

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO  
Facultad de Ingeniería

01168

5

2 ej.

**APLICACIONES DEL MODELO DE TRANSBORDO  
A LA SINTESIS DE REDES OPTIMAS DE  
RECUPERACION DE CALOR**

MARIA AUXILIO ALEJANDRA OSORIO LAMA

T E S I S

PRESENTADA A LA DIVISION DE ESTUDIOS

DE POSGRADO DE LA

FACULTAD DE INGENIERIA

DE LA

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

COMO REQUISITO PARA OBTENER

EL GRADO DE

MAESTRO EN INGENIERIA

(INVESTIGACION DE OPERACIONES)

CIUDAD UNIVERSITARIA

1991



Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# TESIS CON FALLA DE ORIGEN

# I N D I C E

---

## INTRODUCCION

### CAPITULO 1 SINTESIS DE REDES DE RECUPERACION DE CALOR

- 1.1 Antecedentes
- 1.2 Planteamiento del Problema
- 1.3 Pasos en la Sintesis de Redes de Recuperación de Calor
  - 1.3.1 Desarrollo de los Intervalos de Temperatura
  - 1.3.2 Predicción del Costo Mínimo de las Corrientes de Servicio
  - 1.3.3 Incremento de la Integración de calor en la Red
  - 1.3.4 Selección de las Redes que tienen el número mínimo de unidades de intercambio de calor

### CAPITULO 2 EL PROBLEMA DE TRANSBORDO

- 2.1 Antecedentes
- 2.2 El Problema de Flujo con Costo Mínimo en una Red
- 2.3 Enfoque Primal para Redes

### CAPITULO 3 APLICACION DEL MODELO DE TRANSBORDO AL DISEÑO DE REDES OPTIMAS DE RECUPERACION DE CALOR

- 3.1 El Problema del Costo Mínimo de las Corrientes de Servicio
- 3.2 El Problema del Costo Mínimo de las Corrientes de Servicio con Acoplamientos Restringidos
- 3.3 El Número Mínimo de Unidades de Intercambio de Calor
  - 3.3.1 Los Factores de Peso para los Acoplamientos preferidos
- 3.4 El Modelo de transbordo para Sistemas Integrados

### CAPITULO 4 PRESENTACION DE EJEMPLOS NUMERICOS Y ANALISIS DE RESULTADOS

- 4.1 Problema No. 1: Ejemplo 4SP1
- 4.2 Problema No. 2: Ejemplo 4SP1 con acoplamientos restringidos
- 4.3 Problema No. 3: Ejemplo 7SP2 con división de corrientes paralelas
- 4.4 Problema No. 4: Ejemplo 10SP1

## CONCLUSIONES

## BIBLIOGRAFIA

# I N T R O D U C C I O N

---

Uno de los componentes principales que afectan el comportamiento global de los sistemas de proceso, es la red de recuperación de calor. El objetivo de esta red es el de intercambiar el calor disponible de todas las corrientes del proceso, con el objeto de reducir el consumo de las corrientes de servicio necesarias, para producir el enfriamiento y el calentamiento requerido por el sistema de proceso químico. Debido a que el costo de las corrientes de servicio, generalmente, es uno de los costos predominantes de este diseño, existe un gran incentivo para diseñar redes de recuperación de calor que integren eficientemente las corrientes del proceso con calor disponible.

Existen muchas consideraciones prácticas involucradas en la síntesis de redes eficientes de recuperación de calor. Primero que todo, existen diferentes corrientes de servicio que pueden ser usadas para proveer el enfriamiento y el calentamiento necesario de las corrientes del proceso. Por ejemplo, para el calentamiento, se pueden emplear los siguientes tipos de corrientes de servicio: combustible, vapor a diferentes niveles (a presión alta, mediana y baja) y agua caliente; mientras que, para el enfriamiento, se pueden emplear refrigerantes y agua fría.

Debido a que todas estas corrientes de servicio tienen diferentes costos por unidad de calor, es muy importante sintetizar redes de intercambio, para las cuales, el costo de estas corrientes de servicio sea un mínimo. Otro aspecto importante en el diseño de redes de recuperación de calor es la división de corrientes, la cual es frecuentemente necesaria para obtener la mejor integración de calor en la red. En algunos casos, esto puede ser hecho, permitiendo acoplamientos múltiples entre ciertos pares de corrientes, lo cual nos puede llevar a redes cíclicas.

Otra consideración importante, es la especificación de acoplamientos prohibidos entre ciertos pares de corrientes del proceso. Esta restricción aparece, generalmente, debido al diseño de la planta y la ubicación de cada corriente, a los requisitos de seguridad o a las dificultades de control del proceso. Por lo tanto, es importante que un procedimiento para la síntesis de redes eficientes de recuperación de calor, tome en cuenta todas estas consideraciones.

La dificultad principal en el problema de la recuperación de calor, es su naturaleza inherentemente combinatoria, ya que generalmente existe un número enorme de redes posibles. En los últimos quince años, se han propuesto un gran número de métodos para abordar este problema de síntesis.

Entonces, la finalidad principal del problema de síntesis es la de desarrollar una red de intercambiadores de calor, contracorriente,

que satisfagan las especificaciones de inversión mínima y costos de operación mínimos.

Debido al gran número posible de configuraciones de redes y de no linealidades involucradas en la función de costo de inversión de los intercambiadores de calor, el principal acercamiento que ha emergido en los últimos años es el de desarrollar funciones objetivo de diseño que simplifiquen y reduzcan el tamaño de este problema de síntesis. Aunque estas funciones objetivo no pueden garantizar una minimización rigurosa del costo, tienen la propiedad de generar redes con una recuperación máxima de calor, que frecuentemente corresponden a soluciones óptimas o cercanas a las óptimas.

Los objetivos más importantes pueden ser resumidos en tres resultados principales que puedan ser usados para el diseño de redes energéticamente eficientes. Los primero dos objetivos, fueron identificados por Linnhoff y Flower [8], mientras que el tercero fue propuesto por Umeda et al. [21].

**CONSUMO MINIMO DE LAS CORRIENTES DE SERVICIO.** Este es el objetivo de diseño más importante para una red eficiente de intercambio de calor, ya que corresponde a la integración máxima de calor que puede ser alcanzado en una red factible y para un acercamiento mínimo fijo de temperaturas. También, ya que el costo de los servicios es, comúnmente, el costo dominante, este objetivo permite la eliminación de muchas configuraciones de la red que son ineficientes y costosas. La predicción de los flujos mínimos de las corrientes de servicio, puede ser realizada antes que el desarrollo de la estructura de la red de recuperación de calor.

Este objetivo de diseño puede ser refinado más adelante, así como la predicción del costo mínimo de las corrientes de servicio. Esto es necesario, debido a que en las redes actuales se emplean, generalmente, una gran variedad de corrientes de servicio frías y calientes, y cada corriente de servicio está valuada en un costo diferente (i.e. combustible, vapor de calentamiento a diferentes niveles de presión, agua caliente, agua de enfriamiento, refrigerantes, etc.).

**NUMERO MINIMO DE UNIDADES DE INTERCAMBIO DE CALOR.** Otro objetivo importante es la determinación del número mínimo de unidades de intercambio de calor que se requieren en la red. Este objetivo tiende a minimizar, indirectamente el costo de inversión de la red, ya que se supone que el costo de cada intercambiador es una función cóncava del área. Como lo mencionó Linnhoff [8], el número mínimo de unidades es, generalmente, una menos que el número total de las corrientes del proceso.

**MODIFICACION DE LOS "PUNTOS ESTRECHOS".** Un 'punto estrecho' puede ser considerado con un cuello de botella que previene una integración posterior en la red. La presencia de un 'punto estrecho' limita el calor máximo de integración posible. Por lo tanto, es

importante identificar la localización de los 'puntos estrechos' antes de desarrollar la red, con el objeto de considerar cambios en el proceso que pueda eliminar o modificar estos cuellos de botella, permitiendo integrar mas la red.

Con base en todas estas consideraciones, el objetivo principal de este trabajo, es el de presentar un acercamiento para la síntesis sistemática de redes de recuperación de calor, basado en el uso de diferentes formulaciones del Modelo de Transbordo. Las versiones de Programación Lineal (LP) son usadas para predecir el costo mínimo de las corrientes de servicio, y pueden manejar acoplamientos restringidos y corrientes de servicio múltiples. Las versiones de Programación Mixta-Entera (MILP), toman los resultados de la red (LP) para el costo mínimo de corrientes de servicio y los usan para obtener redes que minimicen el número de unidades de intercambio de calor (intercambiadores), mientras que permiten la división de corrientes y seleccionan los acoplamientos preferidos. Estos modelos representan procedimientos eficientes para la síntesis, y pueden ser incorporados, de manera natural dentro de una formulación Mixta-Entera para la síntesis del sistema total del proceso químico.

Con base en este objetivo, en el primer capítulo se incluye una breve descripción de los conocimientos necesarios para abordar el problema de Síntesis de Redes Óptimas de Recuperación de Calor, en el segundo capítulo se presentan los antecedentes y la formulación del Modelo de Transbordo, dentro de la Investigación de Operaciones.

En el tercer capítulo se muestra la aplicación de este modelo al diseño de redes de Recuperación de Calor, y en el cuarto capítulo se muestra la aplicación de todos estos conceptos a ejemplos numéricos, desarrollando detalladamente la formulación de cada modelo, aplicando el paquete computacional LINDO para resolverlo, y analizando los resultados obtenidos con el mismo.

Finalmente, en las conclusiones se resume la experiencia obtenida con el uso de estos modelos de transbordo para la síntesis de redes óptimas de recuperación de calor y con el paquete computacional LINDO en la solución de los ejemplos numéricos presentados.

## CAPITULO 1

### SINTESIS DE REDES DE RECUPERACION DE CALOR

Como ya se mencionó en la introducción, la red de recuperación de calor es uno de los componentes cruciales en el sistema total de proceso, ya que su objetivo es el de intercambiar calor entre las corrientes del proceso químico, con el objeto de reducir el consumo de las corrientes de servicio.

En base a esto, la tarea de la síntesis, consiste en encontrar una secuencia factible de intercambiadores de calor, en la cual, los pares de corrientes sean unidos de tal manera, que se genere una red factible y óptima en cuanto a que minimice los costos totales de la misma.

Uno de los obstáculos cruciales a superar en la síntesis de procesos es la modelación del problema. Antes de buscar la solución óptima, se debe tener a la mano una representación del problema, lo suficientemente rica como para encerrar todas las posibles alternativas, pero a la vez, lo suficientemente simple como para admitir una técnica de solución capaz de un descubrimiento rápido de las mejores redes.

#### 1.1 ANTECEDENTES

La solución de este problema de síntesis, en particular, ha progresado sustancialmente desde la primera vez que apareció. El problema fué formalizado primero por Masso y Rudd (1969), y su propósito fué el de desarrollar un procedimiento sistemático capaz de descubrir la red de intercambiadores de calor con la cual se lograrán las especificaciones del proceso para un costo mínimo. Actualmente, se ha puesto mucha atención en la síntesis automática de procesos químicos. Se han escrito trabajos relevantes por Hendry et al. (1972) y Michaels (1972) y también se han escrito muchos artículos sobre la síntesis automática de redes de recuperación de calor.

Esencialmente, el problema de síntesis, consistente en encontrar una secuencia factible de intercambiadores de calor que minimice los costos de construcción y operación, no parece muy complicado; sin embargo, las dificultades aparecen cuando el número de combinaciones posibles entre las corrientes, es extremadamente grande. Aún para problemas pequeños, todas las redes posibles, normalmente no pueden ser enumeradas. Técnicas como la de Branch and Bound (Pho y Lapidus en 1973) han ayudado a reducir el número de posibilidades combinatoriales que se deben enumerar, pero el problema más grande, resuelto en la literatura usando esas técnicas, no involucra más de diez corrientes. También, la optimalidad no puede ser estrictamente garantizada con el uso de estas técnicas, y las



Estructuras de redes cíclicas no pueden ser obtenidas, sin incrementar enormemente el tamaño de los problemas (Rathore & Powers, 1975).

Un método alternativo de síntesis presentado por Ponton & Donaldson (1974), se basa principalmente en procedimientos heurísticos que resuelven primero la corriente caliente que tiene a la temperatura más alta con la corriente fría que tiene la temperatura más alta de salida. Este método puede ser generalizado a redes cíclicas sin enfriamiento adicional, y se ha aplicado a problemas de tamaño real (Donaldson et al., 1976). Desafortunadamente, este método puede producir resultados muy alejados de la solución óptima, lo cual genera nuevas demandas de procedimientos heurísticos adicionales para resolver las situaciones inesperadas.

Rathore & Powers (1975) y otros, pusieron en claro, que el costo del vapor y del agua de enfriamiento, generalmente son más importantes que el costo que significa para la planta la existencia de topologías que no pueden ser consideradas óptimas, pero que se encuentran cercanas, ya que si minimizamos los costos de las corrientes auxiliares de servicio, estamos optimizando la red de recuperación de energía. Basados en esta observación, ellos recomiendan un procedimiento que identifica un límite superior en la recuperación de energía para un problema dado, y llevan a cabo una búsqueda de árbol para identificar rápidamente algunos, pero no todas las redes con un máximo, o cercanas al máximo en la recuperación de energía. Ellos argumentan que estas redes se comportarán de manera similar a la óptima y tendrán costos aproximados. Las redes obtenidas de esta manera, pueden ser comparadas en grado de seguridad, control, procedimientos de arranque, etc. Una estrategia de este clase, aparece aún más justificada por los reportes acerca del problema del control del comportamiento y de otras dificultades encontradas con la síntesis automática de redes (Hlaváček, 1976).

Nishida, et al. (1977) presentaron un método algorítmico evolutivo de síntesis que parece ser más manejable para la solución de problemas de tamaño real. Emplea tres criterios básicos: el intento por asegurar la máxima recuperación de energía, el intento por minimizar el área total de transferencia de calor y el intento por minimizar el costo total de la red. El área total de transferencia es minimizado por un algoritmo de área mínima, mientras que el costo total es minimizado usando reglas evolutivas. La recuperación máxima de energía, se garantiza por un teorema y sus correlarios, usando el diagrama de contenido de calor propuesto por (Sinnola, 1974).

Honnann (1971) presentó un método para la síntesis de redes con área mínima, el cual también incluye técnicas para asegurar la factibilidad de un sistema de corrientes, asumiendo un acercamiento de temperaturas para una entrada dada de corrientes de servicio. Honnann y Lockhart (1976) describieron desarrollos que garantizan la factibilidad de una red de intercambiadores por medio de la examinación del acercamiento mínimo de temperatura encontrado en la

red. Ambas técnicas, indirectamente, proveen estimaciones correctas de los recursos necesarios, confirmando la factibilidad de una red, para un consumo asumido de corrientes de servicio de entrada.

Linnhoff & Flower en 1978 [8], propusieron un método de síntesis, llamado el método del intervalo de Temperatura II, que realiza la búsqueda de las estructuras deseables de redes que tienen grados altos de recuperación de energía. El método trabaja el problema en dos fases. En la primera, se generan redes preliminares que exhiben el grado más alto posible de recuperación de calor. En la segunda fase, estas redes preliminares se usan como base para la búsqueda de las redes más satisfactorias desde los otros puntos de vista. Aparte de los costos, se pueden tomar en cuenta los criterios de las restricciones de seguridad, de control, etc. En general, el énfasis principal está puesto en el primer caso, esto es, en la generación de redes preliminares. El problema original de síntesis se divide en subproblemas, cada uno de los cuales se extiende sólo sobre un intervalo limitado de temperatura. La síntesis de las subredes que resuelven estos subproblemas es trivial. El acercamiento está basado en la termodinámica técnica y es sistemático. Los pruebas combinatorias se reducen considerablemente, ya que las redes disponibles pueden ser construidas metodicamente, de unidades más pequeñas. En los casos de redes, donde la recuperación máxima de energía es demasiado complicada o demasiado cara, esto se reconoce durante la síntesis y se considera la división paralela de corrientes.

Posteriormente, Flower y Linnhoff [10], modificando un poco su método anterior, propusieron un algoritmo termodinámico combinatorial (TC), el cual genera todas las redes con consumo mínimo de corrientes de servicio, sin división de corrientes. El primer paso para el algoritmo TC es el de dividir el rango de las temperaturas de las corrientes dentro de intervalos, de acuerdo a las reglas de particionamiento que permiten el intercambio factible de calor. Después, se predicen los flujos mínimos de las corrientes de servicio que son necesarios, usando el procedimiento de la Tabla Problema, dado por Linnhoff y Flower [8,9]. El último paso es el de generar todas las redes que requieren el consumo mínimo de corrientes de servicio y que tienen el número mínimo de unidades de intercambio de calor.

Una estrategia similar para la la síntesis de redes de recuperación de calor, fue propuesta por Corda et. al. [3], y Corda y Westerberg [2,3]. En la fase inicial, se considera el problema del consumo mínimo de servicios auxiliares. El rango de temperaturas para todas las corrientes es particionado dentro de intervalos de temperatura, pero entonces, el problema se modela como un Problema de Transporte, donde se consideran todas las posibles rutas por las cuales se puede enviar calor de las corrientes calientes a las corrientes frías.

Ya que sólo se puede enviar calor de una corriente caliente a una temperatura más alta a una corriente fría a una temperatura más baja, se asignan coeficientes muy grandes de costo, a las rutas termodinamicamente infactibles. Este modelo de Transporte de

Programación lineal, puede ser modificado, si es necesario, para tomar en cuenta acoplamientos restringidos entre ciertas corrientes y es resuelto, usando el algoritmo de la Escena Simplex.

La siguiente fase es determinar la red correspondiente a esa cantidad mínima de corrientes auxiliares de servicio, que involucra el número mínimo de unidades de intercambio de calor. Esto es hecho, reformulando el problema de transporte como un problema Mixto-Entero (MILP), y entonces, relajando la integralidad de las restricciones para resolverlo como un problema lineal. La estructura final de la red de recuperación de calor, se deriva a mano y, si es necesario, se pueden realizar divisiones en las corrientes.

Posterior a este método y con el mismo enfoque, está el utilizado por Papoulias & Grossmann(19). En vez de utilizar el modelo de transporte, ellos utilizan el Modelo de Transbordo para plantear el problema. Aunque utilizan la misma división en intervalos, el número de ecuaciones de restricción por Balance de Energía que se generan en este modelo, se reducen en casi la tercera parte de las que se utilizarían con el método del transporte, lo cual facilita enormemente su solución, minimizando los tiempos de CPU necesarios para resolver los sistemas planteados. En el presente trabajo, se utilizarán estos modelos, para la resolución del problema de diseño de redes óptimas de recuperación de calor.

### 1.2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El problema de la síntesis de redes de recuperación de calor que será considerado en el presente trabajo, puede ser considerado como sigue: En un sistema de proceso existe un conjunto  $H = \{i | i = 1, NH\}$  de corrientes calientes que tienen que ser enfriadas y un conjunto  $C = \{j | j = 1, NC\}$  de corrientes frías que tienen que ser calentadas. Cada corriente caliente  $i$  tiene una velocidad de flujo másico  $F_i$ , una capacidad calorífica  $(Cp)_i$ , y tiene que ser enfriada de la temperatura de entrada  $(T^*)_i$  a la temperatura de salida  $(T^*)_i$ . Similarmente, cada corriente fría  $j$  tiene una velocidad de flujo másico  $F_j$ , una capacidad calorífica  $(Cp)_j$ , y tiene que ser calentada de la temperatura de entrada  $(T^*)_j$  a la temperatura de salida  $(T^*)_j$ .

Ya que el contenido de calor de las corrientes frías y de las calientes, generalmente es desigual, y debido a las restricciones termodinámicas en la transferencia de calor, se asume la existencia de calentamiento y enfriamiento auxiliar, disponibles de un conjunto  $S = \{m | m = 1, NS\}$  de corrientes de servicio calientes (p.ej. combustible, vapor) y un conjunto  $W = \{n | n = 1, NW\}$  de corrientes de servicio frías (p.ej. agua de enfriamiento, refrigerantes).

Las redes que no incluyen uniones múltiples entre algunos pares de corrientes, ni división de corrientes en corrientes paralelas, son llamadas redes acíclicas. Las redes cíclicas, esto es, las redes en las cuales dos corrientes están unidas, la una con la otra, más de una vez, no están excluidas en el planteamiento del problema, ni tampoco la posibilidad de que las corrientes involucradas se dividan,

formando corrientes paralelas. La mayoría de las veces, las redes cíclicas y/o las redes que contienen divisiones de corrientes paralelas representan las únicas opciones para lograr la máxima recuperación de energía. Sin embargo, cuando la capacidad calorífica, multiplicada por el flujo de una corriente fría (o caliente) es excesivamente grande, comparada con las de las corrientes calientes (o frías), es por lo general, imposible obtener una recuperación máxima de energía en una red acíclica y sin división de corrientes.

### 1.3 PASOS EN LA SINTESIS DE REDES DE RECUPERACION DE CALOR

Los modelos de transbordo podrán ser usados en el siguiente procedimiento para la síntesis de redes de recuperación de calor:

#### 1.3.1 Desarrollo de los intervalos de Temperatura

En el primer paso, el rango total de temperatura para todas las corrientes del proceso, es particionado dentro de intervalos de temperatura. Se pueden usar los métodos de partición propuestos por Linhoff & Flowers (9,10), Grimes y Cerda (2,3), para este propósito. Sin embargo, con el primer procedimiento se obtienen, aproximadamente, el doble de intervalos que con los otros dos métodos. Por lo tanto, el procedimiento de partición, primero propuesto por Grimes y después modificado por Cerda, es el más eficiente, ya que el modelo resultante tiene menos intervalos de temperatura, lo cual reduce el tamaño de los modelos de transbordo. En particular, las siguientes reglas son aplicadas en el método de Grimes.

Regla No. 1. Decremente las temperaturas de entrada de cada corriente de servicio caliente, por el acercamiento mínimo, especificado para la temperatura  $\Delta T_{min}$ .

Regla No. 2. Ponga las temperaturas de entrada de las corrientes calientes, restándole el decremento  $\Delta T_{min}$ , así como las temperaturas originales de entrada, de todas las corrientes frías, de proceso y de servicio, en una lista. Estas temperaturas que definen la partición para las corrientes frías, son arregladas en orden decreciente de valores. Las temperaturas de las corrientes calientes de proceso y de servicio, vendrán dadas, entonces, incrementando las temperaturas de las corrientes frías de proceso y de servicio, por el correspondiente  $\Delta T_{min}$  del problema.

Note que la temperatura más alta (que corresponde a la primera entrada en la lista, deberá corresponder a una corriente de servicio de calentamiento y que la temperatura más baja (que corresponde a la última entrada en la lista), corresponderá a una corriente de servicio de enfriamiento. Para garantizar que el calentamiento en el nivel más alto, y

el enfriamiento en el nivel más bajo, están siempre disponibles.

Regla 3. Los  $K$  intervalos de temperatura son numerados en orden creciente,  $k = 1, 2, \dots, K$ , comenzando del par más alto de temperaturas en la lista. El número de particiones para los  $K$  intervalos de temperatura, con el procedimiento de arriba, vendrá dado por  $K \leq N_H + N_C + N_H + N_S - 1$ .

### 1.3.2. Predicción del costo mínimo de corrientes de servicio

En este paso, se determina el costo mínimo de corrientes de servicio para un problema dado, usando cualquiera de los modelos lineales de transporte, el modelo lineal sin acoplamientos restringidos LP o el modelo lineal con acoplamientos restringidos LPS. Estos dos modelos de transporte son esencialmente problemas de flujo en redes que pueden ser resueltos eficientemente con algoritmos de propósito especial (como el propuesto por Bradley et al. [11]) o con paquetes computacionales estándares para programación lineal (en este caso LINDO).

La solución óptima de los modelos de transporte (LP) y (LPS) no nos da el diseño óptimo de la red (i.e. que acoplamientos deben hacerse entre las corrientes del proceso), pero sí la cantidad mínima de flujo de corrientes de servicio que deben utilizarse en cualquiera de las redes óptimas de solución. Por lo tanto, este paso en la estrategia de síntesis, reduce significativamente, el número de redes de recuperación de calor, que pueden usarse para las consideraciones posteriores, sin excluir diseños eficientes de energía.

### 1.3.3 Incremento de la integración de calor en la red

Este paso está asociado con la eliminación o modificación de los cuellos de botella ('puntos estrechos') en la red de recuperación de calor, con el objeto de reducir, posteriormente, el costo de los servicios auxiliares. Un ejemplo de punto estrecho se muestra en la Fig. 1.2, donde las corrientes compuestas frías y calientes de un proceso, como las que se muestran individualmente en la Fig. 1.1, se grafican en un diagrama de Temperatura vs. Entalpía. Note que la presencia de los puntos estrechos limita la cantidad máxima de integración de calor que está permitida.

Ante la existencia de un 'punto estrecho', un incremento en la integración de calor puede hacerse, solo si es posible alterar ciertas velocidades de flujo másico de las corrientes del proceso, y/o sus temperaturas de entrada. Consecuentemente, la implementación de este paso es opcional, ya que en muchos casos no está permitido alterar los datos del problema. En el caso de que se permita la variación de las velocidades de flujo másico y de las temperaturas de entrada de ciertas corrientes, el problema del costo mínimo de las

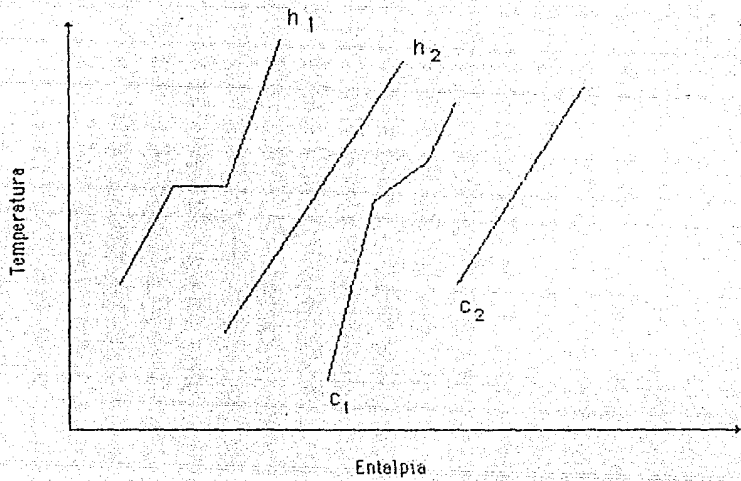


Fig. 1.1 Diagrama Entalpia vs. Temperatura para las Corrientes Individuales del Proceso

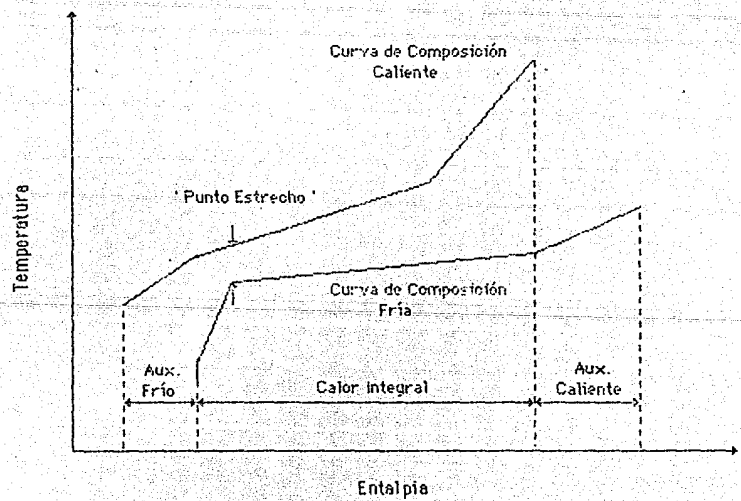


Fig. 1.2 Integración Máxima del Calor y "Punto Estrecho"

corrientes de servicio puede ser formulado como un modelo de transbordo, integrado en el diseño más amplio del sistema total del proceso.

Sin embargo, este modelo de transbordo debe estar conectado y debe ser resuelto simultáneamente con el modelo mixto-entero (MILP) del sistema del proceso químico que toma en cuenta todas las variaciones en las velocidades de los flujos mássicos y en las temperaturas de las corrientes del proceso. (Ver Papoulias y Grossmann[20]).

#### 1.3.4 Selección de Redes que tienen el número mínimo de unidades de intercambio de calor

Después de predecir el costo mínimo de las corrientes de servicio, un modelo de transbordo MILP, es usado para determinar el número mínimo de unidades y los acoplamientos actuales que deberían tener lugar en la red. Como se mencionó antes, se pueden usar pesos para asignar preferencias a los acoplamientos. Este problema, involucra la solución de un problema mixto-entero (MILP) que puede ser resuelto con códigos estándares de Branch and Bound [10,14], y con la opción de descomponer el problema en subredes.

Es importante notar que el problema mixto-entero de transbordo (MILP) no provee directamente la configuración de la red de intercambio de calor. Sin embargo, la solución óptima de este problema, contiene toda la información necesaria para derivar la red a mano. Específicamente, la solución indicará el par de corrientes involucradas en cada acoplamiento, la cantidad correspondiente de calor intercambiada y los intervalos de temperatura sobre los cuales tiene lugar el intercambio de calor.

La derivación de las configuraciones de la red, frecuentemente, será una tarea fácil, ya que no se requiere trabajo para macular, manualmente las unidades de intercambio de calor. Más aun, ya que en la derivación del modelo MILP, no se hizo ninguna suposición acerca de la prohibición de dividir corrientes en corrientes paralelas o de utilizar redes cíclicas, conociendo los intervalos de temperatura sobre los cuales tienen lugar los acoplamientos, uno puede determinar, fácilmente, cuando se requiere la división de alguna corriente.

Claramente, habrá momentos en los cuales se pueden derivar una o más redes diferentes, ya que la solución óptima del problema MILP, no necesariamente define una configuración única, y/o parámetros para la red. En este caso, se debe hacer un análisis detallado de las diferentes redes, para seleccionar la solución final.

## CAPITULO 2

### EL PROBLEMA DE TRANSBORDO

Uno de los modelos más ampliamente utilizado en el campo de la Investigación de Operaciones, para resolver problemas de redes es el modelo de transbordo. El modelo de transbordo es una variante del bien conocido problema de transporte y tiene por objetivo la asignación óptima de recursos. En particular, el modelo de transporte intenta determinar la red óptima para transportar un bien (i.e. un producto) de las fuentes (i.e. plantas) directamente a los destinos (i.e. mercados). Por otro lado, el modelo de transbordo investiga la red óptima para enviar el mismo bien, pero de las fuentes a nodes intermedios (i.e. almacenes) y de ahí a los destinos.

Hoy en día, la programación de redes puede ser vista como un arte y como una ciencia. El proceso de desarrollar algoritmos para resolver programas de redes es una ciencia; sin embargo, el proceso de construir un modelo de red que ayude al análisis de un problema real, continúa siendo un verdadero arte.

#### 2.1 ANTECEDENTES

En 1975 la Academia Real Sueca de Ciencias otorgó el Premio Nobel en Ciencias Económicas, compartido, al Profesor Leonid Kantorovich de la URSS y al Profesor William C. Koopmans de los Estados Unidos, por sus contribuciones a la teoría de la asignación óptima de recursos. Aunque estos distinguidos profesores investigaron una gran variedad de problemas de optimización, es interesante notar que ambos están asociados con algunos de los primeros papeles que describen los problemas de flujo en redes, tal como los conocemos ahora. En 1939, en un papel expositivo, Kantorovich discutió una clase especial de modelos de optimización, junto con ejemplos específicos. La idea subyacente de cada ejemplo fue la de alcanzar la producción más alta posible, sobre la base de la utilización óptima de los recursos existentes. Uno de estos ejemplos involucró la distribución de flujos de carga entre las diferentes rutas de una red de carreteras, con el objeto de minimizar el uso de combustible.

Discusiones posteriores del flujo de carga en la URSS fueron dados por Kantorovich y Gavurin. Estos trabajos no fueron conocidos en Occidente hasta finales de la década de 1950. Al mismo tiempo, en los Estados Unidos, Frank L. Hitchcock y William C. Koopmans abordaron el problema de la asignación óptima de recursos de un modo similar. Koopmans trabajó en estrecha colaboración con el profesor Koopmans en la Oficina de Embarques. Debido a estos trabajos, el problema de



transporte, frecuentemente es referido como el problema de transporte de Hitchcock o el problema de transporte de Hitchcock-Koopmans.

Tanto Hitchcock en 1941, como Koopmans en 1946, presentaron métodos computacionales del tipo primal simplex para la solución del problema de transporte. Hitchcock mostró que una solución óptima debería ser un punto extremo de solución y mostró como se podía construir inductivamente mejores soluciones de puntos extremos, tomando en cuenta soluciones óptimas alternativas y degeneración. Koopmans lo resolvió desarrollando multiplicadores simplexes o "factores potenciales" y el criterio de optimalidad, mostrando que el punto extremo es equivalente a un árbol. Dantzig mostró en 1951 que el modelo de transporte puede ser resuelto por su algoritmo simplex, y también desarrolló una variante especial del algoritmo simplex para el problema de transporte.

En 1956 Alex Orden propuso una generalización del modelo de transporte, en la cual se permitirían puntos de transacción. Esta formulación es conocida hoy en día como el Problema de Transacción in Separables. Aproximadamente al mismo tiempo, arose el problema de flujo máximo en redes y el problema de costo mínimo de flujo en redes fueran formulados e investigados por el famoso equipo de Dantzig y Delbert Fulkerson.

Desde 1950 hasta 1965, se dirigió mucha actividad hacia el desarrollo de algoritmos para modelos lineales de flujo en redes. Los algoritmos desarrollados pueden ser clasificados en dos clases, como sigue: (1) especializaciones del método simplex primal y (2) métodos primales-duales.

Las implementaciones contemporáneas del algoritmo primal simplex de redes están basados en la representación compacta de la base, la determinación del arco de partida sin prueba y error y en técnicas eficientes para actualizar los multiplicadores simplex en cada pivote. Algunos de estos desarrollos fueron sugeridos en 1960 por Glickman. Las especializaciones del método primal simplex esperaron con el trabajo de Dantzig y culminaron con el papel de Ellis Johnson y Eisen, que describieron un problema de transporte con pocas fuentes y muchos destinos; sus estructuras de datos pueden ser vistas como el almacenamiento de la base en forma de árbol y la actualización de esta estructura para encontrar eficientemente el arco de salida. E. Johnson describió un esquema de triple etiqueta que representa la base con un árbol y permite que los multiplicadores simplex sean actualizados eficientemente. Johnson describe su trabajo como una modificación del propuesto por Scaris.

Los métodos primales-duales se originaron con el algoritmo húngaro de Harold Kuhn para el problema de asignación y culminaron con el algoritmo *out-of-kilter* de Delbert Fulkerson, el primal-dual de Ford y Fulkerson, el dual de Balas y Hammer, el de ruta de Busacker y Gowen, el de ciclo negativo de Hley y el de escalamiento de Edmonds y Karp. También se han desarrollado algoritmos especiales para los problemas de asignación, de la ruta más corta y de flujo máximo.

La mayor parte de la actividad desarrollada a partir de esos papales clásicos ha involucrado la implementación eficiente de estas técnicas básicas y la extensión de esta tecnología a los problemas lineales de redes que involucran generaliza, a los problemas lineales de asignación de bienes múltiples, a los problemas lineales de redes con restricciones generales adicionales, y a los problemas de redes que tienen funciones de costo no lineales y convexas.

Los predecesores de Glicksman, L. Jonson y Epsilon, Goins y S. Jensen para los algoritmos primales no fueron inmediatamente alcanzados, el código más ampliamente conocido de esa década es una implementación del algoritmo out-of-kilter hecha por Glason. El trabajo contemporáneo sobre algoritmos para redes fue empezado en 1970 por Schittavaso y Thompson, Glover, Karney, Klingman y Nader. Estos trabajos representaron una ruptura con los anteriores, ve que:

- 1) Los algoritmos primales fueron considerados superiores, a pesar de todos los experimentos de la década de los cincuenta y de los sesenta que intentaron mostrar la aparente superioridad del algoritmo out-of-kilter.
- 2) Las herramientas contemporáneas en la ciencia de la computación no estaban disponibles hace una década.
- 3) Los códigos computacionales fueron desarrollados para problemas mucho más grandes que en el pasado.

Más tarde, e independientemente, McBride y Graves especializaron su trabajo sobre la factorización de programas líneas de problemas de transbordo. Aunque su desarrollo es un poco diferente, la especialización en redes de sus estructuras de datos es similar en muchos aspectos a las estructuras de datos que emergieron del punto de vista de teoría de graficas de las redes. Mulvey ha desarrollado un código primal eficiente a gran escala. Harris desarrolló un algoritmo primal para el problema de transporte. Langley, Kennington y Shetty también desarrollaron un código primal.

Un aspecto significativa del trabajo contemporáneo en investigación de redes ha sido la prueba computacional de diferentes algoritmos para problemas estándares muy grandes. Uno de los tópicos principales ha sido la confrontación de los algoritmos primales contra el algoritmo de out-of-kilter. Los experimentos hechos en los cincuenta y a principio de los sesenta, convencieron a los investigadores de que el algoritmo out-of-kilter era superior, especialmente para problemas de transbordo. Las comparaciones recientes más comprehensivas han sido hechas por Glover, Karney, Klingman y Barr, que compararon los algoritmos en un conjunto diverso de problemas de prueba. El código primal es del 30% (para problemas de transbordo) al 40% (para problemas de transporte) más rápido que el código out-of-kilter. El éxito del algoritmo primal ha sido independientemente verificado por experimentos de otros. La mayoría de los investigadores, ahora creen que el algoritmo primal es superior a los otros, incluyendo el algoritmo out-of-kilter.

## 2.2 EL PROBLEMA DE FLUJO CON COSTO MINIMO EN UNA RED

El modelo de transbordo con capacidad y sus especializaciones (sin capacidad) son problemas de flujo en redes con costo mínimo. El objetivo es el de determinar como (o a que velocidad) se debe enviar flujo a través de los arcos de una red para minimizar los costos de envío. La red es una grafica dirigida  $G$ , definida con un conjunto de nodos (puntos),  $N = \{1, 2, \dots, n\}$ , y un conjunto de arcos dirigidos (líneas)  $A = \{(i, j), (i, i), \dots, (i, j)\}$  que unen paros de los nodos en  $N$ . El arco  $(i, j)$  se dice que es incidente con los nodos  $i$  y  $j$  y está dirigido del nodo  $i$  al nodo  $j$ . Se supone que  $i$  y  $j$  son distintos de  $n$  nodos y  $n$  arcos.

A cada nodo  $i$  en  $N$  se asocia un número  $b_i$  que representará los recursos disponibles de un artículo  $i$  si  $b_i > 0$  o la demanda requerida del artículo (si  $b_i < 0$ ). Algunas veces, los nodos con  $b_i > 0$  se llaman orígenes, y los nodos con  $b_i < 0$  se llaman destinos. Si  $b_i = 0$ , entonces ningún artículo está disponible en el nodo  $i$  y ninguno se requiere en este caso, algunas veces se dice que el nodo  $i$  es un nodo intermedio (o de transbordo). Asociado con cada arco  $(i, j)$  se tienen el número  $x_{ij}$  que representa la cantidad de flujo sobre el arco (se supone que  $0 \leq x_{ij}$ ), y el número  $c_{ij}$  que es el costo unitario de transporte a lo largo del arco. De una forma mas generalizada, se tiene que  $l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij}$  donde  $l_{ij}$  y  $u_{ij}$  son los límites inferior y superior del flujo que puede transportarse en el arco  $(i, j)$ , en la mayoría de los casos,  $l_{ij} = 0$  y  $u_{ij} = \text{infinito}$ .

Se supondrá que la oferta total en la red es igual a la demanda total, es decir,  $\sum b_i = 0$ . Si este no es el caso, es decir, si  $b_i > 0$ , entonces se añade un nodo ficticio  $n + 1$ , con demanda  $b_{n+1} = -\sum b_i$  y arcos con costo cero desde cada nodo de recursos al nuevo nodo.

El problema de flujo con costo mínimo en una red se puede enunciar como sigue. Embarquense los recursos disponibles a través de la red, para satisfacer la demanda a un costo mínimo, preservando la conservación de flujo en cada nodo, con flujos que se encuentren dentro de los límites permitidos en cada arco. Matemáticamente este problema se puede expresar como sigue:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \\ &\text{sujeta a} && \sum_{j=1}^n x_{ij} - \sum_{k=1}^n x_{ki} = b_i \quad i = 1, \dots, n \quad (2.1) \\ &&& l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij} \quad i, j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Las restricciones (2.1) se llaman ecuaciones de conservación de flujo o ecuaciones de Kirchhoff e indican que, en la red, no se puede crear ni destruir flujo. En las ecuaciones de conservación,  $\sum_{j=1}^n x_{ij}$  representa el flujo total que sale del nodo  $i$ , mientras que  $\sum_{k=1}^n x_{ki}$  es el flujo total que entra al nodo  $i$ . Estas ecuaciones requieren que el flujo neto que sale del nodo  $i$ , o sea,  $\sum_{j=1}^n x_{ij} - \sum_{k=1}^n x_{ki}$ , sea

igual a  $b_i$ . Si  $b_i < 0$ , entonces el flujo que entra a  $i$  debe ser mayor que el que sale de  $i$ .

Estos modelos son ampliamente utilizados, debido a que describen adecuadamente una gran variedad de aplicaciones importantes. Ha habido un reciente surgimiento de interés en dichos modelos debido a que los nuevos programas de computadora, más eficientes han hecho posible la solución económica de problemas con más variables, con esta técnica, que con ninguna otra técnica de optimización. Las redes son también populares, debido a que son más fácilmente aceptadas por no analistas, que posiblemente cualquier otra clase de modelo de investigación de operaciones.

### 2.3 ENFOQUE PRIMAL PARA REDES

Las implementaciones primales actuales son más rápidas, requieren menos almacenamiento, son más manejables y pueden ser usadas más fácilmente como parte de sistemas más generales de optimización. Las estructuras de datos correspondientes, son más importantes, ya que pueden ser aplicadas a muchos tipos de situaciones, dentro de la programación matemática. En este contexto, los principales avances en los últimos años, han estado en la solución eficiente de problemas muy grandes de programación lineal (por ejemplo: simplex revisado, producto de la inversa, variables acotadas, generalización del acortamiento superior, factorización de matrices, métodos para matrices esparcidas, etc.), ya que cambios especiales en la representación de los datos van acompañados, solo de las modificaciones necesarias del procedimiento simplex, para acomodar estas nuevas estructuras de datos. Los avances computacionales en los códigos primales para redes, también son debidos a la representación de los datos, lo cual ha renovado el interés en las relaciones entre los algoritmos y las estructuras de datos empleadas para su implementación.

Las redes son un caso importante de la programación lineal en gran escala. Históricamente este ha sido la perspectiva; sin embargo, en la literatura más reciente, las redes han sido tratadas como una área distinta de investigación con poca referencia a la notación y desarrollo matemático de la programación lineal. Este "acercamiento de redes" está basado en la notación de la teoría de gráficas y sus resultados; sin embargo, en muchas ocasiones y con el objeto de desarrollar códigos computacionales, es más fácil verlo y tratarlo como un problema general de programación lineal especializado.

Muchas aplicaciones involucran redes como una parte de un problema más general de optimización. Estos modelos, que pueden involucrar restricciones adicionales, funciones objetivo no lineales, descomposición, relajación Lagrangiana, etc., requieren una coordinación cuidadosa de las variables primales, de las variables duales y de las bases de los problemas de redes, con los del problema general.

Una especialización del algoritmo simplex para el problema del transporte, fue desarrollado por Dantzig en 1951. No es de sorprender que el algoritmo del transporte fuera desarrollado inmediatamente después del algoritmo simplex, debido a los trabajos de Hitchcock y Koopmans en 1946 y que éstos, contuvieran muchos conceptos que presagian el algoritmo simplex. La interacción de los algoritmos generales lineales de programación y de los algoritmos de transporte tiene una larga historia que ha enriquecido el estudio de éstos.

Existe una relación muy fuerte entre el algoritmo primal simplex y las modernas implementaciones de los algoritmos de transporte, debido a los fundamentos algebraicos de estas implementaciones del problema de transporte.

El hecho fundamental que permite diseñar algoritmos primales de transporte eficientes, es el resultado bien conocido de que cualquier base de transporte puede ser puesta en una forma triangular (superior) por una simple triangulación con permutaciones. Esta inherente triangularidad puede ser explotada por las especializaciones para redes del método simplex, resolviendo directamente las ecuaciones que se forman en el método simplex, por sustitución hacia atrás o hacia adelante. También, los algoritmos simplex sobre bases trianguladas generan soluciones mucho más eficientes de la red, debido a otras simplificaciones surgidas en el momento de actualizar la base primal, que puede ser acompañada de una simple y eficiente retriangulación dinámica de cada nueva base.

Este hecho está basado en el teorema de Dantzig, que establece que cualquier base  $B$ , extraída de una matriz  $A$ , para un problema de transporte, puede ser triangulada, reanreglando los renglones y reanreglando las columnas. Se puede definir una gráfica que represente la base del problema de transporte. Si  $i = (i_1, i_2, \dots, i_n)$  es un renglón ordenado que corresponde a una matriz triangulada  $B$ .

En general, hay muchas triangulaciones diferentes para una base dada de un modelo de transporte. Sin embargo, todas las triangulaciones originan la misma función de predecesor y la misma gráfica. Entonces, la relación entre el punto de vista algebraico del algoritmo simplex y el punto de vista de la teoría de gráficas de mucha de la literatura sobre redes, puede ser vista como la descripción de las operaciones del algoritmo simplex y la triangulación en términos el predecesor de la gráfica.

### CAPITULO 3

#### EL MODELO DE TRANSBORDO EN EL DISEÑO OPTIMO DE REDES DE RECUPERACION DE CALOR

La siguiente analogía con el modelo de transbordo puede ser hecha para el problema de recuperación de calor. El calor puede ser visto como un bien que es enviado desde las corrientes calientes hacia las corrientes frías a través de intervalos de temperatura que toman en cuenta las restricciones termodinámicas en la transferencia de calor. En particular, la segunda ley de la termodinámica requiere que el calor fluya solo de temperaturas más altas a temperaturas más bajas, y por lo tanto, estas restricciones termodinámicas tienen que ser tomadas en cuenta en el modelo de la red. Esto puede ser hecho actualizando el particionando el rango entero de temperatura dentro de intervalos de temperaturas, de acuerdo a las reglas propuestas por Linnhoff & Flower (8,9,10), Gross, Corda et al. (11-13), Grossman et al. (14). Estos procedimientos de partición garantizan la factibilidad de la transferencia de calor en cada intervalo de la red, dado el acercamiento mínimo de temperatura  $\Delta T_{min}$ .

De esta manera, como se muestra en la Fig. 2.1, puede considerarse que el calor fluye de las corrientes calientes, en el intervalo correspondiente de temperatura, a las corrientes frías en el mismo intervalo de temperatura, con el calor sobrante, yendo al siguiente intervalo de temperatura más bajo. Por lo tanto, el modelo de transbordo para la red de recuperación de calor tiene las corrientes calientes y las corrientes de servicio de calentamiento como fuentes, los intervalos de temperatura como nodos intermedios y las corrientes frías y las corrientes de servicio de enfriamiento como destinos. El diagrama de flujo de calor para cada intervalo de temperatura se muestra en la Fig. 2.2, y tenemos lo siguiente:

- (a) El calor fluye dentro de un intervalo en particular, de todas las corrientes calientes y las corrientes de servicio de calentamiento cuyo rango de temperatura está incluido en el intervalo de temperaturas.
- (b) El calor fluye fuera de un intervalo particular a las corrientes frías y a las corrientes de servicio de enfriamiento cuyo rango de temperatura está incluido en ese intervalo de temperaturas.
- (c) El calor fluye fuera de un intervalo particular al siguiente intervalo de temperaturas más bajo. Este calor es el calor residual (exceso) que no puede ser utilizado en el presente intervalo, y consecuentemente, tiene que fluir a un intervalo de temperatura más bajo.
- (d) El calor fluye dentro de un intervalo particular de temperatura de los intervalos previos que están a temperaturas más altas. Este calor es el calor residual (exceso) que no puede ser

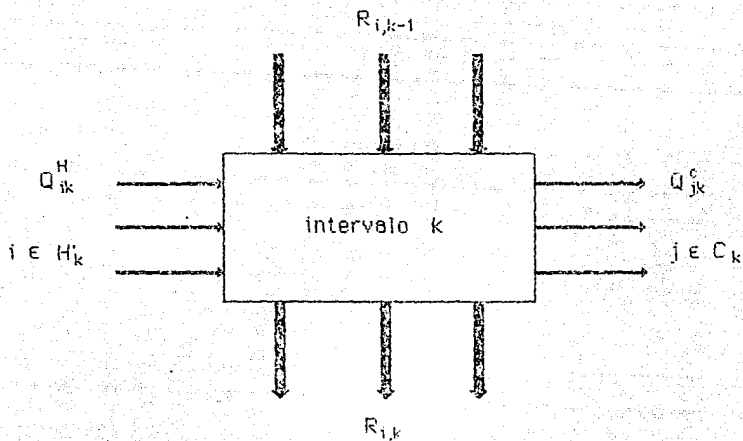


Fig. 3.1 Diagrama de Flujo de Calor en cada Intervalo de Temperatura

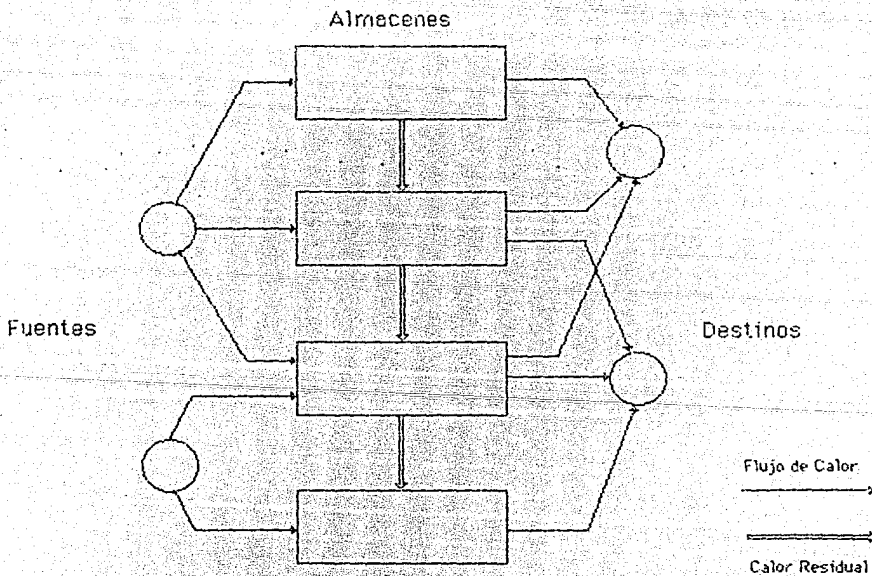


Fig. 3.2 Analogía entre la Red de Recuperación de Calor y el Modelo de Transbordo

utilizado en el intervalo más alto de temperaturas.

Debe notarse que este diagrama de flujo de calor es un caso especial del modelo general de transbordo (11.11) ya que todos los flujos de calor de las corrientes calientes a los intervalos de temperatura, y de los intervalos de temperatura a las corrientes frías, normalmente están fijos. En este caso, las únicas variables en esta red de transbordo son los flujos de calores residuales de un intervalo de temperaturas al siguiente intervalo más bajo de temperaturas, y los flujos máximos de las corrientes de servicio de calentamiento y de enfriamiento.

Existen diferentes formulaciones matemáticas del modelo de transbordo que pueden ser empleadas para la síntesis sistemática de redes de recuperación de calor. Estas formulaciones pueden ser usadas para predecir el costo mínimo de las corrientes de servicio y para derivar las redes con el número mínimo de unidades.

### 3.1 EL PROBLEMA DEL COSTO MÍNIMO DE LAS CORRIENTES DE SERVICIO

Uno de los objetivos de diseño empleados en la síntesis de redes de intercambio de calor es el de determinar el costo mínimo de las corrientes de servicio para un conjunto de corrientes de proceso frías y calientes. Este problema será formulado como un problema de transbordo, asumiendo que no existen asociaciones restringidas entre ningún par de corrientes.

El primer paso es el de partir enteramente el rango de temperatura de todas las corrientes dentro de  $K$  intervalos de temperatura, para lo cual, cualquier método permitido de particionado puede ser utilizado [3,4,15,19]. Los intervalos son etiquetados desde el nivel más alto ( $k = 1$ ) hacia abajo hasta el nivel más bajo ( $k = K$ ) de temperatura, donde cada intervalo  $k$  ( $k = 1, 2, \dots, K$ ) tiene un cambio de temperatura de  $\Delta T_k$ . Los siguientes conjuntos son definidos con el objeto de identificar la localización de todas las corrientes de proceso y de servicio relativas a los intervalos de temperatura:

- $H_k = \{i \mid \text{la corriente caliente } i \text{ está presente en el intervalo } k\}$
- $C_k = \{j \mid \text{la corriente fría } j \text{ está presente en el intervalo } k\}$
- $S_k = \{m \mid \text{la corriente de servicio de calentamiento } m \text{ está presente en el intervalo } k\}$
- $W_k = \{n \mid \text{la corriente de servicio de enfriamiento } n \text{ está presente en el intervalo } k\}$  (3.1)

Ahora,  $(Q_{ik})^H$  será la carga de calor de la corriente caliente  $i$  que entra en el intervalo de temperatura  $k$ . Esta carga de calor viene dada por,

$$(Q_{ik})^H = F_i (Cp_i)_i \Delta T_k \quad (3.2)$$

donde  $\Delta T_k$  es el cambio de temperatura de la corriente  $i$  en el intervalo  $k$ . Similarmente, la carga de calor  $(Q_{jk})^C$  que fluye a la corriente fría  $j$  del intervalo de temperatura  $k$  es calculada como,



$$(Q_{nk})^* = (F_n)^* (C_p)_n \, dh_{nk} \quad (3.3)$$

Todas las corrientes de servicio son puestas en los intervalos apropiados, dependiendo de su temperatura de entrada y la calidad. Si  $dh_{nk}$  es el cambio de entalpía de la corriente de servicio caliente  $n$  en el intervalo de temperatura  $k$ , entonces la carga de calidad  $(Q_{nk})^*$  que entra en el intervalo  $k$ , viene dada por,

$$(Q_{nk})^* = (F_n)^* \, dh_{nk} \quad (3.4)$$

Similarmente, la carga de calor  $(Q_{nk})^*$  de la corriente de servicio de enfriamiento en el intervalo de temperatura  $k$  es,

$$(Q_{nk})^* = (F_n)^* \, dh_{nk} \quad (3.5)$$

Denotando el flujo de calor residual fuera del intervalo  $k$  como  $R_k$ , y realizando un balance total de calor en cada intervalo  $k$  (ver Fig. 3.2), el modelo de transporte para el Costo Mínimo de las Corrientes de Servicio viene dado por:

$$\text{Minimizar } Z = \sum_{n \in S} s_n (F_n)^* + \sum_{n \in W} w_n (F_n)^*$$

sujeto a (1)

$$R_k - R_{k-1} - \sum_{n \in S_k} (F_n)^* \, dh_{nk} + \sum_{n \in W_k} (F_n)^* \, dh_{nk} = \sum_{i \in H_k} (Q_{ik})^* - \sum_{j \in C_k} (Q_{jk})^* \quad k = 1, 2, \dots, K$$

$$(F_n)^* \geq 0, \quad n \in S, \quad (F_n)^* \geq 0, \quad n \in W$$

$$R_0 = R_K = 0, \quad R_k \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, K-1$$

donde  $s_n$ ,  $w_n$ , son los costos unitarios para las corrientes de servicio de calentamiento y de enfriamiento. En el caso de que estos coeficientes de costos sean tomados como unitarios, la formulación anterior originara una solución para el Consumo Mínimo de las Corrientes de Servicio. Dicha solución será equivalente a la solución de Costo Mínimo, si se considera un solo tipo de corriente de servicio de calentamiento y un solo tipo de corriente de servicio de enfriamiento.

Los valores óptimos de los flujos máximos de las corrientes de servicio de calentamiento y de enfriamiento  $(F_n)^*$ ,  $n = 1, NS$  y  $(F_n)^*$ ,  $n = 1, NW$  y la carga residual de calor  $R_k$  para cada intervalo  $k$ , puede ser fácilmente determinada, resolviendo el problema de programación lineal (PL).

La ocurrencia de cualquiera de los "puntos estrechos" tiene lugar entre los intervalos de temperatura que no tienen flujo de calor residual, o equivalentemente, en el punto donde la carga de calor residual  $R_k$  es igual a cero. Note, que ya que los calores residuales  $R_k$  no corresponden a ninguna corriente en particular, sino que pertenecen al conjunto agregado de las corrientes calientes, la

formulación en (P1) es equivalente a mezclar las corrientes en corrientes compuestas, calientes y frías.

El modelo de transporte planteado, (P1) es una formulación alternativa al modelo reducido de transporte propuesto por Cerda et al. [17] para producir la utilización mínima de corrientes de servicio en una red de recuperación de calor, sin ningún acoplamiento restringido entre corrientes. Sin embargo, se debe notar que el tamaño del modelo de transporte es considerablemente menor que el modelo reducido de transporte que tiene  $NS + RW + L(K)(K + 1)/2$  variables y  $2K$  regiones. El tamaño del modelo de transporte (P1) es:

- (a) Número de variables =  $NS + RW + K - 1$
- (b) Número de regiones =  $K$ .

Esto nos origina un programa lineal de tamaño pequeño, aun para problemas con un gran número de corrientes. Por ejemplo, dados 20 corrientes de proceso, 2 corrientes de servicio de calentamiento y una corriente de servicio de enfriamiento, el número mínimo de intervalos de temperatura es de 22, de acuerdo al procedimiento de partición dado por Gross. Por lo tanto, el tamaño máximo del modelo de embarque es de sólo 16 variables y 20 regiones, mientras que el tamaño máximo del modelo reducido de transporte de Cerda et al. [17] es de 260 variables y 46 columnas.

### 3.2. EL PROBLEMA DEL COSTO MINIMO DE LAS CORRIENTES DE SERVICIO CON ACOPLAMIENTOS RESTRINGIDOS

Una consideración práctica en el diseño de algunas redes de recuperación de calor, es la especificación de acoplamientos prohibidos entre ciertas pares de corrientes del proceso. Este caso, aparece típicamente, debido a consideraciones de control o de seguridad, o debido a que un par de corrientes está localizado demasiado lejos en la planta, ya que el modelo de transporte (P1) no toma en cuenta los acoplamientos restringidos, es necesario desarrollar una nueva formulación.

El modelo para acoplamientos restringidos es similar al (P1), pero la diferencia es que solo las corrientes no restringidas frías y calientes, pueden ser mezcladas, ya que las corrientes restringidas deben ser tratadas separadamente. Esto es necesario, debido a que los acoplamientos prohibidos deben ser prevenidos con el objeto de intercambiar calor en la formulación del balance de calor dentro de cada intervalo.

Con el objeto de derivar el modelo, se supone que el conjunto de acoplamientos restringidos está especificado solo para algunas corrientes del proceso, y viene dado por:

$$P = \{(i, j) : i \in H, j \in C, \text{acoplamiento entre } i \text{ y } j \text{ está prohibido}\} \quad (3.5)$$

Las corrientes involucradas en el conjunto P, pueden entonces ser identificadas por los subconjuntos:

$$HP = \{i \mid i \in H\}, \quad CP = \{j \mid j \in C\} \quad (3.7)$$

Las corrientes presentes del proceso y las corrientes de servicio pueden ser consideradas, igualmente en la corriente caliente h, y en la corriente fría c. Si la partición de temperaturas se realiza sobre todo el proceso original y las corrientes de servicio, como en el problema (P), el contenido de calor de las corrientes servidas, frías y calientes, en cada intervalo k, entonces viene dado por:

$$Q_{hk}^c = \sum_{i \in H} (Q_i)^c + \sum_{j \in C} (F_j)^c \Delta t_{hk},$$

$$Q_{hk}^h = \sum_{i \in H} (Q_i)^h + \sum_{j \in C} (F_j)^h \Delta t_{hk} \quad (3.8)$$

Entonces, el conjunto reducido de corrientes que van a ser analizadas, viene dado por:

$$H = \{i \mid i = h, i \in HP\}, \quad C = \{j \mid j = c, j \in CP\} \quad (3.9)$$

Cada corriente caliente  $i \in H$  tendrá asignado un calor residual individual  $R_{ik}$ , como se muestra en la Fig. 3.2. También, el calor intercambiado entre la corriente caliente  $i \in H$  y la corriente fría  $j \in C$  en el intervalo de temperatura k, será denotado como  $Q_{ik}$ . Entonces, claramente se sigue que para los acoplamientos prohibidos,  $Q_{ik} = 0, (i, j) \in P, k = 1, 2, \dots, K$ .

Debe notarse que existe la posibilidad de que una corriente caliente  $i \in H$  intercambie calor con una corriente fría  $j \in C, (i, j) \in P$ , en un intervalo k, donde la corriente i no está presente actualmente. Esto puede suceder si la corriente caliente i está presente en un intervalo de temperatura más alto,  $k' < k$ , tal que el intercambio de lugar tenga lugar a través del calor residual  $R_{ik}$ . Por lo tanto, es conveniente definir los subconjuntos de corrientes para intervalos potenciales de calor en cada intervalo k, los cuales vienen dados por

$$HK = \{i \mid i \in H, \text{ la corriente } i \text{ está presente en el intervalo } k \text{ o } k'\}$$

$$CK = \{j \mid j \in C, \text{ la corriente } j \text{ está presente en el intervalo } k\} \quad (3.10)$$

Realizando balances individuales para el conjunto reducido de corrientes calientes y frías en cada intervalo (ver Fig. 3.2), el problema de Costo Mínimo de las Corrientes de Servicio para Acoplamientos Restringidos, vendrá dado por el siguiente modelo de transporte:

$$\text{Minimizar } Z = \sum_{i \in H} s_i (F_i)^c + \sum_{j \in C} w_j (F_j)^h$$

SUJETO A

$$R_{i,k} = R_{i,k-1} + \sum_{j \in C_k} Q_{j,k} = (Q_{i,k})^* \quad i \in H_k, \quad k = 1, 2, \dots, K$$

$$Q_{i,k} = (Q_{i,k})^* \quad i \in C_k, \quad k = 1, 2, \dots, K \quad (R1)$$

$$(Q_{i,k})^* = \sum_{j \in H} (Q_{j,k})^* + \sum_{n \in S_k} (F_n)^* dh_{kn} \quad k = 1, 2, \dots, K$$

$$(Q_{i,k})^* = \sum_{j \in C} (Q_{j,k})^* + \sum_{n \in H_k} (F_n)^* dh_{kn}$$

$$Q_{i,k} = 0 \quad (i, j) \in E, \quad Q_{i,k} \geq 0, \quad i \in H_k, \quad j \in C_k, \quad k = 1, 2, \dots, K$$

$$(F_n)^* \geq 0 \quad n \in S, \quad (F_n)^* \geq 0 \quad n \in H$$

$$R_{i,0} = R_{i,k} = 0, \quad R_{i,k} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, K = 1, 2, \dots, K, \quad i \in H$$

Debe notarse que en la implementación de este modelo, las variables  $(Q_{i,k})^*$ ,  $(Q_{i,k})^*$ , pueden ser eliminadas con la tercera y cuarta restricciones de igualdad en (R1). Por lo tanto, las variables para este modelo son  $(F_n)^*$ ,  $(F_n)^*$ ,  $Q_{i,k}$ , y  $R_{i,k}$ . Aunque el tamaño actual del modelo de transbordo es dependiente de los datos particulares del problema, es posible calcular los siguientes límites superiores sobre el número de variables y de renglones:

(a) Número máximo de variables =  $NS + NW + (NHP+1)(NCP+2)K + 1$

(b) Número máximo de renglones =  $(NHP + 1)(NCP + 1)K$

donde NHP es el número de corrientes calientes restringidas, y MCP es el número de corrientes frías restringidas. Para el ejemplo de 10 corrientes de proceso, 3 corrientes calientes de servicio, una corriente fría de servicio y un acoplamiento restringido, y con 23 intervalos de temperatura, el tamaño máximo del modelo restringido de transbordo es de 140 variables y 72 renglones. El número actual de variables, sin embargo, será mas bajo, ya que muchas de las variables  $Q_{i,k}$  serán cero, ya sea debido a las asociaciones que están prohibidas o a las condiciones termodinámicas infactibles. Debe notarse, además, que el tamaño del modelo (R1) es mucho menor que el modelo de transporte para acoplamientos restringidos, propuesto por Cerda et al. [4].

### 3.3 EL NUMERO MINIMO DE UNIDADES DE INTERCAMBIO DE CALOR

El objetivo de los modelos previos de transbordo es el de determinar el Costo Mínimo de Corrientes de Servicio y la localización de cualquier "punto estrecho" en una red de recuperación de calor. Sin embargo, debido a que frecuentemente existen muchas redes para ese costo mínimo de las corrientes de servicio, un objetivo deseable es el de obtener, de entre todas esas redes, una que tenga el número mínimo de unidades de intercambio de calor, ya que esto, generalmente corresponderá a una solución óptima o cercana a la óptima.

En este punto, se asume que el costo mínimo de los corrientes de servicio ha sido determinado, con cualquiera de los modelos de transporte (PI) o (RPI). Ya que las velocidades máximas de los corrientes de servicio y sus correspondientes contenidos de calor serán conocidas, las corrientes de servicio pueden ser agregadas a los conjuntos de corrientes del proceso, para definir los conjuntos calientes  $P = \{H, S\}$  y  $Q = \{C, W\}$  de corrientes calientes y frías. Típicamente, en general, la solución óptima de (PI) o (RPI) indicará la existencia de uno o más "puntos estrechos" en la red, en cuyo caso el problema puede ser particionado en subredes, ya que no fluye calor a través de cada "punto estrecho". Mas específicamente, si  $NL = 1$  "puntos estrechos" ocurren, los  $K$  intervalos de temperatura pueden ser particionados en  $NL$  conjuntos de intervalos arriba y abajo de cada "punto estrecho" que define la frontera de las subredes. Los subconjuntos de intervalos de temperatura correspondiente a cada subred  $l$ , serán denotados por  $SN_l, l = 1, 2, \dots, NL$ .

Con el objeto de satisfacer la solución del costo mínimo de las corrientes de servicio, solo a las corrientes que están dentro de cada subred  $l$ , se les deberá permitir intercambiar calor, pues, de otro modo, se deberá transmitir calor a través de los "puntos estrechos", lo cual incrementará el uso de las corrientes de servicio. Por lo tanto, es conveniente denotar como  $H_i \in H$  y  $C_j \in C$  las corrientes calientes y frías presentes en la subred  $l$ . Siguiendo un tratamiento similar al del problema de los acoplamientos restringidos (RPI), los valores residuales de las corrientes calientes  $i \in H_i$  serán representados por  $R_{ik}, k \in SN_l, l = 1, NL$ , mientras que el calor intercambiado entre las corrientes de la subred estará representado por  $Q_{ijk}, i \in H_{ik}, j \in C_{jk}, k \in SN_l$ , donde

$H_{ik} = \{i | i \in H_i, \text{ la corriente } i \text{ está presente en el intervalo } k, k \in SN_l, l = 1, 2, \dots, NL\}$

$C_{jk} = \{j | j \in C_j, \text{ la corriente } j \text{ está presente en el intervalo } k, k \in SN_l\}$  (3.11)

Las variables binarias 0-1,  $Y_{ijk}$ , pueden entonces, ser introducidas para denotar la existencia de un acoplamiento entre las corrientes  $i \in H_{ik}$  y  $j \in C_{jk}$  en la subred  $l$ . Se asume aquí que cada uno de estos acoplamientos permitidos está asociado con una unidad potencial de intercambio de calor. Ya que el total de calor intercambiado entre un par de corrientes, viene dado por la suma de su calor intercambiado a través de los intervalos de la subred, las variables binarias pueden estar relacionadas a las variables  $Q_{ijk}$ , a través de las siguientes desigualdades:

$$\sum_{k \in SN_l} Q_{ijk} - U_{ij} Y_{ijk} \leq 0$$

$i \in H_{ik}, \quad j \in C_{jk}, \quad l = 1, 2, \dots, NL$  (3.12)

donde

$$U_{ij} = \min \left( \sum_{k \in SN_l} (Q_{ik})^M, \sum_{k \in SN_l} (Q_{jk})^M \right) \quad (3.13)$$

corresponde al límite superior en la cantidad de calor que puede ser intercambiado. Note que cuando la variable binaria  $Y_{ijk}$  en (P2) toma un valor de cero, ningún calor puede ser intercambiado, pero cuando vale uno, cualquier cantidad de calor que no exceda  $U_{ijk}$  puede ser intercambiado. El problema de minimizar el número de unidades en la red de intercambio de calor puede ser formulado, entonces, como el siguiente problema de programación lineal:

$$\text{Minimizar } Z = \sum_{i \in H_1} \sum_{j \in C_1} \sum_{k \in SN_1} e_{ijk} Y_{ijk}$$

sujeta a

(P2)

$$R_{ik} - R_{i,k-1} + \sum_{j \in C_{1k}} Q_{ijk} = (Q_{ik})^* \quad i \in H_{1k}, \quad k \in SN_1, \quad i = 1, 2, \dots, NL$$

$$\sum_{i \in H_{1k}} Q_{ijk} = (Q_{jk})^* \quad j \in C_{1k}$$

$$\sum_{k \in SN_1} Q_{ijk} - U_{ijk} Y_{ijk} \leq 0 \quad i \in H_{1k}, \quad j \in C_{1k}, \quad k = 1, 2, \dots, NL$$

$$\begin{aligned} R_{ik} &\geq 0 & i \in H_{1k}, & \quad k \in SN_1 \\ Q_{ijk} &\geq 0 & i \in H_{1k}, & \quad j \in C_{1k}, \quad k = 1, 2, \dots, NL \end{aligned}$$

$$Y_{ijk} = 0, 1, \quad i \in H_{1k}, \quad j \in C_{1k}, \quad k = 1, 2, \dots, NL$$

Note que en la función objetivo (P2), cada variable binaria  $Y_{ijk}$  está multiplicada por el factor de peso  $e_{ijk}$  que toma en cuenta el costo o la preferencia por esa asociación entre las corrientes. Ya que los coeficientes de costos son difíciles de obtener, debido a la falta de linealidad que involucra el manejo de las temperaturas, es más práctico pensar en estos factores de peso  $e_{ijk}$  como en coeficientes que reflejen las preferencias de las asociaciones. Si no existe ninguna preferencia particular, todos los factores de peso pueden igualarse a uno, en cuyo caso, el problema (P2) proveerá una solución con el número mínimo de unidades. Sin embargo, ya que muy frecuentemente existirá más de una solución, el objetivo de seleccionar los acoplamientos preferidos, se volverá importante.

Esto es particularmente cierto cuando, para los varios pares de acoplamientos, existen diferencias significativas en los coeficientes de transferencia de calor, en los materiales de construcción o cuando los pares de corrientes están localizados en diferentes secciones de la planta. En dichos casos, los factores de peso pueden ser derivados de tal manera que la solución óptima en (P2), exhiba siempre el mínimo número posible de intercambiadores de calor, pero si existe alguna otra opción, se seleccionarán los acoplamientos de corrientes preferidos. Debe notarse también, que los acoplamientos prohibidos pueden ser manejados fácilmente en (P2), haciendo las variables  $Y_{ijk} = 0$ ,  $(i, j) \in P$ ,  $k = 1, 2, \dots, NL$ . Claramente, estos acoplamientos prohibidos deben ser los mismos que se especificaron en el modelo (RP1).

El problema MILP dado en (P2) puede ser resuelto, ya sea en su forma completa, o de otra manera, puede ser descompuesto en NL

subproblemas (subredes) más pequeñas para cada subred. Y en cada caso se usarán códigos estables de equis axion. E. Aitchison, G. S. Bond, G. B. Darda y H. S. Dornberg (1974) desarrollaron también un modelo MIP basado en el modelo de transporte para resolver las redes con el número mínimo de unidades, pero ellos propusieron usar algunas relaciones LP para evitar resolver el problema original al todo entera.

### 3.3.1 Los factores de peso para los acoplamientos preferidos

En la formulación del modelo de transporte (PT) para minimizar el número de unidades de interconexión de color, los factores de peso  $\tau_{ij}$  fueron incluidos en la función objetivo para denotar la preferencia o el nivel de prioridad del acoplamiento de la corriente caliente  $i$  y de la corriente fría  $j$  en la subred  $l$ . Estos pesos pueden ser seleccionados para obtener redes con el número mínimo de unidades, pero contentando los acoplamientos entre corrientes con la prioridad más alta. Este procedimiento es útil en el caso donde existen muchas redes con el número mínimo de unidades.

Primamente, se asume que el diseñador especifica un nivel diferente de prioridad  $p$  a cada triplete  $(i, j, l)$ ,  $i \in M_l$ ,  $j \in C_l$ ,  $l=1, 2, \dots, NL$ , donde  $p=1, 2, \dots, N$  y  $N$  es la cardinalidad de los tripletes. El valor de  $p=1$  denotará la prioridad más alta, mientras que el valor de  $p=N$  corresponderá al nivel más bajo de prioridad. Por lo tanto,  $p$  representa un mapeo uno a uno de cada triplete  $(i, j, l)$ , y por lo tanto, uno puede definir los pesos  $\tau_{ij}$  en orden decreciente de su nivel de prioridad, como

$$\tau_{ij} = \tau_{p(i,j,l)} = \delta_{ij} \quad p = 1, 2, \dots, N \quad (3.14)$$

Con el objeto de obtener los pesos  $\tau_{ij}$  dadas prioridades especificadas  $p$ , para cada triplete individual, se asume la siguiente forma funcional

$$\tau_{ij} = \beta + \alpha/N \quad p=1, 2, \dots, N \quad (3.15)$$

El parámetro  $\beta$  en (3.15) debe ser escogido de tal manera que pueda asegurar que la función objetivo ponderada en (P2) garantizará la obtención de redes que contengan asociaciones con la máxima prioridad, pero con el menor número posible de acoplamientos. Esto se puede obtener, actualmente, haciendo que la suma de los  $\alpha+1$  pesos de prioridad más alta sean más grande que la suma de los  $\alpha$  pesos de prioridad más baja para cualquier  $q < N$ , esto es

$$\sum_{p=1}^{q+1} \tau_{ij} > \sum_{p=q+1}^N \tau_{ij} \quad \text{para } q = 1, 2, \dots, N-2 \quad (3.16)$$

Ya que  $\tau_{ij} = \beta + \alpha/N$

$$\sum_{p=1}^q \tau_{ij} = (q)(\alpha+1)/N > (q)(\alpha)/N = \sum_{p=q+1}^N \tau_{ij} \quad (3.17)$$

sustituyendo (3.15) y (3.17) en (3.16), la desigualdad puede ser reescrita como

$$(q+1)Q + (q+1)(q+2)Q^2 + \dots + (q+1)Q^{N-1} = (q+1)Q \frac{1-Q^N}{1-Q} = (q+1)Q \frac{1-Q^N}{1-Q} \quad (3.18)$$

que en turno puede ser simplificada, para obtener:

$$\beta > (q+1)Q \frac{1-Q^N}{1-Q} = 1/Q^N \quad (3.19)$$

ya que la ecuación (3.19) se maximiza cuando  $q = (N-1)/2$ , la desigualdad (3.19) dará, para todas las  $q$ ,  $q = 1, 2, \dots, N-1$  si:

$$\beta > 1/Q = 1/2 = 43/98 \quad (3.20)$$

Por lo tanto, existe una selección de  $\beta$  que satisface (3.20) y que garantiza que los pesos dados en (3.15) producirán redes con el número mínimo de unidades, pero con los acoplamientos más preferibles. Deberá notarse que si  $N$  es demasiado grande, la selección propuesta de  $\beta$  debe ser más grande que la necesaria ya que es suficiente que (3.19) se cumpla para un límite superior válido  $q^u$  sobre el número de acoplamientos. Ya que el valor de la ecuación se incrementa monótonicamente en  $q$ , para  $q \leq (N-1)/2$ , la selección de  $q^u$  está justificada si caso debajo de este valor. También, ya que el valor de la ecuación en (3.20) es más pequeño que  $N/4$ , una selección práctica para una  $N$  grande viene dada por:

$$\beta > \min\{q^u N, q^u = 1/2N, N/4\} \quad (3.21)$$

En el caso de que los niveles de prioridad sean asignados a grupos de acoplamientos y no a acoplamientos individuales, el procedimiento debe ser modificado un poco. Para este caso, suponga que los  $N$  acoplamientos están particionados en  $NG$  grupos, donde cada grupo  $G_p = \{(i,j,1) \mid p = (i,j,1)\}$ , tiene cardinalidad  $c_p$  y nivel de prioridad  $p = 1, 2, \dots, NG$ . Si se da un límite superior  $q^u$ , es conveniente definir los índices  $r$  y  $t$  como sigue:

(a)  $r$  es el entero más grande tal que

$$\sum_{p=1}^r c_p \leq q^u + 1$$

(b)  $t$  es el entero más pequeño tal que

$$\sum_{p=1}^t c_p \leq q^u$$

Suponiendo que los pesos  $\tau_p$  vienen dados por:

$$\tau_p = \beta + p/NG \quad p=1, 2, \dots, NG \quad (3.22)$$

y siguiendo un razonamiento similar al desarrollado en la desigualdad (3.16), el parámetro  $\beta$  que debe ser escogido para garantizar el número mínimo de unidades con los acoplamientos más preferibles, viene dado por:

$$\beta > (1/NG) \left[ \sum_{p=1}^r c_p + (q^u - \sum_{p=1}^t c_p) (t-1) \right]$$





$$-\sum_{j \in K} \sum_{d \in D} f_{jd}(C_d)_{j,d} + \sum_{n \in N} (P_n)_{n,H} - R_k = 0$$

$$k = 1, 2, \dots, K$$

$$(P_n)_{n,S} \geq 0, \quad n \in S, \quad (P_n)_{n,H} \geq 0, \quad n \in H$$

$$R_0 = R_k = 0, \quad R_k \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, K-1$$

La formulación anterior es un modelo de programación lineal y puede ser incluido en un modelo mixto-entero MILP para el procesamiento químico de la planta, agregando la función objetivo y el conjunto de restricciones de (P3). También es posible agregar un costo anual de inversión para todos los intercambiadores de calor, considerando que este costo será proporcional al calor total transferido dentro de la red. Claramente, el modelo para los complementos restringidos, puede ser derivado análogamente al de (P3).

# CAPITULO 4

## PRESENTACION DE EJEMPLOS NUMERICOS Y ANALISIS DE RESULTADOS

La aplicación de los modelos de transbordo presentados en este trabajo, se muestra en los siguientes ejemplos numéricos.

### 4.1 PROBLEMA No. 1: Ejemplo 4SP1

El primer problema tiene dos corrientes de proceso frías y dos calientes, y aparece en la literatura como el problema 4SP1 [3,15,18]. Los datos para el problema 1 se muestran en la Tabla 4.1, y las variables asignadas a cada corriente en la Tabla 4.2. El acercamiento mínimo de temperatura requerido en todos los puntos de la red, está especificado a 10°C. En la ausencia de acoplamientos restringidos, el consumo mínimo de corrientes de servicio para el problema 4SP1 se determina usando el modelo de transbordo (P1).

TABLA 4.1 Datos para el problema 4SP1

Corrientes	FCp (kW/°C)	T <sup>o</sup> (°C)	T <sup>*</sup> (°C)	Q (kW)
C1 (Fría)	7.62	60	160	+762.00
H2 (Caliente)	8.79	160	93	-598.93
C3 (Fría)	6.08	116	260	+875.52
H4 (Caliente)	10.55	249	138	-1171.05
S (Vapor)		270	270	
CW (Agua de enfriamiento)		38	82	

TABLA 4.2 Clasificación de corrientes

i	Calientes	Frías	j
1	S	CW	1
2	H2	C1	2
3	H4	C3	3

En la Tabla 4.3 se muestra la distribución de corrientes dentro de los intervalos obtenidos de temperatura, y en las Tablas 4.4 y 4.5, los flujos positivos y negativos de calor de cada corriente dentro de cada intervalo.

TABLE 4.3 Intervalos de temperaturas para el problema 4SP1

Intervalo k	C1 j=2	H2 i=2	C3 j=3	H4 i=3	S i=1	CW j=1	T <sup>h</sup> caliente	T <sup>h</sup> -dT <sub>min</sub> fria
1			250 239		270 270		270	260
2	160 150		239 150	249 160			249	239
3	150 116	160 126	150 116	160 138			150	150
4	116 60	126 93				22 60	126	116
5						60 38	70	60
							48	38

TABLE 4.4 Flujo positivo (+) de calor/corriente/intervalo

k	j	Corriente	FCp	dT	(Q <sub>jk</sub> ) <sup>h</sup>	F <sup>s</sup> (dH <sup>h</sup> ) <sub>2700</sub>
1	3	S			(Q <sub>13</sub> ) <sup>h</sup>	
2	3	H4	10.55	89	(Q <sub>23</sub> ) <sup>h</sup>	938.95
3	2	H2	8.79	34	(Q <sub>32</sub> ) <sup>h</sup>	298.86
3	3	H4	10.55	22	(Q <sub>33</sub> ) <sup>h</sup>	232.1
4	2	H2	8.79	33	(Q <sub>42</sub> ) <sup>h</sup>	290.07

TABLE 4.5 Flujo negativo (-) de calor/corriente/intervalo

k	j	Corriente	FCp	dT	(Q <sub>jk</sub> ) <sup>c</sup>
1	3	C3	6.08	21	(Q <sub>13</sub> ) <sup>c</sup>
2	2	C1	7.62	10	(Q <sub>22</sub> ) <sup>c</sup>
3	3	C3	6.08	89	(Q <sub>33</sub> ) <sup>c</sup>
3	2	C1	7.62	34	(Q <sub>32</sub> ) <sup>c</sup>
3	3	C3	6.08	34	(Q <sub>33</sub> ) <sup>c</sup>
4	1	CW		22	(Q <sub>12</sub> ) <sup>c</sup>
4	2	C1	7.62	56	(Q <sub>24</sub> ) <sup>c</sup>
5	1	CW		22	(Q <sub>12</sub> ) <sup>c</sup>

k Balances de Energia por Intervalo

$$\begin{aligned}
 1 \quad R_0 - R_1 + (Q_{13})^h - (Q_{13})^c &= 0 \\
 2 \quad R_1 - R_2 + (Q_{22})^h - (Q_{22})^c - (Q_{23})^c &= 0 \\
 3 \quad R_2 - R_3 + (Q_{32})^h + (Q_{33})^h - (Q_{32})^c - (Q_{33})^c &= 0 \\
 4 \quad R_3 - R_4 + (Q_{24})^h - (Q_{14})^c - (Q_{24})^c &= 0 \\
 5 \quad R_4 - R_5 - (Q_{12})^c &= 0
 \end{aligned}$$

Recordando que los  $R_i$  son los calores residuales que (+ $R_i$ ) entran y (- $R_i$ ) salen del intervalo, por lo que  $R_1 = R_4 = 0$ , y sustituyendo los valores de las tablas 4.4 y 4.5, respecto a la entrada y salida de calor para cada intervalo, las ecuaciones de Balance de Energía por intervalo, constituirán las restricciones del problema lineal (P1), y su función objetivo vendrá dada por:

$$\text{Minimizar } (Q_{11})^H + (Q_{14})^C + (Q_{15})^C$$

que corresponde a la minimización del calor proporcionado por las corrientes de servicio presentes en el problema, ya que  $(Q_{11})^H$  corresponde al calor proporcionado por la condensación del vapor en el intervalo 1, y  $(Q_{14})^C$  y  $(Q_{15})^C$ , al calor recibido por el agua de enfriamiento en los intervalos 4 y 5. Dichos calores son proporcionales al flujo masico de las corrientes de servicio. Ahora, sustituyendo valores en las restricciones, el problema lineal (P1), puede escribirse como:

$$\text{Minimizar } (Q_{11})^H + (Q_{14})^C + (Q_{15})^C$$

sujeta a

$$\begin{aligned} - R_1 + (Q_{11})^H &= 127.68 \\ - R_1 + R_2 &= 321.63 \\ - R_2 + R_3 &= 65.16 \\ + R_3 - R_4 - (Q_{14})^C &= 136.65 \\ + R_4 - (Q_{15})^C &= 0 \end{aligned} \tag{P1}$$

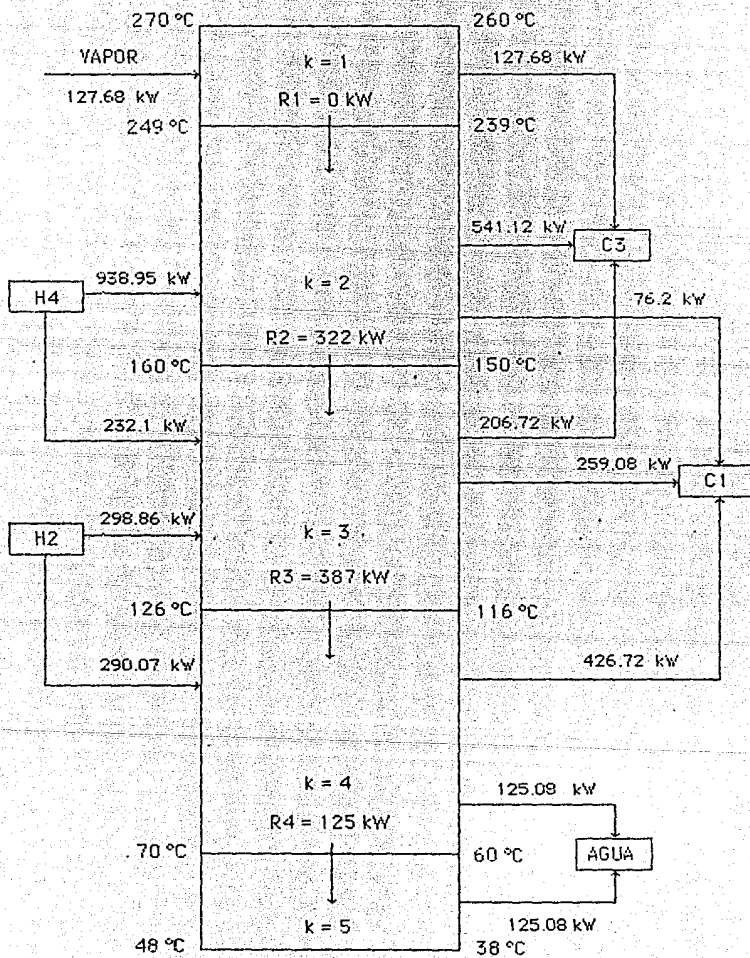
$$R_1, R_2, R_3, R_4, (Q_{11})^H, (Q_{14})^C, (Q_{15})^C \geq 0$$

Introduciendo este problema al paquete computacional LINDO en una computadora GAMMA XT (procesador 8088-1), el resultado se obtuvo en una iteración. El calor mínimo requerido es de 127.68 MW  $[(Q_{11})^H]$ , y el de enfriamiento mínimo es de 250.16 MW  $[(Q_{14})^C + (Q_{15})^C]$ . El "punto estrecho" para este problema, ocurre entre el primero y el segundo intervalo de temperatura (249-239°C), donde el calor residual  $R_1$  es cero. Los valores de las variables de la solución óptima son los siguientes:

Valor de la función objetivo = 377.84

VARIABLE	VALOR
$(Q_{11})^H$	127.68
$(Q_{14})^C$	125.08
$(Q_{15})^C$	125.08
$R_1$	0.
$R_2$	321.63
$R_3$	386.79
$R_4$	125.08

Fig. 4.1 Resultado del Modelo (P1) para el Ejemplo 4SP1



Los resultados obtenidos concuerdan con los reportados por Cerda [3] por Raboulias & Grossman [19]. Como puede observarse,  $R_1=0$ , por lo que existe un "punto estrecho" entre el intervalo 1 y 2, que corresponde al intervalo de temperaturas (237°C - 249°C). La representación esquemática de los intervalos de temperatura y de los flujos positivos y negativos de calor de cada corriente en cada intervalo, tomando en cuenta estos resultados, se encuentra en la Fig. 4.1.

Después, el modelo MILP (P2) es usado con el objeto de obtener el número mínimo de unidades de intercambio de calor para el problema 4SP1. Ya que existe un "punto estrecho", los intervalos de temperatura pueden dividirse en dos subredes que se trabajan independientemente para estudiar los intercambios de calor entre cada par de corrientes. En la Tabla 4.6 (a) se muestran los nombres de las variables continuas  $Q_{ijk}$  que corresponden a los intercambios de calor entre las corrientes frías y calientes, presentes en ese intervalo, y en la Tabla 4.6 (b), se muestran las variables correspondientes al intercambio de calor entre los calores residuales de las corrientes calientes que ya no están presentes en el intervalo y las corrientes frías que sí lo están (Ver Tabla 4.3).

TABLA 4.6 Variables de intercambio de calor entre corrientes

(a) Presentes en el intervalo

l	k	Corrientes i	j	$Q_{ijk}$
1	1	H - C3	1 3	$Q_{131}$
2	2	H4 - C1	2 2	$Q_{222}$
		H4 - C3	2 3	$Q_{232}$
3	3	H2 - C1	3 3	$Q_{333}$
		H2 - C3	3 3	$Q_{333}$
		H4 - C1	3 2	$Q_{323}$
		H4 - C3	3 3	$Q_{333}$
4	4	H2 - CW	2 1	$Q_{214}$
		H2 - C1	2 2	$Q_{224}$

(b) Con los calores residuales

l	k	Corrientes i	j	$Q_{ijk}$
1	4	H4 - CW	3 1	$Q_{314}$
		H4 - C1	3 2	$Q_{324}$
5	5	H2 - CW	2 1	$Q_{215}$
		H4 - CW	3 1	$Q_{315}$

En la Tabla 4.7 se presentan los nombres de las variables discretas binarias  $Y_{ijl}$ , que corresponden a una unidad de intercambio de calor entre la corriente caliente  $i$  y la corriente fría  $j$  en la subred  $l$ , con su respectivo valor de  $U_{ij}$ , que sirve como límite superior a la cantidad total de calor que pueden intercambiar cada par de corriente en cada subred, con sus ecuaciones respectivas. Posteriormente se muestran los balances de energía para las corrientes calientes y para las frías, por intervalo, con  $R_{10} = R_{25} = R_{35} = R_{35} = 0$ , ya que no puede venir calor anterior ni posterior a los intervalos, y tampoco existen los calores residuales anteriores a la primera aparición de cada una de las corrientes calientes en ese intervalo.

TABLA 4.7 Ecuaciones de acotamiento al intercambio de calor

$i$	$j$	$Y_{i,j}$	$(Q_{i,j})^H$	$(Q_{i,j})^C$	$U_{i,j}$	Equación
1	1	$Y_{1,1}$	127.68	127.68	$U_{1,1}$	$Q_{1,1} = 127.68 Y_{1,1} \leq 0$
2	1	$Y_{2,1}$	588.93	259.16	$U_{2,1}$	$Q_{2,1} + Q_{2,5} = 259.16 Y_{2,1} = 0$
2	2	$Y_{2,2}$	588.93	762.	$U_{2,2}$	$Q_{2,2} + Q_{2,3} = 588.93 Y_{2,2} = 0$
2	3	$Y_{2,3}$	588.93	747.84	$U_{2,3}$	$Q_{2,3} = 588.93 Y_{2,3} = 0$
3	1	$Y_{3,1}$	1171.05	259.16	$U_{3,1}$	$Q_{3,1} + Q_{3,5} = 259.16 Y_{3,1} = 0$
3	2	$Y_{3,2}$	1171.05	762.	$U_{3,2}$	$Q_{3,2} + Q_{3,3} + Q_{3,4} = 762 Y_{3,2} = 0$
3	3	$Y_{3,3}$	1171.05	747.84	$U_{3,3}$	$Q_{3,3} + Q_{3,4} = 747.84 Y_{3,3} = 0$

Balances de Energía/intervalo/corriente/subred

(a) Para las corrientes calientes

$i$	$k$	$j$	Equación
1	1	1	$R_{11} - Q_{1,1} = 127.68$
2	2	3	$R_{23} - R_{2,1} + Q_{2,2} + Q_{2,3} = (Q_{2,3})^H = 938.95$
3	2	3	$R_{33} - R_{3,2} + Q_{2,2} + Q_{2,3} = (Q_{2,3})^H = 232.1$
4	1	3	$R_{43} - R_{4,2} + Q_{2,2} + Q_{2,3} = (Q_{2,3})^H = 298.86$
4	2	3	$R_{43} - R_{4,1} + Q_{2,1} + Q_{2,2} = (Q_{2,2})^H = 290.07$
5	2	3	$R_{53} - R_{5,1} + Q_{2,1} = 0$
5	3	3	$R_{53} - R_{5,2} + Q_{2,2} = 0$

(b) Para las corrientes frías

$i$	$k$	$j$	Equación
1	1	3	$Q_{1,3} = (Q_{1,3})^C = 127.68$
2	2	2	$Q_{2,2} = (Q_{2,2})^C = 76.2$
3	2	3	$Q_{3,3} = (Q_{3,3})^C = 541.12$
3	2	3	$Q_{2,2} + Q_{2,3} = (Q_{2,3})^C = 259.08$
3	3	3	$Q_{2,2} + Q_{2,3} = (Q_{2,3})^C = 206.72$
4	1	3	$Q_{2,1} + Q_{2,5} = (Q_{1,4})^C = 125.08$
4	2	3	$Q_{2,2} + Q_{2,3} = (Q_{2,4})^C = 426.72$
5	1	3	$Q_{2,1} + Q_{2,5} = (Q_{1,5})^C = 125.08$

Las restricciones del modelo MILP están constituidas por las Ecuaciones de Balance de Energía, para las corrientes calientes y para las corrientes frías, y por las ecuaciones que acotan la cantidad de intercambio de calor para cada par de corrientes dentro de cada subred. La función objetivo será la suma de las 7 variables binarias que corresponden a unidades de transferencia de calor entre corrientes (intercambiadores).

Finalmente, el modelo de transporte MILP para este problema ASP1, queda de la siguiente manera:



Minimizar  $Y_{131} + Y_{212} + Y_{222} + Y_{322} + Y_{312} + Y_{322} + Y_{332}$

suje to a

(P2)

- $R_{11} + Q_{131} = 127.68$
- $R_{22} - R_{21} + Q_{222} + Q_{223} = 708.93$
- $R_{23} - R_{22} + Q_{223} + Q_{224} = 298.86$
- $R_{33} - R_{32} + Q_{322} + Q_{323} = 232.1$
- $R_{34} - R_{33} + Q_{324} + Q_{314} = 290.07$
- $R_{34} - R_{33} + Q_{314} + Q_{324} = 0$
- $-R_{24} + Q_{215} = 0$
- $-R_{34} + Q_{315} = 0$
- $Q_{131} = 127.68$
- $Q_{222} = 541.12$
- $Q_{223} = 76.2$
- $Q_{223} + Q_{224} = 206.72$
- $Q_{223} + Q_{224} = 259.08$
- $Q_{214} + Q_{215} = 125.08$
- $Q_{224} + Q_{223} = 426.72$
- $Q_{215} + Q_{214} = 125.08$
- $Q_{131} - 127.68 \quad Y_{131} \leq 0$
- $Q_{214} + Q_{215} - 250.16 \quad Y_{212} \leq 0$
- $Q_{223} + Q_{224} - 588.93 \quad Y_{222} \leq 0$
- $Q_{223} - 588.93 \quad Y_{222} \leq 0$
- $Q_{214} + Q_{215} - 250.16 \quad Y_{312} \leq 0$
- $Q_{222} + Q_{223} + Q_{224} - 762 \quad Y_{322} \leq 0$
- $Q_{222} + Q_{223} - 747.64 \quad Y_{322} \leq 0$

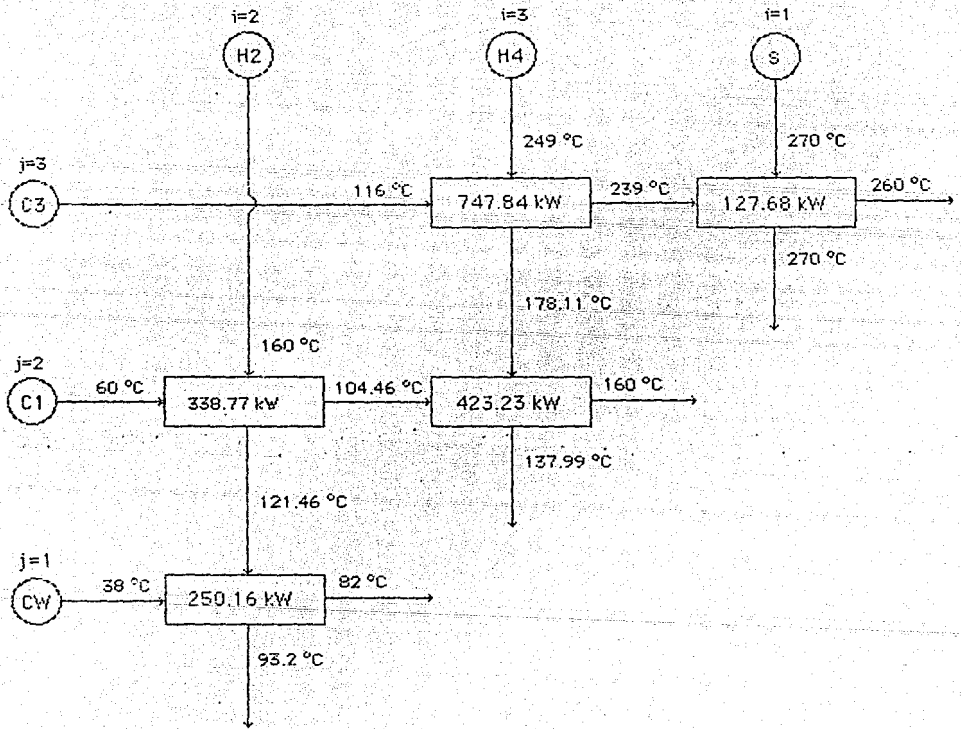
$Y_{131} = 0, 1$        $Q_{131}, Q_{214}, Q_{215}, Q_{222}, Q_{223}, Q_{224}, Q_{223}, Q_{224}, Q_{214},$   
 $Q_{215}, Q_{222}, Q_{223}, Q_{224}, Q_{223}, Q_{224}, Q_{223}, Q_{224}, R_{11},$   
 $R_{22}, R_{21}, R_{23}, R_{22}, R_{22}, R_{22}, R_{22}, R_{22} = 0$   
 $1 = 1, 2$

Este modelo de transbordo MILP tiene 7 variables binarias, 21 variables continuas, 30 restricciones, y la solución óptima fue obtenida con el código de programa LINDO en 24 iteraciones para el problema lineal y 38 para el mixto entero, en una computadora GAMMA XT (Procesador 8088-1). En la Fig. 4.2 se muestra la red de recuperación de calor que tiene el número mínimo de unidades (5 unidades). El número mínimo de unidades, es idéntica a la solución reportada por Cerda[3] y por Papoulias & Grossman [19]. Los valores de las variables de la solución óptima son los siguientes:

Valor de la función objetivo = 5

Variables Binarias		Flujos de calor		Calores Residuales	
$Y_{131}$	1	$Q_{131}$	127.68	$R_{11}$	0.
$Y_{212}$	1	$Q_{214}$	125.08	$R_{21}$	0.
$Y_{222}$	1	$Q_{215}$	125.08	$R_{22}$	321.65
$Y_{222}$	0	$Q_{223}$	259.08	$R_{22}$	0.
$Y_{312}$	0	$Q_{224}$	79.69	$R_{23}$	39.78
$Y_{322}$	1	$Q_{223}$	0.	$R_{24}$	127.68
$Y_{322}$	1	$Q_{214}$	0.	$R_{24}$	0.

Fig. 4.2 Red de Recuperación Óptima de Calor para el Ejemplo 4SP1



Q <sub>12</sub>	0.
Q <sub>21</sub>	247.03
Q <sub>32</sub>	541.12
Q <sub>33</sub>	206.72

Para obtener los valores de la cantidad de calor intercambiada entre dos corrientes, sumamos el calor intercambiado entre esas dos corrientes, en cada intervalo de la subred. En Tabla 4.8 (a) se muestra la forma como se obtuvieron dichos valores. Un valor de  $Y_{ij}$  igual a cero significa que no debe existir unidad de intercambio de calor entre esas dos corrientes, y por lo tanto el calor debe ser cero. En la Tabla 4.8 (b) se muestran los calores residuales. Notese, además, que la suma de los calores residuales  $R_{ik}$ , debe ser igual al calor residual  $R_i$ , para toda corriente caliente  $i$  presente en el intervalo, y estos valores fueron obtenidos en el modelo lineal (PI).

TABLA 4.8 Composición de Calores

(a) Entre corrientes					(b) Residuales				
i	j	l	$Y_{ijl}$	$Q_{ijl}$	k	$R_{ik}$	$R_i$	$R_k$	$R_k$
1	3	1	1	127.681	1	$R_{11} + R_{21}$	$R_1$	0.	
2	1	2	1	$Q_{212} + Q_{213}$	2	$R_{22} + R_{23}$	$R_2$	1321.65	
2	2	2	1	$Q_{222} + Q_{223}$	3	$R_{32} + R_{33}$	$R_3$	1386.81	
2	3	2	0	$Q_{232}$	4	$R_{42} + R_{43}$	$R_4$	125.08	
3	1	2	0	$Q_{312} + Q_{313}$				0.	
3	2	2	1	$Q_{322} + Q_{323} + Q_{324}$				1423.231	
3	3	2	1	$Q_{332} + Q_{333}$				1747.641	

Una vez que se tienen los calores que se intercambian entre las corrientes de proceso y de servicio, es necesario obtener el incremento de temperaturas correspondiente, para poder calcular la temperatura de entrada y la de salida de cada corriente, en cada unidad de intercambio de calor. Para obtener dichos valores se aplicará la fórmula  $Q = FCp\Delta T$ , se tomarán los FCp de la Tabla de datos, y tomando las temperaturas de entrada de cada corriente, se le irán aplicando los  $\Delta T$ 's correspondientes. Estos valores se muestran en la Tabla 4.9. Con todos estos datos, se procederá a la construcción del diagrama que se muestra en la Fig. 4.2 y que contiene la red de recuperación óptima de calor, propuesta para el Problema No. 1.

TABLE 4.9 Temperaturas de Entrada y Salida de los Intercambiadores

i	j	l	$Q_{ijl}$	$(FCp)_i$	$(\Delta T)_i$	$(T^1)_i$	$(T^2)_i$	$(FCp)_j$	$(\Delta T)_j$	$(T^1)_j$	$(T^2)_j$
1	3	1	127.681	0.	1270.	1270.	16.081	21.	1239.	1260.	1
2	1	2	2470.161	8.791	28.461	121.461	93.2	15.691	44.	138.	182.

2	0	1338.77	8.79	30.54	160.	1121.46	17.62	44.46	60.	1104.46
3	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
3	2	0	1423.27	10.55	140.12	1178.11	137.99	17.62	65.54	1104.46
3	3	2	1747.84	10.55	170.89	1249.	1178.11	16.08	121.	1168.11

4.2 PROBLEMA No. 2: Ejemplo 4SP1 con acoplamientos restringidos

El segundo ejemplo numérico es, nuevamente, el problema 4SP1, pero en este caso, el acoplamiento entre la corriente fría C1 y la corriente caliente H2 está prohibido. El consumo mínimo de corrientes de servicio para este problema, se determina usando el modelo restringido de transbordó (RF1). De la Tabla 4.1 a la Tabla 4.5 se muestran los datos, la asignación de variables a las corrientes, la distribución de corrientes dentro de los intervalos de temperatura, y los flujos positivos y negativos de calor de cada corriente dentro de cada intervalo. Todos estos valores son los mismos que los del Problema No. 1.

Para construir el modelo (SP1) restringido lineal, se tomarán en cuenta las variables de la Tabla 4.6 y los balances de energía del Problema MILP No. 1, los cuales serán iguales para este problema, con la excepción de que los valores  $Q_{223} = Q_{224} = 0$ . También deberán agregarse los balances de energía correspondientes a los intercambios de calor con los calores residuales de la corriente S, ya que en el ejemplo anterior no se pusieron por la existencia de un "punto estrecho" en el paso del primero al segundo intervalo. En la Tabla 4.10 se muestran las variables de intercambio de calor residual de la corriente S, y posteriormente los balances de energía, tomando en cuenta estos calores residuales y los acoplamientos prohibidos. Con dichas ecuaciones se formará el conjunto de restricciones del problema lineal restringido (SP1).

TABLA 4.10 Variables de intercambio de calor residual de la corriente S con las corrientes frías presentes en los intervalos

k	Corrientes i	j	$Q_{ijk}$
2	S - C1	1 2	$Q_{122}$
	S - C3	1 3	$Q_{132}$
3	S - C1	1 2	$Q_{123}$
	S - C3	1 3	$Q_{133}$
4	S - CW	1 1	$Q_{114}$
	S - C1	1 2	$Q_{124}$
5	S - CW	1 1	$Q_{115}$

Balances de Energía/intervalo/corriente

(a) Para las corrientes calientes

k i

$$\begin{array}{ll}
 1 & 1 \quad R_{11} - Q_{131} = (Q_{11})^H = 0 \\
 2 & 1 \quad R_{12} - R_{11} + Q_{122} + Q_{132} = 0 \\
 3 & 3 \quad R_{32} - R_{31} + Q_{322} + Q_{332} = (Q_{32})^H = 938.95 \\
 3 & 1 \quad R_{13} - R_{12} + Q_{123} + Q_{133} = 0 \\
 3 & 2 \quad R_{23} - R_{22} + Q_{233} = (Q_{23})^H = 232.1 \\
 3 & 3 \quad R_{33} - R_{32} + Q_{333} + Q_{353} = (Q_{33})^H = 298.86 \\
 4 & 1 \quad R_{14} - R_{13} + Q_{124} + Q_{114} = 0 \\
 4 & 2 \quad R_{24} - R_{23} + Q_{214} = (Q_{24})^H = 290.07 \\
 4 & 3 \quad R_{34} - R_{33} + Q_{324} + Q_{314} = 0 \\
 5 & 1 \quad -R_{14} + Q_{115} = 0 \\
 5 & 2 \quad -R_{24} + Q_{215} = 0 \\
 5 & 3 \quad -R_{34} + Q_{315} = 0
 \end{array}$$

(b) Para las corrientes frías

k j

$$\begin{array}{ll}
 1 & 0 \quad Q_{131} = (Q_{31})^C = 127.68 \\
 2 & 2 \quad Q_{122} + Q_{322} = (Q_{22})^C = 76.2 \\
 3 & 3 \quad Q_{132} + Q_{332} = (Q_{32})^C = 541.12 \\
 3 & 0 \quad Q_{123} + Q_{323} = (Q_{23})^C = 259.08 \\
 3 & 0 \quad Q_{133} + Q_{333} + Q_{353} = (Q_{33})^C = 206.72 \\
 4 & 1 \quad Q_{114} + Q_{214} + Q_{314} = (Q_{14})^C = 0 \\
 4 & 2 \quad Q_{124} + Q_{324} = (Q_{24})^C = 426.72 \\
 5 & 1 \quad Q_{115} + Q_{215} + Q_{315} = (Q_{15})^C = 0
 \end{array}$$

Finalmente, el problema de transbordo lineal restringido (SP1), para este problema es:

$$\text{Minimizar } (Q_{11})^H + (Q_{14})^C + (Q_{15})^C$$

sujeto a

(SP1)

$$\begin{array}{ll}
 R_{11} + Q_{131} - (Q_{11})^H = 0 \\
 R_{12} - R_{11} + Q_{122} + Q_{132} = 0 \\
 R_{32} - R_{31} + Q_{322} + Q_{332} = 938.95 \\
 R_{13} - R_{12} + Q_{123} + Q_{133} = 0 \\
 R_{23} - R_{22} + Q_{233} = 298.86 \\
 R_{33} - R_{32} + Q_{333} + Q_{353} = 232.1 \\
 R_{14} - R_{13} + Q_{114} + Q_{124} = 0 \\
 R_{24} - R_{23} + Q_{214} = 290.07 \\
 R_{34} - R_{33} + Q_{314} + Q_{324} = 0 \\
 -R_{14} + Q_{115} = 0 \\
 -R_{24} + Q_{215} = 0 \\
 -R_{34} + Q_{315} = 0 \\
 Q_{131} = 127.68 \\
 Q_{122} + Q_{322} = 76.2 \\
 Q_{132} + Q_{332} = 541.12 \\
 Q_{123} + Q_{323} = 259.08 \\
 Q_{133} + Q_{333} + Q_{353} = 206.72 \\
 Q_{114} + Q_{214} + Q_{314} - (Q_{14})^C = 0 \\
 Q_{124} + Q_{324} = 426.72
 \end{array}$$

$$Q_{115} + Q_{215} + Q_{315} - (Q_{14})^C = 0$$

$$\text{con } R_{21} = R_{22} = 0$$

$Q_{121}, Q_{122}, Q_{322}, Q_{123}, Q_{323}, Q_{124}, Q_{324}, Q_{115},$   
 $Q_{133}, Q_{333}, Q_{114}, Q_{314}, Q_{114}, Q_{124}, Q_{314}, Q_{115},$   
 $(Q_{14})^C, (Q_{15})^C, (Q_{11})^H, R_{11}, R_{12}, R_{22}, R_{31}, R_{13}, R_{23},$   
 $R_{22}, R_{33}, R_{14}, R_{13}, R_{24}, R_{33}, R_{34} \leq 0$

El problema de transbordo SP1 tiene 28 variables continuas, 24 restricciones, y la solución óptima fué obtenida con el código de programa LINDO en 18 iteraciones en una computadora GAMMA XT (Procesador BOBB-1). El calor mínimo requerido es de 259.75 kW y el enfriamiento mínimo necesario es de 382.21, que son valores idénticos a los reportados por Cerdas[3] y por Papoulias & Grossman [19]. En la Fig. 4.3 se muestra el diagrama de la solución óptima. Los valores de las variables son los siguientes:

Valor de la función objetivo = 641.96

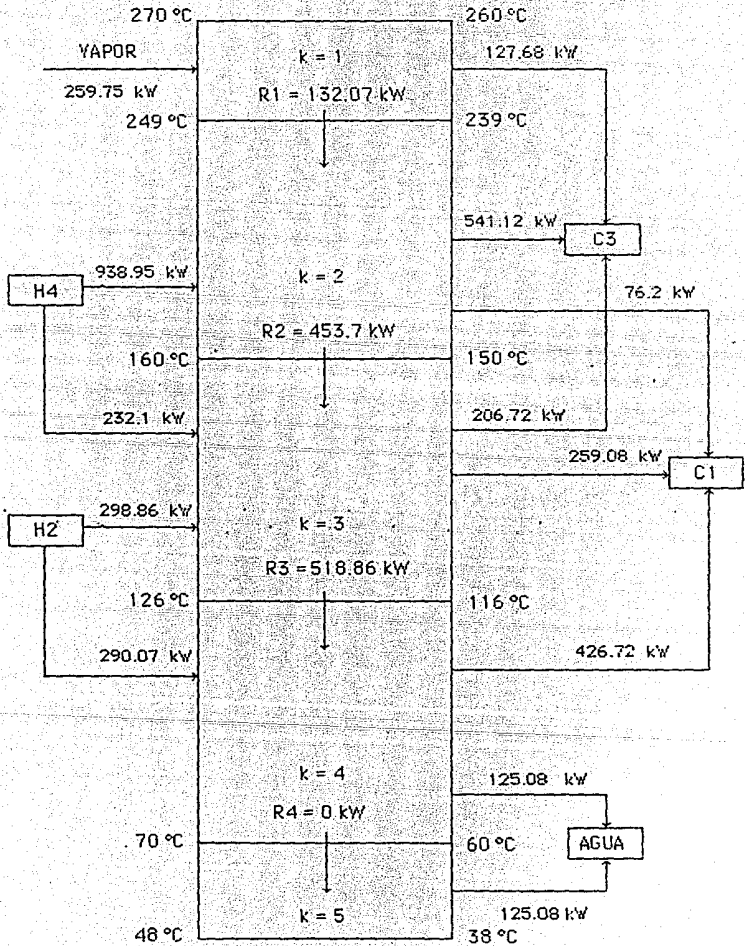
Calor de corrientes de servicio	Flujos de calor	Calores Residuales
$(Q_{11})^H$ 259.75	$Q_{121}$ 127.68	$R_{11}$ 132.07
$(Q_{14})^C$ 382.21	$Q_{122}$ 0.	$R_{12}$ 132.07
$(Q_{15})^C$ 0.	$Q_{123}$ 0.	$R_{31}$ 0.
	$Q_{322}$ 75.2	$R_{22}$ 321.63
	$Q_{323}$ 541.12	$R_{13}$ 132.07
	$Q_{123}$ 0.	$R_{22}$ 0.
	$Q_{133}$ 0.	$R_{23}$ 92.14
	$Q_{233}$ 206.72	$R_{33}$ 294.63
	$Q_{323}$ 259.08	$R_{14}$ 0.
	$Q_{333}$ 0.	$R_{24}$ 0.
	$Q_{114}$ 0.	$R_{34}$ 0.
	$Q_{124}$ 132.07	
	$Q_{214}$ 382.21	
	$Q_{314}$ 0.	
	$Q_{324}$ 294.65	
	$Q_{115}$ 0.	
	$Q_{215}$ 0.	
	$Q_{315}$ 0.	

Los valores de los calores residuales de cada intervalo, se obtienen sumando los calores residuales las corrientes calientes en el mismo, como se muestra a continuación:

k

1	$R_{11} + R_{31}$	$R_1$	132.07	
2	$R_{12} + R_{22} + R_{32}$	$R_2$	453.7	
3	$R_{13} + R_{23} + R_{33}$	$R_3$	518.86	
4	$R_{14} + R_{24} + R_{34}$	$R_4$	0.	

Fig. 4.3 Resultado del Modelo (SP1) para el Ejemplo 4SP1



Como puede observarse, el único valor residual que se pone a 5, como en el intervalo 5 solo se encuentra presente una partición 114 que no puede formar una subred, se considera que en este problema no existen "puntos especiales" que nos permitan formar subredes.

Las restricciones del modelo MILP auto-sectoral del problema restringido, estarán formadas por las mismas ecuaciones de Balance de Energía usadas en el modelo (SP1), con  $Q_{222} = Q_{223} = 0$ . Solo se va agregar las ecuaciones de acoplamiento de transferencia de calor entre corrientes, y que incluyen a las variables binarias, dichas ecuaciones serán similares a las usadas en el Problema No. 2, pero basados en plantar los valores residuales de la corriente 1, los nuevos valores de los flujos de calor de las corrientes de servicio 114 y caliente, y el hecho de que solo existe una subred en este modelo, ya que no hay "punto especial" en este problema. Por otro lado, la variable binaria  $Y_{221}$  y los valores  $Q_{221}$  y  $Q_{222}$  correspondientes serán iguales a cero, ya que está prohibido el acoplamiento entre C1 y 42.

TABLA 4-11 Ecuaciones de acoplamiento al intercambio de calor

I	J	$Y_{ij}$	$(Q_{ij})^A$	$(Q_{ij})^B$	$U_{ij}$	Ecuación
1	1	$Y_{111}$	259.75	382.21	114	$Q_{111} + Q_{112} - 259.75 Y_{111} = 0$
1	2	$Y_{121}$	259.75	762.	114	$Q_{121} + Q_{122} + Q_{123} - 259.75 Y_{121} = 0$
1	3	$Y_{131}$	259.75	876.	114	$Q_{131} + Q_{132} + Q_{133} - 259.75 Y_{131} = 0$
2	1	$Y_{211}$	588.93	382.21	114	$Q_{211} + Q_{212} - 250.16 Y_{211} = 0$
2	3	$Y_{231}$	588.93	876.	114	$Q_{231} - 588.93 Y_{231} = 0$
3	1	$Y_{311}$	1171.05	382.21	114	$Q_{311} + Q_{312} - 382.21 Y_{311} = 0$
3	2	$Y_{321}$	1171.05	762.	114	$Q_{321} + Q_{322} + Q_{323} - 762 Y_{321} = 0$
3	3	$Y_{331}$	1171.05	876.	114	$Q_{331} + Q_{332} - 876 Y_{331} = 0$

Finalmente, el modelo de transporte MILP, para el problema ASPI con acoplamientos restringidos queda como sigue:

Minimizar  $Y_{111} + Y_{121} + Y_{131} + Y_{211} + Y_{231} + Y_{311} + Y_{321} + Y_{331}$

sujeta a

(MILP)

- $R_{11} + Q_{111} = 259.75$
- $R_{12} - R_{11} + Q_{122} + Q_{123} = 0$
- $R_{13} - R_{11} + Q_{132} + Q_{133} = 938.92$
- $R_{21} - R_{23} + Q_{212} + Q_{213} = 0$
- $R_{22} - R_{23} + Q_{222} = 290.86$
- $R_{23} - R_{22} + Q_{232} + Q_{233} = 232.1$
- $R_{31} - R_{33} + Q_{312} + Q_{313} = 0$
- $R_{32} - R_{33} + Q_{322} = 290.07$
- $R_{33} - R_{32} + Q_{332} + Q_{333} = 0$
- $-R_{14} + Q_{141} = 0$
- $-R_{24} + Q_{241} = 0$
- $-R_{34} + Q_{341} = 0$



$$\begin{aligned}
 Q_{121} &= 127.68 \\
 Q_{122} + Q_{222} &= 76.2 \\
 Q_{123} + Q_{223} &= 541.12 \\
 Q_{124} + Q_{224} &= 259.08 \\
 Q_{125} + Q_{225} + Q_{325} &= 206.72 \\
 Q_{114} + Q_{214} + Q_{314} &= 382.21 \\
 Q_{124} + Q_{224} &= 426.72 \\
 Q_{115} + Q_{215} + Q_{315} &= 0 \\
 Q_{114} + Q_{115} - 259.75 Y_{111} &= 0 \\
 Q_{122} + Q_{123} + Q_{124} - 259.75 Y_{121} &= 0 \\
 Q_{131} + Q_{132} + Q_{133} - 259.75 Y_{131} &= 0 \\
 Q_{214} + Q_{215} - 382.21 Y_{211} &= 0 \\
 Q_{222} &= 888.90 Y_{221} &= 0 \\
 Q_{314} + Q_{315} - 382.21 Y_{311} &= 0 \\
 Q_{322} + Q_{323} + Q_{324} - 762 Y_{321} &= 0 \\
 Q_{322} + Q_{323} - 876 Y_{321} &= 0 \\
 \text{con } R_{22} = R_{31} &= 0
 \end{aligned}$$

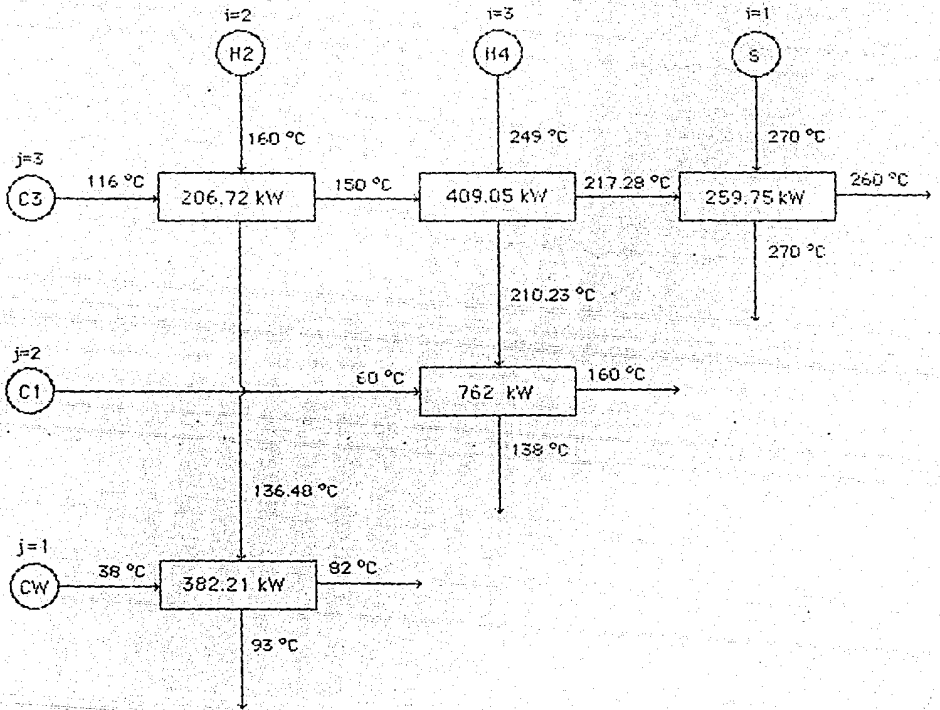
$$\begin{aligned}
 Y_{111} &= 0, 1 & Q_{121}, Q_{122}, Q_{222}, Q_{123}, Q_{223}, Q_{124}, Q_{224}, Q_{125}, Q_{225}, Q_{325}, \\
 & & Q_{322}, Q_{323}, Q_{324}, Q_{314}, Q_{315}, Q_{214}, Q_{215}, Q_{314}, Q_{315}, \\
 i &= 1, 2 & R_{11}, R_{21}, R_{31}, R_{22}, R_{32}, R_{23}, R_{33}, R_{24}, R_{34}, R_{25}, R_{35} = 0
 \end{aligned}$$

Este modelo de transporte MILP mixto-entero, con acoplamientos restringidos, tiene 8 variables binarias, 29 variables continuas, 26 restricciones y la solución óptima fue obtenida con el código de programa LINDO en 29 iteraciones para el problema entero y 40 para el mixto-entero, en una computadora GAMMA XT (Procesador 8088-1). En la Fig. 4.2 se muestra la red de recuperación de calor que tiene el número mínimo de unidades (5 unidades). El número mínimo de unidades, es idéntica a la solución reportada por Cerda(81) y por Papoulias & Grossman [19]. Los valores de las variables de la solución óptima son los siguientes:

Valor de la función objetivo = 5

Variables Binarias		Flujos de calor		Calores Residuales	
$Y_{111}$	0	$Q_{121}$	127.68	$R_{11}$	132.07
$Y_{121}$	0	$Q_{122}$	0.	$R_{12}$	0.
$Y_{131}$	1	$Q_{123}$	172.07	$R_{31}$	0.
$Y_{211}$	1	$Q_{222}$	76.2	$R_{22}$	483.7
$Y_{221}$	1	$Q_{223}$	469.05	$R_{13}$	0.
$Y_{311}$	0	$Q_{124}$	0.	$R_{23}$	0.
$Y_{321}$	1	$Q_{125}$	0.	$R_{24}$	92.14
$Y_{331}$	1	$Q_{224}$	206.72	$R_{33}$	426.72
		$Q_{225}$	259.08	$R_{14}$	0.
		$Q_{322}$	0.	$R_{24}$	0.
		$Q_{114}$	0.	$R_{34}$	0.
		$Q_{124}$	0.		
		$Q_{214}$	382.21		
		$Q_{314}$	0.		
		$Q_{224}$	426.72		
		$Q_{115}$	0.		
		$Q_{215}$	0.		
		$Q_{315}$	0.		

Fig. 4.4 Red de Recuperación Óptima de Calor para el Ejemplo 4SP!  
con Acoplamientos Restringidos



En Tabla 4.12 (a) se muestra la cantidad óptima de calor que debe intercambiarse entre las corrientes frías y las calientes. Un valor de  $Y_{ij}$  igual a cero significa que no debe existir unidad de intercambio de calor entre esas dos corrientes, y por lo tanto el calor debe ser cero. En la Tabla 4.12 (b) se muestran los valores residuales  $R_{ij}$ , cuya suma en  $R$ , debe ser igual al calor residual  $R_0$  obtenido en el problema lineal (SP1).

TABLA 4.12 Composición de Calores

(a) Entre corrientes				(b) Residuales			
$i$	$j$	$Y_{ij}$	$Q_{ij}$	$i$	$R_{ij}$	$R_i$	$R_0$
1	1	0	$Q_{114} + Q_{115}$	1	$R_{11} + R_{21}$	$R_1$	1132.07
1	2	0	$Q_{122} + Q_{123} + Q_{124}$	2	$R_{12} + R_{22} + R_{32}$	$R_2$	1321.65
1	3	1	$Q_{131} + Q_{132} + Q_{133}$	3	$R_{13} + R_{23} + R_{33}$	$R_3$	1518.86
2	1	1	$Q_{214} + Q_{215}$	4	$R_{14} + R_{24} + R_{34}$	$R_4$	0
2	3	1	$Q_{231}$				
3	1	0	$Q_{314} + Q_{315}$				
3	2	1	$Q_{322} + Q_{323} + Q_{324}$				
3	3	1	$Q_{331} + Q_{332}$				

En la Tabla 4.13 se muestran los incrementos de temperatura correspondientes a cada intercambio de calor, y las temperaturas de entrada y salida de cada corriente. Con todos estos datos, se procedió a la construcción del diagrama que se muestra en la Fig. 4.4 y que contiene la red de recuperación óptima de calor, propuesta para el Problema No. 2.

TABLA 4.13 Temperaturas de Entrada y Salida de los Intercambiadores

$i$	$j$	$Q_{ij}$	$(Fcp)_i$	$(dT)_i$	$(T^+)_i$	$(T^-)_i$	$(Fcp)_j$	$(dT)_j$	$(T^+)_j$	$(T^-)_j$
1	1	0								
1	2	0								
1	3	1259.75		0	1270	1270	6.08	42.72	217.38	260
2	1	1382.21	8.79	43.48	136.48	73	17.37	22	82	138
2	3	1206.72	6.79	33.52	160	136.48	6.08	34	115	150
3	1	0								
3	2	1762	10.55	72.23	210.23	138	7.62	100	80	160
3	3	1409.05	10.55	38.77	149	1210.23	6.08	67.28	150	217.28

### 4.3 PROBLEMA No. 3: Ejemplo 7SP4 con división de corrientes paralelas

El siguiente ejemplo es el problema 7SP4, el cual tiene seis corrientes calientes y una corriente fría. Los datos para el problema 3 se muestran en la Tabla 4.14, y las variables asignadas a cada corriente en la Tabla 4.15. El acercamiento mínimo de temperatura requerido en todos los puntos de la red, está especificado a 20°C. En

La ausencia de acoplamientos restringidos, el consumo mínimo de corrientes de servicio para el problema 7SP4 se determina usando el modelo de transporte (P1).

TABLA 4.14 Datos para el problema 7SP4

Corrientes	FCp (Btu/°F)	T°(°F)	T°(°F)	Q (Btu)
C1 (Fria)	47.0	60	710	+30,550
H1 (Caliente)	15.0	675	150	- 7,875
H2 (Caliente)	11.0	590	450	- 1,540
H3 (Caliente)	4.5	540	115	- 1,912
H4 (Caliente)	60.0	430	345	- 5,100
H5 (Caliente)	12.0	400	100	- 3,600
H6 (Caliente)	125.0	300	230	- 8,750
CW (Agua)		80	140	+ 6,918
F (Combustible)		800	800	- 9,270

TABLA 4.15 Clasificación de corrientes

i	Calientes	Frias
1	H1	
2	H2	
3		

...ción de corrientes de temperatura, y en las Tablas positivos y negativos de calor de cada intervalo de cada intervalo.

TABLA 4.16 Intervalos de temperaturas para el problema 7SP4

Intervalo:	C1	H1	H2	H3	H4	H5	H6	CW	F	T <sup>h</sup>	T <sup>h</sup> -dT <sub>min</sub>
k	j=1	i=1	i=2	i=3	i=4	i=5	i=6	j=2	i=7	caliente	fría
1	710							800		800	780
	655							800			
2		675								675	655
		570	590								
3			590							590	570

		520	540	540		
					340	520
4		220 540 540 540				
		410 430 450 430				
5	1	410 430	430 430		120	410
	1	380 400	400 400			
6	1	380 400	400 400 400		400	380
	1	380 390	390 385 390			
7	1	190 190	300	300 300 140	300	280
	1	90 150	110	100 200 50		
8	1	90			100	80
		90				
					90	80

TABLE 4.17 Flujo positivo (+) de calor corriente/intervalo

Intervalo	Corriente	FCp	CT	(Q <sub>ij</sub> ) <sup>W</sup>	F <sup>W</sup> (Q <sub>ij</sub> ) <sup>W</sup> /1000
2 1	H1	15.	55	(Q <sub>12</sub> ) <sup>H</sup>	1275.
3 1	H1	15.	50	(Q <sub>13</sub> ) <sup>H</sup>	750.
4 1	H1	15.	50	(Q <sub>23</sub> ) <sup>H</sup>	550.
4 2	H2	11.	70	(Q <sub>24</sub> ) <sup>H</sup>	770.
5 3	H3	4.5	110	(Q <sub>34</sub> ) <sup>H</sup>	495.
5 1	H1	15.	30	(Q <sub>15</sub> ) <sup>H</sup>	450.
5 3	H3	4.5	30	(Q <sub>35</sub> ) <sup>H</sup>	135.
6 4	H4	50.	30	(Q <sub>45</sub> ) <sup>H</sup>	1500.
6 1	H1	15.	100	(Q <sub>16</sub> ) <sup>H</sup>	1500.
6 3	H3	4.5	100	(Q <sub>36</sub> ) <sup>H</sup>	450.
7 4	H4	50.	55	(Q <sub>47</sub> ) <sup>H</sup>	2750.
7 5	H5	12.	100	(Q <sub>57</sub> ) <sup>H</sup>	1200.
7 1	H1	15.	150	(Q <sub>17</sub> ) <sup>H</sup>	2250.
7 3	H3	4.5	165	(Q <sub>37</sub> ) <sup>H</sup>	742.5
8 5	H5	12.	200	(Q <sub>58</sub> ) <sup>H</sup>	2400.
8 6	H6	135.	70	(Q <sub>67</sub> ) <sup>H</sup>	9450.

TABLE 4.18 Flujo negativo (-) de calor/corriente/intervalo

Intervalo	Corriente	FCp	CT	(Q <sub>ij</sub> ) <sup>C</sup>	F <sup>W</sup> (Q <sub>ij</sub> ) <sup>C</sup> /1000
1 1	C1	47.	55	(Q <sub>11</sub> ) <sup>C</sup>	2585
2 1	C1	47.	85	(Q <sub>12</sub> ) <sup>C</sup>	3995
3 1	C1	47.	50	(Q <sub>13</sub> ) <sup>C</sup>	2350
4 1	C1	47.	110	(Q <sub>14</sub> ) <sup>C</sup>	5170
5 1	C1	47.	30	(Q <sub>15</sub> ) <sup>C</sup>	1410
5 3	C1	47.	100	(Q <sub>16</sub> ) <sup>C</sup>	4700
7 1	C1	47.	200	(Q <sub>17</sub> ) <sup>C</sup>	9400
2	CW	11.07	60	(Q <sub>27</sub> ) <sup>C</sup>	F(Cp) <sub>w</sub> (60)
8 1	C1	47.	20	(Q <sub>18</sub> ) <sup>C</sup>	940

Balances de Energía por Intervalo

$$\begin{aligned}
 1 \quad R_5 - R_1 + (Q_{71})^H - (Q_{11})^C &= 0 \\
 2 \quad R_1 - R_2 + (Q_{12})^H - (Q_{12})^C &= 0 \\
 3 \quad R_2 - R_3 + (Q_{13})^H + (Q_{23})^H - (Q_{13})^C &= 0 \\
 4 \quad R_3 - R_4 + (Q_{14})^H + (Q_{24})^H + (Q_{34})^H - (Q_{14})^C &= 0 \\
 5 \quad R_4 - R_5 + (Q_{15})^H + (Q_{25})^H + (Q_{45})^H - (Q_{15})^C &= 0 \\
 6 \quad R_5 - R_6 + (Q_{16})^H + (Q_{26})^H + (Q_{46})^H + (Q_{56})^H - (Q_{16})^C &= 0 \\
 7 \quad R_6 - R_7 + (Q_{17})^H + (Q_{27})^H + (Q_{57})^H + (Q_{67})^H - (Q_{17})^C - (Q_{27})^C &= 0 \\
 8 \quad R_7 - R_8 - (Q_{18})^C &= 0
 \end{aligned}$$

Recordando que los  $R_i$  son los calores residuales que  $(+R_i)$  entran y  $(-R_i)$  salen del intervalo, por lo que  $R_0 = R_8 = 0$ , y sustituyendo los valores de las tablas 4.17 y 4.18, respecto a la entrada y salida de calor para cada intervalo, las ecuaciones de Balance de Energía por intervalo, constituirán las restricciones del problema lineal (P1), y su función objetivo vendrá dada por:

$$\text{Minimizar } (Q_{71})^H + (Q_{27})^C$$

que corresponde a la minimización del calor proporcionado por las corrientes de servicio presentes en el problema, ya que  $(Q_{71})^H$  es el calor proporcionado por la condensación del combustible en el intervalo 1 y  $(Q_{27})^C$ , al calor recibido por el agua de enfriamiento en el intervalo 7. Dichos calores son proporcionales al flujo másico de las corrientes de servicio. Ahora, sustituyendo valores en las restricciones, el problema lineal (P1), puede escribirse como:

$$\text{Minimizar } (Q_{71})^H + (Q_{27})^C$$

sujeto a

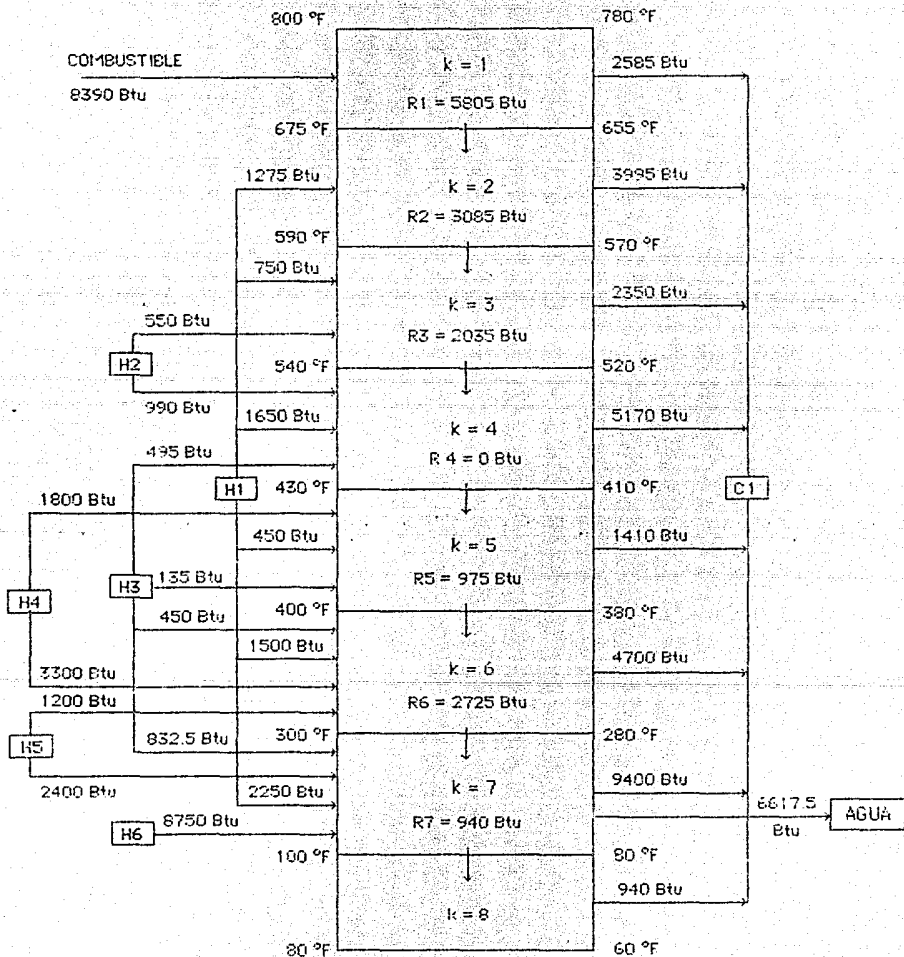
(P1)

$$\begin{aligned}
 -R_1 + (Q_{71})^H &= 2585 \\
 R_1 - R_2 &= 2730 \\
 R_2 - R_3 &= 1050 \\
 R_3 - R_4 &= 2035 \\
 R_4 - R_5 &= -975 \\
 R_5 - R_6 &= -1750 \\
 R_6 - R_7 - (Q_{27})^C &= -4832.5 \\
 R_7 &= 940
 \end{aligned}$$

$$R_1, R_2, R_3, R_4, (Q_{71})^H, (Q_{27})^C \geq 0$$

Introduciendo este problema al paquete computacional LINDO en una computadora GAMMA XT (procesador 8028-1), el resultado se obtuvo en 8 iteraciones. El calor mínimo requerido es de 2190 (Btu/°F) =  $(Q_{71})^H$ , y el de enfriamiento mínimo es de 6617.5 (Stu/°F) =  $(Q_{27})^C$ . El "punto estrecho" para este problema, ocurre entre el cuarto y el quinto intervalo de temperatura (410-430°C), donde el calor residual  $R_4$  es cero. Los valores de las variables de la solución óptima son los siguientes:

Fig. 4.5 Resultado del Modelo (P1) para el Ejemplo 7SP4



Valor de la función objetivo = 15047.5

VARIABLE	VALOR
$(Q_{71})_H$	8390.
$(Q_{27})_C$	6617.5
$R_1$	5205.
$R_2$	3085.
$R_3$	2035.
$R_4$	0.
$R_5$	975.
$R_6$	2725.
$R_7$	940.

Los resultados obtenidos concuerdan con los reportados por Cerda [3] y por Papoulias & Grossmann [17]. La representación esquemática de los intervalos de temperatura y de los flujos positivos y negativos de calor de cada corriente en cada intervalo, tomando en cuenta estos resultados, se encuentra en la Fig. 4.5.

Después, el modelo MILP (P2) es usado con el objeto de obtener el número mínimo de unidades de intercambio de calor para el problema 75P4. Ya que existe un "punto estrecho", los intervalos de temperatura pueden dividirse en dos subredes que así trabajan independientemente para estudiar los intercambios de calor entre cada par de corrientes. En la Tabla 4.17 (a) se muestran los nombres de las variables continuas ( $Q_{ijk}$ ) que corresponden a los intercambios de calor entre las corrientes frías y calientes, presentes en ese intervalo, y en la Tabla 4.17 (b), se muestran las variables correspondientes al intercambio de calor entre los calores residuales de las corrientes calientes que ya no están presentes en el intervalo y las corrientes frías que sí lo están (Ver Tabla 4.16).

TABLA 4.17 Variables de intercambio de calor entre corrientes

(a) Presentes en el intervalo (b) Con los calores residuales

1	k	Corrientes	i	j	$Q_{ijk}$	1	l	Corrientes	i	j	$Q_{ijk}$
1	1	F - C1	7	1	$Q_{711}$	1	2	F - C1	7	1	$Q_{712}$
2		H1 - C1	1	1	$Q_{112}$	3		F - C1	7	1	$Q_{713}$
3		H1 - C1	1	1	$Q_{113}$	4		F - C1	7	1	$Q_{714}$
		H2 - C1	2	1	$Q_{213}$	7		H4 - C1	4	1	$Q_{417}$
4		H1 - C1	1	1	$Q_{114}$			H4 - CW	4	2	$Q_{427}$
		H2 - C1	2	1	$Q_{214}$	8		H1 - C1	1	1	$Q_{118}$
		H3 - C1	3	1	$Q_{314}$			H3 - C1	3	1	$Q_{318}$
2	5	H1 - C1	1	1	$Q_{115}$			H4 - C1	4	1	$Q_{418}$
		H3 - C1	3	1	$Q_{315}$			H5 - C1	5	1	$Q_{518}$
		H4 - C1	4	1	$Q_{415}$			H6 - C1	6	1	$Q_{618}$
6		H1 - C1	1	1	$Q_{116}$						
		H3 - C1	3	1	$Q_{316}$						
		H4 - C1	4	1	$Q_{416}$						
		H5 - C1	5	1	$Q_{516}$						



H1 - C1	1 1	Q117
H2 - C1	3 1	Q217
H3 - C1	5 1	Q317
H4 - C1	6 1	Q417
H1 - CW	1 2	Q127
H2 - CW	3 2	Q227
H3 - CW	5 2	Q327
H4 - CW	6 2	Q427

En la Tabla 4.20 se presentan los nombres de las variables discretas binarias  $Y_{i,j}$ , con su respectivo valor de  $U_{i,j}$  con sus ecuaciones respectivas. Posteriormente, se muestran los balances de energía para las corrientes calientes y para las frías, por intervalo, con  $R_{01} = R_{11} = R_{22} = R_{33} = R_{44} = R_{55} = R_{66} = 0$ , ya que no puede haber calor anterior ni posterior a los intervalos, y tampoco existen los calores residuales anteriores a la primera aparición de cada una de las corrientes calientes en ese intervalo.

Tabla 4.20 Ecuaciones de acotamiento al intercambio de calor

i	j	$(Q_{i,j})^H$	$(Q_{i,j})^C$
1	1	$11(Q_{12})^H + (Q_{13})^H + (Q_{14})^H$	$3675 \cdot (Q_{11})^C + (Q_{12})^C + (Q_{13})^C + (Q_{14})^C$
2	1	$11(Q_{22})^H + (Q_{23})^H$	$1540 \cdot (Q_{11})^C + (Q_{12})^C + (Q_{13})^C + (Q_{14})^C$
3	1	$11(Q_{32})^H$	$495 \cdot (Q_{11})^C + (Q_{12})^C + (Q_{13})^C + (Q_{14})^C$
7	1	$11(Q_{71})^H$	$8390 \cdot (Q_{11})^C + (Q_{12})^C + (Q_{13})^C + (Q_{14})^C$
1	2	$21(Q_{12})^H + (Q_{13})^H + (Q_{17})^H$	$(Q_{12})^C + (Q_{13})^C + (Q_{17})^C + (Q_{16})^C$
1	2	$21(Q_{22})^H + (Q_{23})^H + (Q_{17})^H$	$4200 \cdot (Q_{27})^C$
3	2	$21(Q_{32})^H + (Q_{33})^H + (Q_{37})^H$	$1417.5 \cdot (Q_{12})^C + (Q_{13})^C + (Q_{17})^C + (Q_{16})^C$
3	2	$21(Q_{33})^H + (Q_{37})^H$	$1417.5 \cdot (Q_{27})^C$
4	2	$21(Q_{42})^H + (Q_{43})^H$	$5100 \cdot (Q_{12})^C + (Q_{13})^C + (Q_{17})^C + (Q_{16})^C$
4	2	$21(Q_{43})^H + (Q_{47})^H$	$5100 \cdot (Q_{27})^C$
5	2	$21(Q_{52})^H + (Q_{57})^H$	$3600 \cdot (Q_{12})^C + (Q_{13})^C + (Q_{17})^C + (Q_{16})^C$
5	2	$21(Q_{53})^H + (Q_{57})^H$	$3600 \cdot (Q_{27})^C$
6	2	$21(Q_{67})^H$	$18750 \cdot (Q_{12})^C + (Q_{13})^C + (Q_{17})^C + (Q_{16})^C$
6	2	$21(Q_{67})^H$	$18750 \cdot (Q_{27})^C$

(cont.)	$U_{i,j}$	Ecuaciones de Acotamiento
$U_{111}$	3675	$Y_{111} \cdot (Q_{12} + Q_{13} + Q_{14} - 3675 Y_{111}) \leq 0$
$U_{211}$	1540	$Y_{211} \cdot (Q_{22} + Q_{23} - 1540 Y_{211}) \leq 0$
$U_{311}$	495	$Y_{311} \cdot (Q_{32} - 495 Y_{311}) \leq 0$
$U_{711}$	8390	$Y_{711} \cdot (Q_{71} + Q_{72} + Q_{73} + Q_{74} - 8390 Y_{711}) \leq 0$
$U_{122}$	4200	$Y_{122} \cdot (Q_{12} + Q_{13} + Q_{17} + Q_{16} - 4200 Y_{122}) \leq 0$
$U_{222}$	4200	$Y_{222} \cdot (Q_{27} - 4200 Y_{222}) \leq 0$
$U_{322}$	1417.5	$Y_{322} \cdot (Q_{32} + Q_{33} + Q_{37} + Q_{36} - 1417.5 Y_{322}) \leq 0$
$U_{332}$	1417.5	$Y_{332} \cdot (Q_{37} - 1417.5 Y_{332}) \leq 0$
$U_{422}$	5100	$Y_{422} \cdot (Q_{42} + Q_{43} + Q_{47} + Q_{46} - 5100 Y_{422}) \leq 0$
$U_{432}$	5100	$Y_{432} \cdot (Q_{47} - 5100 Y_{432}) \leq 0$
$U_{522}$	3600	$Y_{522} \cdot (Q_{52} + Q_{57} + Q_{56} - 3600 Y_{522}) \leq 0$
$U_{532}$	3600	$Y_{532} \cdot (Q_{57} - 3600 Y_{532}) \leq 0$

U02218750.1 Year 1 Q017 + Q018 = 8750 / Q017 = 0  
 U02218817.51 Year 1 Q027 + Q028 = 8817.5 / Q027 = 0

Balances de Energia/intervalo/corriente/subred

(a) Para las corrientes calientes

1 k j

1	1	7	$R_{01} - R_{02} + Q_{011} = (Q_{011})^c = 8390$
2	1	7	$R_{12} - R_{11} + Q_{012} = (Q_{012})^c = 1275$
3	1	7	$R_{22} - R_{21} + Q_{013} = 0$
3	1	1	$R_{13} - R_{12} + Q_{014} = (Q_{014})^c = 750$
3	1	2	$R_{23} - R_{22} + Q_{015} = (Q_{015})^c = 550$
3	1	7	$R_{33} - R_{32} + Q_{016} = 0$
4	1	1	$R_{14} - R_{13} + Q_{017} = (Q_{017})^c = 1850$
4	1	2	$R_{24} - R_{23} + Q_{018} = (Q_{018})^c = 550$
4	1	7	$R_{34} - R_{33} + Q_{019} = (Q_{019})^c = 450$
4	1	7	$R_{44} - R_{43} + Q_{020} = 0$
5	1	1	$R_{15} - R_{14} + Q_{021} = (Q_{021})^c = 450$
5	1	3	$R_{35} - R_{34} + Q_{022} = (Q_{022})^c = 115$
5	1	4	$R_{45} - R_{44} + Q_{023} = (Q_{023})^c = 1800$
5	1	7	$R_{75} - R_{74} + Q_{024} = (Q_{024})^c = 1500$
6	1	3	$R_{36} - R_{35} + Q_{025} = (Q_{025})^c = 450$
6	1	4	$R_{46} - R_{45} + Q_{026} = (Q_{026})^c = 3300$
6	1	5	$R_{56} - R_{55} + Q_{027} = (Q_{027})^c = 1200$
7	1	1	$R_{17} - R_{16} + Q_{028} + Q_{027} = (Q_{028})^c = 2250$
7	1	3	$R_{37} - R_{36} + Q_{029} + Q_{027} = (Q_{029})^c = 832.5$
7	1	4	$R_{47} - R_{46} + Q_{030} + Q_{027} = 0$
7	1	5	$R_{57} - R_{56} + Q_{031} + Q_{027} = (Q_{031})^c = 2400$
7	1	6	$R_{67} - R_{66} + Q_{032} + Q_{027} = (Q_{032})^c = 8750$
8	1	1	$R_{18} - R_{17} + Q_{033} = 0$
8	1	3	$R_{38} - R_{37} + Q_{034} = 0$
8	1	4	$R_{48} - R_{47} + Q_{035} = 0$
8	1	5	$R_{58} - R_{57} + Q_{036} = 0$
8	1	6	$R_{68} - R_{67} + Q_{037} = 0$

(b) Para las corrientes frias

1 k j

1	1	1	$Q_{011} = (Q_{011})^c = 2585$
2	1	1	$Q_{012} + Q_{013} = (Q_{012})^c = 5995$
3	1	1	$Q_{013} + Q_{014} + Q_{015} = (Q_{013})^c = 2350$
4	1	1	$Q_{014} + Q_{015} + Q_{016} + Q_{017} = (Q_{014})^c = 5170$
5	1	1	$Q_{015} + Q_{016} + Q_{017} = (Q_{015})^c = 1410$
6	1	1	$Q_{016} + Q_{017} + Q_{018} + Q_{019} = (Q_{016})^c = 4700$
7	1	1	$Q_{017} + Q_{018} + Q_{019} + Q_{020} + Q_{021} = (Q_{017})^c = 5400$
7	1	2	$Q_{022} + Q_{023} + Q_{024} + Q_{025} + Q_{026} = (Q_{022})^c = 8818$
8	1	1	$Q_{018} = (Q_{018})^c = 540$

Las restricciones del modelo MILP estan constituidas por las Ecuaciones de Balance de Energia, para las corrientes calientes y

para las corrientes frías, y por las ecuaciones que ecotan la cantidad de intercambio de calor para cada par de corrientes dentro de cada subra. La función objetivo será la suma de las 14 variables binarias que corresponden a unidades de transferencia de calor entre corrientes.

Finalmente, el modelo de transporte MILP para este problema ASM, queda de la siguiente manera:

$$\text{Minimizar } Y_{111} + Y_{211} + Y_{311} + Y_{711} + Y_{112} + Y_{212} + Y_{312} + Y_{322} + Y_{412} + Y_{522} + Y_{612} + Y_{622}$$

sujeeto a

(P2)

$$\begin{aligned} R_{71} + Q_{711} &= 8390 \\ R_{12} + Q_{112} &= 1275 \\ R_{72} - R_{71} + Q_{712} &= 0 \\ R_{13} - R_{12} + Q_{113} &= 750 \\ R_{23} + Q_{213} &= 550 \\ R_{73} - R_{72} + Q_{713} &= 0 \\ R_{14} - R_{13} + Q_{114} &= 1650 \\ R_{24} - R_{23} + Q_{214} &= 990 \\ R_{34} + Q_{314} &= 495 \\ R_{74} - R_{73} + Q_{714} &= 0 \\ R_{15} - R_{14} + Q_{115} &= 450 \\ R_{35} - R_{34} + Q_{315} &= 135 \\ R_{45} + Q_{415} &= 1800 \\ R_{16} - R_{15} + Q_{116} &= 1500 \\ R_{26} - R_{25} + Q_{216} &= 450 \\ R_{46} - R_{45} + Q_{416} &= 3300 \\ R_{56} + Q_{516} &= 1200 \\ R_{17} - R_{16} + Q_{117} + Q_{127} &= 2250 \\ R_{27} - R_{26} + Q_{217} + Q_{227} &= 832.5 \\ R_{47} - R_{46} + Q_{417} + Q_{427} &= 0 \\ R_{57} - R_{56} + Q_{517} + Q_{527} &= 2400 \\ R_{67} + Q_{617} + Q_{627} &= 8750 \\ R_{18} - R_{17} + Q_{118} &= 0 \\ R_{38} - R_{37} + Q_{318} &= 0 \\ R_{48} - R_{47} + Q_{418} &= 0 \\ R_{58} - R_{57} + Q_{518} &= 0 \\ R_{68} - R_{67} + Q_{618} &= 0 \\ Q_{711} &= 2585 \\ Q_{112} + Q_{712} &= 3995 \\ Q_{113} + Q_{213} + Q_{713} &= 2350 \\ Q_{114} + Q_{214} + Q_{314} + Q_{714} &= 5170 \\ Q_{115} + Q_{315} + Q_{415} &= 1410 \\ Q_{116} + Q_{316} + Q_{416} + Q_{516} &= 4700 \\ Q_{117} + Q_{317} + Q_{417} + Q_{517} + Q_{617} &= 9400 \\ Q_{127} + Q_{227} + Q_{427} + Q_{527} + Q_{627} &= 2617.5 \\ Q_{118} + Q_{218} + Q_{418} + Q_{518} + Q_{618} &= 940 \\ Q_{112} + Q_{113} + Q_{114} - 3875 Y_{111} &\leq 0 \\ Q_{213} + Q_{214} - 1540 Y_{211} &\leq 0 \\ Q_{314} - 495 Y_{311} &\leq 0 \\ Q_{711} + Q_{712} + Q_{713} + Q_{714} - 8390 Y_{711} &\leq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q_{112} + Q_{114} + Q_{117} + Q_{118} - 4200 Y_{112} &\leq 0 \\
 Q_{127} - 4200 Y_{127} &\leq 0 \\
 Q_{312} + Q_{314} + Q_{317} + Q_{318} - 1417.5 Y_{312} &\leq 0 \\
 Q_{327} - 1417.5 Y_{327} &\leq 0 \\
 Q_{412} + Q_{414} + Q_{417} + Q_{418} - 5100 Y_{412} &= 0 \\
 Q_{427} - 5100 Y_{427} &\leq 0 \\
 Q_{512} + Q_{514} + Q_{518} - 3600 Y_{512} &\leq 0 \\
 Q_{527} - 3600 Y_{527} &\leq 0 \\
 Q_{617} + Q_{618} - 8750 Y_{612} &= 0 \\
 Q_{627} - 8617.5 Y_{627} &\leq 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Y_{111} &= 0, 1 & Q_{112}, Q_{113}, Q_{114}, Q_{212}, Q_{214}, Q_{216}, Q_{218}, Q_{219}, Q_{219}, Q_{219}, \\
 l &= 1, 2 & Q_{314}, Q_{315}, Q_{316}, Q_{317}, Q_{318}, Q_{319}, Q_{319}, Q_{319}, Q_{319}, \\
 & & Q_{412}, Q_{413}, Q_{414}, Q_{415}, Q_{416}, Q_{417}, Q_{418}, Q_{419}, Q_{419}, Q_{419}, \\
 & & Q_{512}, Q_{513}, Q_{514}, Q_{515}, Q_{516}, Q_{517}, Q_{518}, Q_{519}, Q_{519}, Q_{519}, \\
 & & Q_{617}, Q_{618}, Q_{619}, Q_{627}, Q_{627}, Q_{627}, Q_{627}, Q_{627}, Q_{627}, \\
 & & R_{01}, R_{02}, R_{03}, R_{04}, R_{05}, R_{06}, R_{07}, R_{07}, R_{07}, R_{07}, R_{07}, R_{07}, \\
 & & R_{07}, R_{07} = 0
 \end{aligned}$$

Este modelo de transporte MILP tiene 19 variables binarias, 50 variables continuas, 50 restricciones y la solución óptima fue obtenida con el código de programa LINDO en 73 iteraciones para el problema lineal y 130 para el mismo entero, en una computadora GAMMA-XI (Procesador 8088-1). En la Fig. 4.6 se muestra la red de recuperación de calor que tiene el número mínimo de unidades (10 unidades). El número mínimo de unidades, es idéntica a la solución reportada por Cerda [3] y por Papoulias & Grossman [19]. Los valores de las variables de la solución óptima son los siguientes:

Valor de la función objetivo = 10

Variables Binarias		Flujos de calor		Colores Residuales	
Y <sub>111</sub>	1	Q <sub>112</sub>	1275.	R <sub>11</sub>	0.
Y <sub>211</sub>	1	Q <sub>113</sub>	450.	R <sub>21</sub>	5805.
Y <sub>311</sub>	1	Q <sub>114</sub>	1850.	R <sub>31</sub>	0.
Y <sub>311</sub>	1	Q <sub>115</sub>	0.	R <sub>32</sub>	1025.
Y <sub>112</sub>	0	Q <sub>116</sub>	0.	R <sub>12</sub>	0.
Y <sub>312</sub>	1	Q <sub>117</sub>	0.	R <sub>33</sub>	0.
Y <sub>412</sub>	1	Q <sub>118</sub>	0.	R <sub>43</sub>	2025.
Y <sub>512</sub>	1	Q <sub>127</sub>	4200.	R <sub>14</sub>	0.
Y <sub>612</sub>	1	Q <sub>212</sub>	550.	R <sub>24</sub>	0.
Y <sub>127</sub>	1	Q <sub>314</sub>	990.	R <sub>34</sub>	0.
Y <sub>322</sub>	0	Q <sub>314</sub>	495.	R <sub>34</sub>	0.
Y <sub>522</sub>	1	Q <sub>315</sub>	135.	R <sub>15</sub>	450.
Y <sub>622</sub>	0	Q <sub>316</sub>	450.	R <sub>35</sub>	0.
Y <sub>622</sub>	0	Q <sub>317</sub>	850.	R <sub>45</sub>	525.
		Q <sub>318</sub>	182.5	R <sub>16</sub>	1950.
		Q <sub>327</sub>	0.	R <sub>36</sub>	0.
		Q <sub>412</sub>	1275.	R <sub>46</sub>	757.5
		Q <sub>414</sub>	3067.5	R <sub>56</sub>	17.5
		Q <sub>417</sub>	0.	R <sub>17</sub>	0.
		Q <sub>418</sub>	757.5	R <sub>47</sub>	182.5
		Q <sub>427</sub>	0.	R <sub>47</sub>	757.5
		Q <sub>514</sub>	1182.5	R <sub>27</sub>	0.
		Q <sub>517</sub>	0.	R <sub>47</sub>	0.

$Q_{110}$	0.	$R_{10}$	0.
$Q_{207}$	2417.5	$R_{20}$	0.
$Q_{212}$	2750.	$R_{21}$	0.
$Q_{213}$	0.	$R_{22}$	0.
$Q_{207}$	0.	$R_{23}$	0.
$Q_{211}$	3005.		
$Q_{212}$	2720.		
$Q_{213}$	1000.		
$Q_{214}$	2005.		

En Tabla 4.21 (a) se muestran las cantidades de calor intercambiadas entre cada par de corrientes que suceden. Si  $Y_{ij}$  es igual a cero significa que no debe existir unidad de intercambio de calor entre esas dos corrientes, y por lo tanto el calor debe ser cero. En la Tabla 4.21 (b) se muestran los calores residuales. Nótese, además, que la suma de los calores residuales  $R_{ij}$  debe ser igual al calor residual  $R_1$  para toda corriente caliente  $i$  presente en el intervalo, y estos valores fueron obtenidos en el modelo lineal (P1).

TABLA 4.21 Composición de Calores

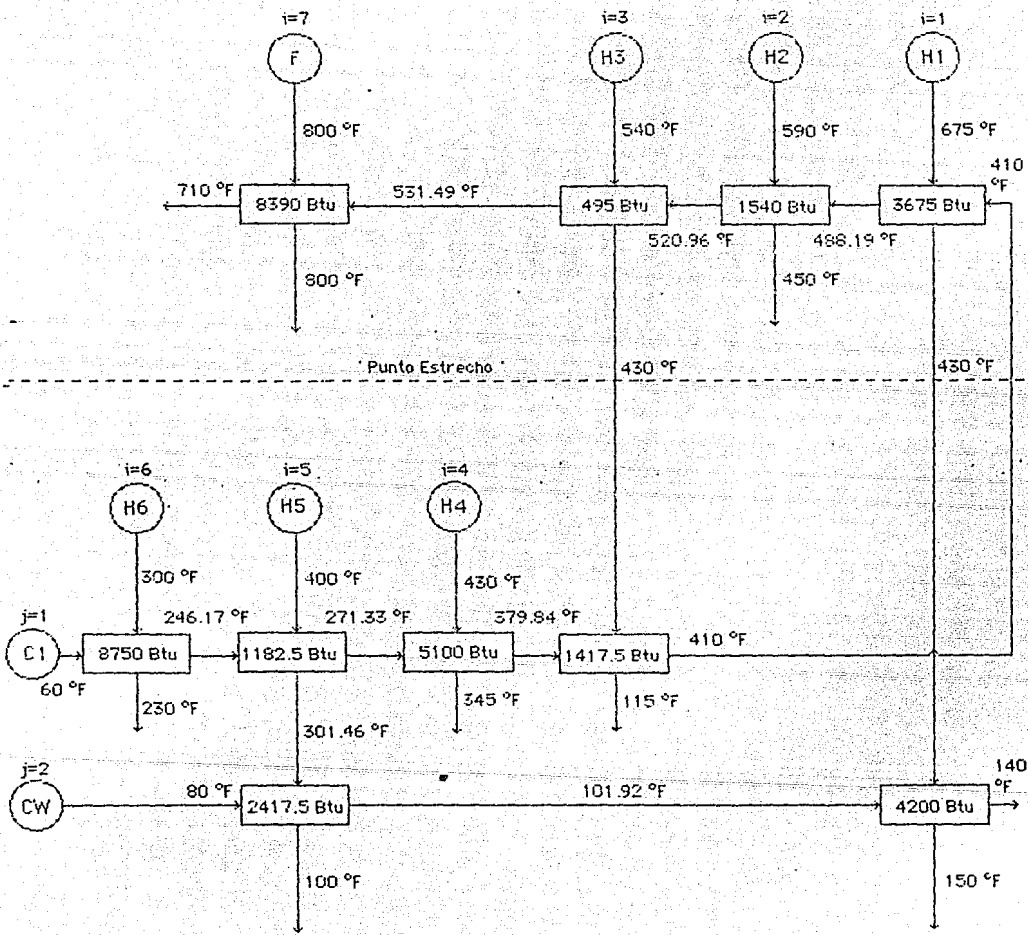
(a) Entre corrientes

$i$	$j$	$Y_{ij}$	$Q_{ij}$
1	1	1	$Q_{110} + Q_{113} + Q_{114}$ 10675.
2	1	1	$Q_{213} + Q_{214}$ 11540.
3	1	1	$Q_{314}$ 1495.
7	1	1	$Q_{711} + Q_{712} + Q_{713} + Q_{714}$ 23590.
1	2	0	$Q_{115} + Q_{116} + Q_{117} + Q_{118}$ 0.
1	2	1	$Q_{127}$ 14000.
3	1	2	$Q_{315} + Q_{316} + Q_{317} + Q_{318}$ 12417.5
3	2	0	$Q_{327}$ 0.
4	1	2	$Q_{415} + Q_{416} + Q_{417} + Q_{418}$ 5100.
4	2	0	$Q_{427}$ 0.
5	1	2	$Q_{516} + Q_{517} + Q_{518}$ 11162.5
5	2	1	$Q_{527}$ 12417.5
6	1	2	$Q_{617} + Q_{618}$ 2750.
6	2	0	$Q_{627}$ 0.

(b) Residuales

$i$	$R_i$
1	$R_{11} + R_{12}$ 3005.
2	$R_{21} + R_{22}$ 3085.
3	$R_{31} + R_{32} + R_{33}$ 2005.
4	$R_{41} + R_{42} + R_{43} + R_{44}$ 0.
5	$R_{51} + R_{52} + R_{53}$ 975.
6	$R_{61} + R_{62} + R_{63} + R_{64}$ 2725.
7	$R_{71} + R_{72} + R_{73} + R_{74} + R_{75}$ 940.
8	$R_{81} + R_{82} + R_{83} + R_{84} + R_{85}$ 0.

- Fig. 4.6 (a) Red de Recuperación Óptima de Calor para el Ejemplo 7SP4 SIN División de Corrientes Paralelas



En la tabla 4.22 se muestran los incrementos de temperatura correspondientes a cada intercambio de calor y las temperaturas de entrada y salida de cada corriente. Los datos están expresados de acuerdo a la configuración del diagrama que se muestra en la Fig. 4.5 (a), la que contiene la red de recuperación de calor de calor producido para el Problema No. 3, sin división de corrientes paralelas.

TABLA 4.22 Temperaturas de Entrada y Salida de los Intercambiadores

(a) Sin división de corrientes paralelas

1	1	0	1	(FCp), (gT), (T <sub>1</sub> ), (T <sub>2</sub> )	(FCp), (gT), (T <sub>1</sub> ), (T <sub>2</sub> )					
1	1	110679.	15.	245.	1575.	1430.	47.0	123.19	140.	1498.184
2	1	11540.	11.	140.	1590.	1450.	47.0	121.77	1489.19	1520.281
3	1	1495.	4.5	110.	1540.	1430.	47.0	120.35	1500.281	1531.487
7	1	119290.	15.	0.	1500.	1500.	47.0	117.31	1511.42	1710.
1	2	0.								
1	2	214200.	15.	260.	1430.	1450.	47.0	123.39	151.52	1440.
3	2	211417.51	4.5	310.	1430.	1450.	47.0	120.15	1527.54	1410.
7	2	0.								
4	1	215100.	50.	55.	1430.	1385.	47.0	119.50	171.32	1379.241
4	2	0.								
5	1	11182.57	12.	99.50	1400.	1361.46	47.0	125.15	1348.17	1371.131
5	2	213417.51	12.	1201.45	1341.42	1400.	110.3	131.32	1300.	101.321
6	1	213750.	125.	70.	1380.	1320.	47.0	118.17	130.	1246.171
6	2	0.								

Sin embargo, como puede observarse en el diagrama, los (FCp) de las corrientes, son muy diferentes, pues su rango varía desde 4.5 hasta 125 Ecu/°F, esto origina que, aunque la red propuesta sea una desagregación de los valores óptimos, haya pérdidas en los diseños de los intercambiadores, pues la mezcla de flujos muy grandes contra flujos muy pequeños, hace que el diseño sea ineficiente. Lo ideal sería que la diferencia de los flujos empleados, no excediera el triple del valor de uno sobre el otro. En este caso, se sugiere la división de las corrientes con flujo muy grande, en corrientes paralelas, cuando intercambien calor con corrientes de flujo muy pequeño. Obviamente no existe una red óptima única. Deben hacerse tanteos y usarse otros criterios de selección, para escoger la mejor red, a sabiendas que cualquier opción correspondiente a la que minimice el costo total de las corrientes de servicio y al número total de unidades de intercambio de calor. Habiendo obtenido varias redes, se selecciona la que se muestra en la Tabla 4.22 (b), la cual incluye la división en corrientes paralelas, de algunas de las corrientes del problema. El diagrama de la red óptima de recuperación de calor, correspondiente a esta tabla, se muestra en la Fig. 4.4 (b).

(b) Sin división de corrientes paralelas

1	1	0	1	(FCp), (gT), (T <sub>1</sub> ), (T <sub>2</sub> )	(FCp), (gT), (T <sub>1</sub> ), (T <sub>2</sub> )					
1	1	110679.	15.	245.	1575.	1430.	22.0	1167.	1410.	1577.
2	1	11540.	11.	140.	1590.	1450.	15.0	1102.7	1410.	1512.7

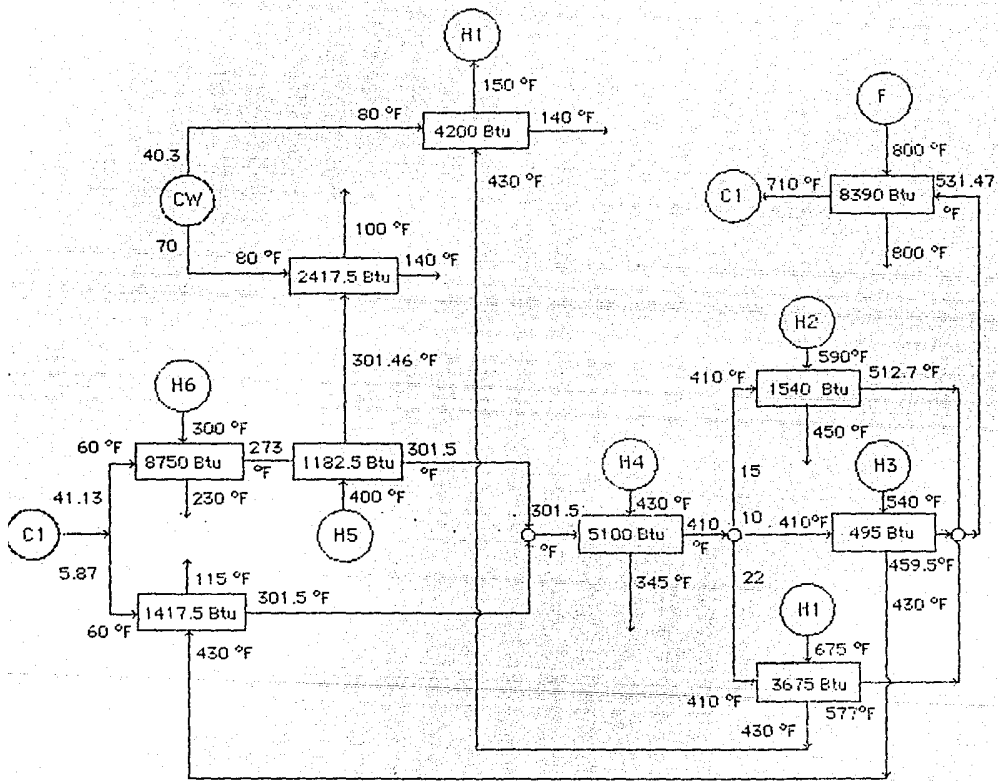


Fig. 4.6 (b) Red Óptima de Recuperación de Calor para el Ejemplo 7SP4  
CON División de Corrientes Paralelas



3	1	11495.	4.5	110.	1540.	1030.	10.0	10.53	1310.	1452.5
7	1	118340.		0.	1000.	300.	47.0	1173.51	1531.47	110.
1	1	210.	0.							
1	2	14200.	15.	260.	1430.	1150.	40.3	60.	60.	1140.
3	1	11417.5	4.5	315.	1430.	1115.	5.87	1341.5	60.	1301.5
3	2	10.	0.							
4	1	215100.	60.	85.	1430.	1345.	47.0	1108.51	1301.5	1410.
4	2	10.	0.							
5	1	21182.5	12.	98.54	1400.	1301.46	47.0	25.16	1346.17	1271.33
5	2	21417.5	12.	1201.45	1301.46	1100.	70.	60.	60.	1140.
6	1	218750.	125.	70.	1300.	1230.	41.13	213.7	60.	1272.7
6	2	10.	0.							

#### 4.4 PROBLEMA No. 4: Ejemplo 10SP1

El último ejemplo es el problema 10SP1, que tiene cinco corrientes de proceso calientes y cinco frías. Este problema en particular requiere agua de enfriamiento como la única corriente de servicio, ya que existe exceso de calor en todos los puntos de la red de recuperación y no tiene "puntos estrechos". Los datos para el problema 4 se muestran en la Tabla 4.23, y las variables asignadas a cada corriente en la Tabla 4.24. El acercamiento mínimo de temperatura requerido en todos los puntos de la red, está especificado a 10°C. En la ausencia de acoplamientos restringidos, el consumo mínimo de corrientes de servicio para el problema 10SP1 se determina usando el modelo de transbordo (P1).

TABLA 4.23 Datos para el problema 10SP1

Corrientes	FCp (Kw/°F)	T <sub>1</sub> (°C)	T <sub>2</sub> (°C)	Q(Kw)
C1 (Fria)	7.52	50	160	+ 742.
C2 (Fria)	6.08	116	225	+ 644.48
C3 (Fria)	8.44	38	221	+1544.52
C4 (Fria)	17.28	82	177	+1641.6
C5 (Caliente)	13.90	93	205	-1556.8
H6 (Caliente)	8.79	180	93	- 585.93
H7 (Caliente)	10.55	249	139	-1171.05
H8 (Caliente)	14.77	237	66	-2377.97
H9 (Caliente)	12.56	271	145	-1533.32
H10 (Caliente)	17.73	199	66	-2359.09
W (Agua)	42.66	38	82	+1877.

TABLA 4.24 Clasificación de corrientes

1	1	Calientes	1	1
1	1	H6	1	1

1	2	H7	C2	2
1	3	H8	C3	3
1	4	H9	C4	4
1	5	H10	C5	5
1			C6	6

En la Tabla 4.25 se muestra la distribución de corrientes dentro de los intervalos obtenidos de temperatura, y en las Tablas 4.26 y 4.27, los flujos positivos y negativos de calor de cada corriente dentro de cada intervalo.

TABLA 4.25 Intervalos de temperaturas para el problema IQSF1

Intervalo:	C1	C2	C3	C4	C5	C6	H6	H7	H8	H9	H10	T <sup>h</sup>	T <sup>h</sup> -dT <sub>min</sub>
k	j=1	j=2	j=3	j=4	j=5	j=6	i=1	i=2	i=3	i=4	i=5	caliente	fría
1										271		271	251
										249			239
2		222	221					249		249			
		217	217					227		227			
3			217	217	205			227	227	227			217
			189	189	189			199	199	199			
4	160	189	189	177	189			199	199	199	199		189
	150	150	150	150	150			160	160	160	160		
5	150	150	150	150	150		160	160	160	160	160		150
	116	116	116	116	116		126	126	126	149	126		
6	116		116	116	116		126		126	126			116
	93		93	93	93		103		103	103			
7	93		93	93			103		103	103			93
	82		82	82			93		92	92			
8	82		82			82			92	92			82
	60		60			60			76	70			
9			60			60			70	70			60
			38			38			66	66			
												48	38

TABLA 4.26 Flujo positivo (+) de calor/corriente/intervalo

k	i	Corriente	FCp	dT	(Q <sub>ik</sub> ) <sup>h</sup>
1	4	H9	12.56	22	(Q <sub>41</sub> ) <sup>h</sup>
2	2	H7	10.55	22	(Q <sub>22</sub> ) <sup>h</sup>
	4	H9	12.56	22	(Q <sub>42</sub> ) <sup>h</sup>

3	2	H7	10.55	28	(Q <sub>28</sub> ) <sup>H</sup>	295.4
	3	H8	14.77	38	(Q <sub>38</sub> ) <sup>H</sup>	413.56
	4	H9	12.56	28	(Q <sub>28</sub> ) <sup>H</sup>	351.68
4	2	H7	10.55	39	(Q <sub>39</sub> ) <sup>H</sup>	411.45
	3	H8	14.77	39	(Q <sub>39</sub> ) <sup>H</sup>	576.03
	4	H9	12.56	39	(Q <sub>39</sub> ) <sup>H</sup>	489.64
	5	H10	17.73	39	(Q <sub>39</sub> ) <sup>H</sup>	591.47
5	1	H6	8.79	34	(Q <sub>34</sub> ) <sup>H</sup>	298.86
	2	H7	10.55	32	(Q <sub>32</sub> ) <sup>H</sup>	232.1
	3	H8	14.77	34	(Q <sub>34</sub> ) <sup>H</sup>	502.18
	4	H9	12.56	11	(Q <sub>11</sub> ) <sup>H</sup>	138.16
	5	H10	17.73	34	(Q <sub>34</sub> ) <sup>H</sup>	602.62
6	1	H6	8.79	23	(Q <sub>23</sub> ) <sup>H</sup>	202.17
	2	H7	14.77	23	(Q <sub>23</sub> ) <sup>H</sup>	339.71
	3	H8	17.73	23	(Q <sub>23</sub> ) <sup>H</sup>	407.79
7	1	H6	8.79	10	(Q <sub>10</sub> ) <sup>H</sup>	87.9
	2	H7	14.77	11	(Q <sub>11</sub> ) <sup>H</sup>	162.47
	3	H8	17.73	11	(Q <sub>11</sub> ) <sup>H</sup>	195.63
8	3	H8	14.77	22	(Q <sub>22</sub> ) <sup>H</sup>	324.93
	5	H10	17.73	22	(Q <sub>22</sub> ) <sup>H</sup>	390.66
9	3	H8	14.77	4	(Q <sub>4</sub> ) <sup>H</sup>	59.08
	5	H10	17.73	4	(Q <sub>4</sub> ) <sup>H</sup>	70.92

TABLA 4.27 Flujo negativo (-) de calor/corriente/intervalo

i	j	Corriente	FCp	dT	(Q <sub>ik</sub> ) <sup>c</sup>	
2	2	C2	6.08	5	(Q <sub>22</sub> ) <sup>c</sup>	30.4
	3	C3	8.44	4	(Q <sub>33</sub> ) <sup>c</sup>	33.76
3	2	C2	6.08	28	(Q <sub>28</sub> ) <sup>c</sup>	170.21
	3	C3	8.44	28	(Q <sub>28</sub> ) <sup>c</sup>	236.32
	5	C5	13.90	16	(Q <sub>16</sub> ) <sup>c</sup>	222.4
4	1	C1	7.62	10	(Q <sub>14</sub> ) <sup>c</sup>	76.2
	2	C2	6.08	39	(Q <sub>39</sub> ) <sup>c</sup>	237.12
	3	C3	8.44	39	(Q <sub>39</sub> ) <sup>c</sup>	329.16
	4	C4	17.28	27	(Q <sub>27</sub> ) <sup>c</sup>	466.56
	5	C5	13.90	39	(Q <sub>39</sub> ) <sup>c</sup>	542.1
5	1	C1	7.62	34	(Q <sub>34</sub> ) <sup>c</sup>	259.08
	2	C2	6.08	34	(Q <sub>34</sub> ) <sup>c</sup>	206.72
	3	C3	8.44	34	(Q <sub>34</sub> ) <sup>c</sup>	286.96
	4	C4	17.28	34	(Q <sub>34</sub> ) <sup>c</sup>	587.52
	5	C5	13.90	34	(Q <sub>34</sub> ) <sup>c</sup>	472.6
6	1	C1	7.62	23	(Q <sub>23</sub> ) <sup>c</sup>	175.26
	3	C3	8.44	23	(Q <sub>23</sub> ) <sup>c</sup>	194.12
	4	C4	17.28	23	(Q <sub>23</sub> ) <sup>c</sup>	397.44
	5	C5	13.90	23	(Q <sub>23</sub> ) <sup>c</sup>	319.7
7	1	C1	7.62	11	(Q <sub>17</sub> ) <sup>c</sup>	93.82
	3	C3	8.44	11	(Q <sub>17</sub> ) <sup>c</sup>	92.84
	4	C4	17.28	11	(Q <sub>17</sub> ) <sup>c</sup>	190.08
8	1	C1	7.62	22	(Q <sub>10</sub> ) <sup>c</sup>	167.64
	3	C3	8.44	22	(Q <sub>22</sub> ) <sup>c</sup>	185.68
	6	CW	(FCp) <sub>w</sub>	22	(Q <sub>22</sub> ) <sup>c</sup>	(FCp) <sub>w</sub> (22)
9	3	C3	8.44	22	(Q <sub>22</sub> ) <sup>c</sup>	185.68
	6	CW	(FCp) <sub>w</sub>	22	(Q <sub>22</sub> ) <sup>c</sup>	(FCp) <sub>w</sub> (22)

Balances de Energía por Intervalo

- 1  $R_0 - R_1 + (Q_{41})^H = 0$
- 2  $R_1 - R_2 + (Q_{22})^H + (Q_{42})^H - (Q_{32})^C - (Q_{52})^C = 0$
- 3  $R_2 - R_3 + (Q_{23})^H + (Q_{43})^H + (Q_{44})^H - (Q_{33})^C - (Q_{53})^C - (Q_{57})^C = 0$
- 4  $R_3 - R_4 + (Q_{24})^H + (Q_{44})^H + (Q_{44})^H + (Q_{54})^H - (Q_{34})^C - (Q_{54})^C = 0$
- 5  $R_4 - R_5 + (Q_{15})^H + (Q_{25})^H + (Q_{35})^H + (Q_{45})^H - (Q_{25})^C = 0$
- 6  $R_5 - R_6 + (Q_{16})^H + (Q_{26})^H + (Q_{36})^H - (Q_{16})^C - (Q_{26})^C - (Q_{46})^C - (Q_{56})^C = 0$
- 7  $R_6 - R_7 + (Q_{17})^H + (Q_{37})^H + (Q_{57})^H - (Q_{17})^C - (Q_{37})^C - (Q_{47})^C = 0$
- 8  $R_7 - R_8 + (Q_{58})^H + (Q_{58})^H - (Q_{18})^C - (Q_{38})^C - (Q_{48})^C = 0$
- 9  $R_8 - R_9 + (Q_{59})^H + (Q_{59})^H - (Q_{39})^C - (Q_{49})^C = 0$

Recordando que los  $R_k$  son los calores residuales que  $(R_k)$  entran y  $(-R_k)$  salen del intervalo, por lo que  $R_0 = R_9 = 0$ , y sustituyendo los valores de las tablas 4.26 y 4.27, respecto a la entrada y salida de calor para cada intervalo, las ecuaciones de Balance de Energía por intervalo, constituirán las restricciones del problema lineal (P1), y su función objetivo vendrá dada por:

$$\text{Minimizar } (Q_{48})^C + (Q_{49})^C$$

que corresponde a la minimización del calor proporcionado por las corrientes de servicio presentes en el problema, ya que  $(Q_{48})^C$  y  $(Q_{49})^C$  es el calor recibido por el agua de enfriamiento en los intervalos 8 y 9. Dichos calores son proporcionales al flujo másico de las corrientes de servicio. Ahora, substituyendo valores en las restricciones, el problema lineal (P1), puede escribirse como:

$$\text{Minimizar } (Q_{48})^C + (Q_{49})^C$$

sujeto a (P1)

- $R_1 = 276.32$
- $R_1 - R_2 = -444.26$
- $R_2 - R_3 = -431.68$
- $R_3 - R_4 = -517.65$
- $R_4 - R_5 = 38.76$
- $R_5 - R_6 = 136.85$
- $R_6 - R_7 = -78.66$
- $R_7 - R_8 - (Q_{48})^C = -361.68$
- $R_8 - R_9 - (Q_{49})^C = 55.68$

$$R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, R_7, R_8, (Q_{48})^C, (Q_{49})^C \geq 0$$

Introduciendo este problema al paquete de optimización en una computadora GAMMA XT (procesado: ...), se resolvió en 9 iteraciones. El cál...

1977. El valor de la función objetivo es 1878.96. Los valores de las variables de decisión en óptima son los siguientes:

Valor de la función objetivo = 1878.96

VARIABLE	VALOR
$(Q_{20})^c$	1878.96
$(Q_{40})^c$	0.
$R_1$	275.32
$R_2$	720.58
$R_3$	1152.26
$R_4$	1669.91
$R_5$	1831.15
$R_6$	1494.30
$R_7$	1572.96
$R_8$	55.68

Los resultados obtenidos concuerdan con los reportados por Cerda [3] y por Papoulias & Grossman [19]. La representación esquemática de los intervalos de temperatura y de los flujos positivos y negativos de calor de cada corriente en cada intervalo, tomando en cuenta estos resultados, se encuentra en la Fig. 4.7.

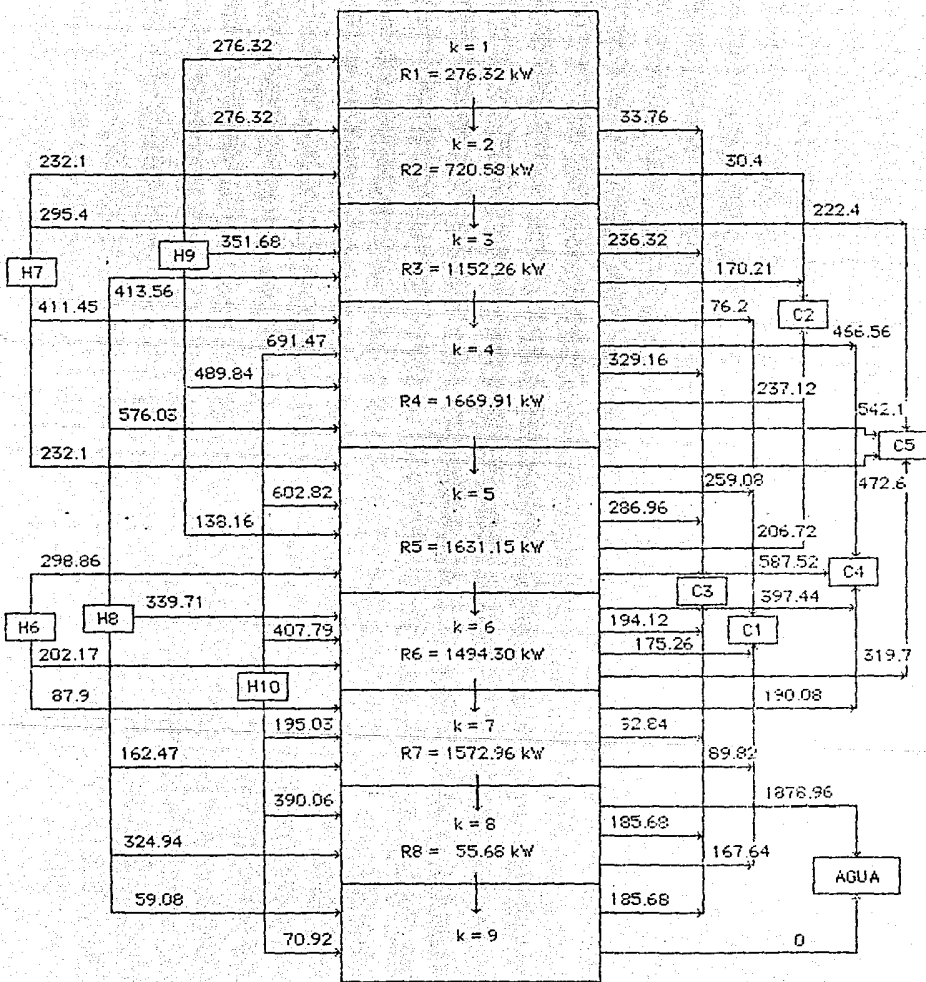
Después, el modelo MILP (P2) es usado con el objeto de obtener el número mínimo de unidades de intercambio de calor para el problema IQSF1. Ya que no existe un "punto estrecho", los intervalos de temperatura se trabajan en una sola subred. En la Tabla 4.28 (a) se muestran los nombres de las variables continuas  $(Q_{ijk})$  que corresponden a los intercambios de calor entre las corrientes frías y calientes, presentes en ese intervalo, y en la Tabla 4.28 (b), se muestran las variables correspondientes al intercambio de calor entre los calores residuales de las corrientes calientes que ya no están presentes en el intervalo y las corrientes frías que sí lo están (Ver Tabla 4.25).

TABLA 4.28. Variables de intercambio de calor entre corrientes

(a) Presentes en el intervalo

i	k	Corrientes i	j	$Q_{ijk}$	j	k	Corrientes i	j	$Q_{ijk}$	
1	2	H7 - C2	2	2	$Q_{222}$	5	H8 - C2	3	2	$Q_{522}$
		H9 - C2	4	2	$Q_{422}$			H8 - C3	3	3
	H7 - C3	2	3	$Q_{232}$	H9 - C4		3	4	$Q_{343}$	
	H9 - C3	4	3	$Q_{432}$	H8 - C5		3	5	$Q_{555}$	
3	H7 - C2	2	2	$Q_{223}$	H9 - C1	4	1	$Q_{413}$		
		H7 - C3	2	3	$Q_{233}$	H9 - C2	4	2	$Q_{423}$	
	H7 - C5	2	5	$Q_{253}$	H9 - C3	4	3	$Q_{433}$		
	H8 - C2	3	2	$Q_{323}$	H9 - C4	4	4	$Q_{443}$		
	H8 - C3	3	3	$Q_{333}$	H9 - C5	4	5	$Q_{453}$		
H8 - C5	3	5	$Q_{353}$	H10 - C1	5	1	$Q_{513}$			

Fig. 4.7 Resultado del Modelo (P1) para el Ejemplo 10SP1



4	H9 - C2	4 2	Q <sub>423</sub>
	H9 - C3	4 3	Q <sub>433</sub>
	H9 - C5	4 5	Q <sub>453</sub>
	H7 - C1	2 1	Q <sub>214</sub>
	H7 - C2	2 2	Q <sub>224</sub>
	H7 - C3	2 3	Q <sub>234</sub>
	H7 - C4	2 4	Q <sub>244</sub>
	H7 - C5	2 5	Q <sub>254</sub>
	H8 - C1	3 1	Q <sub>314</sub>
	H8 - C2	3 2	Q <sub>324</sub>
	H8 - C3	3 3	Q <sub>334</sub>
	H8 - C4	3 4	Q <sub>344</sub>
	H8 - C5	3 5	Q <sub>354</sub>
	H9 - C1	4 1	Q <sub>414</sub>
	H9 - C2	4 2	Q <sub>424</sub>
H9 - C3	4 3	Q <sub>434</sub>	
H9 - C4	4 4	Q <sub>444</sub>	
H9 - C5	4 5	Q <sub>454</sub>	
5	H10 - C1	5 1	Q <sub>514</sub>
	H10 - C2	5 2	Q <sub>524</sub>
	H10 - C3	5 3	Q <sub>534</sub>
	H10 - C4	5 4	Q <sub>544</sub>
	H10 - C5	5 5	Q <sub>554</sub>
	H6 - C1	1 1	Q <sub>115</sub>
	H6 - C2	1 2	Q <sub>125</sub>
	H6 - C3	1 3	Q <sub>135</sub>
	H6 - C4	1 4	Q <sub>145</sub>
	H6 - C5	1 5	Q <sub>155</sub>
	H7 - C1	2 1	Q <sub>215</sub>
	H7 - C2	2 2	Q <sub>225</sub>
	H7 - C3	2 3	Q <sub>235</sub>
	H7 - C4	2 4	Q <sub>245</sub>
	H7 - C5	2 5	Q <sub>255</sub>
H8 - C1	3 1	Q <sub>315</sub>	

6	H10 - C2	5 2	Q <sub>525</sub>	
	H10 - C3	5 3	Q <sub>535</sub>	
	H10 - C4	5 4	Q <sub>545</sub>	
	H10 - C5	5 5	Q <sub>555</sub>	
	H6 - C1	1 1	Q <sub>116</sub>	
	H6 - C2	1 2	Q <sub>126</sub>	
	H6 - C4	1 4	Q <sub>146</sub>	
	H6 - C5	1 5	Q <sub>156</sub>	
	H8 - C1	3 1	Q <sub>316</sub>	
	H8 - C2	3 2	Q <sub>326</sub>	
	H8 - C4	3 4	Q <sub>346</sub>	
	H8 - C5	3 5	Q <sub>356</sub>	
	H10 - C1	5 1	Q <sub>516</sub>	
	H10 - C3	5 3	Q <sub>536</sub>	
	H10 - C4	5 4	Q <sub>546</sub>	
7	H10 - C5	5 5	Q <sub>556</sub>	
	H6 - C1	1 1	Q <sub>117</sub>	
	H6 - C2	1 2	Q <sub>127</sub>	
	H6 - C4	1 4	Q <sub>147</sub>	
	H8 - C1	3 1	Q <sub>317</sub>	
	H8 - C2	3 2	Q <sub>327</sub>	
	H8 - C4	3 4	Q <sub>347</sub>	
	H10 - C1	5 1	Q <sub>517</sub>	
	H10 - C2	5 2	Q <sub>527</sub>	
	H10 - C4	5 4	Q <sub>547</sub>	
	8	H8 - C1	3 1	Q <sub>318</sub>
		H8 - C2	3 2	Q <sub>328</sub>
		H8 - C4	3 4	Q <sub>348</sub>
		H10 - C1	5 1	Q <sub>518</sub>
		H10 - C2	5 2	Q <sub>528</sub>
H10 - C4		5 4	Q <sub>548</sub>	
9		H8 - C1	3 1	Q <sub>319</sub>
		H8 - C2	3 2	Q <sub>329</sub>
		H8 - C4	3 4	Q <sub>349</sub>
		H10 - C1	5 1	Q <sub>519</sub>
		H10 - C2	5 2	Q <sub>529</sub>
		H10 - C4	5 4	Q <sub>549</sub>
		H8 - C1	3 1	Q <sub>320</sub>
		H8 - C2	3 2	Q <sub>320</sub>
		H8 - C4	3 4	Q <sub>340</sub>
	H10 - C1	5 1	Q <sub>520</sub>	
	H10 - C2	5 2	Q <sub>520</sub>	
	H10 - C4	5 4	Q <sub>540</sub>	

(b) Con los calores residuales

l	k	Corrientes	i	j	Q <sub>ijkl</sub>	
1	5	H7	C1	2 1	Q <sub>216</sub>	
			C2	2 2	Q <sub>226</sub>	
			C4	2 4	Q <sub>246</sub>	
			C5	2 5	Q <sub>256</sub>	
			C1	4 1	Q <sub>416</sub>	
		H9	C3	4 3	Q <sub>436</sub>	
			C4	4 4	Q <sub>446</sub>	
			C5	4 5	Q <sub>456</sub>	
			H7	C1	2 1	Q <sub>217</sub>
				C2	2 2	Q <sub>227</sub>
		C4		2 4	Q <sub>247</sub>	
		H9		C1	4 1	Q <sub>417</sub>
				C3	4 3	Q <sub>437</sub>
			C4	4 4	Q <sub>447</sub>	

l	k	Corrientes	i	j	Q <sub>ijkl</sub>	
1	8	H6	C1	1 1	Q <sub>116</sub>	
			C2	1 2	Q <sub>126</sub>	
			CW	1 6	Q <sub>166</sub>	
			H7	C1	2 1	Q <sub>218</sub>
				C2	2 2	Q <sub>228</sub>
		CW		2 6	Q <sub>268</sub>	
		H9		C1	4 1	Q <sub>418</sub>
				C2	4 2	Q <sub>428</sub>
			CW	4 6	Q <sub>468</sub>	
			H6	C2	1 2	Q <sub>129</sub>
				CW	1 6	Q <sub>169</sub>
		H7		C2	2 2	Q <sub>229</sub>
				CW	2 6	Q <sub>269</sub>
				H9	C2	4 2

En la Tabla 4.31 se presentan los nombres de las variables discretas binarias  $Y_{ij}$ , con su respectivo valor de  $U_{ij}$  y con las ecuaciones respectivas. Posteriormente se muestran los balances de energía para las corrientes calientes y para las frías, por intervalo.

TABLA 4.32 Ecuaciones de acotamiento al intercambio de calor

i	j	$Y_{ij}$	$(Q_{ij})^H$	$(Q_{ij})^C$	$U_{ij}$
1	1	$Y_{111}$	588.93	762.	588.93
1	2	$Y_{121}$	588.93	644.46	588.93
1	3	$Y_{131}$	588.93	1544.52	588.93
1	4	$Y_{141}$	588.93	1641.6	588.93
1	5	$Y_{151}$	588.93	1556.8	588.93
1	6	$Y_{161}$	588.93	1878.96	588.93
2	1	$Y_{211}$	1171.05	762.	762.
2	2	$Y_{221}$	1171.05	644.46	644.46
2	3	$Y_{231}$	1171.05	1544.52	1171.05
2	4	$Y_{241}$	1171.05	1641.6	1171.05
2	5	$Y_{251}$	1171.05	1556.8	1171.05
2	6	$Y_{261}$	1171.05	1878.96	1171.05
3	1	$Y_{311}$	2377.97	762.	762.
3	2	$Y_{321}$	2377.97	644.46	644.46
3	3	$Y_{331}$	2377.97	1544.52	1544.52
3	4	$Y_{341}$	2377.97	1641.6	1641.6
3	5	$Y_{351}$	2377.97	1556.8	1556.8
3	6	$Y_{361}$	2377.97	1878.96	1878.96
4	1	$Y_{411}$	1532.32	762.	762.
4	2	$Y_{421}$	1532.32	644.46	644.46
4	3	$Y_{431}$	1532.32	1544.52	1532.32
4	4	$Y_{441}$	1532.32	1641.6	1532.32
4	5	$Y_{451}$	1532.32	1556.8	1532.32
4	6	$Y_{461}$	1532.32	1878.96	1532.32
5	1	$Y_{511}$	2358.09	762.	762.
5	2	$Y_{521}$	2358.09	644.46	644.46
5	3	$Y_{531}$	2358.09	1544.52	1544.52
5	4	$Y_{541}$	2358.09	1641.6	1641.6
5	5	$Y_{551}$	2358.09	1556.8	1556.8
5	6	$Y_{561}$	2358.09	1878.96	1878.96

i j i Ecuaciones de Acotamiento

1	1	1	$Q_{115} + Q_{116} + Q_{117} + Q_{118} - 588.93 Y_{111} \leq 0$
1	2	1	$Q_{125} - 588.93 Y_{121} \leq 0$
1	3	1	$Q_{135} + Q_{136} + Q_{137} + Q_{138} + Q_{139} - 588.93 Y_{131} \leq 0$
1	4	1	$Q_{145} + Q_{146} + Q_{147} - 588.93 Y_{141} \leq 0$
1	5	1	$Q_{155} + Q_{156} - 588.93 Y_{151} \leq 0$
1	6	1	$Q_{165} + Q_{166} - 588.93 Y_{161} \leq 0$
2	1	1	$Q_{215} + Q_{216} + Q_{217} + Q_{218} - 762. Y_{211} \leq 0$
2	2	1	$Q_{225} + Q_{226} + Q_{227} + Q_{228} - 644.46 Y_{221} \leq 0$



$$\begin{aligned}
 2\ 3\ 1 &: Q_{232} + Q_{233} + Q_{234} + Q_{235} + Q_{236} + Q_{237} + Q_{238} + Q_{239} = 1171.05\ Y_{231} = 0 \\
 2\ 4\ 1 &: Q_{242} + Q_{243} + Q_{244} + Q_{245} = 1171.05\ Y_{241} = 0 \\
 2\ 5\ 1 &: Q_{253} + Q_{254} + Q_{255} + Q_{256} = 1171.05\ Y_{251} = 0 \\
 2\ 6\ 1 &: Q_{269} + Q_{269} = 1171.05\ Y_{261} = 0 \\
 3\ 1\ 1 &: Q_{314} + Q_{315} + Q_{316} + Q_{317} + Q_{318} = 762. Y_{311} = 0 \\
 3\ 2\ 1 &: Q_{323} + Q_{324} + Q_{325} = 644.48\ Y_{321} = 0 \\
 3\ 3\ 1 &: Q_{333} + Q_{334} + Q_{335} + Q_{336} + Q_{337} + Q_{338} + Q_{339} = 1544.52\ Y_{331} = 0 \\
 3\ 4\ 1 &: Q_{344} + Q_{345} + Q_{346} + Q_{347} = 1641.6\ Y_{341} = 0 \\
 3\ 5\ 1 &: Q_{353} + Q_{354} + Q_{355} + Q_{356} = 1556.8\ Y_{351} = 0 \\
 3\ 6\ 1 &: Q_{369} + Q_{369} = 1576.96\ Y_{361} = 0 \\
 4\ 1\ 1 &: Q_{414} + Q_{415} + Q_{416} + Q_{417} + Q_{418} = 762. Y_{411} = 0 \\
 4\ 2\ 1 &: Q_{423} + Q_{423} + Q_{424} + Q_{425} = 644.48\ Y_{421} = 0 \\
 4\ 3\ 1 &: Q_{433} + Q_{434} + Q_{435} + Q_{436} + Q_{437} + Q_{438} + Q_{439} = 1532.32\ Y_{431} = 0 \\
 4\ 4\ 1 &: Q_{444} + Q_{444} + Q_{444} + Q_{444} = 1532.32\ Y_{441} = 0 \\
 4\ 5\ 1 &: Q_{453} + Q_{454} + Q_{455} + Q_{456} = 1532.32\ Y_{451} = 0 \\
 4\ 6\ 1 &: Q_{469} + Q_{469} = 1532.32\ Y_{461} = 0 \\
 5\ 1\ 1 &: Q_{514} + Q_{515} + Q_{516} + Q_{517} + Q_{518} = 762. Y_{511} = 0 \\
 5\ 2\ 1 &: Q_{524} + Q_{524} = 644.48\ Y_{521} = 0 \\
 5\ 3\ 1 &: Q_{533} + Q_{533} + Q_{536} + Q_{537} + Q_{538} + Q_{539} = 1544.52\ Y_{531} = 0 \\
 5\ 4\ 1 &: Q_{544} + Q_{545} + Q_{546} + Q_{547} = 1641.6\ Y_{541} = 0 \\
 5\ 5\ 1 &: Q_{553} + Q_{556} = 1556.8\ Y_{551} = 0 \\
 5\ 6\ 1 &: Q_{569} = 1576.96\ Y_{561} = 0
 \end{aligned}$$

## Balances de Energia/intervalo/corriente/subred

(a) Para las corrientes calientes

1 k i

$$\begin{aligned}
 1\ 1\ 4 &: R_{11} = (Q_{11})^H = 276.32 \\
 2\ 2 &: R_{22} + Q_{222} + Q_{223} = (Q_{22})^H = 232.1 \\
 4 &: R_{42} - R_{41} + Q_{422} + Q_{423} = (Q_{42})^H = 276.32 \\
 3 &: R_{33} - R_{33} + Q_{333} + Q_{334} + Q_{335} + Q_{336} = (Q_{33})^H = 295.4 \\
 3 &: R_{33} + Q_{333} + Q_{333} + Q_{333} = (Q_{33})^H = 413.56 \\
 4 &: R_{43} - R_{43} + Q_{433} + Q_{434} + Q_{435} = (Q_{43})^H = 351.58 \\
 4\ 2 &: R_{42} - R_{42} + Q_{422} + Q_{423} + Q_{424} + Q_{425} + Q_{426} + Q_{427} = (Q_{42})^H = 411.45 \\
 3 &: R_{34} - R_{34} + Q_{314} + Q_{324} + Q_{334} + Q_{344} + Q_{354} = (Q_{34})^H = 576.03 \\
 4 &: R_{44} - R_{44} + Q_{414} + Q_{424} + Q_{434} + Q_{444} + Q_{454} = (Q_{44})^H = 489.84 \\
 5 &: R_{54} + Q_{514} + Q_{524} + Q_{534} + Q_{544} + Q_{554} = (Q_{54})^H = 591.47 \\
 5\ 1 &: R_{15} + Q_{115} + Q_{125} + Q_{135} + Q_{145} + Q_{155} = (Q_{15})^H = 298.56 \\
 2 &: R_{25} - R_{25} + Q_{215} + Q_{225} + Q_{235} + Q_{245} + Q_{255} = (Q_{25})^H = 232.1 \\
 3 &: R_{35} - R_{35} + Q_{315} + Q_{325} + Q_{335} + Q_{345} + Q_{355} = (Q_{35})^H = 502.18 \\
 4 &: R_{45} - R_{44} + Q_{415} + Q_{425} + Q_{435} + Q_{445} + Q_{455} = (Q_{45})^H = 138.16 \\
 5 &: R_{55} - R_{54} + Q_{515} + Q_{525} + Q_{535} + Q_{545} + Q_{555} = (Q_{55})^H = 602.82 \\
 5\ 1 &: R_{16} - R_{15} + Q_{116} + Q_{126} + Q_{136} + Q_{146} + Q_{156} = (Q_{16})^H = 202.17 \\
 2 &: R_{26} - R_{25} + Q_{216} + Q_{226} + Q_{236} + Q_{256} = 0 \\
 3 &: R_{36} - R_{35} + Q_{316} + Q_{326} + Q_{336} + Q_{346} + Q_{356} = (Q_{36})^H = 339.71 \\
 4 &: R_{46} - R_{45} + Q_{416} + Q_{426} + Q_{436} + Q_{446} + Q_{456} = 0 \\
 5 &: R_{56} - R_{55} + Q_{516} + Q_{526} + Q_{536} + Q_{546} + Q_{556} = (Q_{56})^H = 407.79 \\
 7\ 1 &: R_{17} - R_{16} + Q_{117} + Q_{127} + Q_{137} + Q_{147} = (Q_{17})^H = 37.9 \\
 2 &: R_{27} - R_{26} + Q_{217} + Q_{227} + Q_{247} = 0 \\
 3 &: R_{37} - R_{36} + Q_{317} + Q_{327} + Q_{347} = (Q_{37})^H = 162.47 \\
 4 &: R_{47} - R_{46} + Q_{417} + Q_{427} + Q_{447} = 0 \\
 5 &: R_{57} - R_{56} + Q_{517} + Q_{527} + Q_{547} = (Q_{57})^H = 195.03
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8 \quad 1 & \quad R_{10} - R_{17} + Q_{110} + Q_{130} + Q_{160} = 0 \\
 2 & \quad R_{20} - R_{27} + Q_{210} + Q_{230} + Q_{260} = 0 \\
 3 & \quad R_{30} - R_{37} + Q_{310} + Q_{330} + Q_{360} = (Q_{30})^c = 324.94 \\
 4 & \quad R_{40} - R_{47} + Q_{410} + Q_{430} + Q_{460} = 0 \\
 5 & \quad R_{50} - R_{57} + Q_{510} + Q_{530} + Q_{560} = (Q_{50})^c = 390.06 \\
 6 \quad 1 & \quad -R_{10} + Q_{130} + Q_{160} = 0 \\
 2 & \quad -R_{20} + Q_{230} + Q_{260} = 0 \\
 3 & \quad -R_{30} + Q_{330} + Q_{360} = (Q_{30})^c = 59.08 \\
 4 & \quad -R_{40} + Q_{430} + Q_{460} = 0 \\
 5 & \quad -R_{50} + Q_{530} + Q_{560} = (Q_{50})^c = 70.92
 \end{aligned}$$

(b) Para las corrientes frías

1 2 3

---


$$\begin{aligned}
 1 \quad 2 & \quad Q_{222} + Q_{422} = (Q_{22})^c = 30.4 \\
 3 & \quad Q_{322} + Q_{422} = (Q_{32})^c = 30.75 \\
 3 \quad 3 & \quad Q_{333} + Q_{533} + Q_{433} = (Q_{33})^c = 170.24 \\
 3 & \quad Q_{333} + Q_{533} + Q_{433} = (Q_{33})^c = 232.30 \\
 4 & \quad Q_{433} + Q_{533} + Q_{433} = (Q_{43})^c = 222.4 \\
 4 \quad 1 & \quad Q_{214} + Q_{314} + Q_{414} + Q_{514} = (Q_{14})^c = 76.2 \\
 2 & \quad Q_{224} + Q_{324} + Q_{424} + Q_{524} = (Q_{24})^c = 237.12 \\
 3 & \quad Q_{324} + Q_{334} + Q_{434} + Q_{534} = (Q_{34})^c = 329.15 \\
 4 & \quad Q_{424} + Q_{334} + Q_{444} + Q_{544} = (Q_{44})^c = 466.56 \\
 5 & \quad Q_{254} + Q_{354} + Q_{454} + Q_{554} = (Q_{54})^c = 542.1 \\
 5 \quad 1 & \quad Q_{115} + Q_{215} + Q_{315} + Q_{415} + Q_{515} = (Q_{15})^c = 259.08 \\
 2 & \quad Q_{125} + Q_{225} + Q_{325} + Q_{425} + Q_{525} = (Q_{25})^c = 206.72 \\
 3 & \quad Q_{135} + Q_{235} + Q_{335} + Q_{435} + Q_{535} = (Q_{35})^c = 286.96 \\
 4 & \quad Q_{145} + Q_{245} + Q_{345} + Q_{445} + Q_{545} = (Q_{45})^c = 587.52 \\
 5 & \quad Q_{155} + Q_{255} + Q_{355} + Q_{455} + Q_{555} = (Q_{55})^c = 472.6 \\
 6 \quad 1 & \quad Q_{116} + Q_{216} + Q_{316} + Q_{416} + Q_{516} = (Q_{16})^c = 175.26 \\
 2 & \quad Q_{126} + Q_{226} + Q_{326} + Q_{426} + Q_{526} = (Q_{26})^c = 194.12 \\
 3 & \quad Q_{136} + Q_{236} + Q_{336} + Q_{436} + Q_{536} = (Q_{36})^c = 397.44 \\
 4 & \quad Q_{146} + Q_{246} + Q_{346} + Q_{446} + Q_{546} = (Q_{46})^c = 319.7 \\
 5 & \quad Q_{156} + Q_{256} + Q_{356} + Q_{456} + Q_{556} = (Q_{56})^c = 83.82 \\
 7 \quad 1 & \quad Q_{117} + Q_{217} + Q_{317} + Q_{417} + Q_{517} = (Q_{17})^c = 92.84 \\
 2 & \quad Q_{127} + Q_{227} + Q_{327} + Q_{427} + Q_{527} = (Q_{27})^c = 190.08 \\
 3 & \quad Q_{137} + Q_{237} + Q_{337} + Q_{437} + Q_{537} = (Q_{37})^c = 167.64 \\
 4 & \quad Q_{147} + Q_{247} + Q_{347} + Q_{447} + Q_{547} = (Q_{47})^c = 185.68 \\
 5 & \quad Q_{157} + Q_{257} + Q_{357} + Q_{457} + Q_{557} = (Q_{57})^c = 1975.96 \\
 6 & \quad Q_{167} + Q_{267} + Q_{367} + Q_{467} + Q_{567} = (Q_{67})^c = 185.68 \\
 7 & \quad Q_{177} + Q_{277} + Q_{377} + Q_{477} + Q_{577} = (Q_{77})^c = 0
 \end{aligned}$$

Las restricciones del modelo MILP están constituidas por las Ecuaciones de Balance de Energía, para las corrientes calientes y para las corrientes frías, y por las ecuaciones que acotan la cantidad de intercambio de calor para cada par de corrientes dentro de cada subred. La función objetivo será la suma de las 30 variables binarias que corresponden a unidades de transferencia de calor entre corrientes.

Finalmente, el modelo de transbordo MILP para este problema IOSF1, queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } & Y_{111} + Y_{121} + Y_{131} + Y_{141} + Y_{151} + Y_{161} + Y_{171} + Y_{221} + \\ & Y_{231} + Y_{241} + Y_{251} + Y_{261} + Y_{311} + Y_{321} + Y_{331} + Y_{341} + \\ & Y_{351} + Y_{361} + Y_{411} + Y_{421} + Y_{431} + Y_{441} + Y_{451} + Y_{461} + \\ & Y_{511} + Y_{521} + Y_{531} + Y_{541} + Y_{551} + Y_{561} \end{aligned}$$

sujeito a

$$R_{41} = 376.00$$

$$R_{42} = 376.00$$

$$R_{43} = 376.00$$

$$R_{44} = 376.00$$

$$R_{45} = 376.00$$

$$R_{46} = 376.00$$

$$R_{47} = 376.00$$

$$R_{48} = 376.00$$

$$R_{49} = 376.00$$

$$R_{50} = 376.00$$

$$R_{51} = 376.00$$

$$R_{52} = 376.00$$

$$R_{53} = 376.00$$

$$R_{54} = 376.00$$

$$R_{55} = 376.00$$

$$R_{56} = 376.00$$

$$R_{57} = 376.00$$

$$R_{58} = 376.00$$

$$R_{59} = 376.00$$

$$R_{60} = 376.00$$

$$R_{61} = 376.00$$

$$R_{62} = 376.00$$

$$R_{63} = 376.00$$

$$R_{64} = 376.00$$

$$R_{65} = 376.00$$

$$R_{66} = 376.00$$

$$R_{67} = 376.00$$

$$R_{68} = 376.00$$

$$R_{69} = 376.00$$

$$R_{70} = 376.00$$

$$R_{71} = 376.00$$

$$R_{72} = 376.00$$

$$R_{73} = 376.00$$

$$R_{74} = 376.00$$

$$R_{75} = 376.00$$

$$R_{76} = 376.00$$

$$R_{77} = 376.00$$

$$R_{78} = 376.00$$

$$R_{79} = 376.00$$

$$R_{80} = 376.00$$

$$R_{81} = 376.00$$

$$R_{82} = 376.00$$

$$R_{83} = 376.00$$

$$R_{84} = 376.00$$

$$R_{85} = 376.00$$

$$R_{86} = 376.00$$

$$R_{87} = 376.00$$

$$R_{88} = 376.00$$

$$R_{89} = 376.00$$

$$R_{90} = 376.00$$

$$Q_{111} + Q_{121} + Q_{131} + Q_{141} + Q_{151} = 411.58$$

$$R_{41} - R_{42} + Q_{121} + Q_{131} + Q_{141} = 751.88$$

$$R_{42} - R_{43} + Q_{214} + Q_{224} + Q_{234} + Q_{244} + Q_{254} = 411.45$$

$$R_{43} - R_{44} + Q_{314} + Q_{324} + Q_{334} + Q_{344} + Q_{354} = 576.00$$

$$R_{44} - R_{45} + Q_{414} + Q_{424} + Q_{434} + Q_{444} + Q_{454} = 409.84$$

$$R_{45} + Q_{514} + Q_{524} + Q_{534} + Q_{544} + Q_{554} = 691.47$$

$$R_{46} + Q_{115} + Q_{125} + Q_{135} + Q_{145} + Q_{155} = 298.86$$

$$R_{47} - R_{48} + Q_{215} + Q_{225} + Q_{235} + Q_{245} + Q_{255} = 233.1$$

$$R_{48} - R_{49} + Q_{315} + Q_{325} + Q_{335} + Q_{345} + Q_{355} = 502.18$$

$$R_{49} - R_{44} + Q_{415} + Q_{425} + Q_{435} + Q_{445} + Q_{455} = 138.15$$

$$R_{50} - R_{45} + Q_{515} + Q_{525} + Q_{535} + Q_{545} + Q_{555} = 602.00$$

$$R_{46} - R_{46} + Q_{116} + Q_{126} + Q_{136} + Q_{146} + Q_{156} = 202.17$$

$$R_{47} - R_{47} + Q_{216} + Q_{226} + Q_{236} + Q_{246} + Q_{256} = 0$$

$$R_{48} - R_{48} + Q_{316} + Q_{326} + Q_{336} + Q_{346} + Q_{356} = 339.71$$

$$R_{49} - R_{49} + Q_{416} + Q_{426} + Q_{436} + Q_{446} + Q_{456} = 0$$

$$R_{50} - R_{50} + Q_{516} + Q_{526} + Q_{536} + Q_{546} + Q_{556} = 407.79$$

$$R_{47} - R_{47} + Q_{117} + Q_{127} + Q_{137} + Q_{147} + Q_{157} = 87.9$$

$$R_{47} - R_{47} + Q_{217} + Q_{227} + Q_{237} + Q_{247} = 0$$

$$R_{47} - R_{47} + Q_{317} + Q_{327} + Q_{337} + Q_{347} = 160.47$$

$$R_{47} - R_{47} + Q_{417} + Q_{427} + Q_{437} + Q_{447} = 0$$

$$R_{47} - R_{47} + Q_{517} + Q_{527} + Q_{537} + Q_{547} = 195.00$$

$$R_{48} - R_{47} + Q_{118} + Q_{128} + Q_{138} + Q_{148} = 0$$

$$R_{48} - R_{47} + Q_{218} + Q_{228} + Q_{238} + Q_{248} = 0$$

$$R_{48} - R_{47} + Q_{318} + Q_{328} + Q_{338} + Q_{348} = 324.94$$

$$R_{48} - R_{47} + Q_{418} + Q_{428} + Q_{438} + Q_{448} = 0$$

$$R_{48} - R_{47} + Q_{518} + Q_{528} + Q_{538} + Q_{548} = 390.06$$

$$-R_{48} + Q_{159} + Q_{169} = 0$$

$$-R_{48} + Q_{259} + Q_{269} = 0$$

$$-R_{48} + Q_{359} + Q_{369} = 59.08$$

$$-R_{48} + Q_{459} + Q_{469} = 0$$

$$-R_{48} + Q_{559} + Q_{569} = 70.92$$

$$Q_{122} + Q_{132} = 30.4$$

$$Q_{222} + Q_{132} = 33.76$$

$$Q_{222} + Q_{332} + Q_{422} = 170.24$$

$$Q_{222} + Q_{332} + Q_{422} = 236.32$$

$$Q_{222} + Q_{332} + Q_{422} = 222.4$$

$$Q_{214} + Q_{314} + Q_{414} + Q_{514} = 76.2$$

$$Q_{224} + Q_{324} + Q_{424} + Q_{524} = 337.12$$

$$Q_{234} + Q_{334} + Q_{434} + Q_{534} = 329.16$$

$$Q_{244} + Q_{344} + Q_{444} + Q_{544} = 466.56$$

$$Q_{254} + Q_{354} + Q_{454} + Q_{554} = 542.1$$

$$Q_{115} + Q_{215} + Q_{315} + Q_{415} + Q_{515} = 259.08$$

$$Q_{125} + Q_{225} + Q_{325} + Q_{425} + Q_{525} = 206.72$$

$$Q_{135} + Q_{235} + Q_{335} + Q_{435} + Q_{535} = 286.96$$

$Q_{145} + Q_{245} + Q_{345} + Q_{445} + Q_{545} = 597.53$   
 $Q_{155} + Q_{255} + Q_{355} + Q_{455} + Q_{555} = 472.6$   
 $Q_{116} + Q_{216} + Q_{316} + Q_{416} + Q_{516} = 175.26$   
 $Q_{136} + Q_{236} + Q_{336} + Q_{436} + Q_{536} = 194.17$   
 $Q_{146} + Q_{246} + Q_{346} + Q_{446} + Q_{546} = 397.44$   
 $Q_{156} + Q_{256} + Q_{356} + Q_{456} + Q_{556} = 319.7$   
 $Q_{117} + Q_{217} + Q_{317} + Q_{417} + Q_{517} = 83.92$   
 $Q_{137} + Q_{237} + Q_{337} + Q_{437} + Q_{537} = 92.84$   
 $Q_{147} + Q_{247} + Q_{347} + Q_{447} + Q_{547} = 190.09$   
 $Q_{110} + Q_{210} + Q_{310} + Q_{410} + Q_{510} = 167.64$   
 $Q_{130} + Q_{230} + Q_{330} + Q_{430} + Q_{530} = 185.69$   
 $Q_{140} + Q_{240} + Q_{340} + Q_{440} + Q_{540} = 179.95$   
 $Q_{139} + Q_{239} + Q_{339} + Q_{439} + Q_{539} = 185.68$   
 $Q_{149} + Q_{249} + Q_{349} + Q_{449} + Q_{549} = 0$   
 $Q_{115} + Q_{116} + Q_{117} + Q_{110} - 588.93 Y_{111} \leq 0$   
 $Q_{125} - 588.93 Y_{121} \leq 0$   
 $Q_{135} + Q_{136} + Q_{137} + Q_{139} + Q_{130} - 588.93 Y_{131} \leq 0$   
 $Q_{145} + Q_{146} + Q_{147} - 588.93 Y_{141} \leq 0$   
 $Q_{155} + Q_{156} - 588.93 Y_{151} \leq 0$   
 $Q_{160} + Q_{169} - 588.93 Y_{161} \leq 0$   
 $Q_{214} + Q_{215} + Q_{216} + Q_{217} + Q_{210} - 762. Y_{211} \leq 0$   
 $Q_{224} + Q_{225} + Q_{226} + Q_{227} + Q_{229} - 644.48 Y_{221} \leq 0$   
 $Q_{234} + Q_{235} + Q_{236} + Q_{237} + Q_{239} + Q_{230} + Q_{239} - 1171.05 Y_{231} \leq 0$   
 $Q_{244} + Q_{245} + Q_{246} - Q_{247} - 1171.05 Y_{241} \leq 0$   
 $Q_{254} + Q_{255} + Q_{256} + Q_{259} - 1171.05 Y_{251} \leq 0$   
 $Q_{260} + Q_{269} - 1171.05 Y_{261} \leq 0$   
 $Q_{314} + Q_{315} + Q_{316} + Q_{317} + Q_{310} - 762. Y_{311} \leq 0$   
 $Q_{324} + Q_{325} + Q_{326} - 644.48 Y_{321} \leq 0$   
 $Q_{334} + Q_{335} + Q_{336} + Q_{337} + Q_{339} + Q_{330} + Q_{339} - 1544.52 Y_{331} \leq 0$   
 $Q_{344} + Q_{345} + Q_{346} + Q_{347} - 1641.6 Y_{341} \leq 0$   
 $Q_{354} + Q_{355} + Q_{356} + Q_{359} - 1556.8 Y_{351} \leq 0$   
 $Q_{360} + Q_{369} - 1878.95 Y_{361} \leq 0$   
 $Q_{414} + Q_{415} + Q_{416} + Q_{417} + Q_{410} - 762. Y_{411} \leq 0$   
 $Q_{424} + Q_{425} + Q_{426} + Q_{427} - 644.48 Y_{421} \leq 0$   
 $Q_{434} + Q_{435} + Q_{436} + Q_{437} + Q_{439} + Q_{430} + Q_{439} - 1532.32 Y_{431} \leq 0$   
 $Q_{444} + Q_{445} + Q_{446} + Q_{447} - 1532.32 Y_{441} \leq 0$   
 $Q_{454} + Q_{455} + Q_{456} + Q_{459} - 1532.32 Y_{451} \leq 0$   
 $Q_{460} + Q_{469} - 1532.32 Y_{461} \leq 0$   
 $Q_{514} + Q_{515} + Q_{516} + Q_{517} + Q_{510} - 762. Y_{511} \leq 0$   
 $Q_{524} + Q_{525} - 644.48 Y_{521} \leq 0$   
 $Q_{534} + Q_{535} + Q_{536} + Q_{537} + Q_{539} + Q_{530} + Q_{539} - 1544.52 Y_{531} \leq 0$   
 $Q_{544} + Q_{545} + Q_{546} + Q_{547} - 1641.6 Y_{541} \leq 0$   
 $Q_{554} + Q_{555} + Q_{556} - 1556.8 Y_{551} \leq 0$   
 $Q_{560} - 1878.95 Y_{561} \leq 0$

Este modelo de transbordo MILP tiene 30 variables binarias, 90 variables continuas, 90 columnas y la solución óptima fue obtenida con el código de programa LINDO en 73 iteraciones para el problema lineal y 138 para el mismo entero, en una computadora GAMMA XT (Procesador 80386-1). En la Fig. 4.8 se muestra la red de recuperación de calor que tiene el número mínimo de unidades (10 unidades). El número mínimo de unidades, es idéntica a la solución reportada por Cerda[2] y por Papoulias & Grossman [1]. Los valores de las variables de la solución óptima son los siguientes:

Valor de la función objetivo = 10

Variables Binarias	Flujos de calor		Calores Residuales					
Y <sub>111</sub> 0	Q <sub>222</sub>	30.4	Q <sub>222</sub>	206.72	Q <sub>117</sub>	0.	R <sub>11</sub>	276.32
Y <sub>121</sub> 0	Q <sub>222</sub>	33.76	Q <sub>222</sub>	154.2	Q <sub>127</sub>	0.	R <sub>12</sub>	157.94
Y <sub>131</sub> 0	Q <sub>422</sub>	0.	Q <sub>242</sub>	0.	Q <sub>137</sub>	171.71	R <sub>13</sub>	552.84
Y <sub>141</sub> 1	Q <sub>422</sub>	0.	Q <sub>242</sub>	0.	Q <sub>217</sub>	0.	R <sub>14</sub>	283.25
Y <sub>151</sub> 1	Q <sub>222</sub>	170.34	Q <sub>212</sub>	0.	Q <sub>227</sub>	0.	R <sub>15</sub>	186.69
Y <sub>161</sub> 0	Q <sub>222</sub>	9.45	Q <sub>227</sub>	0.	Q <sub>227</sub>	0.	R <sub>16</sub>	381.92
Y <sub>211</sub> 0	Q <sub>222</sub>	0.	Q <sub>222</sub>	0.	Q <sub>217</sub>	0.	R <sub>21</sub>	126.82
Y <sub>221</sub> 1	Q <sub>222</sub>	0.	Q <sub>222</sub>	0.	Q <sub>227</sub>	0.	R <sub>22</sub>	763.72
Y <sub>231</sub> 1	Q <sub>222</sub>	226.87	Q <sub>222</sub>	0.	Q <sub>247</sub>	0.	R <sub>23</sub>	629.56
Y <sub>241</sub> 0	Q <sub>222</sub>	0.	Q <sub>412</sub>	0.	Q <sub>417</sub>	0.	R <sub>24</sub>	148.71
Y <sub>251</sub> 0	Q <sub>422</sub>	0.	Q <sub>422</sub>	0.	Q <sub>427</sub>	0.	R <sub>25</sub>	71.05
Y <sub>261</sub> 0	Q <sub>422</sub>	0.	Q <sub>422</sub>	0.	Q <sub>447</sub>	0.	R <sub>26</sub>	1264.9
Y <sub>311</sub> 0	Q <sub>422</sub>	222.4	Q <sub>422</sub>	0.	Q <sub>217</sub>	92.82	R <sub>31</sub>	295.22
Y <sub>321</sub> 0	Q <sub>214</sub>	0.	Q <sub>422</sub>	472.6	Q <sub>227</sub>	92.84	R <sub>32</sub>	83.81
Y <sub>331</sub> 1	Q <sub>224</sub>	237.12	Q <sub>212</sub>	259.08	Q <sub>247</sub>	18.37	R <sub>33</sub>	1410.49
Y <sub>341</sub> 0	Q <sub>224</sub>	219.16	Q <sub>222</sub>	0.	Q <sub>110</sub>	0.	R <sub>34</sub>	1572.96
Y <sub>351</sub> 0	Q <sub>244</sub>	0.	Q <sub>222</sub>	132.78	Q <sub>120</sub>	0.	R <sub>35</sub>	18.94
Y <sub>361</sub> 1	Q <sub>224</sub>	0.	Q <sub>242</sub>	359.69	Q <sub>120</sub>	0.	R <sub>36</sub>	36.74
Y <sub>411</sub> 0	Q <sub>214</sub>	0.	Q <sub>222</sub>	0.	Q <sub>210</sub>	0.	R <sub>41</sub>	0.
Y <sub>421</sub> 0	Q <sub>224</sub>	0.	Q <sub>114</sub>	0.	Q <sub>220</sub>	0.	R <sub>42</sub>	0.
Y <sub>431</sub> 0	Q <sub>224</sub>	0.	Q <sub>134</sub>	0.	Q <sub>220</sub>	0.	R <sub>43</sub>	0.
Y <sub>441</sub> 0	Q <sub>244</sub>	0.	Q <sub>144</sub>	164.91	Q <sub>210</sub>	0.	R <sub>44</sub>	0.
Y <sub>451</sub> 1	Q <sub>224</sub>	0.	Q <sub>154</sub>	24.48	Q <sub>220</sub>	0.	R <sub>45</sub>	0.
Y <sub>461</sub> 0	Q <sub>414</sub>	0.	Q <sub>214</sub>	0.	Q <sub>240</sub>	1878.96	R <sub>46</sub>	0.
Y <sub>511</sub> 1	Q <sub>424</sub>	0.	Q <sub>224</sub>	0.	Q <sub>410</sub>	0.	R <sub>51</sub>	0.
Y <sub>521</sub> 0	Q <sub>424</sub>	0.	Q <sub>244</sub>	0.	Q <sub>420</sub>	0.	R <sub>52</sub>	0.
Y <sub>531</sub> 1	Q <sub>424</sub>	0.	Q <sub>254</sub>	0.	Q <sub>420</sub>	0.	R <sub>53</sub>	0.
Y <sub>541</sub> 1	Q <sub>424</sub>	542.1	Q <sub>214</sub>	0.	Q <sub>210</sub>	167.64	R <sub>54</sub>	0.
Y <sub>551</sub> 0	Q <sub>214</sub>	76.2	Q <sub>224</sub>	194.12	Q <sub>220</sub>	185.68	R <sub>55</sub>	0.
Y <sub>561</sub> 0	Q <sub>224</sub>	0.	Q <sub>244</sub>	0.	Q <sub>220</sub>	0.	R <sub>56</sub>	0.
	Q <sub>224</sub>	0.	Q <sub>254</sub>	0.	Q <sub>130</sub>	0.	R <sub>57</sub>	0.
	Q <sub>244</sub>	466.56	Q <sub>414</sub>	0.	Q <sub>140</sub>	0.	R <sub>58</sub>	0.
	Q <sub>224</sub>	0.	Q <sub>424</sub>	0.	Q <sub>220</sub>	0.	R <sub>59</sub>	0.
	Q <sub>112</sub>	0.	Q <sub>444</sub>	0.	Q <sub>220</sub>	0.	R <sub>60</sub>	0.
	Q <sub>122</sub>	0.	Q <sub>424</sub>	295.22	Q <sub>220</sub>	78.02	R <sub>61</sub>	0.
	Q <sub>122</sub>	0.	Q <sub>214</sub>	175.26	Q <sub>220</sub>	0.	R <sub>62</sub>	0.
	Q <sub>122</sub>	227.83	Q <sub>224</sub>	0.	Q <sub>220</sub>	0.	R <sub>63</sub>	0.
	Q <sub>122</sub>	0.	Q <sub>244</sub>	232.53	Q <sub>420</sub>	0.	R <sub>64</sub>	0.
	Q <sub>212</sub>	0.	Q <sub>224</sub>	0.	Q <sub>220</sub>	107.66	R <sub>65</sub>	0.

En Tabla 4.30 (a) se muestran las cantidades de calor intercambiadas entre cada par de corrientes por subred. Si  $Y_{ijk}$  es igual a cero significa que no debe existir unidad de intercambio de calor entre esas dos corrientes, y por lo tanto el calor debe ser cero. En la Tabla 4.30 (b) se muestran los calores residuales. Nótese, además, que la suma de los calores residuales  $R_{ik}$ , debe ser igual al calor residual  $R_i$ , para toda corriente caliente  $i$  presente en el intervalo, y estos valores fueron obtenidos en el modelo lineal (P1).

TABLA 4.32 Composición de Calores

(a) Entrés corrientes

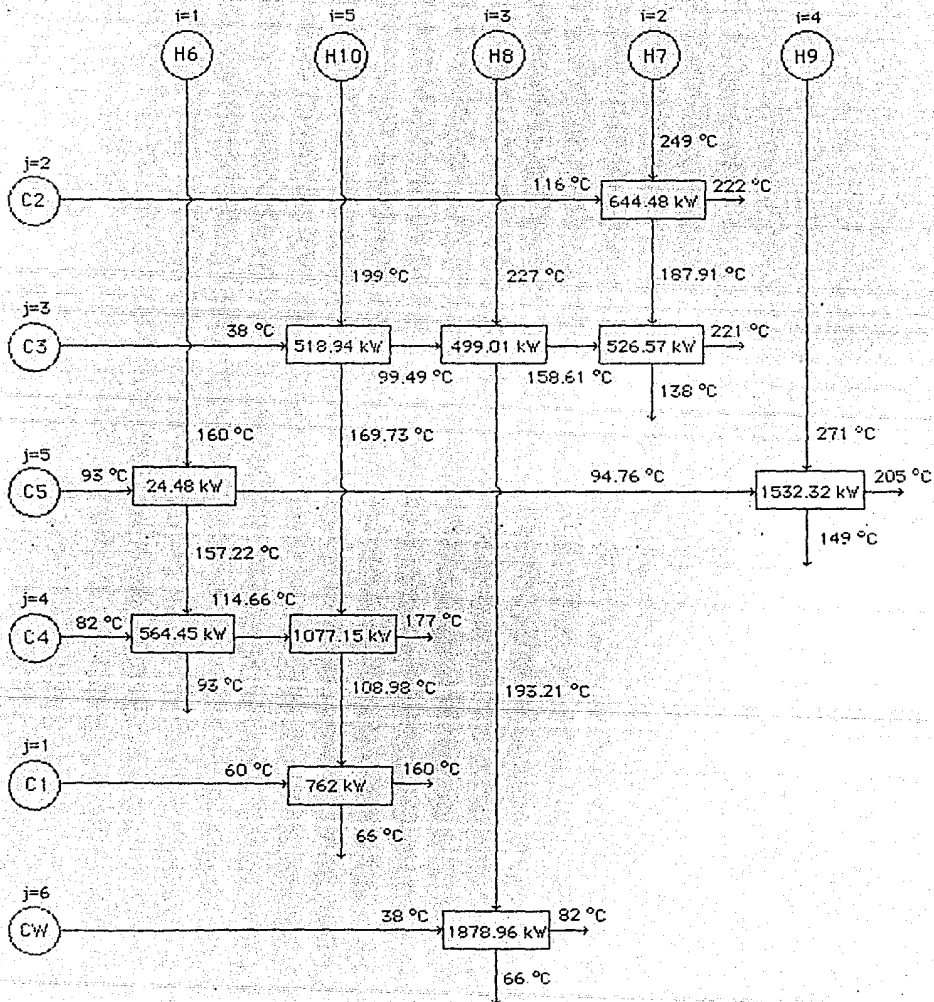
i	j	Q <sub>i,j</sub>
1	1	0
1	2	0
1	3	0
1	4	564.45
1	5	24.48
1	6	0
2	1	0
2	2	644.48
2	3	526.57
2	4	0
2	5	0
2	6	0
3	1	0
3	2	0
3	3	499.01
3	4	0
3	5	0
3	6	0
4	1	1878.56
4	2	0
4	3	0
4	4	0
4	5	1532.32
4	6	0
5	1	762
5	2	0
5	3	518.64
5	4	1077.15
5	5	0
5	6	0

(b) Residuales

k	R <sub>k</sub>
1	R <sub>1</sub>   276.32
2	R <sub>2</sub>   720.58
3	R <sub>3</sub>   1152.26
4	R <sub>4</sub>   1669.91
5	R <sub>5</sub>   1631.15
6	R <sub>6</sub>   1494.30
7	R <sub>7</sub>   1572.66
8	R <sub>8</sub>   55.68

En la Tabla 4.31 se muestran los incrementos de temperatura correspondientes a cada intercambio de calor, y las temperaturas de entrada y salida de cada corriente. Con todos estos datos, se

Fig. 4.8 Red de Recuperación Óptima de Calor para el Ejemplo: 10SP1







## CONCLUSIONES

Como se ha venido mencionando en otros capítulos, en los últimos diez años, se han hecho muchas investigaciones respecto al diseño sistemático de redes para el intercambio de calor. En cada caso se da consideración al desarrollo de nuevas técnicas para la resolución del problema, como búsquedas de árbol, branch and bound, optimización lineal y mixta-entera, técnicas heurísticas, etc., que permitan la solución rápida y eficiente de la síntesis de redes óptimas para la recuperación de calor.

Los modelos de transporte que se han presentado en el presente trabajo, proporcionan una herramienta sistemática para la síntesis óptima de redes de intercambio de calor. Los modelos para el costo mínimo de las corrientes de servicio, tiene la ventaja de involucrar problemas de programación lineal de tamaño pequeño, que pueden ser resueltos con poco esfuerzo computacional. También, como se ha mostrado, estos modelos pueden ser extendidos, fácilmente, con el objeto de ser incorporados en los procedimientos de sistemas de proceso, que están basados en la programación mixta-entera.

El modelo para el número mínimo de unidades de intercambio de calor, que involucra un problema de programación mixta-entera, puede ser usado para derivar las configuraciones de la red que involucra división de corrientes paralelas y selección de los acoplamientos preferidos. Para cubrir este aspecto, se presenta un esquema especial para la asignación de pesos, que permite al diseñador especificar niveles diferentes de prioridad para los acoplamientos. Los ejemplos numéricos, han mostrado que el enfoque presentado es muy eficiente y poderoso.

De hecho, ante los diversos enfoques que existen para enfrentar el problema del diseño óptimo de una red de recuperación de calor, se hace necesaria una evaluación rigurosa de los diferentes métodos que hay, con el objeto de hacer una selección adecuada. Un buen método para esta síntesis, debe reunir tres características principales, primero debe representar adecuadamente el fenómeno físico en estudio, en este caso, debe hacer una representación exacta del intercambio de calor entre las corrientes. La mayoría de los métodos desarrollados en los últimos años, cumplen satisfactoriamente este requisito, al igual que los modelos de transporte presentados en este trabajo. Prueba de ello, es que la obtención de los flujos necesarios de las corrientes de servicio, que garantizan un costo mínimo, arroja un resultado similar en todos ellos.

En segundo lugar, es importante que el método presente un acercamiento sistemático, ya que el exceso de procedimientos heurísticos, lejos de resolver el problema conceptual, sólo resuelve las particularidades, dejando de lado la posibilidad de establecer un método más general y aplicable en todos los casos. De hecho, gran parte de la literatura que enfrenta este problema, suele recurrir a

técnicas heurísticas de solución, aunque sea en forma parcial. Como se puede ver, tanto en el desarrollo del método, como en la solución de los ejemplos numéricos presentados, el enfoque de los modelos de transbordo, al proporcionar un enfoque sistemático y generalizado para atacar el problema de síntesis de redes de recuperación de calor.

En tercer lugar, es muy importante que los modelos sean razonablemente manejables. El modelo lineal para la obtención del costo mínimo de las corrientes auxiliares de servicio, es un modelo bastante pequeño, solo presenta una restricción por intervalo de temperatura, lo que hace que su solución sea bastante rápida y eficiente. Con el paquete computacional LINDO, los tiempos de CPU empleados en una computadora personal (Procesador 8088-1), jamás excedieron el minuto de tiempo.

Con respecto al modelo mixto-entero, en el cual deben plantearse las ecuaciones de balance de energía y de calentamiento, por corriente, por intervalo, el problema se complica un poco. Como puede verse en los ejemplos numéricos, conforme crece el número de corrientes, aumentan las combinaciones posibles y el número de intervalos, por lo que el número de las ecuaciones de restricción, pueda crecer mucho. En lo que respecta a los ejemplos numéricos presentados, el cuarto problema, con 3 corrientes calientes y cinco fría, y diez en total, tardaba 4 horas en ejecutarse, con el mismo procesador, en el paquete LINDO. Si a este problema se le agregaban factores de peso en la función objetivo, para considerar las preferencias en los diferentes acoplamientos, el tiempo crecía considerablemente, al exceso de durar una semana ininterrumpida en una computadora personal AT (Procesador 80286), por lo que sería recomendable, hacerlo en computadoras mucho más veloces, ya que los tiempos de máquina para la computadoras personales son muy grandes.

Sin embargo, a pesar de estos problemas encontrados en el tiempo de ejecución, hay que tomar en cuenta, que sólo existen dos enfoques sistemáticos de este tipo. El modelo de Transporte presentado por Cerda & Westerberg [3,4] y el modelo de Transbordo presentado por Papoulias & Grossman [19]. Debido a las suposiciones de cada método y a la forma de construcción de los intervalos, en el modelo de transporte se utilizan, aproximadamente, el triple de ecuaciones de restricción para los problemas de optimización, llegando a los mismos resultados que con el modelo de transbordo. Esto hace superior a este método, que a los demás, aunque sería aconsejable, que para problemas grandes de la vida real, se utilizarán computadoras con procesadores más veloces.

Además, para la implementación de este enfoque de síntesis de redes de recuperación de calor, incluye la utilización de los métodos de optimización de programación lineal y otros métodos de optimización de programación mixta, el significado de los intervalos de temperatura, la metodología usada para la construcción de los intervalos de temperatura, presentada por Flower & Linhoff [8,9,10], y finalmente, la utilización de los Modelos de Transbordo sugeridos por Papoulias & Grossman [19].

**ESTA TESIS NO DEBE  
SALIR DE LA BIBLIOTECA.**

El conjunto de los esfuerzos de estos autores, dirigido hacia la descripción de los pasos óptimos para el desarrollo de las redes óptimas de recuperación de calor. Sin embargo, no se debe olvidar que se están haciendo algunas suposiciones que permiten alcanzar un poco la rigurosidad del modelo, validando asíntote y las técnicas de solución. Estas relajaciones incluyen la suposición de proporcionalidad de idealidad en el cálculo de las entalpías, la proporcionalidad directa entre el costo de las corrientes de servicios y el costo total de la red de recuperación de calor, lo que nos da una función objetivo lineal, y por último, la proporcionalidad entre el número de intercambiadores de calor y el costo final de operación de la red. Todas estas suposiciones han demostrado ser válidas, según los resultados presentados en la literatura, utilizando diferentes métodos, sugeridos por otros autores [3,9,10,11].

En resumen, puede decirse que el método desarrollado en este trabajo, y sus análisis, la proporcionalidad de entalpías de intercambio de temperaturas, la idealidad de intercambiadores, el planteamiento de balances de energía y ecuaciones de comportamiento como restricciones, y finalmente, la utilización de los Modelos de Transporte Lineal y Minto-Entero, según puede constataarse, tanto en el desarrollo, como en los Ejemplos presentados en el Capítulo 4, representa un enfoque sistemático y general, eficiente y adecuado para la Síntesis de Redes Óptimas de Recuperación de Calor.

# B I B L I O G R A F I A

---

(1) Bradley, G.H.; Brown, B.G. & Graves, G.W.: DESIGN AND IMPLEMENTATION OF LARGE SCALE PRIMAL TRANSFORMING ALGORITHMS. Management Sci. 24(1): 1-34 (1977).

(2) Cerda, J.; Westerberg, A.W.; Masin, F. & Linnhoff, B.: MINIMUM UTILITY USAGE IN HEAT EXCHANGER NETWORK SYNTHESIS. Chem. Eng. Sci. 38(3): 373-387 (1983).

(3) Cerda, J. & Westerberg, A.W.: SYNTHESIZING HEAT EXCHANGER NETWORKS HAVING RESTRICTED STREAM MATCHES USING TRANSFORMATION PROBLEM FORMULATIONS. Chem. Eng. Sci. 38(11): 1723-1730 (1983).

(4) Duran, M.A. & Grossman, I.E.: SIMULTANEOUS OPTIMIZATION AND HEAT INTEGRATION OF CHEMICAL PROCESSES. AIChE J. 32(1): 127-133 (1986).

(5) Duran, M.A. & Grossman, I.E.: A MIXED-INTEGER NONLINEAR PROGRAMMING ALGORITHM FOR PROCESS SYSTEMS SYNTHESIS. AIChE J. 32(4): 592-606 (1986).

(6) Floudas, C.A.; Ciric, A.R. & Grossman, I.: AUTOMATIC SYNTHESIS OF OPTIMUM HEAT EXCHANGER NETWORKS CONFIGURATIONS. AIChE J. 32(2): 276-290 (1986).

(7) Floudas, C. & Grossman, I.: SYNTHESIS OF FLEXIBLE HEAT EXCHANGER NETWORKS FOR MULTIPERIOD OPERATION. Comput. Chem. Engng. 10(2): 153-168 (1986).

(8) Flower, J.R. & Linnhoff, B.: SYNTHESIS OF HEAT EXCHANGER NETWORKS. Part I: SYSTEMATIC GENERATION OF ENERGY OPTIMAL NETWORKS. AIChE J. 24(4): 633-642 (1978).

(9) Flower, J.R. & Linnhoff, B.: SYNTHESIS OF HEAT EXCHANGER NETWORKS. Part II: EVOLUTIONARY GENERATION OF NETWORKS WITH VARIOUS CRITERIA OF OPTIMALITY. AIChE J. 24(4): 643-654 (1978).

(10) Flower, J.R. & Linnhoff, B.: A THERMODYNAMIC COMBINATORIAL APPROACH TO THE DESIGN OF OPTIMUM HEAT EXCHANGER NETWORKS. AIChE J. 26(1): 1 (1980).

(11) Grossmann, I.E. & Sargent, R.W.: OPTIMUM DESIGN OF HEAT EXCHANGER NETWORKS. Comput. Chem. Eng. 2, 1-7 (1978).

(12) Grossmann, I.E.: MIP APPROACH FOR THE SYNTHESIS OF INTEGRATED PROCESS FLOWSHCET. Comput. Chem. Eng. 9, 463 (1985).

(13) Jensen, Paul A. & Barnes, J. Wesley: NETWORK FLOW PROGRAMMING. John Wiley & Sons. USA (1980).

(13) Pennington, Jeff L. & Helgason, Richard V.: ALGORITHMS FOR NETWORK PROGRAMMING. John Wiley & Sons, USA (1980).

(14) Linnhoff, B. & Hindmarsh, E.: THE PINCH DESIGN METHOD FOR HEAT EXCHANGER NETWORKS. Chem. Eng. Sci. 38(5): 745-763 (1983).

(15) Linnhoff, B.; Mason, D. & Wardle, I.: UNDERSTANDING HEAT EXCHANGER NETWORKS. 3. 295-300 (1979).

(16) Nishida, N.; Liu, Y.A. & Lapidus, L.: STUDIES IN CHEMICAL PROCESS DESIGN AND SYNTHESIS. Part III: A SIMPLE AND PRACTICAL APPROACH TO THE OPTIMAL SYNTHESIS OF HEAT EXCHANGER NETWORKS. AIChE J. 23(1): 77-91 (1977).

(17) Papoulias, S. & Grossmann, I.: A STRUCTURAL OPTIMIZATION APPROACH IN PROCESS SYNTHESIS. Part I: UTILITY SYSTEMS. Comput. Chem. Engng. 7(6): 695-701 (1983).

(18) Papoulias, S. & Grossmann, I.: A STRUCTURAL OPTIMIZATION APPROACH IN PROCESS SYNTHESIS. Part II: HEAT RECOVERY NETWORKS. Comput. Chem. Engng. 7(6): 707-721 (1983).

(19) Papoulias, S. & Grossmann, I.: A STRUCTURAL OPTIMIZATION APPROACH IN PROCESS SYNTHESIS. Part III: TOTAL PROCESSING SYSTEMS. Comput. Chem. Engng. 7(6): 723-734 (1983).

(20) Umeda, T.; Harada, T. & Shiroko, K.: A THERMODYNAMIC APPROACH TO THE SYNTHESIS OF HEAT INTEGRATION SYSTEMS IN CHEMICAL PROCESSES. Comput. Chem. Engng. 3(2): 373- (1979).

(21) Salkin, Harvey M.; INTEGER PROGRAMMING. Addison-Wesley Publishing Company USA (1975).