nu+...)$

que incluye a la serie (2.4.2) como un caso especial. Para poder poner en claro la relación entre la condición de convergencia de esta serie y nuestros resultados anteriores. C Neumman (1832-1925) fué un matemático que estudio las series geométricas infinitas, obtenidas como aplicaciones lineales en un espacio lineal de infinitas dimensiones. Este tipo de series se denominan habitualmente series de C. Neumman. La serie (2.4.4) que vamos a estudiar es una de ellas.

TEOREMA (4) Sea $\lambda(A)$ la raíz de Frobenius de una matriz no negativa A. Entonces,

(i) la serie (2.4.4) es convergente si $\rho>\lambda(A)$, y su suma es $(\rho I-A)^{-1}$;

(ii) si la serie (2.4.4) converge para algún $\rho>0$, entonces $\rho>\lambda(A)$ y su suma es $(\rho I-A)^{-1}$.

Demostración:

En (i), $\rho>\lambda(A)\geqq 0$. Por lo tanto, $\rho>0$ tanto en (i) como en (ii), de modo que cada término en (2.4.4) es significativo. La suma parcial de (2.4.4) hasta el ν-ésimo término viene dado por

$$(2.4.5) \qquad T_\nu=1/\rho\,(I+1/\rho\, A+1/\rho^2 A^2+\ldots\ldots+1/\rho^\nu A^\nu).$$

Puesto que $A\gneqq 0$, entonces,

$$1/\rho\,(I+1/\rho\, A+1/\rho^2 A^2+\ldots+1/\rho^\nu A^\nu) \quad (I+1/\rho\, A+1/\rho^2 A^2+\ldots+1/\rho^{\nu+1} A^{\nu+1}).$$

es decir, $T_\nu\leqq T_{\nu+1}$ $(\nu=0,1,2,\ldots\ldots)$, en el sentido de un orden parcial. Por lo tanto $\{T_\nu\}$ es creciente. Calculamos $(\rho I-A)T_\nu$ y obtenemos

$$\begin{aligned}(\rho I-A)T_\nu=T_\nu(\rho I-A)&=1/\rho\,(I+1/\rho\, A+1/\rho^2 A^2+\ldots\ldots+1/\rho^\nu A^\nu)(\rho I-A)\\ &=(I+1/\rho\, A+1/\rho^2 A^2+\ldots+1/\rho^\nu A^\nu)-(1/\rho\, A+1/\rho^2 A^2+\ldots+1/\rho^{\nu+1} A^{\nu+1})\\ &=I-1/\rho^{\nu+1} A^{\nu+1},\end{aligned}$$

de modo que

$$(2.4.6) \qquad (\rho I-A)T_\nu=T_\nu(\rho I-A)=I-1/\rho^{\nu+1} A^{\nu+1} \qquad (\nu=0,1,2,\ldots\ldots),$$

Después de estas consideraciones vamos a demostrar (i) y (ii).

(i) Puesto que $A \gneqq 0$ y $\rho > 0$, tenemos $-(1/\rho^{\nu+1})A^{\nu+1} \lneqq 0$. Por lo tanto, de $(\rho I-A)T_\nu = I - 1/\rho^{\nu+1} A^{\nu+1}$ obtenemos

$(\rho I-A)T_\nu \lneqq I \quad (\nu=0,1,2,\ldots\ldots).$

Por hipótesis, $\rho > \lambda(A)$, de manera que $\rho I-A$ tiene una inversa no - negativa, esto significa que

$(\rho I-A)^{-1}(\rho I-A)T_\nu \lneqq (\rho I-A)^{-1} I$, entonces

$T_\nu \lneqq (\rho I-A)^{-1} \quad (\nu=0,1,2,\ldots\ldots).$

Teniendo en cuenta que $T_\nu \lneqq T_{\nu+1}$ $(\nu=0,1,2,\ldots\ldots)$, vemos que $\{T_\nu\}$ es creciente y superiormente acotada, es decir

$T_0 \lneqq T_1 \lneqq T_2 \lneqq \ldots\ldots\ldots \lneqq T_\nu \lneqq T_{\nu+1} \lneqq \ldots\ldots \lneqq (\rho I-A)^{-1},$

por lo tanto, por el teorema ( ) del apéndice, T_ν es convergente. Haciendo $\lim_{\nu\to\infty} T_\nu = T$ obtenemos

(2.4.7) $\quad \lim_{\nu\to\infty} 1/\rho^{\nu+1} A^\nu = \lim_{\nu\to\infty} (T_{\nu+1} - T_\nu) = 0$

Haciendo $\nu\to\infty$ en (2.4.6), obtenemos

$(\rho I-A)T_\nu = T_\nu(\rho I-A) = I.$

Por lo tanto, $T = (\rho I-A)^{-1}$.

(ii) Teniendo en cuenta que $T_\nu \gneqq 0$, podemos observar que si (2.4.4) es convergente, y su límite es T, tenemos $T = \lim_{\nu\to\infty} T_\nu \gneqq 0$, es - decir, T es una matriz no negativa. Puesto que T_ν es convergente, el término general de (2.4.4) converge hacia cero como en (2.4.7). Por lo tanto, haciendo $\nu\to\infty$ en (2.4.6) obtenemos

$(\rho I-A)T = T(\rho I-A) = I.$

Asi $\rho I-A$ tiene una matriz inversa no negativa T, de modo que - $\rho > \lambda(A)$.

Anteriormente se ha señalado que las condiciones de solución (I),

(II) y (H-S) del sistema de ecuaciones $(\rho I-A)X=C$ son todas equivalentes a la condición $\rho>\lambda(A)$. Por lo tanto, el teorema anterior ha puesto en claro la relación entre dichas condiciones y la de convergencia de (2.4.4). El siguiente corolario trata del caso especial en que $\rho=1$ en el teorema anterior.

COROLARIO (1) La condición $1>\lambda(A)$ es necesaria y suficiente - para la convergencia de la serie $\sum_{\nu=0}^{\infty} A^{\nu}=I+A+A^{2}+.....+A^{\nu}+......$

CAPITULO III

MATRICES REDUCIBLES

En este capítulo se estudian las matrices cuando éstas son reducibles o cuando éstas son irreducibles, y se da una caracterización de las matrices reducibles. Posteriormente, se enuncia el teorema de Perrón-Frobenius pidiendo que la matriz A sea irreducible y se dan algunos resultados adicionales sobre sumas de filas y columnas. Por último, se demuestra la unicidad de la forma normal de una matriz reducible.

3.1 Propiedades generales.

DEFINICION (1). Sea n el orden de una matriz no negativa A, y N el conjunto de índices formado por los números desde el 1 hasta el n, es decir $N=\{1,2,\ldots\ldots,n\}$. Se dice que A es reducible - cuando se puede dividir N en dos subconjuntos no vacíos I, y J tales que

$$N=I\cup J\ ,\ I\cap J=\emptyset\ ,\ I\neq\emptyset\ ,\ J\neq\emptyset \text{ y } a_{ij}=0 \text{ para } i\in I,\ j\in J.$$

Si no es posible tal partición de N, se dice que A es irreducible.

Por una permutación de una matriz cuadrada $A=(a_{ij})$ $(i,j=1,..,n)$ entendemos una permutación de los renglones de A combinada con la misma permutación de las columnas. Esto se hace premultiplicando a la matriz A por la matriz unidad de orden n, permutada por renglones y, después postmultiplicando a la obtenida por la traspuesta de la matriz unidad permutada, es decir, sea P la matriz unidad permutada y P^{t} su traspuesta, por lo tanto, A permutada por filas y columnas simultaneamente es PAP^{t}. Puesto que $P^{t}=P^{-1}$ entonces resulta PAP^{-1}.

De esta manera, nuestra definición puede ser reformulada como sigue:

DEFINICION (1'). Una matriz cuadrada $A=(a_{ij})$ $(i,j=1,2,\ldots,n)$ es reducible si existe una permutación que la pone en la forma:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$$

es decir $PAP^{-1}=\tilde{A}$, donde A_{11} y A_{22} son matrices cuadradas. De otro modo, A es llamada irreducible.

Por un subespacio coordenado n-dimensional de R^n entendemos un subespacio de R^n con una base de vectores $e_{k_1}, e_{k_2}, \ldots, e_{k_\nu}$ $(1 \leq k_{k_1} \leq k_{k_2} < \ldots < k_\nu < n)$, pertenecientes todos a la base estandar de R^n. La definición de una matriz reducible puede también ser dada en la siguiente forma:

DEFINICION (1''). Una matriz $A=(a_{ij})$ $(i,j=1,2,\ldots,n)$ es llamada reducible, si y sólo si, el operador correspondiente A tiene un subespacio coordenado invariante ν-dimensional con $1 \leq \nu < n$.

LEMA (1). Si $A \geq 0$ es una matriz irreducible de orden n, entonces, $(I-A)^{n-1} > 0$, con I la matriz unidad de orden n.

Demostración:

Para la demostración de este lema, es suficiente con mostrar, que para cada vector $Y \geq 0$ la siguiente desigualdad se cumple

$$(I-A)^{n-1}Y > 0.$$

Esta desigualdad será probada si logramos mostrar, que bajo la suposición de que $Y \geq 0$, el vector $Z=(I-A)Y$ siempre tiene menos - coordenadas cero que Y.

Supongamos lo contrario, entonces, los vectores Y y Z tienen el mismo número de coordenadas cero, esto es, $Z=Y+AY$ y $AY \gneq 0$, entonces, para coordenadas positivas de Y le corresponden coordenadas positivas de Z. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que las columnas de Y y Z tienen la siguiente forma:

$$Y=\begin{pmatrix} U \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad Z=\begin{pmatrix} V \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (U>0,\ V>0)$$

donde las columnas de U y V son de la misma dimensión. Tomando a

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

tenemos

$$\begin{pmatrix} U \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V \\ 0 \end{pmatrix}$$

de aquí que $A_{21}U=0$, y como $U>0$, entonces, $A_{21}=0$, esto contradice la irreducibilidad de A. Por lo tanto, Z tiene menos coordenadas cero que el vector Y. De esta manera queda probado el lema.

A continuación enunciamos el siguiente lema que caracteríza a las matrices reducibles.

LEMA (2). $A \geqq 0$ es reducible si y sólo si existe un numero real μ positivo y un vector $X \geq 0$, $X \ngtr 0$ tales que $AX \lneqq \mu X$.

Demostración:

Si A es reducible, entonces, existe una matriz de permutación que transforma A en la forma

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$$

Designemos a $\lambda(A_{11})=\mu$ la raíz de Frobenius de A_{11}. Entonces, existe un vector propio $Y\geq 0$ asociado a ella tal que $A_{11}Y=Y$. Ahora hagamos

$$Z=\begin{pmatrix} Y \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \left.\vphantom{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}}\right\} \ell$$

donde ℓ es el orden de A_{22}, entonces, $Z\geq 0$, $Z\not> 0$ y

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} Z=\mu Z$$

En otras palabras, $P^{-1}APZ=\mu Z$. Premultiplicando ambos lados por la matriz de permutación, $PP^{-1}APZ=P\mu Z$, entonces obtenemos

$APZ=\mu PZ$.

Haciendo $PZ=X$, encontramos que $X\geq 0$, $X\not> 0$ porque X es una reordenación de Z y $AX=\mu X$, que es un caso especial de $AX\leqq\mu X$, en el que tenemos el signo de igualdad.

Para el regreso, supongamos que existen X y μ como los descritos anteriormente, podemos escribir $AX\leqq\mu X$ para cada componente

(3.1.2) $\qquad \mu X_i \geqq \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \geqq 0 \qquad (i=1,2,\ldots,n).$

Sea $J=\{j/X_j>0\}$. Entonces en base a la hipótesis $X\geq 0$, $X\not> 0$, tenemos $\emptyset\subset J\subset N=\{1,2,\ldots\ldots,n\}$. Designemos mediante I al conjunto complementario de J en N. De esta manera I y J satisfacen (3.1.1). Si $i\in I$, entonces $X_i=0$ y de (3.1.2) obtenemos

$\mu X_i=\mu(0)=0\geqq \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \geqq 0$ para $i\in I$

en la que todos y cada uno de los términos entre los dos son no negativos, es decir, $a_{ij} \geq 0$, mientras que su suma es cero. Por lo tanto tenemos

$$a_{ij} X_j = 0 \quad (i \in I,\ j=1,2,\ldots,n).$$

En la igualdad anterior $X_j > 0$ para $j \in J$ de modo que $a_{ij}=0$ $(i \in I, j \in J)$ por lo tanto, A es reducible.

Si A es irreducible, podemos enriquecer aun más el teorema de Perrón-Frobenius.

TEOREMA (1). Si A es una matriz irreducible de orden mayor que 1, entonces:

(i) La raíz de Frobenius de A es $\lambda(A) > 0$ y existe un vector - propio positivo asociado a ella;

(ii) Si X es el vector propio de A asociado a $\lambda(A)$, entonces X esta derterminado en forma única, y cualquier otro vector - propio asociado a $\lambda(A)$ es el resultado de multiplicar un escalar positivo por X.

(iii) El problema de la no negatividad de los valores propios $AY=\mu Y$, $\mu \gtrless 0$, $Y > 0$ tiene una solución única $\mu=\lambda(A)$;

(iv) Sea $A_1 \geq A \gneq \tilde{0}$ y al menos A_1 ó A_2 irreducibles, entonces, $\lambda(A_1) > \lambda(A_2)$;

(v) $\lambda(A)$ es una raíz simple de la ecuación característica de A.

Demostración:

(i) Sean $\lambda(A\ )=\ $, $X \geq 0$ un vector propio asociado a ella. Entonces, $\lambda X=AX$. Si $X \not> 0$ entonces A es reducible por el lema anterior esto contradice el supuesto de que A es irreducible, por lo tanto, $X > 0$. Puesto que A es irreducible entonces contiene algún elemento positivo en cada renglón, $\lambda X=AX > 0$ porque $X > 0$, entonces, $\lambda > 0$.

Designemos mediante $Y\neq 0$ a un vector propio real cualquiera asociado a λ. Comparemos sus componenetes con los del vector propio positivo X y hagamos

(3.1.3) $\quad \min\limits_{1\leq i\leq n} Y_i/X_i=\theta.$

Entonces $Z=Y-\theta X\geqq 0$. Sea $1\leqq i\leqq n$, entonces $Z_i=Y_i-\theta X_i$. Tomemos a $Y_i/X_i\gneqq\theta$, esto es, $Y_i\gneqq\theta X_i$, por lo que hacemos $Z_i=Y_i-\theta X_i\geqq 0$.

Por otra parte, de (3.1.3) tenemos que $Y_i/X_i=\theta$, por lo que despejando a Y_i, obtenemos $Y_i=\theta X$, esto implica $Y_i-\theta X_i=0=Z$ para algún i, por lo tanto $Z\not> 0$. Además

$$AZ=A(Y-\theta X)=AY-A\theta X=\lambda Y-\theta\lambda X=\lambda(Y-\theta X)=\lambda Z.$$

Si mostramos que Z=0, habremos terminado

Sabemos que Z 0, $Z\not> 0$, y puesto que A es irreducible, en virtud del lema anterior debemos tener Z=0. Por lo tanto, $Y=\theta X$.

(iii) La irreducibilidad de A es equivalente, por definición a la de A^t. Puesto que $\lambda(A)=\lambda(A^t)=$, existe un vector propio positivo $X>0$ de A^t asociado a λ tal que $A^tX=\lambda X$. Haciendo

$$AY=\mu Y\ ,\ Y\geq 0$$

y formando el producto escalar, obtenemos

$$\mu(X,Y)=(X,\mu Y)=(AX,Y)=(A^tX,Y)=\lambda(X,Y).$$

luego $\quad (\lambda-\mu)(X,Y)=0.$

En virtud de $X>0$ e $Y\geq 0$, obtenemos $(X,Y)>0$. Por lo tanto, $\lambda=\mu$.

(iv) Si A es reducible, A también lo será puesto que $A_1\geq A_2\geqq 0$, esto contradice la hipótesis. De aquí que A, sea irreducible. $C=\frac{1}{2}(A_1+A_2)$ también es irreducible como puede facilmente comprobarse a partir de la definición de matriz reducible.

Tomemos un vector propio positivo $Z > 0$ asociado a $\lambda(C)$ (esto por el inciso i). Puesto que $A_1 \geq C$, tenemos $\lambda(C)Z=CZ$. Tomemos un vector propio positivo $Y > 0$ asociado a $\lambda(A_1)$ y formemos el producto escalar

$$\lambda(C)(Y,Z)=(Y,\lambda(C)Z)=(Y,CZ) < (Y\ A_1 Z)$$

$$=(A_1^t Y,Z)=(\lambda(A_1^t)Y,Z)=\lambda(A_1^t)(Y,Z)$$

luego, $$(\lambda(A_1^t)-\lambda(C))(Y,Z) > 0.$$

$(Y,Z) > 0$ debido a $Y > 0$ y $Z > 0$, de modo que $\lambda(C) < \lambda(A_1^t)=\lambda(A_1)$.

Por otra parte, $\lambda(A_2) \lneqq (C)$ debido a que $A_2 \lneqq C$ en virtud del inciso (ii) del teorema de Perrón-Frobenius. Combinando estos resultados obtenemos $\lambda(A_1) > \lambda(A_2)$.

(v) Designemos mediante $C=(a_{ij})$ $(i,j \in J)$ donde J es un subconjunto apropiado de $\{1,2,.....,n\}$, es decir, cualquier submatriz principal de A. Ahora, formando una matriz cuadrada de orden n, $B=(b_{ij}) \gneqq 0$ de acuerdo con

$$b = \begin{cases} a_{ij} & (i,j \in J) \\ \\ 0 & \text{(en cualquier otro caso)} \end{cases}$$

tenemos, evidentemente que $A \gneqq B$. Esta claro que B es reducible, mientras que A es irreducible por hipótesis, de modo que $A \neq B$. De aqui que $A \gneqq B$, por lo tanto, $\lambda(A) > \lambda(B)$ en virtud de (iv). Por otra parte, es evidente que $\lambda(B) > \lambda(C)$. Así, a partir de estas desigualdades obtenemos $\lambda(A) > \lambda(C)$.

Sea ahora k el orden de C y sea I la matriz identidad de orden k. Entonces, puesto que $\lambda(A) > \lambda(C)$, tenemos det $(\lambda I_k - C) > 0$, $\lambda = \lambda(A)$ debido a la condición (H-S) relativa a $\rho I_k - C$. Por lo tanto, los menores principales de orden menor que n del $\det(\lambda I - A)$ - son positivos. Ahora, a partir de

$$\psi(\rho)=\det(\rho I-A)=\begin{vmatrix} \rho-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \rho-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \rho-a_{nn} \end{vmatrix}$$

vemos que la derivada de $\psi(\rho)$ viene dada por:

$\psi'(\rho)$= la suma de todos los menores principales de orden (n-1) de modo que $\varphi(\lambda)>0$. Entonces, $\rho=\lambda$ es una raíz simple de $\psi(\rho)=0$.

Hemos demostrado la equivalencia de las cuatro condiciones relativas a una matriz no negativa $A\gtrsim 0$, es decir, la condición para que un sistema sea debilmente soluble (I), la condición para que un sistema sea fuertemente soluble (II), la condición (H-S), y la condicion de que $\rho>\lambda(A)$ con respecto al sistema de ecuaciociones $(\rho I-A)X=C$. Ahora podemos añadir la siguiente condición:

(0) $(\rho I-A)X=C$ tiene una solución $X\geqq 0$ para algún $C\geq 0$.

Entonces, tenemos el siguiente teorema

TEOREMA (2). Si $A\gtrsim\bar{0}$ es irreducible, entonces:

(i) La condición (0) es equivalente a las condiciones (I), (II), (H-S) y $\rho>\lambda(A)$;

(ii) Siempre que $\rho I-A$ tenga una matriz inversa no negativa, dicha inversa sera siempre una matriz positiva, es decir, $(\rho I-A)^{-1}>0$.

Demostración:

Supongamos que (0) se cumple. Si $(\rho I-A)X=C$ tiene una solución $X\gtrsim 0$ para algún $C\geq 0$, entonces $X\geq 0$. Sea $Y>0$ un vector positivo de A asociado a $\lambda(A^t)$. Entonces, $A^tY=\lambda Y$. El producto escalar de X e Y satisface

$\rho(Y,X)>(Y,AX)=(A^tY,X)=\lambda(Y,X)$, porque $\rho X=AX+C\geq AX$.

Puesto que $(Y,X)>0$, obtenemos $\rho>\lambda=\lambda(A')$. Tenemos $\rho>\lambda(A)$ debido a $\lambda(A')=\lambda(A)$. De aqui, (0) implica $\rho>\lambda(A)$. Por otro lado es evidente que (I) implica (0).

(ii) Si existe $(\rho I-A)^{-1}\geq 0$ la solución de $(\rho I-A)X=C$ para cualquier $C\geq 0$ es logicamente no negativa. Entonces, basta con mostrar que $X>0$. En efecto, puesto que

$$\rho X=AX+C\gtrsim AX, \quad X\gtrsim 0,$$

debemos tener $X>0$ de acuerdo con el lema de este capítulo. Para ver que $(\rho I-A)^{-1}>0$, hagamos C igual al j-ésimo vector unitario e^j $(e^j>0)$ y observvemos que $(\rho I-A)e^j>0$. $(\rho I-A)e^j$ es, exactamente, la j-ésima columna de $(\rho I-A)^{-1}$. Repitiendo este procedimiento vemos que cada columna es un vector positivo. De aqui se sigue que $(\rho I-A)^{-1}>0$.

En el siguiente teorema mostramos una relación entre las sumas de filas, las sumas de columnas y la raíz de Frobenius.

TEOREMA (3).

(i) $\min\limits_{1\leq j\leq n} S_j\leq\lambda(A)\leq\max\limits_{1\leq j\leq n} S_j$;

(ii) $\min\limits_{1\leq i\leq n} r_i\leq\lambda(A)\leq\max\limits_{1\leq i\leq n} r_i$;

(iii) Sea A irreducible. Entonces, las tres condiciones siguientes son equivalentes: (a) $\lambda(A)=\max\limits_{1\leq j\leq n} S_j$; (b) $\lambda(A)=\min\limits_{1\leq j\leq n} S_j$; (c) las n sumas de columnas S_j son iguales.

(iV) Sea A irreducible. Entonces, las tres condiciones siguientes son equivalentes: (a) $\lambda(A)=\max\limits_{1\leq i\leq n} r_i$; (b) $\lambda(A)=\min\limits_{1\leq i\leq n} r_i$; (c) las n sumas de filas r son iguales.

donde $r_i=\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}=a_{i1}+a_{i2}+\dots+a_{in}$ $(i=1,2,\dots,n)$ y,

$$S_j=\sum_{i=1}^{n} a_{ij}=a_{1j}+a_{2j}+\dots+a_{nj} \quad (j=1,2,\dots,n).$$

Demostración:

(i) Sea $X \geq 0$ un vector propio no negativo asociado a $\lambda(A)$. Puesto que $\lambda(A)X=AX$ es homogéneo, podemos suponer que

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1 \quad \text{esto es normalizando a } X.$$

Escribiendo $\lambda(A)X=AX$, para cada componente, tenemos

$$\lambda(A)x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

sumando todos los i, obtenemos

$$\lambda(A)=\lambda(A)\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, x_j = \sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\Big)x_j = \sum_{j=1}^{n} s_j\, x_j .$$

Considerando $x_j \geq 0$, $\sum_{j=1}^{n} x_j = 1$, y sea $S^*=\max\{s_j\}$ $j=1,2,\ldots,n$ y $S_*=\min\{s_j\}$ $j=1,2,\ldots,n$, obtenemos

$$\lambda(A)= \sum_{j=1}^{n} s_j x_j = s_1 x_1 + s_2 x_2 + \ldots + s_n x_n \leqq S^* x_1 + S^* x_2 + \ldots + S^*_n x_n, \text{ y}$$

$$\lambda(A)= \sum_{j=1}^{n} s_j x_j = s_1 x_1 + s_2 x_2 + \ldots + s_n x_n \geqq S_* x_1 + S_* x_2 + \ldots + S_* x_n .$$

entonces

$$\lambda(A) \leqq S^* x_1 + \ldots + S^* x_n = S^* \sum_{j=1}^{n} x_j = S^* = \max\{s_j\} \quad j=1,2,\ldots,n$$

$$\lambda(A) \geqq S_* x_1 + \ldots + S_* x_n = S_* \sum_{j=1}^{n} x_j = S_* = \min\{s_j\} \quad j=1,2,\ldots,n.$$

por lo tanto,

$$\min_{1\leqq j\leqq n} s_j \leqq \lambda(A) \leqq \max_{1\leqq j\leqq n} s_j .$$

(ii) Para la demostración de (ii) procedamos de la misma manera que en (i), tomando en cuenta que $\lambda(A)=\lambda(A')$. esto es,

$$\lambda(A)X=A'X$$

lo cual para cada componente tenemos

$$\lambda(A)x_i = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \qquad (i=1,2,\ldots,n).$$

Sumando todas las i, obtenemos

$$\lambda(A)=\lambda(A)\sum_{i,j=1}^{n} x_j = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ji}\, x_j = \sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{n} a_{ji}\Big)x_j = \sum_{i=1}^{n} r_i\, x_i$$

y procediendo como en el inciso anterior, concluimos que:

$$\min_{1\leqq i\leqq n} r_i \leqq \lambda(A) \leqq \max_{1\leqq i\leqq n} r_i .$$

(iii) Demostraremos la equivalencia de las tres afirmaciones en el siguiente orden.

(a) implica (c), (b) implica (c), (c) implica (a) y (c) implica (b).

(a) implica (b)

de $\lambda(A)=\sum_{j=1}^{n} S_j X_j$ obtenemos

$$\sum_{j=1}^{n}(\lambda(A)-S\ )X_j=0.$$

Si $\lambda(A)=\max_{1\leq j\leq n} S_j$, entonces

$$\sum_{j=1}^{n}(\max_{1\leq j\leq n} S_j-S\ )X_j=0. \tag{3.1.4}$$

Puesto que A es irreducible, tenemos que $X_j>0$ $(j=1,2,\ldots,n)$ y $\max_{1\leq j\leq n} S_j \geq S_j$ $(j=1,2,\ldots,n)$. Por consiguiente de (3.1.4) se sigue que

$$S_j=\max_{1\leq j\leq n} S_j \quad (j=1,2,\ldots,n).$$

(b) implica (c).

Suponemos que $\lambda(A)=\min_{1\leq j\leq n} S_j$, entonces, de

$$\sum_{j=1}^{n}(\lambda(A)-S_j)X_j=0 \quad \text{obtenemos}$$

$$\sum_{j=1}^{n}(\min_{1\leq j\leq n} S_j-S_j)X_j=0 \tag{3.1.5}$$

y puesto que A es irreducible, tenemos que $X_j>0$ $(j=1,2,\ldots,n)$ y el $\min_{1\leq j\leq n} S_j\leq S_j$ $(j=1,2,\ldots,n)$. Por lo tanto, de (3.1.5) se sigue que

$$S_j=\min_{1\leq j\leq n} S_j \quad (j=1,2,\ldots,n).$$

(c) implica (a).

Del inciso (i), $\lambda(A)\leq\max_{1\leq j\leq n} S_j$, si $S_j=\max_{1\leq j\leq n} S_j$ $(j=1,2,\ldots,n)$ entonces, $\lambda(A)=\max_{1\leq j\leq} S_j$.

(c) implica (b)

Si $S_j=\min_{1\leq j\leq n} S_j$ $(j=1,2,\ldots.,n)$, entonces del inciso (i) sabemos que $\lambda(A)\geq \min_{1\leq j\leq n} S_j$, entonces, $\lambda(A)=\min_{1\leq j\leq n} S_j$.

(iV) Puesto que $\lambda(A)=\lambda(A')$, solo hace falta volver a escribir (iii) para A' y así se demuestra (iV).

3.2 La forma normal de una matriz reducible.

Consideremos una matriz reducible arbitraria A de orden n. Por medio de una permutación simultánea a renglones y a columnas podemos ponerla en la forma

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

donde B Y D son matrices cuadradas. Si una de las matrices B o D es reducible, entonces puede ser representada en una forma similar a la anterior, de esta manera A toma la siguiente forma

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} K & H & F \\ 0 & L & G \\ 0 & 0 & M \end{pmatrix}$$

donde K, L y M son matrices cuadradas. Si una de las matrices anteriores es reducible, entonces el proceso continua. Como A es de dimensión finita, el proceso en algún momento se detiene y se obtiene una matriz triangular de la siguiente forma

$$(3.2.1) \quad PAP^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots\cdots & A_{1s} \\ 0 & A_{22} & \cdots\cdots & A_{2s} \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & A_{3s} \\ & \cdots\cdots\cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & A_{ss} \end{pmatrix}$$

donde los bloques en la diagonal son matrices cuadradas e irreducibles o bien matrices de orden 1 cuyo único elemento es el cero.

Un bloque diagonal A_{ii} ($1 \leq i \leq s$) es llamado "aislado" si $A_{ik}=0$ $(k=1,2,\ldots\ldots,i-1,\ i+1,\ \ldots\ldots,s)$.

Por medio de una permutación en (3.2.1) podemos poner todos - los bloques aislados en el primer lugar a lo largo de la diagonal principal, de esta manera A toma la siguiente forma

$$(3.2.2)\quad PAP^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & \cdots\cdots & 0 & A_{1g+1} & \cdots\cdots & A_{1s} \\ 0 & A_{22} & \cdots\cdots & 0 & A_{2g+1} & \cdots\cdots & A_{2s} \\ & & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & & & \\ 0 & \cdots\cdots & A_{gg} & 0 & A_{gg+1} & \cdots\cdots & A_{gs} \\ 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 & A_{g+1g+1} & \cdots\cdots & A_{g+1s} \\ & & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & & & \\ 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 & & \cdots\cdots\cdots & A_{ss} \end{pmatrix}$$

donde $A_{11}, \ldots\ldots, A_{ss}$ son matrices cuadradas e irreducibles o matrices de orden 1 cuyo único elemento es el cero, y en cada columna.

$A_{1f}, A_{2f}, \ldots\ldots, A_{f-1f}$ $(f=g+1,\ldots,s)$

al menos una matriz diferente de las que estan en la diagonal principal es distinta de cero. A esta forma se le llama <u>forma normal de la matriz reucible</u>.

Vamos a demostrar que la forma normal de una matriz reducible A, esta determinada en forma única, para una permutación dentro de los bloques y permutaciones dentro de los bloques diagonales (la misma para renglones y columnas). Para este propósito consideremos el operador A correspondiente a A en un espacio vectorial n-dimensional R^n. Para la representación de A en la forma normal (3.2.2) le corresponde una descompocisión de R^n en subespacios - coordenados.

Antes de enunciar el teorema de la unicidad de la forma normal de una matriz reducible, probaremos el siguiente lema.

LEMA (3). Sea $R^n=R_1+R_2+.......+R_s$, el espacio n-dimensional - correspondiente al operador A, que esta en la forma normal (3.2.1), y formemos la siguiente secuencia de subespacios $M_1=R_s$, $M_2=R_{s-1}+R_s$, $M_s=R_1+........+R_s$. Entonces, $M_1, M_2, ..., M_s$ son subespacios invariantes de A, y entre dos consecutivos de ellos, no hay subespacios invariantes de A.

Demostración:

Primero demostraremos que los subespacios M_i $(i=1,...,s)$ son subespacios invariantes de A, y segundo, que no puede haber subespacios intermedios entre cualesquiera dos consecutivos.

Sea la matriz A en su forma normal, es decir,

$$A=\left(\begin{array}{ccc|ccc} A_1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & A_g & & & \\ \hline & & & A_{g+1} & & \\ & B & & & \ddots & \\ & & & & & A_s \end{array}\right) \quad (1)$$

Sea $\bar{X}\in M$, entonces $\bar{X}\in R_{s-i+1}+.......+R_s$ y es de la siguiente forma $X=(0,....,0,X_{s-i+1},.......,X_s$ con X_{s-i+1} $R_{s-i+1},.....,X_s\in R_s$, de vectores correspondientes a esos subespacios coordenados de A.

---

(1) En toda esta sección, por razones de comodidad para las demostraciones, se utiliza una definición alternativa de la forma normal de una matriz reducible, que aparece en esta página.

$$AX=\begin{pmatrix} A_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & A_j & & & \\ & B & & A_{j+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & A_s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ X_{s-i+1} \\ \vdots \\ X_s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ A_{s-i+1}X_{s-i+1} \\ \\ Y \end{pmatrix}$$

donde $Y\neq 0$, entonces podemos observar que $A\bar{X} \in M_i$, por lo tanto, M_i es invariante.

Para la segunda parte de esta demostración, supongamos que - existe V tal que $M_i \subset V \subset M_{i+1}$.

Sea $V=M_i \oplus S$ donde S es un subespacio coordenado. Y sea L el complemento ortogonal de M_i respecto a $M_{i+1} = R_{s-i}, R_{s-i+1}+\dots\dots R_s$.
Entonces $V=M_i \oplus S \subset M_i \oplus L$.

Sea $X \in V$, entonces X es de la forma $X=M_i+S$. Tomemos un $\bar{\bar{X}} \in R_{s-i}$, entonces, podemos construir X de la siguiente manera:

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\bar{X}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \hat{X} = \begin{pmatrix} U \\ \\ W \end{pmatrix}, \quad \text{a su vez} \quad U=\left.\begin{pmatrix} 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{pmatrix}\right\} R_{s-i-s}, \quad W=\left.\begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}\right\} s$$

donde s es la dimensión del subespacio S. Reordenando los renglones del subespacio R_{s-i}, obtenemos: $$AX = \begin{pmatrix} 0 \\ A_{s-i}\bar{\bar{X}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si analizamos $A_{s-i}\bar{\bar{X}}=Y$, donde Y es un vector que pertenece a R_{s-i}, por lo tanto si pensamos a la matriz A_{s-i} de la siguiente forma:

$$A_{s-i}X=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U \\ W \end{pmatrix}$$

de donde $A_{21}U + 0=0$, $U\neq 0$, por lo tanto $A_{21}=0$, lo cual es una contradicción, porque $A_{i+1,i}$ es irreducible. Lo que significa que no existe tal subespacio entre M_i y M_{i+1} para toda i.

TEOREMA (4). Sea (3.2.2) la forma normal de una matriz A a la cual le corresponde una descomposición en subespacios coordenados $R^n=R_1+\ldots\ldots+R_s$, y supongamos, que existe otra forma normal de A a la que le corresponde la siguiente descomposición de subespacios coordenados $R^n=\hat{R}_1+\ldots\ldots+\hat{R}_t$. Entonces, t=s y existe una permutacion $\pi:\{1,2,\ldots,s\}\to\{1,\ldots,s\}$ tal que para todo $i=1,\ldots,s$ $R_i=\hat{R}_{\pi i}$.

Demostración:

Supongamos que el subespacio invariante $\hat{R}_t$ tiene vectores coordenados en común con R_k, pero no con $R_{k+1},\ldots,R_s$.

Primero demostraremos que $\hat{R}_t\subset R_k$. Supongamos lo contrario, entonces, la intersección $\hat{R}_t\cap R_k+R_{k+1}+\ldots+R_s\subset R$ es un subespacio invariante mas pequeño que $\hat{R}_t$, pero esto contradice, que A este en su forma normal. Por lo tanto $\hat{R}_t\subset R_k$.

Ahora probaremos que $R_k\subset\hat{R}_t$. Esto es inmediato, porque de lo contrario, el subespacio invariante $\hat{R}_t+R_{k+1}+\ldots\ldots+R_s$ estaría entre los subespacios $R_k+R_{k+1}+\ldots\ldots+R_s$ y $R_{k+1}+\ldots\ldots+R_s$. Por lo tanto, $\hat{R}_t$ y R_k coinciden, de lo que se sigue que R_k es invariante. Entonces, sin alterar la forma normal de la matriz A, podemos poner R_k en el lugar de R_s. De esta manera, hacemos $\hat{R}_t\equiv R_s$.

supongamos ahora, que:

$$R_{l-1} \cap R_l = \emptyset \quad (l < s),$$

y sabemos

$$R_{t-1} \cap R_{i+1} = \emptyset \quad \text{para toda } i = l, l+1, \ldots\ldots, s-1,$$

entonces, vamos a demostrar que:

$$(\hat{R}_{t-1} + \hat{R}_t) \subset (R_l + R_{l+1} + \ldots\ldots\ldots + R_s).$$

Supongamos lo contrario, es decir, existe $e_s \in \hat{R}_{t-1}$ tal que $e_s \notin (R_l + \ldots\ldots + R_{s-1})$. Sea $W = (\hat{R}_{t-1} + \hat{R}_t) \cap (R_l + \ldots\ldots + R_s) \subset (\hat{R}_{t-1} + R_t)$, propiamente contenido y $e_s \notin \hat{R}_t$, entonces $R_t \subset W \subset (\hat{R}_{t-1} + \hat{R}_t)$. Esto quiere decir, que existe un subespacio intermedio entre los subespacios $\hat{R}_t$ y $\hat{R}_{t-1}$, pero esto es una contradicción, porque el lema anterior, nos permite asegurar que estos subespacios son invariantes, por lo tanto,

$$(\hat{R}_{t-1} + \hat{R}_t) \subset (R_l + R_{l+1} + \ldots\ldots + R_s), \text{ y entonces,}$$
$$\hat{R}_{t-1} \subset R_l.$$

Ademas $\hat{R}_{t-1}$ debe coincidir con R_l, ya que de otra manera $\hat{R}_{t-1} + R_{l+1} + \ldots\ldots\ldots + R_s$, sería un subespacio invariante intermedio entre $R_l + R_{l+1} + \ldots\ldots + R_s$ y $R_{l+1} + \ldots\ldots + R_s$. Ahora, como R_l y R_s son subespacios invariantes, entonces $\hat{R}_{t-1}$ es invariante si y sólo si R_{s-1} también lo es, y mediante una permutación aplicada, a filas y columnas a la matriz original A, R_l puede ser puesto en el lugar de R_{s-1}, por lo tanto,

$$R_{t-1} = R_{s-1} \text{ y } \hat{R}_t = R_s.$$

Continuando con este proceso, finalmente llegamos a la conclusión que s=t y que las descomposiciones (3.2.2) y (3.2.3) coinciden salvo el orden de los términos.

Haciendo uso de la forma normal de A, probaremos el siguiente teorema.

TEOREMA (5) Para la raíz de Frobenius λ de la matriz $A \geqq 0$ le corresponde un vector propio positivo si y sólo si en la forma normal (3.2.2) de A:

(i) Cada una de las matrices $A_1, A_2, \ldots, A_g$ tiene a λ como valor propio; (en caso que $g < s$)

(ii) Ninguna de las matrices $A_{g+1}, A_{g+2}, \ldots, A_s$ tiene esta propiedad.

Demostración:

Sea A' la matriz traspuesta de A, y $Z > 0$ un vector propio positivo perteneciente al valor propio $\lambda(A')$. Por el teorema de Perrón-Frobenius $\lambda(A) = \lambda(A') = \lambda$. De acuerdo a la disección en bloques de A, dividamos la columna Z en Z^k (k=1,2,....,s), entonces la ecuación

$$(3.2.4) \qquad A'Z = \lambda Z \qquad (Z > 0)$$

es remplazada por los dos sistemas de ecuaciones siguientes

$$(3.2.5) \qquad A_i Z^i = \lambda Z^i \qquad (i=1,2,\ldots,g)$$

$$(3.2.6) \qquad \sum_{h=1}^{j-1} A_{jh} Z^h + A_j Z^j = \lambda Z^j \qquad (j=g+1,\ldots,s)$$

de (3.2.5) se sigue que λ es un valor propio de cada una de las matrices $A_1, A_2, \ldots, A_g$.

(ii) De (3.2.6) encontramos que

$$A_j Z^j \leqq \lambda Z^j, \quad A_j Z^j = \lambda Z \qquad (j=g+1,\ldots,s)$$

Denotamos por λ_j el valor propio de A_j (j=g+1,....,s).

Sea r la raiz de Frobenius de A_j, e $Y_j \geqq 0$ el vector propio de A′ asociado, entonces

$A'Y=\lambda_j Y$, o lo que es lo mismo

$Y'A_j'=\lambda_j Y'$ para $(j=g+1,\ldots,s)$

multiplicando esta igualdad por Z^j $(j=g+1,\ldots,s)$, obtenemos

$$(Y_j' A_j')Z^j=\lambda_j Y_j' Z^j$$

sabemos que $A_j Z^j \leqq \lambda Z^j$ y que $Y_j' Z^j > 0$, entonces

$$\lambda_j Y_j' Z^j \leqq \lambda Y_j' Z^j$$

por lo tanto, $\lambda_j \leqq \lambda$.

(ii) Supongamos ahora (inversamente) que el valor propio de - las matrices A_i $(i=1,2,\ldots,g)$ son iguales a λ, y que $\lambda_j < \lambda$ para $(j=g+1,\ldots,s)$ se cumple para las matrices A_j, también $j=g+1,\ldots,s$, entonces, reemplazando la ecuación (3.2.4) por los sistemas (3.2. 5) y (3.2.6) podemos definir columnas propias positivas Z^i de las matrices $A_i Z^i=\lambda Z^i$ $(i=1,\ldots,g)$. Ahora encontraremos las columnas Z^j $(j=g+1,\ldots,s)$.

De (3.2.6) obtenemos

$$(\lambda Z^j - A_j Z^j)=\sum_{h=1}^{j-1} A_{jh} Z^h$$

y despejandoa Z^j, tenemos

$$Z^j=(\lambda I-A_j)^{-1}\sum_{h=1}^{j-1} A_{jh} Z^h \tag{3.2.7}$$

como $\lambda_j<\lambda$ $(j=g+1,\ldots,s)$, entonces

$$(\lambda I_j - A_j)^{-1} > 0 \tag{3.2.8}$$

donde λ_j es la raíz de Frobenius de A_j $(g < j \leqq s)$.

Probaremos por inducción sobre j que las columnas Z $(j=g+1,\ldots,s)$ definidas por (3.2.7) son positivas.

Primero, para $j=g+1$, sustituimos en (3.2.7) y obtenemos

$$Z^{g+1}=(\lambda I_{g+1}-A_{g+1})^{-1}\sum_{h=1}^{g+1} A_{g+1\,h} Z^h > 0$$

esto por (3.2.8), y porque $\sum_{h=1}^{j-1} A_{jh} Z^h > 0$ y distinta de cero, además $Z^1, Z^2, \ldots\ldots, Z^{j-1}$ son positivas.

Supongamos que se cumple para $j=s-1$, $j > g+1$, es decir,

$$Z^{s-1} = (\lambda I_{s-1} - A_{s-1})^{-1} \sum_{h=1}^{s-2} A_{jh} Z^h > 0$$

debemos mostrar que $Z > 0$. Pero que $Z^1, \ldots\ldots, Z^{g-1}\ Z^g, Z^{g+1}, \ldots\ldots, Z^{s-1} > 0$ implica $Z^s > 0$. En este caso, utilizando la hipótesis de inducción tenemos

$$Z^s = (\lambda I_{s-1} - A_{s-1})^{-1} \sum_{h=1}^{s-2} A_{s-1 h} Z^h > 0.$$

Por lo tanto, $Z^j > 0$ para $(g+1 \leqq j \leqq s)$.

De esta manera la columna $Z=(Z^1, \ldots\ldots, Z^s)$ es un vector propio de A, para el valor propio λ esto completa la demostración.

CAPITULO IV

EL MODELO ABIERTO DE LEONTIEF

En este capítulo encontramos una interesante aplicación de la teoría de las matrices no negativas desarrollada en los tres capítulos anteriores de este trabajo. Esta aplicación se enmarca dentro de la economía matemática, en el planteamiento del modelo abierto de insumo-producto de Leontief, que consiste en el sistema de ecuaciones lineales $(I-A)X=C$, donde X es el vector de producción, C el vector de la demanda final e $(I-A)$ la matriz de coeficientes técnicos. En términos económicos se definen la factibilidad y la rentabilidad de un modelo abierto y se analizan las condiciones matemáticas para que éstas existan.

4.1 Planteamiento general.

Suponemos que la economía esta dividida en n sectores productivos, cada uno produce una mercancia que es consumida por él y por los otros sectores, de esta manera identificando el i-ésimo sector con la i-ésima mercancia tenemos la siguiente notación:

X_i: producción bruta del sector i

X_{ij} : ventas del sector i al sector j

C_i: producto neto del sector i

a_{ij} : el número de unidades de la mercancia i necesarias para la producción de una unidad de la mercancia j, o coeficiente de insumo.

Entonces, al darse el equilibrio económico se igualan la oferta con la demanda, lo cual conduce a las siguientes n ecuaciones

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} X_{ij} + C_i \qquad 1 \leq i \leq n.$$

Ahora suponiendo que el nivel producción es cambiado entonces la cantidad de todos los insumos requeridos también son cambiados proporcionalmente: esto es, suponiendo una proporción fija de los factores de insumo, los coeficientes de insumo a_{ij} son y satisfacen:

(4.1.2) $\quad a_{ij} = X_{ij}/X_j \quad , \quad 1 \leq i, j \leq n.$

El sistema de ecuaciones lineales (4.1.1) se convierte en:

(4.1.3) $\quad X_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j + C_i \quad 1 \leq i \leq n.$

Haciendo

(4.1.4) $\quad A = (a_{ij}) \quad$ y $\quad B = I - A,$

y reescribiendo (4.1.1) en términos del sistema de n ecuaciones lineales en n incógnitas tenemos:

(4.1.5) $\quad BX = C$

en donde $X = (X_i)$ es el vector de producción y $C = (C_i)$ es el vector de demanda final.

El modelo descrito es llamado el modelo abierto de Leontief, y la matriz $A = (a_{ij})$ es llamada la matriz de insumos unitarios del modelo. Entonces B dada por (4.1.4) y que satisface $b_{ij} \leq 0$ para todo $i \neq j$ es llamada la matriz de Leontief. Claramente las características del modelo abierto de Leontief estan completamente determinadas por las propiedades de B.

El modelo económico descrito también tiene un sistema de precios asociado, nuestra notación será:

P_j = precio de una unidad de la j-ésima mercancia

v_j = valor añadido por unidad producida de la j-ésima mercancia

Entonces, la unidad de costo de la j-ésima mercancia, estará dada por:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} P_i \qquad 1 \leq j \leq n.$$

y el ingreso neto por unidad producida de la j-ésima mercancia, por:

$$P_j - \sum_{i=1}^{n} a_{ij} P_i \qquad 1 \leq j \leq n.$$

esto es el valor añadido por unidad producida $\mathcal{V}_j$. Entonces denotamos a P como el vector cuyas componentes son P_j y $\mathcal{V}$ denota el vector con componentes $\mathcal{V}_j$. De esta manera, la relación indicada es descrita por el sistema de n ecuaciones lineales siguiente

$$P^t - P^t A = \quad \text{o por}$$

$$P^t B = \mathcal{V} \tag{4.1.6}$$

donde B=I-A, el vector P es llamado el vector de precios y el vector $\mathcal{V}$ es llamado el vector del valor añadido del modelo abierto de Leontief, en el equilibrio $\mathcal{V} \geq 0$ y el economista esta interesado en la solución del sistema (4.1.6) para un vector de precios positivo $P > 0$.

Un enlace entre los sistemas (4.1.5) y (4.1.6) esta dado por la siguiente relación:

$$\sum_{j=1}^{n} \mathcal{V}_j X_j = \sum_{i=1}^{n} P_i C_i ,$$

que puede ser interpretada por la siguiente declaración economica:

El "ingreso nacional" y el "producto nacional" son iguales.

4.2. Rentabilidad y factibilidad del modelo abierto.

Mientras la solubilidad del sistema de producción original -(4.1.5) para los productos X_i no negativos $1 \leq i \leq n$, significa la factibilidad del modelo, la solución $P_i \geq 0$ $1 \leq i \leq n$ al sistema de precios, significa rentabilidad. Esto nos conduce a las siguientes definiciones:

DEFINICION (1). Un modelo abierto de Leontief con matriz de -insumos unitarios A se dice factible si el sistema (4.1.5) tiene una solución X no negativa para cada vector de demanda $C \geq 0$.

DEFINICION (2). Un modelo abierto de Leontief se dice que es rentable si el sistema (4.1.6) tiene una solución P no negativa, para cada vector del valor añadido $\nu \geq 0$.

La dualidad de estos conceptos se aclara en el siguíente teorema, que esta basado en la teoría de las matrices no negativas desarrollada en los capítulos anteriores de este trabajo.

TEOREMA (1). Consideremos un modelo abierto de Leontief con matriz de insumos unitarios A, y sea B=I-A, entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) el modelo es factible

(ii) el modelo es rentable

(iii) B es una M-matriz no singular

Demostración:

Mostraremos primero la equivalencia de (i) y (iii), después -la de (ii) y (iii).

Si (i) se cumple, entonces, elegimos un vector de demanda $C > 0$

para el que existe $X \geq 0$ tal que $BX=C$, esto es, $(I-A)X=C$, entonces, $(I-A)X > 0$, por lo que $X > AX$, por lo tanto, $X > 0$.

Debemos mostrar que B es una M-matriz no singular, es decir, $\rho=1>\lambda(A)$. Sea P un vector de Frobenius por la izquierda de A, - esto es, $PA=\lambda(A)P$, y multiplicando la desigualdad $X>AX$ por P , obtenemos:

$$PX > PAX \quad \text{que es lo mismo que}$$

$$PX > \lambda(A)X,$$

y dividiendo entre $PX > 0$ se tiene que $1>\lambda(A)$, por lo tanto, $B=I-A$ es una M-matriz no singular.

En el recíproco, suponemos que B es una M-matriz no singular, es decir, $1>\lambda(A)$, lo cual, por el teorema de Perrón-Frobenius, sabemos que existe $B^{-1}=(I-A)^{-1}> 0$. Sea $C\gneq 0$, debemos mostrar $X\gneq 0$ tal que $BX=C$, pero tal X existe, y es la siguiente $X=B^{-1}C\geq 0$, además $X\gneq 0$, porque $C>0$, es decir, existe i tal que $C_i>0$. Por otra parte B^{-1} tiene al menos un elemento distinto de cero en la columna i, en virtud de que la matriz B tiene inversa no negativa, por lo tanto, $X=B^{-1}C\gneq 0$, es decir, $X\geq 0$.

Suponemos que se cumple la afirmación (ii) y usaremos el hecho de que una matriz B es una M-matriz no singular si y sólo si B^t es una M-matriz no singular, y que el sistema $P^tB=\nu^t$ es equivalente a $B^tP=\nu$.

Por hipótesis, para cada $\nu\gneq 0$ existe $P\gneq 0$ tal que $B^tP=\nu$ tiene solución. Usando el resultado del inciso anterior y el hecho descrito, concluimos que B es una M-matriz no singular.

Ahora, suponemos (iii) y probaremos (ii), es decir, sabemos -

que B^t es una M-matriz no singular, esto es, $\rho=1>\lambda(A^t)$, entonces, existe $(B^{-1}) \geqq 0$ en virtud del teorema de Perrón-Frobenius. Para cualquier $\nu \geqq 0$ existe un vector $P=(B^t)^{-1}\nu \geqq 0$ que es solución al sistema $B^t P=\nu$, por lo tanto, el modelo es rentable.

Este teorema tiene los siguientes dos corolarios.

COROLARIO (1). Consideremos un modelo abierto de Leontief con matriz de insumos unitarios A, y sea B=I-A, entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) el modelo es factible

(ii) el modelo es rentable

(iii) B cumple (H-S).

Demostración:

Primero probaremos la equivalencia de (i) y (iii). Suponemos (i), esto es, que para el vector demanda $C \geqq 0$ existe un vector de producción $X \geqq 0$ tal que $BX=C$, pero esta, es la condición de de solubilidad fuerte, y, en el teorema (1) del capítulo I fue demostrada su equivalencia con la condición (H-S). Por el teorema anterior se cumple la equivalencia de (i) y (ii).

COROLARIO (2). Consideremos un modelo abierto de Leontief y supongamos que A, la matriz de insumos unitarios, es irreducible y que B=I-A, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) el modelo es factible

(ii) $B^{-1} > 0$.

Demostración:

Supongamos (i), es decir, para $C \geqq 0$ existe $X \geqq 0$ tal que $BX=C$.

Por el teorema anterior B es una M-matriz no singular, esto es, $\rho>\lambda(A)$, y por el teorema (2) del capítulo III, aseguramos que existe $(\rho I-A)^{-1}$ y es positiva, por considerar a la matriz A irreducible. por lo tanto, $B^{-1}>0$.

Si $B^{-1}>0$, entonces, debemos mostrar que para cualquier $C\gneq 0$ existe $X\gneq 0$ tal que $BX=C$, pero esto es inmediato ya que tal $X=B^{-1}C\geqq 0$.

Esta sección es concluida con dos resultados que analizan los efectos que pueden tener sobre la producción bruta de un modelo factible los cambios en las demandas y, los efectos que pueden tener sobre los precios de un modelo rentable, los cambios en los requerimientos del valor añadido.

TEOREMA (2). Sea A la matriz de insumos unitarios de un modelo abierto factible, entonces, si la demanda para la mercancia i aumenta, su producción también aumenta y la producción de las otras mercancias no disminuye.

Demostración:

Como antes $B=I-A$, y sea X y C que denotan el vector producto y el vector demanda respectivamente. Entonces, B es una M-matriz no singular por el teorema (1) de este capítulo.

Supongase que el i-ésimo término del vector demanda C es incrementado por $\delta>0$. Entonces, el vector demanda resultante es

$$\hat{C}=C+\delta e \quad \text{donde} \quad e=(0,\ldots,1,0,\ldots,0)$$

y el nuevo vector de producción es

$$X=B^{-1}C=B^{-1}(C+\delta e_i)=B^{-1}C+B^{-1}\delta e_i=X+\delta(B^{-1})_i,$$

donde $(B^{-1})_i$ denota la i-ésima columna de B. Entonces ya que $(B^{-1}) \geq 0$, se desprende de

$$\hat{X}_k = X_k + \delta (B^{-1})_{ki} \quad (1 \leq k \leq n)$$

que $\hat{X}_i > X_i$, y también ninguno de los productos disminuye.

Ahora ya que los sistemas lineales (4.1.5) y (4.1.6) tienen - un análisis dual, deberiamos suponer que se tendría una relación similar entre los valores añädidos ν y el sistema de precios, - es decir, si un modelo abierto de Leontief es rentable, entonces ningún sector de la economía tiene pérdidas y además al menos un sector opera con ganancias, en términos de la matriz de insumos unitarios A, esto significa que

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \leq 1, \qquad 1 \leq j \leq n$$

esto nos conduce al siguiente teorema.

TEOREMA (3). Si el valor añadido de la mercancia i de de un - modelo abierto de Leontief es incrementado, entonces ninguno de los precios decrece y el precio de la mercancia i se incrementa por este aumento.

Demostración:

Por el teorema (1) de este capítulo, el modelo es rentable y y por lo tanto,

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \leq 1, \qquad 1 \leq j \leq n.$$

Para la matriz de insumos A del modelo. Ahora tomando $B=I-A$ y P y los vectores de precios y valores agregados respectivamente, el sistema $P^t B = \nu^t$ puede ser reescrito como $B^t P = \nu$. La demostración se realiza de la misma manera a la demostración del teorema anterior, reemplazando A por A^t.

CAPITULO V

EL MODELO CERRADO DE LEONTIEF

En este capítulo se plantea el modelo cerrado de Leontief, es decir, el sistema de ecuaciones lineales $(I-A)X=C$ en el que el vector de la demanda C es igual con cero, también se verá que dicho modelo siempre tiene soluciones no triviales, luego, suponiendo la existencia de la solución del modelo con las características deseadas, se analizará la forma de las soluciones distinguiendo dos casos, aquel en el que la matriz A es irreducible y el otro, donde la matriz A es reducible.

5.1 Planteamiento general

Considérese un sistema económico con un número finito de sectores n, cada uno produce una cierta cantidad de bienes o servicios la cual en su totalidad se considera como una unidad, dicha producción es utilizada completamente por los n sectores de acuerdo a una forma determinada, la cual se puede presentar en una matriz de dimensión nxn, en donde la j-ésima columna indica las fracciones que el sector j consume de la producción total de los otros sectores y de el mismo, y el i-ésimo renglón indica las fracciones que los diferentes sectores consumen del total de la producción del sector i-ésimo.

Dicha matriz se llama de intercambio y tiene la siguiente forma:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

donde a_{ij} es la fracción de la producción total del sector i, que consume el sector j.

Sea $P=(P_1, P_2, \ldots\ldots, P_n)$ el vector de precios, donde P_i es el precio de la producción total del sector i, entonces el objetivo es determinar los precios de los n productos, de tal manera que el total de gastos sea igual al total de ingresos.

Debido a la definición de a_{ij} y P_i se tienen las siguientes condiciones:

1.- $P_i \geq 0$ $i=1,2,\ldots\ldots,n$. Ya que no tiene sentido económico tener precios negativos. Que el precio de un bien sea cero es algo sorprendente en economía, a dichos bienes se les llama bienes libres y uno de ellos es el aire que respiramos.

2.- $0 \leq a_{ij} \leq 1$, para toda i,j, por ser fracciones de la unidad.

3.- $a_{i1}+a_{i2}+\ldots\ldots+a_{in}=1$ $i=1,2,\ldots\ldots,n$ por lo que el total de la producción de los sectores es consumida completamente por ellos mismos.

En resumén, dada A matriz de intercambio, es decir, $0\leq a_{ij} \leq 1$ y $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}=1$ para $i=1,2,\ldots\ldots,n$, se busca un vector P que cumpla con las siguientes propiedades:

1.- $A^t P=P$ o $(I-A^t)P=0$

2.- $P_i \geq 0$ para toda i

3.- $\sum_{i=1}^{n} P_i > 0$ (pues es claro que no interesa el caso en que toda P_i sea igual a cero)

Ahora bien, en el modelo cerrado de Leontief se busca P tal que $A^t P=P$, lo cual se puede escribir como $(I-A^t)P=0$, por ser un sistema homogéneo tiene al menos una solución que es la trivial, pero son de interés aquellas soluciones que sean diferentes de - ésta.

Una manera sencilla de demostrar la existencia de P≠0 es la siguiente.

Un sistema de n ecuaciones con n incógnitas tiene soluciones distintas de la trivial, si se logra reducirlo a un sistema de - n-1 ecuaciones con n incógnitas. Luego, la matriz del sistema es:

$$I-A^t = \begin{pmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} & \cdots\cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & 1-a_{22} & \cdots\cdots & -a_{2n} \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots\cdots & 1-a_{nn} \end{pmatrix}$$

sumando los primeros n-1 renglones al último, se obtiene

$$\begin{pmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} & \cdots\cdots & -a_{1n} \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ 1-\sum_{i=1}^{n} a_{i1} & 1-\sum_{i=1}^{n} a_{i2} & \cdots\cdots & 1-\sum_{i=1}^{n} a_{in} \end{pmatrix}$$

considerando las hipótesis del modelo cerrado, de que la $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}=1$ para j=1,2,....,n, se tiene

$$\begin{pmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} & \cdots\cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & 1-a_{22} & \cdots\cdots & -a_{2n} \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ -a_{n-1\,1} & -a_{n-1\,2} & \cdots\cdots & -a_{n-1\,n} \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces, se ha logrado reducir el sistema original a uno con n-1 ecuaciones y n incógnitas, por lo tanto, P≠0 existe.

Ahora nuestro interés es mostrar que dicho vector P es no negativo, es decir $P \geqq 0$ ya que no tendría sentido económico un vector de precios negativo. Pero esto es muy sencillo, puesto que el teorema (1) del capitulo II nos asegura la existencia de un vector $P \geqq 0$ asociado con el mayor valor propio no negativo $\lambda(A)$, (la raíz de Frobenius de A) para una matriz A no negativa.

El problema en nuestro modelo, representado por $A^t P=P$, es mostrar que $\lambda(A^t)=1$. Sabemos que $\lambda(A)=\lambda(A^t)$, y sea $r_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$ para $i=1,2,....,n$. Por otra parte sabemos también que la matriz A es no negativa, entonces, por el teorema (3) del capitulo III tenemos que

$$\min_{1 \leqq j \leqq n} r_i \leqq \lambda(A) \leqq \max_{1 \leqq j \leqq n} r_i$$

y por la forma en que se construyo el modelo, la $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}=1$ para toda i, por lo tanto,

$$\min_{1 \leqq j \leqq n} r_i = \max_{1 \leqq j \leqq n} r_i=1 =\lambda(A)=\lambda(A^t).$$

5.2 Forma de las soluciones caso irreducible

La forma de las soluciones cuando la matriz A^t de intercambio es irreducible viene dada en el siguiente teorema.

TEOREMA (1) Si A^t es una matriz de intercambio que cumple ($0 \leqq a_{ij} \leqq 1$, $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} =$ $j=1,2,.....,n$), irreducible, toda P tal que $A^t P=P$, $P_i \geq 0$ para toda i, es de la forma kP, donde k es una constante - positiva y P, una solución particular positiva.

Demostración:

Anteriormente mostramos que la raíz de Frobenius de la matriz de intercambio A^t es 1, es decir $\lambda(A^t)=1$, y además por hipótesis sabemos que A^t es irreducible, entonces, por el teorema (1) del capítulo III podemos asegurar la existencia del vector propio P que es solución al sistema y que es único, o es un multiplo escalar de el mismo, es decir, toda solución P de $A^t P=P$ es de la forma $P=kP_1$, para $P_1>0$ y $k>0$.

5.3. Forma de las soluciones caso reducible.

Si A^t es de orden n y se puede reescribir por medio de permutaciones simultáneas a renglones y columnas como

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$$

con A_{11} y A_{22} irreducibles, la situación es muy sencilla, ya que el teorema anterior nos permite asegurar la existencia de $\bar{X}_1>0$ y $\bar{X}_2>0$ (puesto que A_{11} y A_{22} son irreducibles) tales que

$$A_{11}\bar{X}_1=\bar{X}_1\ ,\ \bar{X}_1>0$$

$$A_{22}\bar{X}_2=\bar{X}_2\ ,\ \bar{X}_2>0$$

donde $\bar{X}_1$ es de orden $r_1 \times 1$ si A_{11} es de orden $r_1 \times r_1$. Se define X^* vector de orden n-1, cuyas primeras r_1 coordenadas coinciden con las de $\bar{X}_1$ y las demás son cero

$$X_1^* = \begin{pmatrix} \bar{X}_1 \\ -- \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} r_1 \\ | \\ n-r_1 \end{matrix}$$

además se tiene que $A^t X_1^*=X_1^*$.

De la misma manera se puede definir X_2^* como

$$X_2^* = \begin{pmatrix} 0 \\ -- \\ \bar{X}_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} r_1 \\ \\ n-r_1 \end{matrix}$$

y también se tiene

$$A'X=X$$

es decir que X_1^* y X_2^* sean soluciones de A', entonces $kX_1^*+kX_2^*$ también es solución de A' con k_1, k_2 no negativas y al menos una positiva. De esta manera se ha encontrado un método para hallar soluciones de A a partir de las soluciones particulares X_1^*, X_2^*. Se verá que toda solución de $A'X=X$ es de esa forma.

Si X es solución de $A'X=X$ con X de la siguiente forma

$$X=\begin{pmatrix}\bar{X}_1\\ -\\ \bar{X}_2\end{pmatrix}\begin{array}{c} r\\ |\\ n-r\end{array} = \begin{pmatrix}\bar{X}_1\\ -\\ 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ -\\ \bar{X}_2\end{pmatrix}$$

al sustituir en $A'X=X$ se obtiene

$$\begin{pmatrix}A_{11} & 0\\ \\ 0 & A_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{X}_1\\ \\ \bar{X}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}A_{11}\bar{X}_1\\ -\\ 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ -\\ A_{22}\bar{X}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\bar{X}_1\\ -\\ 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ -\\ \bar{X}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\bar{X}_1\\ \\ \bar{X}_2\end{pmatrix}$$

por lo tanto, $A_{11}\bar{X}_1=\bar{X}_1$, $A_{22}\bar{X}_2=\bar{X}_2$.

Esto es, toda solución de $A'X=X$ es una combinación lineal de X^* y X^* soluciones particulares de A', obtenidas cada una de ellas a partir de $\bar{X}_1$, $\bar{X}_2$ soluciones particulares positivas de $A_{11}X=X$, $A_{22}X=X$, respectivamente.

En general si A^* es de orden nxn y se puede reescribir por medio de permutaciones simultáneas como:

$$A' = \begin{pmatrix} A_{11} & & 0 \ldots\ldots 0 \\ 0 & & 0 \ldots\ldots 0 \\ \vdots & A_{ii} & 0 \ldots\ldots 0 \\ & \ldots\ldots\ldots & \\ 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & A_{gg} \end{pmatrix}$$

de la misma manera se pueden encontrar $\bar{X}_1, \ldots\ldots\ldots, \bar{X}_g$ y cualquier solución de $A'X=X$ se puede escribir de la forma $X=k_1X_1^*+\ldots+k_gX_g^*$ donde k_i con $i=1,2,\ldots,g$ son reales no negativos. El vector X satisface $A'X=X$, $X_i \geq 0$ para toda i, para cumplir $\sum_{i=1}^{n} X_i > 0$ y al menos una $k_i \neq 0$.

Los ejemplos anteriores son casos muy particulares de matrices reducibles, pero en general se sabe que toda matriz reducible - puede ser llevada a su forma normal

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} A_{11} & \ldots\ldots\ldots & 0 & \\ & \ddots & & B \\ & & A_{gg} & \\ 0 & \ldots\ldots & 0 & \end{array}\right)$$

Cada bloque aislado A_{ii} de orden $r_i \times r_i$ representa un conjunto autónomo y al menos existe un bloque aislado, A_{11}. A partir de - $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \ldots\ldots, \bar{X}_g$ soluciones positivas de $A_{11}\bar{X}_1 = X_1$, $A_{22}\bar{X}_2 = \bar{X}_2, \ldots\ldots,$ $A_{gg}\bar{X}_g = \bar{X}_g$ respectivamente, se construyen los siguientes vectores de orden n-1.

$$X_1^* = \begin{pmatrix} \bar{X}_1 \\ - \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} r_1 \\ | \\ n-r_1 \end{array} \qquad X_2^* = \begin{pmatrix} 0 \\ - \\ \bar{X}_2 \\ - \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} r \\ | \\ r \\ | \\ n-(r_1+r_2) \end{array} \qquad , \ldots\ldots, \quad X_g^* = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ - \\ \bar{X}_g \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ n-rg \\ \\ rg \end{array}$$

donde $\bar{X}_i$ es de orden $r_i \times 1$ si A_{ii} es de orden $r_i \times r_i$, dichos vectores son soluciones que satisfacen las propiedades deseadas para el modelo cerrado. Con estas soluciones también se pueden construir otras que también cumplan con las propiedades deseadas, a saber $X = k_1 X_1^* + k_2 X_2^* + \ldots\ldots\ldots + k_g \bar{X}_g$ con $k_i \geq 0$ y alguna $k_i \neq 0$. lo - anterior nos sugiere el siguiente teorema.

TEOREMA (2). Si $A^t_{(n \times n)}$ es una matriz de intercambio, reducible y A' representa la forma normal de A

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} A_{11} & \ldots\ldots\ldots & 0 & \\ & A_{ii} & \vdots & \\ 0 & & A_{gg} & B \\ 0 & & 0 & \end{array} \right)$$

entonces las soluciones de A' son de la forma $X = \sum_{i=1}^{n} k_i X_i^*$, donde $\bar{X}_1, \ldots\ldots, \bar{X}_g$ son soluciones positivas de $A_{11}\bar{X}_1 = \bar{X}_1, \ldots, A_{gg}\bar{X}_g = \bar{X}_g$, A_{ii} es de orden $r_i \times r_i$.

$$X_1^* = \begin{pmatrix} \bar{X}_1 \\ - \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} r_i \\ | \\ n-r_1 \end{array} \quad ; \quad X_2^* = \begin{pmatrix} 0 \\ - \\ \bar{X}_2 \\ - \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} r_1 \\ \\ r_2 \\ \\ n-(r_1+r_2) \end{array} \quad ; \ \ldots\ldots ; \quad X_g^* = \begin{pmatrix} 0 \\ - \\ \bar{X}_g \end{pmatrix} \begin{array}{l} n-rg \\ \\ rg \end{array}$$

$k_1, k_2, \ldots\ldots\ldots, k_g$ son reales no negativos y al menos uno positivo.

Demostración:

En general si A' es una matriz de intercambio en la forma normal y X una solución de $A'X=X$, se tiene

$$A'X=\begin{pmatrix} A_{11} & 0 & \\ 0 & A_{gg} & B \\ 0 & 0 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$$

donde X es orden r x1 si A es de orden r xr , entonces

$$A'X=\begin{pmatrix} A_{11} & 0 & \\ 0 & A_{gg} & B \\ 0 & 0 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{X}_1 \\ \hat{X}_g \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}\hat{X}_1+B_1Y \\ A_{gg}\hat{X}_g+B_gY \\ 0 \quad +B'Y \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} A_{11}\hat{X}_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ A_{21}\hat{X}_1 \\ 0 \end{pmatrix} +\dots+ \begin{pmatrix} 0 \\ A_{gg}\hat{X}_g \\ 0 \end{pmatrix} +BY= \begin{pmatrix} \hat{X}_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{X}_1 \\ 0 \end{pmatrix} +\dots+ \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{X}_g \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \\ Y \end{pmatrix}$$

de aqui que $B'Y=Y$, y como A es una matriz reducible, $X_i \geq 0$ con - alguna $X_i \neq 0$, entonces Y tiene dos alternativas:

a) Y=0, en tal caso $X= \sum_{i=1}^{g} X^*$

y como las soluciones de matrices irreducibles son de la forma kP donde k es una constante positiva, entonces, X se puede expresar como

$$X= \sum_{i=1}^{g} k_i X_i^*$$

donde $\bar{X}_i$ es una solución particular positiva de $A_{ii}\bar{X}_i=\bar{X}_i$ y X^* es una solución particular positiva de $A'X=X$.

b) $Y\neq 0$. Entonces, $Y_i > 0$.

La dimensión de B es nxs, con $s=n-\sum_{i=1}^{g} r_i$ y supongamos un primer caso para $Y \neq 0$.

b) $Y \neq 0$, $Y_i > 0$ e $Y_j = 0$ para $i \neq j$. Se tiene que $B'Y=Y$

$$B\,Y = \begin{array}{l} b'_{11} Y_1 + \ldots\ldots\ldots + b'_{1s} Y_s = Y_1 \\ \vdots \\ b'_{i1} Y_1 + \ldots\ldots\ldots + b'_{is} Y_s = Y_i \\ \vdots \\ b'_{s1} Y_1 + \ldots\ldots\ldots + b'_{ss} Y_s = Y_s \end{array}$$

Las primeras i-1 ecuaciones y las correspondientes a $Y_{i+1}, \ldots,$ Y_s son iguales a cero, A′ es no negativa por lo que cada sumando es igual a cero, como $Y_i > 0$ entonces $b_{i1} = 0$ si $i \neq 1$, por lo que tenemos que $b_{i1} \neq 0$ si $i = 1$, entonces $b_{ii} Y_i = Y_i$, y por lo tanto $b_{ii} = 1$ (porque A es una matriz de intercambio y la suma de coordenadas de cada columna es 1) pero entonces b_{ii} es un bloque aislado - (1x1), lo cual contradice que A′ sea la forma normal de A.

b) supongase que existen Y_{i_1}, $Y_{i_2} > 0$ $i_1 = i_2$, $Y_j = 0$ si $j \in \{i_1, i_2\}$ entonces procediendo como en el caso anterior obtenemos

$$b_{1i_1} Y_{i_1} + b_{1i_2} Y_{i_2} = Y_1 = 0 \text{ , entonces } b_{1i_1} = b_{1i_2} = 0$$

$$b_{2i_1} Y_{i_1} + b_{2i_2} Y_{i_2} = Y_2 = 0 \text{ , entonces } b_{2i_1} = b_{2i_2} = 0$$

$$\vdots$$

$$b_{i_1 i_1} Y_{i_1} + b_{i_1 i_2} Y_{i_2} = Y_{i_1},$$

$$b_{i_2 i_1} Y_{i_1} + b_{i_2 i_2} Y_{i_2} = Y_{i_2},$$

$$b_{si_1} Y_{i_1} + b_{si_2} Y_{i_2} = Y_{i_2} = 0 \text{ , entonces } b_{si_1} = b_{si_2} = 0$$

y con el mismo argumento del caso anterior se concluye que el siguiente bloque es aislado.

$$\begin{pmatrix} b_{i_1 i_1} & b_{i_1 i_2} \\ b_{i_2 i_1} & b_{i_2 i_2} \end{pmatrix}$$

si dicho bloque es irreducible se tiene una contradicción. Si no por ser reducible se puede poner en forma triangular con bloques irreducibles y por lo menos el primero (en la forma triangular) es irreducible y aislado, llegandose a una contradicción.

b) En general si $\int=\{j/Y_j > 0\}$ por medio de permutaciones simultaneas se puede hacer que las primeras coordenadas de Y sean las Y_j donde $j\in\int$, entonces B' tendra un bloque aislado, dicho bloque es irreducible o en el se puede encontrar un bloque irreducible y aislado que contradice que A' sea la forma normal de A, por tanto $Y=0$, entonces $A_{ii}\hat{X}_i=\hat{X}_i'$, de lo cual $\hat{X}_i=k_i\hat{X}_i$ con $i\in\{1,..,g\}$ por lo tanto si X es solución de $A'X=X$, entonces $X=\sum_{i=1}^{g}k_iX_i$.

APENDICE

En este apéndice, vamos a enunciar y a demostrar algunos resultados matemáticos que hemos utilizado en esta tesis. Para ello suponemos que se tienen conocimientos básicos del análisis matemático, en caso de no ser así, es suficiente con revisar los capítulos I, II y III del libro "introducción al análisis matemático" de Robert G. Bartle.

Una vez señalado lo anterior vamos a establecer nuestras primeras definiciones.

DEFINICION (1). Sea S un subconjunto de R.

(a) Un elemento $u \in R$ se dice que es una cota superior de S si $s \leq u$ para toda $s \in S$.

(b) Un elemento $w \in R$, se dice que es una cota inferior de S si $w \leq s$ para toda $s \in S$.

Observese, que un subconjunto $S \subseteq R$, puede no tener una cota superior (por ejemplo, si S=R). Sin embargo, si tiene una cota superior, tiene una infinidad de ellas (ya que si u es cota superior de S, entonces u+n también es una cota superior de S para para cualquier $n \in N$).

Por cuestiones de terminología, cuando un conjunto tiene una cota superior, se dirá que esta acotado por arriba, y cuando un conjunto tiene una cota inferior, se dirá que esta acotado por abajo. Si un conjunto tiene una cota superior, asi como una inferior, se dice que esta acotado. Si un conjunto carece de una cota superior o de una cota superior se dice que es no acotado.

Definicion (2) Sea S un subconjunto de R.

(a) Si S esta acotado por arriba, entonces se dice que una cota superior de S es un supremo (o minima cota superior) de S si es menor a cualquier otra cota superior de S.

(b) Si S esta acotado por abajo, entonces se dice que una cota inferior de S es un ínfimo (o una máxima cota inferior) de S si es mayor a cualquier otra cota inferior de S.

Es claro que sólo puede haber un supremo para un subconjunto dado S de R, ya que si u_1 y u_2 son supremos de S, entonces ambos son cotas superiores de S. Como u_1 es un supremo de S y u_2 es cota superior de S, se debe tener $u_1 \leq u_2$. Ahora como u_2 es un supremo de S y u_1 es una cota superior de S, entonces $u_2 \leq u_1$. por lo tanto, $u_1=u_2$. De manera análoga se demuestra que sólo puede haber un ínfimo para un subconjunto dado S de R. Cuando estos números existan se denotarán por medio de

$$\sup S \quad \text{e} \quad \inf S.$$

Con frecuencia es conveniente tener otra representación del supremo de un subconjunto de R.

LEMA (1) Un número $u \in R$ es el supremo de un subconjunto no vacío $S \subseteq R$ si y sólo si tiene las siguientes propiedades:

(i) No existen elementos $s \in S$ tales que $u < s$.

(ii) Si $v < u$, entonces existe un elemento $s_v \in S$ tal que $v < s_v$.

Demostración:

Suponga que u satisface (i) y (ii). La condición (i) implica que u es una cota superior de S. Si v es cualquier número con -

$v < u$, entonces, la propiedad (ii) prueba que v no puede ser cota superior de S. Por lo tanto, u es el supremo de S.

Reciprocamente, sea u el supremo de S. Dado que u es una cota superior de S, la condición (i) se satisface. Si $v < u$, entonces v no es cota superior de S. Por lo tanto, existe un elemento $s_v \in S$ tal que $v < s_v$.

Obsérvese que cuando se dice que un conjunto tiene un supremo no se esta haciendo ninguna afirmación acerca de la contención del supremo del conjunto. Por ejemplo el conjunto $S=\{x \in R / \ 0 < x < 1\}$ tiene al número 1 como supremo, sin embargo el 1 no está contenido en el conjunto.

La siguiente afirmación es una propiedad esencial del sistema de números reales: Todo conjunto no vacío de R que este acotado por arriba tiene un supremo.

PROPIEDAD DEL SUPREMO. Todo conjunto no vacío de números reales que tenga una cota superior tiene un supremo.

PROPIEDAD DEL INFIMO. Todo conjunto no vacío de números reales que tenga una cota inferior tiene un ínfimo.

Definición (3) Si S es cualquier conjunto, una sucesión en S es una función sobre el conjunto $N=\{1,2,\ldots\}$ de números naturales y cuyo rango está en S. En particular una sucesión en R^p - es una función cuyo dominio es N y cuyo rango esta contenido en R^p.

Definición (4) Sea $X=(x_n)$ una sucesión en R^p. Se dice que un elemento x de R^p es un límite de X si para cada vecindad V de x hay un número natural K_V tal que para toda $n \geq K_V$, x_n pertenece a V. Si una sucesión tiene un límite se dice que la sucesión es convergente. Si una sucesión no tiene ningún límite se dice que es divergente.

La notación K_V se usa para indicar que la elección de K dependera de V. Es claro que una vecindad pequeña V por lo general - requerirá un valor grande para poder garantizar que $x_n \in V$ para to- $n \geq K_V$.

Se ha definido el límite de una sucesión $X=(x_n)$ en términos - de vecindades. A menudo es conveniente usar la norma en R^p para dar una definición equivalente la cual se dará en seguida mediante un teorema.

TEOREMA (1) Sea $X=(x_n)$ una sucesión en R^p. Un elemento x de R^p - es un límite de X si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ hay un número natural $K(\varepsilon)$ tal que para toda $n \geq K(\varepsilon)$, $\|x_n - x\| < \varepsilon$.

Demostración:

Suponga que x es un límite de la sucesión X, segun la definicion (3). Sea $\varepsilon > 0$ y considere a la bola abierta $V(\varepsilon)=\{y \in R^p / \|y-x\| < \varepsilon$, que es una vecindad de x. Por la definición (3) se sabe que hay un número natural $K_{V(\varepsilon)}$ tal que si $n \geq K_{V(\varepsilon)}$, entonces $x_n \in V(\varepsilon)$.

De donde si $n \geq K_{Y(\varepsilon)}$, entonces $\|X_n - X\| < \varepsilon$. Esto prueba que la propiedad establecida es válida cuando x es un límite de X.

A la inversa suponga que la propiedad del teorema es válida - para toda $\varepsilon > 0$; se debe probar que la definición (3) se satisface. Para hacerlo, sea V cualquier vecindad de x; entonces hay un número $\varepsilon > 0$ tal que la bola abierta $V(\varepsilon)$ con centro x y radio x está contenida en V. De acuerdo con la propiedad del teorema, hay un número natural $K(\varepsilon)$ tal que si $n \geq K(\varepsilon)$, entonces $\|X_n - X\| < \varepsilon$. Expresado de otra manera si $n \geq K(\varepsilon)$, entonces $X_n \in V(\varepsilon)$; por lo - tanto $x_n \in V$ y el requisito de la definición (3) se satisface.

LEMA (2). Una sucesión en R puede tener cuando más un limite.

Demostración:

Suponga por el contrario, que x', x'' son límites de $X=(x_n)$ - y que $x' \neq x''$. Sean V' y V'' vecindades ajenas de x' y x'' respectivamente, y sean K', K'' números naturales tales que si $n \geq K'$ - entonces $x_n \in V$ y si $n \geq K''$ entonces $x_n \in V''$. Sea $K = \sup\{K', K''\}$ de - manera que $x_K \in V'$ y $x_K \in V''$. Se deduce que x_K pertenece a $V' \cap V''$, contrario al supuesto de que V' y V'' son ajenos, por lo tanto $x' = x''$.

Cuando una sucesión $X=(x_n)$ en R^p tiene un límite x a menudo se escribe

$$x = \lim X, \quad \text{o} \quad x = \lim_n (x_n)$$

o se usa el simbolismo $x_n \to x$.

Se dice que una sucesión $X=(x_n)$ en R^p es acotada si existe M positiva tal que $\|x_n\| < M$ para toda $n \in N$.

LEMA (3) Una sucesión convergente en R^p es acotada.

Demostración:

Sea $x=\lim(x_n)$ y sea $\varepsilon=1$. Por el teorema (1) de este apéndice existe un número natural $K=K(1)$ tal que si $n \geq K$, entonces $\|x_n - x\| \leq 1$. Usando la desigualdad del triángulo se deduce que si $n \geq K$, entonces $\|x_n\| \leq \|x\| + 1$. Si se establece que $M = \sup \{\|x_1\|, \|x_2\|, \ldots \ldots, \|x_{k-1}\|, \|x\| + 1\}$, entonces $\|x_n\| \leq$ para toda $n \in N$.

Definición (5) Si $X=(x_n)$ es una sucesión en R^p y si $r_1 < r_2 < \ldots \ldots < r_n < \ldots\ldots$ es una sucesión de números naturales estrictamente creciente, entonces la sucesión X' en R^p dada por

$$(x_{r_1}, x_{r_2}, \ldots\ldots\ldots, x_{r_n}, \ldots\ldots),$$

se llama una subsucesión de X.

LEMA (3) Si alguna sucesión X en R^p converge a un elemento x, entonces cualquier subsucesión de X también converge a x.

Demostración:

Sea V una vecindad del elemento límite x; por definición, exsiste un número natural K_V tal que para toda $n \geq K_V$, x_n pertenece a V. Ahora, sea X' una subsucesión de X; digamos

$$X' = (x_{r_1}, x_{r_2}, \ldots\ldots, x_{r_n}, \ldots\ldots),$$

Dado que $r_n \geq n$, entonces $r_n \geq K_V$ y por lo tanto x_{r_n} pertenece a V. Esto demuestra que X' también converge a x.

Los siguientes dos teoremas nos permiten establecer la convergencia de sucesiones aun cuando no tenemos ningún candidato a - ser el límite, pero que un análisis preeliminar nos hace pensar que hay convergencia. A pesar de que se pueden generalizar a R^p, aqui restringimos los enunciados para el caso de sucesiones en R.

TEOREMA (2) Sea $X=(x_n)$ una sucesión de números reales monotonamente creciente en el sentido de que

$$x_1 \leq x_2 \leq \ldots\ldots \leq x_n \leq x_{n+1} \leq \ldots\ldots$$

Entonces, la susesión X converge si y sólo si es acotada, en cuyo caso

$$\lim (x_n)=\sup\{x_n\}.$$

Demostración:

En el lema (3) se vió que una sucesión convergente es acotada. Si $x=\lim (x_n)$ y $\varepsilon > 0$, entonces existe un número natural $K(\varepsilon)$ tal que si $n \geq K(\varepsilon)$, entonces

$$x-\varepsilon \leq x_n \leq x+\varepsilon.$$

Dado que X es monotona, de esta relación se obtiene

$$x-\varepsilon \leq \sup\{x_n\} \leq x+\varepsilon,$$

y se infiere que $|x-\sup\{x_n\}| \leq \varepsilon$. Como esto es válido para toda $\varepsilon > 0$, se deduce que $\lim (x_n)=x=\sup\{x_n\}$.

A la inversa suponemos que $X=(x_n)$ es una sucesión acotada de números reales monótonamente creciente. De acuerdo con el principio del supremo, el supremo $x^*=\sup\{x_n\}$ existe; se probará que - es el límite de X. Dado que x^* es una cota superior de los elementos en X, entonces $x_n \leq x^*$ para $n \in N$. Como x^* es el supremo de X, si $\varepsilon > 0$ el número $x^*-\varepsilon$ no es cota superior de X y existe un - número natural $K(\varepsilon)$ tal que

$$x^*-\varepsilon < x_{K(\varepsilon)}$$

debido a la propiedad de monotonía de X, para toda $n \geq K(\varepsilon)$,

$$x^*-\varepsilon < x_n \leq x^*,$$

por lo que se deduce que $|x_n-x^*| < \varepsilon$. Resumiendo lo anterior, el número $x^*=\sup\{x_n\}$ tiene la propiedad de que, dado $\varepsilon>0$, hay un número natural $K(\varepsilon)$ (que depende de ε) tal que $|x_n-x^*|<\varepsilon$ siempre que $n\geq K(\varepsilon)$. Esto demuestra que $x^*=\lim X$.

COROLARIO (1). Sea $X=(x_n)$ una sucesión de números reales monotonamente decreciente en el sentido de que

$$x_1\geq x_2\geq \ldots\geq x_n\geq x_{n+1}\geq \ldots\ldots$$

Entonces, la sucesión X converge si y sólo si es acotada, en cuyo caso

$$\lim (x_n)=\inf\{x_n\}.$$

Demostracion:

Sea $y_n=-x_n$ para $n\in N$. Entonces se puede ver que con facilidad la sucesión $Y=(y_n)$ es una sucesión monotonamente creciente. Más aún, Y es acotada si y sólo si X es acotada. Por lo tanto, la conclusión se deduce del teorema.

TEOREMA (3). Sea $X=(x_n)$ una sucesión de números reales estrictamente creciente y no acotada por arriba, entonces

$$\lim_{n\to\infty} X_n=+\infty.$$

B I B L I O G R A F I A

1.- Anton Howard, Rorres Chris — Aplicaciones de Algebra Lineal. Editorial Limusa. Mexico 1979.

2.- Berman Abraham, Plemmons Robert J. — Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences. Academic Press 1979.

3.- Gale David — The Theory of Linear. Economic Models. Mc. Graw Hill BooK Co. Inc. New York 1969.

4.- Gantmacher F. R. — The Theory of Matrices. Chelsea Publishing Company. New York Vol.II

5.- Nikaido H. — Metodos Matematicos del Analisis Economico Moderno. Ed. Vincens Vives. Barcelona 1978.

6.- Leontief Wassily — Analisis Economico Input - Output. Biblioteca de Ciencia Economica. Editorial Ariel.

7.- Takayama A. — Mathematical Economics. Dryden Press. Hindsdale 1974.

8.- Vegara J. M.[a] — Economia Politica y Modelos Multisectoriales. Editorial Tecnos. Madrid 1979.