UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

CAMPUS ACATLAN

# CADENAS DE MARKOV Y CALCULO ACTUARIAL

**TESIS PROFESIONAL**

QUE PRESENTA:

**LUIS FRANCISCO RUIZ HERNANDEZ**

PARA OBTENER EL TITULO DE:

**ACTUARIO**



MEXICO, D. F. 1997

*A Dios, porque me ha colmado de bendiciones sin merecerlo, mi deuda es infinita.*

*A mis padres:*

*Jesús Ruiz y Evangelina Hernández por todo su amor y apoyo incondicional en cada momento de mi vida, este trabajo es de ustedes, no mío.*

*A Chucho, mi hermano ¡ Sigamos caminando juntos por la vida !*

**AGRADECIMIENTOS**

*Al Fis. Manuel Valadez, excelente profesor y aun mejor persona, gracias por su apoyo y amistad, sepa que de no haber contado con su ayuda este trabajo hubiera sido un estudio desordenado del cálculo actuarial.*

*Al M. en C. Lucio Pérez, con quien se pusieron los primeros cimientos de este trabajo , ¡ Qué ingrato sería yo si no lo recordara en estos momentos, solo por ya no estar con nosotros !*

*Al Act. Mario Arriaga, por los inigualables cursos que nos impartió.*

*A los profesores :*

*Act. Víctor Manuel Acosta*

*Ing. Beatriz Clavel*

*Act. María del Carmen González*

*Fis. Jorge Luis Suarez Madariaga*

*por el tiempo que les he robado y sus valiosos comentarios que me han servido para mejorar mi trabajo.*

*A nuestro México y a su Universidad.*

*A todos cuantos creen en mi y se congratulan conmigo.*

*"Solo está derrotado quien ha dejado de luchar"*

*Manuel J. Clouthier.*

# Índice

# Introducción

"No hay efecto sin causa" dicta un axioma de la filosofía, por lo que si se parte de éste, se deberá comenzar por explicar los motivos que llevaron al desarrollo del presente trabajo, tales motivos desde luego van más allá de las inclinaciones y las preferencias de quien escribe, por lo que en realidad la elección del tema para este trabajo obedece a que durante su desarrollo se podrian ejecutar acciones como la investigación, la aplicación y por supuesto la innovación de técnicas en el marco del cálculo actuarial, satisfaciéndose parcialmente así la necesidad de no autolimitarse con lo aprendido en la facultad.

Se ha hablado de una necesidad pero el término correcto es el de obligación (aun cuando al comparar ambos se encuentra un abismo de por medio entre las ideas que representan), la cual nace del compromiso que mantiene el profesionista con la sociedad, y que lo obliga a mantenerse vigente en conocimientos Este punto ya no será tratado en adelante ya que ni es el objetivo del trabajo, ni corresponde hacerlo así.

Concretamente este trabajo tiene por objetivo continuar con la incorporación de conceptos y herramientas de los procesos estocásticos al cálculo actuarial.

En cuanto a la hipótesis, se sostiene que algunos valores actuariales ampliamente conocidos, pero no tratados desde la visión de los procesos estocásticos, pueden obtenerse desde tal perspectiva.

Para dar por concluida esta introducción solo resta agradecer la atención prestada a este trabajo y desear que su contenido resulte de utilidad.

# Capitulo 1

# PROCESOS ESTOCÁSTICOS

## 1.1. Introducción

Es bien conocido que el hombre antes de correr aprende a caminar, por lo que partiendo de esta verdad indiscutible se justifica la presencia de este capitulo, el cual tiene por objeto dar un marco teórico adecuado para que el lector pueda acceder con facilidad a los conceptos y desarrollos de los capitulos subsecuentes. Se empezará por presentar definiciones básicas de los procesos estocásticos, para continuar con el estudio del proceso de Poisson, de la distribución exponencial y de las ecuaciones de Kolmogorov, conceptos que serán empleados en los capitulos 2, 3 y 5. Finalmente se presenta la integración estocástica y la formula de Itô, los cuales son temas indispensables para la lectura del capitulo 4.

## 1.2. Definiciones y matriz de transición

***Proceso Estocástico( PE ).***

Recibe este nombre la familia de variables aleatorias $(X_t)_{0\le t<T}$, definida sobre $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, que representan el estado de un sistema en el instante $t$.
Cabe mencionar que al conjunto formado por todos los posibles resultados de un experimento se le conoce como *espacio de estados*, por lo que para cada miembro $\varsigma$ de dicho espacio de estados se tendrá una función real del tiempo conocida como ruta muestral y que es denotada por

$$X(t, \varsigma).$$

Por todo lo anterior un proceso estocástico podrá ser visto como una función real de dos variables: el resultado y el tiempo, formando los valores que puede tomar esta última un subconjunto del eje del tiempo que es conocido como *espacio paramétrico*. Con el fin de manejar una notación más sencilla, se ha acostumbrado representar a los procesos estocásticos como si fueran solamente una función del tiempo, es decir la notación que fue empleada en su definición.

Los procesos estocásticos se pueden clasificar en función de la naturaleza de su espacio paramétrico en :

- Proceso estocástico discreto en el tiempo - El espacio paramétrico es un conjunto contable.
- Proceso estocástico continuo en el tiempo - El espacio paramétrico es un intervalo.

Mientras que si la clasificación se deriva de la naturaleza del espacio de estados, se tendrán entonces : Procesos con espacio de estados discreto y procesos con espacio de estados continuo.

Se podrían describir en forma más detallada diferentes clases de procesos estocásticos, sin embargo, sólo se hará dicha descripción, para los procesos estocásticos que sean necesarios en el desarrollo de este trabajo.

***Procesos de Markov.***

Un proceso recibe este nombre si cumple la propiedad de Markov la cual dicta que :

"La ocurrencia de un estado futuro depende del estado inmediato anterior y únicamente de él".

Los procesos Markovianos cuyos espacios de estados son discretos, reciben el nombre de cadenas de Markov, siendo estos procesos los que serán sujeto de estudio en un contexto actuarial.

***Cadenas de Markov discretas en el tiempo.***

Una sucesión de variables aleatorias $\{X_n, n = 0,1,2,\ldots\}$ se conoce como una cadena de Markov discreta en el tiempo si cumple que

$$P\left[X_{n+1} = j \middle| X_0,\ldots,X_{n-1},X_n\right] = P\left[X_{n+1} = j \middle| X_n\right], \qquad n = 0,1,\ldots,$$

$j$ es un elemento del espacio de estados $S$

es decir, si se satisface la propiedad de Markov, siendo $P\left[X_{n+1} = j \middle| X_n\right]$ la probabilidad de estar en el estado $j$ en el $(n+1)$-ésimo momento, dado que se conoce su estado en el momento anterior.

Si se expresan las funciones de probabilidades en términos de pares ordenados cuyo primer elemento represente el estado origen y el segundo el estado destino, a partir de los $m$ elementos del espacio de estados se tendrán entonces $m*m$ probabilidades, a las cuales se les podrá asociar un arreglo matricial de $m$ filas por $m$ columnas

$$\mathbf{P} = \left(p_{i,j}\right)$$

debiendo necesariamente cumplir que $p_{i,j} \geq 0$ y

$$\sum_j p_{i,j} = 1.$$

A las matrices cuadradas, con elementos no negativos y para las cuales la suma de los elementos en cada una de sus filas es igual a la unidad se les conoce como *matrices estocásticas.*

***Proceso de Poisson.***

El proceso de Poisson es un proceso de espacio paramétrico continuo y espacio de estados discreto que responde a la cuestión sobre cuál será la probabilidad que haya $n$ éxitos en $t$ unidades de tiempo (donde una unidad de tiempo bien puede ser un día , una semana, un año etc ;), por lo que para su estudio será necesario traer a colación los siguientes conceptos :

- *Ensayo de Bernoulli* - Es un experimento que tiene únicamente dos resultados posibles ( se acostumbra denominar a estos dos resultados como éxito y fracaso )

- *Ley de probabilidades binomial* - La probabilidad $P(n)$ de que en $N$ ensayos de Bernoulli repetidos e independientes con probabilidad $p$ de éxito y $1-p$ de fracaso haya $n$ éxitos está dada por

$$P(n) = \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n}.$$

Estos conceptos se incorporarán al proceso de Poisson, mediante la división de cada unidad de tiempo en intervalos tan pequeños que en cada uno de estos podrá ocurrir a lo más un evento, por lo que para la probabilidad que haya $n$ éxitos en $t$ unidades de tiempo estará dada por

$$\lim_{N\to\infty} \binom{tN}{n} p^n (1-p)^{tN-n} \quad \text{, donde } p = \lambda / N$$

siendo $\lambda$ la tasa de éxito en una unidad de tiempo, cuando la probabilidad de este éxito es constante, por lo que al sustituir se tendrá que

$$\lim_{N\to\infty} \binom{tN}{n} \left(\frac{\lambda}{N}\right)^n \left(1-\frac{\lambda}{N}\right)^{tN-n} = \lambda^n \lim_{N\to\infty} \frac{tN(tN-1)\cdots(tN-n+1)}{n!N^n}\left(1-\frac{\lambda}{N}\right)^{tN-n}$$

$$= \frac{\lambda^n}{n!} \lim_{N\to\infty} \frac{t(tN-1)\cdots(tN-n+1)}{N^{n-1}}\left(1-\frac{\lambda}{N}\right)^{tN}\left(1-\frac{\lambda}{N}\right)^{-n}$$

$$= \frac{\lambda^n}{n!} t \lim_{N\to\infty} \left(\frac{tN-1}{N}\right)\cdots\left(\frac{tN-n+1}{N}\right)\left(1-\frac{\lambda}{N}\right)^{tN}\left(1-\frac{\lambda}{N}\right)^{-n},$$

y como el límite de un producto es el producto de los límites

$$\lim_{N\to\infty}\binom{tN}{n}\left(\frac{\lambda}{N}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{N}\right)^{tN-n}=\frac{\lambda^n}{n!}t\lim_{N\to\infty}t^{n-1}\left(1-\frac{\lambda}{N}\right)^{tN}$$

$$=\frac{(\lambda t)^n}{n!}\lim_{N\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{N}\right)^{tN}$$

$$=\frac{(\lambda t)^n\exp(-t\,\lambda)}{n!}\ , \qquad (1.\ 1)$$

habiéndose obtenido así la función de masa de probabilidades del proceso de Poisson cuando la probabilidad de éxito permanece constante.

A continuación se buscará responder a la misma cuestión, pero en una forma más general, es decir, sin limitarse a que la probabilidad de éxito permanezca siempre constante, por lo que si se parte de la igualdad

$$P[N_{t+\Delta t}=n]=P[N_t=n](1-\lambda(t)\Delta t)+P[N_t=n-1]\lambda(t)\Delta t\ ,$$

donde $\lambda(t)\Delta t$ es la probabilidad de tener un éxito en el instante $t$, se tendrá que

$$\frac{d}{dt}P[N_t=n]=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P[N_{t+\Delta t}=n]-P[N_t=n]}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P[N_t=n](1-\lambda(t)\Delta t)+P[N_t=n-1]\lambda(t)\Delta t-P[N_t=n]}{\Delta t}$$

$$=-P[N_t=n]\lambda(t)+P[N_t=n-1]\lambda(t)\,.$$

Para obtener la función de masa de probabilidades de $N_t$, se definirá una función generadora $Q(z,t)$ tal que al derivarla $n$ veces respecto a $z$, valuarla en cero y dividirla por el $n$-ésimo factorial dará la probabilidad que haya $n$ éxitos en $t$ unidades de tiempo, dicha función es la serie de potencias

$$Q(z,t)=\sum_{i=0}^{\infty}P[N_t=i]z^i\ ,$$

la cual converge uniformemente al menos sobre el intervalo $-1\le z\le 1$ y cuya derivada $n$-ésima respecto a $z$, como es sabido, también converge sobre el mismo intervalo, siendo la primera de éstas

$$\frac{d}{dt}Q(z,t) = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{d}{dt}P[N_t = i]z^i$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty}\left[-P[N_t = i]\lambda(t) + P[N_t = i-1]\lambda(t)\right]z^i$$

$$= \lambda(t)\left\{\sum_{i=0}^{\infty}-P[N_t = i]z^i + z\sum_{i=0}^{\infty}P[N_t = i]z^i\right\}$$

$$= \lambda(t)\{-Q(z,t) + zQ(z,t)\}$$

$$= \lambda(t)Q(z,t)(z-1),$$

que es la ecuación diferencial

$$\frac{d}{dt}Q(z,t) = \lambda(t)Q(z,t)(z-1),$$

cuya solución se puede obtener a partir de

$$\frac{1}{Q(z,t)}\frac{d}{dt}Q(z,t) = \lambda(t)(z-1),$$

lo que se puede reexpresar como

$$\frac{d}{dt}\log(Q(z,t)) = \lambda(t)(z-1)$$

que al ser integrado conduce a

$$\log(Q(z,t)) = \int^{t}\lambda(\varepsilon)d\varepsilon(z-1).$$

Esta igualdad es equivalente a

$$Q(z,t) = \exp\left\{\int^{t}\lambda(\varepsilon)d\varepsilon(z-1)\right\}.$$

**Por tanto, la probabilidad que haya $n$ éxitos en $t$ unidades de tiempo, bajo la ley de probabilidades de Poisson se obtendrá por medio de**

$$P[N_t = n] = \frac{1}{n!}\frac{d^{(n)}}{dz^{(n)}}Q(z,t)\bigg|_{z=0} = \frac{\left(\int^t \lambda(\xi)d\xi\right)^n \exp\left\{(-1+z)\int^t \lambda(\xi)d\xi\right\}\bigg|_{z=0}}{n!}$$

$$= \frac{\left(\int^t \lambda(\xi)d\xi\right)^n \exp\left\{\int^t \lambda(\xi)d\xi\right\}}{n!} \qquad (1.\ 2)$$

Como se habrá observado si en ( 1. 2 ) la función $\lambda(\xi)$ es constante, se obtendrá la expresión de ( 1. 1 )

***Distribución Exponencial.***

Esta distribución se encuentra asociada con la variable aleatoria $T$ que representa el tiempo que transcurrirá antes de que ocurra un resultado previamente determinado, por lo que $P[T \leq t]$ es la probabilidad que ocurra este éxito antes de $t$ unidades de tiempo, siendo la probabilidad del evento complementario a ésta

$$P[T > t] = 1 - P[T \leq t] \quad ;$$

la cual corresponde a la probabilidad que el éxito tome lugar después de $t$ unidades de tiempo. Visto desde otra perspectiva es la probabilidad $P[X(t) = 0]$ que no haya éxitos antes de que transcurran $t$ unidades de tiempo, la cual puede ser calculada por medio de la función de masa de probabilidades de Poisson dada en la expresión ( 1.2 ), de tal forma que se tendrá

$$P[T > t] = P[X(t) = 0] = \exp\left(-\int_0^t \alpha(\xi)d\xi\right) . \qquad (1..3)$$

Obteniéndose de aqui la función de densidad de probabilidades de la distribución exponencial, la cual queda como

$$\frac{d}{dt}P[T \leq t] = \frac{d}{dt}\left[1 - \exp\left(-\int_0^t \alpha(\xi)d\xi\right)\right]$$

$$= \alpha(t)\exp\left(-\int_0^t \alpha(\xi)d\xi\right) . \tag{1.4}$$

### 1.3. Ecuación de Chapman - Kolmogorov.

Con el objeto de simplificar la notación, se empleará

$$P\left[X_{n+u} = j \middle| X_n = i\right] = P_{i,j}(n,n+u) \tag{1.5}$$

para denotar la probabilidad de que en $u$ unidades de tiempo partiendo del estado $i$ y del momento $n$ llegue al estado $j$. Si el proceso es homogéneo en el tiempo, es decir, independiente del momento en que se valúa, se tendrá

$$P_{i,j}(n,n+u) = P_{i,j}(u),$$

probabilidad que puede obtenerse alternativamente cuando $u$ es mayor que $r$ por

$$P_{i,j}(u) = \sum_{w} P_{i,w}(r)\, P_{w,j}(u-r), \tag{1..6}$$

siendo esta igualdad la ecuación de Chapman - Kolmogorov, la cual puede ser vista, como el $(i,j)$-ésimo elemento del producto matricial

$$\mathbf{P}^{(u)} = \mathbf{P}^{(r)}\mathbf{P}^{(u-r)}, \tag{1.7}$$

donde $\mathbf{P}^{(t)}$ es la matriz estocástica asociada con las probabilidades de transición en $t$ pasos.

Hasta este punto se han tratado exclusivamente probabilidades condicionales, ya que éstas están en función del estado actual, por lo que ahora se centrará la atención en las probabilidades incondicionales de que al momento $t$ se encuentre quien se mueve por el espacio de estados en el estado $i$ $(\pi_t(i))$, las cuales están dadas por

$$\pi_t(i) = \sum_{\forall k} \pi_s(k)\, p_{k,i}(s,t) . \tag{1.8}$$

Si ahora se define el vector

$$\mathbf{\Pi}_t = \left(\pi_t(1), \pi_t(2), \ldots, \pi_t(n)\right)$$

cuyos componentes satisfacen

$$\sum_{\forall w} \pi_t(w) = 1, \qquad (1.9)$$

en notación matricial, la ecuación ( 1.8 ) quedará como

$$\mathbf{\Pi}_t = \mathbf{\Pi}_s \mathbf{P}(s,t). \qquad (1.10)$$

Es necesario mencionar que si las probabilidades de la matriz de transición dependen exclusivamente de la diferencia *(t - s)* se tendrá la igualdad

$$\mathbf{\Pi}_t = \mathbf{\Pi}_s \mathbf{P}^{(t-s)},$$

para la cual, con el objeto de darle solución, convendrá obtener los eigenvalores y los correspondientes eigenvectores de la matriz $\mathbf{P}$. Esto porque como bien se sabe, para cada eigenvalor $\lambda_i$ y su correspondiente eigenvector $\mathbf{S}_i$, se cumple

$$\mathbf{P}\mathbf{S}_i = \lambda_i \mathbf{S}_i \ .$$

Unidos estos eigenvectores formarán el arreglo matricial $\mathbf{S} = (\mathbf{S}_1, \ldots, \mathbf{S}_n)$.
Algo similar se podrá hacer para la transpuesta de $\mathbf{P}$ y sus eigenvalores, lo que dará lugar a

$$\mathbf{P}'\mathbf{T}_i = \lambda_i \mathbf{T}_i \ ,$$

o alternativamente

$$\mathbf{T}_i'\mathbf{P} = \lambda_i \mathbf{T}_i',$$

formándose de la unión de los eigenvectores la matriz $\mathbf{T} = (\mathbf{T}_1, \ldots, \mathbf{T}_n)$.

Una vez obtenidas las matrices de los eigenvectores es conveniente colocar los eigenvalores en otro arreglo matricial $\mathbf{\Lambda}$, el cual estará constituido de la siguiente manera

$$\mathbf{\Lambda}_{i,j} = \delta_{i,j}\lambda_i \ ,$$

pudiéndose así escribir la relación de eigenvectores y eigenvalores como

$$\mathbf{P}\mathbf{S} = \mathbf{S}\,\mathbf{\Lambda} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{P}'\mathbf{T} = \mathbf{T}\mathbf{\Lambda}$$

( esta última se puede obtener alternativamente como $\mathbf{T}'\mathbf{P} = \mathbf{\Lambda}\mathbf{T}'$ ).

Si se despeja en estas igualdades a la matriz $\mathbf{P}$ se obtendrá que $\mathbf{S} = (\mathbf{T}')^{-1}$ y $\mathbf{P} = \mathbf{S}\mathbf{\Lambda}\mathbf{T}'$, o equivalentemente

$$\mathbf{P} = (\lambda_1 \mathbf{S}_1, \cdots, \lambda_n \mathbf{S}_n) \begin{pmatrix} \mathbf{T}_1^t \\ \vdots \\ \mathbf{T}_n^t \end{pmatrix} \tag{1.11}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{S}_i \mathbf{T}_i^t .$$

De tal forma que al partir de esta diagonalización se puede obtener algo similar para el producto matricial

$$\mathbf{P}^{(2)} = \mathbf{S}\Delta\mathbf{S}^{-1}\mathbf{S}\Delta\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}\Delta^2\mathbf{S}^{-1},$$

conduciendo hasta

$$\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{S}\Delta\mathbf{S}^{-1}\cdots\mathbf{S}\Delta\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}\Delta^n\mathbf{S}^{-1}.$$

Por lo que para el vector de probabilidades incondicionales

$$\mathbf{\Pi}_r = \mathbf{\Pi}_0 \mathbf{P}^r$$

$$= \mathbf{\Pi}_0 \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^r \mathbf{S}_i \mathbf{T}_i^t$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^r (\mathbf{\Pi}_0 \mathbf{S}_i) \mathbf{T}_i^t .$$

Como para la matriz $\mathbf{P}$ siempre hay un eigenvalor igual a uno y su correspondiente eigenvector con todos sus elementos también iguales a la unidad, siendo estos $\lambda_1$ y $\mathbf{S}_1$ respectivamente, la ecuación anterior se puede expresar como ( ya que la suma de los elementos de $\mathbf{\Pi}_0$ es la unidad)

$$\mathbf{\Pi}_r = \mathbf{T}_1^t + \sum_{i=2}^{n} \lambda_i^r (\mathbf{\Pi}_0 \mathbf{S}_i) \mathbf{T}_i^t . \tag{1.12}$$

En cuanto a los demás eigenvalores se puede encontrar una característica que resultará de gran importancia, por lo que con esto en mente en primer lugar se tomará uno de los eigenvectores columna $\mathbf{S}_i$, para el que se definirá

$$(\mathbf{S}_i)_{max} = \max \begin{pmatrix} (\mathbf{S}_i)_1 \\ \vdots \\ (\mathbf{S}_i)_n \end{pmatrix},$$

y como la suma de los elementos de las filas de la matriz **P** es uno se tendrá que

$$(\mathbf{S}_i)_{max} \geq (\mathbf{P}\mathbf{S}_i)_{max} = \lambda_i (\mathbf{S}_i)_{max}$$

y, por tanto $|\lambda_i| \leq 1$ para todo $\mathbf{S}_i$.

Por tanto al aplicar a la ecuación ( 1.12 ) en el caso en el que $r$ tiende a infinito, resulta

$$\lim_{r \to \infty} \mathbf{\Pi}_r = \mathbf{\Pi} = \mathbf{T}_1^t. \qquad (1.13)$$

## 1.4. Ecuaciones de Kolmogorov

Se han tratado ya las Cadenas de Markov discretas en el tiempo, correspondiendo el turno en esta sección a las cadenas continuas, así como a sus principales características, la elección de las primeras fue hecha con el objeto de lograr constituir un marco teórico adecuado para los capítulos venideros.

Un proceso estocástico recibe el nombre de cadena de Markov continua en el tiempo si posee espacio de estados finito y sus probabilidades de transición están dadas por

$$P\left[X(s+t) = j \middle| X(u), u \leq s\right] = P\left[X(s+t) = j \middle| X(s)\right] \qquad (1.14)$$

$\{X(t)\}$ es un proceso de salto puro, cuando después de cada cambio de estado, éste, permanezca en el que haya alcanzado por un periodo mayor de cero, por lo que se podrá definir la sucesión de variables aleatorias $\{T_i\}$, donde $T_i$ es la variable aleatoria que representa el tiempo que permanecerá el proceso en el $i$-ésimo estado que alcanzó, llegando éste a su fin al pasar a otro estado.

La distribución de $T_i$ dependerá exclusivamente del estado alcanzado y ésta será (bajo el supuesto de homogeneidad) una exponencial

$$f(t, \lambda_i) = \lambda_i \exp(-t\,\lambda_i).$$

Si $\lambda_i = 0$, se tendrá que $P[T_i = \infty] = 1$, lo que quiere decir que el proceso nunca saldrá del estado i. A los estados que cumplen esta condición se les conoce como *estados absorbentes*.

Dados estos conceptos, y para un manejo más sencillo, partiendo del estado cero se podrá definir a

$$\rho_{i,j} = P\left[X(T_0) = j \middle| X(0) = i, T_0 > t\right]$$

como la probabilidad que el cambio sea del estado $i$ hacia el estado $j$, independientemente del tiempo que dura en el estado $i$, por lo que $\rho_{i,i} = 0$ y $\sum_{\forall j \neq i} \rho_{i,j} = 1$.

Bajo el supuesto de homogeneidad, la tasa de salida del estado $i$ estará dada por

$$\lim_{t \to 0}\left[1 - P_{i,i}(t)\right] / t = a_i = -a_{i,i} \tag{1.15}$$

mientras que la tasa de salida hacia un estado en particular será

$$\lim_{t \to 0} \frac{P_{i,j}(t)}{t} = a_i \rho_{i,j} = a_{i,j} \tag{1.16}$$

Lo que conduce a las igualdades $P_{i,j}(0,dt) = a_{i,j}\,dt$ y $P_{i,i}(0,dt) = 1 - a_i\,dt$ ( suprimiendo el término de error ), y en consecuencia

$$\sum_{\forall j \neq i} a_{i,j} = \sum_{\forall j \neq i} a_i \rho_{i,j} = a_i = -a_{i,i}.$$

A continuación se enunciarán las ecuaciones diferenciales que darán por solución las probabilidades de transición (tanto para procesos homogéneos como no homogéneos), dichas ecuaciones son

$$D_1\, P_{i,j}(x, x+t) = -a_{i,i}(x+t)\, P_{i,j}(x, x+t) - \sum_{\forall k \neq i} a_{i,k}(x+t) P_{k,j}(x, x+t) \tag{1.17}$$

y

$$D_2\, P_{i,j}(x, x+t) = \sum_{\forall k \neq j} P_{i,k}(x, x+t) a_{k,j}(x+t) + P_{i,j}(x, x+t) a_{j,j}(x+t) \;. \tag{1.18}$$

Las expresiones (1.17 ) y ( 1.18 ) son conocidas como las *ecuaciones de Kolmogorov hacia atrás y hacia adelante* respectivamente. El origen de estas ecuaciones se debe a la forma en que se realiza la diferenciación de $P_{i,j}(x, x+t)$, es decir a partir de la variable respecto a la cual se deriva (instante o duración), esto se mostrará en el capítulo siguiente en un contexto más actuarial.

## 1.5. Semimartingalas e integración estocástica

Tanto para el desarrollo como para la explicación de los conceptos que dan nombre a esta sección, será necesario empezar por enunciar una serie de definciones y teoremas, no sin antes recordar que un proceso puede ser visto como una familia de funciones de tiempo , correspondiendo cada una de ellas un resultado del espacio de estados.

***Continuidad estocástica.***

Si para todas las rutas muestrales asociadas a un resultado del espacio de estados con probabilidad mayor de cero ocurre que

$$\lim_{h \to 0} X(t+h) = X(t),$$

se dice entonces que el proceso $X(t)$ es continuo.

***Diferenciación estocástica.***

Si para cada función de tiempo de un proceso estocástico $X(t)$, existe

$$X'(t) = \frac{dX(t)}{dt} = \lim_{h \to 0} \frac{X(t+h) - X(t)}{h},$$

entonces la derivada del proceso estocástico $X(t)$ existirá.

***Proceso Càdlàg ( "Continu à droite, limites à gauche ").***

Un proceso estocástico $X(t)$ caracterizado por satisfacer que

$$\lim_{h \to 0} X(t+h,\varsigma) = X(t,\varsigma) \qquad \text{(es continuo a la derecha)}$$

y

$$\lim_{h \to 0} X(t-h,\varsigma) = X(t_-,\varsigma) \qquad \text{(es limitado a la izquierda)}$$

siendo $t_-$ un valor que tiende a $t$ pero que es menor que $t$, se dirá que es elemento del espacio **D** y se le conocerá como un proceso càdlàg (abreviación del francés cuyo significado es continuo a la derecha y limitado a la izquierda) .

***Proceso Càglàd ( "Continu à gauche, limites à droite " ).***

Un proceso estocástico $X(t)$ caracterizado por satisfacer que

$$\lim_{h \to 0} X(t-h,\varsigma) = X(t,\varsigma) \qquad \text{(es continuo a la izquierda)}$$

y

$$\lim_{h \to 0^+} X(t+h,\varsigma) = X(t_+,\varsigma) \qquad \text{(es limitado a la derecha),}$$

siendo $t_+$ un valor que tiende a $t$ pero que es mayor que $t$, se dirá que es elemento del espacio **L** y se le conocerá como un proceso càglàd (en español significa continuo a la izquierda y limitado por la derecha).

***Proceso detenido.***

Sea $X$ un proceso estocástico y $T$ una variable aleatoria, $X^T$ será un proceso detenido en $T$ si

$$X^T = \begin{cases} X_t & t < T \\ X_T & t \geq T \end{cases}$$

***Proceso creciente.***

Sea $A = (A_t)_{t \geq 0}$ un proceso càdlàg. Si las rutas de $A: t \rightarrow A_t(\varsigma)$ son no decrecientes para todos los $\varsigma$ con probabilidad mayor de cero, entonces $A$ será un proceso creciente

***Proceso de variación limitada.***

Un proceso $A$ recibirá este nombre si para todas sus rutas con probabilidad no nula, la función definida sobre cualquier intervalo de tiempo $[a,b]$

$$V_{[a,b]}(\varsigma) = \sup_{\pi \in \Pi} \sum_{t_i \in \pi} \left| A_{t_{i+1}} - A_{t_i} \right|$$

es finita, siendo $\Pi$ el conjunto formado por todas las particiones posibles del intervalo.

***El cambio de variable y la integral de Stieltjes.***

Sea $A$ un proceso creciente, si se toma un resultado $\varsigma$ en particular del espacio de estados, tal que $\eta \mapsto A_\eta(\varsigma)$ es continuo a la derecha se podrá obtener la integral

$$\int_0^t f(\eta)\, dA_\eta(\varsigma) = I(t,\varsigma)$$

siempre que $f$ sea una función acotada. Aqui $I(t,\varsigma)$ es una variable aleatoria, ya que está en función del espacio de estados. Ahora bien, si $A$ es un proceso de variación limitada y se sustituye $f$ por $H$, siendo $H$ un proceso para el que $\eta \mapsto H(\eta,\varsigma)$ es continuo, entonces se dirá que $\int_0^t H(\eta)dA_\eta$ es una integral de Riemman-Stieltjes, la cual podrá ser obtenida a partir de la sucesión de particiones $\pi_n$ del intervalo $[\,0,\, t\,]$, por medio de la suma

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{T_k, T_{k+1} \in \pi_n} H_{S_k}(A_{T_{k+1}} - A_{T_k}) = \int_0^t H(\eta)dA_\eta\,, \quad \text{donde } T_k \leq S_k \leq T_{k+1}\,.$$

Esta variable aleatoria en adelante se representara por $I_X(\ )$ , de tal forma que el subíndice señalará el proceso estocástico sobre el que se realiza la integración, mientras que el integrando se colocará en el paréntesis.

Para ilustrar se empezará por definir un proceso $H$ como *simple predecible* si se puede representar como

$$H_t = H_0 I_{\{0\}}(t) + \sum_{i=1}^{n} H_i I_{(T_i, T_{i+1}]}(t),$$

donde

$$0 = T_1 \leq \cdots \leq T_{k+1} < \infty$$

y $I_A$ es una función indicador para la cual

$$I_A(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t \in A \\ 0 & \text{si} \quad t \notin A \end{cases}.$$

Por lo que $I_X(H)$ estará dada por

$$I_X(H) = H_0 X_0 + \sum_{i=1}^{n} H_i \left[ X_{T_{i+1}} - X_{T_i} \right].$$

El espacio formado por todos los procesos simples predecibles se denotará por $\mathbf{S}$ , $\mathbf{S_u}$ será el espacio formado por todos los procesos a los que se converge uniformemente por medio de una sucesión de procesos y $\mathbf{L}^0$ el espacio de variables aleatorias con la topologia de convergencia en probabilidad.

***Semimartingala total.***

Un proceso recibirá tal nombre si es càdlàg, adaptado ( véase apéndice II) y si $I_X : \mathbf{S} \to \mathbf{L}^0$ es continuo.

***Semimartingala.***

Se le conocerá a un proceso $X$ con tal nombre si para cada $t \in [0, \infty)$ , $X^t$ es una semimartingala total .

***Definición.***

Se entenderá por $J_X(H)$ la integral estocástica de $H$ con respecto a $X$, teniendo como notaciones alternas:

$$J_X(H) = H \cdot X = \int H_s d X_s .$$

Si $H \in \mathbf{S}$ y $X$ un proceso càdlàg, se define el mapeo de procesos predecibles hacia procesos $J_X$ por

$$J_X(H) = H_0 X_0 + \sum_{i=1}^{n} H_i\left[X^{T_{i+1}} - X^{T_i}\right],$$

siendo $0 = T_1 \leq \cdots \leq T_{k+1} < \infty$ tiempos de alcance (véase apéndice II).

Por lo anterior como seguramente se habrá notado

$$J_X(H)_t = I_{X^t}(H).$$

Los espacios con convergencia en probabilidad se les representará con el subíndice ucp, e.g. $\mathbf{S}_{ucp}, \mathbf{L}_{ucp}, \mathbf{D}_{ucp}$ , mientras que como ya se mencionó para **S**, los espacios con convergencia uniforme se les representará con el subíndice u.

***Teorema.***

**$\mathbf{S}_{ucp}$ es denso en $\mathbf{L}_{ucp}$ .**

*Prueba.*

Sea $Y \in \mathbf{L}$, $R_n = \inf\{t \ |Y_t| > n\}$ un tiempo de alcance y $Y^n = Y^{R_n} 1_{\{R_n > 0\}}$ una sucesión de procesos estocásticos en **bL** (espacio formado por los procesos acotados, continuos a la izquierda y limitados a la derecha) que converge a Y en ucp, lo que implica que es denso en **L**, por lo que para esta demostración se deberá hacer que una sucesión de procesos de **S**, converja en probabilidad a un proceso $Y$ que sea elemento de **bL**. Para este fin se definen :

( a ) $Z$ por $Z_t = \lim_{\substack{u \to t \\ u > t}} Y_u$ por lo que $Z \in \mathbf{D}$.

( b ) $T_0^\varepsilon = 0$.

( c ) $T_{n+1}^\varepsilon = \inf\left\{t : t > T_n^\varepsilon \text{ y } \left|Z_t - Z_{T_n^\varepsilon}\right| > \varepsilon\right\}$,
por lo que conforme $n$ crece $T_n^\varepsilon$ tendera a $\infty$.

( d ) $Z^\varepsilon = \sum_{i=1}^{n} Z_{T_n^\varepsilon} I_{(T_i, T_{i+1}]}(t)$ para $\varepsilon > 0$,

que converge uniformemente a $Z$ conforme $\varepsilon$ tiende a $0$.

Tomando en cuenta que $Y = Y_0 I_{\{0\}} + Z_-$ se podrá elaborar

$$Y^{n,\varepsilon} = Y_0 I_{\{0\}} \sum_{i=1}^{n} Z_{T_n^\varepsilon} I_{(T_i^\varepsilon \wedge n, T_{i+1}^\varepsilon \wedge n]}(t),$$

donde $t_{\varepsilon,n}^{*}$ es el mínimo de ambos, por lo que conforme $n$ crece y épsilon decrece, se tendrá que converge en probabilidad al proceso $Y \in \mathbf{bL}$

***Teorema.***

Sea $X$ una semimartingala, entonces el mapeo $J_X : \mathbf{S}_{ucp} \rightarrow \mathbf{D}_{ucp}$ es continuo.

*Prueba.*

Para efectuarla se propone una $H^k$ en S que converge uniformemente a 0, para así demostrar que $J_X(H^k)$ converge en probabilidad a 0.

Sean entonces $\delta > 0$ y $T^k = \inf\{t : |(H^k \cdot X)_t| \geq \delta\}$.

de tal manera que para cada $t$

$$P\left[\sup_{0 \leq s \leq t} |(H^k \cdot X)_s| > \delta\right] \leq P\left[\,|H^k \cdot X_{T^k \wedge t}| \geq \delta\right] = P\left[\,\left|\left(H^k I_{[0,T^k]} \cdot X\right)\right| \geq \delta\right]$$

$$= P\left[\,\left|I_X\left(H^k I_{[0,T^k \wedge t]}\right)\right| \geq \delta\right]$$

siendo esta última para $k$ grande igual a 0 por la definición de semimartingala total, demostrándose así que $J_X : \mathbf{S}_u \rightarrow \mathbf{D}_{ucp}$ es continuo. Partiendo de este hecho se podrá demostrar el teorema de interés, para tal fin por principio de cuentas sean

$\delta > 0$, $\varepsilon > 0$, $\|H\|_u = \sup_{(t,\varsigma)} |\, H(t,\varsigma)\,|$ y $t > 0$.

y la sucesión $H^k$ que converge en probabilidad a 0.

Si $\|H\|_u \leq \eta$ entonces $P\left[\sup_{0 \leq s \leq t} |J_X(H)_s| > \delta\right] \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$

y si además se definen

$$R_k = \inf\{s : |H_s^k| > \eta\}$$

y

$\widetilde{H}^k = H^k I_{[0,R_k]}$, lo cual implica que $\widetilde{H}_k$ pertenece a $S$ $y$ que $\sup_{\substack{(s,\varsigma)\\ 0 \leq s \leq R_k}} |\widetilde{H}| \leq \eta$

se tendrá que

$$P\left[\sup_{0\le s\le t}\left|(H^k\cdot X)_s\right|>\delta\right]\le P\left[\sup_{0\le s\le t}\left|(\bar{H}^k\cdot X)_s\right|>\delta\right]+P\left[R^k<t\right]$$
$$\le\frac{\varepsilon}{2}+P\left[\sup_{0\le s\le t}\left|H_s^k\right|\ge\eta\right]<\varepsilon\,.$$

ya que es claro que $\lim_{k\to\infty} P\left[\sup_{0\le s\le t}\left|H_s^k\right|>\eta\right]=0$ y por consiguiente se demuestra la convergencia en probabilidad de $(H\cdot X)_t$, así como su continuidad.

De los dos últimos teoremas se podrá extender la definición de integral estocástica como sigue.

***Definición.***

Suponiendo que $X$ es una semimartingala, el mapeo lineal continuo $J_X:\mathbf{S}_{ucp}\longrightarrow\mathbf{D}_{ucp}$ obtenido de la extensión de $J_X:\mathbf{S}\longrightarrow\mathbf{D}$ es conocido como *integral estocástica.*

***Definición.***

Se dirá que una sucesión finita $\sigma$ de tiempos de alcance $T_1,\cdots,T_{k+1}$ para la cual se satisface que

$$0=T_1\le\cdots\le T_{k+1}<\infty$$

es una partición aleatoria.

Se dirá además que una sucesión de particiones aleatorias $\sigma_n$, con tiempos de alcance $T_1^n,\cdots,T_{k+1}^n$ tenderá a la identidad si

a ) $\lim_n \sup_k T_k^n=\infty$

b ) $\|\sigma_n\|=\sup\left|T_{k+1}^n-T_k^n\right|$ converge a 0 .

***Teorema.***

Suponiendo que $X$ es una semimartingala, $Y$ un proceso en $\mathbf{D}$ o en $\mathbf{L}$ y $\sigma_n$ una sucesión de particiones aleatorias que tienden a la identidad, entonces el proceso

$$\int_{0+} Y_s^{\sigma_n}\mathrm{d}X_s=\sum_i Y_{T_i^n}\,(X^{T_{i+1}^n}-X^{T_i^n}),$$

tiende a la integral estocástica $(Y_-)\cdot X$ por convergencia en probabilidad.

*Prueba.*

Se demostrará el teorema para el caso en que $Y$ pertenezca a $\mathbf{D}$, ya que con esto quedará probado para el caso en que $Y_-$ pertenece a $\mathbf{L}$. Así asumiendo sin pérdida de generalidad que $X_0 = 0$.

Sea entonces $Y^k$ un elemento de $\mathbf{S}$ tal que $Y^k$ converge en probabilidad a $Y$, entonces

$$\int (Y - Y^{\sigma_n})_s dX_s = \int (Y - Y^k)_s dX_s + \int (Y^k - (Y_\cdot^k)^{\sigma_n})_s dX_s + \int ((Y_\cdot^k)^{\sigma_n} - Y^{\sigma_n})_s dX_s$$

donde $Y_\cdot^k$ denota la versión càdlàg de $Y^k$.

Para el primer término del lado derecho puesto que $J_X$ es continuo sobre $\mathbf{L}_{ucp}$ y ya que $Y - Y^k \rightarrow 0$ se tendrá que dicho término converge en probabilidad a cero. Para el tercer término tomando fijo un $n$ conforme $k$ crece, $(Y_\cdot^k)^{\sigma_n} - Y^{\sigma_n}$ convergerá uniformemente a 0, por lo que como ya se vio, este término convergerá en probabilidad a cero. Finalmente para el término central, dado que $Y^k$ pertenece a $\mathbf{S}$, se podrá dejar un $k$ fijo, por lo que, si se escoge un $n$ grande se tendrá que este término también tiende a 0.

Por tanto basta con escoger un $k$ suficientemente grande para hacer el primero y el tercer términos iguales a cero y después con $k$ fijo, buscar un $n$ grande de tal forma que el segundo término también sea cero.

***Variación cuadrática de una semimartingala.***

El proceso de variación cuadrática de la semimartingala $X$, denotado por $[X,X]$ se define por

$$[X,X] = X^2 - 2\int X_- dX.$$

Mientras que si $Y$ es también una semimartingala, la covariación cuadrática de $X$ y $Y$ se define por

$$[X,Y] = XY - \int X_- dY - \int Y_- dX.$$

***Teorema.***

Si $\sigma_n$ es una sucesión de particiones aleatorias que tienden a la identidad, entonces bajo la convergencia en probabilidad

$$X_0^2 + \sum_i (X^{T_{i+1}^n} - X^{T_i^n})^2 \rightarrow [X,X].$$

siendo $\sigma_n$ la sucesión $0 = T_0^n \leq \cdots \leq T_{k_n}^n < \infty$, donde $T_i^n$ son tiempos de alcance

*Prueba.*

Debemos probar que cuando la sucesión de particiones aleatorias tienden a la identidad, entonces

$$X_0^2 + \sum_i (X^{T_{i+1}^n} - X^{T_i^n})^2 \quad \rightarrow \quad X^2 - 2\int X\ dX$$

Para ello se define $R_n = \sup_i T_i^n$, por lo que

$$\left(X^2\right)^{R_n} = \sum_i \left\{\left(X^2\right)^{T_{i+1}^n} - \left(X^2\right)^{T_i^n}\right\}$$

y

$$\lim_{n \to \infty} R_n = \infty$$

convergiendo la suma en probabilidad a $X^2$.

Supóngase además que $X_0 = 0$.

Considerando la igualdad

$$(b-a)^2 = b^2 - a^2 - 2a(b-a),$$

se tendrá que

$$\begin{aligned}\sum_i (X^{T_{i+1}^n} - X^{T_i^n})^2 &= \sum_i \left\{(X^{T_{i+1}^n})^2 - (X^{T_i^n})^2 - 2(X^{T_i^n})(X^{T_{i+1}^n} - X^{T_i^n})\right\} \\ &= \sum_i \left\{(X^{T_{i+1}^n})^2 - (X^{T_i^n})^2\right\} - 2\sum_i \left\{(X^{T_i^n})(X^{T_{i+1}^n} - X^{T_i^n})\right\},\end{aligned}$$

por lo que, del teorema anterior y de la convergencia a $X^2$

$$\sum_i (X^{T_{i+1}^n} - X^{T_i^n})^2 = X^2 - 2\int X\ dX.$$

Análogamente, para el proceso de covariación cuadrática , la expresión

$$X_0 Y_0 + \sum_i \left\{(X^{T_{i+1}^n} - X^{T_i^n})(Y^{T_{i+1}^n} - Y^{T_i^n})\right\} \quad \rightarrow \quad [X,Y]$$

lo cual se puede demostrar fácilmente siguiendo las ideas de la prueba anterior.

***Definición.***

Para una semimartingala $X$, el proceso $[X,X]^c$ denota la parte continua de $[X,X]$, de tal forma que

$$[X,X]_t=[X,X]_t^c+X_0^2+\sum_{0<s\le t}\Delta X_s^2 ,$$

donde $\Delta X_s$ es el tamaño del brinco al momento s; es decir $\Delta X_s = X_s - X_{s-}$ .

## 1.6. Fórmula de Itô

***Teorema del cambio de variable o fórmula de Itô***.

Sea $X$ una semimartingala y $f$ una función real de clase $C^2$. Entonces $f(X)$ es nuevamente una semimartingala y la siguiente fórmula es válida :

$$f(X_t)-f(X_0)=\int_{0+}^{t} f'(X_{s-})dX_s+\frac{1}{2}\int_{0+}^{t} f''(X_{s-})d[X,X]_s^c+\sum_{s\le t}\{f(X_s)-f(X_{s-})-f'(X_{s-})\Delta X_s\}$$

*Prueba.*

En la sección anterior se vio que

$$[X,X]_t=[X,X]_t^c+X_0^2+\sum_{0<s\le t}\Delta X_s^2$$

lo que implica la igualdad

$$\frac{1}{2}\int_{0+}^{t} f''(X_{s-})d[X,X]_t^c=\frac{1}{2}\left[\int_{0+}^{t} f''(X_{s-})d[X,X]_s-\sum_{0<s\le t} f''(X_{s-})\Delta X_s^2\right],$$

con la cual se puede reservar el teorema a demostrar como

$$f(X_t)-f(X_0)=\int_{0+}^{t} f'(X_{s-})dX_s+\frac{1}{2}\int_{0+}^{t} f''(X_{s-})d[X,X]_s+$$

$$+\sum_{s\le t}\left\{f(X_s)-f(X_{s-})-f'(X_{s-})\Delta X_s-\frac{f''(X_{s-})\Delta X_s^2}{2}\right\}.$$

Ahora bien dada una $\varepsilon>0$ y una $t>0$, se definen los siguientes dos conjuntos excluyentes :

- $A=A(\varepsilon,t)$ el conjunto de brincos significativos de $X$ que se dan en un número finito de veces hasta el momento $t$.

- $B = B(\varepsilon, t)$ el conjunto de brincos que cumplen $\sum_{s \in B} \Delta X_s^2 \leq \varepsilon^2$.

Por lo que se podrá escribir

$$\begin{aligned} f(X_t) - f(X_0) &= \sum_{i \geq 1}\{f(X_{T_{i+1}^n}) - f(X_{T_i^n})\} \\ &= \sum_{i \geq 1} 1_{A \cap (T_i^n, T_{i+1}^n] \neq \emptyset}\{f(X_{T_{i+1}^n}) - f(X_{T_i^n})\} + \sum_{i \geq 1} 1_{B \cap (T_i^n, T_{i+1}^n] \neq \emptyset}\{f(X_{T_{i+1}^n}) - f(X_{T_i^n})\}. \end{aligned} \tag{1. 19}$$

En adelante, para utilizar una notación más simple se entenderá $\sum_{i,A}$ por $\sum_i 1_{A \cap (T_i^n, T_{i+1}^n] \neq \emptyset}$.
Si ahora se utiliza la fórmula de Taylor en (1.19) se tendrá que

$$\begin{aligned} \sum_{i,B}\{f(X_{T_{i+1}^n}) - f(X_{T_i^n})\} &= \sum_i f'(X_{T_i^n})\left(X_{T_{i+1}^n} - X_{T_i^n}\right) + \frac{1}{2}\sum_i f''(X_{T_i^n})\left(X_{T_{i+1}^n} - X_{T_i^n}\right)^2 - \\ &- \sum_{i,A} f'(X_{T_i^n})\left(X_{T_{i+1}^n} - X_{T_i^n}\right) - \frac{1}{2}\sum_{i,A} f''(X_{T_i^n})\left(X_{T_{i+1}^n} - X_{T_i^n}\right)^2 + \\ &+ \sum_{i,B} R(X_{T_i^n}, X_{T_{i+1}^n}) \end{aligned}$$

donde por lo visto en teoremas anteriores la primera y la segunda sumas convergen a

$$\int_{0+}^{t} f'(X_{s-})dX_s \qquad \text{y} \qquad \int_{0+}^{t} f''(X_{s-})d[X, X]_s,$$

mientras que la tercera converge a

$$-\sum_{s \in A} f'(X_{s-})\Delta X_s + \frac{1}{2} f''(X_{s-})\Delta X_s^2.$$

Por tanto al sustituir los resultados previos en (1. 19) se tendrá que

$$\begin{aligned} f(X_t) - f(X_0) = & \int_{0+}^{t} f'(X_{s-})dX_s + \frac{1}{2}\int_{0+}^{t} f''(X_{s-})d[X, X]_s - \\ & - \sum_{s \in A}\left\{f(X_s) - f(X_{s-}) + f'(X_{s-})\Delta X_s + \frac{f''(X_{s-})\Delta X_s^2}{2}\right\} \\ & + \sum_{i,B} R(X_{T_i^n}, X_{T_{i+1}^n}). \end{aligned}$$

Y si se considera que para el residuo de la serie de Taylor

$$R(X_{T_i'}, X_{T_{i+1}'}) \leq r\left(\left|X_{T_i'} - X_{T_{i+1}'}\right|\right)\left(X_{T_i'} - X_{T_{i+1}'}\right)^2,$$

así como la continuidad a la derecha de $X$ se tendrá para la suma de residuos de la última igualdad cuando $\varepsilon$ tiende a cero que

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{t,R} R(X_{T_i'}, X_{T_{i+1}'}) \leq r(\varepsilon +)[X, X]_t = 0,$$

es decir la suma de los residuos converge a cero, mientras que para la primera suma

$$\sum_{s \leq t} f(X_s) - f(X_{s-}) + f'(X_{s-})\Delta X_s + \frac{f''(X_{s-})\Delta X_s^2}{2}$$

hay que demostrar que converge absolutamente. Por la desigualdad del triángulo dicha suma es menor o igual que

$$\sum_{s \leq t} \left|f(X_s) - f(X_{s-}) + f'(X_{s-})\Delta X_s\right| + \sum_{s \leq t}\left|\frac{f''(X_{s-})\Delta X_s^2}{2}\right|,$$

siendo a la vez

$$\sum_{0 < s \leq t} \left|f(X_s) - f(X_{s-}) + f'(X_{s-})\Delta X_s\right| \leq c \sum_{0 < s \leq t} \Delta X_s^2 \leq c[X, X]_t < \infty$$

y

$$\sum_{0 < s \leq t} \left|f''(X_{s-})\right|\Delta X_s^2 \leq d \sum_{0 < s \leq t} \Delta X_s^2 \leq d[X, X]_t < \infty.$$

Por lo que la serie es absolutamente convergente y la regla de Itô es válida.

Mención aparte merece el caso en el cual $f: R^m \to R$, es decir cuando $f$ es una función real de un vector $m$-dimensional cuyos elementos son semimartingalas de variación finita y es de clase $C^1$ y cuya versión general de la regla de Itô en su forma diferencial es

$$df(X_t) = f(X_0) + \sum_i \frac{\partial f(X_t)}{\partial X_t^{(i)}} d\overline{X_t^{(i)}} + f(X_t) - f(X_{t-}). \tag{1.20}$$

Se enuncia éste porque será empleado en el capítulo cuarto.

***Martingala***

Un proceso estocástico $X(t)$ es una martingala si

$$\mathrm{E}\left[X_t \mid X_s = x_s\right] = x_s \qquad \text{con} \quad s < t.$$

## 1.7. Conclusiones

Tanto las cadenas de Markov como los conceptos derivados de éllas son empleados con el objeto de modelar fenómenos dotados con ciertas caracteristicas y que fueron especificadas en este capitulo.

En cuanto a la integración estocástica se puede concluir que ésta se diferencia de la semimartingala en que mapea procesos en procesos, mientras que la semimartingala mapea procesos en variables aleatorias.

Finalmente sobre la diferencial total de una función de semimartingalas $X^{(i)}$, la cual está dada por la regla de Itô se debe observar que cuando para toda $i$, $X^{(i)}$ es una función deterministica y diferenciable se reduce a ser simplemente la regla de la cadena del cálculo vectorial.

# Capítulo 2

# EXTENSIÓN DE CONCEPTOS ACTUARIALES UTILIZANDO CADENAS DE MARKOV

## 2.1. Introducción

Para toda persona que haya tenido la oportunidad de penetrar en el cálculo actuarial no deben de resultarle extraños conceptos como fuerza de mortalidad, función de densidad de probabilidades, decrementos múltiples y otros más. Estos conceptos se extenderán al modelo de estados múltiples que se manejará en este trabajo, pudiéndose observar que son un caso particular de éste. Tal modelo se apegará a las cadenas de Markov como consecuencia de que las probabilidades solo dependerán del estado en el que se encuentre el proceso al momento de valuarlas, con lo que se obtendrá algo más próximo a la realidad en relación a lo obtenido con los decrementos múltiples, ya que este último se limita a estudiar la causa que provocará la irremediable salida de un individuo del grupo considerado, sin considerar los posibles eventos de regresar al estado original o moverse hacia otro estado.

Incluso si se compara el modelo de estados múltiples con el de decrementos secundarios se le podrá calificar al primero como superior, ya que aún cuando el segundo toma en cuenta los eventos que pueden suceder tras el primer cambio de estado, se encuentra bastante limitado y es poco flexible.

Cabe hacer mención que no se analizará la naturaleza de cada uno de los estados del modelo solo se fijará la atención en la descripción general de éste.

## 2.2. Ecuaciones de Kolmogorov

El modelo de estados múltiples que se manejará es desde luego un proceso estocástico con espacio de estados discreto, cuyos elementos serán $n$ posibles situaciones por las que una persona puede pasar, pudiéndose establecerse estas situaciones según las necesidades del estudio que se realice, por lo que para efectos prácticos y de generalización se considerará al espacio de estados como el conjunto $\Sigma = \{1, 2, \ldots, n\}$, donde cada elemento de este conjunto corresponde a una de las $n$ situaciones bajo observación, mientras que su espacio parametral será $T = \{t : t \in [0, \omega]\}$. Si además se asume que el proceso satisface la propiedad de Markov, se tendrá entonces que tal proceso es una cadena de Markov, razón por la cual se podrán utilizar los conceptos, que fueron estudiadas en el capítulo precedente.

Luego entonces para el modelo de estados múltiples, la matriz de transición quedará como

$$\mathbf{P}\left[x+t\middle|x\right]=\begin{pmatrix} p_{1,1}(x,x+t) & p_{1,2}(x,x+t) & \cdots & p_{1,n}(x,x+t) \\ p_{2,1}(x,x+t) & p_{2,2}(x,x+t) & \cdots & p_{2,n}(x,x+t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n,1}(x,x+t) & p_{n,2}(x,x+t) & \cdots & p_{n,n}(x,x+t) \end{pmatrix}$$

donde $p_{i,j}(x,x+t)$ denota a la probabilidad de que $(x)$ que se encuentre en el estado $i$, esté a la edad $x+t$ en el estado $j$.

A continuación se define

$$\mathbf{C}(x+t)\Delta t+0(\Delta t)$$

como la matriz diagonal que representa la probabilidad de cambiar de estado en un intervalo de longitud $\Delta t$, siendo $0(\Delta t)$ una cantidad para la que

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{0(\Delta t)}{\Delta t}=0\,;$$

y la matriz

$$\mathbf{S}(x+t)$$

como la matriz de la distribución condicional asintótica dado que $(x+t)$ abandonará su estado antes de alcanzar la edad $x+t+\Delta t$.

Si se parte de la ecuación de Chapman Kolmogorov

$$\mathbf{P}(x+t+\Delta t|x)=\mathbf{P}(x+t|x)\mathbf{P}(x+t+\Delta t|x+t)$$

al sustituir las matrices antes definidas, se tendra que

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left[x+t+\Delta t\middle|x\right]=\mathbf{P}\left[x+t\middle|\,x\right]&\left[\mathbf{I}-\mathbf{C}(\mathbf{x}+\mathbf{t})\Delta\mathbf{t}\right]+\\ &+\mathbf{P}\left[x+t\middle|\,x\right]\left[\mathbf{C}(\mathbf{x}+\mathbf{t})\Delta\mathbf{t}\mathbf{S}(\mathbf{x}+\mathbf{t})\right]+0(\Delta t).\end{aligned} \qquad (2.1)$$

Como seguramente se habrá notado, $\left[\mathbf{I}-\mathbf{C}(x+t)\Delta t\right]$ es la matriz diagonal complemento de la matriz $\mathbf{C}(x+t)\Delta t$, es decir denota la probabilidad de no cambiar de estado en el intervalo $\left[x+t,x+t+\Delta t\right]$, mientras que $\mathbf{C}(x+t)\Delta\mathbf{t}\mathbf{S}(x+t)$ es la matriz que contiene las probabilidades de cambiar de un estado hacia otro en el intervalo continuo de edades $\left[x+t,x+t+\Delta t\right]$.

Con todo lo expuesto anteriormente es momento de fijar la atención hacia el objetivo de esta sección, es decir las ecuaciones de Kolmogorov , por lo que partiendo de la definición de derivada

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{P}\left[x+t|x\right] = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{P}\left[x+t+\Delta t|x\right]-\mathbf{P}\left[x+t|x\right]}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{P}\left[x+t|x\right]\left[\mathbf{P}\left[x+t+\Delta t|x+t\right]-\mathbf{I}\right]}{\Delta t}$$

y sustituyendo la ecuación ( 2. 1 )

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{P}\left[x+t|x\right] = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{P}\left[x+t|x\right]\left[\mathbf{I}-\mathbf{C}(x+t)\Delta t+\mathbf{C}(x+t)\Delta t\mathbf{S}(x+t)-\mathbf{I}\right]}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{P}\left[x+t|x\right]\left[-\mathbf{C}(x+t)\Delta t+\mathbf{C}(x+t)\Delta t\mathbf{S}(x+t)\right]}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{P}\left[x+t|x\right]\left[\mathbf{C}(x+t)\Delta t\{\mathbf{S}(x+t)-\mathbf{I}\}\right]}{\Delta t}$$

$$= \mathbf{P}\left[x+t|x\right] * \mathbf{C}(x+t) * \{\mathbf{S}(x+t)-\mathbf{I}\}.$$

Se propondrá a continuación una $\mathbf{R}(x+t)$ tal que $\mathbf{C}(x+t) * \{\mathbf{S}(x+t)-\mathbf{I}\} = \mathbf{R}(x+t)$, de tal suerte que

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{P}\left[x+t|x\right] = \mathbf{P}\left[x+t|x\right] * \mathbf{R}(x+t). \qquad (2.2)$$

Esto se podrá visualizar aún mejor si es hecho para un elemento en particular de la matriz $\mathbf{P}\left[x+t+\Delta t|x\right]$, es decir, $\{\mathbf{P}\left[x+t+\Delta t|x\right]\}_{i,j}$, que representa la probabilidad de que *(x)* que se encuentra en el estado $i$ se encuentre en el $j$ a la edad $x+t+\Delta t$

$$\{\mathbf{P}\left[x+t+\Delta t|x\right]\}_{i,j} = \left\{\mathbf{P}\left[x+t|x\right]\right\}_{i,j} * \left[1-\left\{\mathbf{C}(x+t)_{j,j}\Delta t\right\}\right] +$$

$$+\sum_{w=1}^{n} \mathbf{P}[x+t|x]_{i,w} * \Delta t * \mathbf{C}(x+t)_{w,w} * \mathbf{S}(x+t)_{w,j} + O(\Delta t)$$

quedando la derivada como

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\{\mathbf{P}[x+t|x]\}_{i,j} &= \sum_{w=1}^{n}\{\mathbf{P}[x+t|x]\}_{i,w} * \{\mathbf{R}(x+t)\}_{w,j}\\ &= \sum_{w=1}^{n}\{\mathbf{P}[x+t|x]\}_{i,w} * \{\mathbf{C}(x+t) * (\mathbf{S}(x+t) - \mathbf{I})\}_{w,j}\\ &= \sum_{w=1}^{n}\{\mathbf{P}[x+t|x]\}_{i,w} * \left\{\sum_{v=1}^{n}\mathbf{C}(x+t)_{w,v} * (\mathbf{S}(x+t) - \mathbf{I})_{v,j}\right\}.\end{aligned}$$

Si se recuerda la naturaleza de la matriz $\mathbf{C}(x+t)$, ésta solamente tiene elementos diferentes de cero en la diagonal principal, lo que la última ecuación se puede expresar en la forma

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\{\mathbf{P}[x+t|x]\}_{i,j} &= \sum_{w=1}^{n}\{\mathbf{P}[x+t|x]\}_{i,w} * \left\{\mathbf{C}(x+t)_{w,w} * (\mathbf{S}(x+t) - \mathbf{I})_{w,j}\right\}\\ &= \sum_{w=1}^{n}\{\mathbf{P}[x+t|x]\}_{i,w} * \left\{\mathbf{C}(x+t)_{w,w} * \left(\mathbf{S}(x+t)_{w,j} - \delta_{w,j}\right)\right\}\end{aligned}$$

Para un manejo más claro, se separará la suma como

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\{\mathbf{P}[x+t|x]\}_{i,j} &= \sum_{\substack{w=1\\ w\neq j}}^{n}\{\mathbf{P}[x+t|x]\}_{i,w} * \mathbf{C}(x+t)_{w,w} * \left(\mathbf{S}(x+t)_{w,j}\right) +\\ &+ \{\mathbf{P}[x+t|x]\}_{i,j} * \mathbf{C}(x+t)_{j,j} * \left(\mathbf{S}(x+t)_{j,j} - 1\right).\end{aligned} \tag{2.3}$$

Se detendrá un poco el desarrollo de estas ecuaciones para interpretar lo que representan $\mathbf{C}(x+t)$ y $\mathbf{S}(x+t)$. Se recordará que en el principio de esta sección se explicó que la matriz diagonal $\mathbf{C}(x+t)$ representaba la tasa de cambio de estado basada en el impacto causado al momento de alcanzar la edad $x+t$. Esto desde luego, deberá a cualquier actuario o persona vinculada al estudio de la demografía traerle a la mente el concepto de fuerza de mortalidad, por lo que se puede afirmar que la matriz $\mathbf{C}(x+t)$ tiene en cada de sus elementos diferentes de cero la fuerza de transición de un estado en particular hacia cualquiera diferente de él. Los elementos de la matriz no nulos serán denotados por

$$\mu_{x+t}^{(i,\neg i)}$$

Algo similar sucede con la matriz $\mathbf{S}(x+t)$, la cual está formada por las tasas de que, dado que va a realizarse un cambio, éste sea hacia un estado en particular (el estado relacionado con la columna en la que se encuentra el elemento), estas tasas tienen su origen en el impacto producido por los cambios de estado al alcanzar la edad $x+t$. Por lo anterior el $i,j$- ésimo elemento de la matriz $\mathbf{S}(x+t)$ es

$$\frac{\mu_{x+t}^{(i,j)}}{\mu_{x+t}^{(i,S-i)}} \qquad \text{si } i \neq j.$$

o

$$0 \qquad \text{en otro caso.}$$

En la sección 2.3 de este capítulo se analizarán en forma más detallada estos conceptos. Retomando la ecuación ( 2.3 ) y sustituyendo las ideas manejadas sobre tasas de transición se tendrá

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\mathbf{P}\left[x+t\middle|x\right]\right\}_{i,j} = \sum_{\substack{w=1\\ w\neq j}}^{n}\left\{\mathbf{P}\left[x+t\middle|x\right]\right\}_{i,w} * \mu_{x+t}^{(w,S-w)} * \frac{\mu_{x+t}^{(w,j)}}{\mu_{x+t}^{(w,S-w)}} +$$

$$+ \left\{\mathbf{P}\left[x+t\middle|x\right]\right\}_{i,j} * \mu_{x+t}^{(j,S-j)} * (0-1)$$

$$= \sum_{\substack{w=1\\ w\neq j}}^{n}\left\{\mathbf{P}\left[x+t\middle|x\right]\right\}_{i,w} * \mu_{x+t}^{(w,j)} - \left\{\mathbf{P}\left[x+t\middle|x\right]\right\}_{i,j} * \mu_{x+t}^{(j,S-j)} . \qquad (2.4)$$

Esta última expresión es la ya conocida ecuación de Kolmogorov hacia adelante.

También se podrá obtener la ecuación de Kolmogorov hacia atrás calculando la derivada parcial de $\mathbf{P}\left[x+t\middle|x\right]$ respecto a $x$

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{P}\left[x+t\middle|x\right] = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\mathbf{P}\left[x+t\middle|x\right]-\mathbf{P}\left[x+t\middle|x-\Delta x\right]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\mathbf{P}\left[x+t\middle|x\right]-\mathbf{P}\left[x\middle|x-\Delta x\right]*\mathbf{P}\left[x+t\middle|x\right]}{\Delta x}. \qquad (2.5)$$

por lo que al considerar que

$$\mathbf{P}\left[x\middle|x-\Delta x\right] = \mathbf{I}-\mathbf{C}(x-\Delta x)\Delta x+\mathbf{C}(x-\Delta x)\mathbf{S}(x-\Delta x)\Delta x$$

la ecuación ( 2.5 ) queda como

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{P}\left[x+t|x\right] = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\mathbf{P}\left[x+t|x\right]-\left[\mathbf{I}-\mathbf{C}(x-\Delta x)\Delta x+\mathbf{C}(x-\Delta x)\mathbf{S}(x-\Delta x)\Delta x\right]*\mathbf{P}\left[x+t|x\right]}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}-\frac{\left[-\mathbf{C}(x-\Delta x)\Delta x+\mathbf{C}(x-\Delta x)\Delta x\mathbf{S}(x-\Delta x)\right]*\mathbf{P}\left[x+t|x\right]}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}-\frac{\left[\mathbf{C}(x-\Delta x)\Delta x\{\mathbf{S}(x-\Delta x)-\mathbf{I}\}*\right]\mathbf{P}\left[x+t|x\right]}{\Delta x}$$

$$=-\mathbf{C}(x)*\{\mathbf{S}(x)-\mathbf{I}\}*\mathbf{P}\left[x+t|x\right].$$

En términos de la matriz $\mathbf{R}(\ )$ definida para construir la ecuación ( 2.2 ), la última expresión será

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{P}\left[x+t|x\right] = -\mathbf{R}(x)*\mathbf{P}\left[(x+t|x)\right], \tag{2.6}$$

y obviamente, para el $i,j$-ésimo elemento

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{P}\left[x+t|x\right]_{i,j} = \sum_{w=1}^{n}\left[-\mathbf{C}(x)\left[\mathbf{S}(x)-\mathbf{I}\right]\right]_{i,w}\left[\mathbf{P}\left[x+t|x\right]\right]_{w,j}$$

$$=\sum_{w=1}^{n}\left[\sum_{v=1}^{n}-\mathbf{C}(x)_{i,v}\left[\mathbf{S}(x)-\mathbf{I}\right]_{v,w}\right]\left[\mathbf{P}\left[x+t|x\right]\right]_{w,j}$$

$$=\sum_{w=1}^{n}\left[\sum_{v=1}^{n}-\mathbf{C}(x)_{i,v}\left[\mathbf{S}(x)_{v,w}-\delta_{v,w}\right]\right]\left[\mathbf{P}\left[x+t|x\right]\right]_{w,j}.$$

Como ya se ha mencionado la matriz $\mathbf{C}(x)$ solo tiene elementos diferentes de cero en la diagonal principal, por consiguiente la igualdad anterior se puede expresar como

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{P}\left[x+t|x\right]_{i,j} = \sum_{w=1}^{n}-\mathbf{C}(x)_{i,i}\left[\mathbf{S}(x)_{i,w}-\delta_{i,w}\right]\left[\mathbf{P}\left[x+t|x\right]\right]_{w,j}.$$

por lo que al separar la suma

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{P}[x+t|x]_{i,j} = \sum_{\substack{m=1\\ m\neq i}}^{n} -\mathbf{C}(x)_{i,i}\left[\mathbf{S}(x)_{i,m}\right]\left[\mathbf{P}[x+t|x]\right]_{m,j} - \mathbf{C}(x)_{i,i}\left[\mathbf{S}(x)_{i,i}-1\right]\left[\mathbf{P}[x+t|x]\right]_{i,j},$$

y por la sustitución de las tasas en términos actuariales se tendrá

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{P}[x+t|x]_{i,j} = \sum_{\substack{m=1\\ m\neq i}}^{n} -\mu_x^{(i,S_i)}\left[\frac{\mu_x^{(i,m)}}{\mu_x^{(i,S_i)}}\right]\left[\mathbf{P}[x+t|x]\right]_{m,j} - \mu_x^{(i,S_i)}\left[0-1\right]\left[\mathbf{P}[x+t|x]\right]_{i,j}$$

$$= \sum_{\substack{m=1\\ m\neq i}}^{n} -\mu_x^{(i,m)}\left[\mathbf{P}[x+t|x]\right]_{m,j} + \mu_x^{(i,S_i)}\left[\mathbf{P}[x+t|x]\right]_{i,j}$$

$$= -\left[\sum_{\substack{m=1\\ m\neq i}}^{n} \mu_x^{(i,m)}\left[\mathbf{P}[x+t|x]\right]_{m,j} - \mu_x^{(i,S_i)}\left[\mathbf{P}[x+t|x]\right]_{i,j}\right]. \qquad (2.7)$$

### 2.3. Función de densidad de probabilidades

Las ecuaciones de Kolmogorov pueden resolverse con la finalidad de obtener la función de densidad de probabilidad inherente a cada posible cambio de estado, esto es del estado $i$ hacia el estado $j$ La solución de estas ecuaciones diferenciales deberá traer de regreso a la memoria un concepto de la teoria de decrementos múltiples : la elaboración de un modelo de decremento único asociado a un modelo de decrementos múltiples.

Como seguramente se recordará, la tasa absoluta por el decremento $j$ en el modelo antes citado (se usa el termino tasa en un sentido diferente al utilizado en las sección precedente, con la finalidad de no confundir a esta función con las probabilidades de decremento), se define como

$${}_tq_x^{\prime(j)} = 1-\exp\left\{-\int_0^t \mu_{x+s}^{(j)}ds\right\}$$

$$= 1 - {}_tp_x^{\prime(j)}, \qquad (2.8)$$

y la probabilidad de no abandonar el grupo por cualquier decremento es

$$ {}_tp_x^{(T)} = \exp\left(-\int_0^t \sum_{i=1}^{n} \mu_{x+s}^{(i)} ds\right) $$

$$ = \prod_{i=1}^{n} {}_tp_x^{\prime(i)}, \qquad (2.9) $$

donde T es el conjunto de todos los decrementos y

$$ \sum_{i=1}^{n} \mu_{x+s}^{(i)} $$

la fuerza de decremento.

Mientras que con el modelo de estados múltiples, si se utiliza o la distribución exponencial, para la probabilidad de no cambiar de estado en $t$ unidades de tiempo, o bien, el proceso de Poisson para la probabilidad que no haya cambios de estado en ese mismo intervalo de tiempo (que como ya se explico en el capítulo 1, ambas asignan probabilidades iguales a este evento) se tendrá

$$ P[N(0,t)] = \exp(-\int_0^t \lambda(\xi) d\xi) $$

$$ = \exp(\int_0^t \mu_{x+\xi}^{(j,j)} d\xi) $$

$$ = \exp - \int_0^t \mu_{x+\xi}^{(j,s-j)} d\xi . $$

donde $\mu_{x+\xi}^{(j,s-j)}$ es la fuerza de transición. Se observa de aquí, que las tasas y las probabilidades del modelo de decrementos múltiples (utilizando los parámetros adecuados para ellas) también parten del proceso de Poisson.

Con todos estos elementos y bajo el supuesto de que las demás funciones son conocidas, se puede resolver para $\mathbf{P}[x+t|x]$ la ecuación de Kolmogorov hacia adelante

$$ \frac{\partial}{\partial t}\{\mathbf{P}[x+t|x]\}_{i,j} = \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^{n} \{\mathbf{P}[x+t|x]\}_{i,m} * \mu_{x+t}^{(m,j)} - \{\mathbf{P}[x+t|x]\}_{i,j} * \mu_{x+t}^{(j,s-j)} , $$

o, equivalentemente

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\mathbf{P}\left[x+t|x\right]\right\}_{i,j} + \left\{\mathbf{P}\left[x+t|x\right]\right\}_{i,j} * \mu_{x+t}^{(j,s-j)} = \sum_{\substack{w=1 \\ w \neq j}}^{n} \left\{\mathbf{P}\left[x+t|x\right]\right\}_{i,w} * \mu_{x+t}^{(w,j)} .$$

Esta ecuación es del tipo $y' + g(t)y = h(t)$ que se puede resolver por el método del factor integrante, para lo cual desde luego se deberá calcular dicho factor

$$M(t) = \exp \int^{t} g(\xi) d\xi$$

$$= \exp \int^{t} \mu_{x+\xi}^{(j,s-j)} d\xi ,$$

quedando la solución de la ecuación diferencial en la forma

$$y(t) = \frac{\int_{0}^{t} M(\xi) h(\xi) d\xi + cte}{M(t)} .$$

De esta manera la solución para la ecuación de Kolmogorov, está dada por

$$\left\{\mathbf{P}\left[x+t|x\right]\right\}_{i,j} = \frac{1}{\exp\left(\int^{t} \mu_{x+\xi}^{(j,s-j)} d\xi\right)} \int_{0}^{t} \exp\left(\int^{\eta} \mu_{x+\xi}^{(j,s-j)}\right) d\xi \left( \sum_{\substack{w=1 \\ w \neq j}}^{n} \left\{\mathbf{P}\left[x+\eta|x\right]\right\}_{i,w} * \mu_{x+\eta}^{(w,j)} \right) d\eta + cte \qquad (2.10)$$

Ahora dado que

$$\frac{\exp \int_{0}^{\eta} \mu_{x+\xi}^{(j,s-j)} d\xi}{\exp \int_{0}^{t} \mu_{x+\xi}^{(j,s-j)} d\xi} = \exp\left\{ \int_{0}^{\eta} \mu_{x+\xi}^{(j,s-j)} d\xi - \int_{0}^{t} \mu_{x+\xi}^{(j,s-j)} d\xi \right\}$$

$$= \exp \int_{t}^{\eta} \mu_{x+\xi}^{(j,s-j)} d\xi ,$$

y a la condición inicial

$$\left\{\mathbf{P}\left[x+0|x\right]\right\}_{i,j} = 0 ,$$

la igualdad ( 2.10 ) queda como

$$\left\{\mathbf{P}\left[x+t|x\right]\right\}_{i,j} = \int_{0}^{t} \sum_{\substack{w=1 \\ w \neq j}}^{n} \left\{\mathbf{P}\left[x+\eta|x\right]\right\}_{i,w} * \mu_{x+\eta}^{(w,j)} * \exp\left(-\int_{\eta}^{t} \mu_{x+\xi}^{(j,s-j)} d\xi\right) d\eta .$$

Para la probabilidad de permanecer ininterrumpidamente en el estado $j$ se utilizará la siguiente notación

$$\left\{\mathbf{P}'\left[x+t|x+\eta\right]\right\}_{j,j} = \left[\exp - \int_\eta^t \mu_{x+\xi}^{(j\cdot)} d\xi\right]$$

de manera que al sustituir esto en la igualdad anterior , se tiene que

$$\left\{\mathbf{P}\left[x+t|x\right]\right\}_{i,j} = \int_0^t \left[\sum_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^{n} \left\{\mathbf{P}\left[x+\eta|x\right]\right\}_{i,m} * \mu_{x+\eta}^{(m,j)}\right] \left\{\mathbf{P}'\left[x+t|x+\eta\right]\right\}_{j,j} d\eta, \qquad (2.11)$$

resultado al que se le pueden dar muchos adjetivos calificativos como pueden ser lógico ó sencillamente bonito, ya que considera las probabilidades de que dado que se empezó en el estado $i$ se mueva el individuo hacia cualquier otro estado (excepto el $j$) y en un momento dado dentro del intervalo cambie hacia el estado $j$, para permanecer en él en forma continua hasta el final del periodo. Mientras que para la probabilidad de pasar directamente del estado $i$ hacia el estado $j$ antes de $t$ unidades de tiempo

$$\left\{\mathbf{P}'\left[x+t|x\right]\right\}_{i,j} = \int_0^t \mathbf{P}'\left[x+t|x+\eta\right]_{i,i} \mu_{x+\eta}^{(i,j)} \left\{\mathbf{P}'\left[x+t|x+\eta\right]\right\}_{j,j} d\eta \qquad (2.12)$$

## 2.4. Fuerza de transición

Se ha mencionado e incluso utilizado en las secciones precedentes la fuerza de transición, sin embargo, deliberadamente, no se ha hecho la explicación en forma detallada ni de su esencia ni de sus implicaciones, tal explicación, como se mencionó cuando fueron citados estos conceptos, será desarrollada en esta sección.

La fuerza de transición, es un concepto análogo al de la fuerza de mortalidad, la cual está definida por

$$\mu_x = \frac{P\left[x < T \leq x + dx\right]}{P\left[T > x\right]} = \frac{f(x)}{1 - F(x)} = \frac{1}{{}_x p_0} \frac{d}{dx}\, {}_x q_0 = \lim_{t \to 0} \frac{{}_t q_x}{t},$$

donde el denominador es la función de supervivencia y el numerador la función de densidad de probabilidades para el tiempo que tardará en darse el fallecimiento de la persona de edad $x$. Esta fuerza de mortalidad, es una tasa basada en el impacto de la mortalidad al alcanzar la edad $x$, que indica el negativo de la proporción en que decrece una población en un periodo, por lo que para el modelo de estados múltiples la fuerza de transición es

$$\mu_{x+t}^{(i,j)} = \lim_{t \to 0} \frac{p_{i,j}(x, x+t)}{t}, \qquad (2.13)$$

como $t$ tiende a cero, el periodo entre las edades $x$ y $x+t$ se refiere a un instante, en el cual solo podrá haber a lo más un cambio de estado, por lo que no será necesario considerar movimientos posteriores hacia otros estados.

Finalmente la fuerza de no sufrir transición

$$\mu_{x+t}^{(i,i)} = \lim_{t\to 0}\frac{p_{i,i}(x,x+t)-1}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{1-p_{i,S-i}(x,x+t)-1}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{-\sum\limits_{\forall j\neq i} p_{i,j}(x,x+t)}{t},$$

por tanto, el sustituir ( 2.13 ) en la igualdad anterior conducirá a

$$\mu_{x+t}^{(i,i)} = -\sum_{\substack{m=1\\ m\neq i}}^{n}\mu_{x+t}^{(i,m)} = -\mu_{x+t}^{(i,S-i)}. \qquad (2.14)$$

El resultado obtenido aquí, se deberá tener muy presente en los siguientes capítulos, esto debido a su importancia, la cual ya se hizo manifiesta en las secciones previas.

## 2.5. Conclusiones

Tras haberse encontrado la solución de las ecuaciones de Chapman Kolmogorov se puede afirmar que las funciones de densidad de probabilidades del cálculo actuarial no son más que la función de densidad $f(t)$ de la distribución exponencial teniendo por parámetros la integral del negativo de la tasa a la que se realizan los cambios hasta el instante $t$ y la tasa de cambio en dicho instante $t$.

Solamente resta, para dar por concluido este capítulo, recordar que lo presentado en él ha sido en forma generalizada, de tal modo que será en lo subsecuente sujeto de estudio el restringirlo a ciertas condiciones, necesidades y situaciones particulares.

# Capítulo 3

# SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

## 3.1. Introducción

En el capítulo anterior se presentaron en las expresiones ( 2.2 ) y ( 2.6 ) los sistemas de ecuaciones diferenciales que serán sujeto de estudio, dándose incluso una solución en la expresión ( 2.11 ), la cual, como también ya se explicó, se encuentra limitada por el supuesto de que los demás elementos del sistema deben conocerse de antemano, para así poder obtener por medio de la integración de una función de densidad la solución para el $i,j$-ésimo elemento de la matriz. Sin embargo tal método no es único. En el presente capítulo se proporcionará un método alterno, que conducirá hacia el cálculo de todas las probabilidades de transición de un estado $i$ en particular hacia un estado $j$.

Para la comprensión de este camino serán necesarios al igual que en el capítulo 1, conceptos relacionados con eigenvalores y eigenvectores, con lo que se justifica aún más la inclusión de estos en el apéndice. Cabe hacer mención que se harán supuestos relacionados con la naturaleza de la fuerza de transición, ésta será considerada como: constante, constante a trozos y no constante quedando dividido el capítulo en función de tales supuestos en las secciones: procesos homogéneos y no homogéneos.

## 3.2. Procesos homogéneos

En esta sección se buscará encontrar la solución al sistema de ecuaciones diferenciales mencionado, suponiendo fuerzas constantes de transición, es decir, se trabajará con procesos para los cuales

$$P_{i,j}[x+t|x] = P_{i,j}[y+t|y] = P_{i,j}[t].$$

para todo $x$ y todo $y$ que pertenezcan al espacio paramétrico.

Los procesos con la característica anterior, que ya fueron manejados en el capítulo 1, reciben el nombre de *procesos homogéneos* o *estacionarios*. Como se puede observar, las probabilidades de pasar de un estado hacia otro solamente están en función del tiempo que va a transcurrir, un fenómeno que ejemplifica este tipo de procesos es la muerte accidental originada en un accidente automovilístico, ya que la probabilidad de que una persona de edad 32 muera en el transcurso de un año por la causa antes mencionada es la misma que la de una persona de edad 37 para la misma fatalidad y en el mismo periodo. Para otros fenómenos tal suposición podría resultar poco exacta, pero no se debe descartar, ya que se debe recordar que un modelo tiene por objeto representar la realidad, para así poder estudiarla, siendo el apego a ésta, en algunas ocasiones, una función de la complejidad del modelo.

De esta manera, para procesos homogéneos el cálculo de las probabilidades de transición se reduce a

$$P_{i,j}(t)=\int_0^t \sum_{\forall k\neq j} P_{i,k}(\xi)\mu_{k,j}(\xi)P''_{j,j}(t-\xi)d\xi$$

y para el cambio directo

$$P'_{i,j}(t)=\int_0^t\left[\exp(\int_0^{\xi}\mu_{i,i}(\eta)d\eta)\mu_{i,j}(\xi)\exp(\int_{\xi}^{t}\mu_{j,j}(\eta)d\eta)\right]d\xi$$

Ahora, en virtud de que se están suponiendo fuerzas de transición constantes se tendrá

$$P'_{i,j}(t)=\int_0^t\left[\exp(\mu_{i,i}\int_0^{\xi}d\eta)\mu_{i,j}\exp(\mu_{j,j}\int_{\xi}^{t}d\eta)\right]d\xi$$

$$=\int_0^t\left[\exp(\mu_{i,i}*\xi)\mu_{i,j}\exp(\mu_{j,j}*(t-\xi))\right]d\xi .$$

Al sacar las constantes del operador integral, quedará

$$P'_{i,j}(t)=\mu_{i,j}\exp(\mu_{j,j}*t)\int_0^t\left[\exp((\mu_{i,i}-\mu_{j,j})*\xi)\right]d\xi ,$$

por lo que al resolver esta integral, se obtiene

$$P'_{i,j}(t)=\frac{\mu_{i,j}\exp(\mu_{j,j}*t)}{(\mu_{i,i}-\mu_{j,j})}\left[\exp((\mu_{i,i}-\mu_{j,j})*\xi)\right]_0^t$$

$$=\frac{\mu_{i,j}\exp(\mu_{j,j}*t)}{(\mu_{i,i}-\mu_{j,j})}\left[\exp((\mu_{i,i}-\mu_{j,j})*t)-1\right]$$

$$=\frac{\mu_{i,j}}{(\mu_{i,i}-\mu_{j,j})}\left[\exp(\mu_{i,i}*t)-\exp(\mu_{j,j}*t)\right].$$

Esta última será la expresión que se utilizará para valuar la probabilidad de que una persona que se encuentra en el estado $i$ pase directamente hacia el $j$ en $t$ unidades de tiempo bajo el supuesto de fuerzas de transición constantes.

Seguramente se recordarán las ecuaciones de Kolmogorov hacia adelante y hacia atrás, las cuales se obtienen por medio del cálculo de las derivadas parciales de las probabilidades de transición, mismas que están en términos de la edad inicial y del tiempo que transcurrirá para llegar a la edad final. Dado que en este momento se están estudiando procesos homogéneos y que el cálculo de probabilidades no está en función de la edad inicial, surge una nueva dificultad en cuanto a la ecuación de Kolmogorov hacia atrás. ¿ Existirá ? La respuesta obviamente es negativa ya que no se puede obtener una derivada parcial respecto a una variable que en realidad no lo es (la edad inicial), por lo que solamente se tendrá una derivada , la cual puede ser obtenida por dos caminos diferentes.

Para uno de ellos tenemos,

$$P_{i,j}(t+h) = \sum_{\forall k} P_{i,k}(t) P_{k,j}(h) .$$

Ahora, si $h$ tiende a cero

$$P_{i,j}(t+h) = \sum_{\forall k \neq j} P_{i,k}(t)\mu_{k,j} * h + P_{i,j}(t)(1-\mu_j * h)$$

y por la definición de derivada

$$D\,P_{i,j}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{P_{i,j}(t+h) - P_{i,j}(t)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sum_{\forall k \neq j} P_{i,k}(t)\mu_{k,j} * h + P_{i,j}(t)(1-\mu_j * h) - P_{i,j}(t)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sum_{\forall k \neq j} P_{i,k}(t)\mu_{k,j} * h - P_{i,j}(t)(\mu_j * h)}{h}$$

$$= \sum_{\forall k \neq j} P_{i,k}(t)\mu_{k,j} - P_{i,j}(t)(\mu_j) \quad . \tag{3.1}$$

Mientras que para el segundo camino

$$P_{i,j}(t+h) = \sum_{\forall k} P_{i,k}(h) P_{k,j}(t) ,$$

si $h$ tiende de nueva cuenta a cero resultará

$$P_{i,j}(t+h) = \sum_{\forall k \neq j} \mu_{i,k} P_{k,j}(t) * h + P_{i,j}(t)(1-\mu_i * h)$$

y por la definición de derivada

$$D\,P_{i,j}(t) = \lim_{h\to 0} \frac{P_{i,j}(t+h) - P_{i,j}(t)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sum_{\forall k\neq j} \mu_{i,k} P_{k,j}(t) * h + P_{i,j}(t)(1-\mu_i * h) - P_{i,j}(t)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sum_{\forall k\neq j} \mu_{i,k} P_{k,j}(t) * h - P_{i,j}(t)(\mu_i * h)}{h}$$

$$= \sum_{\forall k\neq j} \mu_{i,k} P_{k,j}(t) - P_{i,j}(t)(\mu_i)$$

$$= \sum_{s=1}^{n} \mu_{i,s} P_{s,j}(t). \qquad (3.2)$$

Luego entonces, de las ecuaciones ( 3.1 ) y ( 3.2 ) se podrá concluir que

$$\sum_{s=1}^{n} P_{i,s}(t)\mu_{s,j} = \sum_{s=1}^{n} \mu_{i,s} P_{s,j}(t),$$

para todo estado $i$ y $j$ del espacio de estados S, sin olvidar que esto es válido solamente bajo el supuesto de homogeneidad.

En notación matricial esta conclusión queda como

$$\frac{d}{dt}\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{Q} = \mathbf{Q}\mathbf{P}(t) \qquad (3.3)$$

Con todo lo que se ha expuesto hasta este punto ya se está en posición de analizar el método alternativo para el cálculo de probabilidades, que como ya se mencionó al principio del capitulo facilitará en gran medida la evaluación de dichas probabilidades.

Supóngase que la matriz **Q** tiene sus $n$ eigenvalores diferentes, entonces existe una matriz no singular **A** tal que la matriz

$$\mathbf{D} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{Q}\mathbf{A}$$

es una matriz diagonal.

Se fijará en este momento por comodidad, una nueva notación, a todo eigenvalor $(\mathbf{D})_{i,i}$ se le representará por $\lambda_i$.

Al sustituir la diagonalización en las ecuaciones de Kolmogorov

$$\frac{d}{dt}\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{A}\mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}. \qquad (3.4)$$

y dado que el producto de la derecha es conmutativo (véase igualdad ( 3.3 )), esta expresión es equivalente a

$$\frac{d}{dt}\mathbf{P}(t) = \mathbf{A}\mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{P}(t). \qquad (3.5)$$

Ahora, haciendo sobre ( 3.4 ) una serie de movimientos matriciales se obtiene

$$\frac{d}{dt}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{P}(t) = \mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{P}(t)$$

o equivalentemente

$$\frac{d}{dt}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{P}(t)\mathbf{A} = \mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{P}(t)\mathbf{A}. \qquad (3.6)$$

De manera semejante para ( 3.5 )

$$\frac{d}{dt}\mathbf{P}(t)\mathbf{A} = \mathbf{P}(t)\mathbf{A}\mathbf{D}$$

igualdad que puede ser llevada a la forma

$$\frac{d}{dt}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{P}(t)\mathbf{A} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{P}(t)\mathbf{A}\mathbf{D}. \qquad (3.7)$$

Con el fin de simplificar un tanto la notación referente a las igualdades anteriores, se define una matriz $\mathbf{\Delta}$ mediante la igualdad

$$\mathbf{\Delta} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{P}(t)\mathbf{A}.$$

Luego entonces en términos de esta matriz $\mathbf{\Lambda}$, de las igualdades ( 3.6 ) y ( 3.7 ) se llegará a

$$\frac{d}{dt}\mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda D} = \mathbf{D\Lambda}.$$

En virtud de que la matriz $\mathbf{D}$ puede poseer elementos diferentes de cero únicamente en la diagonal principal se podrá afirmar que

$$\left(\frac{d}{dt}\mathbf{\Lambda}\right)_{i,j} = (\mathbf{\Lambda})_{i,j}\lambda_j = \lambda_i(\mathbf{\Lambda})_{i,j}.$$

Sin embargo como se recordará, se ha partido del supuesto de que los eigenvalores son todos diferentes, por lo que esta afirmación es cierta solamente si

$$(\mathbf{\Lambda})_{i,j} = 0 \qquad \text{cuando } i \neq j$$

y

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{\Lambda})_{i,i} = \lambda_i(\mathbf{\Lambda})_{i,i} \qquad \text{cuando } i = j.$$

De tal forma que esta última expresión se puede escribir como

$$\frac{1}{(\mathbf{\Lambda})_{i,i}}\frac{d}{dt}(\mathbf{\Lambda})_{i,i} = \lambda_i,$$

de donde se deduce que

$$\mathbf{\Lambda}_{i,i} = \exp(t\lambda_i).$$

Resultado que en notación matricial se escribe como

$$\mathbf{\Lambda} = diag(\exp(t\lambda_1), \exp(t\lambda_2), \ldots, \exp(t\lambda_n)).$$

De esta forma se puede dar ya solución al problema, debido a que ya es conocida la composición de la matriz $\mathbf{\Lambda}$ y la igualdad

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{P}(t)\mathbf{A},$$

por lo que se puede observar fácilmente que la solución es

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{A}\,diag(\exp(t\lambda_1), \exp(t\lambda_2), \ldots, \exp(t\lambda_n))\mathbf{A}^{-1}$$

que constituye por sí misma una expresión bastante conveniente para el cálculo de las probabilidades de transición y deja abierta la puerta al desarrollo de programas de software que tengan el mismo objetivo.

### 3.3. Procesos no homogéneos

El modelo expuesto en la sección anterior (como ya se ha manejado) se encuentra sujeto a restricciones, las cuales ocasionan que no todos los fenómenos puedan acoplarse a él, entre estos fenómenos destacan algunos procesos de interés actuarial que no se pueden modelar como si tuvieran naturaleza del tipo homogéneo, lo que tiene su origen en el hecho de que las fuerzas de transición de un estado a otro que se encuentran relacionadas con un individuo en la mayor parte de los casos siempre están en función de la edad del individuo. Sin embargo, se reitera que esto no significa que las suposiciones planteadas en dicha sección deban ser consideradas inservibles, ya que algunos fenómenos pueden ser modelados adecuadamente bajo tales suposiciones. Un ejemplo de estos es el estudio de la evolución de un paciente a través de las etapas de una enfermedad que ha contraído.

Por todo lo anterior ahora se fijará la atención en un modelo en el que las fuerzas de transición serán constantes a trozos, es decir permanecerán constantes durante ciertos intervalos de tiempo (esto seguramente hará recordar a las funciones escalonadas), es decir

$$\mu_{i,j}(t) = \mu_{i,j}^{(m)} \qquad \text{si} \qquad t \in [t_{m-1}, t_m) \quad \text{con } m = 1, 2, \ldots$$

La edad $t_0$ podrá ser manejada según el problema que se esté tratando de modelar, es decir, ésta puede ser: cero años, quince años, veintiún años, etc; mientras que la última edad $t_m$ a lo mas podrá ser, desde luego, de $\omega$ años.

De tal manera que la matriz de probabilidades de transición de la edad $x$ a la edad $y$ será un producto de matrices de transición, contando cada una de ellas con fuerzas constantes de transición, es decir

$$\mathbf{P}(x, y) = \left[\mathbf{P}^{(s)}(t_s - x)\right]\left[\mathbf{P}^{(s+1)}(t_{s+1} - t_s)\right]\cdots\left[\mathbf{P}^{(n)}(y - t_{n-1})\right]$$

donde

$$x \in [t_{s-1}, t_s) \quad ,$$
$$y \in [t_{n-1}, t_n)$$

y $\left[\mathbf{P}^{(\nu)}(t_{\nu-1}, t_\nu)\right]$ es la $\nu$-ésima matriz de transición con fuerzas de transición constantes en el intervalo $[t_{\nu-1}, t_\nu)$ por lo que no se deberá confundir con el producto matricial $\mathbf{P}^{\nu}$ .

Para el ( $i$ , $j$ ) -ésimo elemento de la matriz mencionada se tiene que

$$p_{i,j}(x,y)=\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}\cdots\sum_{k_{w-s}=1}^{n}\left[p^{(s)}_{i,k_1}(x,t_s)\cdot p^{(s+1)}_{k_1,k_2}(t_s,t_{s+1})\cdot\cdots\cdot p^{(w)}_{k_{w-s},j}(t_{w-1},y)\right],$$

donde, por lo visto en la sección precedente, se podrá sustituir $p^{(s+v)}_{k_v,k_{v+1}}(t_{s+v-1},t_{s+v})$ (para cualquier $v=0,1,\ldots,w-s$ y considerando que $k_{w-s+1}=j$ y $k_0=i$ ), quedando de esta forma

$$p_{i,j}(x,y)=\sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}\cdots\sum_{k_{w-s}=1}^{n}\left[\left(\sum_{g=1}^{n}a^{(s)}_{i,g}e^{\lambda_g^{(s)}(t_s-x)}c_{g,k_1}\right)\left(\sum_{g=1}^{n}a^{(s+1)}_{k_1,g}e^{\lambda_g^{(s+1)}(t_{s+1}-t_s)}c^{(s+1)}_{g,k_2}\right)\cdots\right.$$
$$\left.\cdots\left(\sum_{g=1}^{n}a^{(w)}_{k_{w-s},g}e^{\lambda_g^{(w)}(y-t_{w-1})}c^{(w)}_{g,k_2}\right)\right]$$

Esta expresión muestra en forma explícita como se puede calcular una probabilidad en particular.

Hasta ahora se ha utilizado el supuesto de eigenvalores diferentes, sin embargo en la realidad se puede presentar un caso distinto, por ejemplo cuando al menos dos eigenvalores son iguales; como se sabe, una matriz con eigenvalores repetidos aun cuando no se puede diagonalizar , puede ser reducida a la llamada forma canónica de Jordan, por lo que ante tal situación se deberá de proceder a buscar la forma canónica de Jordan de $\mathbf{Q}$.

Para ilustrar este hecho, se propone a manera de ejemplo una matriz $\mathbf{Q}$ (de 6 por 6) asociada con un proceso homogéneo en el tiempo cuyos eigenvalores $\lambda_1$ y $\lambda_2$ tendrán multiplicidad 5 y 1 respectivamente, teniendo a su vez $\lambda_1$ dos eigenvectores linealmente independientes generando a su espacio nulo, por lo que la forma canónica de Jordan de la matriz $\mathbf{Q}$ es

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Q}\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2\end{pmatrix}=\begin{matrix}C_3(\lambda_1) & & \\ & C_2(\lambda_1) & \\ & & C_1(\lambda_2)\end{matrix}=\mathbf{D}.$$

Como se trata de un proceso homogéneo, se sabe de antemano que

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{\Delta}=\boldsymbol{\Delta}\mathbf{D}=\mathbf{D}\boldsymbol{\Delta},$$

o equivalentemente

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{\Delta})_{i,j}=\sum_{\forall w}(\boldsymbol{\Delta})_{i,w}(\mathbf{D})_{w,j}=\sum_{\forall w}(\mathbf{D})_{i,w}(\boldsymbol{\Delta})_{w,j}.$$

lo cual conduce a

$$\mathbf{\Lambda}=\begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & e^{t\lambda_1}(1+t) & e^{t\lambda_1}(1+t+\frac{t^2}{2}) & e^{t\lambda_1} & e^{t\lambda_1}(1+t) & 0 \\ 0 & e^{t\lambda_1} & e^{t\lambda_1}(1+t) & 0 & e^{t\lambda_1} & 0 \\ 0 & 0 & e^{t\lambda_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{t\lambda_1} & e^{t\lambda_1}(1+t) & e^{t\lambda_1} & e^{t\lambda_1}(1+t) & 0 \\ 0 & 0 & e^{t\lambda_1} & 0 & e^{t\lambda_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{t\lambda_1} \end{pmatrix}.$$

Pudiéndose así obtener el producto matricial $\mathbf{P}(t)=\mathbf{A}\Delta\mathbf{A}^{-1}$, aún cuando la composición de la matriz $\mathbf{\Lambda}$ no sea tan sencilla como cuando se les puede diagonalizar.

### 3.4. Conclusiones

Por todo lo presentado en este capitulo se puede afirmar que la utilización de sistemas de ecuaciones diferenciales y su resolución por medio del cálculo de eigenvalores y eigenvectores constituyen un medio eficaz y conveniente para el cálculo de las probabilidades de transición de procesos tanto homogéneos como no homogéneos. Sin olvidar que entre las bondades del empleo de los eigenvalores y eigenvectores destaca el poder desarrollar aproximaciones de tipo numéricas.

# Capitulo 4

# ASPECTOS FINANCIEROS Y SU NATURALEZA ESTOCÁSTICA

## 4.1. Introducción

En más de una ocasión cuando se estudian las matemáticas financieras y el cálculo actuarial, sin falta surge la pregunta ¿ Porqué razón se asume una tasa de interés constante , cuando en la realidad ésta es variable ?, la respuesta que tradicionalmente se da es que el interés a largo plazo tiende a estabilizarse en un cierto nivel y no es necesario fijarse en las variaciones tanto a la alza como a la baja ya que éstas se presentan con una frecuencia baja y no son de gran magnitud. Sin embargo en este capítulo si se pondrá atención en la naturaleza estocástica del interés, para lo cual se utilizará un modelo que desde luego estará cimentado en las cadenas de Markov y que llevará a la obtención de resultados interesantes e importantes, de tal forma que de nueva cuenta como ya sucedió en la lectura del capítulo 2, se podrá encontrar en el presente que los problemas tratados y los conceptos aprendidos durante nuestra formación actuarial pueden ser expresados como casos particulares de modelos que utilizan cadenas de Markov.

## 4.2. Reservas, flujo y Balance de efectivo

Se empezará por definir el concepto de *flujos de efectivo* el cual se refiere a los pagos hechos por una persona fisica o moral y los que hacia ella se hacen (definición de diccionario y por tanto de corto alcance), de tal forma que si se parte de esta definición y de la naturaleza del interés que se maneje, los problemas que trata la actuaria se pueden dividir, en función del previo conocimiento o desconocimiento del tipo de interés así como del flujo de efectivo involucrado, en los siguientes cuatro casos:

| Caso | Tipo de interés | Flujo de efectivo | Problema de |
|---|---|---|---|
| 1 | conocido | conocido | matemáticas financieras |
| 2 | conocido | desconocido | cálculo actuarial con o sin PE |
| 3 | desconocido | conocido | C. actuarial y PE |
| 4 | desconocido | desconocido | C. actuarial y PE |

**En todo lo que resta serán sujeto de estudio principalmente los tres últimos casos, ya que el primero es un tema ampliamente dominado, de tal modo que se desarrollarán en primer lugar los conceptos relacionados con el tipo de interés y que no pertenecen al caso 1, los cuales son: la fuerza de interés y el valor presente cuando el tipo de interés es desconocido.**

Para modelar el proceso de la fuerza de interés, ésta será considerada como una cadena de Markov homogénea en el tiempo con espacio paramétrico continuo y espacio de estados

$$S = \{\delta^1, \delta^2, \ldots, \delta^n\},$$

correspondiendo cada elemento a valores representativos que puede tomar la fuerza de interés, la cual al momento $s$ es

$$\delta_s = \sum_{k=1}^{n} (I_s^k * \delta^k) \qquad (4.1)$$

donde

$$I_s^k = \begin{cases} 1 & \text{si } \delta_s = \delta^k \\ 0 & \text{si } \delta_s \neq \delta^k \end{cases}, \qquad (4.2)$$

mientras que la fuerza de transición del estado $i$ hacia el estado $j$ asociada con este proceso será denotada por $\kappa_{i,j}$, la cual, como se esta tratando con un proceso homogéneo, es independiente del instante en que se considera.

Como ya se cuenta con el concepto de fuerza de interés, se podrá obtener una expresión para el valor presente de una unidad que se pagará al cabo de $t$ años, siendo tal expresión

$$v^t = v_t(\delta_s | s \in [0,t]) = \exp(-\int_0^t \delta_s ds) \qquad (4.3)$$

Respecto a ésta se deberán hacer las siguientes tres observaciones :

1.- Este valor presente es una variable aleatoria como consecuencia de que no se sabe con certeza el tipo de interés que prevalecerá en el periodo $[0,t]$.

2.- Si al mas puro estilo actuarial de vida se obtiene la esperanza de esta variable se tendrá el valor presente esperado de esa unidad.

3.- Si el espacio de estados $S$ de $\delta_s$ posee un solo elemento, se tendrá entonces la expresión tradicional de las matemáticas financieras.

Habiendo sido presentados los conceptos anteriores, se podrá retomar el estudio de los flujos de efectivo y de sus implicaciones, para tal fin se empezará por definir una función que expresará el monto total acumulado por los flujos de efectivo desde que se empezó a valuar (instante 0) hasta el instante $t$ la cual será denotada por $B_t$. Concretamente para el caso 3 sus incrementos en un instante, es decir $dB(t)$ estarán constituidos por una parte continua y otra discreta; es decir,

$$dB(t) = b(t)dt + \Delta B(t) \qquad (4.4)$$

Donde $b(t)$ es la tasa preestablecida a la que se paga sobre el periodo en que se realizan todos los flujos de efectivo y $\Delta B(t)$ es el importe que se paga al momento $t$; este importe será diferente de cero en un número finito de puntos previamente acordados y que constituyen el conjunto $D = \{t_0, t_1, \ldots, t_m\}$. Si además se considera que el periodo de flujos de efectivo es el intervalo $[0,m]$, la variable aleatoria que denota el valor presente de ellos será

$$\int_0^m \exp(-\int_0^s \delta(\xi)d\xi)dB(s), \qquad (4.5)$$

estando ésta, en función de la naturaleza estocástica del interés.

Ahora bien, si se valúa al momento $t$ y se procede a calcular la esperanza del valor presente de los flujos de efectivo futuros, dado que el interés hasta el momento $t$ es conocido, se podrá obtener entonces el pasivo originado en los flujos de efectivo, el cual es

$$E\left[\int_t^{m-t} \exp(-\int_t^{\tau} \delta(\xi)d\xi)dB(\tau) \;\middle|\; \delta_t = \delta_k \right].$$

Esta esperanza maneja la misma idea que el método prospectivo para el cálculo de reservas estudiado en cálculo actuarial, por lo que será utilizada la tradicional $V$ en función del instante de la valuación y que tendrá por subindice el estado actual de la fuerza de interés, esto es

$$V_k(t) = E\left[\int_t^{m-t} \exp(-\int_t^{\tau} \delta(\xi)d\xi)dB(\tau) \;\middle|\; \delta_t = \delta_k \right]. \qquad (4.6)$$

**Resulta de interés ver como cambia el valor presente esperado de los flujos de efectivo futuros (reserva); así como sus momentos de orden mayor a través del tiempo. Para lo cual se utilizarán una serie de supuestos los cuales se enuncian a continuación.**

**Sea**

$$M_s = \int_0^s \exp(-\int_0^\tau \delta(\xi)d\xi) * dB(\tau) + \exp(-\int_0^s \delta(\xi)d\xi)\sum_{\forall k} I_s^k V_k(s)$$

el valor de los flujos de efectivo futuros al momento cero dado que se conoce el tipo de interés hasta el momento $s$. Suponiendo $t < s$, y siendo conocido con certeza solamente el tipo de interés hasta el momento $t$, no se podrá calcular $M_s$, por lo que se encuentra uno limitado a obtener su esperanza; es decir

$$E\left[M_s|M_t\right] = E\left[\int_0^s \exp(-\int_0^\tau \delta(\xi)d\xi) * dB(\tau) + \exp(-\int_0^s \delta(\xi)d\xi)\sum_{\forall k} I_s^k V_k(s)|M_t\right]$$

$$= E\left[\int_0^t \exp(-\int_0^\tau \delta(\xi)d\xi)dB(\tau) + \int_t^s \exp(-\int_0^\tau \delta(\xi)d\xi)dB(\tau) + \right.$$
$$\left. + \exp(-\int_0^t \delta(\xi)d\xi - \int_t^s \delta(\xi)d\xi)\sum_{\forall k} I_s^k V_k(s)| \; M_t\right]$$

$$= E\left[\int_0^t \exp(-\int_0^\tau \delta(\xi)d\xi)dB(\tau) + \exp(-\int_0^t \delta(\xi)d\xi)\int_t^s \exp(-\int_t^\tau \delta(\xi)d\xi)dB(\tau) + \right.$$
$$\left. + \exp(-\int_0^t \delta(\xi)d\xi - \int_t^s \delta(\xi)d\xi)\sum_{\forall k} I_s^k V_k(s)|M_t\right].$$

Una factorización de esto conduce a

$$E\left[M_s|M_t\right] = E\left[\int_0^t \exp(-\int_0^\tau \delta(\xi)d\xi)dB(\tau) + \right.$$
$$\left. + \exp(-\int_0^t \delta(\xi)d\xi)\left\{\int_t^s \exp(-\int_t^\tau \delta(\xi)d\xi)dB(\tau) + \exp(-\int_t^s \delta(\xi)d\xi)\sum_{\forall k} I_s^k V_k(s)\right\}|M_t\right]$$

$$= \int_0^t \exp(-\int_0^\tau \delta(\xi)d\xi)dB(\tau) + \exp(\int_0^t \delta(\xi)d\xi)E\left[\int_t^s \exp(-\int_t^\tau \delta(\xi)d\xi)dB(\tau) + \right.$$
$$\left. + \exp(-\int_t^s \delta(\xi)d\xi)\sum_{\forall k} I_s^k V_k(s)|M_t\right]$$

$$= \int_0^t \exp(-\int_0^\tau \delta(\xi)d\xi)dB(\tau) + \exp(-\int_0^t \delta(\xi)d\xi)\sum_{\forall k} I_t^k V_k(t)$$

$$= M_t. \qquad (4.7)$$

Por lo que se puede afirmar que $M_s$ es una martingala.

Sea además

$$\bar{V}_t^{(q)j} = \exp\left(-q\int_0^t \delta(\xi)\,d\xi\right) V_j^{(q)}(t) \quad , \qquad (4.8)$$

donde $V_j^{(q)}(t)$ es el $q$-ésimo momento de la variable aleatoria del valor presente de los flujos de efectivo futuros, estando actualmente la fuerza de interés en el estado $j$ (cuando $q$ es uno se omite).

Teniendo ( 4.8 ) por diferencial

$$d\bar{V}_t^{(q)j} = \left(V_j^{(q)}(t)\right) d\exp\left(-q\int_0^t \delta(\xi)d\xi\right) + \exp\left(-q\int_0^t \delta(\xi)d\xi\right) dV_j^{(q)}(t)$$

$$= \left(V_j^{(q)}(t)\right)\left(-q\exp\left(-q\int_0^t \delta(\xi)d\xi\right)\right)\left(\sum_j I_t^j \delta_t^j\right)dt + \exp\left(-q\int_0^t \delta(\xi)d\xi\right) dV_j^{(q)}(t) \, .$$

Si ahora se calculan los momentos de orden mayor de la martingala introducida en líneas anteriores y si se conoce con certeza el interés hasta el momento $t$ se tendrá

$$M_t^{(q)} = E\left[\left(\int_0^n v^\xi dB(\xi)\right)^q \middle| v^t \text{conocido}\right]$$

$$= E\left[\left(\int_0^t v^\xi dB(\xi) + \int_t^n v^\xi dB(\xi)\right)^q \middle| v^t \text{conocido}\right]$$

Fácilmente se identifica un binomio elevado a la $q$-ésima potencia, lo que permitirá reescribir esta última expresión como

$$M_t^{(q)} = E\left[\sum_{p=0}^{q}\left[\binom{q}{p}\left(\int_0^t v^\xi dB(\xi)\right)^p \left(\int_t^n v^\xi dB(\xi)\right)^{q-p}\right] \middle| v^t \, conocido\right]$$

$$= \sum_{p=0}^{q}\left[\binom{q}{p}\left(\int_0^t v^\xi dB(\xi)\right)^p\right] E\left[\left(\int_t^n v^\xi dB(\xi)\right)^{q-p} \middle| v^t \, conocido\right]$$

$$= \sum_{p=0}^{q}\left[\binom{q}{p}\left(\int_0^t v^\xi dB(\xi)\right)^p \left(\sum_j I_t^j \bar{V}_t^{(q-p)j}\right)\right].$$

cuya diferencial es

$$dM_t^{(q)} = \sum_{p=0}^{q}\left[\binom{q}{p} d\left(\int_0^t v^{\xi} dB(\xi)\right)^p \left(\sum_j I_t^j \Gamma_t^{(q-p)j}\right)\right]. \qquad (4.9)$$

Si en un sumando en particular de la expresión ( 4.9 ) se utiliza la fórmula de Itô en su forma diferencial para procesos de variación limitada , resultará que

$$\begin{aligned} d\left(\sum_j\left(\int_0^t v^{\xi} dB(\xi)\right)^p I_t^j \Gamma_t^{(q-p)j}\right) &= \sum_j p\left(\int_0^t v^{\xi} dB(\xi)\right)^{p-1} I_t^j \Gamma_t^{(q-p)j} d\left(\int_0^t v^{\xi} dB(\xi)\right) + \\ &+ \sum\left(\int_0^t v^{\xi} dB(\xi)\right)^p \Gamma_t^{(q-p)j} d\overline{I_t^j} + \\ &+ \sum_j\left(\int_0^t v^{\xi} dB(\xi) d\xi\right)^p I_t^j d\overline{\Gamma}_t^{(q-p)j} + \\ &+ \sum_j\left(\int_0^t v^{\xi} dB(\xi)\right)^p I_t^j \Gamma_t^{(q-p)j} - \\ &- \sum_j\left(\int_0^t v^{\xi} dB(\xi)\right)^p I_t^j \Gamma_t^{(q-p)j}. \end{aligned}$$

Debiéndose aqui notar que :

1.- La diferencial de un indicador es cero, esto es debido a que si la función indicador es continua esta deberá tener un valor constante.

2.- $I_t^j * I_t^k = I_t^j \delta_{jk}$ ( siendo $\delta_{jk}$ la delta de Kronecker )

3.- El salto de la función será de dos tipos posibles; ello en función de si permanece o no en el estado actual. En el primer caso, es decir cuando si hay transición, el salto queda descrito por

$$\sum_{\forall j\neq k}\left[\left(\int_0^t v^{\xi} dB(\xi)\right)^p \Gamma_t^{(q-p)k} - \left(\int_0^t v^{\xi} dB(\xi)\right)^p \Gamma_{t-}^{(q-p)j}\right]\left[I_t^j \kappa_{j,k} dt + dM_{j,k}\right]$$

donde $\left[I_t^j \kappa_{j,k} dt + dM_{j,k}\right]$ es el número de transiciones del estado $j$ hacia el $k$ siendo el elemento compensatorio $dM_{j,k}$ cuya esperanza vale cero. Para el otro caso; esto es cuando no hay transición, la expresión para el salto queda como

$$\sum_{\forall j}\left[\left(\int_0^t v^{\xi} dB(\xi) + \Delta B(t) v^t\right)^p \overline{\Gamma}_t^{(q-p)j} - \left(\int_0^t v^{\xi} dB(\xi)\right)^p \overline{\Gamma}_t^{(q-p)j}\right] I_t^j \Big].$$

Destacando aqui tres hechos:

1.- Por ser un pago vencido $\Delta B(t)$ se puede sustituir $I_t^j$ por $I_{t-}^j$ para todo $t$ en $D$.

2.- La diferencia solamente será diferente de cero únicamente si $t \in D$.

3.- Para todas aquellas $t$ en $D$ la probabilidad de una transición es cero.

Por todo lo anterior el nuevo aspecto de la diferencial que fue tomada por separado será

$$d\left(\sum_j \left(\int_0^t v^{\xi} dB(\xi)\right)^p I_t^j \overline{\Gamma}_t^{(q-p)j}\right) = \sum_j p\left(\int_0^t v^{\xi} dB(\xi)\right)^{p-1} I_t^j \overline{\Gamma}_t^{(q-p)j} v^t b(t)dt + \sum_j \left(\int_0^t v^{\xi} dB(\xi)\right)^p I_t^j d\overline{\Gamma}_t^{(q-p)j} +$$

$$+\sum_{\forall j}\sum_{k \neq j}\left[\left(\int_0^t v^{\xi} dB(\xi)\right)^p \overline{\Gamma}_t^{(q-p)k} - \left(\int_0^t v^{\xi} dB(\xi)\right)^p \overline{\Gamma}_t^{(q-p)j}\right]\left[I_t^j \kappa_{j,k} dt + dM_{j,k}\right]$$

$$+\sum_{\forall j}\left[\left(\int_0^t v^{\xi} dB(\xi) + \Delta B(t) v^t\right)^p \overline{\Gamma}_t^{(q-p)j} - \left(\int_0^t v^{\xi} dB(\xi)\right)^p \overline{\Gamma}_t^{(q-p)j}\right] I_t^j \Big]. \qquad (4.10)$$

Si se sustituye en la expresión ( 4.9 ) y se colocan exclusivamente las diferenciales de las martingalas en el primer miembro

$$dM_t^{(q)} - \sum_{\forall j}\sum_{p=0}^{q}\binom{q}{p}\sum_{\forall k \neq j}\left[\left(\int_0^t v^{\xi} dB(\xi)\right)^p \overline{\Gamma}_t^{(q-p)k} - \left(\int_0^t v^{\xi} dB(\xi)\right)^p \overline{\Gamma}_t^{(q-p)j}\right] dM_{j,k}$$

$$= \sum_{p=0}^{q}\binom{q}{p}\sum_j p\left(\int_0^t v^{\xi} dB(\xi)\right)^{p-1} I_t^j \overline{\Gamma}_t^{(q-p)j} v^t b(t)dt + \sum_{p=0}^{q}\binom{q}{p}\sum_j \left(\int_0^t v^{\xi} dB(\xi)\right)^p I_t^j d\overline{\Gamma}_t^{(q-p)j} +$$

$$+\sum_{p=0}^{q}\binom{q}{p}\sum_{\forall j}\sum_{\forall k \neq j}\left[\left(\int_0^t v^{\xi} dB(\xi)\right)^p \overline{\Gamma}_t^{(q-p)k} - \left(\int_0^t v^{\xi} dB(\xi)\right)^p \overline{\Gamma}_t^{(q-p)j}\right]\left[I_t^j \kappa_{j,k} dt\right] +$$

$$+\sum_{p=0}^{q}\binom{q}{p}\sum_{\forall j}\left[\left(\int_0^{t-} v^{\xi} dB(\xi) + \Delta B(t) v^t\right)^p \overline{\Gamma}_t^{(q-p)j} - \left(\int_0^t v^{\xi} dB(\xi) d\xi\right)^p \overline{\Gamma}_t^{(q-p)j}\right] I_t^j \Big].$$

por lo que si se reagrupa y se toma en cuenta que la esperanza de los incrementos de una martingala es igual a cero, asi como el hecho de que $X_t dt = X_{t-} dt$, se tendrá

$$0 = \sum_{\forall j} I_t^j \sum_{p=0}^{q}\binom{q}{p}\left\{p\left(\int_0^t v^{\xi} dB(\xi)\right)^{p-1} \overline{\Gamma}_t^{(q-p)j} v^t b(t)dt + \left(\int_0^t v^{\xi} dB(\xi)\right)^p d\overline{\Gamma}_t^{(q-p)j} +\right.$$

$$+\sum_{\forall k\neq j}\left[\left(\int_0^t v^{\xi}dB(\xi)\right)^p\tilde{\Gamma}_t^{(q-p)k}-\left(\int_0^t v^{\xi}dB(\xi)\right)^p\tilde{\Gamma}_t^{(q-p)j}\right]\kappa_{j,k}dt+$$

$$+\left[\left(\int_0^{t-} v^{\xi}dB(\xi)+\Delta B(t)v^t\right)^p\tilde{\Gamma}_t^{(q-p)j}-\left(\int_0^t v^{\xi}dB(\xi)\right)^p\tilde{\Gamma}_t^{(q-p)j}\right]\Bigg\}.$$

De tal forma que para toda $t$ que no está en $D$ se tiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$0=\sum_{p=0}^{q}\binom{q}{p}\Bigg\{p\left(\int_0^t v^{\xi}dB(\xi)\right)^{p-1}\tilde{\Gamma}_t^{(q-p)j}v^t b(t)dt+\left(\int_0^t v^{\xi}dB(\xi)\right)^p d\tilde{\Gamma}_t^{(q-p)j}+$$
$$+\sum_{\forall k\neq j}\left\{\left(\int_0^t v^{\xi}dB(\xi)\right)^p\tilde{\Gamma}_t^{(q-p)k}-\left(\int_0^t v^{\xi}dB(\xi)\right)^p\tilde{\Gamma}_t^{(q-p)j}\right\}\kappa_{j,k}dt\Bigg\} \qquad (4.11)$$

con $j=1,\ldots,n$.

Mientras que cuando $t$ está en $D$

$$0=\sum_{p=0}^{q}\binom{q}{p}\left[\left(\int_0^{t} v^{\xi}dB(\xi)+\Delta B(t)v^t\right)^p\tilde{\Gamma}_t^{(q-p)j}-\left(\int_0^t v^{\xi}dB(\xi)\right)^p\tilde{\Gamma}_t^{(q-p)j}\right] \qquad (4.12)$$

con $j=1,\ldots,n$.

Ahora se tomarán por separado a los diferentes términos de la ecuación ( 4.11 ) con la finalidad de reexpresarlos en forma más conveniente, esto es

$$\sum_{p=0}^{q}\binom{q}{p}\left\{p\left(\int_0^t v^{\xi}dB(\xi)\right)^{p-1}\tilde{\Gamma}_t^{(q-p)j}v^t b(t)dt\right\}=\sum_{p=1}^{q}\binom{q}{p-1}\left\{(q-(p-1))\left(\int_0^t v^{\xi}dB(\xi)\right)^{p-1}\tilde{\Gamma}_t^{(q-1-(p-1))j}v^t b(t)dt\right\},$$

de tal forma que si se cambia ( $p$-1 ) por $p$ se tendrá que

$$\sum_{p=0}^{q}\binom{q}{p}\left\{p\left(\int_0^t v^{\xi}dB(\xi)\right)^{p-1}\tilde{\Gamma}_t^{(q-p)j}v^t b(t)dt\right\}=\sum_{p=0}^{q-1}\binom{q}{p}\left\{(q-p)\left(\int_0^t v^{\xi}dB(\xi)d\xi\right)^p\tilde{\Gamma}_t^{(q-1-p)j}v^t b(t)dt\right\}.$$

Esta última suma no cambiará su valor si $p$ toma también el valor de $q$ por lo que quedará

$$\sum_{p=0}^{q}\binom{q}{p}\left\{p\left(\int_0^t v^{\xi}dB(\xi)\right)^{p-1}\tilde{\Gamma}_t^{(q-p)k}v^t b(t)dt\right\}=\sum_{p=0}^{q}\binom{q}{p}\left\{(q-p)\left(\int_0^t v^{\xi}dB(\xi)\right)^p\tilde{\Gamma}_t^{(q-1-p)k}v^t b(t)dt\right\} \qquad (4.13)$$

Por tanto al sustituir en la ecuación ( 4.11 ) la ecuación ( 4.13 )

$$0=\sum_{p=0}^{q}\binom{q}{p}\left\{(q-p)\left(\int_0^t v^{\xi}dB(\xi)\right)^p \Gamma_t^{\tau(q-1-p)k} v^t b(t)dt+\left(\int_0^t v^{\xi}dB(\xi)\right)^p d\Gamma_t^{\tau(q-p)k}+\right.$$

$$\left.+\sum_{\forall k\neq j}\left(\int_0^t v^{\xi}dB(\xi)\right)^p \Gamma_t^{\tau(q-p)k}\kappa_{j,k}dt+\left(\int_0^t v^{\xi}dB(\xi)\right)^p \Gamma_t^{\tau(q-p)j}\kappa_{j,j}dt\right\},$$

esto como consecuencia de que $\sum_{\forall k\neq j}\kappa_{j,k}=-\kappa_{j,j}$. Por lo que si ahora se factoriza

$$0=\sum_{p=0}^{q}\binom{q}{p}\left(\int_0^t v^{\xi}dB(\xi)\right)^p\left\{(q-p)\Gamma_t^{\tau(q-1-p)k}v^t b(t)dt+d\Gamma_t^{\tau(q-p)k}+\Gamma_t^{\tau(q-p)j}\kappa_{j,j}dt+\sum_{\forall k\neq j}\Gamma_t^{\tau(q-p)k}\kappa_{j,k}dt\right\}$$

Fácilmente por inducción para $p$: $0\rightarrow q$ se demuestra que

$$0=(q-p)\Gamma_t^{\tau(q-1-p)k}v^t b(t)dt+d\Gamma_t^{\tau(q-p)k}+\Gamma_t^{\tau(q-p)j}\kappa_{j,j}dt+\sum_{\forall k\neq j}\left\{\Gamma_t^{\tau(q-p)k}\kappa_{j,k}dt\right\}.$$

Si ahora los términos nuevamente son reacomodados y se sustituye $g$ por $q$-$p$

$$d\Gamma_t^{\tau(g)j}=-(g)\Gamma_t^{\tau(g-1)j}v^t b(t)dt-\Gamma_t^{\tau(g)j}\kappa_{j,j}dt-\sum_{\forall k\neq j}\left\{\Gamma_t^{\tau(g-1)k}\kappa_{j,k}\right\}dt,$$

de tal forma que el sustituir el valor de $\Gamma_t^{\tau(g)j}$, dado por ( 4.8 ), en esta ecuación diferencial conduce a

$$-\left(v^t\right)^g g\sum_{\forall w}I_t^w\delta_w(t)V_j^{(g)}(t)dt+\left(v^t\right)^g dV_j^{(g)}(t)=-(g)\left(v^t\right)^{g-1}V_j^{(g-1)}(t)v^t b(t)dt-$$
$$-\left(v^t\right)^g V_j^{(g)}(t)\kappa_{j,j}dt-\sum_{\forall k\neq j}\left\{V_k^{(g)}(t)\left(v^t\right)^g\kappa_{j,k}\right\}dt$$

igualdad que puede reducirse a

$$dV_j^{(g)}(t)=-(g)V_j^{(g-1)}(t)b(t)dt+g\sum_{\forall w}I_t^w\delta_w(t)V_j^{(g)}(t)dt-V_j^{(g)}(t)\kappa_{j,j}dt-\sum_{\forall k\neq j}\left\{V_k^{(g)}(t)\kappa_{j,k}\right\}dt,$$

o equivalentemente a

$$\frac{d}{dt}V_j^{(g)}(t)=-(g)V_j^{(g-1)}(t)b(t)+g\sum_{\forall w}I_t^w\delta_w(t)V_j^{(g)}(t)-V_j^{(g)}(t)\kappa_{j,j}-\sum_{\forall k\neq j}V_k^{(g)}(t)\kappa_{j,k}. \qquad (4.14)$$

Sabiendo que el indicador vale 1 para $w=j$, cuando $g$ es igual a 1 se tendrá

$$\frac{d}{dt}V_j^{(1)}(t)=-b(t)+\delta_j(t)V_j^{(1)}(t)+\sum_{\forall k\neq j}\left(V_j^{(1)}(t)-V_k^{(1)}(t)\right)\kappa_{j,k},$$

donde se puede identificar que

| | |
|---|---|
| $dV_j^{(1)}(t)$ | es el cambio en la reserva al momento $t$, |
| $\delta_j(t)V_j^{(1)}(t)dt$ | es el monto generado en el instante $t$ por interés, |
| $b(t)dt$ | es el flujo de efectivo al momento $t$ y |
| $\sum_{\forall k\neq j}\left(V_j^{(1)}(t)-V_k^{(1)}(t)\right)\kappa_{j,k}\,dt$ | es la esperanza de la diferencia en la reserva debido al cambio de estado. |

A continuación se retomará el sistema (4.12), el cual como se recuerda es

$$0=\sum_{p=0}^{q}\binom{q}{p}\left[\left(\int_0^{t-}v^{\xi}dB(\xi)+\Delta B(t)v^{t}\right)^{p}\bar{V}_t^{*(q-p)j}-\left(\int_0^{t}v^{\xi}dB(\xi)\right)^{p}\bar{V}_t^{*(q-p)j}\right]$$

para $j=1,\ldots,n$. Si en éste se desarrollan los binomios se tendrá que

$$0=\sum_{p=0}^{q}\binom{q}{p}\left[\left(\sum_{r=0}^{p}\binom{p}{r}\left(\Delta B(t)v^{t}\right)^{p-r}\left(\int_0^{t}v^{\xi}dB(\xi)\right)^{r}\right)\bar{V}_t^{*(q-p)j}-\left(\int_0^{t}v^{\xi}dB(\xi)\right)^{p}\bar{V}_t^{*(q-p)j}\right],$$

como $r{:}0\rightarrow p$ y $p{:}0\rightarrow q$ si es cambiado el orden de los operadores suma se tendrá que $p{:}r\rightarrow q$ y $r{:}0\rightarrow q$, traduciéndose tal movimiento en

$$0=\sum_{r=0}^{q}\left(\int_0^{t}v^{\xi}dB(\xi)\right)^{r}\left[\left(\sum_{p=r}^{q}\binom{p}{r}\binom{q}{p}\left(\Delta B(t)v^{t}\right)^{p-r}\bar{V}_t^{*(q-r-(p-r))j}\right)\right]-\sum_{p=0}^{q}\binom{q}{p}\left(\int_0^{t}v^{\xi}dB(\xi)\right)^{p}\bar{V}_t^{*(q-p)j},$$

si ahora es considerada la igualdad $\binom{q}{p}\binom{p}{r}=\binom{q}{r}\binom{q-r}{p-r}$, se llegará a que

$$0=\sum_{r=0}^{q}\binom{q}{r}\left(\int_0^{t}v^{\xi}dB(\xi)\right)^{r}\left[\left(\sum_{p=r}^{q}\binom{q-r}{p-r}\left(\Delta B(t)v^{t}\right)^{p-r}\bar{V}_t^{*(q-r-(p-r))j}\right)\right]-\sum_{p=0}^{q}\binom{q}{p}\left(\int_0^{t}v^{\xi}dB(\xi)\right)^{p}\bar{V}_{t-}^{*(q-p)j}$$

$$=\sum_{r=0}^{q}\binom{q}{r}\left(\int_0^{t}v^{\xi}dB(\xi)\right)^{r}\left[\left(\sum_{p=0}^{q-r}\binom{q-r}{p}\left(\Delta B(t)v^{t}\right)^{p}\bar{V}_t^{*(q-r-(p))j}\right)\right]-\sum_{p=0}^{q}\binom{q}{p}\left(\int_0^{t}v^{\xi}dB(\xi)\right)^{p}\bar{V}_{t-}^{*(q-p)j},$$

de tal forma que al cambiar el nombre de los indices

$$0=\sum_{p=0}^{q}\binom{q}{p}\left(\int_0^t v^{\xi}dB(\xi)\right)^{p}\left[\left(\sum_{r=0}^{q-p}\binom{q-p}{r}\left(\Delta B(t)v^{t}\right)^{r}\tilde{V}_t^{(q-p-r)j}\right)\right]-\sum_{p=0}^{q}\binom{q}{p}\left(\int_0^t v^{\xi}dB(\xi)\right)^{p}\tilde{V}_t^{(q-p)j}$$

$$=\sum_{p=0}^{q}\binom{q}{p}\left(\int_0^t v^{\xi}dB(\xi)\right)^{p}\left[\left(\sum_{r=0}^{q-p}\binom{q-p}{r}\left(\Delta B(t)v^{t}\right)^{r}\tilde{V}_t^{(q-p-r)j}\right)-\tilde{V}_t^{(q-p)j}\right].$$

Pudiéndose de nueva cuenta demostrar por inducción que

$$\left[\left(\sum_{r=0}^{q-p}\binom{q-p}{r}\left(\Delta B(t)v^{t}\right)^{r}\tilde{V}_t^{(q-p-r)j}\right)-\tilde{V}_t^{(q-p)j}\right]=0\ ,$$

igualdad que puede expresarse como

$$\tilde{V}_t^{(q-p)j}=\left(\sum_{r=0}^{q-p}\binom{q-p}{r}\left(\Delta B(t)v^{t}\right)^{r}\tilde{V}_t^{(q-p-r)j}\right).$$

Por tanto de la sustitución de ( 4.8 ), se tendrá que

$$V_j^{(q-p)}(t-)=\left(\sum_{r=0}^{q-p}\binom{q-p}{r}\left(\Delta B(t)\right)^{r}V_j^{(q-p-r)}(t)\right).$$

Por tanto se puede concluir para las funciones $V_j^{(g)}(t)$ que

| | |
|---|---|
| $\frac{d}{dt}V_j^{(g)}(t)=-(g)V_j^{(g-1)}(t)b(t)+g\delta_j(t)V_j^{(g)}(t)-V_j^{(g)}(t)\kappa_{j,j}-\sum_{\forall j\neq k}V_k^{(g)}(t)\kappa_{j,k}$ | para $j=1,\ldots,n$ y $t\notin \mathbf{D}$ |
| $V_j^{(g)}(t-)=\left(\sum_{r=0}^{g}\binom{g}{r}\left(\Delta B(t)\right)^{r}V_j^{(g-r)}(t)\right)$ | para $t\in \mathbf{D}$. |

Estas ecuaciones, así como la restricción serán válidas cuando la fuerza de interés se mueve a través de diferentes estados como un proceso homogéneo y los flujos de efectivo (beneficios y obligaciones) son pagaderos en forma cierta ( Caso 3 ).

Para el caso 2 el sistema de ecuaciones y la restricción serían de la forma

$$\frac{d}{dt}V_j^{(g)}(t) = -(g)V_j^{(g-1)}(t)b_t^j + g\delta V_j^{(g)}(t) - V_j^{(g)}(t)\mu_{j,j}(t) - \sum_{\forall k \neq j}\mu_{j,k}(t)\sum_{r=0}^{g}\left(b_t^{j,k}\right)^r V_k^{(g-r)}(t)$$

para $j=1,\ldots,n$ y $t \notin D$

$$V_j^{(g)}(t-) = \left(\sum_{r=0}^{g}\binom{g}{r}\left(\Delta B_t^j\right)^r V_j^{(g-r)}(t)\right)$$

para $t \in D$.

Donde

| | |
|---|---|
| $\delta$ | es la fuerza de interés constante, |
| $\mu_{j,k}(t)$ | es la fuerza de transición del estado $j$ al $k$ en el instante $t$, |
| $b_t^{j,k}$ | es el monto que se paga por cambiar del estado $j$ al $k$, |
| $b_t^j$ | es la tasa a la que se paga por permanecer en el mismo estado y |
| $\Delta B_t^j$ | es el monto que se paga en forma vencida por permanecer en el estado $j$ en el instante $t$-, constituyendo los instantes para los que este pago es diferente de cero el conjunto $D$ de tal forma que en el instante $t$ por permanecer en $j$ se recibirá |

$$dB_t = b_t^j dt + \Delta B_t^j.$$

Para el caso 4 se tendrá

$$\frac{d}{dt}V_{e,j}^{(g)}(t) = -(g)V_{e,j}^{(g-1)}(t)b_t^j + \left(g\delta_e - \kappa_{e,e}\right)V_{e,j}^{(g)}(t) - V_{e,j}^{(g)}(t)\lambda_{j,j}(t) - \sum_{\forall k \neq j}\lambda_{j,k}(t)\sum_{r=0}^{g}\left(b_t^{j,k}\right)^r V_{e,k}^{(g-r)}(t) -$$

$$-\sum_{\forall f \neq e} V_{f,j}^{(g)}(t)\kappa_{e,f} \quad \text{para } j=1,\ldots,n$$

$e = 1,\ldots,m$ y $t \notin D$

$$V_{e,j}^{(g)}(t-) = \left(\sum_{r=0}^{g}\binom{g}{r}\left(\Delta B_t^j\right)^r V_{e,j}^{(g-r)}(t)\right)$$

para $t \in D$.

Donde

$V_{e,j}^{(g)}(t)$ es el momento $g$-ésimo de la variable aleatoria $L_t$, dado que en ese instante el individuo se encuentra en el estado $j$ y el tipo de interés en el estado $e$,

$\delta_e$ es la fuerza de interés vigente en el estado $e$,

$\lambda_{k,j}(t)$ es la fuerza de transición del estado $j$ al $k$ a la que se encuentra sujeta el individuo en el instante $t$,

$\kappa_{e,f}$ es la fuerza de transición del estado $e$ hacia el estado $f$ para el interés,

$b_t^{j,k}$ es el monto de efectivo que se paga por cambiar del estado $j$ al $k$,
$b_t^j$ es la tasa a la que se paga por permanecer en el mismo estado y
$\Delta B_t^j$ es el monto que se paga en forma vencida por permanecer en el mismo estado en el instante $t$-, de tal forma que al momento $t$ por permanecer en $j$ se recibirá

$$dB_t = b_t^j dt + \Delta B_t^j \quad ,$$

formando los instantes $t$ en los que $\Delta B_t^k$ es diferente de cero al conjunto finito $D$.

Los resultados para este caso se obtuvieron bajo los siguientes supuestos:

1. Independencia entre el estado en que se encuentra el individuo y el estado de la fuerza de interés.
2. El movimiento del individuo será un proceso del tipo no homogéneo, mientras que el de la fuerza del interés será homogéneo.
3. Las fuerzas de transición serán :

$$\mu_{ej,fk} = \begin{cases} \kappa_{e,f} & \text{cuando} \quad e \neq f, j = k \\ \lambda_{j,k}(t) & \text{cuando} \quad e = f, j \neq k \\ 0 & \text{cuando} \quad e \neq f, j \neq k \end{cases} .$$

Las demostraciones para los dos últimos casos presentados son similares a la desarrollada para el caso 3, con la diferencia de que en los dos últimos el flujo de efectivo es desconocido, ya que se paga en función de la permanencia o del cambio de estado, por lo que se deberá poner atención en esto si se intenta desarrollarlas.

Para completar el contenido de esta sección solo resta tratar el nada complicado concepto de *balance de efectivo*. Supóngase que se hace un depósito a un fondo vacio en un momento al que se le conocerá como instante cero, el monto de este depósito será denotado por $X_0$, entonces en el instante $t$ el balance de efectivo estará dado por

$$X_t = X_0 \exp\left(\int_0^t \delta(\xi)d\xi\right) - \int_0^t \exp\left(\int_\eta^t \delta(\xi)d\xi\right) b(\eta)d\eta \qquad (4.15)$$

donde $b()$ es la función de pagos, tanto de ingresos como de egresos al fondo.

De esta forma se tendrá que para $s > t$

$$X_s = X_t \exp\left(\int_t^s \delta(\xi)d\xi\right) - \int_t^s \exp\left(\int_\eta^s \delta(\xi)d\xi\right) b(\eta)d\eta .$$

## 4.3. Solución del sistema de ecuaciones diferenciales para el cálculo de reservas

Como ya se ha mencionado al calcular la esperanza de la variable aleatoria que denota la pérdida se obtendrá el valor de la reserva, pero ¿Qué tan complejo será realizar este cálculo?

Para tener una idea sobre este punto que se ha mencionado, se mostrará en forma explícita el valor de la reserva, para un proceso homogéneo

$$V_t^{(1)k} = \sum_{l \neq k} \int_0^{u-t} \exp\left( \int_t^{t+h} \kappa_{k,k} d\xi \right) \kappa_{k,l} \left[ \int_t^h \exp\left( -\int_t^{\tau} \delta_k d\xi \right) dB(\tau) + \exp\left( \left( -\int_t^{\tau} \delta_k d\xi \right) \right) V_{t+h}^{(1)l} \right] dh$$

la cual resulta difícil de valuar y poco adecuada aun para modelos con solamente dos estados.

Por tal motivo se deberá atacar este problema desde otra perspectiva, la cual consiste en hacer uso del sistema de ecuaciones diferenciales presentado en la sección precedente, que en forma matricial será representado como

$$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dt}} \mathbf{V}_t^{(1)} = -\mathbf{b(t)} + \mathbf{Q}\mathbf{V}_t^{(1)} \qquad (4.16)$$

donde $\mathbf{V}_t^{(1)}$ y $\mathbf{b(t)}$ son vectores columna y $\mathbf{Q}$ es una matriz de la forma

$$\begin{pmatrix} -\kappa_1 + \delta_1 & -\kappa_{1,2} & \cdots & -\kappa_{1,n-1} & -\kappa_{1,n} \\ -\kappa_{2,1} & -\kappa_2 + \delta_2 & \cdots & -\kappa_{2,n-1} & -\kappa_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -\kappa_{n,1} & -\kappa_{n,2} & \cdots & -\kappa_{n,n-1} & -\kappa_{n,n} + \delta_n \end{pmatrix}$$

Este sistema de ecuaciones diferenciales es de primer orden y no homogéneo, por lo que su solución necesitará de la del homogéneo

$$\frac{d}{dt} \mathbf{V}_t^{(1)} = \mathbf{Q}\mathbf{V}_t^{(1)}. \qquad (4.17)$$

Para este fin se propone a continuación una matriz $\mathbf{A}$ de $n$ x $n$ y un vector columna de $n$ x 1 $\mathbf{U}_t$, los cuales deberán satisfacer la igualdad

$$\mathbf{V}_t^{(1)} = \mathbf{A}\mathbf{U}_t \; ,$$

implicando a su vez que

$$\frac{d}{dt} \mathbf{A}\mathbf{U}_t = \mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{U}_t ,$$

o de otra manera

$$\frac{d}{dt}\mathbf{U}_t = \mathbf{A}^{-1}Q\mathbf{A}\mathbf{U}_t .$$

Si **A** es la matriz de eigenvectores de **Q** que la diagonaliza como

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Q}\mathbf{A} = \mathbf{D},$$

se tendrá entonces el sistema

$$\frac{d}{dt}\mathbf{U}_t = \mathbf{D}\mathbf{U}_t$$

cuya solución es

$$\begin{aligned}(\mathbf{U}_t)_i &= \exp(\mathbf{D}_{i,i}t + k_i)\,,\\ &= \exp(\mathbf{D}_{i,i}t) * c_i\\ &= u_i(t) * c_i\end{aligned}$$

y por tanto

$$V_f^{(1)}(t) = \sum a_{f,i} * (c_i * u_i(t))\,.$$

Esto es, desde luego similar a lo que se desarrolló en el tercer capítulo ya que se trata de sistemas de ecuaciones homogéneos. Sin embargo en esta parte el interés se centra en uno del tipo no homogéneo, los cuales tienen por solución particular algo como

$$V_f^{(1)}(t) = \sum_{i=1}^{n} a_{f,i} * (c_i(t) * u_i(t)) \qquad (4.18)$$

Por lo que para obtener esta solución particular se deberán encontrar los $c_i(t)$, para lo cual se empezará por sustituir esta solución en el sistema de ecuaciones original ( 4.16 ), descubriéndose así que este problema se reducirá a simplemente

$$-b(t) = \sum_{i=1}^{n} a_{f,i} * (c'_i(t) * u_i(t))\,,$$

que en forma matricial se ve como

$$\begin{pmatrix} -b(t) \\ \vdots \\ -b(t) \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} c'_1(t)u_1(t) \\ \vdots \\ c'_n(t)u_n(t) \end{pmatrix},$$

o equivalentemente

$$\mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} -b(t) \\ \vdots \\ -b(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c'_1(t)u_1(t) \\ \vdots \\ c'_n(t)u_n(t) \end{pmatrix},$$

de tal forma que para cada $c'_f(t)$ se tendrá

$$c'_f(t) = \frac{-b(t)\sum_{j=1}^{n} g_{f,j}}{u_f(t)},$$

donde $g_{f,j}$ es el $(f, j)$-ésimo elemento de la matriz $\mathbf{A}^{-1}$, por lo que al integrar

$$c_f(t) = \sum_{j=1}^{n} g_{f,j} \int^{t} \frac{b(\xi)}{u_f(\xi)} d\xi,$$

obteniéndose así la solución particular del sistema de ecuaciones diferenciales ( 4.16 ).

A manera de ilustración se planteará un sistema de ecuaciones de solamente dos ecuaciones, para la cual

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\kappa_1 + \delta_1 & -\kappa_{1,2} \\ -\kappa_{2,1} & -\kappa_2 + \delta_2 \end{pmatrix}$$

cuyos eigenvalores son $\dfrac{-(\kappa_1 - \delta_1 + \kappa_2 - \delta_2) + \sqrt{(\kappa_1 - \delta_1 + \kappa_2 - \delta_2)^2 - 4(-\kappa_1\delta_2 - \delta_1\kappa_2 + \delta_1\delta_2)}}{2}$

y $\dfrac{-(\kappa_1 - \delta_1 + \kappa_2 - \delta_2) - \sqrt{(\kappa_1 - \delta_1 + \kappa_2 - \delta_2)^2 - 4(-\kappa_1\delta_2 - \delta_1\kappa_2 + \delta_1\delta_2)}}{2}$,

si $r = (\kappa_1 - \delta_1 + \kappa_2 - \delta_2)^2 - 4(-\kappa_1\delta_2 - \delta_1\kappa_2 + \delta_1\delta_2) > 0$, se originará la siguiente matriz de eigenvectores

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \dfrac{-\kappa_1 + \delta_1 + \kappa_2 - \delta_2 + \sqrt{r}}{2\kappa_{1,2}} & \dfrac{-\kappa_1 + \delta_1 + \kappa_2 - \delta_2 - \sqrt{r}}{2\kappa_{1,2}} \end{pmatrix},$$

la cual se diagonaliza en

$$\mathbf{D}=\begin{pmatrix} \dfrac{(\kappa_1-\delta_1+\kappa_2-\delta_2)^2+\sqrt{r}(\kappa_1-\delta_1+\kappa_2-\delta_2)+4(\kappa_1\delta_2+\delta_1\kappa_2-\delta_1\delta_2)}{-2\sqrt{r}} & 0 \\ 0 & \dfrac{-(\kappa_1-\delta_1+\kappa_2-\delta_2)^2+\sqrt{r}(\kappa_1-\delta_1+\kappa_2-\delta_2)-4(\kappa_1\delta_2+\delta_1\kappa_2-\delta_1\delta_2)}{-2\sqrt{r}} \end{pmatrix},$$

obteniéndose asi

$$c_1(t)=\left(\frac{\kappa_1+\delta_1+\kappa_2-\delta_2-\sqrt{r}}{2\sqrt{r}}\right)\int^{t} h(\xi)\exp(-\xi D_{1,1})d\xi$$

y

$$c_2(t)=\left(\frac{-\kappa_1-\delta_1-\kappa_2+\delta_2-\sqrt{r}}{2\sqrt{r}}\right)\int^{t} h(\xi)\exp(-\xi D_{2,2})d\xi\,,$$

siendo por tanto los valores de la reserva al sustituir en ( 4.18 )

$$\begin{aligned} V_1(t)=&\left(\frac{\kappa_1+\delta_1+\kappa_2-\delta_2-\sqrt{r}}{2\sqrt{r}}\right)\int^{t} h(\xi)e^{(t-\xi)D_{1,1}}d\xi+\\ &+\left(\frac{-\kappa_1-\delta_1-\kappa_2+\delta_2-\sqrt{r}}{2\sqrt{r}}\right)\int^{t} h(\xi)e^{(t-\xi)D_{2,2}}d\xi \end{aligned} \qquad (4.19)$$

y

$$\begin{aligned} V_2(t)=&\left(\frac{\kappa_1+\delta_1+\kappa_2-\delta_2-\sqrt{r}}{2\sqrt{r}}\right)\left(\frac{-\kappa_1+\delta_1+\kappa_2-\delta_2+\sqrt{r}}{2\kappa_{1,2}}\right)\int^{t} h(\xi)e^{(t-\xi)D_{1,1}}d\xi+\\ &+\left(\frac{-\kappa_1-\delta_1-\kappa_2+\delta_2-\sqrt{r}}{2\sqrt{r}}\right)\left(\frac{-\kappa_1+\delta_1+\kappa_2-\delta_2-\sqrt{r}}{2\kappa_{1,2}}\right)\int^{t} h(\xi)e^{(t-\xi)D_{2,2}}d\xi\,. \end{aligned} \qquad (4.20)$$

Resultado que será comprobado, obteniendo en primer lugar la derivada del valor de la reserva expresada en ( 4.19 )

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(V_t)_1=&\left(\frac{\kappa_1+\delta_1+\kappa_2-\delta_2-\sqrt{r}}{2\sqrt{r}}\right)\left(h(t)+D_{1,1}\int^{t} h(\xi)e^{(t-\xi)D_{1,1}}d\xi\right)+\\ &+\left(\frac{-\kappa_1-\delta_1-\kappa_2+\delta_2-\sqrt{r}}{2\sqrt{r}}\right)\left(h(t)+D_{2,2}\int^{t} h(\xi)e^{(t-\xi)D_{2,2}}d\xi\right) \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{\kappa_1 + \delta_1 + \kappa_2 - \delta_2 - \sqrt{r}}{2\sqrt{r}}\right)\left(D_{1,1}\int^{t} b(\xi)e^{(t-\xi)D_{1,1}}d\xi\right) +$$
$$+\left(\frac{-\kappa_1 - \delta_1 - \kappa_2 + \delta_2 - \sqrt{r}}{2\sqrt{r}}\right)\left(D_{2,2}\int^{t} b(\xi)e^{(t-\xi)D_{2,2}}d\xi\right) - b(t),$$

que deberá coincidir con el producto matricial

$$\mathbf{QV}_t^1 - \mathbf{b(t)} = \mathbf{QA}\begin{pmatrix} u_1(t)c_1(t) \\ u_2(t)c_2(t) \end{pmatrix} - \mathbf{b(t)} = \mathbf{AD}\begin{pmatrix} u_1(t)c_1(t) \\ u_2(t)c_2(t) \end{pmatrix} - \mathbf{b(t)}\,,$$

el cual para el elemento de interés es

$$\frac{d}{dt}V_1(t) = \sum_{s=1}^{2} a_{1,s}D_{s,s}\, u_s(t)c_s(t) - b(t)$$

$$= \sum_{s=1}^{2} D_{s,s}\exp(tD_{s,s})c_s(t) - b(t)\,,$$

por lo que de la sustitución del valor de $c_s(t)$ se tendrá

$$\frac{d}{dt}V_1(t) = \left(\frac{\kappa_1 + \delta_1 + \kappa_2 - \delta_2 - \sqrt{r}}{2\sqrt{r}}\right)\left(D_{1,1}\int^{t} b(\xi)e^{(t-\xi)D_{1,1}}d\xi\right) +$$
$$+\left(\frac{-\kappa_1 - \delta_1 - \kappa_2 + \delta_2 - \sqrt{r}}{2\sqrt{r}}\right)\left(D_{2,2}\int^{t} b(\xi)e^{(t-\xi)D_{2,2}}d\xi\right) - b(t).$$

Con lo que se ha comprobado que para la primera reserva el cálculo es correcto, siendo también cierto para la segunda reserva ( 4.20 ), lo cual se muestra a continuación obteniendo en primer lugar su derivada

$$\frac{d}{dt}V_2(t) = \left(\frac{\kappa_1 + \delta_1 + \kappa_2 - \delta_2 - \sqrt{r}}{2\sqrt{r}}\right)\left(\frac{-\kappa_1 + \delta_1 + \kappa_2 - \delta_2 + \sqrt{r}}{2\kappa_{1,2}}\right)\left(b(t) + D_{1,1}\int^{t} b(\xi)e^{(t-\xi)D_{1,1}}d\xi\right) +$$
$$+\left(\frac{-\kappa_1 - \delta_1 - \kappa_2 + \delta_2 - \sqrt{r}}{2\sqrt{r}}\right)\left(\frac{-\kappa_1 + \delta_1 + \kappa_2 - \delta_2 - \sqrt{r}}{2\kappa_{1,2}}\right)\left(b(t) + D_{2,2}\int^{t} b(\xi)e^{(t-\xi)D_{2,2}}d\xi\right),$$

que tras una serie de movimientos algebraicos queda como

$$\frac{d}{dt}V_2(t)=\left(\frac{\kappa_1+\delta_1+\kappa_2-\delta_2-\sqrt{r}}{2\sqrt{r}}\right)\left(\frac{-\kappa_1+\delta_1+\kappa_2-\delta_2+\sqrt{r}}{2\kappa_{1,2}}\right)\left(D_{1,1}\int_0^t b(\xi)e^{(t-\xi)\rho_{1,1}}d\xi\right)+$$
$$+\left(\frac{-\kappa_1-\delta_1-\kappa_2+\delta_2-\sqrt{r}}{2\sqrt{r}}\right)\left(\frac{-\kappa_1+\delta_1+\kappa_2-\delta_2-\sqrt{r}}{2\kappa_{1,2}}\right)\left(D_{2,2}\int_0^t b(\xi)e^{(t-\xi)\rho_{2,2}}d\xi\right)-b(t),$$

resultado idéntico al que se obtiene por medio del producto matricial

$$\frac{d}{dt}(V_t)_2=\sum_{s=1}^{2}a_{2,s}D_{s,s}u_s(t)c_s(t)-b(t).$$

### 4.4. Conclusiones

El vector solución que tiene por $i$ - ésimo elemento la esperanza de la pérdida, dado que actualmente el proceso se encuentra en el $i$-ésimo estado es obtenido a partir de la aplicación de técnicas de eigenvalores y eigenvectores al sistema de ecuaciones diferenciales $\frac{d}{dt}\mathbf{V}_t^{(n)}=-\mathbf{b}(t)+\mathbf{Q}\mathbf{V}_t^{(n)}$, que a su vez se origina en la aplicación de la fórmula de Itô a la diferencial de los momentos de la martingala $M_t$.

Habiéndose obtenido tal vector solución, se podrán obtener de manera recursiva los momentos de orden mayor de la variable aleatoria, asistiéndose para tal fin de la representación matricial del sistema de ecuaciones, que para el caso 3 es

$$\frac{d}{dt}\mathbf{V}_t^{(n)}=-gb(t)\,\mathbf{V}_t^{(n-1)}+\mathbf{Q}\,\mathbf{V}_t^{(n)}.$$

Lo cual no se plantea en este capítulo ni en el siguiente debido a que en cálculo actuarial difícilmente resultará de interés un momento de orden mayor .

# Capitulo 5

# REEXPRESIÓN DE VALORES ACTUARIALES

## 5.1. Introducción

Es conocido por todo aquel que se considere conocedor de las técnicas actuariales que los valores presentes propios de éstas se encuentran constituidos por dos factores: el probabilistico relacionado con la incertidumbre de los pagos y el financiero, cuya presencia obedece al interés.

Habiéndose ya estudiado en los capitulos precedentes la introducción de las cadenas de Markov en el cálculo actuarial para la obtención de probabilidades de transición , y para el cálculo de reservas, sólo resta entonces enfocar la atención hacia los posibles flujos de efectivo en situaciones más concretas, esto es, para valores actuariales ampliamente conocidos como lo son los seguros y las anualidades. Estos por supuesto fueron conocidos por la mayoria de los actuarios en textos como el Life Contengencies y el Actuarial Mathematics, aunque en forma limitada por el enfoque deterministico y probabilistico (de nivel introductorio) que manejan cada uno de ellos, muy propios de su tiempo.

Como se explicó en el capitulo anterior, el tipo de interés que estará vigente en un momento dado, es un proceso estocástico, que puede ser ajustado a un modelo de cadenas de Markov, por lo que si se emplean tales ideas se podrian obtener valores más convenientes que los obtenidos bajo la tradicional suposición de una sola tasa de interés. Sin embargo este capitulo, no requerirá de estas ideas, ya que éste, tiene por objetivo mostrar que se pueden emplear las cadenas de Markov para el cálculo de valores actuariales ampliamente conocidos, los cuales suponen una tasa de interés constante, por lo que se limitará el uso de las cadenas de Markov exclusivamente a modelar el proceso de los pagos que se habrán de realizar, en función de la posición en el espacio de estados de quienes hayan contratado ya sea una anualidad o un seguro, dejándose a un lado la incertidumbre que rodea al interés, mediante la ya mencionada suposición de una sola tasa de interés.

El desarrollo de este capitulo se hará empezando por la explicación de lo que significa el cálculo de las anualidades, para continuar del mismo modo con los seguros y terminar con las anualidades testamentarias, que en cierto modo engloban a quienes le antecedieron en esta lista, y haciendo notar tanto las diferencias como las similitudes existentes con los enfoques tradicionales ya mencionados.

Desde luego, las herramientas explicadas en los capitulos previos, serán utilizadas tanto para realizar los cálculos necesarios que permitan alcanzar los propósitos ya mencionados de este capitulo (el cual es el último de este trabajo) como para la obtención de un método alternativo que permita el cálculo de los valores presentes, siendo para este fin las nociones del capitulo 3, sobre fuerzas de transición constantes a trozos, tales herramientas.

## 5.2. Anualidades

Se puede definir una anualidad en un sentido muy generalizado como una serie de pagos a realizarse mientras una situación especifica no cambie, dichos pagos se harán al transcurrir intervalos de tiempo iguales y no necesariamente anuales.

Las anualidades se clasifican en dos grandes grupos :

1.- Ciertas.
2.- Contingentes.

Las anualidades ciertas son aquellas en las que se conoce de antemano el número de pagos que se realizarán asi como el importe de éstos, para los que la situación que deberá prevalecer es el periodo en el que se realizaran los pagos, por lo que el evento que pone fin a esta situación es simplemente llegar a una fecha, la cual no está sujeta a la incertidumbre sobre si llegara o no (a menos que ocurriese el fin del mundo, pero para entonces ya nada importaria).

En el caso de las anualidades contingentes no se conoce el número de pagos que se habrán de efectuar, como consecuencia que éstos están en función de que una situación previamente acordada prevalezca, la cual cambiará al ocurrir un evento incierto. En cuanto al monto de sus pagos estos serán preestablecidos, por si llegan a realizarse.

En otros términos, las anualidades ciertas son aquellas para las cuales sus flujos de efectivo son conocidos con toda seguridad, mientras que para las anualidades contingentes no son conocidos. Tal vez resulte innecesario e incluso repetitivo mencionar que las anualidades contingentes serán en esta sección el sujeto de estudio por su naturaleza estocástica que las constituye como parte del cálculo actuarial.

Entrando en materia, es decir, en el contexto de los procesos estocásticos se puede afirmar que una anualidad contingente se pagará mientras un individuo o grupo de individuos, permanezca en un estado previamente acordado, por lo que si se emplea la notación de decrementos secundarios del texto "Life Contengencies" se debe definir como $\bar{a}_x{}^{i,j}$ a la anualidad que se pagará a una persona o grupo de personas (siendo denotados cualesquiera de los dos por $x$), desde el momento en que éste pase al estado $j$ y mientras permanezca en él, estando actualmente en el estado $i$, se procede de esta forma con el objeto de que sea comprensible para actuarios de toda época, aunque cabe aclarar que hasta la fecha no hay una convención universal al respecto.

El caso mas sencillo de esta anualidad es desde luego $\bar{a}_x{}^{i,i}$, es decir el valor presente de la anualidad cuyos pagos se realizarán mientras el individuo (o grupo de individuos) permanezca en el estado $i$, estando ya de antemano en él. Este valor presente como explica el Actuarial Mathematics estará dado por la esperanza de $\bar{a}_{\overline{\xi}|}$ ; esto es

$$\overline{a}_x^{i} = \int_0^{\infty} p_{i,i}(x, x+\xi)\,\mu_{x+\xi}^{(i,i)}\,\overline{a}_{\overline{\xi|}}\,d\xi \qquad (5.1)$$

$$= \int_0^{\infty} p_{i,i}(x, x+\xi)\,v^{\xi}\,d\xi\,. \qquad (5.2)$$

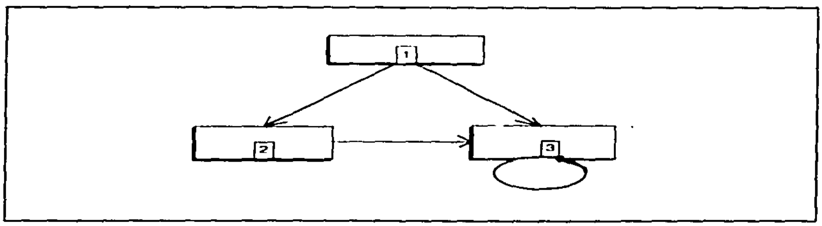
Siendo un caso particular de ésta la anualidad vitalicia $\overline{a}_x$ ( cuando $x$ es una persona y sólo hay dos estados: vivo y muerto ). Entre las anualidades contingentes destacan las temporales, para éstas como su nombre lo indica, además de que debe prevalecer la condición o situación previamente acordada, no deberá sobrepasarse cierta fecha, es decir, aún cuando las condiciones vigentes sean las acordadas para la realización de los pagos, si se sobrepasa cierta fecha estos ya no se realizarán. En cuanto al cálculo de las anualidades temporales solo es necesario cambiar el intervalo sobre el que se integra sustituyendo el infinito por la duración del periodo y para el caso discreto cambiando del mismo modo el índice superior de la suma.

Otro caso que de entre las anualidades destaca y que desde luego merece una mención especial, es la función esperanza de vida, la cual en el modelo de dos estados mencionado en el párrafo anterior es la misma anualidad vitalicia solo que con tasa de interés igual a cero.

A diferencia de lo que sucede con la anualidad, el nombre esperanza de vida es muy preciso en cuanto a lo que busca definir e incluso sugiere a quien no posee ni conocimientos actuariales ni demográficos una noción sobre lo que en realidad es, es decir la esperanza de vida es el tiempo que se espera le resta de vida a una persona de edad $x$, lo que se puede expresar como la esperanza de la variable aleatoria $T$ que toma por espacio muestral los diferentes valores del tiempo que puede vivir una persona. Por todo lo anterior la esperanza de vida es

$$E[T] = \mathring{e}_x\,.$$

Para el modelo de estados múltiples el cálculo de esta esperanza no será tan sencillo como para cuando solo hay dos estados, dicho cálculo estará en función del número de estados por los que puede pasar una persona mientras se encuentre vivo, por lo que se propondrá de manera ilustrativa el siguiente modelo de estados excluyentes:



Donde el estado 1 corresponde a quien no está discapacitado, es decir, todas sus habilidades fisicas asi como sus sentidos funcionan, el 2 será el estado discapacitado, al cual se pasará cuando el individuo pierda una o más de sus habilidades o de sus sentidos y el 3 será el estado muerto, el cual es un estado absorbente que no necesita definición

Para calcular la esperanza de vida es necesario tener la función de densidad, para la cual se partirá del hecho que

$$p_{1,3}(x,x+v) = p_{1,3}(x,x+u) + p_{1,2}(x,x+u)\,p_{2,3}(x+u,x+v) + \\ + p_{1,1}(x,x+u)\,p_{1,3}(x+u,x+v)$$

con, desde luego $v \geq u \geq 0$.

Si se hace que tienda a cero la diferencia entre $v$ y $u$

$$d\,p_{1,3}(x,x+u) = p_{1,2}(x,x+u)\,\mu_{2,3}(x+u)du + p_{1,1}(x,x+u)\,\mu_{1,3}(x+u)du\ ,$$

de manera que

$$\frac{d}{du}p_{1,3}(x,x+u) = p_{1,2}(x,x+u)\,\mu_{2,3}(x+u) + p_{1,1}(x,x+u)\,\mu_{1,3}(x+u),$$

que es la función de densidad que se necesita (ecuación de Kolmogorov ), y que puede ser expresada como

$$\frac{d}{du}p_{1,3}(x,x+u) = \int_0^u p_{1,1}(x,x+\xi)\,\mu_{1,2}(x+\xi)\,p_{2,2}(x+\xi,x+u)d\xi\,\mu_{2,3}(x+u) + \\ + p_{1,1}(x,x+u)\,\mu_{1,3}(x+u)\quad .$$

A partir de esto la esperanza de vida es (se utiliza el subindice 1 porque es partiendo del estado 1)

$$E[T_1] = \int_0^{\infty}\int_0^{u} p_{1,1}(x,x+\xi)\,\mu_{1,2}(x+\xi)\,p_{2,2}(x+\xi,x+u)d\xi\,\mu_{2,3}(x+u)u\,du + \\ + \int_0^{\infty} p_{1,1}(x,x+u)\,\mu_{1,3}(x+u)du,$$

de tal forma que al reagrupar

$$E[T_1] = \int_0^{\infty} u\left[\int_0^u p_{1,1}(x,x+\xi)\,\mu_{1,2}(x+\xi)\,p_{2,2}(x+\xi,x+u)d\xi\,\mu_{2,3}(x+u) + p_{1,1}(x,x+u)\,\mu_{1,3}(x+u)\right]du\ ,$$

resolviéndose por partes, al hacer $s = u$ y

$$dt = \int_0^{\omega}\Big(p_{1,1}(x,x+\xi)\mu_{1,2}(x+\xi)\,p_{2,2}(x+\xi,x+u)d\xi\,\mu_{2,3}(x+u) + $$
$$+ p_{1,1}(x,x+u)\mu_{1,3}(x+u)\Big)du$$

**se tendrá que**

$$ds = du$$

**y**

$$t = -1 + \int_0^{\omega}\int_0^{\eta} p_{1,1}(x,x+\xi)\mu_{1,2}(x+\xi)p_{2,2}(x+\xi,x+u)d\xi\,\mu_{2,3}(x+\eta) +$$
$$+ p_{1,1}(x,x+\eta)\mu_{1,3}(x+\eta)d\eta,$$

**con lo que resulta**

$$\begin{aligned} E[T_1] &= -u(1-p_{1,3}(x,x+u))\Big|_0^{\omega-x} + \int_0^{\omega-x}\Big(1-p_{1,3}(x,x+u)\Big)du \\ &= \int_0^{\omega-x}\Big(1-p_{1,3}(x,x+u)\Big)du \\ &= \int_0^{\omega-x}\Big[p_{1,1}(x,x+u)+p_{1,2}(x,x+u)\Big]du \end{aligned} \qquad (5.3)$$

**resultando ya innecesario demostrar la esperanza de vida cuando el individuo está en este instante en el segundo estado, la cual es**

$$E[T_2] = \int_0^{\omega-x} u\Big[p_{2,2}(x,x+u)\Big]\mu_{2,3}(x+u)du$$

$$= \int_0^{\omega-x}\Big(1-p_{2,3}(x,x+u)\Big)du\,. \qquad (5.4)$$

**Se pueden observar dos puntos :**

**En primer lugar como ya se mencionó ésta es una anualidad con tasa de interés igual a cero y en segundo lugar las expresiones del cálculo actuarial para la esperanza de vida son un caso particular ( nuevamente ) de las ofrecidas con cadenas de Markov, estas expresiones a las que se ha hecho referencia en este último párrafo a manera de recordatorio son :**

$$\begin{aligned} E[T] &= \int_0^{\omega-x} u\big[{}_u p_x\big]\mu_{x+u}du \\ &= \int_0^{\omega-x}\big[{}_u p_x\big]du \end{aligned} \qquad (5.5)$$

### 5.3. Seguros

Un seguro es un contrato que obliga a una de las partes (aseguradora) a dar protección de carácter económico a su contraparte (asegurado) en caso que le ocurra un siniestro. Los seguros se clasifican en función del interés asegurable en:

1.- Vida.
2.- Accidentes y enfermedades.
3.-Daños.

Dividiéndose a su vez daños en :

Agricola y ganadero.
Autos.
Responsabilidad civil.
Incendio y terremoto.
Maritimo.
Diversos.

En lo que resta de esta sección se estudiará el cálculo actuarial de vida, ya que éste es al que se está tratando de explicar en términos de cadenas de Markov. Por lo que se hablará en lo restante en términos propios de este tipo de seguros.

Un seguro otorgará sus beneficios cuando tenga lugar un cambio de estado de un individuo o grupo de individuos hacia otro estado en particular, tanto el estado como el beneficio serán preestablecidos al contratarse el plan, es decir, el beneficio podrá crecer o decrecer con el tiempo o permanecer constante según haya sido acordado.

Sea $b_\xi$ el beneficio que se otorgará al momento $\xi$ por pasar hacia el estado acordado, al suceder el siniestro. Para encontrar el valor presente del seguro se deberá obtener la esperanza de $b_\xi v^\xi$, en el mismo modo como se procede en el Actuarial Mathematics, para el cálculo de dicha esperanza será necesario contar con la función de densidad de probabilidades adecuada, la cual estará en función de los estados por los que se pueda mover el asegurado .

Si el beneficio se otorgará por la salida del estado actual $i$ hacia cualquier otro usando la distribución exponencial como en el capitulo 1, se tendrá que el valor presente o esperanza es:

$$\overline{A}_u^{(i,S-i)} = \int_0^{\infty} \exp\left(\int_0^{\xi} \mu_{u+\eta}^{(i,\cdot)} d\eta\right) \quad \mu_{u+\xi}^{(i,S-i)} v^{\xi} b_{\xi} d\xi . \qquad (5.6)$$

Donde $u$ representa cualquier status que como se recordará en la literatura actuarial hace referencia a un conjunto de personas (e.g.vida individual, vidas conjuntas, último sobreviviente, etc;), por lo que no se deberá confundir con la idea de los estados que se ha manejado en el marco de los procesos estocásticos.

Mientras que si el beneficio se otorga por el brinco hacia un estado en particular y absorbente $k$, partiendo del estado $i$, entonces

$$\overline{A}_u^{(i,k)} = \int_0^{\tau} \sum_{\forall j,\, j \neq k} p_{i,j}(u, u+\xi)\mu_{u+\xi}^{(j,k)} v^{\xi} b_{\xi} d\xi . \qquad (5.7)$$

Supóngase como se hizo en el capitulo 3 que las fuerzas de transición son constantes a trozos en forma anual, esto es

$$\overline{A}_u^{(i,k)} = \sum_{w=0}^{\tau}\left[\int_0^1 \sum_{\forall j,\, j \neq k} \sum_{\forall f,\, f \neq k} p_{i,f}(u, u+w) p_{f,j}(u+w, u+w+\xi)\mu_{u+w+\xi}^{(j,k)} v^{\xi+w} b_{\xi+w} d\xi\right],$$

de tal forma que al reacomodar operadores resulta que

$$\overline{A}_u^{(i,k)} = \sum_{w}^{\tau} \sum_{\forall f,\, f \neq k} p_{i,f}(u, u+w)\left[\int_0^1 \sum_{\forall j,\, j \neq k} p_{f,j}(u+w, u+w+\xi)\mu_{u+w+\xi}^{(j,k)} v^{w+\xi} b_{w+\xi} d\xi\right].$$

Sustituyendo los productos punto adecuados y derivados de la diagonalización ya estudiada en el capítulo tres (bajo el supuesto de homogeneidad anual) se llega a la expresión

$$\overline{A}_u^{(i,k)} = \sum_{w=0}^{\tau} \sum_{\forall f,\, f \neq k} p_{i,f}(u, u+w)\left[\int_0^1 \sum_{\forall j,\, j \neq k} \left\{\sum_{g=1}^{n} a_{f,g}^{(u+w+1)} \exp^{\lambda_g^{(u+w+1)}(\xi)} c_{g,j}^{(u+w+1)}\right\}\mu_{u+w+\xi}^{(j,k)} v^{w+\xi} b_{w+\xi} d\xi\right]$$

donde puede reexpresarse el factor correspondiente al valor presente, resultando

$$\overline{A}_u^{(i,k)} = \sum_{w=0}^{\tau} \sum_{\forall f,\, f \neq k} p_{i,f}(u, u+w) v^{w}\left[\int_0^1 \sum_{\forall j,\, j \neq k} \left\{\sum_{g=1}^{n} a_{f,g}^{(u+w+1)} \exp\left[(\lambda_g^{(u+w)} - \delta)\xi\right] c_{g,j}^{(u+w+1)}\right\}\mu_{u+w+\xi}^{(j,k)} b_{w+\xi} d\xi\right]$$

o equivalentemente

$$\overline{A}_u^{(i,k)} = \sum_{w=0}^{\tau} \sum_{\forall f,\, f \neq k} p_{i,f}(u, u+w) v^{w}\left[\sum_{\forall j,\, j \neq k} \left\{\sum_{g=1}^{n} a_{f,g}^{(u+w+1)}\left[\int_0^1 \mu_{u+w+\xi}^{(j,k)} \exp\left[(\lambda_g^{(u+w)} - \delta)\xi\right] b_{w+\xi} d\xi\right] c_{g,j}^{(u+w+1)}\right\}\right].$$

Esta última expresión ha sido obtenida con la finalidad de facilitar el cálculo del valor presente del seguro, y mostrar la utilidad de los conceptos vistos en el capitulo 3.

En lo que resta de este capitulo se estudiarán planes que también otorgan su protección en el caso que ocurra un siniestro, con la diferencia que en los venideros los beneficios no se limitarán a un solo pago como indemnización y además se estudiarán situaciones más complejas y mucho más interesantes.

## 5.4. Anualidades Testamentarias

Las anualidades testamentarias en términos generales son aquellas que otorgan sus beneficios a una persona o grupo de personas, desde el momento en que otra persona o grupo de personas desaparecen y hasta que los beneficiarios desaparezcan.

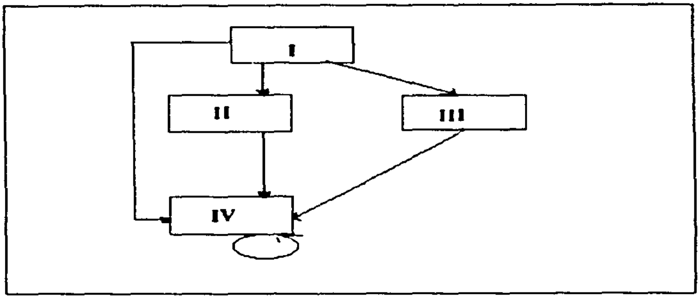
Ejemplo y caso más representativo de estas anualidades es cuando el sostén económico de una familia, preocupado por el bienestar de los suyos, busca evitar que éstos caigan en el desamparo causado por su posible fallecimiento, por lo que decide adquirir una anualidad que otorgará sus beneficios desde el momento en que ocurra éste y durante un periodo al gusto del comprador y estando desde luego vivos sus beneficiarios.

Esta sección tiene por objetivo y por hipótesis reexpresar las anualidades testamentarias en función de cadenas de Markov, por lo que en primer lugar se pondrá atención en el aspecto demográfico, es decir, el analizado en el capitulo 2: fuerzas de transición y probabilidades de transición.

Este análisis sobre anualidades testamentarias se hará para el ejemplo clásico ya mencionado unas lineas atrás, en el que concretamente un padre de familia dará protección a su descendencia (conformada por $n$ personas ) en caso de que el fallezca.

Se definirán entonces a $x$ como la edad del padre y a $y_i$ como la edad del $i$-ésimo beneficiario al momento de contratarse la póliza. Los estados por los que se desplacen ambos estarán en función de su sobrevivencia, esto es, cuando el jefe de familia y al menos uno de los beneficiarios permanecen vivos se dirá que se encuentran en el estado $I$, en caso que el jefe de la familia haya muerto y de nueva cuenta al menos uno de sus beneficiarios continúe con vida el estado será el $II$, mientras que en el caso en que todos los beneficiarios hayan muerto y el jefe de la familia siga con vida el estado será el $III$, finalizando en el estado $IV$ cuando tanto los beneficiarios como el sostén economico hayan fallecido.

Gráficamente el movimiento de los involucrados es




Se recordará que en el cálculo actuarial para el modelo de vidas conjuntas, se hace la suposición de independencia estocástica entre las vidas que lo constituyen, esta misma suposición será adoptada en el modelo de cadenas de Markov. Por tal razón se considerará que los beneficiarios solo podrán estar en dos estados: vigente $(g)$ y no vigente $(n)$, mientras que la persona que contrató la anualidad solo podrá estar vivo $(v)$ o muerto $(m)$.

Es justo aclarar que se utilizará, como es costumbre en el vocabulario actuarial, el término vigente para identificar el evento que un status no se ha desintegrado, en el caso que se estudia esto sería decir que al menos uno de los beneficiarios continuará con vida ( último sobreviviente ).

Retomando la idea central se tendrán los siguientes procesos estocásticos:

$X_t$ que corresponde al estado en el que se encuentra el sostén económico al momento $t$ y $Y_t$ asociado con el estado en que se encuentran los beneficiarios al momento $t$. Teniendo por espacios de estados, los mencionados con anterioridad y las intensidades de transición :

$\lambda_{v,m}(t)$ para el sostén económico y

$\kappa_{g,n}(t)$ para los beneficiarios.

Mientras que las de no sufrir transición son, por supuesto sus respectivos neutros aditivos.

Con todos estos elementos ya se está en posición de tratar de alcanzar las metas propuestas para esta sección, por lo que si se retoman los conceptos ya mencionados en el capitulo 4 en relación a las cadenas de Markov independientes, en relación a las fuerzas de transición se obtendrá que

$$
\begin{aligned}
&\mu_{I,II'}(t)=\mu_{v,g,m,n}(t)=0\\
&\mu_{I,III}(t)=\mu_{v,g,v,n}(t)=\kappa_{g,n}(t),\\
&\mu_{I,II}(t)=\mu_{v,g\,m,g}(t)=\lambda_{v,m}(t),\\
&\mu_{II,II'}(t)=\mu_{m,g,m\,n}(t)=\kappa_{g,n}(t),\\
&\mu_{III,II'}(t)=\mu_{v,n,m,n}(t)=\lambda_{v,m}(t),
\end{aligned}
\qquad (5.8)
$$

donde $\kappa_{g,n}=\mu_{\overline{y_1\ \ y_n}}(t)$ es el valor de la fuerza de desaparición del modelo de último sobreviviente, $\lambda_{v,m}=\mu_{x,t}$ es la ampliamente conocida fuerza de mortalidad y $\mu_{I,IV}(t)=0$ por la independencia estocástica.

Si en este momento se trata de construir la matriz de fuerzas de transición, se tendrá que solo falta el elemento $\mu_{I,I}$ que corresponde a la intensidad de no sufrir transición en el estado *I*, por lo que para su deducción se empleará el hecho de que

$$\sum_{k=I}^{II'}\mu_{I,k}(t)=0,$$

suma que al sustituir los valores de las $\mu_{I,k}$ *(t)* queda como

$$\mu_{I,I}(t)+\mu_{x,t}+\mu_{\overline{y_1\ \ y_n}}(t)=0$$

o

$$\mu_{I,I}(t)-\frac{d}{dt}\log{}_tp_x-\frac{d}{dt}\log{}_tp_{\overline{y_1\ \ y_n}}=0$$

Usando la ley para el logaritmo de un producto se tendrá

$$\mu_{I,I}(t)=\frac{d}{dt}\log\left[\left({}_tp_x\right){}_tp_{\overline{y_1\ \ y_n}}\right]$$

$$=\frac{d}{dt}\log\left[\left({}_tp_{x\overline{y_1\ \ y_n}}\right)\right]$$

$$=-\mu_{x\overline{y_1\ \ y_n}}(t),$$

quedando de esta manera la matriz de transiciones Q como

$$\begin{pmatrix} \mu_{x\overline{v_1 \cdots v_n}}(t) & \mu_{x+t} & \mu_{\overline{v_1 \cdots v_n}}(t) & 0 \\ 0 & -\mu_{\overline{v_1 \cdots v_n}}(t) & 0 & \mu_{\overline{v_1 \cdots v_n}}(t) \\ 0 & 0 & -\mu_{x+t} & \mu_{x+t} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (5.9)$$

A continuación se procederá a citar los resultados dados por el cálculo actuarial para las probabilidades de transición:

$p_{I,I}(0,u) = {}_u p_{x\overline{v_1 \cdots v_n}}$ Probabilidad de que el sostén económico y al menos uno de sus beneficiarios, sigan vivos al cabo de $u$ años ( vidas conjuntas ) ( 5.10 )

$p_{I,II}(0,u) = \left(1 - {}_u p_x\right) {}_u p_{\overline{v_1 \cdots v_n}}$ Probabilidad de que al cabo de u años el sostén económico haya muerto, sobreviviendo al menos uno de los suyos ( 5.11 )

$p_{I,III}(0,u) = \left(1 - {}_u p_{\overline{v_1 \cdots v_n}}\right) {}_u p_x$ Probabilidad de que todos los beneficiarios hayan muerto antes de $u$ años y sobreviviéndoles el sostén ( 5.12 )

$p_{I,IV}(0,u) = \left(1 - {}_u p_{\overline{v_1 \cdots v_n}}\right)\left(1 - {}_u p_x\right)$ Probabilidad que tanto los beneficiarios como el sostén económico hayan muerto antes de $u$ años ( 5.13 )

$p_{II,IV}(0,u) = \left(1 - {}_u p_{\overline{v_1 \cdots v_n}}\right)$ Probabilidad que los beneficiarios mueran antes de $u$ años, habiendo muerto antes el sostén económico ( 5.14 )

$p_{III,IV}(0,u) = \left(1 - {}_u p_x\right)$ Probabilidad que el sostén económico muera antes de $u$ años, habiendo muerto antes sus beneficiarios ( 5.15 )

Si se desea comprobar la eficacia de las cadenas de Markov para modelar las anualidades testamentarias se tendrá que llegar a los resultados anteriores a través de éstas, mostrándose a continuación los procedimientos de tal fin.

Para $p_{I,II}(0,u)$ se tiene al partir de la solución de las ecuaciones de Kolmogorov que

$$p_{I,II}(0,u) = \int_0^u p_{I,I}(0,\xi)\, \mu_{I,II}(\xi)\, p_{II,II}(\xi,u)\, d\xi$$

$$= \int_0^u \exp\left(\int_0^\xi \mu_{I,I}(\eta)\, d\eta\right) \mu_{I,II}(\xi) \exp\left(\int_\xi^u \mu_{II,II}(\eta)\, d\eta\right) d\xi$$

$$= \int_0^u \exp\left(\int_0^\xi \left(\frac{d}{d\eta}\log_n p_{x\overline{y_1\cdots y_n}}\right)d\eta\right)\mu_{I,II}(\xi)\exp\left(\int_\xi^u \left(\frac{d}{d\eta}\log_n p_{\overline{y_1\cdots y_n}}\right)d\eta\right)d\xi$$

$$= \int_0^u \left({}_\xi p_{x\overline{y_1\cdots y_n}}\,\mu_{I,II}(\xi)\,\frac{{}_u p_{\overline{y_1\cdots y_n}}}{{}_\xi p_{\overline{y_1\cdots y_n}}}\right)d\xi$$

$$= \int_0^u \left({}_\xi p_{x\overline{y_1\cdots y_n}}\left(\frac{1}{{}_\xi p_x}\frac{d\,{}_\xi p_x}{d\xi}\right)\frac{{}_u p_{\overline{y_1\cdots y_n}}}{{}_\xi p_{\overline{y_1\cdots y_n}}}\right)d\xi$$

$$= {}_u p_{\overline{y_1\cdots y_n}}\int_0^u \left(-\frac{d\,{}_\xi p_x}{d\xi}\right)d\xi$$

$$= {}_u p_{\overline{y_1\cdots y_n}}\left(1 - {}_u p_x\right)$$

**que corresponde a lo expresado en ( 5.11 ). De manera semejante para $p_{I,I}(0,u)$ se tiene**

$$p_{I,I}(0,u) = \exp\left(\int_0^u \mu_{I,I}(\eta)d\eta\right)$$

$$= \exp\left(-\int_0^u \mu_{x\overline{y_1\cdots y_n}}(\eta)d\eta\right)$$

$$= \exp\left(\int_0^u \left(\frac{d}{d\eta}\log_n p_{x\overline{y_1\cdots y_n}}\right)d\eta\right)$$

$$= {}_u p_{x\overline{y_1\cdots y_n}}$$

**que es la igualdad ( 5.10 ).**

**Para $p_{I,III}(0,u)$ resulta**

$$p_{I,III}(0,u) = \int_0^u p_{I,I}(0,\xi)\,\mu_{I,III}(\xi)\,p_{III,III}(\xi,u)d\xi$$

$$= \int_0^u \exp\left(\int_0^\xi \mu_{I,I}(\eta)d\eta\right)\mu_{I,III}(\xi)\exp\left(\int_\xi^u \mu_{III,III}(\eta)d\eta\right)d\xi$$

$$= \int_0^u \exp\left(\int_0^\xi \left(\frac{d}{d\eta}\log_e {}_\eta p_{x \overline{y_1 \ldots y_n}}\right) d\eta\right) \mu_{I,III}(\xi) \exp\left(\int_\xi^u \left(\frac{d}{d\eta}\log_e {}_\eta p_x\right) d\eta\right) d\xi$$

$$= \int_0^u \left({}_\xi p_{x \overline{y_1 \ldots y_n}}\, \mu_{I,III}(\xi) \frac{{}_u p_x}{{}_\xi p_x}\right) d\xi$$

$$= \int_0^u \left({}_\xi p_{x \overline{y_1 \ldots y_n}} \left(\frac{-1}{{}_\xi p_{\overline{y_1 \ldots y_n}}} \frac{d\,{}_\xi p_{\overline{y_1 \ldots y_n}}}{d\xi}\right) \frac{{}_u p_x}{{}_\xi p_x}\right) d\xi$$

$$= {}_u p_x \int_0^u \left(\left(-\frac{d\,{}_\xi p_{\overline{y_1 \ldots y_n}}}{d\xi}\right)\right) d\xi$$

$$= \left(1 - {}_u p_{\overline{y_1 \ldots y_n}}\right)\left({}_u p_x\right),$$

resultado idéntico al de la igualdad ( 5.12 ).

Con miras de calcular $p_{II,II'}(0,u)$, se obtendrá $p_{II,II}(0,u)$ que es la probabilidad de su evento complementario

$$p_{II,II}(0,u) = \exp\left(\int_0^u \mu_{II,II}(\eta) d\eta\right)$$

$$= \exp\left(-\int_0^u \mu_{\overline{y_1 \ldots y_n}}(\eta) d\eta\right)$$

$$= \exp\left(\int_0^u \left(\frac{d}{d\eta}\log_e {}_\eta p_{\overline{y_1 \ldots y_n}}\right) d\eta\right)$$

$$= {}_u p_{\overline{y_1 \ldots y_n}}$$

por lo que

$$p_{II,II'}(0,u) = 1 - {}_u p_{\overline{y_1 \ldots y_n}},$$

resultado idéntico a lo expresado en la igualdad ( 5.14 ). Como en el caso anterior para la probabilidad $p_{III,III}(0,u)$, tenemos

$$p_{III,III}(0,u) = \exp\left(\int_0^u \mu_{III,III}(\eta) d\eta\right)$$

$$= \exp\left(-\int_0^u \mu_{x+\eta}\, d\eta\right)$$

$$= \exp\left[\int_0^u \frac{d}{d\eta} \log {}_{\eta}p_x \, d\eta\right]$$

$$= {}_{u}p_x ,$$

por tanto

$$p_{III,IV'}(0,u) = 1 - {}_{u}p_x$$

que corresponde a la igualdad ( 5.15 ).

Ya se ha mencionado que la probabilidad $p_{I,IV'}(0,u)$ no se podrá calcular valiéndonos de una fuerza de transición que parta del estado $I$ y vaya al $IV'$ (ya que ésta es cero, por la independencia). Sin embargo para pasar del estado $I$ al $IV'$ hay dos caminos :

$$I \rightarrow III \rightarrow IV'$$
$$I \rightarrow II \rightarrow IV'$$

Por lo que para la probabilidad que se busca, al utilizarse la función de densidad apropiada se tendrá que

$$p_{I,IV'}(0,u) = \int_0^u p_{I,I}(0,\xi)\,\mu_{I,III}(\xi) \int_\xi^u p_{III,III}(\xi,\eta)\,\mu_{III,IV'}(\eta)\, d\eta\, d\xi$$

$$+ \int_0^u p_{I,I}(0,\xi)\,\mu_{I,II}(\xi) \int_\xi^{\omega-x} p_{II,II}(\xi,\eta)\,\mu_{II,IV'}(\eta)\, d\eta\, d\xi$$

$$= \int_0^u {}_{\xi}p_{x\,\overline{y_1\,y_n}}\,\mu_{x+\xi} \int_\xi^u \frac{{}_{\eta}p_{\overline{y_1\,y_n}}}{{}_{\xi}p_{\overline{y_1\,y_n}}}\,\mu_{\overline{y_1\,y_n}}(\eta)\, d\eta\, d\xi + \int_0^u {}_{\xi}p_{x\,\overline{y_1\,y_n}}\,\mu_{\overline{y_1\,y_n}}(\xi) \int_\xi^u \frac{{}_{\eta}p_x}{{}_{\xi}p_x}\,\mu_{x+\eta}\, d\eta\, d\xi$$

$$= \int_0^u -d\,{}_{\xi}p_x \int_\xi^u -d\,{}_{\eta}p_{\overline{y_1\,y_n}} + \int_0^u -d\,{}_{\xi}p_{\overline{y_1\,y_n}} \int_\xi^u -d\,{}_{\eta}p_x$$

$$= \int_0^u -d\,{}_{\xi}p_x \left(-{}_{u}p_{\overline{y_1\,y_n}} + {}_{\xi}p_{\overline{y_1\,y_n}}\right) + \int_0^u -d\,{}_{\xi}p_{\overline{y_1\,y_n}}\left(-{}_{u}p_x + {}_{\xi}p_x\right)$$

$$= \int_0^u \left[\frac{d\,{}_{\xi}p_x}{d\xi}\,{}_{u}p_{\overline{y_1\,y_n}} + \frac{d\,{}_{\xi}p_{\overline{y_1\,y_n}}}{d\xi}\,{}_{u}p_x - \frac{d\,{}_{\xi}p_{\overline{y_1\,y_n}}}{d\xi}\,{}_{\xi}p_x - \frac{d\,{}_{\xi}p_x}{d\xi}\,{}_{\xi}p_{\overline{y_1\,y_n}}\right] d\xi$$

$$= \int_0^u \left[ \frac{d\,{}_\xi p_x}{d\xi}\,{}_\xi p_{\overline{y_1 \cdots y_n}} + \frac{d\,{}_\xi p_{\overline{y_1 \cdots y_n}}}{d\xi}\,{}_\xi p_x - \frac{d\,{}_\xi p_{\overline{y_1 \cdots y_n}\,x}}{d\xi} \right] d\xi$$

$$= {}_u p_{\overline{y_1 \cdots y_n}}\left({}_u p_x - 1\right) + {}_u p_x\left({}_u p_{\overline{y_1 \cdots y_n}} - 1\right) - {}_u p_{\overline{y_1 \cdots y_n}\,x} + 1$$

$$= -{}_u p_{\overline{y_1 \cdots y_n}} - {}_u p_x + {}_u p_{\overline{y_1 \cdots y_n}\,x} + 1$$

$$= \left(1 - {}_u p_x\right)\left(1 - {}_u p_{\overline{y_1 \cdots y_n}}\right),$$

resultado idéntico al expuesto en la ( 5.13 ).

Con los resultados anteriores se puede constituir la matriz de probabilidades de transición siguiente

$$\mathbf{P}(0,u) = \begin{pmatrix} {}_u p_{x\overline{y_1 \cdots y_n}} & {}_u p_{\overline{y_1 \cdots y_n}}(1-{}_u p_x) & {}_u p_x(1-{}_u p_{\overline{y_1 \cdots y_n}}) & (1-{}_u p_{\overline{y_1 \cdots y_n}})(1-{}_u p_x) \\ 0 & {}_u p_{\overline{y_1 \cdots y_n}} & 0 & 1-{}_u p_{\overline{y_1 \cdots y_n}} \\ 0 & 0 & {}_u p_x & 1-{}_u p_x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (5.16)$$

Para terminar el análisis del uso de las cadenas de Markov para el problema propuesto, resta solamente verificar la validez de las ecuaciones de Chapman - Kolmogorov, esto es

$$\mathbf{P}(0,u) = \mathbf{P}(0,v)\mathbf{P}(v,u),$$

donde el producto matricial del segundo miembro es

$$\begin{pmatrix} {}_v p_{x\overline{y_1 \cdots y_n}} & {}_v p_{\overline{y_1 \cdots y_n}}(1-{}_v p_x) & {}_v p_x(1-{}_v p_{\overline{y_1 \cdots y_n}}) & (1-{}_v p_{\overline{y_1 \cdots y_n}})(1-{}_v p_x) \\ 0 & {}_v p_{\overline{y_1 \cdots y_n}} & 0 & 1-{}_v p_{\overline{y_1 \cdots y_n}} \\ 0 & 0 & {}_v p_x & 1-{}_v p_x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{{}_u p_{x\overline{y_1 \cdots y_n}}}{{}_v p_{x\overline{y_1 \cdots y_n}}} & \frac{{}_u p_{\overline{y_1 \cdots y_n}}({}_v p_x - {}_u p_x)}{{}_v p_{x\overline{y_1 \cdots y_n}}} & \frac{{}_u p_x({}_v p_{\overline{y_1 \cdots y_n}} - {}_u p_{\overline{y_1 \cdots y_n}})}{{}_v p_{x\overline{y_1 \cdots y_n}}} & \frac{({}_v p_x - {}_u p_x)({}_v p_{\overline{y_1 \cdots y_n}} - {}_u p_{\overline{y_1 \cdots y_n}})}{{}_v p_{x\overline{y_1 \cdots y_n}}} \\ 0 & \frac{{}_u p_{\overline{y_1 \cdots y_n}}}{{}_v p_{\overline{y_1 \cdots y_n}}} & 0 & \frac{{}_v p_{\overline{y_1 \cdots y_n}} - {}_u p_{\overline{y_1 \cdots y_n}}}{{}_v p_{\overline{y_1 \cdots y_n}}} \\ 0 & 0 & \frac{{}_u p_x}{{}_v p_x} & \frac{{}_v p_x - {}_u p_x}{{}_v p_x} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Las probabilidades de la segunda matriz a simple vista pueden causar una natural confusión en el lector, ésta a raíz de los denominadores existentes en cada probabilidad. Dichos denominadores "aparecen" como consecuencia que se parte del momento $v$ y no del cero como para la primera matriz. Con la finalidad de que esta idea quede mas clara para el lector, se mostrará solamente el cálculo de una de tales probabilidades, dejando así a quien esté interesado en una posición muy cómoda para desarrollar las demás probabilidades

$$p_{I,III}(v,u)=\int_v^u p_{I,I}(v,\xi)\,\mu_{I,III}(\xi)\,p_{III,III}(\xi,u)\,d\xi$$

$$=\int_v^u \exp\left(\int_v^\xi \mu_{I,I}(\eta)d\eta\right)\mu_{I,III}(\xi)\exp\left(\int_\xi^u \mu_{III,III}(\eta)d\eta\right)d\xi$$

$$=\int_v^u \exp\left(\int_v^\xi\left(\frac{d}{d\eta}\log_\eta p_{xy_1\cdots y_n}\right)d\eta\right)\mu_{I,III}(\xi)\exp\left(\int_\xi^u\left(\frac{d}{d\eta}\log_\eta p_x\right)d\eta\right)d\xi$$

$$=\int_v^u\left(\frac{{}_\xi p_{xy_1\cdots y_n}}{{}_v p_{x\overline{y_1\cdots y_n}}}\mu_{I,III}(\xi)\frac{{}_u p_x}{{}_\xi p_x}\right)d\xi$$

$$=\int_v^u\left(\frac{{}_\xi p_{x\overline{y_1\cdots y_n}}}{{}_v p_{x\overline{y_1\cdots y_n}}}\left(\frac{1}{{}_\xi p_{\overline{y_1\cdots y_n}}}\frac{d\,{}_\xi p_{\overline{y_1\cdots y_n}}}{d\xi}\right)\frac{{}_u p_x}{{}_\xi p_x}\right)d\xi$$

$$=\frac{{}_u p_x}{{}_v p_{x\overline{y_1\cdots y_n}}}\int_v^u\left(\left(-\frac{d\,{}_\xi p_{\overline{y_1\cdots y_n}}}{d\xi}\right)\right)d\xi$$

$$=\left({}_v p_{\overline{y_1\cdots y_n}}-{}_u p_{\overline{y_1\cdots y_n}}\right)\frac{{}_u p_x}{{}_v p_{x\overline{y_1\cdots y_n}}}.$$



Ahora retomando el producto matricial, se tendrán como sus elementos los siguientes productos punto

$$\left[\mathbf{P}(0,v)\mathbf{P}(v,u)\right]_{1,1}={}_v p_{x\overline{y_1\cdots y_n}}\,\frac{{}_u p_{x\overline{y_1\cdots y_n}}}{{}_v p_{x\overline{y_1\cdots y_n}}}={}_u p_{x\overline{y_1\cdots y_n}},$$

$$\left[\mathbf{P}(0,v)\mathbf{P}(v,u)\right]_{1,2}={}_v p_{x\overline{y_1\cdots y_n}}\,\frac{{}_u p_{\overline{y_1\cdots y_n}}({}_v p_x-{}_u p_x)}{{}_v p_{x\overline{y_1\cdots y_n}}}+{}_v p_{\overline{y_1\cdots y_n}}(1-{}_v p_x)\frac{{}_u p_{\overline{y_1\cdots y_n}}}{{}_v p_{\overline{y_1\cdots y_n}}}$$

$$={}_u p_{y_1\cdots y_n}({}_v p_x-{}_u p_x)+(1-{}_v p_x)\,{}_u p_{y_1\cdots y_n}$$

$$={}_u p_{\overline{y_1\cdots y_n}}({}_v p_x-{}_u p_x)+(1-{}_v p_x)\,{}_u p_{\overline{y_1\cdots y_n}}$$

$$= {}_u p_{\overline{y_1 \cdots y_n}}(1 - {}_u p_x)$$

$$\left[\mathbf{P}(0,v)\mathbf{P}(v,u)\right]_{1,3} = {}_v p_{x\overline{y_1 \cdots y_n}} \frac{{}_u p_x({}_v p_{\overline{y_1 \cdots y_n}} - {}_u p_{y_1 \cdots y_n})}{{}_v p_{x y_1 \cdots y_n}} + {}_v p_x(1 - {}_v p_{\overline{y_1 \cdots y_n}})\frac{{}_u p_x}{{}_v p_x}$$

$$= {}_u p_x({}_v p_{\overline{y_1 \cdots y_n}} - {}_u p_{y_1 \cdots y_n}) + (1 - {}_v p_{\overline{y_1 \cdots y_n}})\,{}_u p_x$$

$$= (1 - {}_u p_{\overline{y_1 \cdots y_n}})\,{}_u p_x$$

$$\left[\mathbf{P}(0,v)\mathbf{P}(v,u)\right]_{1,4} = ({}_v p_x - {}_u p_x)({}_v p_{y_1 \cdots y_n} - {}_u p_{y_1 \cdots y_n}) + (1 - {}_v p_x)({}_v p_{\overline{y_1 \cdots y_n}} - {}_u p_{\overline{y_1 \cdots y_n}}) +$$

$$+ (1 - {}_v p_{\overline{y_1 \cdots y_n}})({}_v p_x - {}_u p_x) + (1 - {}_v p_{\overline{y_1 \cdots y_n}})(1 - {}_v p_x)$$

$$= -({}_u p_x)({}_v p_{\overline{y_1 \cdots y_n}} - {}_u p_{\overline{y_1 \cdots y_n}}) + {}_v p_{\overline{y_1 \cdots y_n}} - {}_u p_{\overline{y_1 \cdots y_n}} +$$

$$+ (1 - {}_v p_{y_1 \cdots y_n})(1 - {}_u p_x)$$

$$= -({}_u p_x)(-{}_u p_{\overline{y_1 \cdots y_n}}) - {}_u p_{y_1 \cdots y_n} + (1 - {}_u p_x)$$

$$= (1 - {}_u p_x)(1 - {}_u p_{\overline{y_1 \cdots y_n}})$$

$$\left[\mathbf{P}(0,v)\mathbf{P}(v,u)\right]_{2,2} = \frac{{}_u p_{\overline{y_1 \cdots y_n}}}{{}_v p_{\overline{y_1 \cdots y_n}}}\,{}_v p_{\overline{y_1 \cdots y_n}} = {}_u p_{\overline{y_1 \cdots y_n}}$$

$$\left[\mathbf{P}(0,v)\mathbf{P}(v,u)\right]_{2,4} = \frac{{}_v p_{\overline{y_1 \cdots y_n}} - {}_u p_{\overline{y_1 \cdots y_n}}}{{}_v p_{\overline{y_1 \cdots y_n}}}\,{}_v p_{y_1 \cdots y_n} + 1 - {}_v p_{\overline{y_1 \cdots y_n}}$$

$$= {}_v p_{y_1 \cdots y_n} - {}_u p_{y_1 \cdots y_n} + 1 - {}_v p_{\overline{y_1 \cdots y_n}}$$

$$= 1 - {}_u p_{y_1 \cdots y_n}$$

$$\left[\mathbf{P}(0,v)\mathbf{P}(v,u)\right]_{3,3} = \frac{{}_u p_x}{{}_v p_x}\,{}_v p_x = {}_u p_x$$

$$\left[\mathbf{P}(0,v)\mathbf{P}(v,u)\right]_{3,4} = \frac{{}_v p_x - {}_u p_x}{{}_v p_x}\,{}_v p_x + 1 - {}_v p_x$$

$$= {}_vp_x - {}_up_x + 1 - {}_vp_x = 1 - {}_up_x$$

$$\left[\mathbf{P}(0,v)\mathbf{P}(v,u)\right]_{4,4} = 1$$

Siendo los demás elementos de la matriz iguales a cero, y cumpliéndose de esta manera la ecuación de Chapman - Kolmogorov $\mathbf{P}(0,u) = \mathbf{P}(0,v)\mathbf{P}(v,u)$.

Todo esto es, desde luego, consecuencia del método utilizado para la obtención de las funciones de densidad. Ahora solo resta el aspecto financiero de las anualidades testamentarias, esto es, su valor presente.

La anualidad de interés es, desde luego, aquella que se pagará desde el momento en que quién la contrate muera, hasta que el último de sus beneficiarios muera ( o bien si se identifica al contratante y a sus beneficiarios como $w$, esta anualidad se pagará desde que $w$ pase al estado $II$), por lo que partiendo de lo visto en la sección 2 de este mismo capítulo se tendrá para su valor presente que

$$\bar{a}_w^{I,II} = \int_0^\infty p_{I,II}(0,\xi)v^\xi d\xi$$

$$= \int_0^\infty\int_0^\xi p_{I,I}(0,\eta)\mu_\eta^{I,II}\, p_{II,II}(\eta,\xi)d\eta\, v^\xi d\xi$$

$$= -\int_0^\infty\int_0^\xi {}_\eta p_{x:\overline{y_1\cdots y_n}}\left(\frac{1}{{}_\eta p_x}\right)\frac{d\,{}_\eta p_x}{d\eta}\,\frac{{}_\xi p_{\overline{y_1\cdots y_n}}}{{}_\eta p_{\overline{y_1\cdots y_n}}}\,d\eta\, v^\xi d\xi$$

$$= -\int_0^\infty\left(\int_0^\xi d\,{}_\eta p_x\right)v^\xi\,{}_\xi p_{\overline{y_1\cdots y_n}}\,d\xi$$

$$= -\int_0^\infty\left({}_\xi p_x - 1\right)v^\xi\,{}_\xi p_{\overline{y_1\cdots y_n}}\,d\xi$$

$$= \int_0^\infty v^\xi\,{}_\xi p_{\overline{y_1\cdots y_n}}\,d\xi - \int_0^\infty v^\xi\,{}_\xi p_{x:\overline{y_1\cdots y_n}}\,d\xi$$

que en el cálculo actuarial se escribe como

$$\bar{a}_w^{I,II} = \bar{a}_{\overline{y_1\cdots y_n}} - \bar{a}_{x:\overline{y_1\cdots y_n}}$$

$$= a_{x|y_1 \ldots y_n}.$$

Esta última es la expresión del cálculo actuarial para la prima neta única de una anualidad testamentaria ,con lo que se termina de corroborar la validez de las suposiciones markovianas para éstas. Jugando un poco (para hacer esto más completo), se puede obtener el valor de la prima neta nivelada, bajo el principio de equivalencia, esto es, que la esperanza de la variable aleatoria asociada al valor presente de la pérdida al instante cero es cero , lo cual en símbolos queda como

$$E[L] = \bar{a}_{\infty}^{I,II} - \bar{a}_{\infty}^{I,I}\, P = 0,$$

obteniéndose de aquí que

$$P = \frac{\bar{a}_{\infty}^{I,II}}{\bar{a}_{\infty}^{I,I}}.$$

Esta prima nivelada, es suponiendo que se pagará mientras se esté en el estado I por tener algún día los beneficios de la anualidad testamentaria , pero si quién la adquiere, solo quiere hacer los pagos por una temporada, el único cambio que existirá en la expresión será en el limite superior de la integral del denominador el cual tomará por supuesto, el valor de la duración del periodo deseado .

## 5.5. Conclusiones

En este capitulo se logro verificar que los conceptos como la distribución de Poisson, la exponencial, la matriz de transición, las ecuaciones de Chapman Kolmogorov y las de Kolmogorov que habian sido manejados previamente en un marco de carácter general, efectivamente pueden ser aplicados a problemas especificos del cálculo actuarial como lo son los seguros, las anualidades y las anualidades testamentarias, completándose así la adecuación del cálculo actuarial a las Cadenas de Markov.

# Conclusiones

El adecuar el cálculo a los procesos estocásticos, o que el cálculo actuarial tome herramientas de éstos (como prefiera considerarse), fue desarrollado en los capítulos 2 y 3, lográndose así alcanzar los objetivos planteados en la introducción, presentándose además las ventajas que ofrece esta adaptación, tal como lo son las técnicas alternativas presentadas o desarrolladas que utilizan conceptos del álgebra lineal y de las ecuaciones diferenciales para facilitar los cálculos de los problemas planteados.

Otra de las bondades derivadas del uso de los procesos estocásticos en el cálculo actuarial consiste en que los modelos se apegan más a la realidad, siendo en consecuencia más precisos. Tal es el caso en el que los modelos de decrementos múltiples y decrementos secundarios, cuyos orígenes están en el enfoque determinístico, son reemplazados por las cadenas de Markov, para modelar el movimiento de un individuo por diversas situaciones que pueden sucederle en la vida, ya que por medio de ellas se pueden calcular las probabilidades de eventos que no son considerados por los tradicionales modelos actuariales.

Tanto en el capítulo 4 como en el 5 se desarrollaron funciones actuariales ampliamente conocidas como lo son las reservas, los seguros, las anualidades, la esperanza de vida y las anualidades testamentarias, dado que se encuentran asociados a eventos inciertos , utilizando modelos Markovianos, de tal modo que se pudo demostrar la tesis objeto de este trabajo, sin olvidar que algunos desarrollos ya habían sido convalidados en investigaciones previas.

Habiéndose alcanzado los objetivos y la hipótesis se podrá comentar a continuación en forma muy breve la evolución que ha tenido el cálculo actuarial desde la visión determinística hasta la visión estocástica presentada en este trabajo. Esta evolución no ha provocado de modo alguno que las visiones anteriores se vuelvan del todo obsoletas, ya que como se mostró aquí, los resultados dados por los enfoques tradicionales son los mismos que los arrojados por la visión estocástica cuando buscan dar respuesta a las mismas interrogantes, pero sin ofrecer sus ventajas y quedando en consecuencia cortos en relación a estos últimos.

## Apéndice I

El eigenproblema fundamental algebraico es la determinación de los valores de $\lambda$ para los cuales un conjunto de $n$ ecuaciones homogéneas lineales cumple

$$\mathbf{AX} = \lambda\mathbf{X} \ ,$$

o equivalentemente

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{X} = \mathbf{0}, \qquad (\ 1.1\ )$$

siendo $\mathbf{X}$ una solución no trivial que pertenece al espacio vectorial $V$ que se encuentra sobre el campo $F$, por lo que de la teoria general de las ecuaciones simultáneas lineales se sabe que ( 1.1 ) tiene solución no trivial si y solamente si la matriz $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$es singular, es decir cuando $Det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$, lo que puede ser reexpresado en términos del polinomio caracteristico como

$$Det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \lambda^i = 0 \, .$$

Este polinomio tiene $n$ raices, las cuales reciben el nombre de eigenvalores, valores propios o valores caracteristicos. En correspondencia a cualquier eigenvalor $\lambda$ el sistema de ecuaciones ( 1.1 ) tiene al menos una solución no trivial $\mathbf{X}$, la cual es conocida como eigenvector, vector caracteristico o valor propio. Si $\mathbf{X}$ es una solución de ( 1.1 ) obviamente $k\mathbf{X}$ ( para cualquier valor de esta constante $k$ ) también es solución de ( 1.1 ), por lo que se tendrá como caso especial cuando esta $k$ es el inverso multiplicativo de la norma del eigenvector, de tal forma que se tiene un nuevo vector solución cuya norma será la unidad y que recibe el nombre de vector unitario.

*Eigenvalores y eigenvectores de la matriz transpuesta*

Los eigenvalores de $\mathbf{A}^t$ son por la definición ya mostrada aquellos valores de $\lambda$ para los cuales el sistema de $n$ ecuaciones

$$\mathbf{A}^t\mathbf{Y} = \lambda\mathbf{Y} \, ,$$

tiene una solución no trivial, los cuales se obtienen resolviendo

$$Det(\mathbf{A}^t - \lambda\mathbf{I}) = 0 \, .$$

Partiendo del hecho que el determinante de una matriz es igual al determinante de la transpuesta de ésta, se tendrá que los eigenvalores de la matriz $\mathbf{A}^t$ son los mismos que los de la matriz $\mathbf{A}$ , por lo que en adelante se denotará a cada eigenvalor de $\mathbf{A}^t$ con $\lambda_i$ ( para $i$=1,..,$n$ ) y a su correspondiente eigenvector por $\mathbf{Y}_i$ .

Otro hecho que se deberá tomar en consideración es que

$$\mathbf{A}'\mathbf{Y}_i = \lambda_i \mathbf{Y}_i$$

razón que da lugar a que $\mathbf{Y}_i$ sea conocido como el eigenvector izquierdo de $\mathbf{A}$, y a $\mathbf{X}_i$ como el eigenvector derecho de $\mathbf{A}$.

*Importancia del eigenvector izquierdo y del eigenvector derecho.*

Si $\mathbf{X}_i$ es un eigenvector de $\mathbf{A}$, correspondiente al eigenvalor $\lambda_i$ y $\mathbf{Y}_j$ es un eigenvector de $\mathbf{A}'$ correspondiente a $\lambda_j$, entonces

$$\mathbf{X}_i' \mathbf{Y}_j = 0 \qquad \text{cuando} \quad \lambda_i \neq \lambda_j .$$

Demostración :

Como

$$(\mathbf{X}_i' A)\,\mathbf{Y}_j = (\lambda_i \mathbf{X}_i')\,\mathbf{Y}_j$$

y

$$\mathbf{X}_i'(\mathbf{A}\,\mathbf{Y}_j) = \mathbf{X}_i'(\lambda_j \mathbf{Y}_j),$$

la diferencia de ambos es

$$0 = \lambda_i \mathbf{X}_i' \mathbf{Y}_j - \lambda_j \mathbf{X}_i' \mathbf{Y}_j ,$$

lo que implica que cuando los eigenvalores son diferentes

$$\mathbf{X}_i' \mathbf{Y}_j = 0 ,$$

y si estos son iguales

$$\mathbf{X}_i' \mathbf{Y}_j = 1$$

ya que como se explico antes $k\mathbf{X}_i'$ y $c\,\mathbf{Y}_j$ también son eigenvectores (siendo $k$ y $c$ cualesquiera constantes ).

*Combinaciones lineales de los eigenvectores*

Supóngase que al eigenvalor $\lambda_1$ (se pudo haber escogido cualquier otro) le corresponde otro eigenvector $\mathbf{Z}_1$ originado en la combinación lineal de los eigenvectores linealmente independientes, como

$$\mathbf{Z}_1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{X}_i \qquad (\text{I}.2)$$

lo cual implica

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{Z}_1 &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{A} \mathbf{X}_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i \mathbf{X}_i \\ &= \lambda_1 \mathbf{Z}_1 \end{aligned} \qquad (\text{I}.3)$$

Multiplicando ( I.2 ) por $\lambda_1$ y sustrayéndolo a ( I.3 )

$$\lambda_1 \mathbf{Z}_1 - \lambda_1 \mathbf{Z}_1 = 0\,,$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned} \lambda_1 \mathbf{Z}_1 - \lambda_1 \mathbf{Z}_1 &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i \mathbf{X}_i - \lambda_1 \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{X}_i \\ &= \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \mathbf{X}_i (\lambda_i - \lambda_1)\,. \end{aligned}$$

Por la independencia de las $\mathbf{X}_i$, se tendrá que la única solución es la trivial, lo cual significa que

$$(\lambda_i - \lambda_1)\alpha_i = 0$$

y por tanto

$$\alpha_i = 0 \qquad\qquad \text{cuando } \lambda_i \neq \lambda_1\,.$$

Mientras que cuando $\lambda_i = \lambda_1$, $\alpha_i$ puede ser diferente de cero, de tal forma que se puede concluir que la combinación lineal de los eigenvectores linealmente independientes de un mismo eigenvalor también es un eigenvector de éste, constituyendose así, un espacio vectorial para cada eigenvalor.

*Diagonalización*

El producto $\mathbf{X}_i^t \mathbf{Y}_j$ puede expresarse por medio de la delta de Kronecker, es decir

$$\mathbf{X}_i^t \mathbf{Y}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

lo cual implica que la matriz $\mathbf{Y}^t$ es la inversa de la matriz $\mathbf{X}$.

A continuación se expresan los $n$ sistemas de ecuaciones $\mathbf{A}\mathbf{X}_i = \lambda_i \mathbf{X}_i$ como el producto matricial

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{X}diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$$

o alternativamente

$$\mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{Y}'\mathbf{A}\mathbf{X} = diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n),$$

tal movimiento es conocido como la diagonalización de la matriz **A**, debiéndose tener presente que se está suponiendo que todos los eigenvalores son distintos entre si, por lo que para hacer una generalización no sujeta a restricciones como la anterior será necesario la introducción de los siguientes conceptos.

*Matriz elemental de Jordan*

Para un eigen valor en particular $\lambda_i$ con multiplicidad $r$, la matriz de $r$ x $r$

$$\mathbf{C}_r(\lambda_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_i & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda_i \end{pmatrix}$$

recibe el nombre de elemental de Jordan.

*Forma canónica de Jordan*

Supóngase que **A** es una matriz de $n$ x $n$, que posee $s$ eigenvalores diferentes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ con multiplicidades $m_1, m_2, \ldots, m_s$ tales que $m_1 + m_2 + \ldots + m_s = n$, para la cual existen una una matriz no singular **H** y una matriz única **C**, consistente de submatrices de Jordan a lo largo de la diagonal principal y ceros fuera de ella, que satisfacen

$$\mathbf{H}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{H} = \mathbf{C}$$

Esta matriz **C** como se menciono está constituida por submatrices de Jordan, teniendo que para cada eigenvalor habrá tantas submatrices como vectores independientes en la base del espacio de eigenvectores asociados a tal eigenvalor.

*Ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes*

La solución de un problema de eigenvalores está muy relacionada con la solución de un conjunto de ecuaciones simultáneas diferenciales con coeficientes constantes.

El sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden con $n$ funciones desconocidas $y_1, y_2, \ldots, y_n$ puede ser escrito como

$$\mathbf{B}\frac{d}{dt}\mathbf{Y} = \mathbf{C}\mathbf{Y},$$

donde **B** y **C** son matrices de ( $n \times n$ ) y **Y** el vector columna $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

Para este sistema se pueden presentar dos situaciones, siendo la primera cuando **B** es una matriz singular, de tal forma que los $n$ miembros de la izquierda (así como los de la derecha) del sistema de ecuaciones satisfacen una relación lineal y de aquí se desprende que las funciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$ no son independientes, mientras que la segunda corresponde al caso en que B no es singular, lo cual origina que

$$\frac{d}{dt}\mathbf{Y} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{Y}, \qquad (\text{I}.4)$$

de tal forma que con el objeto de obtener la solución de éste se propondrá la descomposición de **Y** en

$$\mathbf{Y}=\mathbf{X}\mathbf{Z}$$

donde **X** es una matriz de $n \times n$ independiente de $t$ y **Z** un vector columna de $n$ elementos, por lo que al sustituir en ( I.4 )

$$\frac{d}{dt}\mathbf{X}\mathbf{Z} = \mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{Z},$$

lo cual implica que

$$\mathbf{X}\frac{d}{dt}\mathbf{Z} = \mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{Z},$$

hecho que puede ser presentado como

$$\frac{d}{dt}\mathbf{Z} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{Z}.$$

Habrá de hacerse de nueva cuenta la distinción, entre el caso en el que los eigenvalores son todos diferentes y cuando no necesariamente lo son así, para el primer caso debido a que cada eigen valor tiene multiplicidad uno es posible hacer una diagonalización , teniéndose así que

$$\frac{d}{dt}\mathbf{Z}_i = \mathbf{Z}_i \lambda_i \,,$$

lo cual significa que

$$\frac{d}{dt}\log(\mathbf{Z}_i) = \lambda_i \,,$$

y en consecuencia

$$\mathbf{Z}_i = \exp(\lambda_i t) \,,$$

que al sustituirse en la descomposición de $\mathbf{Y}$ implica que

$$\mathbf{Y}_i = \sum_{\forall i} \mathbf{X}_{i,j} \, e^{\lambda_i t}$$

Para el caso de eigenvalores repetidos se utilizará la forma canónica de Jordan, sin embargo ante la imposibilidad de hacer una generalización se recurrirá a utilizar un ejemplo con el único objetivo de ilustrar .

Para tal fin sea $\mathbf{A}$ una matriz de orden seis, la cual posee dos eigenvalores, siendo el primero $\lambda_1$ con multiplicidad cinco y espacio de eigenvectores de dimensión dos y el segundo $\lambda_2$ con multiplicidad uno, de tal forma que su forma canónica de Jordan es

$$\begin{pmatrix} \mathbf{C}_3(\lambda_1) & & \\ & \mathbf{C}_2(\lambda_1) & \\ & & \mathbf{C}_1(\lambda_2) \end{pmatrix} = \begin{matrix} \lambda_1 & 0 & 0 & & & \\ 1 & \lambda_1 & 0 & & & \\ & 1 & \lambda_1 & & & \\ & & & \lambda_1 & 0 & \\ & & & 1 & \lambda_1 & \\ & & & & & \lambda_2 \end{matrix} .$$

Por lo que al sustituir en $\frac{d}{dt}\mathbf{Z} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{Z}$ se tendrán las ecuaciones diferenciales

$$\frac{d}{dt}\mathbf{Z}_1 = \lambda_1 \mathbf{Z}_1 \,, \qquad \frac{d}{dt}\mathbf{Z}_2 = \mathbf{Z}_1 + \lambda_1 \mathbf{Z}_2$$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{Z}_3 = \mathbf{Z}_2 + \lambda_1 \mathbf{Z}_3, \qquad \frac{d}{dt}\mathbf{Z}_4 = \lambda_1 \mathbf{Z}_4$$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{Z}_5 = \mathbf{Z}_4 + \lambda_1 \mathbf{Z}_5 \qquad \text{y} \qquad \frac{d}{dt}\mathbf{Z}_6 = \lambda_2 \mathbf{Z}_6$$

cuyas soluciones son

$$\mathbf{Z}_1 = a_1 \exp(\lambda_1 t), \qquad \mathbf{Z}_2 = a_2 \exp(\lambda_1 t) + a_1 t \exp(\lambda_1 t),$$

$$\mathbf{Z}_3 = a_3 \exp(\lambda_1 t) + a_2 t \exp(\lambda_1 t) + \frac{a_1}{2} t^2 \exp(\lambda_1 t), \quad \mathbf{Z}_4 = a_4 \exp(\lambda_1 t),$$

$$\mathbf{Z}_5 = a_5 \exp(\lambda_1 t) + a_4 t \exp(\lambda_1 t)$$

y $\mathbf{Z}_6 = a_6 \exp(\lambda_2 t)$

restando entonces solamente sustituir éstas soluciones en $\mathbf{Y}=\mathbf{Z}\mathbf{X}$

*Ecuaciones diferenciales de orden mayor*

A continuación se presentará un sistema de $n$ ecuaciones diferenciales de orden $r$ y con $n$ variables independientes ( $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ) = $\mathbf{Y}_0$, siendo tal sistema

$$\mathbf{A}_r \frac{d^r}{dt^r}\mathbf{Y}_0 + \mathbf{A}_{r-1}\frac{d^{r-1}}{dt^{r-1}}\mathbf{Y}_0 + \cdots + \mathbf{A}_0 \mathbf{Y}_0 = \mathbf{0}$$

mismo que puede ser presentado como

$$-\mathbf{A}_r^{-1}\left[\mathbf{A}_{r-1}\frac{d^{r-1}}{dt^{r-1}}\mathbf{Y}_0 + \cdots + \mathbf{A}_0 \mathbf{Y}_0\right] = \frac{d^r}{dt^r}\mathbf{Y}_0,$$

para cuya solución se proponen

$$\mathbf{B}_s = -\mathbf{A}_r^{-1}\mathbf{A}_s$$

y

$$\frac{d^w}{dt^w}\mathbf{Y}_0 = \mathbf{Y}_w$$

igualdades que conducen a

$$\left[\mathbf{B}_{r-1}\mathbf{Y}_{r-1}+\cdots+\mathbf{B}_0\mathbf{Y}_0\right]=\frac{d}{dt}\mathbf{Y}_{r-1}$$

o simplemente

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{I} \\ \mathbf{B}_0 & \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 & \mathbf{B}_3 & \cdots & \mathbf{B}_{r-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_0 \\ \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_{r-2} \\ \mathbf{Y}_{r-1} \end{pmatrix} = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \mathbf{Y}_0 \\ \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_{r-2} \\ \mathbf{Y}_{r-1} \end{pmatrix}.$$

el cual es un sistema que puede ser resuelto por los métodos ya explicados.

## Apéndice II

Como parte del respaldo teórico se enunciarán los siguientes conceptos de la teoría de probabilidades :

Una $\sigma$ - álgebra es una familia $\mathcal{F}$ de subconjuntos de un conjunto dado $\mathcal{G}$ que cumple:

i ) para cualquier conjunto A que está en $\mathcal{F}$, también está su complemento en $\mathcal{F}$ , el cual es $A' = \mathcal{G} - A$

ii ) Si $\{A_n\}$ es cualquier colección contable o ennumerable de conjuntos en $\mathcal{F}$, entonces también su unión $\bigcup A_n$ e intersección $\bigcap A_n$ pertenecen a $\mathcal{F}$,

Dada una familia $\mathcal{F}$, cualquiera de conjuntos en $\mathcal{G}$, el mínimo $\sigma$ -álgebra que contiene todos los conjuntos de $\mathcal{F}$ , se llama *$\sigma$ -álgebra generado por* $\mathcal{F}$ , mientras que el máximo $\sigma$ - álgebra consiste de todos los subconjuntos de $\mathcal{G}$.

Siendo $\mathcal{F}$ un $\sigma$ -álgebra arbitrario de conjuntos en $\mathcal{G}$ ,se llamará $\mathcal{F}$ *- mesurable* a una función $u$ de valor real en $\mathcal{G}$ , si para cada $t$ el conjunto de todos los puntos $x$, donde $u(x) \leq t$ pertenece a $\mathcal{F}$ .

Una medida $P$ de probabilidad en un $\sigma$ -álgebra de conjuntos en $\mathcal{F}$ , es una función que asigna un valor $P\{A\} \geq 0$ a cada conjunto $A$ en $\mathcal{F}$ , tal que $P\{\mathcal{F}\} = 1$ y para cada colección ennumerable de conjuntos que no se traslapan $A_n$ en $\mathcal{F}$

$$P\{\bigcup A_n\} = \sum P\{A_k\} .$$

Un *espacio de probabilidad* es una terna $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ de un espacio muestral $\Omega$, un $\sigma$ - álgebra $\mathcal{F}$ de conjuntos en el mismo y una medida de probabilidad $P$ en $\mathcal{F}$.

Una *Filtración* es una familia de $\sigma$ -álgebras $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t < \infty}$ creciente, tal que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ , si $s \leq t$.

Un proceso $X$ es *adaptado*, si $X_t$ es $\mathcal{F}_t$ -mesurable.

Una variable aleatoria $T : \Omega \to [0, \infty)$ se le conoce como *tiempo de alcance* , si el evento $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$, para cada $t$, con $0 \leq t < \infty$ .

# Bibliografía


Textos :

Bartlett ( 1986 ) An Introduction to Stochastic Processes
Cambridge University Press.

Bowers N.L., Gerber H.U. , Hickman J.C. , Jones D.A. & Nesbitt C.J. ( 1986 ) Actuarial Mathematics.
Itasca, Society of Actuaries

Feller W. ( 1957 ) Introducción a la teoria de probabilidades y sus aplicaciones

Limusa

Jordan C.W. ( 1982 ) Life Contengencies, Society of actuaries

Papoulis, ( 1984 ) A. Probability , Random Variables and Stochastic Processes
McGraw Hill

Parzen Emanuel ( 1971 ) Teoria moderna de probabilidades y sus aplicaciones
Limusa

Rainville E.D., P.E. Bedient Ecuaciones Diferenciales ( 5a Edición )
Ed. Interamericana

Protter, P. ( 1990 ) Sthocastic integration and differential equations, Springer Verlag

Artículos :

Jones B.L. ( 1994 ) " Actuarial Calculations using a Markov Model " ,
Transactions, Volume , XLVI, Society of Actuaries ,227-250 pp

Norberg R. ( 1995 ) " Stochastic Calculus in Actuarial science ", Laboratory of actuarial mathematics, Univ. of Copenhagen

Norberg R. ( 1995 ) " Differential equations for moments of present values in life insurance"
Insurance; Mathematics and Economics 17

Ramsay C.M. ( 1989 ) " AIDS and the calculation of life insurance functions "
Transactions, Volume , XLI, Society of Actuaries ,393-422 pp