

6  
24

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO  
ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES  
" A C A T L A N "

EFICIENCIA DE LOS PRONOSTICOS PARA SERIES DE TIEMPO  
CUANDO SE USAN COMBINACIONES LINEALES

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

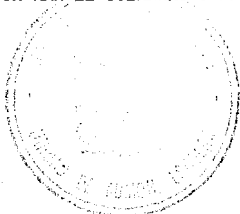
ACTUARIO

P R E S E N T A

MA. FLORENCIA ORTIZ MARTINEZ

DIRECTOR DE TESIS:

DR. VICTOR MANUEL GUERRERO GUZMAN



MEXICO 1994



Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE.

Pag.

INTRODUCCION

CAPITULO 1. USOS DEL PRONOSTICO.....	1
1.1. Distinción entre los distintos términos semejantes al de pronóstico.....	1
1.2. El pronóstico como generador de expectativas.....	14
1.3. El pronóstico como instrumento en la toma de decisiones.....	18
1.4. El pronóstico como instrumento de planeación.....	18
CAPITULO 2. TIPOS DE PRONOSTICOS.....	21
2.1. Pronósticos Cualitativos.....	22
2.1.1. Algunos tipos de métodos cualitativos.....	24
2.2. Pronósticos Cuantitativos.....	27
2.2.1. Algunos tipos de métodos cuantitativos formales.....	29
CAPITULO 3. MODELOS PARA COMBINACIONES LINEALES.....	38
3.1. Intervalos de tiempo para combinaciones lineales....	37
3.2. Combinaciones lineales en series de tiempo.....	39
3.3. Antecedentes.....	45
3.4. Definiciones.....	48
3.5. Aplicación de modelos en combinaciones lineales....	49
3.5.1. Caso no-estacional.....	52
3.5.2. Caso estacional.....	59

CAPITULO 4. PRONOSTICOS CON UN MODELO DE COMBINACION LINEAL.....	82
4.1. Definiciones.....	83
4.2. Formalización de supuestos.....	84
4.3. Eficiencia en el pronóstico de combinaciones lineales.....	74
CAPITULO 5. PRONOSTICO DE LA SERIE DEL INDICE NACIONAL DE PRECIOS AL CONSUMIDOR POR DISTINTOS METODOS DE PRONOSTICO.....	78.
5.1. Identificación de modelos ARIMA .....	79
5.2. Pronóstico obtenido por medio de un vector autorregresiv.....	111
5.3. Estimación de las ponderaciones.....	114
5.4. Pronóstico de una combinación lineal por medio de modelos ARIMA.....	115
5.5. Eficiencia en el pronóstico de una combinación lineal.....	118
5.8. Exactitud de los tres pronósticos obtenidos.....	110
CONCLUSIONES.....	125
APENDICE 1.....	127
APENDICE 2.....	131
BIBLIOGRAFIA.....	132

## INTRODUCCION.

El objetivo que ha motivado el desarrollo de esta tesis es el de contrastar tres procedimientos que se usan para la obtención del pronóstico de combinaciones lineales, en modelos de series de tiempo:

Procedimiento 1 (Directo) : se forma la combinación lineal de las series en consideración, se obtiene el modelo para esta serie y después se realiza el pronóstico de la misma.

Procedimiento 2 (Indirecto): se obtiene el modelo para cada serie que forma la combinación lineal, se pronostican individualmente estas series y después se forma la combinación lineal con dichos pronósticos.

Procedimiento 3 (Multivariado): se construye un modelo multivariado para el vector de series que forma la combinación lineal, se pronostica este vector y después se forma la combinación lineal con estos pronósticos.

Conviene entonces realizar un análisis, para ver qué tan eficientes son los pronósticos obtenidos con los diversos procedimientos, tanto teórica como empíricamente.

En la actualidad, las organizaciones sin importar su tamaño, han encontrado como parte esencial para su desarrollo en todos los aspectos, realizar pronósticos con la idea de reducir la incertidumbre del futuro y de aprovechar así las ventajas que les brinda la planeación de sus actividades. Es por ello que el tema tratado en esta tesis resulta de interés práctico.

La estructura de esta tesis se compone de la forma siguiente:

Capítulo 1. En este capítulo se consideran algunas definiciones del pronóstico dadas por autores que han tenido trascendencia en explorar el futuro. También se aborda una secuencia de los pasos a seguir para la obtención de un pronóstico y se hace distinción de los diferentes términos asociados con el pronóstico, que podrían en un momento dado confundir el significado real de lo que es un pronóstico.

Capítulo 2. Este capítulo comienza con seis conclusiones acerca de los diferentes métodos de pronóstico más aplicados. Se hace distinción de dos categorías de pronósticos: Los Cualitativos y los Cuantitativos. Cada una de las categorías es definida y se mencionan algunas técnicas que las caracterizan respectivamente.

Capítulo 3. Aquí se plantean los modelos que se utilizan cuando se dispone de combinaciones lineales. Cuatro casos que se presentan por lo regular cuando se toman combinaciones lineales son analizados. Se hace mención de los estudios realizados por algunos autores cuando las combinaciones lineales aparecen en la estadística y la econometría. Se consideran también los casos no estacional y estacional, que se presentan durante la construcción de los modelos de series de tiempo con combinaciones lineales.

Capítulo 4. En este capítulo se resaltan los supuestos necesarios para realizar el pronóstico de combinaciones lineales. Tres procedimientos diferentes para obtener los pronósticos son mostradas y se compara su eficiencia, cuando es posible.

Capítulo 5. Se muestra en este capítulo la aplicación de los tres procedimientos comentados en el capítulo 4, utilizando como instrumento a la serie Índice Nacional de Precios al Consumidor, con sus respectivas subseries. También se comentan los resultados de los tres procedimientos de pronóstico, enfatizando el procedimiento con el cual se obtuvo el mejor pronóstico.

## CAPITULO 1. USOS DEL PRONOSTICO

Después de algunas décadas de desarrollo teórico, de experiencia práctica ganada a través de aplicaciones y del encuentro de muchos estudios empíricos, el campo del pronóstico está entrando en una etapa de madurez. Esto es evidente en particular con la aparición de dos publicaciones periódicas de relevancia internacional, durante la década de los 80's: International Journal of Forecasting y el Journal of Forecasting, ambas dedicadas al tema del pronóstico.

Herschel (1978) destaca el comentario de Jaspers que dice que " toda afirmación sobre el futuro es susceptible de convertirse en un factor que contribuye en su gestación " y de este modo " amplía el margen de lo posible, señala puntos de partida para el plan y la acción e incrementa nuestra libertad, mediante la conciencia de lo posible ". Asimismo, Herschel también menciona a Giambattista uno de los más notorios filósofos de la historia, quien sostuvo que al historiador le era posible descubrir las leyes generales del proceso histórico y explicar la razón por la que los acontecimientos se produjeron en el pasado y por la que habrán de desarrollarse, de una manera previsible; añadía que no era posible prever cada detalle de un modo mecánico, pero sí las grandes líneas de la evolución futura. Según él, la historia se desenvuelve en ciclos recurrentes y por ello podría deducirse que la historia provee información acerca del futuro.

### 1.1. Distinción entre los diferentes términos semejantes al de pronóstico.

Así como han evolucionado las técnicas de pronóstico, también han surgido a través de la historia diferentes términos semejantes al de pronóstico, por mencionar algunos, se tiene: previsión, proyección, predicción, extrapolación y profecía, todos ellos



tienen que ver con el futuro. Es interesante hacer distinción de cada uno de los términos mencionados para lograr un mejor conocimiento de lo que es el pronóstico.

Pronóstico. - La esencia del pronóstico es tratar de anticipar cómo y porqué el futuro puede ocurrir, en función de experiencias previas. Frecuentemente se presenta el problema de impedir un evento o la necesidad de ocurrencia de ese evento. Esto nos lleva a la siguiente pregunta ¿ Se puede pronosticar el futuro ? la contestación a esta pregunta es " depende "; ciertamente algunos aspectos del futuro, como por ejemplo el pronóstico de la hora en que el sol saldrá el día siguiente, puede ser pronosticado obteniendo bastante exactitud, sin embargo otros aspectos son menos accesibles para el pronóstico o son completamente inciertos, como el caso en que fue prácticamente imposible el pronosticar que el precio de un barril de petróleo aumentara de \$2. dls. en 1973 a \$39. dls. en 1979 y después bajara a \$22. dls. en 1986.

Whittle (1979) expone que " escoger lo óptimo de un pronóstico, depende del propósito para el cual éste fue pensado y de las políticas óptimas que sesgarán el camino de los pronósticos en las diferentes áreas de aplicación. Whittle opina que pronosticar no es un fin en sí mismo, sino sólo un complemento de optimización de acciones comunes, contra la expectativa de un futuro incierto ". Asimismo, McNees (1985) menciona que la esencia del pronóstico, es tratar de anticipar la ocurrencia e incorporar su probable impacto en el futuro, de eventos que probablemente difieran de lo ocurrido durante el período histórico original en el cual el modelo de pronóstico se basó.

El interesado en realizar un pronóstico debería considerar las diferentes clases de pronósticos existentes en la actualidad y después preguntarse por la técnica de pronóstico que es más conveniente usar; la respuesta depende principalmente de los objetivos que se esperan obtener, de los conocimientos con que se dispone, de la experiencia con que se cuenta y del tiempo disponible para realizar el pronóstico.

El escoger un buen pronóstico es un " arte " en el que se aplica el juicio que inevitablemente refleja el interés particular, el conocimiento y la experiencia de quien hace uso del pronóstico. También debería entender la influencia de los factores que intervienen en la obtención de un buen pronóstico y la confiabilidad del mismo con sus expectativas. El pronóstico estadístico de series de tiempo se basa para su desarrollo en datos numéricos de una serie y en relaciones de tipo matemático que permitan expresar a la observación futura, en términos de las observaciones pasadas.

El cuadro 1 muestra una lista de consideraciones que Jenkins (1979), ha encontrado útiles para abordar un problema de pronóstico dentro de las empresas. Es claro que no todas las consideraciones serán relevantes en todas las situaciones que se puedan presentar.

## Cuadro 1

### Guía para el desarrollo de un pronóstico

---

1. Analizar el sistema de toma de decisiones al cual servirá el pronóstico
  2. Definir los pronósticos necesarios para tomar decisiones
  3. Desarrollar el modelo conceptual describiendo mecanismos que influyan sobre el pronóstico
  4. Definir los datos disponibles y los no disponibles
  5. Desarrollar el método cuantitativo para generar pronósticos
  6. Experimentar para evaluar la exactitud del pronóstico
  7. Determinar como los criterios subjetivos son incorporados dentro del pronóstico
  8. Realización del pronóstico
  9. Valorar retrospectivamente la efectividad del pronóstico
- 

El renglón 1 de la lista abarca un análisis del proceso de toma de decisiones, para que se efectúe el pronóstico. Por ello es importante que las decisiones y acciones necesarias tomadas por el grupo de directores sean establecidas. Frecuentemente una investigación puede mostrar inconsistencias en el proceso de la toma de decisiones; por ejemplo, decisiones en las que las responsabilidades no están claramente definidas o decisiones para las cuales la información relevante no está disponible, o al menos no está disponible en la forma correcta para quienes la necesitan.

El renglón 2 determina qué pronósticos son necesarios para la toma de las decisiones y cómo deben ser usados. El pronóstico necesita ser definido en términos de:

- las variables a pronosticar ( e.g. volumen de ventas, precios)
- el período de tiempo a pronosticar ( e.g. 1 mes, 18 meses ). En particular la inercia en la economía y en los negocios hacen de los pronósticos en períodos cortos una tarea fácil. El problema ocurre cuando cambios no esperados desvían un curso establecido,

afectando el futuro de la serie; esto se presenta en los pronósticos a largo plazo. Los métodos cuantitativos no pueden predecir tales cambios, así que la necesidad de contar con métodos cualitativos se incrementa en los períodos largos.

- la frecuencia en la cual son necesarios los pronósticos ( e.g. semanalmente, mensualmente ). Los pronósticos más frecuentes, requieren mayormente del uso de métodos cuantitativos. Conviene notar que la gente llega a aburrirse fácilmente con la rutina de tareas repetitivas, así que el aburrimiento reduce la motivación y trae consigo inconsistencia y errores, cosa que no se presenta en los pronósticos de períodos largos.

Los métodos cuantitativos y el uso de computadora, por otro lado, pueden mejorar las funciones repetitivas extremadamente bien en una base automática. Se debería por lo tanto, dar preferencia a que la gente concentre su esfuerzo en el ajuste de los pronósticos, cuando esto sea necesario.

- el grado en el cual el futuro puede ser influenciado; la mayoría de las personas pueden influenciar el futuro, la mayor dificultad es pronosticar esto por métodos cuantitativos. Las acciones de la gente pueden cambiar patrones establecidos y relaciones y volver al pronóstico cuantitativo inadecuado. En el caso de que no exista influencia alguna por otro lado, los métodos cuantitativos resultan ser la mejor opción, ya que no hay agente que pueda cambiar el curso futuro de los eventos. ( e.g. control de inventarios );

- el nivel de agregación. Un alto nivel de agregación es recomendable que se tome en cuenta para obtener un mejor pronóstico y se debería dar menos importancia al pronóstico de series desagregadas, las cuales son más fáciles de manejar a través de mé-

todos cuantitativos y por computadora ( e.g. un producto individual, un grupo de productos ) y también es muy importante visualizar la consistencia entre los pronósticos a niveles diferentes de agregación.

El renglón 3 involucra el desarrollo de un modelo conceptual del sistema sobre el cual influye la variable o las variables, a ser pronosticadas. Por esto es importante establecer el tipo de conocimientos previos, la teoría y los criterios que intervienen en el mecanismo ( en términos cualitativos ) de las variables a ser pronosticadas.

No es posible pronosticar sin datos o uniformar criterios (renglón 4). Para obtener un buen pronóstico se requiere entonces construir una base de datos apropiada y también se requiere mejorar el conocimiento de los criterios aplicados en los diferentes pronósticos, así como distinguir con claridad los factores que afectan a los pronósticos.

En el renglón 5 se encuentra la suposición de que un modelo cuantitativo será construido para generar el pronóstico. La naturaleza y sofisticación de este modelo dependerá de muchos factores, incluyendo los siguientes:

- la fidelidad requerida en el pronóstico para la toma de decisiones de la empresa,
- la disponibilidad de los datos y su grado de precisión,
- considerar variables de política y del medio ambiente de la organización para mejorar al pronóstico,
- el costo del desarrollo del modelo, de la recolección de los datos y de la operación del sistema en una base rutinaria,

- el sistema de cómputo y la destreza para construir modelos, disponible dentro de la organización.

Este renglón es de principal importancia, ya que el modelo cuantitativo debería no sólo proporcionar el pronóstico sino también las características del mismo en diferentes períodos de tiempo, e.g. una desviación estándar del 5 % del nivel un paso hacia adelante, 7 % dos pasos adelante, etcétera. Si hay suficientes datos disponibles, vale la pena ir más lejos ( renglón 6 ) y comparar los pronósticos con diferentes períodos de tiempo, generados por el modelo, con datos no utilizados en la construcción del modelo.

El uso de un modelo presupone que el comportamiento estadístico en el futuro será similar que en el pasado. Sin embargo, puede ocurrir que algunos eventos del futuro no sean semejantes al comportamiento pasado, entonces es necesario hacer unos ajustes en el pronóstico obtenido con el modelo. Este 'ajuste' ( renglón 7 ) depende de criterios y conocimiento no considerados en el modelo ( por ejemplo el que un número mayor de clientes nuevos es esperado el próximo año o el que un competidor lance al mercado un nuevo producto obteniendo éxito en el mercado ). La combinación de pronósticos obtenidos con datos históricos y un modelo ( pronóstico interno ) con pronósticos externos, es una consideración importante en la obtención práctica de los pronósticos. Para un enfoque de combinación de pronósticos de series de tiempo, se sugiere ver el trabajo de Guerrero (1989).

Una de las más grandes críticas que se puede hacer al usar métodos científicos en la empresa es la inadecuada atención a la implementación ( renglón 8 ). Por ejemplo, Jenkins ha encontrado situaciones en las organizaciones donde los pronósticos realizados con métodos cuantitativos son mejores que los pronósticos obtenidos por métodos cualitativos, pero aun así han sido ignorados. Estas situaciones ocurren porque el papel que los modelos de pronóstico deberían jugar dentro de la gerencia de una organización, no han sido propiamente pensados. La actividad involucrada por el renglón 8 pretende minimizar la posibilidad de que esto esté pasando. Ello debe involucrar una declaración del grupo directivo sobre el papel del sistema generador de pronósticos en términos de:

- lo que se necesita hacer, y
- quien es el responsable para hacerlo.

En particular, el acuerdo debería aclarar la forma en que:

- los datos serán recolectados, (de manera continua y con cierta confiabilidad)
- los pronósticos serán generados (usando una base de datos, un modelo y si es necesario, una computadora)
- los pronósticos serán modificados (por criterios subjetivos)
- los pronósticos alimentarán la toma de decisiones,
- se evaluará el pronóstico , y
- las responsabilidades serán asignadas para los diferentes aspectos de la actividad.

Un pronóstico puede proporcionar información valiosa siempre y cuando no cambien las políticas de la organización, del país o del lugar donde se aplique el pronóstico.

Previsión.- Las previsiones son en esencia estocásticas, es decir, representan la evolución que probablemente habrá de darse en el futuro, y se basan en relaciones o tendencias que se detectan en el presente, no obstante lo cual, especialmente en las previsiones de largo plazo, la imaginación puede desempeñar un papel significativo. En efecto, en muchos campos de la historia de las ciencias y de la civilización, se han producido cambios y transformaciones que contradicen las tendencias anteriores.

De este modo las previsiones sirven como orientación general y como meta final de los planes de desarrollo, e.g. Herschel (1978) comenta que Carlos Matus en su texto " Estrategia y plan ", define a la previsión como " una estrategia que incluye la exploración previa de las grandes alternativas u opciones de desarrollo; es decir, es un procedimiento para elegir y definir una política ".

El comienzo de toda tarea de previsión consiste en el conocimiento de las condiciones presentes. De poco serviría prever los cambios que se producirán en el futuro, si no se sabe donde se está ahora. La evolución histórica ha avanzado en una ruta que partió de la preocupación por tener un diagnóstico de la situación presente hasta llegar a las investigaciones más complejas que tuvieran por finalidad prever el acontecer a un cierto plazo. Un ejemplo de esto, es la obra de Spiethoff ( véase Herschel, 1978 ) que trata de extensas investigaciones empíricas, sobre las fluctuaciones más amplias en la producción de las industrias productoras de bienes de capital y de bienes de consumo duraderos.



Una posible explicación es la siguiente: si partimos de una situación de depresión, la recuperación se inicia con el aumento de las inversiones. Estas encuentran un estímulo posible en la baja del costo de producción, que se produce durante la depresión a causa de (i) la reducción de salarios, (ii) del menor precio de las materias primas o (iii) de la menor tasa de interés del capital. Por su lado la expansión se caracteriza fundamentalmente por una mayor inversión de capital, ya que el auge en las industrias de bienes de capital parece necesitar algo más que la reducción de costos ( véase también Chambers, 1961 ).

Para realizar una previsión se necesita del pronóstico, como herramienta que permita visualizar un panorama del futuro próximo y así se puedan prevenir, por medio de un plan, las acciones que no se desean, o bien provocar otro tipo de acciones deseadas. El grado de incertidumbre varía dependiendo del grado de las limitaciones que se puedan lograr.

Cuando el campo de acción del gobierno o de alguna organización es muy limitado, el " plan " se acerca a una previsión. Dicho de otra manera, puede afirmarse que las previsiones en comparación con un plan o programa, son más pasivas.

Proyección.- La proyección se basa por lo general en ciertas relaciones que se suponen constantes. La proyección permite al explorador una visión más amplia, ofreciéndole una perspectiva de mayor horizonte temporal que realiza problemas fundamentales, los que no se vislumbran en el presente claramente. En ella se presenta una exploración del futuro más distante.

La proyección está relacionada con la planeación, puesto que constituye la base científica indispensable para que el plan sea realista, es decir, que tenga en cuenta las posibilidades futuras reales y que no represente tan solo un ejercicio teórico.

Como ejemplo, Herschel (1978) cita un estudio llamado " Los límites del crecimiento " realizado por un grupo técnico del Instituto Tecnológico de Massachusetts para el Club de Roma ( asociación de hombres de empresa y científicos de varios países ), en el cual se exponen algunos ejemplos de proyecciones, cuyas conclusiones principales son las siguientes:

1. Si se mantienen las tendencias actuales de crecimiento de la población mundial, de la industrialización, de la contaminación ambiental, de la producción de alimentos y del agotamiento de los recursos, este planeta alcanzará los límites de su crecimiento en el curso de los próximos cien años. El resultado más probable sería un súbito e incontrolable descenso tanto de la población como de la capacidad industrial.

2. Cabe la posibilidad de alterar estas tendencias de crecimiento y establecer una condición de estabilidad ecológica y económica que pueda mantenerse durante largo tiempo. El estado de equilibrio global puede diseñarse de manera que cada ser humano satisfaga sus necesidades materiales básicas y goce de igualdad de oportunidades para desarrollar su potencial particular.

Predicción.- Su objetivo es reducir la incertidumbre del futuro. Las aspiraciones que se desean emprender, están todas, vinculadas con el futuro. Al hablar del futuro se habla de conjeturas o supuestos que implican un grado de incertidumbre sobre lo que probablemente sucederá. En algunos casos, la hipótesis de invariabilidad podrá ser evidente, pero sólo es en apariencia, ya que los cambios en las variables, en este caso económicas, son rápidos y difíciles de prever.

Lawrence Klein ( véase Herschel, 1978 ) asegura que la predicción es una mezcla de arte y ciencia, puesto que son tan importantes los criterios como la apreciación, la evaluación, el juicio crítico, el conocimiento y la experiencia. La trascendencia de la combinación de estas facultades se debe precisamente a las complicaciones propias de toda predicción.

Para la realización de una predicción se debe tener presente la interrelación que se da entre los fenómenos económicos de acuerdo con la teoría, además se debe estar alerta a todo tipo de información o noticia susceptible de modificar las predicciones obtenidas en base a procedimientos técnicos y también es importante no confiar en un solo método de predicción, sino combinar varios métodos. Por ejemplo, Samuelson ( véase Herschel, 1978 ) indica que le daría preferencia a una predicción preparada por un grupo de economistas destacados, frente a cualquier otro método, pero agregó que dicho grupo seguramente desearía conocer la estructura y los resultados de algunos modelos sólidamente fundamentados y decidir, mediante algún tipo de análisis, qué parte utilizar y cuál no.

Es importante concentrarse en los factores importantes al efectuar una predicción, por ejemplo, si en un país una buena parte del producto interno proviene del petróleo y sus derivados, la atención deberá concentrarse en la producción, en las demandas, tanto interna como externa y en los precios de tales productos, por lo cual deben ser examinados en forma prioritaria los acontecimientos relacionados con el petróleo.

Conviene recordar que existen dos corrientes en la metodología científica: la que pretende establecer leyes con el propósito fundamental de predecir acontecimientos futuros y la que trata de encontrar las causas y explicar los fenómenos que se han producido. Milton Friedman (Herschel, 1978) afirma que " en su carácter de cuerpo de hipótesis sustantivas, la teoría se juzga por su poder predictivo con respecto a la clase de fenómenos que trata de explicar... la única verificación aceptable de una hipótesis es la comparación entre lo predicho por ella y lo resultante de la experiencia".

En general, la predicción de los acontecimientos futuros tendrá una mayor posibilidad de éxito, cuanto menor sea el plazo que abarque. Esto resulta bastante evidente, ya que muchos de los acontecimientos del año siguiente están de algún modo prefigurados por ciertos elementos que se dan en el presente.

Extrapolación.- Esta se basa en la noción de que la evolución de una variable observada en el pasado, se mantendrá en el futuro. Dicho de otra manera, la extrapolación de la constancia observada de los datos en el pasado sirve para prever el futuro, a tal fin se utilizan métodos gráficos o puramente matemáticos.

La extrapolación está sujeta a alteraciones por cambios imprevisibles en el tiempo, las cuales aumentarán a medida que nos alejemos del año base, por esto es aconsejable complementarla con técnicas de pronóstico. Su grado de incertidumbre es elevado por lo mismo que se acaba de mencionar.

Profecía.- Este es un don sobrenatural que consiste en conocer, por inspiración divina, las cosas distantes o futuras, que ocurrirán con seguridad. No debe utilizarse este término en trabajos de carácter técnico o científico, ya que la profecía no puede ser realizada más que por unos cuantos seres privilegiados y no existe un método que permita producir profecías.

## 1.2. El pronóstico como generador de expectativas

Cada acción que se emprende en la vida diaria, en una empresa, en la economía del país, en el control de la población, en las medidas tomadas contra la contaminación, etcétera, se basa en supuestos sobre lo que sucederá en el futuro.

Los supuestos formulados sobre el futuro implican un cierto grado de incertidumbre, que se reflejan en la precisión del pronóstico, esto a su vez provoca la ocurrencia del evento pronosticado dentro de ciertos límites de tolerancia, lo cual hace que se formen las llamadas expectativas, que representan lo esperado por cada una de distintas personas.

En este sentido, aunque el pronóstico sea objetivo, las expectativas que crea el público resultan ser subjetivas. Además, la expectativa viene a ser resultado de la toma de decisiones que se efectúan en el pasado, de acuerdo con alguna planeación llevada a cabo.

El público probablemente la mayoría de las veces basa sus expectativas en el comportamiento reciente del fenómeno, el cual está asociado con una cierta variable de interés. La hipótesis de las expectativas racionales por ejemplo, se origina en el supuesto de que el público basa sus expectativas de cualquier variable, en toda la información que se dispone acerca del comportamiento futuro de esa variable.

La hipótesis de las expectativas implica que el público no se equivoca sistemáticamente en la formación de las mismas. Según esta hipótesis, las expectativas son correctas en promedio, porque el público entiende el medio en el que se desarrollan sus actividades. El público, por supuesto, se equivoca de vez en cuando, pero no sistemáticamente.

El fracaso en alguna expectativa, es decir, el hecho de que no ocurra el evento esperado, lleva a considerar las premisas que determinaron tal fracaso. Esta reconsideración pone un gran énfasis, en si el comportamiento pasado de una variable tiene la suficiente influencia en las expectativas sobre el comportamiento futuro. Aquí se refleja la importancia de sólo considerar el pa-

sado de una serie y enfatiza el que también es necesario utilizar más información, provista quizá por otras variables que influyan sobre la variable de interés. Una vez que se acepta y entiende el tipo y la naturaleza de los errores en los pronósticos, es factible hacer uso de un proceso que sirva para provocar la expectativa, mediante la generación de mejores pronósticos.

### 1.3. El pronóstico como instrumento en la toma de decisiones.

Pronosticar es una parte integral de la toma de decisiones. Esto es claro en una organización en que se desean establecer metas y objetivos, ya que entonces se busca pronosticar los factores fuera del control de la organización y seleccionar así aquellas acciones que se espera conduzcan al logro de las metas y de los objetivos planteados. Así pues para llevar a cabo una toma de decisiones efectiva, se requiere observar el comportamiento de los pronósticos y actuar congruentemente.

Algunas de las áreas que menciona Makridakis (1978) donde se lleva a cabo la toma de decisiones para realizar un pronóstico son:

1. **Recursos existentes.** Establecer un orden para hacer un uso eficiente de los recursos de producción, transportación, de personal, del capital, y también debería haberse hecho antes, del nivel actual de demanda por producto, del material y del financiamiento o de los servicios disponibles.

2. *Adquisición de recursos adicionales.* El tiempo propicio para adquirir material nuevo, para la contratación de personal o para la compra de maquinaria y equipo, puede variar de pocos días a algunos años. Pronosticar es requerido para determinar qué recursos serán necesarios en el futuro.

3. *Determinación de qué recursos son necesarios.* Todas las organizaciones deberían determinar los recursos que quieren tener en el futuro. Tales decisiones dependen de las oportunidades, de los factores del medio ambiente y del desarrollo interno financiero, humano, de producción y de recursos. Esas determinaciones requieren de buenas decisiones por parte de los directores de una organización, quienes deben poder interpretar los pronósticos.

La figura 1 muestra la relación entre el pronóstico y la toma de decisiones. Una diferencia se marca dentro de la figura entre las variables de política (tales como el precio y la calidad de un producto) las cuales están bajo el control de la empresa, y de variables externas (tales como las actividades del gobierno y de la competencia) las cuales también influyen sobre las variables que están siendo pronosticadas, pero no están bajo el control de la empresa. Una situación que se presenta dentro del pronóstico en la vida real, en el caso de variables externas, es donde las variables serán generadas bajo la suposición de que no hay cambios en las variables de política. Entonces, si el resultado de esos pronósticos no son satisfactorios, pueden hacerse cambios en las variables de política, de forma tal que el sistema de pronósticos generados necesita ser visto como parte de un sistema, en el ciclo de la toma de decisiones en el cual puedan hacerse cambios en los pronósticos, para que lleguen a ser lo más accesibles que se pueda.



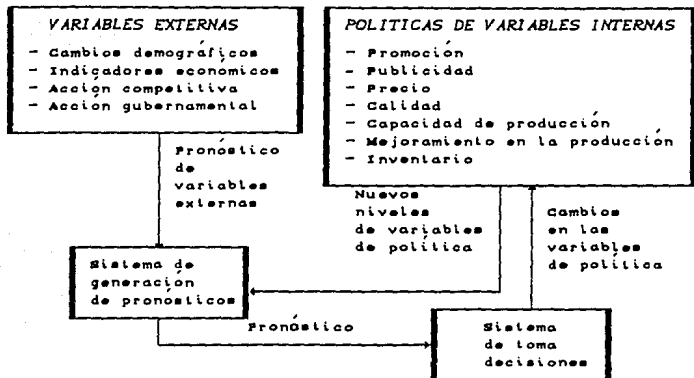


Fig 1. El papel del pronóstico en la toma de decisiones.

#### 1.4. El pronóstico como instrumento de planeación

La planeación permite realizar acciones que pueden cambiar el comportamiento de los pronósticos. Por ejemplo, las ventas de un producto pueden ser estimuladas por cambios en los precios, por actividades promocionales o por publicidad.

Una vez que se haya pronosticado el estado en el que se podrá encontrar una cierta variable en el futuro, de acuerdo con algunos supuestos preestablecidos, es de esperar que se desee

algún tipo de mejora; sin embargo, no con sólo desearlo se obtendrá tal mejoría, sino que se debe efectuar planeación para alcanzar la meta deseada. Aquí se aprecia el papel que puede jugar la obtención de los pronósticos.

Contar con un pronóstico adecuado puede ser una herramienta de gran utilidad, pero para lograrlo es necesario conocer los diferentes métodos de pronóstico.

Chambers, Mullick y Smith (1971 pp.45) destacan que la selección de un método depende de muchos factores, así como del contexto del pronóstico, de la relevancia y de la disponibilidad de datos históricos, del grado de exactitud deseable, del período de tiempo a pronosticar, del costo y beneficio del pronóstico y del tiempo disponible para llevar a cabo el análisis.

En términos de pronósticos aplicados a negocios, el ejecutivo tanto como el pronosticador tienen un papel importante dentro de la selección y lo mejor es que los dos entiendan bien el rango de posibilidades que ofrecen los métodos de pronóstico. Chambers, et al. (1971) formulan a este respecto tres preguntas de interés, que deben hacerse tanto el ejecutivo como el pronosticador para elegir el método de pronóstico.

#### 1. ¿Cuál es el propósito del pronóstico ?

Esta pregunta cuestiona el ajuste del nivel de no-exactitud que puede tolerarse, contra el costo de la técnica de pronóstico.

2. ¿Cuáles son las dinámicas y componentes del sistema para el cual el pronóstico se llevará a cabo?

Esta pregunta resalta la relación de interacción entre las variables. Generalmente el ejecutivo y el pronosticador deberían hacer un esquema, que muestre la posición relativa de los diferentes elementos que influyan.

3. ¿Qué tan importante es el pasado para pronosticar el futuro?

Cambios significativos en un sistema, por ejemplo, la salida al mercado de nuevos productos, nuevas estrategias de competencia, etcétera, disminuyen la similaridad del futuro con el pasado. Es importante que tanto el ejecutivo como el pronosticador discutan esto profundamente.

## CAPITULO 2. TIPOS DE PRONOSTICOS

En la actualidad existe una gran variedad de métodos de pronóstico disponibles. Para tener una idea global de los resultados obtenidos a través de la aplicación de algunos de estos métodos, es interesante presentar a continuación para el inicio de este capítulo, seis conclusiones generales sobre las características relevantes entre los diferentes métodos de pronóstico más aplicados (ver Makridakis, 1986)

1) *Resultados contradictorios.* Algunos estudios realizados a través del desarrollo de los métodos de pronóstico han demostrado que no hay una clara superioridad de un método de pronóstico sobre otro.

2) *Pronósticos cualitativos.* Los conocimientos e información que poseemos los humanos son únicos y esta información en ocasiones no es factible usar la para los métodos cuantitativos. Sin embargo, estudios y experimentos llevados a cabo han demostrado que los métodos cualitativos no pueden proporcionar mejores pronósticos que los métodos cuantitativos. Eso se debe a que con frecuencia los humanos tendemos a ser optimistas y a subestimar el futuro inciertamente. Además, el costo del pronóstico cualitativo es considerablemente más alto que el costo del método cuantitativo.

3) *Métodos econométricos.* Estudios empíricos han demostrado que los pronósticos obtenidos con modelos econométricos, no son necesariamente mejores pronósticos que los que surgen de modelos de series de tiempo. El propósito de los modelos econométricos no es sólo el pronóstico, ya que también explican los fenómenos económicos o financieros e incrementan la información de la relación entre las variables disponibles. Los modelos econométricos proveen

información que no está disponible en los modelos de series de tiempo y tal información contribuye indirectamente a mejorar el pronóstico. Sin embargo, en términos de pronóstico la experiencia no muestra una gran diferencia entre los resultados de modelos econométricos y los de modelos de series de tiempo ( ver Fildes, 1985 ).

4) *Métodos sofisticados.* La experiencia también ha demostrado que los métodos complejos o estadísticamente sofisticados, no producen mejores pronósticos que los métodos sencillos. Esto es palpable, tanto en los modelos econométricos como en los de series de tiempo ( ver Eihorn y Hogarth, 1975 ).

5) *Métodos adaptivos.* Los métodos adaptivos no siempre son mejores que los métodos no adaptivos en pronósticos a corto, mediano y largo plazo ( Gardner y Dannenbring, 1980 ).

6) *Métodos de mínimos cuadrados.* El método que da el mismo peso a todos los datos ( métodos de mínimos cuadrados ordinarios ) no produce mejores pronósticos que el método de mínimos cuadrados descontados, el cual da un mayor peso a los datos más recientes ( ver Makridakis, 1982 ).

En este capítulo se hará distinción de dos categorías de pronósticos: los Cuantitativos y los Cualitativos.

## 2.1. Pronósticos Cualitativos.

1) *Métodos Cualitativos.* El objetivo de este tipo de métodos es llevar por un camino lógico, insesgado y sistemático, toda la información y las conjeturas convenientes, las cuales relacionen eficazmente a los factores que están siendo estimados.

Tales técnicas son frecuentemente aplicadas en áreas donde el desarrollo de la nueva tecnología, de nuevas ideas e innovaciones en términos generales predominan, esto se presenta ya que no está bien definido un producto nuevo o una idea innovadora dentro de un patrón en un sistema determinado, lo cual su vez provoca que se tengan pocos datos numéricos disponibles. Este es el caso cuando se desea pronosticar el comportamiento ( de acuerdo con cierta característica de interés ) de: turbinas de gas, automóviles que funcionan por medio de la electricidad o del vapor, medidas contra la contaminación, etcétera.

La información aplicada en los métodos cualitativos es obtenida comúnmente por intuición, o bien por conocimiento teórico del fenómeno en estudio, lo cual hace que fijen criterios tanto el pronosticador como el encargado de la toma de decisiones, este conocimiento es adquirido a través de la experiencia. Es decir, el método cualitativo no es capaz de separar los criterios, las políticas, las consideraciones personales y la evaluación objetiva del pasado, del presente o del futuro.

Cuanta más experiencia es obtenida con respecto a este campo, otros métodos indudablemente serán propuestos, muchos de los cuales representarán mejoramientos sustanciales sobre las técnicas existentes. Sin embargo, entender los métodos generales disponibles puede ser muy útil para mejorarlos ( véase Makridakis, 1978 ).

La cantidad de objeciones va en aumento en la aplicación de los métodos cualitativos, por el efecto que ocurre cuando el mismo método desarrollado por diferentes expertos no produce el mismo pronóstico.

El uso de esos métodos varía en cada situación y se requiere de un entendimiento claro de los factores involucrados y del aprovechamiento óptimo de la información disponible. Herschel (1978) hace mención de algunas definiciones relacionadas con los métodos cualitativos :

En principio se define esta metodología como " Una base de pronóstico con un nivel de confianza que conduce a la realización del método cualitativo en un tiempo dado con un nivel específico de soporte".

A su vez se hace distinción entre dos tipos de pronósticos realizados con los métodos cualitativos: de exploración y normativos.

Se define el pronóstico de exploración en términos de " la información que se tiene disponible de una o varias variables desde un principio, para después orientar esa o esas variables hacia el futuro". Por otro lado el pronóstico normativo primero evalúa las metas futuras, las necesidades y los deseos, para después recolectar la información pertinente y entonces se puede determinar la planeación que será necesaria para llevar a cabo esas metas.

### 2.1.1. Algunos tipos de métodos cualitativos.

1. *Método Delphi.* Se presenta cuando un conjunto de expertos en un área de interés, son interrogados para contestar una serie de cuestionarios y donde las respuestas de un cuestionario sirven para crear el cuestionario siguiente. Este procedimiento tiene en cuenta que la información disponible para un conjunto de expertos no lo es para otro y así trata de que todos los expertos

tengan acceso a la información disponible, la cual además debe ser clara para cada uno de ellos, a fin de que puedan realizar el pronóstico. Esta técnica elimina el efecto de que el pronóstico se incline por la mayoría de opinión de los expertos con respecto a una misma conclusión, descartando otras posibles conclusiones interesantes que expliquen el comportamiento de la variable o variables en el futuro.

La comparación del pronóstico de una serie con su comportamiento real de esa serie se torna favorable, tanto a corto, mediano o largo plazo utilizando esta técnica. La identificación de puntos decisivos se presentan también claramente. Esta técnica se aplica mayormente para la obtención de pronósticos a largo plazo, por ejemplo, en la obtención de pronósticos acerca de las ventas de nuevos productos y el pronóstico de los ingresos que se obtendrán por las ventas de esos productos.

La información requerida en esta técnica se obtiene por medio de una secuencia coordinada de cuestionarios, los que consolidan y hacen que se obtengan cada vez mejores respuestas.

2. *Investigación de Mercados.* Este es un procedimiento de pronóstico formal, conciso y sistemático que involucra y prueba las hipótesis acerca del comportamiento de una o varias series, dentro de la variabilidad real del mercado de un producto.

La precisión del pronóstico en términos de corto plazo (de 0 a 3 meses) es excelente, en períodos medianos (de 4 meses a 2 años) es bueno y en períodos largos (de 2 años en adelante) es favorable. Su aplicación es por lo regular para pronósticos a largo plazo de las ventas de nuevos productos dentro del mercado y en el pronóstico de la utilidades a obtener por las ventas de esos productos.



Como mínimo se necesita revisar dos veces los datos recabados, para que sean confiables e informen sobre el comportamiento de la serie. También se necesita de una considerable colección de datos que garanticen la variabilidad del mercado en los cuestionarios, en los estudios y en el análisis de series de tiempo de variables del mercado.

3. *Acuerdo general (Panel Consensus)*. La técnica está basada en la suposición de que algunos expertos pueden obtener un mejor pronóstico que una persona sin experiencia. No existen secretos entre los expertos y la comunicación es estimulante. Los pronósticos son algunas veces influenciados por factores sociales que no permiten reflejar un acuerdo general verdadero. La precisión del pronóstico obtenido con esta técnica a corto, mediano y largo plazo es pobre, también lo es la identificación de puntos decisivos dentro de la serie.

Se necesita que la información de un grupo de expertos sea presentada abiertamente en una asamblea, la cual conduzca a un acuerdo común del pronóstico

4. *Pronóstico Profético (Visionary Forecast)*. Esta técnica es una profecía que utiliza la percepción de la naturaleza interior de una persona, de diferentes opiniones y de todos los posibles factores acerca de diferentes escenarios del futuro. Se caracteriza por conjeturas subjetivas e imaginación en general, el procedimiento de esta técnica no se basa en nada científico.

Su aplicación es semejante a la de los casos anteriores. Para su realización se necesita de un conjunto de posibles sucesos acerca del futuro, que es preparado por un grupo de personas con el conocimiento interior de la variable a pronosticar.

5. *Analogía Histórica*. En esta técnica se hace un análisis comparativo de la introducción y desarrollo de nuevos productos que son similares. Una buena precisión del pronóstico logrado con esta técnica se adquiere aplicándola en períodos de tiempo a mediano y largo plazo.

## 2.2. Pronósticos Cuantitativos.

Los pronósticos cuantitativos se pueden obtener según Makridakis (1978) cuando existen las tres condiciones siguientes.

1. Hay información acerca del pasado.
2. Esta información puede ser cuantificada en forma de datos numéricos.
3. Se puede suponer que el comportamiento del patrón en el pasado continuará hacia el futuro.

El procedimiento a seguir por los métodos de pronóstico cuantitativos se divide a su vez en dos tipos.

- 1) Método intuitivo
- 2) Métodos cuantitativos formales.

1) *Método intuitivo*. Con este método se hace uso de extrapolaciones horizontales, estacionales o de tendencia y se basa en la experiencia empírica, que varía ampliamente de negocio a negocio, producto a producto y pronóstico a pronóstico. Por limitaciones en su precisión, el método intuitivo no es considerado un método formal, sin embargo muchas empresas continúan usando este método, ya sea porque no conocen otros métodos más sencillos o porque lo prefieren sobre los métodos más subjetivos para obtener pronósticos.

2) Métodos cuantitativos formales. En ellos también aparecen extrapolaciones, pero estos son desarrollados por un proceso sistemático que pretende minimizar el error en el pronóstico.

El cuadro 2 hace mención de los pasos a seguir en la construcción de modelos por los métodos cuantitativos formales.

#### **Cuadro 2.**

##### ***Desarrollo de los métodos cuantitativos formales.***

---

1. Entender el problema y el propósito para construir un modelo.
  2. Entender el papel del modelo en el sistema de toma de decisiones.
  3. Determinar cómo el modelo será implementado.
  4. Estructura del modelo. Entender cuál es la influencia de la variable o variables que están siendo pronosticadas.
  5. Seleccionar los datos cuidadosamente, entender sus limitaciones y graficarlos en diferentes formas.  
Considerése lo siguiente:
    - a) Definición de los datos en una forma consistente.
    - b) El conjunto de datos son visualizados en una representación gráfica, en donde se aprecian sus características más relevantes.
    - c) Eventos especiales (tales como golpes en la economía, días festivos, estancamiento en la producción) los cuales distorsionan los datos y dificultan el proceso de construcción del modelo. A estos eventos se les da el nombre de variables de intervención.
  6. Construir modelos univariados para las variables que serán pronosticadas y después introducir variables explicativas. Esto es con el fin de visualizar si los modelos son de mínima complejidad y asegurar que las variables son introducidas sólo si contribuyen a mejorar el modelo.
  7. Escoger el método cuantitativo formal para construir el modelo. La técnica más usual es por el método de Box y Jenkins.
  8. Este paso está vinculado con el paso 7. Cuando el modelo es construido iterativamente, es importante percatarse si se tiene parsimonia.
  9. Interpretar qué dice el modelo acerca de los datos.
  10. Realizar simulaciones con el modelo y entender las limitaciones del mismo.
  11. Considerar cómo los resultados del modelo pueden ser presentados en términos sencillos para su uso.
-

## 2.2.1 Algunos tipos de métodos cuantitativos formales.

Entre los métodos cuantitativos prevalecen dos tipos de modelos para pronósticar: los de series de tiempo y los de regresión. En el primer tipo, el pronóstico está basado en valores pasados de una variable y/o errores pasados. En cambio la regresión exhibe una relación causa-efecto entre una variable dependiente y una o más variables independientes.

### DEFINICION 1. SERIE DE TIEMPO.

La información recopilada metódicamente de la medición u observación numérica, realizada en intervalos de tiempo fijos, acerca de las características o variables económicas, de un país, de una empresa o de un conjunto de individuos, con fines de análisis para posteriormente crear expectativas, tomar decisiones o realizar planeación, es a lo que se conoce generalmente como una SERIE DE TIEMPO.

Para fines de pronóstico, el objetivo de los métodos de series de tiempo es descubrir el patrón de la secuencia histórica de una lista de datos y después extrapolar el patrón hacia el futuro.

Para el análisis y descripción de las series de tiempo es necesario hacer uso de la estadística, la cual utiliza dos enfoques básicos.

1) El enfoque descriptivo, el cual considera los cuatro tipos de patrones o gráficas que se obtienen generalmente en los datos. Ellas son: horizontal, estacional, ciclo y tendencia ( Makridakis, 1978 ).

a. Patrón horizontal. Se presenta cuando los valores de los datos fluctúan alrededor de una media constante. También se le da el nombre de serie estacionaria.

b. Patrón estacional. Es cuando la serie está influenciada por factores estacionales y carece de una media constante.

c. Patrón cíclico. Se presenta cuando los datos son influenciados por fluctuaciones económicas en períodos largos. La mayor distinción entre el patrón estacional y cíclico es que el primero es de una longitud constante y se repite en una base periódica dentro del año, mientras que el segundo varía en longitud y magnitud.

d. Tendencia en el patrón. Se presenta cuando hay crecimiento o decrecimiento en los datos.

Muchas series incluyen combinaciones de los patrones mencionados. Además, el enfoque descriptivo permite expresar en forma concisa, a través de unas cuantas medidas descriptivas, la información con que se cuenta. Es primordial construir gráficas antes de llevar a cabo cualquier tipo de cálculo, aunque sólo sea para verificar visualmente la congruencia de los datos (véase Guerrero, 1983).

2) El enfoque inferencial, cuyo objetivo fundamental es el de utilizar muestras representativas para realizar inferencias que sean válidas para la población de donde se obtuvo la muestra. Por lo que toca a las series de tiempo, la inferencia involucra el tipo de técnicas que se desean utilizar, en particular si se considera a la serie de tiempo generada por un proceso estocástico, la inferencia se realiza sobre el proceso generador de los datos.

## DEFINICION 2. PROCESO ESTOCASTICO

Un proceso estocástico es una familia de variables aleatorias asociadas a un conjunto índice de números reales de tal forma que a cada elemento del conjunto le corresponde una y sólo una variable aleatoria, esto se escribe como  $\{Z(t); t \in T\}$ , en donde  $T$  es el conjunto índice y  $Z(t)$  es la variable aleatoria correspondiente al elemento  $t$  de  $T$ .

En esta tesis se consideran exclusivamente series de tiempo discretas, con la característica adicional de que las observaciones sean hechas a intervalos con longitud de tiempo fijo.

## DEFINICION 3. SERIE DE TIEMPO DISCRETA

Es una serie de tiempo donde la sucesión de observaciones son generadas por un proceso estocástico cuyo conjunto índice se toma en relación al tiempo medido equidistantemente. En la práctica existen dos formas básicas para generar series de tiempo discretas:

- 1) Por saldo. Es una acumulación de una serie de datos al final de cierto período.
- 2) Por flujo. Es el comportamiento que se observa de una serie durante un período determinado.

A continuación se mencionan algunos tipos de pronósticos cuantitativos formales que se aplican comúnmente.

1. *Promedios móviles.* Cada punto que forma parte del cálculo en la técnica de promedios móviles de una serie de tiempo, es la media aritmética de algunos datos consecutivos de la serie donde el número de puntos se determina de manera tal que los efectos de estacionalidad e irregularidad, o ambos, sean eliminados de la serie de tiempo. Este método es aconsejable manejarlo a corto plazo, es decir, sólo de uno a tres meses. Su aplicación prevalece en el control de inventarios en el caso de contar con un bajo volumen de artículos.

Para su realización se requiere un mínimo de información de dos años en el caso de series de ventas en donde a veces se presenta la estacionalidad en la serie, otro caso de aplicación sería cuando se tienen pocos datos.

2. *Suavizamiento exponencial.* Esta técnica es similar a la de promedios móviles, excepto en que los datos más recientes tienen una mayor ponderación. Descriptivamente, el pronóstico nuevo es igual al pronóstico anterior más alguna proporción que considere el error del pronóstico anterior.

Hay muchas variantes del suavizamiento exponencial, algunas de las cuales son más versátiles que otras, además algunas son computacionalmente más complicadas. Con esta técnica se obtienen buenos resultados a corto plazo. A mediano y a largo plazo no es muy recomendable. En ella los puntos de cambio importantes no se ven con claridad.

Su aplicación es principalmente en la producción y en el control de inventarios, en el pronóstico de ingresos y en otros datos financieros. La información que se requiere para su realización es la misma que para los promedios móviles.

**3. Método de Box y Jenkins.** El Suavizamiento Exponencial es un caso especial del método de Box-Jenkins. Aquí la serie de tiempo es ajustada con un modelo matemático que es óptimo para la serie, lo cual significa que este modelo contiene el error más pequeño al representar a la serie. El tipo de modelo es identificado tomando en cuenta que la serie debe volverse primero estacionaria utilizando algunas herramientas como puede ser, alguna transformación, la función de autocorrelación y autocorrelación parcial y el grado de diferenciación. Los parámetros del modelo son estimados utilizando por lo regular el método de máxima verosimilitud, que es un método estadísticamente sólido y formal. Esta es aparentemente la rutina estadística disponible más eficiente, pero a la vez una de las más caras y al mismo tiempo, de las más utilizadas.

Los resultados que surgen de este método se pueden calificar de muy buenos a excelentes en uno a tres meses. Los puntos de cambio importantes son claros. Su principal aplicación es en el sector económico, financiero, de producción y en el control de inventarios para un gran volumen de artículos.

Para la realización de este pronóstico se requieren los mismos datos que para promedios móviles. Sin embargo, si se dispone de una mayor cantidad de datos, se facilita la identificación del modelo.



4. *X-11*. Método desarrollado por el Census Bureau de E.U.. Esta técnica descompone a una serie de tiempo en parte estacional, tendencia, ciclos y en elementos irregulares. Primero es usado para detallar el análisis de series de tiempo, incluyendo los efectos estacionales. También se ha extendido su uso en el pronóstico y sus resultados van de muy buenos a excelentes en los plazos de un mes a un año, además permite predecir los cambios importantes en el comportamiento de la serie.

Su aplicación es más frecuente en la localización y previsión de los diferentes factores de una compañía, principalmente en el área de ventas. Se requiere información de por lo menos tres años atrás para comenzar y después se necesita obtener la información completa, que se va obteniendo al paso del tiempo.

5. *Proyecciones de tendencias*. Esta técnica pretende ajustar la tendencia de una serie a una ecuación matemática y entonces se proyecta hacia el futuro por medio de esta ecuación. Hay algunas variaciones de la ecuación matemática, caracterizadas por las tendencias existentes. Con este método se obtienen buenos pronósticos a corto plazo, pero es pobre en la identificación de puntos decisivos. Se aplica principalmente en el pronóstico de nuevos productos en el mercado.

Para su realización se necesita de la información de varios casos que hayan usado la misma técnica, esta información debe ser de por lo menos cinco años atrás para comenzar y después se requerirá de la historia completa.

6. *Modelos de regresión.* Este mecanismo relaciona a la variable dependiente con otras variables independientes creando una ecuación y estimando los parámetros de la ecuación usando el método de mínimos cuadrados. Las relaciones son primero analizadas estadísticamente, aun cuando algunas relaciones sean seleccionadas por medio de pruebas o investigaciones.

Este método a corto plazo resulta muy bueno en su apego a la realidad. Además brinda explicaciones del comportamiento observado en la serie de interés, lo cual además del pronóstico es útil con fines de análisis.

7. *Modelos econométricos.* Un modelo econométrico es un sistema de ecuaciones de regresión interdependientes, que describen algunos sectores económicos o actividades. Los parámetros de las ecuaciones de regresión son usualmente estimados simultáneamente.

Los modelos econométricos son relativamente caros a desarrollar y su aplicación en pronóstico es excelente considerando un plazo de un mes a un año. Los puntos de cambio importantes son visualizados fácilmente. Su aplicación predomina en el pronóstico de las ventas de los diferentes clases de productos de una fábrica o empresa y en el pronóstico de las utilidades. La información que se requiere para su realización es similar a la de regresión, pero el conocimiento teórico-económico requerido es sustancialmente mayor.

### CAPITULO 3. MODELOS PARA COMBINACIONES LINEALES

Definase por  $(Z_{1t}, \dots, Z_{kt})$  al vector de dimensión  $k$  que contiene a las variables observadas en intervalos de tiempo semejantes. Por ejemplo, los componentes  $Z_{jt}$  pueden ser las ventas mensuales de  $k = 20$  diferentes productos ( $j = 1, \dots, 20$ ) o la lectura diaria de la contaminación de  $k = 7$  estaciones de monitoreo en la Zona Metropolitana de la Ciudad de México. Frecuentemente se presenta la necesidad de pronosticar la combinación lineal  $Y_t = \sum_{j=1}^k w_j Z_{jt}$ ; en los casos anteriores podrían ser el total de ventas mensuales  $w_j = 1$  o el promedio de la contaminación en la ciudad  $w_j = \frac{1}{7}$ . Tales pronósticos pueden ser basados en el pasado histórico de la combinación lineal  $Y_t$ , o en los registros de los componentes individuales  $Z_{1t}, \dots, Z_{kt}$ . Este caso de combinación lineal será tratado en el presente y en los siguientes capítulos.

El contenido de este capítulo está organizado como sigue. La sección 3.1 contiene un breve comentario acerca de los intervalos de observación más convenientes para las combinaciones lineales. En la 3.2 se consideran los casos que aparecen cuando se aplican las combinaciones lineales. En la 3.3 se hace un repaso breve sobre la literatura de combinaciones lineales de series de tiempo. La 3.4 presenta las definiciones que se aplicarán en lo subsecuente y por último, en la sección 3.5 se analiza el pro-

blema de modelar una combinación lineal de una o más series de tiempo, suponiendo que las series básicas siguen modelos ARIMA. Se hace uso en particular de modelos ARIMA porque, como se mencionó en el capítulo anterior, estos producen pronósticos eficientes para series de tiempo univariadas y son de los modelos más usados para pronosticar, ya sea en su forma de modelos ARIMA o en forma de modelos de suavizamiento exponencial, que son casos particulares de modelos ARIMA. Para una introducción a los modelos ARIMA así como su construcción y empleo en la práctica, consúltese Guerrero (1983).

### 3.1. Intervalos de tiempo para combinaciones lineales.

Las series de tiempo compuestas por datos obtenidos sobre la información de las finanzas, la economía, la ingeniería, el medio ambiente, la población, etcétera, de un país, de una empresa o de alguna institución, son con frecuencia datos recolectados en intervalos de tiempo iguales; por ejemplo en horas, en días, en semanas, en meses, en trimestres, en semestres o en años. Brewer (1973) comenta que "los que crean modelos estadísticos, muchas veces están en el error de subestimar el efecto que tiene el que las series son rara vez observadas en el intervalo apropiado, correspondiente a alguna acción que justifique el uso de ese intervalo en el modelo. Tales series son frecuentemente

modeladas en intervalos trimestrales y no hay razón para que sean modeladas en esta frecuencia".

En ocasiones se ha tenido en cuenta el señalamiento de Brewer y en particular la literatura sobre combinaciones lineales de series de tiempo, conduce a pensar que los intervalos mensuales son más apropiados que los anuales o trimestrales.

Esto es sugerido por tres razones: primero, los intervalos mensuales son casi la única alternativa práctica diferente de los intervalos trimestrales, en los casos de desagregación, o cuando se pretende reducir el intervalo de la muestra; segundo, porque es el intervalo más corto ( el menor en términos de la economía y de los negocios ) y probablemente el más confiable para los modelos que se conocen, y finalmente, porque a veces se presenta la necesidad de comparar los resultados de los modelos de intervalos mensuales, con modelos de intervalos trimestrales y anuales.

Así pues, considerar el período de observaciones óptimo para modelar y pronosticar series de tiempo, puede en ocasiones conducir a la elección de un procedimiento de pronósticos por sobre otros alternativos. Por ejemplo si una serie  $\{Y_t\}$  consiste de observaciones trimestrales, pero se sabe que se obtiene como agregación (combinación lineal) de datos mensuales  $\{Z_t\}$ , se tienen

las dos opciones siguientes a tener en cuenta: (i) se pronostican los valores mensuales de  $\{Z_t\}$  y después se agregan los pronósticos para obtener los valores pronosticados de  $Y_T$ , (ii) se agregan los valores mensuales de  $\{Z_t\}$ , se obtiene a  $Y_T$  y se pronostica. En esta situación seguramente la riqueza de información de la serie mensual es un factor decisivo para optar por el primero enfoque de pronóstico.

### 3.2. Combinaciones lineales en series de tiempo.

Dos de las razones para analizar y modelar las series de tiempo formadas por combinaciones lineales son:

1. Observar si mejoran los pronósticos cuando se utilizan combinaciones lineales de las series, sobre todo en los casos en que la información de una serie está contenida en otra, y también saber en qué grado una serie está contenida en otra.

2. Entender la relación dinámica entre las series dentro de una combinación lineal, considerando los cuatro diferentes casos que a continuación aparecen cuando se usan combinaciones lineales de las  $Z_t$ . Para ello, consideremos primero el proceso estocástico definido por un modelo de promedios móviles, denotado por MA(1).

$$Z_t = a_t - \theta a_{t-1} \quad (t=0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (3.1)$$

donde  $\{a_t\}$  forma una sucesión de ruido blanco, cuyas variables aleatorias son independientes e idénticamente distribuidas con media cero y varianza  $\sigma_a^2$ , y con  $|\theta| < 1$ . Para estos casos se supondrá que  $t$  cubre períodos semestrales.

**Caso 1. Promedios móviles.** Esta técnica de suavizamiento se basa como su nombre lo indica, en el uso de promedios móviles simples como un estimador que minimice el error cuadrático medio de las diferencias entre los valores reales y los valores pronosticados, lo cual corresponde a formar la combinación lineal con traslape.

$$x_t = \sum_{h=0}^{H-1} w_h z_{t-h} \quad (t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (3.2)$$

en donde las  $w_h$ 's son ponderaciones conocidas.

Un caso muy simple de (3.2) es cuando  $H=2$ , por lo que el promedio móvil cubre un año. Aquí se tiene

$$\begin{aligned} x_t &= w_0 z_t + w_1 z_{t-1} \\ &= w_0 (a_t - \theta a_{t-1}) + w_1 (a_{t-1} - \theta a_{t-2}) \\ &= w_0 a_t - w_0 \theta a_{t-1} + w_1 a_{t-1} - w_1 \theta a_{t-2} \end{aligned}$$

sea  $a_t^* = w_0 a_t + w_1 a_{t-1}$  y  $a_{t-1}^* = w_0 a_{t-1} + w_1 a_{t-2}$

entonces,

$$x_t = a_t^* - \theta a_{t-1}^* \quad (3.3)$$

esto muestra que  $x_t$  sigue un modelo MA(1) con el mismo coeficiente de promedios móviles como en (3.1) y la varianza del ruido blanco ( $a_t^*$ ) es igual a  $w_0^2 \sigma_a^2 + w_1^2 \sigma_a^2$ .

**Caso 2. Agregación Temporal.** Sea  $\{Z_t\}$  una serie de observaciones tomadas en intervalos de tiempo iguales, por ejemplo las ventas diarias de algún producto. Esto frecuentemente pasa cuando no se tiene interés en pronosticar a  $Z_t$ , sino a ciertas agregaciones temporales de las observaciones, tales como las ventas semanales o mensuales. Intuitivamente, si los datos son disponibles en un nivel básico diariamente, entonces deberían ser modelados y pronosticados en la agregación deseada, ya sea semanalmente o mensualmente. Si la variable en (3.1) es una variable de flujo (por ejemplo, la producción de carros en el transcurso de un semestre) se puede formar la serie anual por combinación lineal como sigue:

$$Y_T = Z_t + Z_{t-1} \quad (T = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (3.4)$$

donde  $t=2T$  y 0 es (arbitrariamente) tomado como el origen. Nótese que (3.4) es un caso especial de (3.2), pero aquí la combinación lineal no tiene traslape, es decir, para dos diferentes valores de T,  $Y_T$  incluye diferentes  $Z_t$ . Entonces se tiene

$$Z_t + Z_{t-1} = a_t - \theta a_{t-1} + a_{t-1} - \theta a_{t-2} = a_t + a_{t-1} - \theta (a_{t-1} + a_{t-2})$$



Ahora, la autocovarianza de orden  $k$  se obtiene como

$$\begin{aligned}
 \gamma_k &= E \{ [(a_t + a_{t-1}) - \theta (a_{t-1} + a_{t-2})], [(a_{t+2k} + a_{t+2k-1}) \\
 &\quad - \theta (a_{t+2k-1} + a_{t+2k-2})] \} \\
 &= E [ a_t a_{t+2k} + a_{t-1} a_{t+2k-1} - \theta a_{t+2k-1} a_t - \theta a_t a_{t+2k-2} \\
 &\quad + a_{t-1} a_{t+2k} + a_{t-1} a_{t+2k-1} - a_{t-1} \theta a_{t+2k-1} \\
 &\quad - \theta a_{t-1} a_{t+2k-2} - \theta a_{t-1} a_{t+2k} - \theta a_{t-1} a_{t+2k-1} \\
 &\quad + \theta^2 a_{t-1} a_{t+2k-1} + \theta^2 a_{t-1} a_{t+2k-2} - \theta a_{t-2} a_{t+2k} \\
 &\quad - \theta^2 a_{t-2} a_{t+2k-1} + \theta^2 a_{t-2} a_{t+2k-2} ]
 \end{aligned}$$

así, cuando  $k = 0$

$$\begin{aligned}
 \gamma_0 &= E [ a_t a_t - a_{t-1} a_{t-1} - \theta a_{t-1} a_{t-1} - \theta a_{t-1} a_{t-1} \\
 &\quad + \theta^2 a_{t-2} a_{t+2k-1} + \theta^2 a_{t-2} a_{t+2k-2} ] \\
 &= \sigma_a^2 + \sigma_a^2 - \theta \sigma_a^2 - \theta \sigma_a^2 + \theta^2 \sigma_a^2 + \theta^2 \sigma_a^2 \\
 &= 2 \sigma_a^2 (1 - \theta + \theta^2).
 \end{aligned}$$

y cuando  $k = 1$

$$\begin{aligned}
 \gamma_1 &= E [ \theta a_t a_t ] \\
 &= \theta^2 \sigma_a^2
 \end{aligned}$$

de tal forma que

$$\gamma_k = \begin{cases} 2\sigma_a^2(1 - \theta + \theta^2) & (k = 0) \\ \theta^2\sigma_a^2 & (k = 1) \\ 0 & (k > 1) \end{cases} \quad (2.5)$$

Ahora, sea  $a_t^* = a_t + a_{t-1}$  y  $a_{t-1}^* = a_{t-1} + a_{t-2}$  por lo cual se obtiene

$$Y_T = a_t^* - \theta a_{t-1}^* \quad (2.6)$$

concluyendo que  $Y_T$  sigue un modelo MA(1).

Caso 3. Muestreo Sistemático. Si la variable en (3.1) es una variable de saldo (por ejemplo, el cierre del balance de un semestre), se puede formar una serie anual con el registro de valores correspondientes a sólo uno de los semestres. Sea

$$Y_T = Z_{2T} \quad (T = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (2.7)$$

entonces se tiene

$$Z_{2T} = a_{2T} - \theta a_{2T-1}$$

o sea que

$$Y_{2T} = b_T \quad (2.8)$$

con

$$b_T = a_{2T} - \theta a_{2T-1} \quad (2.9)$$

que forma una sucesión de variables aleatorias independientes con media 0 y varianza  $(1+\theta^2)\sigma_a^2$ . Se obtiene así un modelo ARMA(0,0), es decir un ruido blanco para la serie  $\{Y_T\}$ .

Caso 4. Agregación contemporánea. Sean  $\{Z_{1t}\}$  y  $\{Z_{2t}\}$  dos series medidas en intervalos semestrales, ambas con modelos MA(1), o sea

$$z_{1t} = -\theta_1 a_{1,t-1} + a_{1t} \quad \text{y} \quad z_{2t} = -\theta_2 a_{2,t-1} + a_{2t} \quad (t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (3.10)$$

con media cero y varianzas  $\sigma_1^2(\theta_1^2 + 1)$  y  $\sigma_2^2(\theta_2^2 + 1)$ , respectivamente.

Considérese que las series son independientes y fórmese la siguiente combinación lineal

$$Z_t^* = Z_{1t} + Z_{2t}. \quad (3.11)$$

Si  $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ , entonces

$$Z_t^* = -\theta a_{t-1}^* + a_t^*, \quad (3.12)$$

donde  $a_t^* = a_{1t} + a_{2t}$  son variables independientes e idénticamente distribuidas, con media cero y varianzas  $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$ , así que,  $Z_t^*$  es un modelo MA(1) con el mismo parámetro  $\theta$ , pero con cambio en la varianzas. Este caso de combinación lineal, o sea el de agregación contemporánea será considerado como el caso de mayor importancia en este estudio.

Algo que se puede deducir de los casos anteriores es que, si los modelos de las series básicas satisfacen modelos ARIMA, las transformaciones lineales también se quedarán dentro de la familia de los modelos ARIMA, sólo que con algunas variantes en el orden y la naturaleza de sus parámetros, incluyendo cambios en las varianzas.

### 3.3. Antecedentes.

Las combinaciones lineales han sido discutidas en estadística y econometría. El modelo resultante para combinaciones lineales, dados los modelos para las series de tiempo originales fue presentado primero por Amemiya y Wu (1972) en el caso de series de flujos y sólo para modelos AR; por Brewer (1973) en series de flujos y saldos, para modelos ARMA y ARMAX; por Wei (1978) en los casos de modelos ARIMA estacionales y no-estacionales, para series de flujos; por Granger y Morris (1976) para la suma de procesos ARMA independientes y por Rose (1977) para combinaciones lineales de procesos ARIMA independientes. Por otro lado, el efecto de combinaciones lineales en la estimación de parámetros ha sido considerado por Tiao (1972), Tiao y Wei (1976), Wei (1978, 1979) y Hsiao (1979).

Asimismo, el efecto de la combinación lineal en el pronóstico fue estudiado por Tiao (1972), Amemiya y Wu (1972), Tiao y Wei (1976), Granger y Morris (1976), Rose (1977), Tiao y Guttman (1980), Wei y Abraham (1981), Abraham (1982), Abraham y Ledolter (1982) y Kohn (1982).

El problema general de la agregación contemporánea ha sido considerado por Theil (1954) y Kloeck (1961). En sus trabajos, el centro de interés está en la cuestión del efecto que ejerce la agregación, en la relación entre las variables endógenas y exógenas.

### 3.4. Definiciones.

En esta sección se presentan algunas definiciones que serán necesarias para el resto del capítulo y los siguientes.

DEFINICION 1. COMBINACION LINEAL DE VARIAS SERIES DE TIEMPO. Dado el conjunto de series de tiempo  $(Z_{1,t}, Z_{2,t}, \dots, Z_{k,t})$  observadas dentro del mismo intervalo de tiempo,  $t=1, \dots, N$  entonces la serie de la forma

$$Y_t = \alpha_1 Z_{1,t} + \alpha_2 Z_{2,t} + \alpha_3 Z_{3,t} + \dots + \alpha_k Z_{k,t} \quad (3.13)$$

es llamada una combinación lineal de las series  $Z_1, Z_2, \dots, Z_k$  donde  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  son constantes conocidas.

DEFINICION 2. COMBINACION DE UNA SERIE DE TIEMPO CON TRASLAPE (para diferentes valores de  $t$ ,  $x_t$  incluye algunas de las mismas  $Z_t$ ). Denótese por  $(Z_t)$ ,  $t=0, \pm 1, \pm 2, \dots$  la serie de tiempo univariada básica, en una escala de tiempo original y sea  $B$  el operador de retraso tal que  $B^h Z_t = Z_{t-h}$ , entonces se tiene

$$x_t = \sum_{h=0}^{H-1} w_h B^h Z_t \quad (t=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (3.14)$$

**DEFINICION 3.** COMBINACION LINEAL DE UNA SERIE DE TIEMPO SIN TRASLAPE (para diferentes valores de  $\tau$ ,  $Y_\tau$  incluye diferentes  $Z_t$ ). Denótese por  $(Z_t)$ ,  $t=0, \pm 1, \pm 2, \dots$  la serie de tiempo univariada y

$$Y_\tau = \sum_{h=0}^{H-1} w_h Z_{t-h} = \sum_{h=0}^{H-1} w_h B^h Z_t \quad (T=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (2.15)$$

donde  $t=\tau H$ , es una combinación lineal sin traslape de las  $Z_t$ 's en una escala de tiempo nueva.

En (2.14) y (2.15),  $w_0, w_1, \dots, w_{H-1}$  son constantes que ponderan la importancia de los retrasos con los cuales están asociados y donde  $w_0 \neq 0$ .

Dos casos de especial interés de (2.15) son:

- (a) Si  $w_1 = w_2 = \dots = w_{H-1}$  se presenta una agregación temporal, para el caso de una variable de flujo. Ejemplo, Sea  $w_0 = w_1 = \dots = w_{11} = 1$  y  $(Z_t)$  con  $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , donde  $t = TH$ ,  $T = 1$  y  $H = 12$ . Entonces,

$$\begin{aligned} Y_1 &= \sum_{h=0}^{11} w_h Z_{t-h} \\ &= w_0 Z_t + w_1 Z_{t-1} + w_2 Z_{t-2} + w_3 Z_{t-3} + w_4 Z_{t-4} \\ &\quad + w_5 Z_{t-5} + \dots + w_{11} Z_{t-11} \\ &= Z_t + Z_{t-1} + Z_{t-2} + Z_{t-3} + \dots + Z_{t-11} \end{aligned} \quad (2.16)$$

por lo tanto, se obtuvo una agregación temporal con ponderaciones iguales a uno.

- (b) Si  $w_h = 1$  cuando  $h = 2n-1$  ( $n \in N$ ) y  $w_h = 0$  para  $h \neq 2n-1$ , como en el caso de una variable de saldo, se sigue que el proceso  $\{Y_T\}$  en (3.15) es un muestreo sistemático de  $\{x_t\}$  en (3.14), o sea que  $Y_T = x_{TH}$ , para  $T = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ .  
Ejemplo, si  $H=6$ ,  $T=2$  y  $t=TH$ , se tiene lo siguiente:

Caso sin traslape,

$$Y_T = \sum_{n=1}^{H-1} w_h x_{t-h} = Z_{t-1} + Z_{t-2} + Z_{t-3}$$

$$Y_2 = Z_{11} + Z_{10} + Z_7 \quad (3.17)$$

Caso con traslape,

$$x_{TH} = \sum_{n=1}^{H-1} w_h x_{t-h} = Z_{t-1} + Z_{t-2} + Z_{t-3}$$

$$x_{12} = Z_{11} + Z_{10} + Z_7 \quad (3.18)$$

$\therefore$  (3.17) y (3.18) son iguales, por lo que  $Y_T$  representa un muestreo sistemático de  $x_t$ .

#### DEFINICION 4. COMBINACION LINEAL DE SERIES DE TIEMPO VECTORIALES.

Sea  $(Z_t, t=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$  un vector básico  $k \times 1$  de series de tiempo en una escala de tiempo original. Si  $w_0$  es un vector de tamaño  $k \times 1$  de constantes conocidas, entonces

$$Y_t = w_0' Z_t \quad (t=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (3.10)$$

es una combinación lineal contemporánea en una escala de tiempo original.

Nótese que (3.10) es una manera alternativa de escribir la expresión (3.9).

### 3.5. Aplicación de modelos en combinaciones lineales

En esta sección se consideran a los modelos ARIMA para combinaciones lineales de series de tiempo básicas, en los casos estacional y no estacional.

Una cuestión preliminar a considerar es la estructura de la matriz de varianza-covarianza que resulta de la combinación lineal.



Lema 1 (Pino, Morettin y Mentz, 1987). Sea  $Y_T$  la combinación lineal definida por (3.15), con  $Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_{nH})'$  y  $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)'$ . Si  $\Sigma_Y$  y  $\Sigma_Z$  denotan a las matrices de varianza-covarianza de  $Y$  y  $Z$ , respectivamente con  $\Sigma_Y$  de dimensión  $n \times n$  y  $\Sigma_Z$  de dimensión  $nH \times nH$ , y si además  $W$  es la matriz diagonal  $nH \times nH$  definida como

$$W = \begin{bmatrix} v & 0 & \dots & 0 \\ 0 & v & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & v \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

donde  $v = (w_1, w_2, \dots, w_{H-1})'$  y  $w_0 \neq 0$ . Entonces:

a)  $\Sigma_Y = W' \Sigma_Z W$

b)  $\sigma_Y(|U|) = \sum_{h=0}^{H-1} \sum_{h=0}^{H-1} w_h w_h \sigma_Z(|UH + h-1|)$

c)  $\Sigma_Z$  es definida positiva y esto implica que  $\Sigma_Y$  sea definida positiva

la variable  $U$  indica a las  $Y_T$ 's que tienden a variar juntas.

Demostración. Sea  $Z$  un vector de dimensión  $nH \times 1$  y

$$Y = W' Z \quad (3.21)$$

despejando se obtiene

$$Z = W'^{-1} Y \quad (3.22)$$

Definase a R como la forma cuadrática siguiente

$$R = (\underset{\sim}{Z} - \underset{\sim}{\mu})' \Sigma^{-1} (\underset{\sim}{Z} - \underset{\sim}{\mu}). \quad (3.23)$$

sustituyendo la transformación (3.20) dentro de R se tiene que

$$\begin{aligned} R &= (\underset{\sim}{W}^{-1} \underset{\sim}{Y} - \underset{\sim}{\mu})' \Sigma^{-1} (\underset{\sim}{W}^{-1} \underset{\sim}{Y} - \underset{\sim}{\mu}) \\ &= (\underset{\sim}{W}^{-1} \underset{\sim}{Y} - \underset{\sim}{W} \underset{\sim}{W}^{-1} \underset{\sim}{\mu})' \Sigma^{-1} (\underset{\sim}{W}^{-1} \underset{\sim}{Y} - \underset{\sim}{W} \underset{\sim}{W}^{-1} \underset{\sim}{\mu}) \\ &= [\underset{\sim}{W}^{-1} (\underset{\sim}{Y} - \underset{\sim}{W} \underset{\sim}{\mu})]' \Sigma^{-1} [\underset{\sim}{W}^{-1} (\underset{\sim}{Y} - \underset{\sim}{W} \underset{\sim}{\mu})] \\ &= (\underset{\sim}{Y} - \underset{\sim}{W} \underset{\sim}{\mu})' (\underset{\sim}{W}^{-1})' \Sigma^{-1} \underset{\sim}{W}^{-1} (\underset{\sim}{Y} - \underset{\sim}{W} \underset{\sim}{\mu}) \\ &= (\underset{\sim}{Y} - \underset{\sim}{W} \underset{\sim}{\mu})' (\underset{\sim}{W}' \Sigma \underset{\sim}{W})^{-1} (\underset{\sim}{Y} - \underset{\sim}{W} \underset{\sim}{\mu}) > 0 \end{aligned} \quad (3.24)$$

ya que  $(\underset{\sim}{W}^{-1})' = (\underset{\sim}{W}')^{-1}$ , esto prueba los incisos a y b. Por consiguiente, al ser  $\underset{\sim}{W}$  una matriz  $nH \times n$  de rango  $n$ ,  $w_{00} \neq 0$  y al ser (3.24) mayor que cero, también se prueba c. ■

En caso de muestreo sistemático,  $\underset{\sim}{v} = (0, 0, \dots, 1)'$  y  $\Sigma_y$  son obtenidas de  $\Sigma_x$  por medio de suprimir renglones y columnas.

Al tratar formalmente y al mismo tiempo, los casos de agregación y de muestreo sistemático, se define

$$r = 1 + \max \{h: 0 \leq h \leq H-1, w_h \neq 0\}. \quad (3.25)$$

En el caso especial de agregación temporal, se tiene  $r = H$ , mientras que en el caso de muestreo sistemático,  $r = 1$ .

### 3.5.1. Caso no-estacional

El modelo correspondiente para la combinación lineal  $Y_T$  cuando  $Z_t$  sigue un modelo ARIMA no-estacional, está dado por el siguiente teorema.

Teorema 1 (Pina, Morettin y Mentz, 1987). Sea  $Y_T$  ( $T=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) definida como (2.13) y supóngase que  $Z_t$  sigue un modelo ARIMA  $(p, d, q)$ . Entonces  $Y_T$  sigue un modelo ARIMA  $(p, d, q^*)$ , donde

$$q^* = [H^{-1}((H-1)(p+d) + q + r - 1)] \quad (2.26)$$

Demostración. Considérese la combinación lineal con traslape (2.14), definida como

$$x_t = \sum_{h=0}^{H-1} w_h Z_{t-h} = W_{H-1}(B) Z_t, \quad (2.27)$$

donde  $W_{H-1}(B) = \sum w_h B^h$  con  $h = 0, 1, \dots, H-1$ . De (2.27) se obtiene  $Y_T$  por muestreo sistemático:  $Y_T = x_{T/H}$ . Si el modelo ARIMA  $(p, d, q)$  para  $Z_t$ , es escrito como

$$\phi_p(B)(1-B)^d Z_t = \theta_q(B) a_t \quad (2.28)$$

donde  $\phi_p(B) = 1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p$  es un operador autorregresivo de orden  $p$ , y  $\theta_q(B) = 1 + \theta_1 B + \dots + \theta_q B^q$  es un operador de promedios móviles de orden  $q$ , y si se define  $\tilde{Z}_t = (1-B)^d Z_t$  y  $\tilde{x}_t = (1-B)^d x_t$ , entonces

$$\begin{aligned}
 X_t &= (1-B)^d X_t \\
 &= (1-B)^d W_{H-1}(B) Z_t \\
 &= W_{H-1}(B) (1-\phi_p(B)) Z_t + W_{H-1}(B) \theta_q(B) a_t
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

$$X_t = W_{H-1}(B) \tilde{Z}_t - W_{H-1}(B) \phi_p(B) \tilde{Z}_t + W_{H-1}(B) \theta_q(B) a_t \tag{2.30}$$

ya que  $W_{H-1}(B) \phi_p(B) Z_t = W_{H-1}(B) \theta_q(B) a_t$  es igual a (2.28), sólo que aparece al multiplicar ambos lados de (2.24) por  $W_{H-1}(B)$ , por lo tanto queda demostrado (2.30).

Ahora,

$$\phi_p(B) X_t = \bar{\theta}_{q+r-1}(B) a_t^* \tag{2.31}$$

donde el operador de promedios móviles  $\bar{\theta}_{q+r-1}(B) = W_{H-1}(B) \theta_q(B)$  tiene coeficientes

$$\bar{\theta}_j = \sum_{i=0}^j \theta_i w_{j-i} / w_0 \tag{2.32}$$

si se define  $w_r = w_{r+1} = \dots = w_{q+r-1} = \theta_{q+1} = \theta_{q+2} = \dots = \theta_{q+r-1} = 0$ ,  $\theta_0 = 1$ , y el ruido blanco  $a_t^* = w_0 a_t$  con medio cero y varianza  $w_0^2 \sigma_a^2$ .

Por lo tanto,  $X_t$  sigue un modelo ARMA  $(p, q+r+1)$  (invertible si no hay raíces de  $H_{H-1}^{-1}(B) = 0$  dentro o sobre del círculo unitario), y  $x_t$  sigue un modelo ARIMA  $(p, d, q+r-1)$ . Ahora, mientras que  $Y_T$  es un muestreo sistemático de  $x_t$ , se deduce (Brewer, 1973) que  $Y_T$  sigue un modelo ARIMA  $(p, d, q^*)$ , donde  $q^* = [(p + d + H^{-1}(q + r - 1 - p - d)]$ . ■

Ejemplo 1. Sea  $Z_t$  un modelo MA(1), definido como  $Z_t = a_t + \theta a_{t-1}$  y considérese una agregación de variables de flujo, donde  $H=2$ . Por el Teorema 1, usando (3.17), la combinación lineal  $Y_T$  sigue un modelo MA(1). En efecto,

$$\begin{aligned} \text{cov}(Z_{t+2u} + Z_{t+2u-1}, Z_t + Z_{t-1}) &= (a_t + \theta a_{t-1} + a_{t-1} + \theta a_{t-2}, a_t + \\ &\quad \theta a_{t-1} + a_{t-1} + \theta a_{t-2}) \\ &= E[(a_{t+2u} a_t + a_{t+2u} a_{t-1} + a_{t+2u} a_{t-1} + a_{t+2u} \theta a_{t-2} + \\ &\quad \theta a_{t+2u-1} a_t + \theta a_{t+2u-1} \theta a_{t-1} + \theta a_{t+2u-1} a_{t-1} + \theta a_{t+2u-1} \theta a_{t-2} + \\ &\quad a_{t+2u-1} a_t + a_{t+2u-1} \theta a_{t-1} + a_{t+2u-1} a_{t-1} + a_{t+2u-1} \theta a_{t-2} + \\ &\quad \theta a_{t+2u-1} a_t + \theta a_{t+2u-1} \theta a_{t-1} + \theta a_{t+2u-1} a_{t-1} + \theta a_{t+2u-1} \theta a_{t-2})] \end{aligned}$$

Si  $u = 0$ , entonces

$$\begin{aligned} \text{cov}(Z_t + Z_{t-1}, Z_t + Z_{t-1}) &= (a_t + \theta a_{t-1} + a_{t-1} + \theta a_{t-2}, a_t + \theta a_{t-1} \\ &\quad + a_{t-1} + \theta a_{t-2}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= E [(a_l + \theta a_{l-1} + a_{l-1} + \theta a_{l-2}, a_l + \theta a_{l-1} + a_{l-1} + a_{l-2})], \\
&= E [(a_l a_l + \theta a_l a_{l-1} + a_l a_{l-1} + a_l \theta a_{l-2} + \theta a_{l-1} a_l + \theta a_{l-1} \\
&\quad \theta a_{l-1} + \theta a_{l-1} a_{l-1} + \theta a_{l-1} \theta a_{l-2} + a_{l-1} a_l + \theta a_{l-1} a_{l-1} + a_{l-1} \\
&\quad a_{l-1} + a_{l-1} \theta a_{l-2} + \theta a_{l-2} a_l + \theta a_{l-1} \theta a_{l-2} + \theta a_{l-2} a_{l-1} + \theta a_{l-2} \\
&\quad \theta a_{l-2})]. \\
&= E [(a_l a_l + 2 \theta a_l a_{l-1} + 2 a_l a_{l-1} + 2 a_l a_{l-2} + 2 \theta a_{l-1} a_{l-1} \\
&\quad + \theta a_{l-1} \theta a_{l-2} + 2 \theta a_{l-1} a_{l-2} + \theta a_{l-1} \theta a_{l-1} + a_{l-1} a_{l-1} + \theta a_{l-2} \\
&\quad \theta a_{l-2})].
\end{aligned}$$

Como  $E(a_i a_j) = 0$  cuando  $i \neq j$  y  $E(a_i a_j) = \sigma_a^2$  cuando  $i=j$ , se obtiene

$$\begin{aligned}
&= \sigma_a^2 + 2\theta\sigma_a^2 + 2\theta^2\sigma_a^2 + \sigma_a^2 = 2\sigma_a^2 + 2\theta\sigma_a^2 + 2\theta^2\sigma_a^2, \\
&= 2\sigma_a^2(1 + \theta + \theta^2).
\end{aligned}$$

por lo tanto, se sigue que

$$\text{cov}(Z_{l+2u} + Z_{l+2u-1}, Z_l + Z_{l-1}) = \begin{cases} 2\sigma_a^2(1 + \theta + \theta^2) & (u=0), \\ \theta \sigma_a^2 & (|u|=1) \\ 0 & (|u|>1) \end{cases}$$

es decir

$$\sigma_Y(u) = \text{cov}(Y_{T+u}, Y_T) = \begin{cases} 2\sigma_a^2(1 + \theta + \theta^2) & (u=0), \\ \theta \sigma_a^2 & (|u|=1) \\ 0 & (|u|>1) \end{cases} \quad (2.38)$$

la cual corresponde a la estructura de covarianza de un modelo MA(1), como se esperaba.

Por el Lema 1 se nota que (2.38) es la matriz de varianza-covarianza que corresponde a  $a_1$  y  $\theta^*$ . Anderson (1971, p.224-225) da el procedimiento para encontrar  $\theta^*$ . Para un MA(1), la función de covarianza satisface la ecuación

$$\sigma_Y(-1) + \sigma_Y(0)z + \sigma_Y(1)z^2 = 0,$$

la cual tiene dos raíces; una es  $z_1$  con  $|z_1| \leq 1$ , y la otra es  $1/z_1$ . Entonces (Anderson, 1971, p. 225),  $z = -z_1 = -\frac{\sigma_Y(0)}{\sigma_Y(1)}z + \theta^* = z + \theta^*$  y se obtiene que

$$\theta^* = -z_1 = \frac{\sigma_Y(0) \pm (\sigma_Y(0)^2 - 4\sigma_Y^2(1))^{1/2}}{2\sigma_Y(1)},$$

$$\theta^* = -z_1 = \frac{2\sigma_a^2(1+\theta+\theta^2) \pm 2\sigma_a^2(1+\theta+\theta^2) - 2\theta\sigma_a^2}{2\theta\sigma_a^2}$$

$$\theta_1^* = \frac{4\sigma_a^2(1+\theta+\theta^2) - 2\theta\sigma_a^2}{2\theta\sigma_a^2} = \frac{2(1+\theta+\theta^2)}{\theta} - 1$$

si  $\theta = .2$ , entonces

$$\theta_1^* = \frac{2(1 + .2 + .04)}{.2} - 1 = \frac{2.24}{.2} - 1 = \frac{1.04}{.2} > 1$$

$$\theta_2^* = -\frac{2\theta\sigma_a^2}{2\theta\sigma_a^2} = -1$$

por lo cual  $\theta_2^*$  en valor absoluto es igual a 1 y resulta ser el valor indicado para  $\theta^*$ , donde  $\sigma_v(U)$  están dados en (2.22).



Ejemplo 2. Sea  $Z_t$  una serie definida por un modelo ARIMA (1,1,1) y  $Y_T$  definida por (3.15). Entonces  $Y_T$  se comporta como un modelo ARIMA (1,1,q\*), r definida por (3.25), con q\* definida en (3.26) y con H=2

$$r = 1 + \max ( h : 0 \leq h \leq H-1, w_h \neq 0 ) = 2$$

$$q^* = [1 + 1 + 2^{-1}(1 + 2 - 1 - 1 - 1)] = 2$$

Si el modelo ARIMA (1,1,1) para  $Z_t$  es escrito como

$$(1 - \phi_1 B)(1 - B) Z_t = (1 - \theta_1 B) a_{1t}$$

entonces se tiene

$$Z_t = (1 - \phi_1 B)^{-1} (1 - B)^{-1} (1 - \theta_1 B) a_{1t} \quad (3.34)$$

$$Y_t = \sum_{h=0}^{2-1} w_h Z_{t-h} = w_0 Z_t + w_1 Z_{t-1} \quad (3.35)$$

sustituyendo (3.34) en (3.35), se tiene

$$Y_t = w_0 [ (1 - \phi_1 B)^{-1} (1 - B)^{-1} (1 - \theta_1 B) a_{1t} ] + w_1 [ (1 - \phi_1 B)^{-1} (1 - B)^{-1} (1 - \theta_1 B) a_{1,t-1} ]$$

$$\begin{aligned}
(1 - \phi_1 B)(1 - B) Y_t &= w_0 (1 - \theta_1 B) a_{2,t} + w_1 (1 - \theta_1 B) a_{2,t-1} \\
&= w_0 (a_{2,t} - \theta_1 a_{2,t-1}) + w_1 (a_{2,t-1} - \theta_1 a_{2,t-2}) \\
&= w_0 a_{2,t} + (w_1 - w_0 \theta_1) a_{2,t-1} - w_1 \theta_1 a_{2,t-2} \\
&= [w_0 + (w_1 - w_0 \theta_1) B - w_1 \theta_1 B^2] a_{2,t} \\
&= w_0 \left[ 1 + \frac{w_1 - w_0 \theta_1}{w_0} B + \frac{w_1 - w_1 \theta_1}{w_0} B^2 + \dots \right] a_{2,t}
\end{aligned}$$

lo cual es válido sólo si,  $w_2 = w_3 = \theta_3 = \theta_4 = \dots = \theta_s = 0$ ,  $\theta_0 = 1$ , que corresponde a un modelo ARIMA (1,1,2) cuyo ruido blanco  $a_t^* = w_0 a_t$  tiene media cero y varianza  $w_0^2 \sigma_a^2$ .

### 3.5.2. Caso estacional

El siguiente teorema trata el caso estacional.

Teorema 2 (Pino, Morettin y Mentz, 1987). Sea  $Y_T$  ( $T = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) definida como en (3.15) supóngase que  $Z_t$  sigue un modelo ARIMA  $(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$ , y  $S$  es un entero tal que  $SH = s$ . Entonces  $Y_T$  sigue un ARIMA  $(p, d, q^*) \times (P, D, Q)_s$ , con  $q^*$  dado por (3.2d).

Demostración. Por hipótesis,

$$\Phi_p(B^s) \phi_p(B) (1 - B^s)^D (1 - B)^d Z_t = \Theta_q(B^s) \theta_q(B) a_t, \quad (3.2d)$$

donde  $\phi_p(B^*)$  y  $\phi_p(B)$  son operadores autorregresivos,  $\theta_q(B^*)$  y  $\theta_q(B)$  son operadores de promedios móviles y  $\{a_t, t=0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$  es una sucesión de ruido blanco con variancia  $\sigma_a^2$ . Entonces,

$$\phi_p(B^*) (1-B^*)^D z_t = \theta_q(B^*) c_t, \quad (3.27)$$

donde  $\phi_p(B) (1-B)^d c_t = \theta_q(B) a_t$ ;  $C_t$  sigue un modelo ARIMA(p,d,q).

Ahora, defínase

$$V_T = \begin{bmatrix} \sum_{h=0}^{H-1} v_h B^h \end{bmatrix} c_{TH} \quad (3.28)$$

por el Teorema 1,  $V_T$  sigue un modelo ARIMA (p,d,q\*), con q\* dado por (3.2d); que es

$$\bar{\phi}_p(\beta) (1-\beta)^d V_T = \bar{\theta}_q^*(\beta) b_T, \quad (3.29)$$

donde  $\beta = B^H$ ,  $\beta^S = B^{SH} = B^*$ ,  $\bar{\phi}_p(\beta)$  es un operador autorregresivo,

$\bar{\theta}_q^*(\beta)$  es un operador de promedios móviles y  $b_T$  es una sucesión

de ruido blanco. Ahora, como

$$\theta_q(B^*) V_T = \begin{bmatrix} \sum_{h=0}^{H-1} w_h B^h \end{bmatrix} \theta_q(B^*) c_{TH} = \begin{bmatrix} \sum_{h=0}^{H-1} w_h \beta^h \end{bmatrix} \phi_p(B^*) (1-B^*)^D z_{TH}, \quad (3.30)$$

usando (2.39). De (2.15) y (2.40), se sigue que

$$\bar{\phi}_p(\beta^2)(1-\beta^2)^D Y_T = \theta_a(\beta^2) V_T. \quad (3.41)$$

Multiplicando ambos lados de (3.41) por  $\bar{\phi}_p(\beta)(1-\beta)^d$  y usando (2.40), se obtiene

$$\bar{\phi}_p(\beta^2)\bar{\phi}_p(\beta)(1-\beta^2)^D(1-\beta)^d Y_T = \theta_a(\beta^2)\bar{\theta}_q(\beta)b_T, \quad (3.42)$$

y el teorema queda probado. ■

#### CAPITULO 4. PRONOSTICOS CON UN MODELO DE COMBINACION LINEAL

En este capítulo se considera la teoría correspondiente al problema del pronóstico de una combinación lineal  $Y_T$ , a partir de un vector de series de tiempo  $Z_t = (Z_{1t}, \dots, Z_{kt})$ . Se ha organizado este capítulo de la siguiente manera: la sección 4.1 contiene algunas definiciones que se utilizan durante el desarrollo del capítulo. En la 4.2 se formalizan los supuestos necesarios para obtener el pronóstico de la combinación lineal  $Y_T$ , para  $M$  períodos hacia adelante, partiendo del origen  $T$ , suponiendo que todos los parámetros son conocidos. Se consideran tres clases de pronósticos en la sección 4.3: para el enfoque 1 (directo) primero se forma la combinación lineal, se identifica el modelo para  $Y_T$  y después se pronostica. Con el enfoque 2 (indirecto) se obtienen modelos univariados para cada serie que forma la combinación lineal y se pronostica cada una de ellas por separado, después se forma la combinación lineal de los pronósticos. Con el enfoque 3 (multivariado) se identifica el modelo multivariado para  $Z_t$ , se pronostica el vector y al último se forma la combinación lineal. Se hace también en esta sección una comparación de la eficiencia entre el Enfoque 1 y el 3. Una comparación formal con el Enfoque 2 no es factible realizarla en términos de eficiencia, ya que en particular para ese enfoque no es posible calcular la varianza del pronóstico de una manera sencilla.

#### 4.1. Definiciones

DEFINICION 1. Considérense las combinaciones lineales mencionadas en la sección 3.4.. Se hace ahora la suposición de que las series de tiempo básicas son estacionarias y admiten una representación pura de modelos de promedios móviles. Para el caso univariado se define

$$Z_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j a_{t-j} \quad (t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (4.1)$$

donde  $\psi_0 = 1$ ,  $\sum \psi_j^2 < \infty$  con  $j = 0, \dots, \infty$ , y  $\{a_t\}$  es un proceso estocástico de ruido blanco con  $\sigma_a^2 > 0$ .

DEFINICION 2. Para el caso vectorial se usa también la representación de modelos de promedios móviles para definir

$$\tilde{Z}_t = \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j \tilde{a}_{t-j} \quad (t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (4.2)$$

donde  $\Psi_j$  son matrices de dimensión  $k \times k$ ,  $\Psi_0 = I$ ,  $\{\tilde{a}_t\}$  es un proceso de vectores aleatorios independientes con media cero y matriz de varianza-covarianza definida positiva  $\Sigma_a$  y  $\sum \Psi_j \Sigma_a \Psi_j'$ , donde la suma sobre  $j = 0, \dots, \infty$  es convergente.

DEFINICION 3. Si  $Y_T$  está definida por (3.9) y (3.15), en este capítulo se definirá como

$$Y_T = \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j b_{T-j} \quad (T = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (4.3)$$

donde  $\gamma_0 = 1$ ,  $\sum \gamma_j^2 < \infty$  con la suma sobre  $j = 0, \dots, \infty$  y  $\{b_T\}$  es un proceso estocástico de ruido blanco, con varianza  $\sigma_b^2 > 0$ .

#### 4.2. Formalización de supuestos

El criterio que se usará para determinar la optimalidad del pronóstico será el del Error Cuadrático Medio Mínimo, es decir, el pronóstico a partir del origen  $t$ , en  $m$  períodos hacia adelante,  $\hat{Z}_t(m)$  deberá satisfacer la condición siguiente

$$E_t [ Z_{t+m} - \hat{Z}_t(m) ]^2 = \min_{\tilde{Z}_t(m)} E_t [ Z_{t+m} - \tilde{Z}_t(m) ]^2 \quad (4.4)$$

en la cual  $E_t$  denota a la esperanza condicional, dada toda la información hasta el momento  $t$ , o sea

$$E_t [ Z_{t+m} - \tilde{Z}_t(m) ]^2 = E ( [ Z_{t+m} - \tilde{Z}_t(m) ]^2 | Z_t, Z_{t-1}, \dots ) \quad (4.5)$$

Ya que  $\tilde{Z}_l(m)$  y por consiguiente también  $\hat{Z}_l(m)$ , debe ser de la forma

$$\tilde{Z}_l(m) = k_m a_{l+m} + k_{m+1} a_{l+m-1} + \dots = \sum_{j=m}^{\infty} k_j a_{l+m-j} \quad (4.6)$$

el problema de obtener  $\hat{Z}_l(m)$  se traduce en la especificación de los valores  $k_m, k_{m+1}, \dots$ , de manera tal que se cumpla la relación (4.4).

Con este fin, la observación  $Z_{l+h}$  se escribirá como

$$\begin{aligned} Z_{l+m} &= \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j a_{l+m-j} \\ &= \sum_{j=0}^{m-1} \psi_j a_{l+m-j} + \sum_{j=m}^{\infty} \psi_j a_{l+m-j}, \quad \text{con } \psi_0 = -1 \end{aligned} \quad (4.7)$$

en donde la primera suma corresponde a información desconocida al tiempo  $t$  (ya que abarca observaciones desde  $t+1$  hasta  $t+m$ ) mientras que la segunda suma consta de información conocida al tiempo  $t$  (desde  $-\infty$  hasta  $t$ ).

De (4.7) y (4.6) se obtiene

$$Z_{l+m} - \tilde{Z}_l(m) = \sum_{j=0}^{m-1} \psi_j a_{l+m-j} + \sum_{j=m}^{\infty} (\psi_j - k_j) a_{l+m-j} \quad (4.8)$$



y debido a que  $E [ a_{l+i}, a_{l+j} ] = 0$  para  $i \neq j$ , se sigue que

$$E_l [ Z_{l+m} - \hat{Z}_l(m) ]^2 = \sum_{j=0}^{m-1} \psi_j^2 \sigma_a^2 + \sum_{j=m}^{\infty} (\psi_j - k_j)^2 \sigma_a^2 \quad (4.9)$$

el mínimo de esta expresión se obtiene haciendo  $k_j = \psi_j$  donde  $j \geq m$ , lo cual conduce a tener

$$E_l [ Z_{l+m} - \hat{Z}_l(m) ]^2 = \sum_{j=0}^{m-1} \psi_j^2 \sigma_a^2 \quad (4.10)$$

con  $\hat{Z}(m)$  dado, según (4.8), por

$$\hat{Z}(m) = \psi_m a_l + \psi_{m+1} a_{l-1} + \dots = \sum_{j=m}^{\infty} \psi_j a_{l+m-j} \quad (4.11)$$

Ahora bien, por definición de la esperanza condicional  $E_l$ , se tiene

$$E_l ( a_{l+m-j} ) = \begin{cases} a_{l+m-j} & \text{si } j \geq m \\ 0 & \text{si } j < m \end{cases} \quad (4.12)$$

de donde se sigue que

$$\begin{aligned}
 E_t ( Z_{l+m} ) &= E_t ( \sum_{j=0}^{m-1} \psi_j a_{l+m-j} ) + E_t ( \sum_{j=m}^{\infty} \psi_j a_{l+m-j} ) \\
 &= \sum_{j=m}^{\infty} \psi_j a_{l+m-j}
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

y en consecuencia, al comparar esta última expresión con (4.11), se advierte que  $E_t ( Z_{l+m} )$  proporciona el pronóstico con error cuadrático medio mínimo, es decir

$$\hat{Z}_t(m) = E_t ( Z_{l+m} ) \tag{4.14}$$

El error del pronóstico (4.14) con origen en  $t$ , viene dado por

$$\begin{aligned}
 e_t(m) &= Z_{l+m} - \hat{Z}_t(m) \\
 &= \sum_{j=0}^{m-1} \psi_j a_{l+m-j}, \quad \text{para } m = 1, 2, \dots
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

por lo cual es inmediato que

$$E_t [ e_t(m) ] = 0 \quad \text{y} \quad \text{Var}_t [ e_t(m) ] = \sum_{j=0}^{m-1} w_j^2 \sigma_a^2 \quad (4.16)$$

con  $\text{Var}_t [ e_t(m) ] = \text{Var} [ e_t(m) \mid Z_t, Z_{t-1}, \dots ]$ ; aquí se aprecia en particular que los pronósticos  $\hat{Z}_t(m)$  son (condicionalmente) insesgados. Además, se tiene

$$\text{Var}_t [ e_t(m) ] - \text{Var}_t [ e_t(m-1) ] = \psi_{m-1}^2 \sigma_a^2 \geq 0 \quad \text{para } m \geq 1 \quad (4.17)$$

de donde se deduce que al emplear los pronósticos óptimos, mientras más alejado se desee el pronóstico (mayor sea  $m$ ) mayor será la varianza (menor la precisión) del mismo.

Si se toma  $m = 1$  en (4.15) se obtiene

$$e_t(1) = Z_{t+1} - \hat{Z}_t(1) = a_{t+1} \quad (4.18)$$

lo cual es válido para  $t = d, d+1, \dots, N$ , con  $d$  el número de diferencias del modelo ARIMA  $(p, d, q)$  y que por tanto muestra que los errores del pronóstico de un periodo hacia adelante no están correlacionados. En general los errores de pronóstico  $e_d(m), e_{d+1}(m), \dots, e_N(m)$ , se encuentran correlacionados para  $m \geq 2$  ya

que, como lo muestra la expresión (4.15), la serie  $\{e_t(m)\}$  con  $m$  fijo, sigue un proceso  $MA(m-1)$ . Por otro lado, si el origen permanece fijo, los errores de pronóstico para diversos periodos hacia adelante,  $e_t(1)$ ,  $e_t(2)$ , ...,  $e_t(M)$  con  $M \geq 2$ , también están correlacionados.

La optimalidad del pronóstico en combinaciones lineales se basa en lo dicho anteriormente, pero ahora se cuenta adicionalmente con los siguientes resultados.

Teorema 3 (Pino, Morettin y Mentz, 1987). Sea  $\{Z_t\}$  una serie de tiempo estacionaria que admite la representación de promedios móviles para el caso univariado definida en (4.1) y  $Y_T$  está dado por (2.15) entonces:

i) el pronóstico con Error Cuadrático Medio Mínimo de  $Y_{T+M}$ , con origen  $T$ , está dado por

$$\hat{Y}_T(M) = \sum_{h=0}^{H-1} w_h \sum_{TH}^{MH-h} (MH-h) = E_t(Y_{T+M}) \quad (4.19)$$

$$= \sum_{h=0}^{H-1} \sum_{j=0}^{\infty} w_h \psi_{MH-1}^a \psi_{TH-j}^a \quad (4.20)$$

ii) El error del pronóstico (4.20) con origen en  $T$ , viene dado por

$$e_T(H, M, 1) = Y_{T+M} - \hat{Y}_T(M) = \sum_{h=0}^{H-1} w_h \sum_{j=0}^{MH-h-1} \psi_j^a \psi_{(T+M)H-h-j}^a \quad (4.21)$$

La expresión (4.20) representa la discrepancia que hay entre el dato observado de una variable y el valor obtenido como pronóstico que resulta de una combinación lineal (de los escalares  $\hat{z}_{TH}$  multiplicados cada uno por sus respectivas ponderaciones conocidas  $v$ 's), donde T es el origen M es el horizonte de pronóstico y H es el intervalo de agregación temporal.

Demostración. Sean  $Y_{T+M}$  y  $\tilde{Y}_T(M)$  definidas como a continuación se muestra

$$Y_{T+M} = \sum_{h=0}^{H-1} v_h [ ( a_{(T+M)H-h} + \psi_1 a_{(T+M)H-h-1} + \dots + \psi_{MH-h-1} a_{(T+M)H-h+1} ) + \sum_{h=0}^{H-1} v_h ( \psi_{MH-h} a_{TH} + \psi_{MH-h-1} a_{TH-1} + \dots ) ]$$

$$Y_{T+M} = \sum_{h=0}^{H-1} \sum_{j=0}^{\infty} v_h z_{TH+MH-h} = \sum_{h=0}^{H-1} \sum_{j=0}^{\infty} v_h \psi_j a_{(T+M)H-h-j}$$

y

$$\tilde{Y}_T(M) = \sum_{h=0}^{H-1} v_h [ \psi_{MH-h} a_{TH} + \psi_{MH-h-1} a_{TH-1} + \dots ] = E_t [ Y_{T+M} ]$$

por lo cual es inmediato que

$$e_T(H, M, 1) = Y_{T+M} - \tilde{Y}_T(M) = \sum_{h=0}^{H-1} v_h [ ( a_{(T+M)H-h} + \psi_1 a_{(T+M)H-h-1} + \dots + \psi_{MH-h-1} a_{(T+M)H-h+1} ) - \sum_{h=0}^{H-1} v_h \sum_{j=0}^{MH-h-1} \psi_j a_{(T+M)H-h-j} ]$$

iii) la varianza del error del pronóstico es

$$V [ e_T (H, M, i) ] = \sigma_a^2 \sum_{h=0}^{H-1} \sum_{j=0}^{MH-h-1} \sum_{i=0}^{\sigma} w_h w_j \psi_j \psi_{h+j-i}, \quad (6.22)$$

donde  $G = \min ( H-1, J+h )$ .

Es importante notar cómo está definida  $G$ , puesto que si no se tomara en cuenta esto se obtendrían valores del tipo  $\psi_{-i}$ . Aquí se aprecia en particular que los pronósticos  $\tilde{Y}_i(m)$  son insesgados. Además, se tiene

$$V [ e_i(m) ] - V [ e_i(m-1) ] = w_{H-i} w_{\sigma} \psi_{MH-h-1} \psi_{H(i+M)-h-\sigma-2} \sigma_a^2 \geq 0$$

para  $h, j, i \geq 1$ . (6.23)

de donde se deduce que al emplear los pronósticos óptimos, mientras más alejado se desee el pronóstico ( mayor sea  $m$  ) mayor será la varianza.

#### Casos especiales:

- (a) Combinación lineal. Si  $w_h = 1$  para toda  $h$ , entonces se tiene el caso presentado por Abraham (1982).
- (b) Muestreo sistemático. Si  $w_0 = 1$  y  $w_h = 0$  para  $h > 0$ , entonces se tiene el caso presentado por Abraham & Ledolter (1982).

Los resultados previos se extienden para el caso vectorial. En efecto, se tiene que el pronóstico con error cuadrático medio mínimo del vector  $\underline{Z}_{t+m}$ , en el origen  $t$ , puede ser escrito como

$$\hat{\underline{Z}}_t(m) = \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_{m+j} \underline{a}_{t-j}, \quad (4.24)$$

el error de pronóstico del vector

$$\underline{e}_t(m) = \underline{Z}_{t+m} - \hat{\underline{Z}}_t(m) = \sum_{j=0}^{m-1} \Psi_j \underline{a}_{t+m-j}, \quad (4.25)$$

y la varianza del error de pronóstico es la matrix  $k \times k$

$$V[\underline{e}_t(m)] = \sum_{j=0}^{m-1} \Psi_j \Sigma_a \Psi_j'. \quad (4.26)$$

Considerése ahora el siguiente teorema.

Teorema 4 (Pino, Morettin y Ments, 1987). Supóngase que  $\underline{Z}_t$  satisface (4.2) y que  $\underline{Y}_T$  está dado por (3.19). Entonces:

i) el pronóstico con error cuadrático medio mínimo de  $\underline{Y}_{T+M}$ , en el origen  $T$ , está dado por

$$\hat{\underline{Y}}_T(M) = \sum_{h=0}^{M-1} \underline{w}'_h \hat{\underline{Z}}_{T+M-h}; \quad (4.27)$$

ii) el error del pronóstico es

$$e_T(H, M, k) = \sum_{h=0}^{H-1} \sum_{j=0}^{MH-h-1} w_h' \Psi_j a_{(T+M)H-h-j}; \quad (4.20)$$

Es el error probable que representa la variabilidad que debería considerarse al aplicar la diferencia entre los datos observados de un vector y los datos del vector pronóstico, obtenidos por medio de la combinación lineal.

iii) la varianza del pronóstico es

$$V [ e_T(H, M, k) ] = \sum_{h=0}^{H-1} \sum_{j=0}^{MH-h-1} \sum_{i=0}^{MH-h-1} w_h' \Psi_j \Psi_{j+h-i}' w_i; \quad (4.21)$$

Casos especiales:

1. *Agregación contemporánea.* Si  $H = 1$  se tiene que  $\sum_{i=0}^0 w_i' Z_i = \sum_{i=0}^0 w_{0i} Z_{1i}$ , donde la suma es sobre  $i = 1, \dots, k$ . Si  $w_0 = (1, 1, \dots, 1)'$  se obtiene  $\sum Z_{1i}$ , donde la suma de  $i = 1, \dots, k$ , es una suma contemporánea de  $k$  series de tiempo, como en el caso considerado por Wei & Abraham (1981).

2. *Agregación.* Si  $w_h = (1, 1, \dots, 1)'$  para toda  $h$ ,  $Y_t$  llega a ser una agregación (a través del tiempo) de agregaciones contemporáneas (sumas).

3. *Muestreo sistemático.* Si  $w_0 \neq 0$  pero  $w_h = 0$  para  $h > 0$ , se obtiene en  $Y_T$  un muestreo sistemático de agregaciones contemporáneas. mientras si  $w_0 = (1, 1, \dots, 1)'$  se obtienen posteriormente sumas sin peso alguno.



### 4.3. Eficiencia en el pronóstico de combinaciones lineales.

Considerése el pronóstico de la combinación lineal general  $Y_T = \sum w_h' Z_{t-h}$ , donde  $h = 0, \dots, H-1$ , según se definió en (3.19). Nótese que en el pronóstico dado en (4.27) están contenidos varios procedimientos para la obtención de pronósticos. Siguiendo a Wei y Abraham (1981) consideréanse tres procedimientos alternativos.

Método 1. Pronóstico de  $Y_T$  con un modelo univariado obtenido para la combinación lineal de las series de tiempo básicas. Sea  $\hat{Y}_T(M)$  el pronóstico con Error Cuadrático Medio Mínimo de  $Y_{T+M}$ .

Método 2. Obtener los pronósticos con Error Cuadrático Medio Mínimo de cada componente de  $Z_t$  con modelos univariados individuales; formar el vector de esos pronósticos y entonces el pronóstico de la combinación lineal es denotado por  $\hat{Y}_T(M)$ .

Método 3. Pronóstico de  $Z_t$  por medio de un modelo vectorial de dimensión  $k$  y después se forma  $\hat{Y}_T(M)$  como se observa en el Teorema 2.

En lo que sigue de este capítulo se considerarán únicamente los Métodos 1 y 3, que serán nombrados Enfoque 1 (directo), primero se forma la combinación lineal, se construye el modelo y después se pronostica; y Enfoque 3 (multivariado) primero se construye el modelo multivariado, se pronostica y luego se forma la combinación lineal, respectivamente, debido a que para el Método 2 no es claro cómo se puede medir la variabilidad del error de pronóstico. En el capítulo 5 se realiza una aplicación de los tres métodos utilizando la serie de Índice Nacional de Precios al Consumidor. Por ahora conviene conocer el siguiente resultado:

Teorema 5 (Pino, Morettin y Mentz, 1987). Sean  $Z_t$ ,  $Y_t$  y  $\bar{Y}_T(M)$  definidos como en el Teorema 2.  $Y_T$  se representa como un modelo de promedios móviles al igual que en (4.2), es decir

$$\bar{Y}_T(M) = \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j b_{T-j} \quad (4.20)$$

entonces,

$$E [ Y_{T+M} - \tilde{Y}_T(M) ]^2 \leq E [ Y_{T+M} - \bar{Y}_T(M) ]^2 \quad (4.21)$$

Este resultado indica que el Enfoque 3 es igual o mejor al Enfoque 1, cuando se toma en cuenta el Error Cuadrático Medio Mínimo del pronóstico. Theil (1954) también menciona algunas ventajas del Enfoque 3, como es la de tomar en cuenta las relaciones que existen entre las series que forman la combinación lineal.

La eficiencia del Enfoque 3 con respecto al Enfoque 1 puede ser medida al comparar los correspondientes errores de los pronósticos,  $e_T(H, M, k)$  y  $\bar{e}_T(H, M, k)$  o alternativamente, relacionando sus varianzas según la fórmula

$$E(H, M, k) = \frac{V [ e_T(H, M, k) ]}{V [ \bar{e}_T(H, M, k) ]} \quad (4.22)$$

Antes de pasar a demostrar el teorema conviene tomar en cuenta la expresión del Enfoque 3

$$\tilde{Y}_T(M) = \sum_{h=0}^{H-1} \sum_{j=0}^{\infty} w'_h \hat{Z}_{TH-j} (MH-h) = \sum_{h=0}^{H-1} \sum_{j=0}^{\infty} w'_h \psi_{MH-h-j} \hat{Z}_{TH-j} \quad (4.23)$$

Además, nótese que en (4.20) se dividió el rango  $0 \leq j \leq MH - h - 1$  en las partes consecutivas,  $0 \leq j \leq H - h - 1$ ,  $H - h \leq j \leq 2H - h - 1$ , ...,  $(M - 1)H - h \leq j \leq MH - h - 1$ , de forma tal que se puede escribir

$$V[\bar{e}_T(H, M, k)] = \sum_{h=0}^{M-1} A_h, \quad (4.24)$$

donde

$$A_h = \sum_{l=0}^{H-1(l+1)-h-h-1} \sum_{j=0}^{H-h-1-l} \sum_{i=0}^{h-j} w_i \Psi_j \sum_{a=0}^{h-j-i} w_a \Psi_{H-j-i-a}, \quad (4.25)$$

con  $j = \max(0, lH - h)$ , y  $G = \min(H - 1, j + h)$ .

Bajo el Enfoque 1, se tiene para  $\bar{Y}_T(M)$  la representación (4.30), y aplicando (4.16)

$$V[\bar{e}_T(H, M, k)] = \sigma_b^2 \sum_{j=0}^{M-1} \gamma_j^2. \quad (4.26)$$

Con lo anterior, se tiene como expresión alternativa del teorema, es decir:

Teorema 5. La eficiencia de (4.32) está dada por

$$E(H, M, k) = \left\{ \frac{\sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m^2}{\sum_{m=0}^{M-1} \gamma_m^2} \right\} \times \left\{ \frac{\sum_{l=0}^{M-1} A_l}{\sum_{l=0}^{\infty} A_l} \right\} \quad (4.27)$$

Demostración. Se tiene que  $E(H, M, k)$  es la proporción de (4.24) respecto a (4.3d). Para evaluar  $\sigma_b^2$  se utilizan las expresiones (4.1d) y (4.2)

$$Y_T = \sum_{j=0}^{H-1} w'_h Z_{t-h} = \sum_{h=0}^{H-1} \sum_{j=0}^{\infty} w'_h \Psi_j a_{t-j-h} \quad (4.28)$$

Usando (4.3) se tiene que

$$\sigma_b^2 \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j^2 = E(Y_T^2) = \sum_{h=0}^{H-1} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} w'_h \Psi_j \Sigma_a \Psi_{j+h-i} w_i = \sum_{l=0}^{\infty} A_l \quad (4.29)$$

y de aquí se sigue (4.3d). ■

## CAPITULO 5. PRONOSTICO DE LA SERIE DEL INDICE NACIONAL DE PRECIOS AL CONSUMIDOR POR DISTINTOS METODOS DE PRONOSTICO

Los capítulos 3 y 4 abarcan la teoría de la construcción de modelos y del pronóstico para combinaciones lineales; en este capítulo se consideró idónea la aplicación de esta teoría utilizando la serie del Índice Nacional de Precios al Consumidor. La sección 5.1 presenta el desarrollo llevado a cabo para la construcción de modelos ARIMA, tanto para la serie general como para sus subseries. En la 5.2 se muestra el proceso que se realizó para formar el pronóstico de un vector autorregresivo (Enfoque 3). La sección 5.3 da la manera en que se obtuvieron las ponderaciones necesarias para formar la combinación lineal. En 5.4 se presenta una lista de los pronósticos obtenidos por modelos ARIMA y se muestran los pasos a seguir para la construcción de la combinación lineal, con los pronósticos de las subseries y las respectivas ponderaciones ya conocidas (Enfoque 2). La sección 5.5 presenta el desarrollo que se siguió para obtener la varianza  $V[e(H,M,K)]$ , ya que al contar con ella  $V[e(H,M,k)]$  se puede medir la eficiencia del Enfoque 3 con respecto al 1.

La serie del Índice Nacional de Precios al Consumidor está formada por las siguientes subseries: Abarrotes, bebidas y tabaco (ABT), Ropa, calzado y accesorios (RCA), Vivienda (VIVIEN), Muebles, aparatos y accesorios (MAPADO), Salud y cuidado personal (SALUD), Transporte (TRANSP), Educación y esparcimiento (EDUCAC) y Otros servicios (OTROS). Las subseries estacionarias se distinguen como A, B, D, E, F, G, H e I considerando el orden arriba establecido. El cuadro del apéndice 1 muestra el listado de la serie general y de las subseries en el período 01,1981-12,1987.

Es importante mencionar que todas las estimaciones que se realizan en este capítulo se consideran dentro del período 01,1983-12,1986, se manejó ese intervalo de tiempo porque en Enero de 1983 comienza el plan de estabilización económica

# ESTA TESIS NO DEBE SALIR DE LA BIBLIOTECA

encabezado en ese tiempo por el presidente Miguel de la Madrid. Debe notarse sin embargo, que a la hora de considerar los retrasos 1, 6, 11 y 12 (ver sección 5.2) para las ecuaciones que forman al vector autorregresivo, se eliminaron 12 datos, esto es relevante con fines de comparación, ya que deben ser homogéneos los intervalos de tiempo tanto para el vector autorregresivo como para los modelos ARIMA. Por ese motivo se tomó el período 01, 1984-01, 1986 y en los tres Enfoques aquí considerados se pronosticó el período 01, 1987-12, 1987.

## 5.1 Identificación de modelos ARIMA

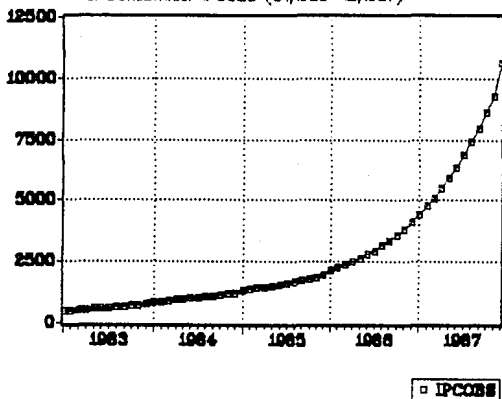
En la identificación de modelos ARIMA para las series se tomaron en cuenta posibles relaciones: (1) entre meses contiguos DENTRO DE LOS AÑOS y (2) ENTRE AÑOS para los mismos meses. El procedimiento que a continuación se muestra, tomando como ejemplo la serie mensual del Índice Nacional de Precios al Consumidor (IPCOBS), fue el que se siguió para cada modelo ARIMA de cada una de las 8 subseries aquí estudiadas.

Los pasos para identificar algún modelo que represente a la serie  $T(IPCOBS_t) = \log(IPCOBS_t)$  fueron:

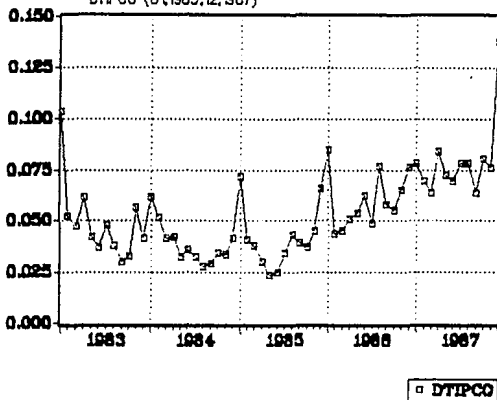
1. Como se hace mención en el capítulo 2, importa construir gráficas antes de llevar a cabo cualquier tipo de cálculo. En este caso aparecen como gráficas 5.1 y 5.2, las gráficas correspondientes a la serie IPCOBS no-estacionaria y estacionaria respectivamente (la serie estacionaria es una primera diferencia de los logaritmos de la serie original).

2. La elección de la transformación logarítmica para aplicarse a la serie surgió del método para estabilizar la varianza de Guerrero (1983), ya que la  $\lambda$  óptima resultó ser cero y esto indica la posible bondad del uso de los logaritmos.

**Grafico 3.1** Serie no-estacionaria del Índice Nacional de Precios al Consumidor IPCOBS (01,1983-12,1987)



**Grafico 3.2** Serie estacionaria del Índice Nacional de Precios al Consumidor DTIPCO (01,1983,12,1987)



3. Para decidir el valor más apropiado de  $d$ , se graficaron las autocorrelaciones (FAC) y autocorrelaciones parciales (FACP) muestrales para  $T(IPCOBS_t)$ ,  $\nabla T(IPCOBS_t)$  y  $\nabla^2 T(IPCOBS_t)$ , que aparecen en los cuadros 5.1, 5.2 y 5.3 respectivamente. Asimismo se calcularon las desviaciones estándar muestrales de la serie con 0, 1 y 2 diferencias, dichos valores fueron

$$S(0) = 0.6052, \quad S(1) = 0.0165, \quad S(2) = 0.0156$$

El cuadro 5.3 muestra que la no-estacionariedad homogénea se cancela con la primera diferencia. Aunque la desviación estándar muestral de la segunda diferencia sea un poco más pequeña que la de la primera, se prefirió tomar la primera diferencia por que ésta era "la casi óptima" para todas las series que se estudian en este trabajo y además la primera diferencia de los logaritmos puede interpretarse como una tasa de inflación aproximada. Esto se demuestra con la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \nabla \log (IPC_t) &= \log (IPC_t) - \log (IPC_{t-1}) \\ &= \log (IPC_t / IPC_{t-1}) \\ &= \log \left( 1 + \frac{IPC_t - IPC_{t-1}}{IPC_{t-1}} \right) \\ &= \log (1 + \gamma_t^{IPC}) \\ &\cong \gamma_t^{IPC} \text{ si } \gamma_t^{IPC} \text{ es pequeño} \end{aligned}$$

donde  $\gamma_t^{IPC}$  es la tasa de crecimiento (inflación) del IPC.

3. Para identificar el modelo para la serie  $DT(IPCOBS)$  se requirió conocer el comportamiento de su FAC y de su FACP muestrales, las cuales aparecen en el cuadro 5.3.



Cuadro 5.1.

IDENT TIPCOB

Date: 1-01-1980 / Time: 2:56

SMPL range: 1983.01 - 1986.12

Number of observations: 48

Autocorrelations		Partial Autocorrelations		ac	pac
.		.		1	0.928 -0.928
.		.		2	0.259 -0.021
.		.		3	0.791 -0.025
.		.		4	0.725 -0.023
.		.		5	0.661 -0.029
.		.		6	0.598 -0.021
.		.		7	0.538 -0.028
.		.		8	0.478 -0.026
.		.		9	0.420 -0.033
.		.		10	0.363 -0.034
.		.		11	0.307 -0.025
.		.		12	0.253 -0.034
.		.		13	0.204 -0.004
.		.		14	0.159 -0.012
.		.		15	0.116 -0.024
.		.		16	0.074 -0.027
.		.		17	0.034 -0.030
.		.		18	-0.005 -0.027
.		.		19	-0.042 -0.032
.		.		20	-0.079 -0.040
.		.		21	-0.117 -0.042
.		.		22	-0.153 -0.039
.		.		23	-0.188 -0.035

Q-Statistic (23 lags) 225.468

S.E. of Correlations 0.144

Series	Mean	S.D.	Maximum	Minimum
TIPCOB	7.1676219	0.6052038	8.3207410	6.1525200
		Covariance	Correlation	
TIPCOB, TIPCOB		0.3586409	1.0000000	

Cuadro 5.2

IDENT DTIPCO

Date: 1-01-1980 / Time: 2:59

SMPL range: 1983.01 - 1986.12

Number of observations: 48

Autocorrelations		Partial Autocorrelations		ac	pac
.		.		1	0.399 0.399
.		.		2	0.237 0.093
.		.		3	0.242 0.143
.		.		4	-0.104 -0.058
.		.		5	0.022 -0.051
.		.		6	0.037 0.017
.		.		7	0.050 0.044
.		.		8	-0.025 -0.058
.		.		9	0.032 0.057
.		.		10	0.171 0.171
.		.		11	0.231 0.162
.		.		12	0.282 0.150
.		.		13	-0.019 -0.337
.		.		14	-0.103 -0.190
.		.		15	-0.194 -0.223
.		.		16	-0.274 -0.113
.		.		17	-0.236 -0.011
.		.		18	-0.239 -0.043
.		.		19	-0.191 0.050
.		.		20	-0.168 0.022
.		.		21	-0.080 -0.005
.		.		22	-0.086 -0.214
.		.		23	0.006 -0.002
Q-Statistic (23 lags)		36.844	S.E. of Correlations 0.144		

Series	Mean	S.D.	Maximum	Minimum
DTIPCO	0.0473225	0.0165191	0.1002581	0.0234108
Covariance		Correlation		
DTIPCO,DTIPCO	0.0002672		1.0000000	

## Cuadro 5.3

IDENT DDTIPC

Date: 1-01-1980 / Time: 3:00

SMPL range: 1983.01 - 1986.12

Number of observations: 48

Autocorrelations		Partial Autocorrelations		ac	pac
.xxx  .	.xxx  .	1	-0.226	-0.226	
. xx  .	.xxx  .	2	-0.137	-0.200	
.  x  .	.   .	3	0.087	0.004	
.   .	.   .	4	-0.018	-0.023	
.  x  .	.   .	5	-0.014	-0.007	
.   .	.   .	6	-0.083	-0.105	
.  xx  .	.  xx  .	7	0.168	0.131	
.  x  .	.  x  .	8	-0.104	-0.065	
.  x  .	.  x  .	9	-0.088	-0.081	
.   .	.   .	10	-0.021	-0.122	
.   .	.   .	11	-0.022	-0.080	
.  xxxx  .	.  xxxx  .	12	0.319	0.352	
.  xx  .	.  xx  .	13	-0.144	0.046	
.  x  .	.  xx  .	14	0.072	0.151	
.  x  .	.  x  .	15	-0.020	-0.039	
.   .	.   .	16	-0.096	-0.074	
.  x  .	.   .	17	0.054	0.001	
.   .	.   .	18	-0.019	0.001	
.  x  .	.   .	19	0.050	-0.041	
.   .	.   .	20	-0.096	-0.028	
.  x  .	.  x  .	21	0.063	0.099	
.  x  .	.   .	22	-0.115	-0.078	
.   .	.   .	23	-0.051	-0.052	
Q-Statistic (23 lags) 15.594		S.E. of Correlations 0.144			

Series	Mean	S.D.	Maximum	Minimum
DDTIPC	-0.0005313	0.0156109	0.0299053	-0.0510182
		Covariance	Correlation	
DDTIPC, DDTIPC		0.0002386	1.0000000	

Se observa que el patrón que predomina en la serie es un factor estacional anual, por ello se consideró como modelo a  $(1 - \phi_1 B^4 - \phi_{12} B^{12}) \nabla W_t = a_t$ , pero se prefirió al modelo  $(1 - \phi_1 B^4 - \phi_{11} B^{11}) \nabla W_t = a_t$ , por tener la desviación estándar mas pequeña. De hecho, para las siguientes 8 subseries se aprecia que en el comportamiento de sus autocorrelaciones y autocorrelaciones parciales (de las subseries ya estacionarias) predomina en algunas el factor estacional anual y en otras el semestral. Esto puede ser visualizado en las figuras de la 1 a la 8, las cuales están formadas por los siguientes incisos: (a) presenta la gráfica de la subserie observada, (b) la gráfica de la subserie estacionaria, (c) muestra la FAC y FACP de la subserie ya estacionaria. Conviene hacer la aclaración de que en las figuras, en las gráficas y en los cuadros referentes a las subseries, se usa la numeración con el respectivo orden de las subseries mencionado al principio del capítulo.

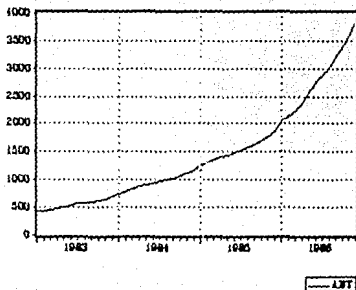
Los resultados de los modelos obtenidos para cada serie son resumidos en cuadros similares a los que aparecen en Guerrero (1983). Cada cuadro contiene 10 columnas, en las cuales se reportan los siguientes conceptos:

- (1) El período de observación de la serie ( va de 01,1983 a 12, 1986) y el número de observaciones de que consta (N).
- (2) La descripción explicita del modelo, en la cual se aprecian todos los parámetros que intervienen.
- (3) Los valores estimados de cada uno de los parámetros.
- (4) Los intervalos del 95% de confianza para cada uno de los parámetros.
- (5) Aquella(s) correlacione(s) entre parámetros estimados que sea(n) mayor(es), en valor absoluto, que 0.5.

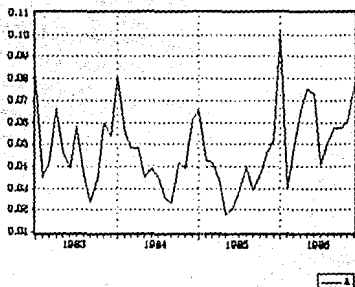
- (6) La media residual  $m(\hat{a})$  y el cociente  $\sqrt{N-d-p} m(\hat{a})/\hat{\sigma}_a$ .
- (7) La desviación estándar residual  $(\hat{\sigma}_a)$ .
- (8) El estadístico D de Box y Pierce con sus correspondientes grados de libertad (g.l.).
- (9) Las autocorrelaciones de los residuales  $r_k(\hat{a})$  que se encuentren fuera de  $(-2/\sqrt{N-d-p}, 2/\sqrt{N-d-p})$ .
- (10) Los residuales "grandes", o sea que estén fuera de  $(-2\hat{\sigma}_a, 2\hat{\sigma}_a)$  o de  $(-3\hat{\sigma}_a, 3\hat{\sigma}_a)$  escritos en la forma  $\hat{a}_l = C\hat{\sigma}_a$ , en donde C es el número de veces que  $\hat{a}_l$  es mayor que  $\hat{\sigma}_a$ .

Fig. 1

a) Serie observada ABT (01,1983-12,1986)



b) Serie estacionaria A (01,1983-12,1986)



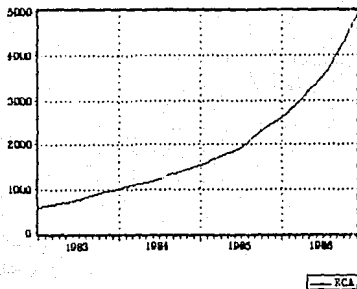
c) FAC y FACP de A

Autocorrelación		Parcial Autocorrelación		de	
k	r <sub>k</sub>	k	pc <sub>k</sub>	k	pc <sub>k</sub>
1	0.0000	1	0.0000	1	0.0000
2	0.0000	2	0.0000	2	0.0000
3	0.0000	3	0.0000	3	0.0000
4	0.0000	4	0.0000	4	0.0000
5	0.0000	5	0.0000	5	0.0000
6	0.0000	6	0.0000	6	0.0000
7	0.0000	7	0.0000	7	0.0000
8	0.0000	8	0.0000	8	0.0000
9	0.0000	9	0.0000	9	0.0000
10	0.0000	10	0.0000	10	0.0000
11	0.0000	11	0.0000	11	0.0000
12	0.0000	12	0.0000	12	0.0000
13	0.0000	13	0.0000	13	0.0000
14	0.0000	14	0.0000	14	0.0000
15	0.0000	15	0.0000	15	0.0000
16	0.0000	16	0.0000	16	0.0000
17	0.0000	17	0.0000	17	0.0000
18	0.0000	18	0.0000	18	0.0000
19	0.0000	19	0.0000	19	0.0000
20	0.0000	20	0.0000	20	0.0000
21	0.0000	21	0.0000	21	0.0000
22	0.0000	22	0.0000	22	0.0000
23	0.0000	23	0.0000	23	0.0000
24	0.0000	24	0.0000	24	0.0000
25	0.0000	25	0.0000	25	0.0000
26	0.0000	26	0.0000	26	0.0000
27	0.0000	27	0.0000	27	0.0000
28	0.0000	28	0.0000	28	0.0000
29	0.0000	29	0.0000	29	0.0000
30	0.0000	30	0.0000	30	0.0000
31	0.0000	31	0.0000	31	0.0000
32	0.0000	32	0.0000	32	0.0000
33	0.0000	33	0.0000	33	0.0000
34	0.0000	34	0.0000	34	0.0000
35	0.0000	35	0.0000	35	0.0000
36	0.0000	36	0.0000	36	0.0000
37	0.0000	37	0.0000	37	0.0000
38	0.0000	38	0.0000	38	0.0000
39	0.0000	39	0.0000	39	0.0000
40	0.0000	40	0.0000	40	0.0000
41	0.0000	41	0.0000	41	0.0000
42	0.0000	42	0.0000	42	0.0000
43	0.0000	43	0.0000	43	0.0000
44	0.0000	44	0.0000	44	0.0000
45	0.0000	45	0.0000	45	0.0000
46	0.0000	46	0.0000	46	0.0000
47	0.0000	47	0.0000	47	0.0000
48	0.0000	48	0.0000	48	0.0000
49	0.0000	49	0.0000	49	0.0000
50	0.0000	50	0.0000	50	0.0000
51	0.0000	51	0.0000	51	0.0000
52	0.0000	52	0.0000	52	0.0000
53	0.0000	53	0.0000	53	0.0000
54	0.0000	54	0.0000	54	0.0000
55	0.0000	55	0.0000	55	0.0000
56	0.0000	56	0.0000	56	0.0000
57	0.0000	57	0.0000	57	0.0000
58	0.0000	58	0.0000	58	0.0000
59	0.0000	59	0.0000	59	0.0000
60	0.0000	60	0.0000	60	0.0000
61	0.0000	61	0.0000	61	0.0000
62	0.0000	62	0.0000	62	0.0000
63	0.0000	63	0.0000	63	0.0000
64	0.0000	64	0.0000	64	0.0000
65	0.0000	65	0.0000	65	0.0000
66	0.0000	66	0.0000	66	0.0000
67	0.0000	67	0.0000	67	0.0000
68	0.0000	68	0.0000	68	0.0000
69	0.0000	69	0.0000	69	0.0000
70	0.0000	70	0.0000	70	0.0000
71	0.0000	71	0.0000	71	0.0000
72	0.0000	72	0.0000	72	0.0000
73	0.0000	73	0.0000	73	0.0000
74	0.0000	74	0.0000	74	0.0000
75	0.0000	75	0.0000	75	0.0000
76	0.0000	76	0.0000	76	0.0000
77	0.0000	77	0.0000	77	0.0000
78	0.0000	78	0.0000	78	0.0000
79	0.0000	79	0.0000	79	0.0000
80	0.0000	80	0.0000	80	0.0000
81	0.0000	81	0.0000	81	0.0000
82	0.0000	82	0.0000	82	0.0000
83	0.0000	83	0.0000	83	0.0000
84	0.0000	84	0.0000	84	0.0000
85	0.0000	85	0.0000	85	0.0000
86	0.0000	86	0.0000	86	0.0000
87	0.0000	87	0.0000	87	0.0000
88	0.0000	88	0.0000	88	0.0000
89	0.0000	89	0.0000	89	0.0000
90	0.0000	90	0.0000	90	0.0000
91	0.0000	91	0.0000	91	0.0000
92	0.0000	92	0.0000	92	0.0000
93	0.0000	93	0.0000	93	0.0000
94	0.0000	94	0.0000	94	0.0000
95	0.0000	95	0.0000	95	0.0000
96	0.0000	96	0.0000	96	0.0000
97	0.0000	97	0.0000	97	0.0000
98	0.0000	98	0.0000	98	0.0000
99	0.0000	99	0.0000	99	0.0000
100	0.0000	100	0.0000	100	0.0000

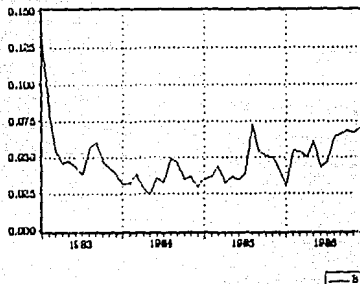
D-Statistic (22 lags) 22.960 J.C. of Correlations 0.144

Fig. 2

a) Serie observada RCA (01,1983-12,1986)



b) Serie estacionaria B (01,1983-12,1986)



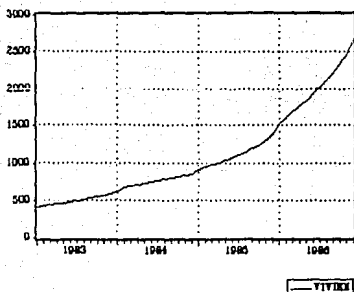
c) FAC y FACP da B

Autocorrelations	Partial Autocorrelations	ac	pac
1.0000	1.0000	1 11	0.176 0.176
0.848	0.848	1 2	0.231 0.065
0.799	0.799	1 3	0.169 0.048
0.79	0.79	1 4	0.063 -0.052
0.79	0.79	1 5	0.066 0.053
0.799	0.799	1 6	0.196 0.123
0.888	0.888	1 7	0.208 0.117
0.88	0.88	1 8	0.123 -0.052
0.88	0.88	1 9	0.063 -0.018
0.88	0.88	1 10	-0.025 -0.066
0.88	0.88	1 11	-0.009 0.048
0.88	0.88	1 12	0.14 0.016
0.88	0.88	1 13	-0.018 -0.060
0.88	0.88	1 14	-0.038 -0.054
0.88	0.88	1 15	-0.166 -0.183
0.88	0.88	1 16	-0.716 -0.772
0.88	0.88	1 17	-0.171 -0.010
0.88	0.88	1 18	0.140 -0.038
0.88	0.88	1 19	-0.082 0.005
0.88	0.88	1 20	-0.16 -0.078
0.88	0.88	1 21	-0.162 -0.078
0.88	0.88	1 22	0.13 0.016
0.88	0.88	1 23	0.172 -0.018

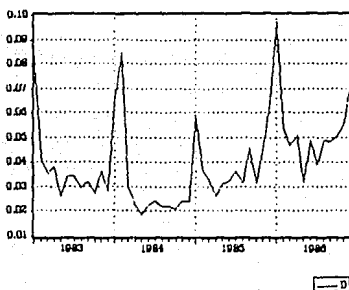
Statistic 123 LogL 21.223 6.6. 1st Correlations 0.144

Fig. 3

a) Serie observada VMEN (01,1983-12,1986)



b) Serie estacionaria D (01,1983-12,1986)



c) FAC y FACP de D

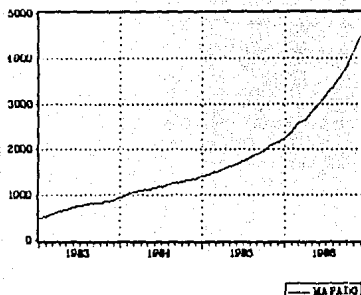
Autocorrelations		Partial Autocorrelations		AC	PAC	
1	1.00000	1	1.00000	1	0.428	0.428
2	0.188	1	0.188	2	0.188	0.007
3	0.003	1	0.003	3	0.003	0.003
4	0.009	1	0.009	4	0.009	-0.033
5	0.021	1	0.021	5	0.021	0.025
6	0.023	1	0.023	6	0.023	0.005
7	0.001	1	0.001	7	0.001	-0.018
8	0.011	1	0.011	8	0.011	-0.009
9	0.019	1	0.019	9	0.019	0.015
10	0.017	1	0.017	10	0.017	0.149
11	0.284	1	0.284	11	0.284	0.120
12	0.328	1	0.328	12	0.328	0.137
13	0.121	1	0.121	13	0.121	0.125
14	0.110	1	0.110	14	0.110	0.234
15	0.149	1	0.149	15	0.149	0.023
16	0.214	1	0.214	16	0.214	-0.141
17	0.144	1	0.144	17	0.144	-0.021
18	0.199	1	0.199	18	0.199	0.147
19	0.172	1	0.172	19	0.172	-0.019
20	0.224	1	0.224	20	0.224	-0.128
21	0.175	1	0.175	21	0.175	-0.005
22	0.221	1	0.221	22	0.221	0.008
23	0.198	1	0.198	23	0.198	0.099

D Statistic (25 lags) 35.195 S.E. of Correlations 0.144

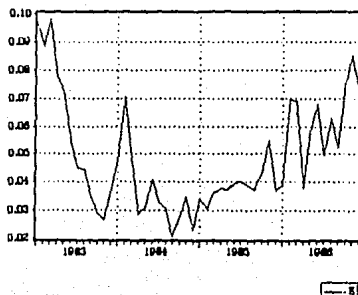


Fig. 4

a) Serie observada MAPADO (01,1983-12,1986)



b) Serie estacionaria E (01,1983-12,1986)



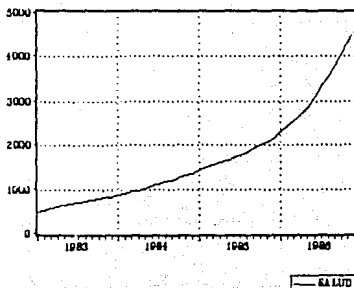
c) FAC y FACP de E

Autocorrelaciones		Parcial Autocorrelaciones		ac	pac
1	0.718	1	0.718	0.718	0.718
2	0.564	2	0.564	-0.024	-0.024
3	0.388	3	0.388	0.731	0.731
4	0.297	4	0.297	-0.064	-0.064
5	0.172	5	0.172	-0.107	-0.107
6	0.043	6	0.043	-0.018	-0.018
7	0.054	7	0.054	-0.010	-0.010
8	0.048	8	0.048	-0.092	-0.092
9	0.092	9	0.092	0.092	0.092
10	0.041	10	0.041	-0.093	-0.093
11	0.060	11	0.060	0.091	0.091
12	0.024	12	0.024	-0.060	-0.060
13	0.023	13	0.023	-0.094	-0.094
14	-0.115	14	-0.115	-0.213	-0.213
15	0.167	15	0.167	0.032	0.032
16	-0.178	16	-0.178	0.010	0.010
17	0.223	17	0.223	-0.094	-0.094
18	-0.296	18	-0.296	-0.120	-0.120
19	0.222	19	0.222	0.028	0.028
20	0.202	20	0.202	-0.124	-0.124
21	-0.208	21	-0.208	-0.034	-0.034
22	-0.310	22	-0.310	-0.150	-0.150
23	-0.311	23	-0.311	0.038	0.038

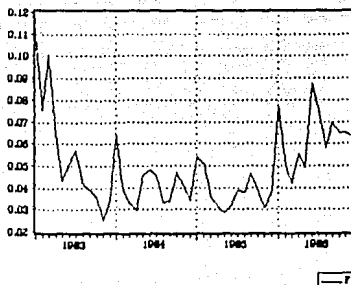
O-Statistic (77 lags) 83.553      S.E. of Correlations 0.144

Fig. 5

a) Serie observada SALUD (01,1983-12,1986)



b) Serie estacionaria F (01,1983-12,1986)



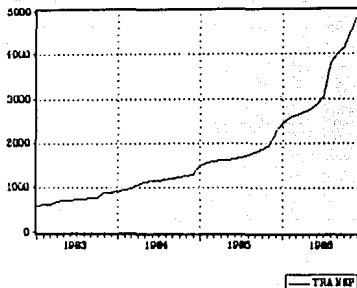
c) FAC y FACP de F

	Autocorrelaciones	Parcial	Autocorrelaciones	AC	pac
1	0.100000	1	0.100000	1	0.518 0.519
2	0.070000	0.700000	0.070000	2	0.266 0.137
3	0.050000	0.500000	0.050000	3	0.263 0.041
4	0.030000	0.300000	0.030000	4	0.206 0.036
5	0.020000	0.200000	0.020000	5	0.294 0.134
6	0.010000	0.100000	0.010000	6	0.148 0.034
7	0.000000	0.000000	0.000000	7	0.049 0.249
8	0.000000	0.000000	0.000000	8	0.094 0.650
9	0.000000	0.000000	0.000000	9	0.144 0.043
10	0.000000	0.000000	0.000000	10	0.051 0.603
11	0.000000	0.000000	0.000000	11	0.041 0.012
12	0.000000	0.000000	0.000000	12	0.013 0.144
13	0.000000	0.000000	0.000000	13	0.103 0.216
14	0.000000	0.000000	0.000000	14	0.156 0.074
15	0.000000	0.000000	0.000000	15	0.117 0.024
16	0.000000	0.000000	0.000000	16	0.081 0.026
17	0.000000	0.000000	0.000000	17	0.101 0.118
18	0.000000	0.000000	0.000000	18	0.081 0.448
19	0.000000	0.000000	0.000000	19	0.081 0.125
20	0.000000	0.000000	0.000000	20	0.168 0.082
21	0.000000	0.000000	0.000000	21	0.114 0.201
22	0.000000	0.000000	0.000000	22	0.124 0.001
23	0.000000	0.000000	0.000000	23	0.076 0.004

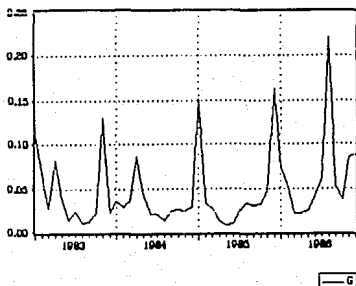
D Statistics (24 lags) = 0.358      S.E. of Correlations 0.164

Fig. 6

a) Serie observada TRANSP (01,1983-12,1986)



b) Serie estacionaria G (01,1983-12,1986)



c) FAC y FACP de G

Autocorrelación	Partial Autocorrelación	AC	PAC	
1.00	1.00	1	0.158	0.158
.81	.81	2	-0.041	-0.048
.62	.62	3	-0.051	-0.014
.43	.43	4	-0.078	-0.076
.24	.24	5	0.124	-0.107
.05	.05	6	0.068	-0.037
-.14	-.14	7	0.006	-0.006
-.33	-.33	8	0.115	0.107
-.52	-.52	9	0.054	0.002
-.71	-.71	10	0.008	0.004
-.89	-.89	11	0.204	0.197
-.97	-.97	12	0.193	0.068
-.99	-.99	13	-0.071	-0.087
-.99	-.99	14	-0.004	0.045
-.99	-.99	15	-0.106	-0.091
-.99	-.99	16	-0.166	-0.110
-.99	-.99	17	-0.153	-0.125
-.99	-.99	18	-0.114	-0.137
-.99	-.99	19	0.116	-0.076
-.99	-.99	20	0.021	-0.112
-.99	-.99	21	0.018	-0.016
-.99	-.99	22	-0.020	-0.120
-.99	-.99	23	0.006	-0.002

Statistic (23 lags) 10.422 S.E. of Correlations 0.166





A continuación se presentan los cuadros que resumen los resultados de los modelos propuestos para la serie general y las 8 subseries.

CUADRO 5.4

Serie $Z_t = \text{IPC}_{\text{OBS}}_t$		Transformación: $T(Z_t) = \text{Log}(Z_t)$			
(1) Período y número de Observaciones	(2) Modelo	(3) Parámetros Estimados	(4) Intervalos del 95% de Confianza		
01.1984-12.1986	$(1 - \phi_1 B^1 - \phi_{11} B^{11})$	$\hat{\phi}_1 = 0.5944$	(0.366, 0.823)		
N = 36	$\nabla T(Z_t) = a_t$	$\hat{\phi}_{11} = 0.4489$	(0.203, 0.695)		
(5) Correlación entre Parámetros	ANÁLISIS DE RESIDUALES				
	(6) $m(\hat{a})$ y cociente	(7) $\hat{\sigma}_a$	(8) $Q'$ , g.l.	(9) $r_k(\hat{a}) \neq 0$	(10) Residuales Grandes
-	0.0004	0.0122	17.313	-	$a_{25} = 2.24 \hat{\sigma}_a$
	0.191				$a_{22} = 2.47 \hat{\sigma}_a$

CUADRO 5.5

Serie $Z_t = ABT_t$		Transformación: $T(Z_t) = \text{Log}(Z_t)$			
(1) Período y número de Observaciones	(2) Modelo	(3) Parámetros Estimados	(4) Intervalos del 95% de Confianza		
01.1984-12.1986					
N = 36	$(1 - \phi_1 B - \phi_{12} B^{12}) \nabla(Z_t) = a_t$	$\hat{\phi}_1 = 0.5309$	(0.286, 0.776)		
		$\hat{\phi}_{12} = 0.5045$	(0.236, 0.773)		
(5) Correlación entre Parámetros >.5 o <-.5	ANÁLISIS DE RESIDUALES				
	(6) m( $\hat{a}$ ) y cociente	(7) $\hat{\sigma}_a$	(8) Q', g.l.	(9) $r_k(\hat{a}) \neq 0$	(10) Residuales Grandes
-	0.0008	0.0167	9.403	-	$\hat{a}_{25} = 2.45\hat{\sigma}_a$
	0.053				$\hat{a}_{20} = -2.76\hat{\sigma}_a$

CUADRO 5.6

Serie $Z_t = RCA_t$		Transformación: $T(Z_t) = \text{Log}(Z_t)$			
(1) Período y número de Observaciones	(2) Modelo	(3) Parámetros Estimados	(4) Intervalos del 95% de Confianza		
01.1984-12.1986	$(1 - \phi_1 B^1 - \phi_2 B^2)$	$\hat{\phi}_1 = 0.6567$	(0.443, 0.871)		
N = 36	$\nabla T(Z_t) = a_t$	$\hat{\phi}_2 = 0.3753$	(0.151, 0.600)		
ANÁLISIS DE RESIDUALES					
(5) Correlación entre	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
Parámetros	$m(\hat{a}_t) \vee$	$\sigma_a$	D, g.l.	$r_k(a) \neq 0$	Residuales
>.5 0 <-.5	cociente				Grandes
-	0.0001	0.00955	19.51	-	$\hat{a}_{20} = 3.46\hat{\sigma}_a$
	0.0700				



CUADRO 5.7

Serie $Z_t = \text{VIVIE}_t$		Transformación: $T(Z_t) = \text{Log}(Z_t)$			
(1) Período y número de Observaciones	(2) Modelo	(3) Parámetros Estimados	(4) Intervalos del 95% de Confianza		
01.1984-12.1986		$\hat{\phi}_1 = 0.5666$	(0.358, 0.776)		
N = 36	$(1 - \phi_1 B^1 - \phi_{11} B^{11}) \nabla T(Z)_t = a_t$	$\hat{\phi}_{11} = 0.4941$	(0.266, 0.723)		
ANÁLISIS DE RESIDUALES					
(5) Correlación entre Parámetros >.5 0 <-.5	(6) $m(\hat{a})$ y cociente	(7) $\hat{\sigma}_a^2$	(8) $Q^2$ , g.l.	(9) $r_k(\hat{a}) \neq 0$	(10) Residuales Grandes
-	0.0007	0.0149	10.253	-	$\hat{a}_{0.5} = -2.47\sigma_a^2$ $\hat{a}_{2.5} = 2.85\sigma_a^2$
	0.0282				

CUADRO 5.8

Serie $Z_t = \text{MAPADO}_t$		Transformación: $T(Z_t) = \text{Log}(Z_t)$			
(1) Período y número de Observaciones	(2) Modelo	(3) Parámetros Estimados	(4) Intervalos del 95% de Confianza		
01.1984-12.1986					
N = 36	$(1 - \phi_1 B^4 - \phi_2 B^8)$	$\hat{\phi}_1 = 0.7136$	(0.439, 0.988)		
	$\nabla T(Z_t) = a_t$	$\hat{\phi}_2 = 0.3188$	(0.014, 0.624)		
(5) Correlación entre Parámetros	ANÁLISIS DE RESIDUALES				
	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
	$m(\hat{a})$ y cociente	$\hat{\sigma}_a$	$\hat{\sigma}^2$ , g.l.	$r_k(\hat{a}) \neq 0$	Residuales Grandes
-	0.0008	0.0129	23.176	-	$\hat{a}_{2\sigma} = 2.24\hat{\sigma}_a$
	0.404				

CUADRO 5.9

Serie $Z_t = \text{SALUD}_t$		Transformación: $T(Z_t) = \text{Log}(Z_t)$			
(1) Período y número de Observaciones	(2) Modelo	(3) Parámetros Estimados	(4) Intervalos del 95% de Confianza		
01.1984-12.1986		$\hat{\phi}_1 = 0.5954$	$(0.281, 0.910)$		
$N = 36$	$(1 - \phi_1 B^2 - \phi_2 B^4) \nabla T(Z_t) = a_t$	$\hat{\phi}_2 = 0.4290$	$(0.086, 0.772)$		
(5) Correlación entre Parámetros >.5 o <-.5	ANÁLISIS DE RESIDUALES				
	(6) $m(\hat{a})$ y cociente	(7) $\hat{\sigma}_a$	(8) $Q', \text{ g.l.}$	(9) $r_k(\hat{a}) \neq 0$	(10) Residuales Grandes
-	0.0012	0.014	20.077	-	$\hat{a}_{25} = 2.76\hat{\sigma}_a$ $\hat{a}_{20} = 3.02\hat{\sigma}_a$
	0.09				

CUADRO 5.10

Serie $Z_t = \text{TRANS}_t$		Transformación: $T(Z_t) = \text{Log}(Z_t)$			
(1) Período y número de Observaciones	(2) Modelo	(3) Parámetros Estimados	(4) Intervalos del 95% de Confianza		
01.1984-12.1986	$(1 - \phi_1 B - \phi_{11} B^{11})$	$\hat{\phi}_1 = 0.3596$	(0.088, 0.631)		
N = 36	$\text{VT}(Z_t) = a_t$	$\hat{\phi}_{11} = 0.6022$	(0.288, 0.916)		
(5) Correlación entre Parámetros >.5 o < -.5	ANÁLISIS DE RESIDUALES				
	(6) $m(\hat{a})$ y cociente	(7) $\hat{\sigma}_a$	(8) $\hat{\sigma}_a$ , g.l.	(9) $r_k(\hat{a}) \neq 0$	(10) Residuales Grandes
-	0.0067	0.0445	13.05	-	$\hat{a}_{11} = 2.77\hat{\sigma}_a$ $\hat{a}_{22} = 4.08\hat{\sigma}_a$
	0.910				

CUADRO 5.11

Serie $Z_t = EDUCAC_t$		Transformación: $T(Z_t) = \text{Log}(Z_t)$			
(1) Período y número de Observaciones	(2) Modelo	(3) Parámetros Estimados	(4) Intervalos del 95% de Confianza		
01.1984-12.1986	$(1 - \phi_1 B^1 - \phi_2 B^2)$	$\phi_1 = 0.4480$	(0.145, 0.751)		
N = 36	$\nabla T(Z_t) = a_t$	$\hat{\phi}_2 = 0.5291$	(0.208, 0.851)		
ANÁLISIS DE RESIDUALES					
(5) Correlación entre Parámetros >.5 o <-.5	(6) $m(\hat{a})$ y cociente	(7) $\hat{\sigma}_a$	(8) $\hat{\sigma}_a^2$ , g.l.	(9) $r_k(\hat{a}) \neq 0$	(10) Residuales Grandes
-	0.0028  0.829	0.0216	21.546	-	$\hat{a}_1 = 2.54\hat{\sigma}_a$

CUADRO 5.12

Serie $Z_t = \text{OTROS}_t$		Transformación: $T(Z_t) = \text{Log}(Z_t)$			
(1) Período y número de Observaciones	(2) Modelo	(3) Parámetros Estimados	(4) Intervalos del 95% de Confianza		
01.1984-12.1986					
N = 36	$(1 - \phi_{12} B^{12} - \phi_{11} B^{11})$	$\hat{\phi}_{11} = 0.5700$	(0.354, 0.786)		
	$\nabla T(Z_t) = a_t$	$\hat{\phi}_{12} = 0.4086$	(0.205, 0.612)		
ANÁLISIS DE RESIDUALES					
Correlación entre Parámetros	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
	$m(\hat{a})$ y cociente	$\hat{\sigma}_a$	$Q', \text{ g.l.}$	$r_k(\hat{a}) \neq 0$	Residuales Grandes
$>.5$ o $<-.5$					
-	0.0020 0.66	0.018	12.657	-	$\hat{a}_{15} = 3.05\sigma_a^2$

Los supuestos acerca del proceso  $\{a_t\}$  pueden verificarse con fines prácticos, tomando la información del cuadro 5.4, que contiene los resultados del modelo elegido para la serie IPCOBS.

Ejemplo. Modelo propuesto para la serie  $\{\nabla T(\text{IPCOBS}_t)\}$

$$(1 - \phi_1 B^1 - \phi_{11} B^{11}) \nabla T(\text{IPCOBS}_t) = a_t$$

(1) Como  $|\sqrt{N-d-p} \hat{m}(a)/\hat{\sigma}_a| = 0.191$  no hay motivo para pensar que la media de los residuales pueda ser distinta de cero.

(2) El supuesto de varianza constante se verifica en la gráfica de los residuales contra el tiempo, en donde se aprecia que aparentemente no hay violación importante de dicho supuesto. Esto se puede observar en la gráfica 5.3.

(3) El valor  $Q^2$  debe compararse con tablas de la distribución Ji cuadrada con 23 grados de libertad. Ya que los puntos porcentuales del 5 %, 10% y 25% de dicha distribución son

$$\chi_{.05} (23) = 35.2, \chi_{.10} (23) = 32 \quad \text{y} \quad \chi_{.25} (23) = 27.1$$

se concluye que el valor  $Q^2 = 17.31$  no conduce al rechazo de la hipótesis de que los residuales son ruido blanco aún al nivel de significación del 25%. Por otro lado, el hecho de que no haya valores individuales  $r_k(\hat{a})$  fuera del intervalo  $(-2/\sqrt{N-d-p}, 2/\sqrt{N-d-p}) = (-.3380, 0.3380)$  brinda un mayor fundamento al supuesto de independencia.

(4) En la gráfica de los residuales se muestra que solamente hay 2 residuales que se encuentran fuera de la banda  $(-2\hat{\sigma}_a, 2\hat{\sigma}_a)$  lo

cual es consistente con la idea de que solamente 5% de los residuales se encuentran fuera de la banda; esto implica que no hay violación de importancia al supuesto de distribución normal.

(5) No existen residuales "grandes", fuera de la banda  $(-3\hat{\sigma}_a, 3\hat{\sigma}_a)$  y por lo tanto no existe evidencia de posibles observaciones aberrantes.

(6) Los intervalos de confianza para los parámetros obtenidos para cada uno de los modelos no incluyen el valor cero, por lo que la inclusión de esos parámetros fue necesaria para explicar el comportamiento de la serie y los modelos en sí resultan ser parsimoniosos, esto ocurre tanto con los parámetros regulares como los parámetros estacionales.

Las gráficas de la 5.4 a la 5.11 presentan a los residuales contra el tiempo para cada una de las subseries y puede apreciarse que no hay violación importante al supuesto de variancia constante. Recordar que a cada una de las subseries ya estacionarias por conveniencia en su manejo se les asignó un nombre más corto, los cuales son los siguientes:

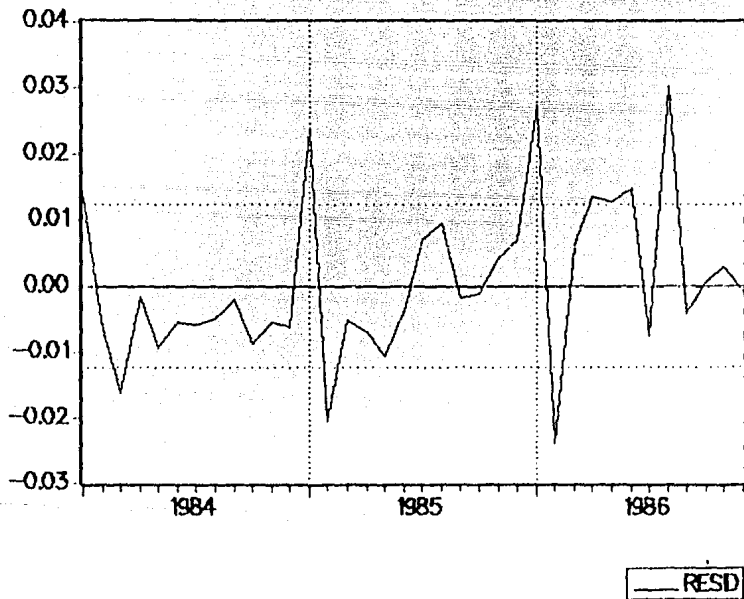
ART = A	VIVIEN = D	SALUD = F	EDUCAC = H
RCA = B	MAPADO = E	TRANSP = G	OTORS = I

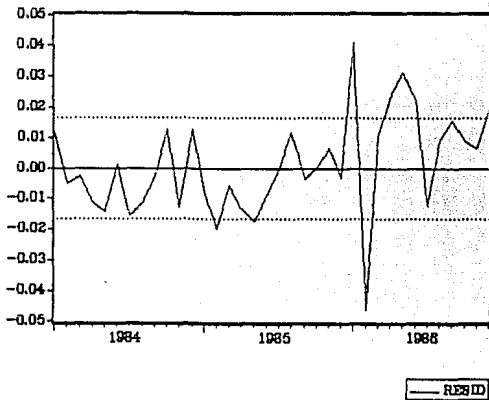
Ahora que se han presentado las etapas de construcción de modelos para la serie general y sus subseries, el paso a seguir viene a ser el uso del modelo, en este caso es el de pronóstico.



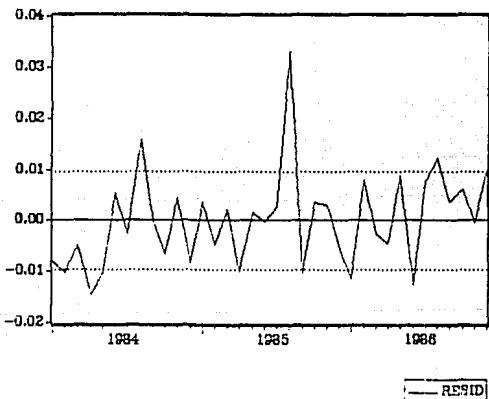
Grafica 5.3

Residuales del modelo ARIMA para la serie DTIPCO.

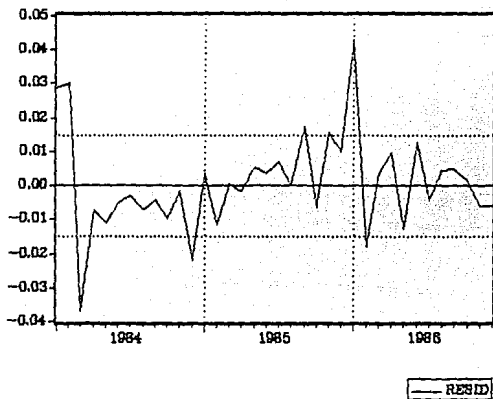




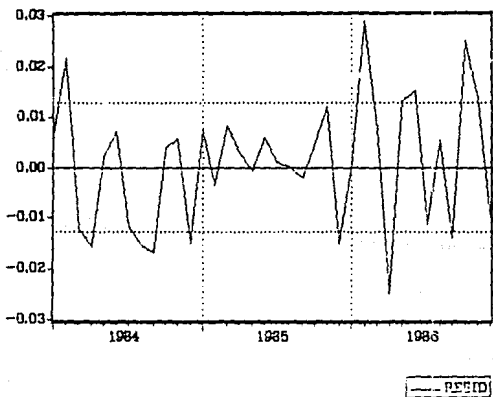
**Grafica 5.5** Restiduales del modelo ARMA de la subserie B.



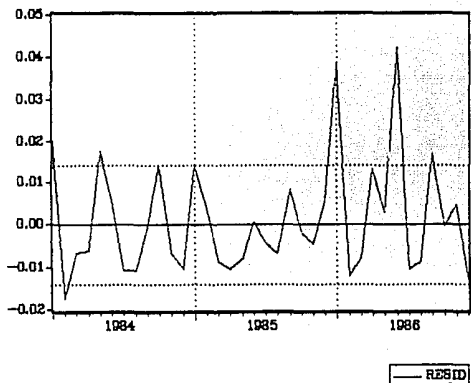
**Grafica 5.6** Residuales del modelo ARIMA para la subserie D.



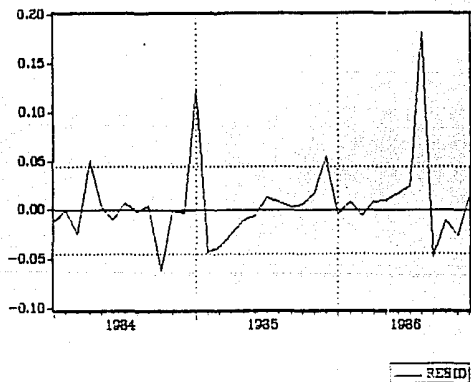
**Grafica 5.7** Residuales del modelo ARIMA para la subserie E.



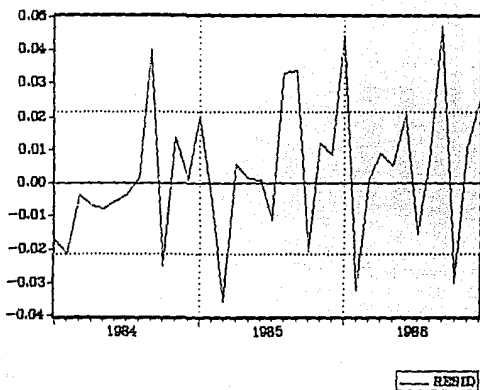
**Grafion 5.8** Residuales del modelo ARIMA para la subserie F.



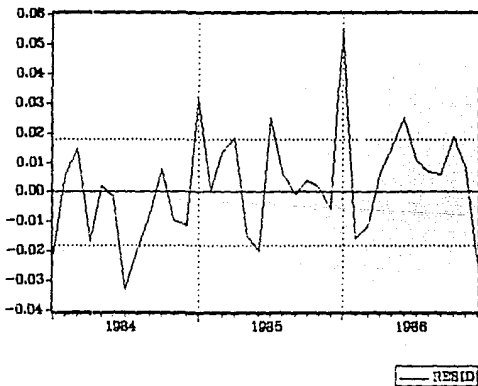
**Grafion 5.9** Residuales del modelo ARIMA para la subserie G.



**Gráfica 5.10** Residuales del modelo ANIMA para la subserie H.



**Gráfica 5.11** Residuales del modelo ABIMA para la subserie I.



## 5.2 Pronóstico obtenido por medio de un vector autorregresivo

Un vector autorregresivo (VAR) es definido por Guerrero (1987) como una herramienta de análisis econométrico que permite a los datos hablar por ellos mismos, sin que exista necesariamente una teoría económica que guíe o restrinja la estructura del modelo.

En seguida se detallan los pasos que se siguieron para construir el modelo de vector autorregresivo.

1. El primer paso fue estacionarizar y aplicar la transformación mas conveniente en cada una de las series. El procedimiento de estacionarización y transformación es el mismo que se aplicó para la obtención de los pronósticos con modelos ARIMA.

2. A la hora de realizar la estimación de las regresiones con diferentes retrasos, se presentaron problemas ya que no había significación estadística en ninguno de los retrasos considerados en las regresiones, especialmente se presentó esto en la regresión con variable dependiente B. Al revisar los datos originales de la subserie no-estacionaria RCA se encontró que el dato del mes de Abril de 1986 no era el correcto, pues en vez de ser 3052.2 se estaba trabajando con 2052.2, lo cual producía alteraciones en las regresiones. Por consiguiente se procedió a cambiar ese dato y trabajar nuevamente con el dato ya corregido. Esto fue un error de edición por parte de la fuente donde fueron proporcionados los datos (Indicadores Económicos del Banco de México).

3. Una vez determinadas las subseries transformadas y estacionarias, se formaron ocho ecuaciones, cada ecuación estuvo compuesta por 32 variables independientes y una variable dependiente. Las 32 variables independientes corresponden a los retrasos 1, 6, 11 y 12

de cada una de las ocho subseries, incluyendo a la variable dependiente, que representa a una de las subseries.

4. Se estimó cada ecuación como una regresión lineal por el método de mínimos cuadrados y el cuadro 5.13 muestra los resultados obtenidos por la  $R^2$ , la  $R^2$  ajustada por grados de libertad, la desviación estándar de la regresión y el estadístico Q.

CUADRO 5.13

**CUADROS COMPARATIVOS DE LOS MODELOS ESCOGIDOS PARA UN VECTOR AUTOREGRESIVO.**

1) Modelo con retrasos 1, 11 y 12.

	$R^2$	$R^2$ ajustada	d.e. de la regresión	Q
A	0.819489	0.425648	0.014186	16.257
B	0.527574	-.503173	0.118961	6.454
D	0.830321	0.505102	0.013236	29.265
E	0.835226	0.475718	0.11847	11.961
F	0.954665	0.855752	0.005764	10.1
G	0.740277	0.173609	0.041646	11.335
H	0.891775	0.555648	0.012285	13.291
I	0.794188	0.345144	0.014233	15.298

2) Modelo con retrasos 1, 3, 11 y 12.

	$R^2$	$R^2$ ajustada	d.e. de la regresión	Q
A	0.964868	0.692592	0.010378	48.251
B	0.968296	0.641784	0.007949	17.000
D	0.956037	0.487098	0.013475	38.000
E	0.988066	0.860765	0.006105	23.800
F	0.968772	0.635673	0.009161	13.000
G	0.914552	0.252329	0.039613	13.282
H	0.993456	0.923653	0.005785	10.227
I	0.954662	-.695628	0.022903	26.000

3) Modelo con retrasos 1, 4, 11 y 12.

	$R^2$	$R^2$ ajustada	d.e. de la regresión	Q
A	0.902813	-.133846	0.019931	15.281
B	0.994595	0.936937	0.003331	13.000
C	0.939202	0.290693	0.015846	16.000
E	0.963625	0.575629	0.010659	29.472
F	0.992591	0.913559	0.004462	19.400
G	0.982475	0.795542	0.020715	11.308
H	0.968828	0.636323	0.012625	21.247
I	0.841177	-.852933	0.023942	18.018

4) Modelo con retrasos 1, 6, 11 y 12.

	$R^2$	$R^2$ ajustada	d.e. de la regresión	Q
A	0.925485	0.130654	0.017452	17.051
B	0.979815	0.764511	0.006437	12.569
D	0.924619	0.120549	0.017644	20.084
E	0.960967	0.544619	0.011041	17.066
F	0.977091	0.732724	0.007847	25.200
G	0.936233	0.256054	0.039514	21.000
H	0.998215	0.979178	0.003021	21.000
I	0.937398	0.269645	0.015031	26.000

Como se puede observar, el cuadro 5.14 muestra también los resultados obtenidos durante la estimación de ecuaciones con otros retrasos y es visible el predominio de los retrasos 1, 6, 11 y 12, comparados con los demás retrasos presentados en el mismo cuadro.

4. El siguiente paso consistió en el pronóstico de cada una de las regresiones lineales ya estimadas y en el cuadro 5.14 se muestran los pronósticos que se obtuvieron. A los pronósticos de las subseries se les dieron los nombres de COPA, COPB, COPD, COPE, COPF, COPG, COPH y COPI respectivamente y al pronóstico del vector autorregresivo se le asignó el nombre de PYA6.



CUADRO 5.14

Pronósticos de las subseries y del vector autorregresivo  
(Enfoque 3) PVA6

obs	COPA	COPB	COPD	COPE	COPF	COPG	COPH	COPI	PVA6
1987.01	4125	5156	2866	5017	4894	7078	3000	6204	4425
1987.02	4274	5464	2882	5478	5256	6133	4375	6546	4484
1987.03	4230	6116	3371	6194	5544	6831	4731	7552	4809
1987.04	4527	6820	3088	6309	5710	8561	4582	7457	5084
1987.05	5098	6437	3435	6730	5937	9021	4945	8490	5539
1987.06	5601	6734	3820	7539	6575	11795	5568	9223	6320
1987.07	6294	7432	3632	7567	7112	10569	6123	8926	6509
1987.08	6672	8348	4466	8325	7811	10510	6528	11122	7087
1987.09	6827	9242	4875	9452	8334	12264	7355	10267	7500
1987.10	7815	9968	4379	9890	9278	13074	7319	12640	8181
1987.11	7977	11850	4969	11687	10553	16717	8366	12229	9155
1987.12	8907	12459	5272	12168	12189	19731	9710	16096	10423

En este cuadro se observa que los pronósticos en general son semejantes a las series observadas, dado que no hay discrepancias notables (ver apéndice 2).

5. Ya contando con los pronósticos se formó la combinación lineal, multiplicando cada pronóstico por su ponderación y después sumándolos. El pronóstico formado por esta combinación lineal es el pronóstico del Índice Nacional de Precios al Consumidor dado por el modelo del vector autorregresivo.

### 5.3 Estimación de las ponderaciones

Las ponderaciones son necesarias para formar la combinación lineal, estas ponderaciones se obtuvieron por medio de la estimación de 52 regresiones lineales ya que, al ser fijas las ponderaciones que se usan en el cálculo del Índice Nacional de Precios al Consumidor, lo único que debe hacerse para determinarlas sería resolver un sistema de ocho ecuaciones, o sea

con ocho datos observados de las subseries y de la serie general, sin embargo se consideró que podía haber redondeos en las cifras observadas y se prefirió resolver dicho sistema de ocho ecuaciones con ocho incógnitas (las ponderaciones) mediante regresiones sucesivas en el tiempo. El número de regresiones lineales estimadas fue el resultado de los datos disponibles de la serie observada (IPCOBS) en el período 1983.01-1987.12. Se consideró el mayor número de regresiones lineales posibles para poder tener una mejor aproximación de las ponderaciones reales que se manejan en el cálculo de los índices de precios. Contando con 52 coeficientes de cada una de las subseries, se calcularon promedios, los cuales se corrigieron para que su suma fuese la unidad, dichos promedios conseguidos son las ponderaciones, que pueden ser observadas en el cuadro 5.15

CUADRO 5.15

Ponderaciones aproximadas de las subseries para formar el Índice Nacional de Precios al Consumidor

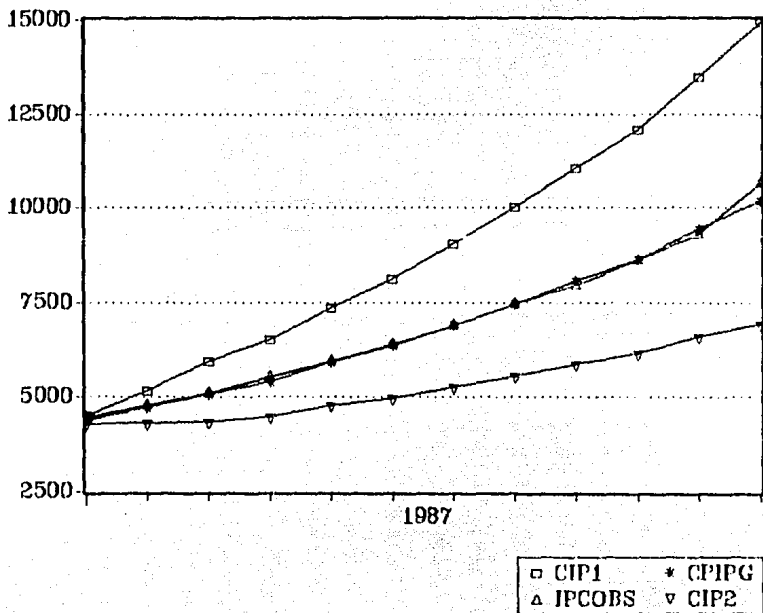
Subseries	Ponderación
ABT	0.3824
RCA	0.0679
VIVIEN	0.2153
MAPADO	0.0523
SALUD	0.0757
TRANSP	0.1227
EDUCAC	0.0581
OTROS	0.0256

#### 5.4 Pronóstico de una combinación lineal por medio de modelos ARIMA

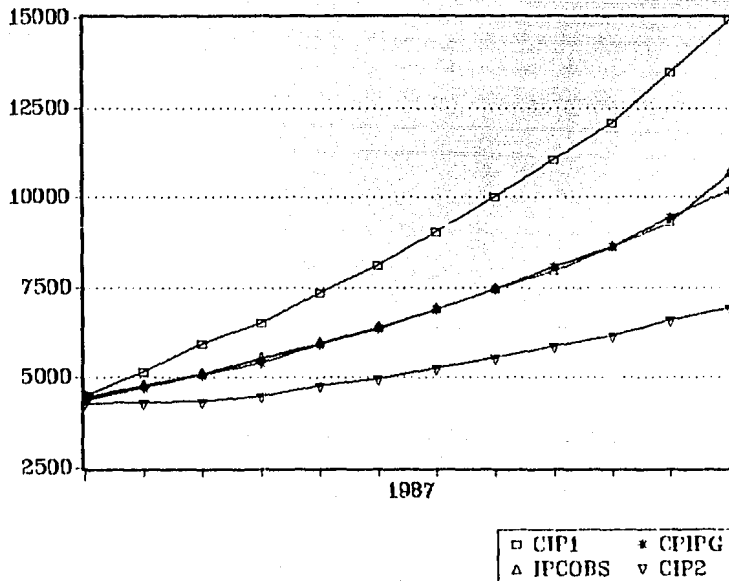
Los modelos ARIMA que se tienen estimados fueron contruidos para crear pronósticos con el comando FORCST del paquete MicroTSP utilizado a lo largo del capítulo 5.

Ya obtenidos los pronósticos, es posible entrar al Enfoque 2 mencionado en el capítulo 4 como una de las alternativas para el pronóstico de una combinación lineal. Este enfoque nos dice que primero se construyen los modelos univariados para cada subserie y se pronostica con cada modelo, para después formar la combinación lineal de los pronósticos, esta combinación se hizo por medio de la suma de los pronósticos de las subseries, multiplicando cada pronóstico por su respectiva ponderación. A este método se le da el nombre de "indirecto" o Enfoque 2. El cuadro 5.16 muestra los resultados correspondientes a los pronósticos de las subseries, a los cuales se les asignó los nombres de CPA, CPB, CPD, CPE, CPF, CPG, CPH y CPI respectivamente, al pronóstico de la serie general se le otorgó el nombre de CPIPG (Enfoque 1) y al pronóstico de la combinación lineal se le dió el nombre de PIPCGI (Enfoque 2).

Grafica 5.12 Pronostico del Enfoque 1 (CPIFG), serie observada (IPCOBS) e intervalos de confianza (CIP1, CIP2).



Grafica 5.12 Pronostico del Enfoque 1 (CPIPG), serie observada (IPCOBS) e intervalos de confianza (CIP1, CIP2).



### 5.5 Eficiencia en el pronóstico de una combinación lineal

En el capítulo 4 se indicó que es posible distinguir la eficiencia del Enfoque 3 con respecto a la del Enfoque 1 por medio del cociente de sus varianzas. o sea

$$E(H,M,k) = \frac{V [ e_T(H,M,k) ]}{V [ \bar{e}_T(H,M,k) ]}$$

En donde  $H = 1$ , porque solamente se tiene agregación contemporánea y no temporal.

A continuación se explican los pasos que se siguieron para el cálculo del factor  $V(e(1,1,8))$ : por medio de la estimación de las 8 regresiones con retrasos 1, 6, 11 y 12 se obtuvieron 8 series de residuales. Con el comando COVA se obtuvieron las covarianzas de ese grupo de series. Teniendo disponibles las covarianzas y las varianzas de las regresiones se formó la siguiente matriz de varianzas-covarianzas

.00030	.	.	.	.	.	.
.00000	.00005	.	.	.	.	.
.00002	-.00000	.00021	.	.	.	.
.00002	-.00000	.00001	.00012	.	.	.
.00001	-.00000	.00000	.00000	.00006	.	.
-.00004	.00000	-.00002	-.00008	-.00002	.00156	.
-.00000	-.00000	-.00000	-.00000	-.00000	.00000	.00000
.00002	-.00000	.00000	.00001	.00000	-.00005	.00023

$\Sigma_a$

además el vector de ponderaciones  $\underline{w}_0'$  está dado por

$$\underline{w}_0' = (.03824, .0679, .2153, .0523, .0757, .1227, .0581, .0256)$$

y así que

$$V[\bar{e}(1,1,8)] = \underline{w}_0' \Sigma \underline{w}_0 = 0.0000812$$

Por otro lado, ya que

$$V[\bar{e}(1,1,8)] = .0001501$$

Se obtiene entonces

$$E(1,1,8) = \frac{0.0000812}{0.0001501} = 0.5412829$$

este resultado representa una pérdida de eficiencia del 46% cuando se usa el Enfoque 1 en vez de aplicar el Enfoque 3, para pronosticar 1 paso hacia adelante (un mes). Un cálculo similar debería realizarse para 2 o más pasos hacia adelante, pero no se efectuó en este trabajo por lo engorroso de los cálculos que eso involucraba.

### 5.8 Exactitud de los tres pronósticos obtenidos

Los tres métodos de pronóstico presentados en este capítulo son comparados con la serie observada, en el cuadro 5.17.

CUADRO 5.17

Comparación de los pronósticos obtenidos por los tres Enfoques con la serie observada

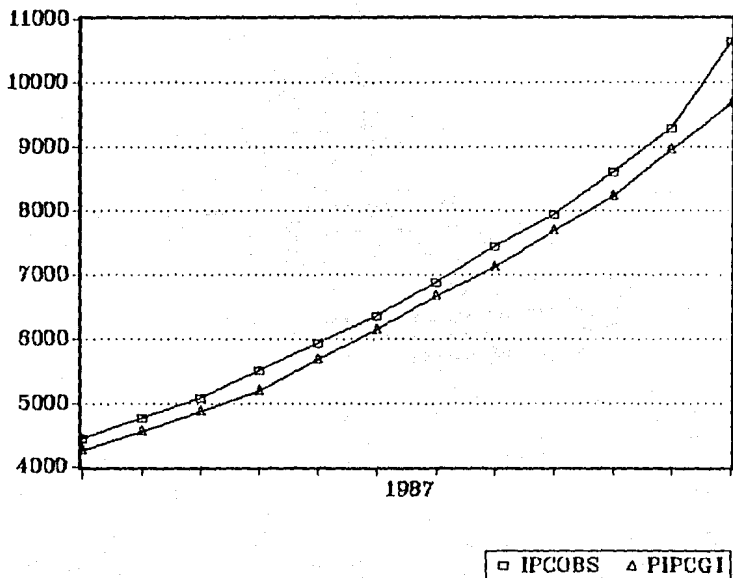
obs	IPCOBS	PVA6 (multivariado)	CPIPG (directo)	PIPCGI (indirecto)
1987.01	4440.900	4435.141	4383.065	4250.433
1987.02	4761.300	4484.272	4715.022	4544.629
1987.03	5076.000	4808.760	5061.061	4864.717
1987.04	5520.100	5084.344	5407.513	5190.023
1987.05	5936.200	5539.054	5914.133	5684.737
1987.06	6365.700	6320.466	6347.541	6144.428
1987.07	6881.300	6508.816	6889.971	6660.751
1987.08	7443.700	7086.944	7445.681	7114.124
1987.09	7934.100	7500.409	8048.810	7674.976
1987.10	8595.200	8180.867	8619.947	8222.665
1987.11	9277.000	9185.452	9416.054	8932.939
1987.12	10647.20	10432.700	10176.350	9668.688

en este cuadro puede apreciarse la exactitud de los pronóstico con respecto a la serie observada (IPCOBS) durante el período que cubre de 1987.01 a 1987.12.

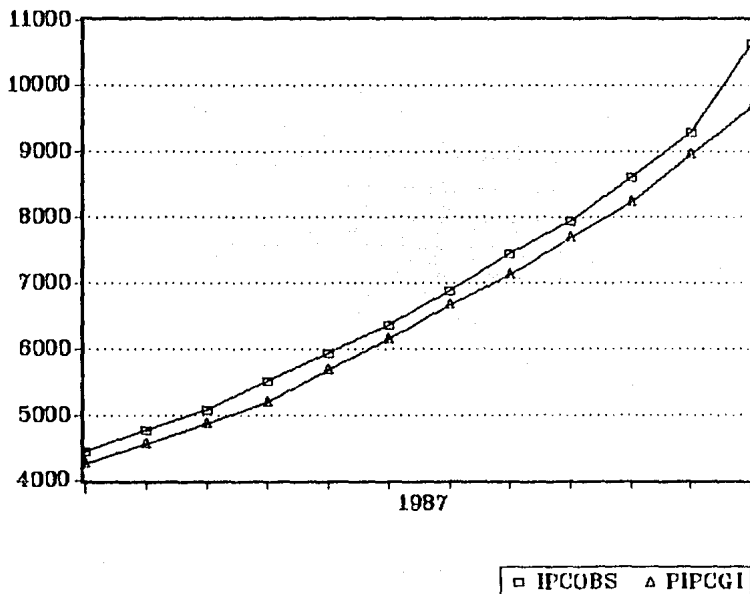
En la gráfica 5.21 se presenta a la serie IPCOBS y al pronóstico del Enfoque 2 ( método indirecto ). La gráfica 5.22 muestra a la serie IPCOBS y al pronóstico del Enfoque 3 ( método directo ). La gráfica 5.23 presenta a la serie IPCOBS y al pronóstico del vector autorregresivo (multivariado) y en la gráfica 5.24 se compara el pronóstico del Enfoque 1, del Enfoque 2 y del Enfoque 3 con la serie observada IPCOBS.



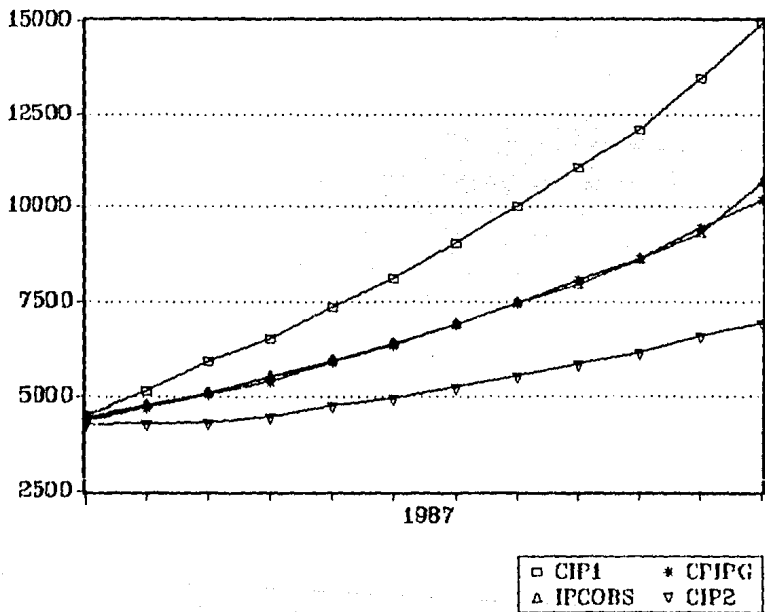
Grafica 5.13 Pronostico del Enfoque 2 (PPCGI) y serie observada (IPCOBS).



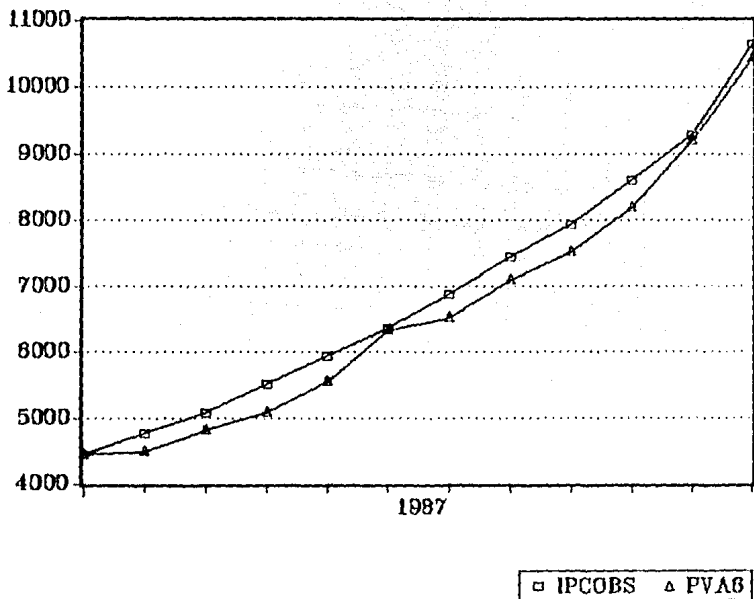
Grafica 5.13 Pronostico del Enfoque 2 (PPCGI) y serie observada (IPCOBS).



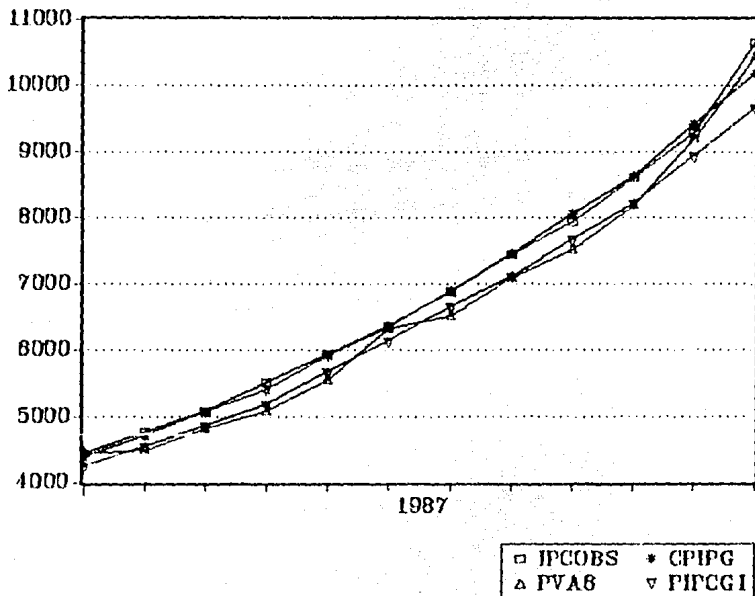
Grafica 5.14 Pronostico del Enfoque 1 (CPIPG), serie observada (IPCOBS) e intervalos de confianza (CIP1, CIP2).



Grafica 5.15 Pronostico del Enfoque 3 (PVA6) y serie observada (IPCOBS).



Grafica 5.16 Serie observada (IPCOBS), pronostico del Enfoque 3 (PVA6)  
 pronostico del Enfoque 1 (CPIPG), pronostico del Enfoque 2 (PPCGI).



## CONCLUSIONES.

El objetivo de esta tesis fue el de presentar las alternativas para obtener pronósticos cuando la serie de interés surge como combinación lineal de otras series y visualizar la eficiencia entre el Enfoque 1 (método directo) el Efecto 3 (método multivariado), que son los enfoques más útiles en la práctica.

Para empezar fue necesario introducir el término de pronóstico, ya que es importante hacer distinción del pronóstico con otros términos semejantes a él, como son la previsión, la proyección, la predicción, la extrapolación y la profecía.

La manera como se manejó la teoría en la identificación de modelos y pronósticos para una combinación lineal fué considerando algunos casos que se pueden presentar con mayor frecuencia en las series que se manejan en la realidad. Estos casos son los de muestreo sistemático, agregación temporal y agregación contemporánea. La agregación contemporánea fue el punto de interés en esta tesis, ya que la aplicación presentada en el capítulo 5 fue de una combinación lineal de este tipo. Los teoremas 4.1 y 4.2 proporcionan los supuestos que hacen de un pronóstico el óptimo ya que cumple con tener error cuadrático medio mínimo (para el caso escalar y vectorial respectivamente).

Se consideraron en particular tres enfoques: Enfoque 1, primero se forma la combinación lineal, se identifica el modelo y se pronostica la serie; Enfoque 2 se obtiene el modelo para cada serie que forma la combinación lineal, se pronostican individualmente estas series y después se forma la combinación lineal con dichos pronósticos; Enfoque 3, primero se construye el modelo multivariado, se pronostica con él y se forma la combinación lineal de los pronósticos.

La aplicación mostrada en el capítulo 5 utilizando los tres Enfoques indica que en términos de exactitud, podemos visualizar que empíricamente el Enfoque 1 (método directo) es el más semejante a la serie real en el período 01,1897-12,1987, el Enfoque 3 (multivariado) es el que le sigue y por último el Enfoque 2 (método indirecto). En términos de variabilidad, que es lo que más nos interesa hablando estadísticamente, se verifica que el pronóstico con error cuadrático medio mínimo resulta ser el del Enfoque 3, por lo cual es el más atractivo, aunque también el más complicado.

La pérdida de eficiencia del Enfoque 1 con respecto al Enfoque 3 es presentada tanto en teoría como en la aplicación. En particular la pérdida de eficiencia que se obtuvo en el ejercicio con el Enfoque 1 (método directo) en relación con el Enfoque 3 es del 46%. Se concluye que si se desea ser práctico en la obtención de pronósticos, se aplique el Enfoque 1, pero si se desea obtener un pronóstico con una variabilidad lo más pequeña posible, el mejor es el Enfoque 3.

APENDICE 1 Listado de la serie general y las subseries

obs	IPCOBS	ABT	RCA	VIVIEN	MAPADO
1981.01	171.0000	169.5000	191.7000	165.7000	176.0000
1981.02	175.2000	172.4000	196.3000	170.1000	181.0000
1981.03	178.9000	175.4000	201.2000	174.7000	185.6000
1981.04	182.9000	178.9000	206.9000	178.2000	189.9000
1981.05	185.7000	181.3000	211.2000	179.9000	193.1000
1981.06	188.3000	184.5000	214.8000	182.6000	196.9000
1981.07	191.6000	187.3000	219.7000	185.0000	201.0000
1981.08	195.6000	191.3000	224.2000	188.0000	205.4000
1981.09	199.2000	194.2000	229.5000	192.2000	210.8000
1981.10	203.6000	198.5000	236.3000	197.6000	212.9000
1981.11	207.5000	201.8000	242.2000	201.3000	215.3000
1981.12	213.1000	205.6000	246.8000	207.0000	219.4000
1982.01	223.7000	214.8000	250.7000	212.7000	225.6000
1982.02	232.5000	220.3000	259.0000	221.9000	236.6000
1982.03	241.0000	225.3000	279.2000	230.4000	249.7000
1982.04	254.1000	239.7000	291.4000	239.1000	260.5000
1982.05	268.4000	253.9000	306.3000	250.5000	274.6000
1982.06	281.3000	264.9000	322.0000	265.5000	290.6000
1982.07	295.8000	280.1000	337.7000	278.9000	307.4000
1982.08	329.0000	310.5000	376.5000	302.3000	331.4000
1982.09	346.5000	327.2000	403.1000	316.2000	356.7000
1982.10	364.5000	348.5000	425.4000	330.2000	377.7000
1982.11	382.9000	364.9000	455.8000	344.8000	405.4000
1982.12	423.8000	390.3000	489.9000	378.7000	431.7000
1983.01	469.9000	423.5000	557.9000	411.7000	475.9000
1983.02	495.1000	438.6000	603.0000	429.2000	519.9000
1983.03	519.1000	457.4000	636.5000	444.3000	573.6000
1983.04	552.0000	488.8000	666.6000	462.1000	619.7000
1983.05	575.9000	512.2000	698.8000	474.4000	666.4000
1983.06	597.7000	532.6000	729.6000	490.9000	703.7000
1983.07	627.3000	564.5000	758.5000	508.1000	735.9000
1983.08	651.6000	585.3000	802.7000	523.2000	769.3000
1983.09	671.7000	599.4000	852.7000	540.2000	796.6000
1983.10	694.0000	620.0000	894.4000	553.2000	820.2000
1983.11	734.7000	658.0000	933.8000	575.8000	842.6000
1983.12	766.1000	694.3000	970.9000	592.2000	874.7000
1984.01	814.8000	753.1000	1002.600	621.9000	917.6000
1984.02	857.8000	796.5000	1035.400	687.7000	984.2000
1984.03	894.3000	836.1000	1076.500	708.6000	1033.400
1984.04	933.2000	877.4000	1108.100	725.0000	1063.400
1984.05	964.1000	908.9000	1136.200	738.7000	1097.000
1984.06	999.0000	945.6000	1178.100	755.4000	1143.100
1984.07	1031.800	979.2000	1218.000	773.8000	1181.600
1984.08	1061.100	1004.500	1280.100	791.1000	1218.300
1984.09	1092.700	1027.800	1341.900	808.7000	1243.500
1984.10	1130.700	1071.600	1390.100	825.7000	1278.200
1984.11	1169.700	1114.700	1442.500	845.9000	1323.800
1984.12	1219.400	1184.500	1485.900	866.4000	1354.500
1985.01	1309.800	1264.600	1539.600	918.9000	1401.600
1985.02	1364.200	1320.200	1598.000	953.3000	1445.100



APENDICE 1 Listado de la serie general y las subseries

obs	IPC OBS	ABT	RCA	VIVIEN	MAPADO
1985.03	1417.100	1376.700	1670.400	984.8000	1498.700
1985.04	1460.700	1423.400	1725.600	1010.900	1556.300
1985.05	1495.300	1449.100	1790.200	1042.700	1615.400
1985.06	1532.800	1479.200	1854.000	1077.500	1681.000
1985.07	1586.200	1522.000	1927.700	1117.600	1749.900
1985.08	1655.500	1584.000	2072.900	1153.600	1818.600
1985.09	1721.600	1630.800	2188.300	1207.400	1887.300
1985.10	1787.000	1691.600	2303.500	1246.100	1970.700
1985.11	1869.500	1771.200	2422.500	1304.000	2081.600
1985.12	1976.700	1865.600	2524.600	1391.300	2159.700
1986.01	2173.300	2064.900	2602.700	1533.600	2246.200
1986.02	2269.900	2126.800	2749.900	1617.200	2407.300
1986.03	2375.400	2230.400	2902.500	1694.000	2578.800
1986.04	2499.400	2381.000	3052.200	1782.600	2679.100
1986.05	2638.300	2566.500	3243.000	1840.800	2838.000
1986.06	2807.600	2760.000	3384.500	1933.200	3037.200
1986.07	2947.700	2875.400	3547.100	2010.300	3191.800
1986.08	3182.700	3024.700	3780.200	2110.900	3398.800
1986.09	3373.700	3203.100	4036.300	2215.200	3582.800
1986.10	3566.500	3393.000	4320.500	2331.400	3860.500
1986.11	3807.600	3603.100	4619.300	2463.500	4204.400
1986.12	4108.200	3892.900	4952.700	2650.600	4520.900
1987.01	4440.900	4173.900	5186.600	2885.300	4914.300
1987.02	4761.300	4537.800	5619.500	2995.300	5434.800
1987.03	5076.000	4884.100	6024.600	3128.400	5735.100
1987.04	5520.100	5291.600	6401.300	3393.600	6134.400
1987.05	5936.200	5702.600	6974.300	3525.900	6548.700
1987.06	6365.700	6157.200	7554.900	3669.700	7062.000
1987.07	6881.300	6640.200	8091.000	3877.700	7811.200
1987.08	7443.700	7085.800	8874.300	4228.300	8418.200
1987.09	7934.100	7584.400	9668.600	4428.900	9084.700
1987.10	8595.200	8258.800	10692.10	4655.500	9994.500
1987.11	9277.000	8814.400	11825.10	4941.200	10984.50
1987.12	10647.20	9739.400	13477.20	5938.500	12319.50

APENDICE 1 Listado de la serie general y las subseries

obs	SALUD	TRANSP	EDUCAC	OTROS
1981.01	170.6000	146.5000	172.3000	188.0000
1981.02	178.3000	154.7000	174.7000	192.7000
1981.03	183.4000	157.9000	178.4000	197.0000
1981.04	186.7000	160.6000	182.4000	204.3000
1981.05	189.9000	162.2000	185.8000	207.2000
1981.06	192.0000	163.1000	188.1000	209.9000
1981.07	193.4000	164.3000	195.5000	214.6000
1981.08	197.8000	166.1000	203.7000	217.9000
1981.09	200.4000	167.6000	210.1000	221.8000
1981.10	203.9000	170.5000	213.8000	227.5000
1981.11	208.9000	171.9000	217.7000	234.8000
1981.12	210.3000	186.2000	220.3000	243.7000
1982.01	221.5000	212.3000	226.7000	261.7000
1982.02	237.1000	226.3000	233.1000	272.8000
1982.03	246.5000	231.6000	244.6000	284.4000
1982.04	256.7000	243.9000	257.9000	310.8000
1982.05	276.7000	252.0000	280.6000	329.2000
1982.06	293.3000	261.5000	293.7000	342.1000
1982.07	310.0000	270.3000	308.1000	359.2000
1982.08	329.9000	334.5000	335.0000	388.5000
1982.09	349.6000	343.7000	357.4000	411.0000
1982.10	370.7000	351.4000	371.4000	429.9000
1982.11	390.5000	368.0000	382.8000	454.1000
1982.12	416.7000	498.0000	397.9000	482.6000
1983.01	466.1000	559.0000	461.3000	567.7000
1983.02	502.8000	597.1000	491.4000	588.7000
1983.03	556.1000	613.0000	522.7000	608.7000
1983.04	592.9000	665.6000	545.1000	650.2000
1983.05	619.2000	691.6000	566.8000	671.2000
1983.06	651.6000	701.1000	592.7000	700.0000
1983.07	690.0000	717.6000	642.1000	748.6000
1983.08	719.1000	724.8000	678.8000	806.2000
1983.09	748.0000	733.9000	694.4000	840.5000
1983.10	775.0000	750.8000	710.1000	877.5000
1983.11	794.8000	855.6000	733.1000	911.9000
1983.12	822.5000	875.0000	783.9000	956.2000
1984.01	877.6000	907.4000	828.3000	1021.800
1984.02	912.6000	934.2000	855.6000	1063.400
1984.03	947.9000	968.0000	875.5000	1135.900
1984.04	972.0000	1055.600	889.1000	1168.700
1984.05	1017.500	1102.300	903.5000	1215.400
1984.06	1067.400	1125.000	937.8000	1282.700
1984.07	1117.300	1148.200	978.4000	1330.900
1984.08	1155.200	1163.300	1016.200	1378.800
1984.09	1194.300	1192.100	1037.200	1426.400
1984.10	1251.900	1223.500	1105.300	1495.900
1984.11	1304.200	1252.500	1137.100	1546.800
1984.12	1350.000	1288.700	1175.600	1619.500
1985.01	1425.500	1499.200	1245.200	1757.300
1985.02	1499.700	1550.000	1297.000	1855.800

APENDICE 1 Listado de la serie general y las subseries

obs	SALUD	TRANSP	EDUCAC	OTROS
1985.03	1554.600	1592.600	1322.000	1964.300
1985.04	1603.700	1611.800	1351.300	2069.500
1985.05	1649.400	1623.700	1387.300	2136.700
1985.06	1703.400	1638.500	1430.300	2187.200
1985.07	1770.100	1679.300	1477.900	2323.100
1985.08	1839.600	1735.500	1584.200	2418.300
1985.09	1925.800	1789.200	1708.300	2517.600
1985.10	2002.100	1846.700	1751.000	2626.500
1985.11	2064.500	1933.300	1817.200	2737.400
1985.12	2144.000	2275.200	1894.200	2905.700
1986.01	2317.000	2451.400	2052.700	3274.000
1986.02	2437.400	2582.500	2137.300	3404.400
1986.03	2542.800	2638.100	2267.100	3548.800
1986.04	2687.800	2692.800	2379.900	3713.400
1986.05	2823.500	2756.100	2493.400	3870.200
1986.06	3082.600	2872.300	2656.500	4145.700
1986.07	3323.900	3049.400	2808.500	4394.400
1986.08	3522.800	3804.900	2961.700	4603.400
1986.09	3777.200	4006.800	3280.700	4822.700
1986.10	4031.000	4157.000	3418.900	5119.000
1986.11	4300.600	4527.900	3607.100	5432.600
1986.12	4581.100	4946.100	3915.400	5812.900
1987.01	5151.100	5263.400	4332.000	6576.300
1987.02	5620.800	5552.400	4559.800	6963.800
1987.03	6082.400	5809.100	4881.400	7362.000
1987.04	6704.000	6530.200	5255.200	7989.000
1987.05	7209.000	7261.900	5592.400	8341.300
1987.06	7763.400	7732.100	5936.000	9020.200
1987.07	8514.400	8271.400	6568.000	10024.30
1987.08	9119.500	9205.300	6954.400	10900.90
1987.09	9756.000	9493.100	7917.000	11405.80
1987.10	10670.20	10036.90	8459.300	12614.80
1987.11	11462.20	10846.50	9311.700	13807.00
1987.12	12577.30	13629.30	10670.80	15952.70

APENDICE 2 Listado de la serie general y las subseries

obs	IPCQBS	ABT	RCA	VIVIEN	MAPADO
1987.01	4440.900	4173.900	5186.600	2885.300	4914.300
1987.02	4761.300	4537.800	5619.500	2995.300	5434.800
1987.03	5076.000	4884.100	6024.600	3128.400	5735.100
1987.04	5520.100	5291.600	6401.300	3393.600	6134.400
1987.05	5936.200	5702.600	6974.300	3525.900	6548.700
1987.06	6365.700	6157.200	7554.900	3669.700	7062.000
1987.07	6881.300	6640.200	8091.000	3877.700	7811.200
1987.08	7443.700	7085.800	8874.300	4228.300	8418.200
1987.09	7934.100	7584.400	9668.600	4428.900	9084.700
1987.10	8595.200	8258.800	10692.10	4655.500	9994.500
1987.11	9277.000	8814.400	11825.10	4941.200	10984.50
1987.12	10647.20	9739.400	13477.20	5938.500	12319.50

obs	SALUD	TRANSP	EDUCAC	OTROS
1987.01	5151.100	5263.400	4332.000	6576.300
1987.02	5620.800	5552.400	4559.300	6963.800
1987.03	6082.400	5809.100	4881.400	7362.000
1987.04	6704.000	6530.200	5255.200	7989.000
1987.05	7209.000	7261.900	5592.400	8341.300
1987.06	7763.400	7732.100	5936.000	9020.200
1987.07	8514.400	8271.400	6568.000	10024.30
1987.08	9119.500	9205.300	6954.400	10900.90
1987.09	9756.000	9493.100	7917.000	11405.80
1987.10	10670.20	10036.90	8469.300	12614.80
1987.11	11462.20	10846.30	9311.700	13807.00
1987.12	12577.30	13629.30	10670.90	15952.70

## BIBLIOGRAFIA.

- Abraham, B. (1982). "Temporal aggregation and time series." Int. Statist. Rev. 50, 285-291.
- Abraham, B. y Ledolter J. (1982). "Forecast efficiency of systematically sampled time series". Comm. Statist. A 51, 2857-2868.
- Aigner, D. J. y Ledolter, J. (1973). "Simulation and aggregation: a reconsideration." Rev. Econ. Statis. 55, 114-118.
- Amemiya, T. y Wu, R. Y. (1972). "The effect of aggregation on prediction in the autorregressive model." J. Am. Statist. Assoc. 67, 628-632.
- Brewer, K. R. W. (1973). "Some consequences of temporal aggregation and systematic sampling for ARIMA and ARMAX models." J. Econometrics 1, 133-154.
- Chambers, J. C., Mullick S. K. y Smith D. D. (1971). "How to choose the right forecasting technique." Harvard Business Review July-august, 45-74.
- Dunn, D. M., Williams, W. H. y DeChaine, T. L. (1976). "Aggregate versus subaggregate models in local area forecasting." J. Am. Statist. Assoc. 71, 68-71.
- Granger, C. W. J. & Morris, M. J. (1976). "Time series modelling and interpretation". J. R. Statist. Soc. A 139, 246-257
- Guerrero, V. M. (1983). Análisis Estadístico de Series de Tiempo Económicas. Libro no publicado, disponible en fotocopia.

- Guerrero, V. M. (1987). "Los vectores autorregresivos como herramienta de análisis econométrico". Documento de investigación No.64, Dirección de Investigación Económica, Banco de México.
- Guerrero, V. M. (1989) "Optimal conditional ARIMA forecasts". J. of Forecasting 8, 215-229.
- Herschel, F. J. (1978). Introducción a la predicción económica. México: Fondo de Cultura Económica.
- Hsiao, C. (1979). "Linear aggregation using both temporally aggregated and temporally disaggregated data." J. Econometrics 10, 243-252.
- Kohn, R. (1982). "When is an aggregate of a time series efficiently forecast by its past?" J. Econometrics 18, 337-349.
- Makridakis, S. (1986). "The art and science of forecasting." Int. J. Forecasting 2, 15-39.
- Makridakis, S. and Wheelwright, S. C. (1978). Forecasting Methods & applications. New York: John Wiley & Sons.
- McNees, S. K. (1985). "Which Forecast should you use?" New England Economic Review 36-42.
- Orcutt, G. H., Watts, H. M. y Edwards, J. B. (1968). "Data aggregation and information loss." Am. Econ. Rev. 58, 773-787.

- Palm, F. C. y Nijman. T. E. (1982). "Linear aggregation using both temporally aggregated and temporally disaggregated data." J. Econometrics 19, 333-343.
- Pino, F. A., Morettin, P. A. y Mentz, R. P. (1987). "Modelling and forecasting linear combinations of time series." Int. Statist. Rev. 55, 295-313.
- Rose, D. E. (1977). "Forecasting aggregates of independent ARIMA processes." J. Econometrics 5, 323-346.
- Theil, H. (1954). Linear Aggregation of Economics Relationships. Amsterdam: North-Holland.
- Tiao, G. C. (1972). "Asymptotic behaviour of time series aggregates." Biometrika 59, 525-531.
- Tiao, G. C. y Guttman, I. (1980). "Forecasting contemporaneous aggregates of multiple series." J. Econometrics 12, 219-230.
- Tiao, G. C. y Wei, W. W. S. (1976). "Effect of temporal aggregation on the dynamic relationship of two time series variables." Biometrika 63, 513-523.
- Wei, W. W. S. (1978). "The effect of temporal aggregation on parameter estimation, in distributed lag models." J. Econometrics 8, 237-246.
- Wei, W. W. S. (1979). "Some consequences of temporal aggregation in seasonal time series model". In Seasonal Analysis of Economic Time Series. Washington: Bureau of the Census

Weiss, A. A. (1984). "Systematic sampling and temporal aggregation in time series models." J. Econometrics 26, 271-281.

Whittle P. (1979). "Why predict? prediction as an adjunct to action." Amsterdam-New York-Oxford: North-Holland Publishing company.