

01161  
3  
2e



**DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO**  
**Facultad de Ingeniería**

**ANALISIS ESTRUCTURAL DE SILOS DE PARED DELGADA**

**CESAR AGUSTIN HERNANDEZ GÜITRON**

**T E S I S**

**PRESENTADA A LA DIVISION DE ESTUDIOS DE**

**POSGRADO DE LA**

**FACULTAD DE INGENIERIA**

**DE LA**

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO**

**COMO REQUISITO PARA OBTENER**

**EL GRADO DE**

**MAESTRO EN INGENIERIA**

**( E S T R U C T U R A S )**

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**

**CIUDAD UNIVERSITARIA**

**MEXICO, 1991**



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Análisis estructural de silos de pared delgada.

## Indice

Notación	1
1. Introducción	6
2. Enfoques conocidos para estimar las acciones sobre silos	
Generalidades	9
a) Peso propio	15
b) Efecto de materiales en el interior	19
c) Acción del viento	31
d) Acción sísmica	41
e) Efectos térmicos	45
3. Método de las fuerzas para su análisis estructural	48
3.1 Proceso de interacción de un sistema de cascarones	52
3.2 Descripción del proceso de interacción	61
4. Método de elementos banda para análisis estructural	65
5. Aplicación al análisis de una estructura industrial	67
5.1 Matrices de flexibilidades de los elementos estructurales	78
5.2 Matrices de uniones	82
5.3 Estados de carga para analizar	85
5.4 Análisis de presiones por efectos de descarga del material	91
5.5 Carga en los elementos y desplazamientos por solución primaria	93

5.6	Fuerzas correctivas bajo carga de peso propio	97
5.7	Fuerzas correctivas bajo efecto de materiales en el interior	100
5.8	Combinación de estados de carga	103
6.	Elementos mecánicos para fines de diseño	105
7.	Principales problemas a evitar	119
8.	Comentarios finales	123
9.	Referencias	126
	Apéndice A	128
	Apéndice B	145

## Notación

- cm = centímetros.
- cos = función trigonométrica coseno.
- ctg = función trigonométrica cotangente.
- d = diámetro de tornillos ( sección 7 ).
- $e_{\min}$  = distancia mínima del orificio de los tornillos al borde libre de una placa.
- $h = h_c$  = altura del cono de descarga ( sección 2.b ).
- $h$  = altura del silo, ( sección 2.c ).
- $k$  = constante que depende de la geometría y de las propiedades del material del cascarón.
- kg = kilogramos.
- lbs = libras.
- m = metros.
- $n$  = fuerza de tensión producida por efectos térmicos ( sección 2.e ).
- $n'$  = fuerza de tensión real producida por efectos térmicos ( sección 2.e ).
- $n' = n/3$ .
- $p$  = carga en el borde superior de cascarones ( linternilla, sección 2.a ).
- $p$  = presión uniforme vertical en cascarones cónicos ( sección 2.b ).
- $p_h$  = presión lateral sobre las paredes del cuerpo cilíndrico del silo por efecto del material depositado.
- $p_i$  = componente de la carga actuante sobre el eje coordenado  $i$  ( X, Y, Z ).
- $p_v$  = presión vertical por efecto del material depositado en el interior del silo.
- $p'$  = presión normal a la pared de la tolva de descarga.
- $q$  = peso por unidad de área en cascarones cónicos ( sección 2.a ).
- $q$  = presión vertical en las paredes del silo por fricción del material, es presión longitudinal.
- $q'$  = presión longitudinal a la pared de la tolva de descarga.
- $r$  = radio de curvatura de un paralelo de un cascarón.
- $r$  = radio de cilindros.
- seg = unidad de tiempo, segundos.

$\text{sen}$  = función trigonométrica seno.

$t$  = espesor del cascarón.

$\text{tg}$  = función trigonométrica tangente.

$u, v, w$  = desplazamientos a lo largo de los ejes X, Y y Z en secciones cilíndricas.

$x$  = coordenada de referencia a la que se calculan los elementos mecánicos y desplazamientos en los cascarones de revolución.

$x_1$  = longitud desde vértice imaginario de un cono truncado al borde del radio menor.

$y$  = coordenada de referencia para el cálculo de presiones por efecto de material en el interior del silo (sección 2.b).

$z$  = distancia medida desde el vértice de la tolva de descarga (sección 2.b).

$r$  = longitud normal a la superficie del cascarón medida a partir de la superficie media.

$A$  = área de la sección transversal del silo (sección 2.b).

$A$  = área de la sección transversal en anillos (secciones 5 y 6).

$B = \mathcal{B}$  = rigidez extensional.

$C$  = perímetro de la sección transversal del silo (sección 2.b).

$C$  = coeficiente para la determinación del esfuerzo crítico de elementos no atiesados (secciones 6 y 7).

$C_D$  = coeficiente de arrastre (sección 2.c).

$C_{DL}, C_{Dt}$  = coeficientes de arrastre longitudinal y transversal por viento.

$C_p$  = coeficiente de presión eólico (sección 2.c).

$D = \mathcal{D}$  = rigidez a la flexión.

$D$  = dirección perpendicular a la acción del viento (sección 2.c).

$E$  = módulo de elasticidad.

$F_C$  = fuerza vertical por fricción en la pared del silo (sección 2.b).

$F_C$  = fuerza total de empuje del viento sobre el silo (sección 2.c).

$F_i, F_i(\xi)$  = factores para el cálculo de elementos mecánicos y desplazamientos en solución exacta para cilindros y conos (apéndice A).

$F_L, F_t$  = fuerzas longitudinal y transversal por viento.

$F_u$  = resistencia última del acero, 4100 kg/cm<sup>2</sup>.

$F_v$  = fuerza total por viento sobre silos ( sección 2.c ).

$F_y$  = esfuerzo de fluencia del acero, 2530 kg/cm<sup>2</sup>.

$H$  = altura de la pared cilíndrica del silo ( sección 2.b ).

$H$  = fuerza cortante correctiva en el borde de un cascarón, radial.

$H_i$  ,  $H_s$  = fuerzas cortantes correctivas en los bordes inferior y superior ( sección 6 ).

$I$  = factor de importancia de estructuras para cálculo de fuerza sísmica ( sección 2.d ).

$I_{xx}$  ,  $I_{yy}$  = momentos de inercia alrededor de los ejes X y Y.

$K$  = coeficiente de presión ( sección 2.b ).

$K_a$  ,  $K_1$  ,  $K_p$  = coeficientes para el cálculo de presiones por viento según el reglamento australiano ( sección 2.c ).

$L$  = longitud del cascarón, según sea el caso.

$M$  = momento flexionante correctivo en el borde de un cascarón, radial.

$M_i$  ,  $M_s$  = momentos correctivos en los bordes inferior y superior ( sección 6 ).

$M_{xmax}$  ,  $N_{xmax}$  ,  $N_{ymax}$  ,  $Q_{xmax}$  = elementos mecánicos máximos para diseño ( sección 6 ).

$N_{\phi\theta}$  ,  $N_{\theta\phi}$  = cortantes sobre la superficie media del cascarón.

$M_{\phi}$  ,  $M_{\theta}$  = momentos flexionantes.

$M_{\phi\phi}$  ,  $M_{\theta\theta}$  = momentos torsionantes.

$N_{\phi}$  ,  $N_{\theta}$  = fuerzas de membrana sobre los ejes X y Y.

$N_x = N_{\phi}$ .

$Q_{\phi}$  ,  $Q_{\theta}$  = cortantes transversales en las direcciones X y Y.

$Q_x = Q_{\phi}$ .

$P_{xo}$  = peso por unidad de área de cascarones cilíndricos ( sección 2.a ).

$R$  = radio de cilindros, en ocasiones se toma como  $r$ .

$R$  = radio hidráulico de la sección transversal ( sección 2.b ).

$R_{\phi}$  = radio de curvatura de un meridiano de un cascarón.

$R_{\theta}$  = longitud normal de un punto en la superficie de media de un cascarón al eje de revolución del mismo.

$S$  = coeficiente de resonancia para cálculo de fuerza sísmica ( sección 2.d ).

$S$  = módulo de sección ( sección 6 ).

$V$  = velocidad del viento ( sección 2.c ).

$V_z$  = velocidad del viento a una altura  $z$ .

$V_{\infty}$  = velocidad regional de diseño del viento ( sección 2.c ).

$W$  = peso de la estructura para cálculo de fuerza sísmica ( sección 2.c ).

$W_{eff}$  = peso del material depositado en el silo ( 80%, sección 2.d ).

$W_g$  = peso del silo ( sección 2.d ).

$X_{\theta}$ ,  $Y_{\theta}$ ,  $Z_{\theta}$  = componentes de la acción del viento ( sección 2.c ).

$Z$  = coeficiente sísmico según UBC ( sección 2.d ).

$\alpha$  = coeficiente de expansión lineal ( sección 2.e ).

$\alpha_0$  = ángulo medido de la superficie cónica al plano del radio mayor.

$\beta$  = incremento angular normal a la superficie media del cascarón ( generalidades, sección 2 ).

$\beta$  = giro, desplazamiento angular.

$\beta^M$ ,  $\beta^H$  = giros producidos por momento (  $M$  ) y cortante (  $H$  ) aplicados en un borde ( sección 3 ).

$\beta^0$  = giro producido por régimen de membrana.

$\gamma$  = densidad del material depositado en el silo.

$\delta$  = ángulo de fricción efectivo del material depositado en el silo ( sección 2.b ).

$\delta$  = designación de desplazamiento lineal, incremento en el radio (  $\Delta r$  ).

$\delta_h$ ,  $\delta_v$  = desplazamientos horizontal y vertical.

$\delta^M$ ,  $\delta^H$  = desplazamientos producidos por momento (  $M$  ) y cortante (  $H$  ) aplicados en un borde ( sección 3 ).

$\delta^0$  = desplazamiento producido por régimen de membrana.

$\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  = deformaciones unitaria en direcciones  $X$  y  $Y$ .

$\lambda$  = longitud de onda ( sección 3 ).

$\lambda_p$  = factor de intensidad de la presión lateral uniforme ( sección 2.b ).

$\theta$  = ángulo medido en planta con vértice en el eje de revolución.

$\theta$  = ángulo entre el eje de revolución y la pared de la tolva de descarga ( sección 2.b ).

$\theta$  = ángulo entre la normal a un punto del cascarón y el eje de revolución ( sección 1 ).



$\beta$  = ángulo de fricción interna del material depositado en el silo ( sección 2.b ).

$\beta'$  = ángulo de fricción de la pared del silo ( sección 2.b ).

$\rho$  = densidad del aire, 0.125 kg seg<sup>2</sup> /m<sup>4</sup> ( sección 2.c ).

$\sigma_{x\max}$ ,  $\sigma_{\theta\max}$ ,  $\sigma_{q\max}$  = esfuerzos máximos longitudinal, tangencial y cortante ( sección 6 ).

$\mu$  = relación de Poisson.

$\mu'$  = coeficiente de fricción del material y la pared ( sección 2.b ).

$\Delta r$  = incremento en el radio del paralelo ( w ).

$\Delta t$  = incremento de temperatura.

$\Sigma F_X$ ,  $\Sigma F_Y$ ,  $\Sigma F_Z$  = sumatorias de fuerzas actuantes en los ejes coordenados.

$\Sigma M_X$ ,  $\Sigma M_Y$ ,  $\Sigma M_Z$  = sumatorias de momentos actuantes alrededor de los ejes coordenados.

$\{ F_{UX} \}$  = vector de fuerzas correctivas en la unión X.

$\{ \Delta_i \}$  = vector de desplazamientos del elemento o cascarón i bajo régimen de membrana ( sección 5 ).

$\{ \Delta_{UX}^0 \}$  = vector de combinaciones de desplazamientos bajo régimen de membrana.

$[ \alpha ] = [ \alpha_{ik} ]$  = matriz de flexibilidades de un elemento o cascarón ( sección 3 ).

$[ \alpha_i ]$  = matriz de flexibilidades del elemento o cascarón i ( sección 5 ).

$[ \alpha_{i \text{ inf}} ]$ ,  $[ \alpha_{i \text{ sup}} ]$  = matrices de flexibilidades en los bordes inferior y superior del elemento i.

$[ \alpha_{UX} ]$  = matriz de flexibilidades en la unión X.

## 1. Introducción

En el presente trabajo se intenta hacer una recopilación de los diversos aspectos que involucran el análisis de silos de pared delgada ( metálicos ), que son sistemas de almacenamiento de materiales a granel que ofrecen ventajas funcionales y económicas.

Los silos de almacenamiento son estructuras espaciales, cuyos elementos no sólo soportan y transmiten cargas, sino que también las retienen o envuelven.

Los procedimientos de análisis que se presentarán son aplicables a silos metálicos o de concreto, sólo basta considerar las propiedades del material que se trate, módulo de elasticidad, relación de Poisson, etc.

Los silos generalmente tienen sección transversal cuadrada, rectangular o circular ( fig 1.1 ).

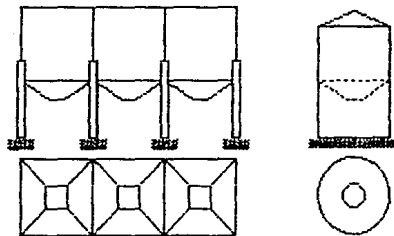


Fig 1.1

Desde el punto de vista estructural es conveniente la sección circular, debido a que la presión que ejerce el material que contiene es resistida por la fuerza tangencial de la pared circular del silo ( ref 2 ). No obstante esta ventaja, en cualquier tipo de sección se debe cuidar el espesor de las paredes para que no se presenten problemas de inestabilidad por la presión vertical, debida a la fricción de la pared con el material.

Los silos pueden estar desplantados al nivel del terreno ( fig 1.2 ), o estar soportados por columnas o faldones atiesados o sin atiesar, en algunos casos con diseños audaces ( fig 1.3 ).

Los aspectos que abarca este trabajo son el análisis estructural del silo bajo las condiciones de carga como peso propio, efecto de materiales en el interior, acciones de viento, sismo y térmicos, todos descritos en la sección 2. En lo referente a efectos de materiales en el interior, se intentará mostrar los efectos de presión en los procesos de carga y descarga que son de significativa importancia en el diseño del silo.



Fig 1.2

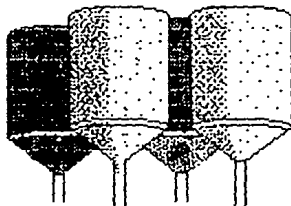


Fig 1.3

Para la evaluación de las acciones mencionadas se cuenta con procedimientos como son el método de las fuerzas y el de elementos banda, secciones 3 y 4. Posteriormente se verá la conveniencia de utilizar uno u otro método, sección 8. Con ellos se obtienen los elementos mecánicos para la revisión o diseño del silo en cuestión.

Los elementos mecánicos constituyen la información fundamental que encierra la problemática del comportamiento del silo, sus puntos débiles por concentración de esfuerzos, indicios de inestabilidad, problemas de juntas, etc. En las secciones 5 y 6 se tratará el ejemplo de un silo industrial.

En la sección 7 se hará mención de los problemas que

deben evitarse, inclusive los problemas que atañen a silos de distinta configuración.

La construcción de silos metálicos se lleva a cabo por soldadura de las placas que lo forman o por la utilización de tornillos. La práctica común y rápida es la utilización de tornillos, de la que se hablará en su oportunidad, ya que se tiene el conocimiento de ciertos problemas al no seguir la apropiada norma en uniones de placas y la utilización de mecanismos inapropiados.

Por último, en la sección B se comentarán los alcances de los conocimientos disponibles para el análisis de silos y los puntos importantes que sean necesarios profundizar con más investigaciones al respecto.

Después de esta breve introducción se empezarán a conocer los aspectos básicos en el análisis de silos de pared delgada.

## 2. Enfoques conocidos para estimar las acciones sobre silos

Generalidades. Con el propósito de establecer criterios para el análisis estructural de silos, se presenta una sinopsis introductoria a los conceptos básicos del análisis de cascarones de revolución.

Con el afán de establecer soluciones a los cascarones de revolución, han surgido diversas propuestas fundadas en la teoría de elasticidad lineal ( ref 1 ), de esta forma se tienen teorías con las que es posible evaluar deformaciones elásticas y esfuerzos con las que se cumplen las condiciones de equilibrio tanto antes como después de presentada la deformación donde rige la ley de Hooke. Es poco el uso de teorías no lineales debido a la dificultad de resolver las ecuaciones de equilibrio correspondientes. La teoría de grandes desplazamientos es empleada en problemas de membranas muy elásticas y de pandeo. La complejidad del problema evita el desarrollo de soluciones más exactas de uso práctico ya que esto implica una solución para cada problema en particular, en la misma situación se encuentra el campo experimental.

A pesar de las dificultades, se ha llegado a métodos simplificados que permiten evaluar con aceptable precisión los elementos mecánicos, deformaciones y desplazamientos.

La teoría lineal de cascarones utiliza simplificaciones en las ecuaciones de equilibrio que de otra manera haría casi imposible obtener una solución de uso práctico. Así, por ejemplo, se reduce lo suficiente el problema al considerar sólo las deformaciones de la superficie media de la membrana o cascarón, por lo que es necesario establecer los principales parámetros de esta superficie.

La superficie de un cascarón de revolución se obtiene al hacer girar una curva plana alrededor de un eje contenido en el plano de la curva. Cada uno de los planos que tiene como contorno la curva es un meridiano. Los planos que cortan a la superficie y son normales al eje de revolución se denominan paralelos. Los meridianos y los paralelos son los planos en que quedan contenidos los radios principales de la superficie de revolución como se muestran en la fig 2.1.

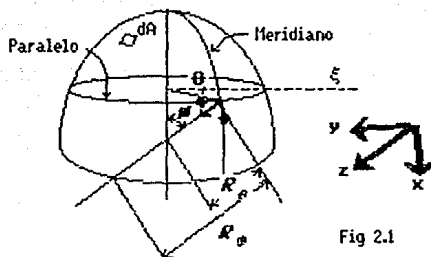


Fig 2.1

Los radios principales son:  $R_\theta$ , radio de curvatura del meridiano;  $R_\phi$ , longitud de la normal de un punto cualquiera de la superficie al eje de revolución y por último  $r$ , que es el radio de curvatura del paralelo. Los ángulos que se muestran son:  $\theta$ , mide la abertura entre  $r$  y una línea prestablecida como referencia y  $\phi$  que es el ángulo medido del eje de revolución a la normal de un punto de la superficie.

Las cargas actuantes sobre el cascaron pueden ser fuerzas externas en las caras interna y/o externa y las fuerzas de cuerpo sobre el cascarón. Dichas fuerzas, externas o de cuerpo, se representan con tres componentes con las direcciones principales de los ejes coordenados de referencia mostrados en la fig 2.1 de manera que la componente  $p_x$  es paralela a la tangente del meridiano, la componente  $p_y$  es paralela a la tangente del círculo paralelo y por último la componente  $p_z$  es normal a la superficie del cascarón.

Fuerzas internas resisten la acción de las cargas externas y fuerzas de cuerpo. Las fuerzas internas consisten en fuerzas de membrana ( $N_\theta$ ,  $N_\phi$ ,  $N_{\theta\phi}$ ,  $N_{\phi\theta}$ ), cortantes transversales ( $Q_\theta$ ,  $Q_\phi$ ) y momentos flexionantes y torsionantes ( $M_\theta$ ,  $M_\phi$ ,  $M_{\theta\phi}$ ,  $M_{\phi\theta}$ ), ( figs 2.2, 2.3 y 2.4 ).

Tanto las fuerzas internas como las externas deben cumplir las ecuaciones de equilibrio:

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma F_z = 0 \quad \Sigma M_x = 0 \quad \Sigma M_y = 0 \quad \Sigma M_z = 0$$

Ec 2.1

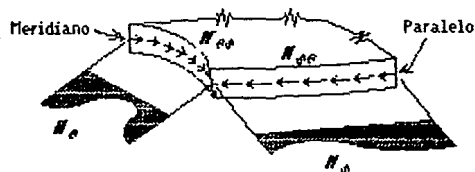


Fig 2.2



Fig 2.3

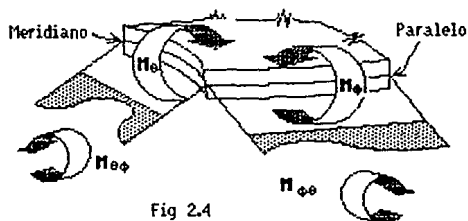


Fig 2.4

Son seis ecuaciones en las que intervienen las diez incognitas mencionadas haciendo el problema estáticamente indeterminado. Ante esta situación se han desarrollado teorías como la de membrana de cascarones de revolución en que se considera una armadura con todos sus nudos articulados de tal forma que todos sus miembros trabajan a fuerzas axial, con momentos y cortantes nulos ( $M_{\theta} = M_{\phi} = M_{\theta\theta} = M_{\theta\phi} = Q_{\theta} = Q_{\phi} = 0$ ), dejando sólo a las fuerzas que trabajan en el plano de la superficie del cascarón que son las fuerzas de membrana ( $N_{\theta}$ ,  $N_{\theta\theta}$ ,  $N_{\theta\phi}$ ).

En el desarrollo completo de la teoría se encuentra que  $N_{\theta\theta} = N_{\phi\phi}$ ,  $\Sigma M_x = 0$  y  $\Sigma M_y = 0$  se satisfacen automáticamente al no existir fuerzas que produzcan momentos.

Finalmente, la teoría presenta las ecuaciones diferenciales de equilibrio, en las que se nota que no dependen

de la rigidez del cascarón por ser estáticamente determinado al actuar exclusivamente las fuerzas de membrana.

$$\frac{\partial (N_{\phi} R_{\phi} \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial N_{\theta\theta} R_{\theta}}{\partial \theta} - N_{\theta} R_{\theta} \cos \theta + \rho_X R_{\phi} R_{\theta} \sin \theta = 0$$

$$\frac{\partial N_{\theta} R_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial (N_{\phi\phi} R_{\phi} \sin \theta)}{\partial \theta} + N_{\phi\phi} R_{\phi} \cos \theta + \rho_Y R_{\phi} R_{\theta} \sin \theta = 0$$

$$N_{\theta} R_{\theta} + N_{\phi} R_{\phi} + \rho_Z R_{\phi} R_{\theta} = 0$$

Ecs 2.2

En la teoría de flexión para cascarones de revolución bajo carga axisimétrica se manejan como incógnitas  $N_{\phi}$ ,  $N_{\theta}$ ,  $Q_{\phi}$ ,  $M_{\phi}$ ,  $M_{\theta}$  de las ecuaciones diferenciales de equilibrio siguientes (ref 1).

$$\frac{\partial (N_{\phi} R_{\phi} \sin \theta)}{\partial \theta} - N_{\theta} R_{\theta} \cos \theta - Q_{\theta} R_{\theta} \sin \theta + \rho_X R_{\phi} R_{\theta} \sin \theta = 0$$

$$N_{\phi} R_{\theta} \sin \theta + N_{\theta} R_{\phi} \sin \theta + \frac{\partial (Q_{\phi} R_{\phi} \sin \theta)}{\partial \theta} + \rho_Z R_{\phi} R_{\theta} \sin \theta = 0$$

$$\frac{\partial (M_{\theta} R_{\theta} \sin \theta)}{\partial \theta} - Q_{\phi} R_{\phi} R_{\theta} \sin \theta + M_{\theta} R_{\theta} \sin \theta = 0$$

Ecs 2.3

Aplicando las leyes elásticas y resolviendo las ecuaciones diferenciales de un elemento de cascarón, donde intervienen las deformaciones, se llega al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} N_{\phi} &= B(\epsilon_{\phi} + \mu\epsilon_{\theta}) & N_{\theta} &= B(\epsilon_{\theta} + \mu\epsilon_{\phi}) \\ M_{\phi} &= D(X_{\phi} + \mu X_{\theta}) & M_{\theta} &= D(X_{\theta} + \mu X_{\phi}) \end{aligned} \quad \text{Ecs 2.4}$$

donde

$$X_{\phi} = \frac{1}{R_{\phi}} \frac{d\beta}{d\theta} \quad X_{\theta} = \frac{\beta \cot \theta}{R_{\theta}}$$

$B$  es la rigidez extensional  $B = \frac{Et}{(1 - \mu^2)}$

$D$  es la rigidez a la flexión  $D = \frac{Et^3}{12(1 - \mu^2)}$



Así, se llega a tener las suficientes ecuaciones que resuelven teóricamente el problema global, en deformaciones y esfuerzos en cualquier punto de un cascarón atendiendo también a las condiciones de frontera. Sin embargo, a pesar de contar con las expresiones anteriores, es difícil obtener la solución general, por lo que en la práctica se utilizan la solución de membrana y las soluciones de flexión a casos particulares de perturbaciones de borde (momentos y cortantes), que mediante procedimientos como el método de las fuerzas se busca el equilibrio de fuerzas con la compatibilidad de desplazamientos.

Para valuar las acciones sobre un silo, se cuenta con varias teorías de solución de cascarones estructurales (ref 1). Al respecto se hará referencia en particular a las que tratan a los cascarones de revolución, como son la teoría de cascarones de aproximación de primer orden, de aproximación de segundo orden, las teorías especiales y la teoría de membrana.

En la teoría de aproximación de primer orden se tienen las hipótesis de considerar el espesor del cascarón pequeño en comparación con el radio de curvatura mínimo, elementos normales a la superficie media no deformada permanecen normales a la misma después de la deformación, las componentes normales de esfuerzos a la superficie media son insignificantes, pudiéndose desprestigiar de las relaciones esfuerzo-deformación y, por último, la consideración de los desplazamientos y deformaciones son tan pequeños que los términos de orden superior en las ecuaciones de equilibrio pueden ignorarse. Algunas de estas hipótesis se asemejan a las hipótesis de Navier para vigas.

En la teoría de aproximación de segundo orden, se mantienen los términos que contienen el factor  $x/R$  en las ecuaciones generales de elasticidad lineal tridimensional.

Las teorías especiales se enfocan a problemas determinados, como son la inclusión de la deformación por cortante y la aproximación de Gekeler a cascarones cargados simétricamente.

La teoría de membrana, de la cual se hará uso en este trabajo, parte de las ecuaciones generales de equilibrio, incluyen la acción de flexión y sus consecuencias. Al respecto, cabe mencionar la distinción entre membranas. Puede

considerarse a un cascarón bajo régimen de membrana exclusivamente si los esfuerzos por flexión son lo suficientemente pequeños en comparación con los esfuerzos por carga axial como para despreciarlos. De aquí que se consideren dos tipos de cascarones: los que presentan rigidez a flexión muy pequeña y, por tanto, incapaces de resistir flexión, y los que son lo suficientemente rígidos y cargados de forma que los esfuerzos por flexión sean mínimos.

Como se ha visto, la flexión no es conveniente de forma teórica ni práctica. En la parte teórica, por las dificultades que encierra la solución de los sistemas de ecuaciones, y en la práctica porque en un cascarón con un espesor suficientemente pequeño se tiene una rigidez a la flexión casi nula y cualquier acción que produzca flexión, por muy pequeña que ésta sea, ocasionará deformaciones y desplazamientos considerables.

No sólo existen las teorías basadas en los principios de linealidad elásticas. Para el análisis de estabilidad estructural se usan las teorías cuyo fundamento es la elasticidad no lineal, con la que se puede estudiar el fenómeno de deformaciones grandes.

A continuación se encuentran los diferentes estados de carga a que puede estar sometido un silo de almacenamiento, así como el procedimiento a seguir para su análisis.

### a) Peso propio

En el análisis bajo peso propio de un silo, se utilizan las soluciones de régimen de membrana de los diversos cascarones de revolución que conforman el silo ( ref 1 ). Con estas soluciones se evalúan  $N_x$ ,  $N_\theta$ , el incremento en el radio (  $\Delta r$  ) y el giro (  $\beta$  ) en cualquier punto de la superficie de cada cascarón. Son de especial interés las soluciones de membrana para conos y cilindros, las que aparecen a continuación.

#### Cascarón cónico

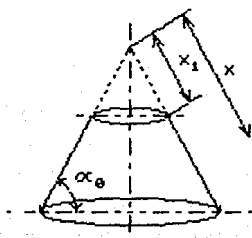


Fig 2.5

$$N_\theta = \frac{-q \cos^2 \alpha_0 x}{\text{sen } \alpha_0}$$

$$N_x = \frac{-qx}{2 \text{ sen } \alpha_0} \left[ 1 - \left( \frac{x_1}{x} \right)^2 \right] \quad \text{Ecs 2.5}$$

$$\Delta r = \frac{-qx^2}{2Et} \text{ ctg } \alpha_0 \left[ 2 \cos^2 \alpha_0 - \mu \left\{ 1 - \left( \frac{x_1}{x} \right)^2 \right\} \right]$$

$$\beta = \frac{qx \cos \alpha_0}{2 Et \text{ sen}^2 \alpha_0} \left[ 2(2 + \mu) \cos^2 \alpha_0 - 2\mu + \left( \frac{x_1}{x} \right)^2 - 1 \right]$$

La solución que se presenta es para cascarón cónico truncado de vértice superior. Para el caso de cono invertido, los valores de  $N_x$ ,  $N_\theta$  y  $\Delta r$  cambian de signo. Cuando el cono es completo, el término  $(x_1/x)^2$  desaparece. El peso del cascarón está dado por  $q$ , en fuerza por unidad de área. El sentido del peso ya está considerado en las ecuaciones.

Cascarón cilíndrico.  $\xi = x/L$  ( Figs 2.6, 2.7 y 2.8 )

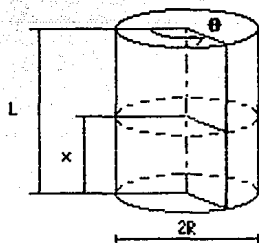


Fig 2.6

$$N_{\theta} = 0$$

$$N_x = P_{x0} L \left( \xi - \frac{1}{2} - \frac{\xi^2}{2} \right)$$

$$u = \frac{P_{x0}}{Et} L^2 \xi \left( \frac{\xi}{2} - \frac{1}{2} - \frac{\xi^3}{6} \right)$$

$$v = 0$$

Ecs 2.6

$$w = \Delta r = \frac{\mu P_{x0}}{Et} L \left( \frac{1}{2} - \xi + \frac{\xi^2}{2} \right)$$

$$\beta = \frac{dw}{d\xi} = \frac{\mu P_{x0}}{Et} L (\xi - 1)$$

En las expresiones anteriores,  $P_{x0}$  es el peso por unidad de área de espesor  $t$  del cascarón. En las ecs 2.6 ya está considerada el sentido de la acción del peso propio, por tanto,  $P_{x0}$  es la magnitud.

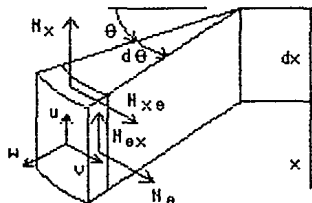


Fig 2.7

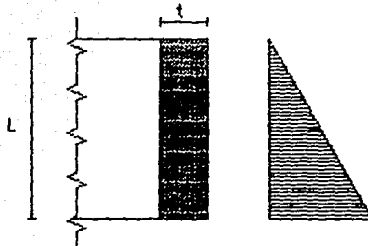


Fig 2.8 Distribución del peso propio

Además de las expresiones de peso propio de cada uno de los elementos, son necesarias las expresiones para cargas verticales en uno de los bordes (linternilla). Este tipo de carga vertical generalmente es dirigida hacia abajo, produciendo compresiones en la dirección X de los cascarones.

#### Cascarón cónico

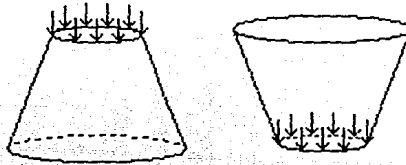


Fig 2.9

$$\begin{aligned}
 N_x &= \frac{-p}{\text{sen } \alpha_0} \frac{x_1}{x} \\
 N_\theta &= 0 \\
 \Delta r &= \frac{-\mu p x_1 \text{ctg } \alpha_0}{Et} \\
 \beta &= \frac{-p x_1 \text{ctg } \alpha_0}{Et x \text{sen } \alpha_0}
 \end{aligned}
 \quad \text{Ecs. 2.7}$$

En el caso de que el cono sea invertido, únicamente cambia de signo la expresión de  $N_x$ .

Cascarón cilíndrico. ( fig 2.10 )

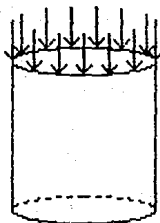


Fig 2.10

$N_x$	$-p$	
$N_\theta$	$0$	
$u$	$\frac{-pL}{B} \xi$	Ecs 2.8
$v$	$0$	
$w = \Delta r$	$\frac{\mu p R}{B}$	
$\beta$	$0$	

Para las ecs 2.7 y 2.8,  $p$  es la magnitud de la fuerza en  $\text{kg/m}$ , tanto para el cono, como para el cilindro.  $B$  es la rigidez extensional del cascarón,  $B = Et/(1-\mu^2)$

Por la diferencia de la geometría de los diversos cascarones, los desplazamientos y giros no son iguales, y es necesario corregir los elementos mecánicos por perturbación de borde. Esta corrección es la base del **método de las fuerzas** para sistema de cascarones conectados, bajo la acción de carga axisimétrica.

Para la aplicación del método de las fuerzas es necesario conocer los desplazamientos que ocasionan perturbaciones, como lo son momentos ( $M$ ) y cortantes horizontales ( $H$ ) en cada uno de los bordes, así como los elementos mecánicos. Las expresiones de estas perturbaciones se encuentran en el apéndice A, ya que son de uso común para diversos estados de carga axisimétrica.

b) Efecto de materiales en el interior

Los primeros trabajos que tratan el tema de materiales almacenados en el interior de silos utilizaban la analogía de presión hidrostática. En la literatura ingenieril se cuenta con los primeros estudios más apegados a la realidad a partir de 1895, con Janssen, Airy y Ketchum. Estos estudios incorporan en el análisis de presiones, la fricción existente entre el material en el interior y la pared lateral del silo ( ref 2 ).

Por esas mismas fechas se observó el comportamiento de presiones en el proceso de descarga. Las pruebas realizadas por investigadores revelaron que estas presiones son del orden de dos a cuatro veces mayores que las presiones iniciales del llenado del silo.

La solución clásica de la presencia de material en el interior de silos es debida a H. A. Janssen, 1895, basada en la acción de fuerzas sobre una franja de material en el interior ( fig 2.11 ). La suma de fuerzas vertical resulta:

$$dp_v A - \gamma A dy + q C dy = 0 \quad \text{Ec 2.9}$$

En esta expresión,  $p_v$  es la presión vertical en el silo.

$q$  es la presión en la pared debida a la fricción.

$\gamma$  es la densidad del material contenido en el silo.

$A$  es el área de la sección transversal del silo.

$C$  es el perímetro del silo.

$y$  es la profundidad de la sección donde se calculan los esfuerzos.

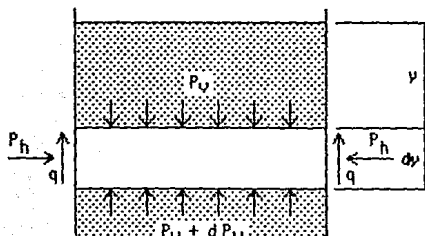


Fig 2.11

La presión lateral sobre las paredes del silo quedan en función de  $p_v$ , y la relación entre la presión lateral  $p_h$  y la fricción sobre la pared se definen como:

$$p_h = K p_v \quad \text{y} \quad q = p_h \operatorname{tg} \delta' \quad \text{o} \quad q = \mu' p_h$$

Ecs 2.10

Donde  $K$  es el coeficiente de presión,  $\delta'$  es el ángulo de fricción de la pared y  $\mu' = \operatorname{tg} \delta'$  es el coeficiente de fricción del material con la pared. No hay que confundir  $\delta'$  con  $\delta$ , que es el ángulo de fricción interna del material contenido en el silo.

Al sustituir las ecs 2.10 en la 2.9, e integrándola se llega a:

$$p_v = \frac{\gamma R (1 - e^{-2K\mu'/R})}{\mu'K} \quad \text{Ec 2.11}$$

$R$  es el radio hidráulico,  $R = A/C$ .

Con esta expresión base, varios investigadores e instituciones ( ref 2 ) proponen valores a los distintos coeficientes que intervienen en la expresión, en los procesos de carga y descarga del material.

En el caso de carga, por ejemplo, Janssen propone utilizar  $\delta = \delta'$ , y el coeficiente  $K = K_a$ , coeficiente del estado activo de Rankine, propuesto por Koenen y definido por:

$$K_a = \frac{1 - \operatorname{sen} \delta}{1 + \operatorname{sen} \delta} = \frac{\operatorname{tg}^2(45 - \frac{\delta}{2})}{2} \quad \text{Ec 2.12}$$

Pieper y Wenzel proponen al igual que Janssen  $\delta' = \delta$ , y además utilizar el coeficiente de presión estática usado en mecánica de suelos, el cual les ha proporcionado buenos resultados:

$$K = 1 - \operatorname{sen} \delta \quad \text{Ec 2.13}$$

Jenike, Johanson y Carson han obtenido resultados favorables en comparación con pruebas experimentales usando  $K = 0.40$ .



A. G. Homes ha obtenido los mejores resultados comparativos con pruebas experimentales al utilizar la fórmula de Janssen con  $\delta' = 0.67\delta$  y  $K = 0.45$ . Estos valores son el resultado del análisis de ocho grupos de experimentos, realizados por diversos investigadores.

Reimbert y Reimbert desarrollaron fórmulas para las presiones vertical y lateral basados en experimentos con modelos a escala de silos de gran altura. Estas fórmulas intentan describir el proceso de llenado.

$$P_v = \gamma \left[ \gamma \left( 1 + \frac{\gamma}{\gamma_0} \right)^{-1} + \frac{h_c}{3} \right] \quad \text{Ecs 2.14}$$

$$P_h = \frac{\gamma R}{\mu'} \left[ 1 - \left( 1 + \frac{\gamma}{\gamma_0} \right)^{-2} \right]$$

$h_c$  = altura del cono de carga.

$\gamma$  = distancia debajo de la base del cono de descarga.

$\gamma_0 = (R/\mu'K) - (h_c/3)$ .

El reglamento ACI 313-77 tiene el procedimiento de Janssen y Reimbert para el cálculo de presiones. En este reglamento, las presiones son consideradas estáticas, o sea el material en reposo una vez llenado el silo. Para obtener valores reales son recomendados factores de sobrepresión.

En el aspecto referente a la descarga del material, existen dos tipos de flujo del material hacia el exterior.

Al primer tipo de descarga se le denomina flujo de émbolo, y se forma en silos de fondo plano o con tolva de descarga de pendiente no muy pronunciada, donde fluye el material en un canal formado por el material circundante ( fig 2.12 ).

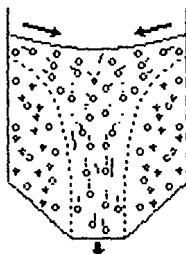


Fig. 2.12

Este tipo de descarga no produce presiones excesivas por lo que puede describirse su distribución por los métodos explicados, aplicando los coeficientes requeridos para el caso ( K,  $\mu$ , etc. ).

Las normas alemanas DIN 1055 ( ref 2 ) especifican valores para K y el ángulo de fricción de la pared  $\mu'$  en la siguiente tabla.

Condición	Angulo de fricción de la pared $\mu'$ .		K
	Material granular, diámetro prom. >0.2 mm	Material en polvo, diámetro prom. <0.06 mm	
Llenado	0.75 $\mu$	$\mu$	0.5
Vaciado	0.60 $\mu$	$\mu$	1.0

Las presiones vertical y lateral de vaciado deben ser multiplicadas por un coeficiente  $c_1$  dado por:

$$c_1 = 1 + 0.2 \left( c_2 + \frac{eC}{1.5A} \right) \quad \text{Ec 2.15}$$

En esta expresión:

$c_2 = 1$ , para material orgánico.

$c_2 = 0$ , para material inorgánico.

e = excentricidad de la descarga medida a partir del centroide de la sección.

C = perímetro de la sección.

A = área de la sección transversal.

En el proceso de descarga, Homes ( ref 2 ) obtuvo buenos resultados con la fórmula de Janssen al usar un valor  $K = 0.9$  y  $\mu' = 0.55\mu$  para la parte superior del silo limitado por la altura  $H - 1.3D$ . El segmento restante varía linealmente desde el valor de presión de descarga a  $1.3D$  de altura hasta el valor de la presión de llenado en la salida de la tolva.

Además de las presiones vertical y lateral existe una fuerza provocada por la fricción entre el material y la pared del silo. Esta fuerza es igual al peso del material sobre la sección y la resultante de la presión vertical. Esta fuerza se evalúa por unidad de longitud del perímetro, dada por:

$F_c = R(\gamma y - p_v)$  en donde  $R =$  radio hidráulico.

En el reglamento DIN 1055 la fórmula se modifica a:

$$F_c = c_1 R (\gamma y - \frac{p_v}{c_1}) \quad \text{Ec 2.16}$$

La razón de dividir la presión vertical entre el factor  $c_1$  se debe a que el uso de la fórmula de Janssen proporciona valores mayores que con otras expresiones, y esto reduce la fuerza  $F_c$ .

En la tolva de descarga, debido a su geometría cónica o piramidal, se producen fuerzas normales y paralelas a la superficie media de la tolva, como se muestra en la fig 2.13.

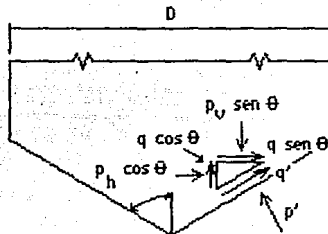


Fig. 2.13

Estas fuerzas están expresadas a continuación en su forma general:

$$p' = p_v \text{ sen}^2 \theta + p_h \text{ cos}^2 \theta + q \text{ sen } 2\theta \quad \text{Ecs 2.17}$$

$$q' = \frac{1}{2}(p_v - p_h) \text{ sen } 2\theta + q \text{ cos } 2\theta$$

Existe la reducción de las expresiones al considerar el comportamiento del material en el interior del silo como una masa semi-infinita según la teoría de Rankine, en la que  $q = 0$ :

$$p' = p_v \text{ sen}^2 \theta + p_h \text{ cos}^2 \theta \quad \text{Ecs 2.18}$$

$$q' = \frac{1}{2}(p_v - p_h) \text{ sen } 2\theta$$

El reglamento DIN 1055 especifica una presión  $p'$  del

doble de la calculada con la ecuación 2.18, con presiones  $p_v$  y  $p_h$  obtenidas para el proceso de llenado del silo con factor  $c_1 = 1$ , ya sea material orgánico o inorgánico.

El segundo, llamado flujo de masa, tiene como característica principal el movimiento continuo de todo el material ( fig 2.14 ).

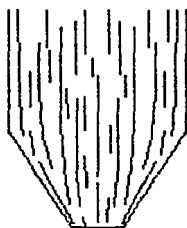


Fig 2.14

En el diseño estructural de silos, este tipo de descarga tiene el inconveniente de provocar altas presiones en las paredes laterales y la tolva de descarga. El impacto de las partículas del material que esté depositado puede en un momento dado desgastar el material de que está hecho el silo.

Aunque sea un tipo de flujo predecible en algunos materiales almacenados, no está por demás que se realice el análisis de este tipo de descarga cuando el material presente descarga de embolo. Su análisis es una seguridad adicional en el funcionamiento del silo.

Existe el antecedente del trabajo realizado por Walker ( ref 2 ), quien asume que las presiones iniciales de llenado en el silo obedecen a un campo activo de Rankine con un coeficiente de presión lateral en función del ángulo efectivo de fricción (  $\delta$  ), ec 2.12. Las expresiones son:

$$p_v = \gamma y \quad y \quad p_h = K p_v \quad \text{Ecs 2.19}$$

y es la profundidad a la que se calcula la presión.

$\gamma$  es el peso volumétrico del material.

El campo activo según Rankine ( ref 2 ) no contempla la acción de cortante. Los resultados que se pueden obtener son elevados, ya que estas expresiones son equivalentes a presión

hidrostática.

En la tolva de descarga la presión principal es la vertical, calculándose de una de dos formas dependiendo de la fricción en la pared de la tolva. La fricción se determina de forma simplificada por:

$$\operatorname{sen} \delta \geq \frac{\operatorname{sen} \delta'}{\operatorname{sen}(\delta' + 2\theta)} \quad \text{Ec 2.20}$$

De cumplirse la desigualdad anterior, queda de manifiesto que la fricción de la pared de la tolva no es capaz de soportar un estado de Rankine activo, y las presiones se determinan por:

$$p' = \gamma y \frac{\operatorname{tg} \theta}{\operatorname{tg} \theta + \operatorname{tg} \delta'} \quad \text{Ecs 2.21}$$

$$q' = p' \operatorname{tg} \delta' = \mu' p'$$

Cuando si se puede soportar un estado activo, entonces:

$$p' = \gamma y \frac{1 - \operatorname{sen} \delta \cos 2\theta}{1 + \operatorname{sen} \delta} \quad \text{Ecs 2.22}$$

$$q' = \gamma y \frac{\operatorname{sen} \delta \operatorname{sen} 2\theta}{1 + \operatorname{sen} \delta}$$

El proceso de descarga, Walker lo describe con la fórmula de Janssen, en la que:

$$\mu' K = \frac{\operatorname{sen} \delta \operatorname{sen} \varepsilon_1}{1 - \operatorname{sen} \delta \cos \varepsilon_1}$$

y

Ecs 2.23

$$\varepsilon_1 = \frac{\pi}{2} + \delta' + \cos^{-1} \left( \frac{\operatorname{sen} \delta'}{\operatorname{sen} \delta} \right)$$

La presión sobre la tolva de descarga es máxima al considerar el material en estado de cedencia, para provocar las reacciones grandes en la tolva y se define mediante:

$$p_v = \frac{\gamma h}{K_w - 1} \left( \frac{z}{h} \right) + \left( p_{vt} - \frac{\gamma h}{K_w - 1} \right) \left( \frac{z}{h} \right)^{K_w} \quad \text{Ec 2.24}$$

$$K_w = \frac{1 + m}{\text{tg} \theta} \frac{\text{sen} \delta \text{sen} (2\theta + \epsilon_2)}{1 - \text{sen} \delta \cos (2\theta + \epsilon_2)}$$

$$\epsilon_2 = \theta' + \text{sen}^{-1} \left( \frac{\text{sen} \theta'}{\text{sen} \delta} \right)$$

$m = 0$ , para tolvas en forma de cuña.

$m = 1$ , para tolvas con forma piramidal o cónica.

$z$  = distancia de la sección donde se calcula la presión sobre el vértice de la tolva ( fig 2.15 ).

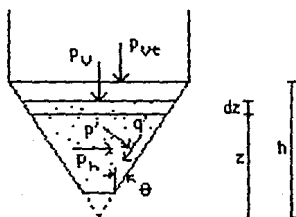


Fig. 2.15

$h$  = distancia del vértice a la transición de la tolva al cuerpo cilíndrico del silo.

$p_{vt}$  = presión vertical en la transición.

Otra propuesta para el análisis del flujo de masa es la teoría de Jenike y Johanson ( ref 2 ).

Las presiones de llenado se calculan con la fórmula de Janssen usando  $K = 0.4$ . Los resultados han sido satisfactorios comparados con pruebas experimentales.

En el proceso de descarga, las presiones en el cuerpo cilíndrico se calculan por:

$$\frac{p_h}{R\gamma/\mu'} = 1 + \frac{(\beta p_{vj}/\gamma - k)[(1+k)e^{\beta(H-\gamma)} - (1-k)e^{-\beta(H-\gamma)}] - 2(1-k^2)}{(1+k)e^{\beta(H-\gamma)} + (1-k)e^{-\beta(H-\gamma)}}$$

Ec 2.25

$R$  = radio hidráulico.

$H$  = altura del cuerpo cilíndrico del silo.

$y$  = distancia de la parte superior del material hasta donde se desee calcular la presión.

$p_{vj}$  = presión vertical a una distancia  $y$ , calculada por la fórmula de Janssen.

$$k = K \sqrt{\frac{2}{1 + K}} \quad \beta = \frac{\mu'K}{Rk} \quad K = \text{Coeficiente de presión de Janssen.}$$

La ec 2.25 no proporciona la presión nula en  $y = 0$  debido a que la zona de transición se defasa a una profundidad igual a la mitad del diámetro hasta un diámetro, donde la ecuación no es válida ( fig 2.16 ). La ecuación es una envolvente de las presiones en el interior del silo. Jenike recomienda tomar 1.5 veces la presión lateral de Janssen para la porción de  $y = 0$  hasta un diámetro de la sección transversal con  $K > 0.4$  o por la ecuación 2.12 usando el ángulo efectivo de fricción interna. La ec 2.25 debe modificarse, por que las presiones laterales disminuyen al llegar a las cercanías de la tolva de descarga porque ésta no es considerada dentro de la ecuación.

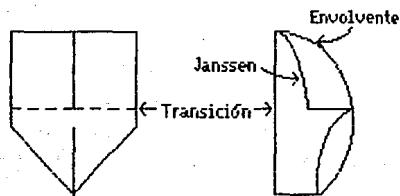


Fig. 2.16

Para la descarga en la tolva, Jenike propone:

$$p' = \gamma(h + h_c - z)(1 + \text{tg}^2\theta/\text{tg}^2\theta)^{-1} \quad \text{Ec 2.26}$$

$z$  = distancia arriba del vértice de la tolva.

$h$  = distancia del vértice de la tolva a la transición.

$h_c$  = altura del material depositado arriba de la transición.

La compresión vertical está dada por:

$$\frac{p_v}{\gamma \rho} = k + \frac{(1 - k^2)(e^{kY} - e^{-kY}) - k[(1 + k)e^{k(H+Y)} + (1 - k)e^{-k(H+Y)}]}{(1 + k)e^{kH} + (1 - k)e^{-kH}}$$

Ec 2.27

Todos los puntos de vista que ofrecen los investigadores tratan el problema de forma teórica, cuando las presiones sobre las paredes del silo son axisimétricas. En la fig 2.11 se ve que las fuerzas que actúan en una franja del material contenido en el silo son iguales en ambos lados de la misma. En la ref 5 se trata el estudio del comportamiento aleatorio del material en el interior.

Considerar presiones constantes en una franja de material produce generalmente tensiones en la pared del silo cuando es cilíndrico. Esto no es del todo cierto, ya que existen factores que producen diferentes presiones en la pared del silo. Entre estos factores están el impacto del grano en la pared, el acomodo desigual del grano, imperfecciones geométricas de la pared, así como el tipo de llenado y vaciado del silo que pueden ser concéntricos o excéntricos.

La diferencia de presiones en una franja de material produce deformaciones irregulares y, por tanto, momentos y cortantes de difícil determinación usando la teoría de cascarones incluyendo los efectos de flexión, por un lado por la inclusión misma de los efectos de flexión y, por otro la variabilidad de las presiones, en su magnitud y en su localización exacta.

El comportamiento aleatorio de las presiones ha sido poco estudiado. Una manera de sobrellevar estas acciones utiliza los coeficientes de sobrecarga de la misma forma que se usan en los procesos de llenado y vaciado del silo.

Hasta esta parte del estudio de los materiales en el interior, se han encontrado criterios para evaluar las acciones sobre el silo. De lo visto, son de especial interés la presión lateral en la pared cilíndrica del silo y la presión sobre la tolva de descarga, las dos acciones en el proceso de descarga.

El tipo de función que representa estas acciones es exponencial. El manejo de esta función en solución de membrana obliga el uso de una aproximación por funciones lineales, fig 2.17, a intervalos regulares o por secciones delimitadas por



los espesores de los elementos del silo, según nuestro criterio. Cabe señalar de que se está tratando la simplificación de una aproximación, por lo que cualquier modelo matemático que se utilice para representar las acciones reales deberá procurarse quede del lado de la seguridad.

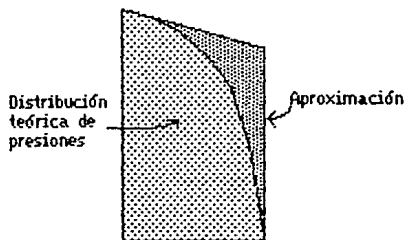


Fig 2.17

Para la pared cilíndrica se tiene la solución de membrana para una carga de variación lineal ( fig 2.18, ref 1 ).

$$N_{\theta} = p_h R (1 - \xi + \lambda_p)$$

$$N_x = 0$$

$$N_{x\theta} = 0$$

$$u = \frac{-\mu p_h R L \xi (1 - \xi + \lambda_p)}{Et} \quad 2$$

$$v = 0$$

$$w = \frac{p_h R^2 (1 - \xi + \lambda_p)}{Et}$$

$$\beta = \frac{p_h R^2}{Et}$$

Ecs 2.28

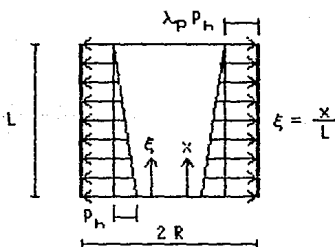


Fig 2.18

Los términos  $1 - \xi/\text{constante}$ , donde la constante es 1 o 2, representan la variación lineal. Eliminarlos de las fórmulas equivale a hacer que la presión existente sea uniforme de

valor  $\lambda_{pph}$ .

En la tolva, se puede considerar que actúa una presión constante vertical sobre el diámetro mayor del cono (fig 2.19 ).

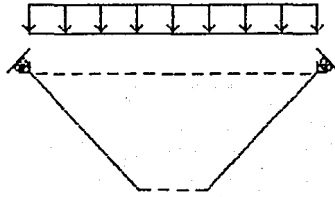


Fig 2.19

Esta aproximación parece ser burda, pero habrá de analizar la variación de presiones para un problema en particular. De la ref 1 se tiene:

$$N_{\theta} = \frac{p \times \cos^2 \alpha_0}{\operatorname{sen} \alpha_0}$$

$$N_x = \frac{p \times \operatorname{ctg} \alpha_0}{2} \left[ 1 - \left( \frac{x_1}{x} \right)^2 \right] \quad \text{Ecs 2.29}$$

$$\Delta r = \frac{p x^2}{2Et} \frac{\cos^2 \alpha_0}{\operatorname{sen} \alpha_0} \left[ 2 \cos^2 \alpha_0 - \mu \left\{ 1 - \left( \frac{x_1}{x} \right)^2 \right\} \right]$$

$$\beta = \frac{p \times \operatorname{ctg}^2 \alpha_0}{2Et} \left[ 2(2 + \mu) \cos^2 \alpha_0 - 2\mu + \left( \frac{x_1}{x} \right)^2 - 1 \right]$$

En estas expresiones, sólo se considera el caso de cono truncado invertido. Para cono con vértice superior, el giro ( $\beta$ ) cambia de signo.

Las referencias de coordenadas y variables son las mismas que para peso propio.

### c) Acción del viento

En la literatura se encuentra poca información en lo referente a la acción del viento en silos, siendo a única solución exacta la que presenta Rafael Cedeño ( ref 6 ) para un silo de pared cilíndrica ortotrópica (corrugada) con cono truncado isotrópico ( fig 2.20 ).

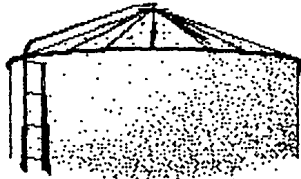


Fig 2.20

El tipo de estructura ligera tiene los mayores problemas contra el viento cuando se encuentra vacía. La presencia de material en el interior ayuda a la estabilidad general, evita las deformaciones excesivas en la pared lateral.

La solución del silo se obtuvo mediante las ecuaciones diferenciales parciales de equilibrio planteadas por Jerath y Boresi ( ref 11 ), las condiciones naturales de frontera y la representación en series de Fourier de la distribución de presiones (12 términos de la serie). La distribución de presiones se obtuvo por medio de modelos experimentales en pruebas de túnel de viento ( fig 2.21 ).

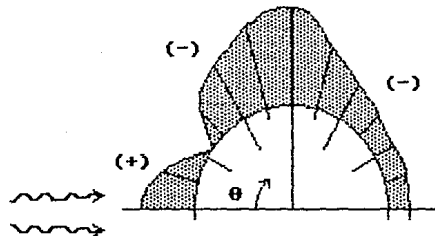


Fig 2.21

Utilizar series de Fourier facilita el problema, transformando las ecuaciones diferenciales de equilibrio y frontera en ecuaciones algebraicas. La representación es la siguiente:

$$P = 1/2 \rho C_p V^2 \quad \text{en donde} \quad C_p = \sum a_n \cos n\theta \quad \text{Ecs 2.30}$$

En donde los coeficientes  $a_n$  son:

$a_0 = -0.603$	$a_4 = -0.049$	$a_8 = -0.046$
$a_1 = 0.300$	$a_5 = 0.018$	$a_9 = -0.004$
$a_2 = 0.934$	$a_6 = 0.066$	$a_{10} = 0.008$
$a_3 = 0.413$	$a_7 = -0.013$	$a_{11} = -0.005$

El uso de la serie de Fourier con 12 términos permite una precisión aceptable con un error máximo del 2.7% con respecto a los valores obtenidos de forma experimental presentados en la tabla 2.1, medidos a intervalos de 5° a partir de la referencia mostrada en la fig 2.21. Cabe hacer notar que los valores de los coeficientes concuerdan con los valores publicados en la ref 8.

Tabla 2.1. Coeficientes de presión  $C_p$ .  
( ref 6 )

°	$C_p$	°	$C_p$	°	$C_p$	°	$C_p$
0	1.00	50	-0.92	95	-1.61	140	-0.45
5	1.00	55	-1.09	100	-1.45	145	-0.42
10	0.94	60	-1.20	105	-1.20	150	-0.40
15	0.80	65	-1.34	110	-1.01	155	-0.40
20	0.60	70	-1.48	115	-0.84	160	-0.40
25	0.36	75	-1.60	120	-0.70	165	-0.40
30	0.10	80	-1.68	125	-0.61	170	-0.40
35	-0.17	85	-1.72	130	-0.54	175	-0.40
40	-0.45	90	-1.70	135	-0.50	180	-0.40
45	-0.70						

El planteamiento de solución sólo es el indicado para un silo de pared cilíndrica ortotrópica y cono truncado isotrópico superior. De esta forma se ve que para diferentes configuraciones de silos es necesario plantear las ecuaciones diferenciales de equilibrio y frontera, según los elementos que conformen el silo, ya que, por ejemplo, la pared cilíndrica del silo puede estar compuesta de varios cascarones de distinto espesor. Un planteamiento de tal magnitud está fuera del alcance del presente trabajo.

Por otro lado, existen planteamientos de solución de cascarones de revolución ( ref 7 ) en que la acción del viento está dada por las siguientes tres componentes:

$$X = X_0 \cos \psi \quad Y = Y_0 \sin \psi \quad Z = Z_0 \cos \psi \quad \text{Ecs 2.31}$$

Los términos  $X_0$ ,  $Y_0$  y  $Z_0$  representan la acción del viento a un ángulo  $\theta$  en que se encuentra un meridiano. Este tipo de solución considera sólo la existencia del régimen de membrana ( $N_\phi$ ,  $N_\theta$ ,  $N_{\phi\theta}$ ,  $N_{\theta\phi}$ ) para el análisis de fuerzas internas de un cascarón de revolución. Debido a la naturaleza de la acción del viento de forma irregular, es de esperarse que las deformaciones también lo sean con lo que indudablemente se presenta flexión ignorada en un principio. Esta solución se presume fue buena en su tiempo por ser de las teorías que atacaban de manera analítica la acción del viento.

Algunos investigadores ( ref 9 ) se limitan a estudiar la acción del viento como un problema de inestabilidad general del silo y revisión del anclaje. Para este caso, se evalúa la fuerza equivalente que produce el viento con la expresión:

$$F_v = 1/2 \rho C_D V^2 D h \quad \text{Ec 2.32}$$

en la que:

$\rho$  es la densidad del aire, 0.125 kg seg<sup>2</sup>/m<sup>4</sup>.

$V$  es la velocidad de diseño, en m/seg.

$D$  es la dimensión perpendicular a la dirección del viento, ancho del área expuesta, en caso de secciones circulares es el diámetro, en metros.

$h$  es la altura del silo, en metros.

$C_D$  es el coeficiente de arrastre que depende del tipo de

sección transversal y la relación de esbeltez,  $h/D$ .

Esta fuerza se considera actuando a una altura de  $h/2$  ( fig 2.22 ).

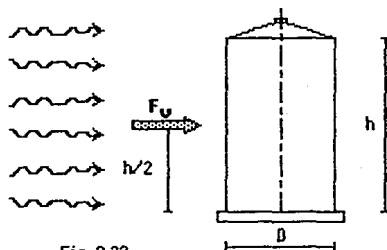


Fig 2.22

El coeficiente  $C_D$  a sido tabulado para diferentes tipos de secciones transversales y relaciones de esbele, tal como se indica en la tabla 2.2 ( ref 8 y 13 ).

Tabla 2.2

Coeficientes  $C_D$  para estructuras con sección circular.

Relación de esbeltez $h/D$	NTC RDF	ASCE
1	0.5	0.45
7	0.6	0.5
25	0.7	0.55

El reglamento australiano ( ref 10 ) establece el cálculo de presiones por:

$$p_e = 0.6 C_{pe} K_a K_i K_p V_z^2 10^{-3} \quad \text{Ec 2.33}$$

donde

$p_e$  = presión del viento en kilopascales.

Los factores  $K_a$ ,  $K_i$  y  $K_p$  se refieren a la reducción para techos y paredes laterales, a revestimientos de acero y revestimientos porosos. Como la expresión es de índole general, para el caso de silos, se utiliza la situación más desfavorable con valores unitarios.

$V_z$  = velocidad de ráfaga a una altura  $z$ , en m/s.

El término más significativo en cuanto a comportamiento viene a ser  $C_{pe}$ , el cual proviene de una serie de Fourier de seis términos que intenta representar la acción del viento sobre la pared del silo.  $C_{pe}$  se define como:

$$C_{pe} = k_c C_{p1}(\beta) \quad \text{Ec 2.34}$$

donde

$\beta$  = ángulo medido a partir de un eje principal paralelo a la dirección del viento ( fig 2.23 ).

$$C_{p1}(\beta) = -0.5 + 0.4\cos\beta + 0.8\cos2\beta + 0.3\cos3\beta - 0.1\cos4\beta - 0.05\cos5\beta$$

$$k_c = 1.0 \text{ cuando } C_{p1} \geq -0.15.$$

$$k_c = 1.0 - 0.55 ( C_{p1} + 0.15 ) \log_{10}(c/b) \text{ cuando } C_{p1} < -0.15.$$

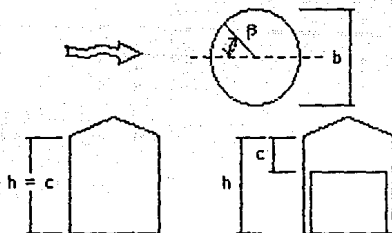


Fig 2.23

Al igual que la revisión de Ravenet, el reglamento australiano indica la fuerza de arrastre para evaluar la inestabilidad general de silos dada por:

$$F_d = 0.378 V_z^2 b c 10^{-3} \quad \text{Ec 2.35}$$

Las dimensiones  $b$  y  $c$  se muestran en la fig 2.23, además de las referencias de medidas angulares.

En la fig 2.24 se ilustra la distribución de coeficiente de presión para silos metálicos sujetos a flujo laminar. Estos coeficientes ( ref 14 ) son utilizados en la siguiente ecuación:

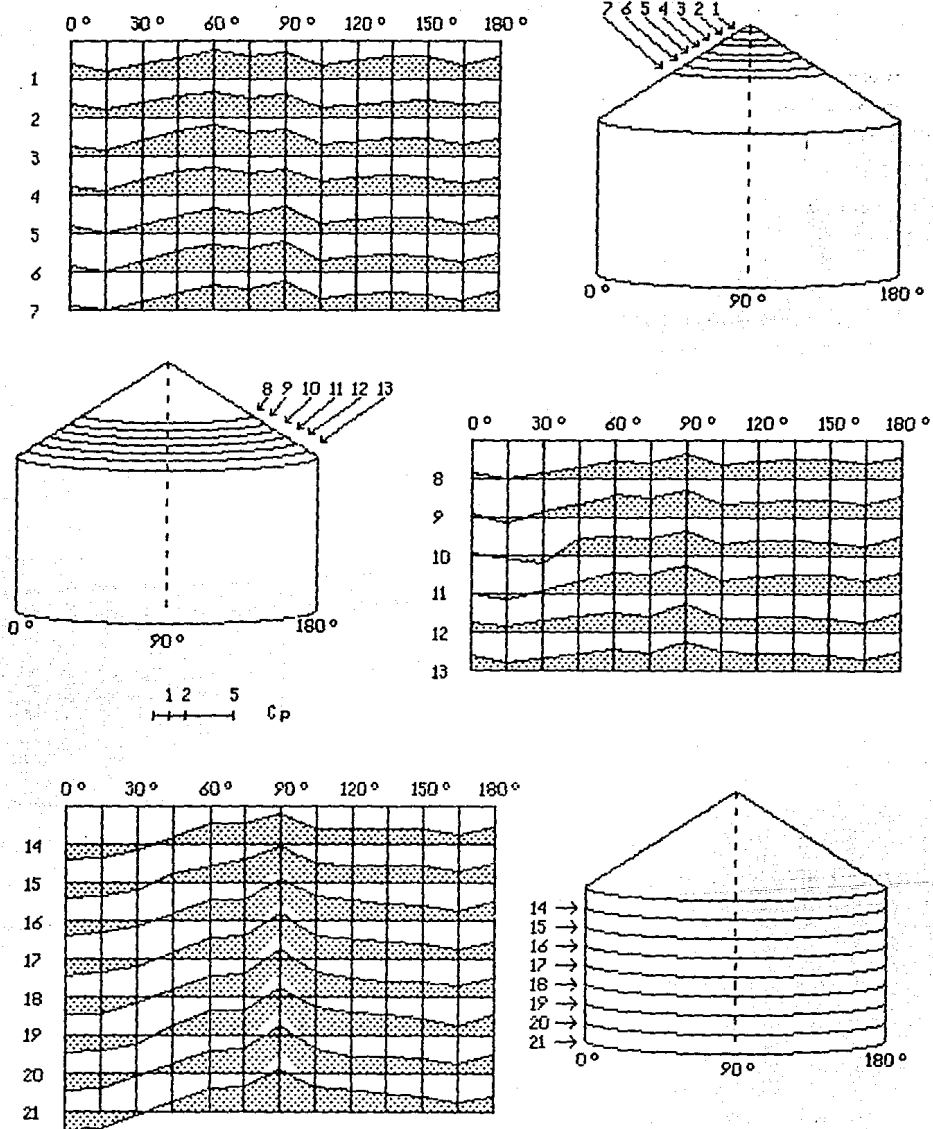


Fig 2.24



$$P = 1/2 \rho V_D^2 C_p$$

Ec 2.34

Con la misma nomenclatura usada anteriormente. En la misma referencia se definen las fuerzas:

$$F_L = 1/2 \rho V_D^2 C_{DL} A_L \quad \text{y} \quad F_t = 1/2 \rho V_D^2 C_{Dt} A_t \quad \text{Ecs 2.37}$$

$F_L$  y  $F_t$  son las fuerzas de arrastre en el sentido longitudinal y transversal a la acción del viento.  $C_{DL}$  y  $C_{Dt}$  son los coeficientes de arrastre medidos en pruebas de túnel de viento.  $A_L$  y  $A_t$  son las áreas expuestas longitudinal y transversal.

Además del estudio de silos como estructuras individuales, se ha investigado en el comportamiento de silos cercanos unos de otros. La influencia de esta cercanía se muestra en las figs 2.25, 2.26 y 2.27 para distintos ángulos  $\theta$  de incidencia del viento.

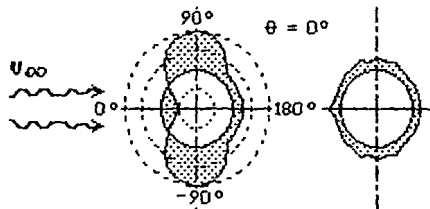


Fig 2.25

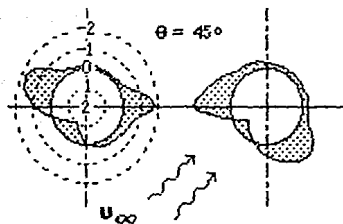


Fig 2.26

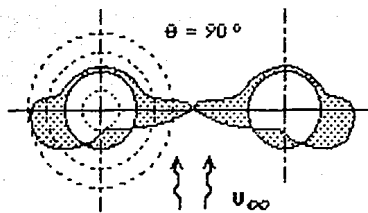


Fig 2.27

Gaylord y Gaylord ( ref 2 ) mantienen la ec 2.36 como base de su criterio para análisis edífico siguiendo la línea de Ravenet, en la que sólo se revisa la estabilidad general del silo. Estos autores dividen las presiones de diseño, atendiendo a la exposición de la estructura que se analice ( tabla 2.3 ). La exposición 1 quedan las estructuras ubicadas en áreas urbanas, suburbanas y arboladas. En la exposición 2 se incluyen las estructuras en campo abierto con pocas obstrucciones. La exposición 3 se refiere a las áreas costeras e islas desprotegidas.

Tabla 2.3  
Presiones para una velocidad de diseño de 100 millas/h.

Altura (pies) sobre el terreno	Exposición		
	1	2	3
0 a 15	14	27	35
20	17	29	37
40	21	33	41
60	24	37	44
100	29	41	48
140	32	44	50

Para otras velocidades, los valores de la tabla se multiplican por  $(V/100)^2$ .

Los coeficientes de presión, Gaylord y Gaylord ( ref 2 ) los tabulan dependiendo de la relación  $h/d$ , altura entre diámetro para diversas secciones transversales ( tabla 2.4 ), y

para miembros individuales como pueden ser columnas de soporte ( tabla 2.5 ).

Tabla 2.4  
Coeficientes de presión para silos

Forma	Textura de la superficie	h/d	
		1	7
Cuadrada (exposición frontal)	Todo tipo	1.3	1.4
Cuadrada (exposición lateral)	Todo tipo	1.0	1.1
Hexagonal, octagonal	Todo tipo	1.0	1.2
Redonda	Suave	0.5	0.6
	Rugosa	0.7	0.8

Tabla 2.5  
Coeficiente de presión para elementos individuales

Forma	C <sub>p</sub>
Lados planos	2.0
Cilíndrica, $dq^{1/2} < 2.5$	1.2
Cilíndrica, $dq^{1/2} > 2.5$	0.8

d = diámetro      q = presión por la velocidad de diseño.

El uso de las tablas anterior debe ser cuidadoso por tratarse de unidades inglesas, pies, libras por pie cuadrado, etc.

De los pocos trabajos que de una forma analítica intentan describir el comportamiento bajo la acción del viento se tienen las propuesta de Pflünger y Worch ( ref 1 ) donde se muestran las soluciones de cascarón cilíndrico y cónico. Las expresiones de los elementos mecánicos para el cascarón cilíndrico están en función de los coeficientes de la serie de Fourier, que representa la distribución de presiones como se mencionó con anterioridad, no así las expresiones para el

cascarón cónico. Al analizar estas últimas expresiones se reducen a funciones trigonométricas simples en un plano paralelo, lo que no va de acuerdo con la naturaleza irregular de la acción del viento. De contar con todos los elementos teóricos, como son las funciones de deformación de los distintos elementos que forman a un silo, bajo la acción del viento, el análisis se llevaría a cabo como un proceso más elaborado que el método de las fuerzas. Es necesario analizar el silo meridiano a meridiano. Sólo se incluyen las expresiones para cascarón cilíndrico ( fig 2.28 ), ya que no tiene caso mencionar las expresiones dudosas para conos.

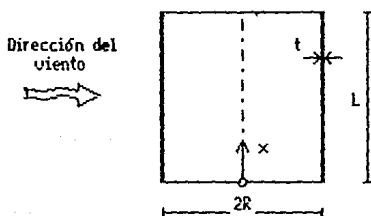


Fig 2.28

Carga de viento.

$$X = Y = 0; \quad Z = \sum p \cos n\theta, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$N_{\theta} = -pR \cos n\theta \quad N_x = \frac{pn^2}{2R} (L - X)^2 \cos n\theta$$

$$N_{x\theta} = N_{\theta x} = pn(L - x) \sin n\theta$$

$$E_{tu} = \frac{px}{6R} [ n^2( 3L^2 - 3Lx + x^2 ) + 6\mu R^2 ] \cos n\theta \quad \text{Ecs 2.38}$$

$$E_{tv} = \frac{pnx}{24R^2} [ 48( 1 + \mu )R^2L - 12( 2 + \mu )R^2x + n^2x( 6L^2 - 4Lx + x^2 ) ] \sin n\theta$$

$$E_{tw} = \frac{-p}{24R^2} \left\{ 24R^4 + 12R^2n^2 [ \mu L^2 + 2( 2 + \mu )Lx - 2x^2 ] + n^4x^2( 6L^2 - 4Lx + x^2 ) \right\} \cos n\theta$$

$$E_{tp} = \frac{pn}{24R^2} \left\{ -24R^4 + 48( 1 + \mu )R^2Lx - 12( 2 + \mu )R^2x^2 - 12R^2n^2 [ \mu L^2 + 2( 2 + \mu )Lx - 2x^2 ] + n^2( 1 - n^2 )x^2( 6L^2 - 4Lx + x^2 ) \right\} \sin n\theta$$

#### d) Acción sísmica

Al igual que en la acción del viento, poca es la información con que se cuenta para el análisis de silos de pared delgada bajo la acción sísmica.

La mayoría de los trabajos existentes tratan el problema sísmico del silo en su conjunto resolviendo problemas de inestabilidad general. Tal es el caso del reglamento ACI 313-77 ( ref 4 ), que propone una fuerza mínima en la base de silos, dada por :

$$H_c = ZC_p ( W_g + W_{eff} ) \quad \text{Ec 2.39}$$

donde:

$W_g$  es el peso del silo.

$W_{eff}$  es el peso del material depositado en el silo no menor del 80% del peso real.

$Z$  es el factor de zona sísmica, 1.0, 0.5 o 0.25 para las zonas 3, 2 y 1 según la regionalización para Estados Unidos de Uniform Building Code ( UBC ).

$C_p = 0.2$  para silos cuyo fondo esté por encima del nivel del terreno natural. Este valor se puede reducir hasta 0.1 por medio de un análisis dinámico.

$C_p = 0.10$  para silos desplantados al nivel del terreno natural.

Gaylord y Gaylord ( ref 2 ) hacen mención a las especificaciones UBC donde estipulan que los silos desplantados al nivel del terreno natural y silos elevados soportados por columnas o faldones deben ser diseñados para resistir una fuerza sísmica lateral no menor de:

$$V = ZIKCSW \quad \text{Ec 2.40}$$

donde:

$Z$  es el coeficiente sísmico dependiente de la zona donde se encuentre ubicada la estructura (en Estados Unidos). 0, 3/16, 3/8, 3/4 y 1 para las zonas 0, 1, 2, 3 y 4.

$I$  es el factor de importancia.  $I = 1.5$  para estructuras catalogadas como esenciales, aquellas que puedan ser usadas en casos de emergencia.  $I = 1$  para el resto de las estructuras.

$K = 2$  para silos desplantados al nivel del terreno natural.

$K = 2.5$  para silos soportados por columnas.

$C = 1/(15T^{1/2}) < 0.12$

$T$  es el periodo natural de vibración.

$S$  es el coeficiente de resonancia.  $S = 1.2$ , valor usual.

$W$  es el peso de la estructura incluyendo el contenido.

Además se debe cumplir que:

$$CS < 0.14$$

$$0.12 < KC < 0.25$$

La fuerza evaluada de esta forma debe ser distribuida en la misma proporción en que se encuentra distribuido  $W$ .

El estudio de la acción sísmica se ha enfocado a problemas particulares como lo describen Rotter y Hull ( ref 15 ) al estudiar las cargas sobre las paredes de silos desplantados al nivel del terreno ( fig 2.29 ).

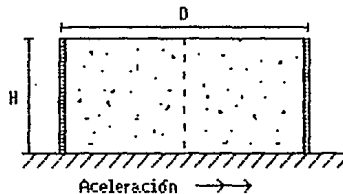


Fig 2.29

En esta clase de silos, las paredes son muy flexibles y una pequeña parte de la carga sísmica se les transmite durante un evento de importancia. El material y la pared lateral del silo se modelan como un cuerpo axisimétrico elástico con el método de elementos finitos. La fuerza sísmica produce en el material una aceleración  $\alpha g$ , en la que  $\alpha$  depende de la zona sísmica de que se trate. La representación de elementos finitos se hizo con ocho elementos isoparamétricos con el cuidado suficiente de apegarse a la realidad del fenómeno. En este trabajo, la cubierta del silo se ignoró por la razón de ofrecer nula restricción en cuanto a los desplazamientos. El material se consideró homogéneo e isotrópico. Para las cargas, esfuerzos y desplazamientos se

tomaron los primeros componentes armónicos no nulos de una serie de Fourier.

Para la mayor comprensión de los esfuerzos, Rotter y Hull ( ref 15 ) describieron los posibles modos de falla. El colapso plástico se manifiesta por esfuerzos circunferenciales de tensión muy altos y pequeños esfuerzos verticales en compresión que redundan en fallas explosivas. La falla por pandeo de compresión se presenta en la paredes por la fuerza de fricción entre la pared y el material contenido en el silo originándose la llamada "pata de elefante", que es importante en silos soportados por faldones sin atiesar. Por último, las fallas pueden existir por pandeo causado por cortante, principalmente en silos desplantados al nivel del terreno natural con llenado excéntrico.

La forma peculiar de deformación de un silo bajo se ilustra en la fig 2.30.

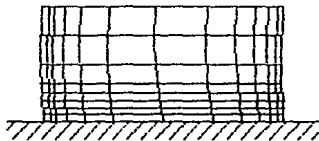


Fig 2.30

La teoría de membrana nos puede proporcionar una estimación razonable de los esfuerzos en la pared del silo si la distribución de cargas se determina con la mayor exactitud posible. Para esto, se supone que una franja de material depositado en el silo aplica una fuerza a la pared a su alrededor, ignorando fuerzas verticales de fricción.

Los silos soportados por faldones o columnas han sido usualmente tratados como tanques elevados.

En la referencia 16 se intenta el análisis de un silo mediante el método de elementos finitos. El procedimiento empleado es completamente obscuro, ya que de los resultados obtenidos no hay evidencia clara del proceso de solución.

Koichi Shibata ( ref 17 ) encabezó investigaciones sobre

las características de vibración de silos metálicos. Sus investigaciones se llevaron a cabo en modelos a escala reducida y natural con distintos tipos de granos y polvos. Para poner a vibrar los modelos se recurrió a tirantes los que se cortaron para simular la acción de una fuerza lateral. De los resultados más importantes tenemos que entre un 70 y 80% del material en el interior vibra al igual que el silo mismo, la presencia de uno u otro tipo de material no muestra indicios de incrementar el amortiguamiento de la estructura. Además, tenemos que las frecuencias de vibración se encuentran influenciadas por la presencia del material.

Por lo que podemos ver, no se cuenta en la actualidad con un método de uso práctico apegado a la realidad para el análisis del fenómeno sísmico en silos de pared delgada.



e) Efectos térmicos.

Los efectos de cambio de temperatura en silos han sido ignorados al comparárseles con los efectos del material en el interior y de fuerzas sísmicas y viento. El incremento de temperatura produce alargamiento en los elementos que forman a un silo, y específicamente en la pared lateral produce un aumento del área de la sección transversal y consecuentemente un incremento de volumen a lo largo de la altura del silo. Este volumen adicional es llenado por el material que contiene el silo al reacomodarse, figuras 2.31 y 2.32.

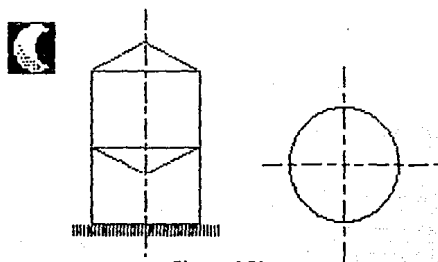


Figura 2.31

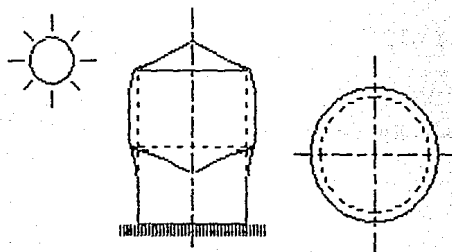


Figura 2.32

La variación de temperatura puede darse en el transcurso de un día, así, al llegar al punto en que baja la temperatura el material de que está hecho el silo tiende a contraerse a sus dimensiones originales. A esta contracción se opone el material que se reacomodó produciendo tensiones adicionales en la pared lateral del silo, figura 2.33.

El incremento de temperatura ( $\Delta t$ , °C) provoca la elongación en las dimensiones de la sección transversal, sea

polígono o circular.

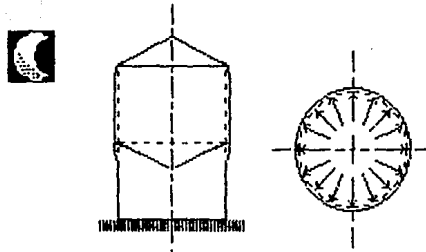


Fig 2.33

Sea entonces  $L$  el perímetro de la sección, el incremento será:

$$\Delta L = \alpha L \Delta t \quad \text{Ec 2.41}$$

donde  $\alpha$  es el coeficiente de expansión lineal del material que forma la pared del silo.

El material existente produce una fuerza de tensión cuando el silo trata de recuperar sus dimensiones originales ( ref 3 ). El esfuerzo ocasionado por esta fuerza es:

$$n = \frac{E \Delta L}{L} = \frac{E \alpha L \Delta t}{L} = E \alpha \Delta t \quad \text{Ec 2.42}$$

Donde  $E$  es el módulo de elasticidad del material que forma el silo ( $2.1 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$ ). La expresión del esfuerzo se desprende del hecho de que el material contenido en el silo es 100% incompresible. Como esto no es apegado a la realidad ( ref 3 ), de pruebas experimentales se obtiene que el esfuerzo aproximado ( $n'$ ) es de un tercio el esfuerzo teórico ( $n$ ):

$$n' = \frac{E \alpha \Delta t}{3} \quad \text{Ec 2.43}$$

Este esfuerzo es uniforme a lo largo de la pared del silo. Multiplicando este esfuerzo por el espesor  $t$  de la pared lateral se obtiene la fuerza de membrana  $N_0$ , con la que se puede identificar un equivalente de la presión en el interior del silo ( fig 2.34 ), mediante las expresiones de régimen de membrana

y desplazamientos de la ref 1, mostradas a continuación.

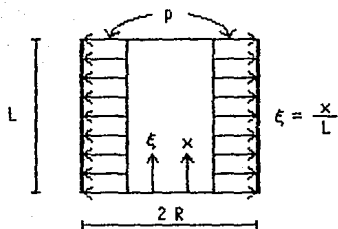


Fig 2.34

$$\begin{aligned}
 N_{\theta} &= R p & N_x &= 0 & N_{x\theta} &= 0 \\
 u &= -\frac{\mu R L}{E t} p & v &= 0 & w &= \frac{R^2 p}{E t} & \text{Ecs 2.44} \\
 \beta &= 0
 \end{aligned}$$

Este es el caso particular de presión uniforme a que se hizo referencia en el estudio de los materiales en el interior. Con el método de las fuerzas se hacen las correcciones necesarias a los elementos mecánicos por las uniones que pueda tener la pared cilíndrica con algún otro tipo de elemento en el silo, ya sea tapa cónica, tolva, placa, etc. El análisis que se lleve a cabo únicamente por efectos térmicos es adicional al estado de carga del silo lleno. Este análisis se puede ignorar si resulta insignificante en comparación con las presiones causadas por el flujo del material en el interior.

### 3. Método de las fuerzas para su análisis estructural

El método de las fuerzas es un procedimiento alternativo al método general de flexión de sistemas de cascarones de revolución ( fig 3.1 ), que se basa en la corrección de los elementos mecánicos por perturbación de borde de cada uno de los cascarones que forman el sistema estructural de manera que se cumpla la compatibilidad de desplazamientos y el equilibrio de la unión ( ref 1 ).

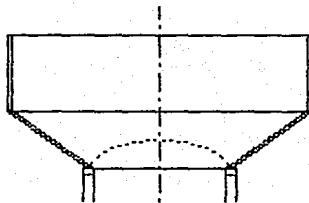


Fig 3.1 Depósito Intze

Este método es una combinación de la teoría de membrana y de casos particulares de la teoría de flexión. En el mismo se establecen conceptos básicos que rigen su aplicación.

En primer lugar, el método de las fuerzas es un procedimiento analítico donde los desplazamientos están en función de las fuerzas de borde desconocidas, cortantes y/o momentos. La solución para encontrar los valores de estas incógnitas proporciona la solución del cascarón estáticamente determinado. La solución final es la superposición de la solución de membrana ( o solución primaria ) y la solución de flexión por perturbación de borde ( o secundaria ).

En la solución primaria, ó de membrana, las condiciones de borde y de acciones sobre su superficie se rigen de acuerdo con esta teoría. La solución secundaria, proveniente de la teoría de flexión, es la que nos presenta el comportamiento de carga uniforme en los bordes de un cascarón, ya sean momentos o cortantes bajo las condiciones de frontera de la teoría de membrana. De la solución secundaria, se aplican cargas unitarias en los bordes que pueden ser momentos, cortantes

horizontales y verticales.

La corrección necesaria para asegurar la compatibilidad de desplazamientos recurre a cargas unitarias multiplicadas por factores, de manera que las acciones resultantes cumplan también con el equilibrio de las uniones de los diversos elementos que concurren a tal punto.

La aplicación de este método está limitada a cascarones de revolución, cargados de forma axisimétrica y con distribución axisimétrica de materiales estructurales. De la misma manera, se tratarán sólo los cascarones delgados, a los que se les considera así cuando cumplen con las hipótesis de Navier y la teoría de flexión de Bernoulli-Euler. Es de esperarse que bajo estas hipótesis, las secciones planas permanecen planas después de presentarse la flexión.

En un cascarón de este tipo, los efectos de flexión se presentan en las cercanías de los bordes del cascarón o en la cercanía de una carga concentrada.

En la teoría de membrana se llega a la solución de cascarones mediante fuerzas que actúan en dirección del plano medio, como son tensiones, compresiones y cortantes. Para que únicamente existan estas acciones en un cascarón, es indispensable que las condiciones de borde sean tales que las reacciones en los bordes del cascarón estén dirigidas en el mismo sentido que el plano medio; esto es, que se comporte como una extensión del cascarón permitiendo el desplazamiento normal a la superficie y el libre giro del borde ( fig 3.2 ).

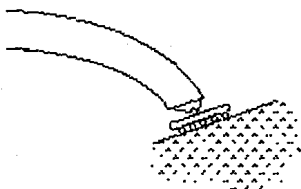


Fig 3.2

A pesar de que la teoría de flexión para cascarones de revolución es exacta, su complejidad ha hecho necesaria la búsqueda de un procedimiento de uso práctico por medio del

cual se puedan obtener los elementos mecánicos para el diseño estructural de los mismos.

Es aquí donde el método de las fuerzas utiliza las soluciones conocidas, provenientes de las teorías de membrana y de flexión.

La teoría de membrana nos proporciona la solución al problema de un cascarón cargado de manera axisimétrica y estáticamente determinado ( fig 3.3 ), mientras que con la teoría de flexión obtenemos la solución para el mismo cascarón con perturbaciones en los bordes ( fig 3.4 ). Superponiendo los dos resultados obtenemos la solución del cascarón bajo ciertas condiciones de sujeción en sus bordes ( fig 3.5 ). El hecho de usar las expresiones conocidas para la solución primaria ( de membrana ) y la secundaria ( de flexión ) evita la dificultad de resolver ecuaciones diferenciales.



Fig 3.3

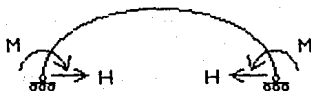


Fig 3.4



Fig 3.5

El planteamiento general del método para la solución de cascarones de revolución bajo carga axisimétrica se describe a continuación.

En primer lugar, se obtienen las soluciones primarias bajo carga axisimétrica del o de los cascarones; estas

soluciones ya tabuladas para diferentes tipos de carga ( ref 1 ), que han sido obtenidos de la teoría de membrana, aunque pueden existir soluciones en las que la teoría de membrana no provee un resultado satisfactorio.

Después, se cargan los bordes del o los cascarones con perturbaciones de magnitud unitaria, que pueden ser momentos y cortantes, horizontal y/o vertical. En este paso y a estas alturas, sólo es necesario calcular los valores de los desplazamientos. Al conjunto de elementos mecánicos y desplazamientos calculados por las perturbaciones de borde se denomina solución secundaria.

Las correcciones por perturbación de borde se obtienen a través de la interacción del o de los elementos, ya sea unos con otros o con el apoyo base de la estructura. Esta interacción involucra la compatibilidad de desplazamientos y equilibrio de fuerzas internas. El análisis por cortante vertical frecuentemente es ignorado.

Los elementos mecánicos y desplazamientos finales se obtienen por superposición de las soluciones primaria y secundaria.

La base del método es la interacción de los elementos que forman el sistema estructural.

En los bordes de un cascarón, el apoyo puede estar restringido elásticamente. Es obligado establecer el tipo de restricciones porque pueden repercutir en los cálculos de todo el cascarón. Así, tenemos que para un apoyo empotrado el giro en el borde (  $\beta$  ) es nulo, tanto como el desplazamiento en cualquier dirección (  $\delta_h$ , desplazamiento horizontal y  $\delta_v$ , desplazamiento vertical ). Con esto en mente, se puede resolver un cascarón como el mostrado en la fig 3.5. Por el contrario, un apoyo libre, o sea sin ninguna restricción, tendría momentos y cortantes nulos.

### 3.1 Proceso de interacción de un sistema de cascarones

Al tener una estructura espacial, en este caso un cascarón de revolución, se deben definir los miembros estructurales que lo conforman. Es decir, tratar de identificar cascarones de geometría simple por analizar. Se tiene el caso de la parte superior de un silo ( fig 3.6 ), que se puede considerar como un sistema estructural continuo. Sin embargo, por facilidad de análisis, se separa en dos miembros de geometría independiente, cono y cilindro.

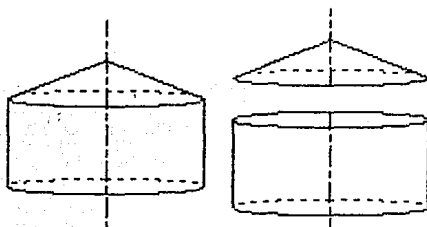


Fig 3.6

Considerese ahora una carga axisimétrica cualquiera como pueden ser peso propio, presión interna, presión hidrostática, etc. Indistintamente de la carga que se seleccione, en cada miembro existirán desplazamientos en sus bordes de acuerdo con la solución que propone la teoría de membrana ( solución primaria ), denominando  $\delta$  al incremento en el radio,  $\Delta r$ , y  $\beta$  al giro. Como miembros estructurales diferentes es de esperarse que los desplazamientos no sean iguales ( fig 3.7 ), así:

$\beta_{Ci} \neq \beta_{Co}$  el giro en el borde del cilindro es diferente al giro en el borde del cono.

$\delta_{Ci} \neq \delta_{Co}$  el desplazamiento en el borde del cilindro es diferente al desplazamiento en el borde del cono.



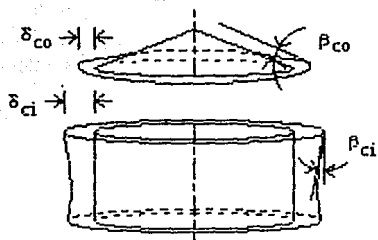


Fig 3.7

Estas diferencias evidencian la incompatibilidad de desplazamientos lineales y angulares de que tanto se había hecho referencia. Se aplicarán momentos  $M$  y cortantes  $H$  alrededor de los bordes para cerrar la discontinuidad definida por:

$\delta_{ci} - \delta_{co}$  en desplazamiento lineal.  
 $\beta_{ci} - \beta_{co}$  en desplazamiento angular.

Estas acciones provocan en el cilindro:

$\delta_{Mci}$ ,  $\beta_{Mci}$  y  $\delta_{Hci}$ ,  $\beta_{Hci}$

y en el cono:

$\delta_{Mco}$ ,  $\beta_{Mco}$  y  $\delta_{Hco}$ ,  $\beta_{Hco}$

Las deformaciones y cargas en los bordes se muestran en la figs 3.8 y 3.9.

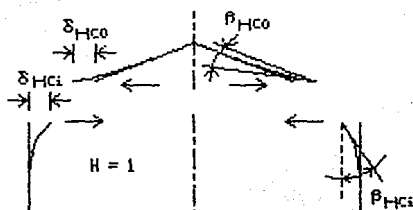


Fig 3.8

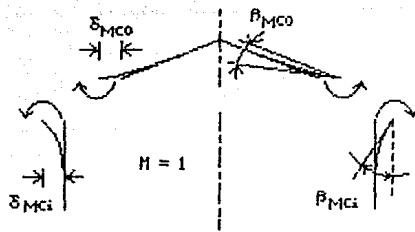


Fig 3.9

Se define a continuación una convención de signos que permita proseguir con la explicación del procedimiento, de manera que no haya confusión respecto a la integración de las ecuaciones de las que se despejarán los valores de M y H.

Serán positivos los cortantes que provoquen incremento en el radio del cascarón; de igual forma serán positivas las deformaciones lineales. Los momentos serán positivos cuando provoquen tensión en las fibras internas del cascarón. Las rotaciones serán positivas cuando sean en sentido de las manecillas del reloj, vistas desde un ángulo  $\theta$  creciente, esto significa observar el lado derecho de un corte longitudinal, ( fig 3.10 ).

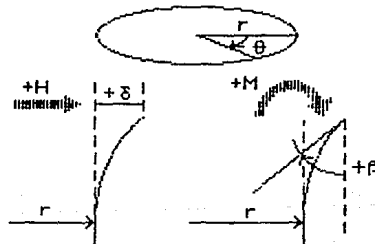


Fig 3.10

Igualando deformaciones por solución primaria y secundaria de cada uno de los elementos, se tiene:

$$\begin{aligned} \delta_{CO} + \delta_{HCO}H + \delta_{MCO}M &= \delta_{Ci} - \delta_{HCi}H + \delta_{MCi}M & \text{Ecs 3.1} \\ \beta_{CO} - \beta_{HCO}H - \beta_{MCO}M &= \beta_{Ci} - \beta_{HCi}H + \beta_{MCi}M \end{aligned}$$

Acomodando términos:

$$\begin{aligned} (\delta_{HCO} + \delta_{HCi})H + (\delta_{MCO} - \delta_{MCi})M &= \delta_{Ci} - \delta_{CO} & \text{Ecs 3.2} \\ (\beta_{HCi} - \beta_{HCO})H + (-\beta_{MCO} - \beta_{MCi})M &= \beta_{Ci} - \beta_{CO} \end{aligned}$$

Como se observa, se trata de un sistema de ecuaciones simultáneas. Todos los coeficientes que se encuentran entre paréntesis provienen de la solución secundaria, mientras que los términos independientes provienen de la solución primaria. Resolviendo el sistema de ecuaciones por el método que se desee, se conocerán las fuerzas que mantienen el equilibrio y compatibilidad de desplazamientos en la unión.

Con los valores de M y H en los bordes del cascarón, se estará en condiciones de conocer los desplazamientos y elementos mecánicos en cualquier punto. Para esto, se conoce el comportamiento del cascarón bajo régimen de membrana y bajo la acción de fuerzas en el borde M y H.

Cuando calculamos  $\delta$  y  $\beta$  con  $H = M = 1$ , en cualquier punto del cascarón, obtenemos los coeficientes de influencia de la perturbación en el borde sobre el punto en que se calcula. Estos coeficientes se calculan con las expresiones del apéndice A ( ref 1 ). La magnitud de estos coeficientes no es dependiente del valor de M y H, sino de las características elásticas y geometría del cascarón.

Por el principio de superposición, se establece que en cada punto i del cascarón, la deformación está dada por la suma de deformaciones de la solución primaria y de las que se deriven de solución secundaria por perturbación en el borde (fuerzas H y/o M correctivas):

$$\alpha_i = \alpha_{i0} + \alpha_{i1}P_1 + \alpha_{i2}P_2 + \dots \alpha_{ij}P_j + \dots \quad \text{Ec 3.3}$$

En el caso de estudio, en la ec 3.3 las fuerzas  $P_j$  son las fuerzas correctivas en el borde,  $\alpha_i$  es la deformación final,  $\alpha_{i0}$  es la deformación por solución primaria y  $\alpha_{ij}$  son los coeficiente de de influencia en el punto i debido a la carga j. En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{10} \\ \alpha_{20} \\ \alpha_{30} \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \quad \text{Ecs 3.4}$$

$$\{ \alpha_{ij} \} = [ \alpha_{ij} ] \{ P_j \} + \{ \alpha_{i0} \} \quad \text{Ec 3.5}$$

La matriz  $[ \alpha_{ij} ]$  se denomina matriz de flexibilidades. De la misma forma se pueden calcular los elementos mecánicos expresado en la forma matricial compacta:

$$\{ N_{ij} \} = [ b_{ij} ] \{ P_j \} + \{ N_{i0} \}$$

En donde N representa los elementos mecánicos  $N_0$ ,  $N_\phi$ ,  $M_0$  y  $M_\phi$ .

El caso que se estudia es solamente una situación particular de los cascarones de revolución. Un sistema de cascarones o estructura multicascarón puede tener sus elementos conectados en paralelo o en serie. Esta última forma es como la unión superior del silo que se ha visto.

Las estructuras multicascarones pueden ser tales, que sus elementos tengan una geometría en la que perturbaciones de borde no transmiten influencia hacia el otro extremo de cada cascarón. Estas estructuras se pueden analizar en sus uniones por separado, como se vio en el cono y el cilindro del ejemplo anterior. Por cada unión son necesarias dos ecuaciones que resuelven el problema de las fuerzas correctivas. Serían así tres ecuaciones si se considera el cortante vertical.

Cuando las propiedades de los elementos de la estructura permiten que la acción sobre un borde tenga influencia sobre el otro, nos vemos obligados al análisis de la estructura en su totalidad. Esto quiere decir que la discontinuidad en una unión de elementos se ve afectada por la discontinuidad de las uniones adyacentes.

Las funciones que representan los elementos mecánicos de las perturbaciones de borde son trigonométricas e hiperbólicas que son función de:

$$e^{-k\lambda} = 0.00186744, \text{ cuando } k\lambda = 2\pi$$

Donde  $\lambda$  es la longitud de onda. Cuando  $\lambda = 2\pi/k$  sea mayor que la distancia entre los bordes, existe influencia de la perturbación de un borde sobre el otro. En caso contrario, cuando  $\lambda$  es menor, la influencia a una distancia  $\lambda$  se reduce a 0.19% del valor en el borde y por tanto puede ignorarse en el borde opuesto.

Es importante el hecho de que las acciones sobre un borde repercutan sobre el otro. De aquí, la importancia de establecer que acciones existen sobre cada miembro de la estructura ( fig 3.11 ). Esto da la pauta para expresar apropiadamente los desplazamientos en función de estas cargas:

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \delta_1 \\ \beta_2 \\ \delta_2 \end{bmatrix} = [\alpha_{ik}] \begin{bmatrix} M_1 \\ H_1 \\ M_2 \\ H_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1^0 \\ \delta_1^0 \\ \beta_2^0 \\ \delta_2^0 \end{bmatrix} \quad \text{Ecs 3.7}$$

En donde

$$[\alpha_{ik}] = \begin{bmatrix} \beta_1^{M1} & \beta_1^{H1} & \beta_1^{M2} & \beta_1^{H2} \\ \delta_1^{M1} & \delta_1^{H1} & \delta_1^{M2} & \delta_1^{H2} \\ \beta_2^{M1} & \beta_2^{H1} & \beta_2^{M2} & \beta_2^{H2} \\ \delta_2^{M1} & \delta_2^{H1} & \delta_2^{M2} & \delta_2^{H2} \end{bmatrix} = \text{Matriz de flexibilidades}$$

$M_1$  y  $H_1$  son el momento y el cortante horizontal en el borde 1.

$M_2$  y  $H_2$  son el momento y el cortante horizontal en el borde 2.

$\delta_1^0$  y  $\beta_1^0$  son el desplazamiento y rotación en el extremo 1, por solución primaria.

$\delta_2^0$  y  $\beta_2^0$  son el desplazamiento y rotación en el extremo 2, por solución primaria.

$\delta_1$  y  $\beta_1$  son el desplazamiento y rotación finales en el extremo 1.

$\delta_2$  y  $\beta_2$  son el desplazamiento y rotación finales en el extremo 2.

Los coeficientes de la matriz de flexibilidades son debidos a la acción de fuerzas unitarias en los bordes,  $M = H = 1$ , en el borde indicado por el subíndice y por la fuerza indicada por el sobreíndice. A estos coeficientes se les denomina coeficientes elásticos ( apéndice A ).

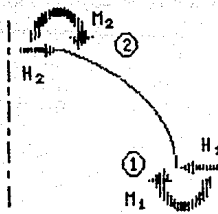


Fig 3.11

En la tabla 3.1 ( ref 1 ), se tienen las ecuaciones de los diferentes tipos de elementos con fuerzas que actúan en sus bordes. En el caso 1, se trata de elementos que transmiten influencia hacia el otro borde. En el caso 2, no existe transmisión de influencia.

Previamente se hizo notar que en una unión de dos elementos se debe conservar el equilibrio de fuerzas, al tener que las fuerzas que actúan en un borde de uno de los elementos deben ser iguales y de sentido contrario. Es aquí donde incluimos una ecuación por cada unión de elementos que tenga la estructura. Esta ecuación mantiene la continuidad de transmisión de influencias, y, para la unión de dos elementos se escribe de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} M_2 \\ H_2 \\ \beta_2 \\ \delta_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M_2' \\ H_2' \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta_2' \\ \delta_2' \end{bmatrix} \quad \text{Ecs 3.8}$$

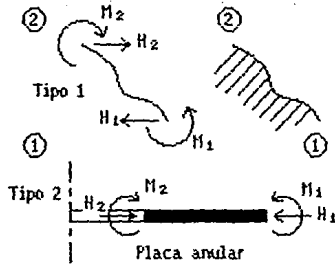
En la tabla 3.2 se tienen las ecuaciones de equilibrio para uniones de dos y tres elementos, y las condiciones de frontera para apoyos.

Aquí es necesario un acuerdo en cuanto al sentido positivo de las fuerzas en los bordes para el análisis de la estructura multicascarón, al utilizar como referencia el lado derecho de un corte longitudinal del sistema.

En el borde superior serán positivos los momentos en sentido de las manecillas del reloj, los cortantes horizontales que se alejen del eje de revolución y los cortantes dirigidos

Tabla 3.1. Ecuaciones de cascarones

Geometría y ecuaciones de miembros de estructura multicascaron.



Caso 1

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \delta_1 \\ \beta_2 \\ \delta_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \beta_1^{M1} & \beta_1^{H1} & \beta_1^{M2} & \beta_1^{H2} \\ \delta_1^{M1} & \delta_1^{H1} & \delta_1^{M2} & \delta_1^{H2} \\ \beta_2^{M1} & \beta_2^{H1} & \beta_2^{M2} & \beta_2^{H2} \\ \delta_2^{M1} & \delta_2^{H1} & \delta_2^{M2} & \delta_2^{H2} \end{bmatrix}}_{\alpha} \begin{bmatrix} M_1 \\ H_1 \\ M_2 \\ H_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1^0 \\ \delta_1^0 \\ \beta_2^0 \\ \delta_2^0 \end{bmatrix}$$

Caso 2

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \delta_1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \beta_1^M & \beta_1^H \\ \delta_1^M & \delta_1^H \end{bmatrix}}_{\alpha} \begin{bmatrix} M_1 \\ H_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1^0 \\ \delta_1^0 \end{bmatrix}$$

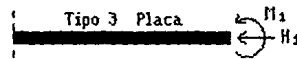
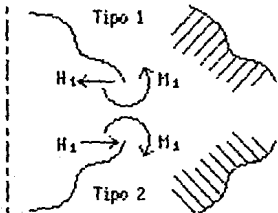
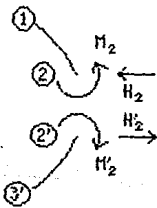


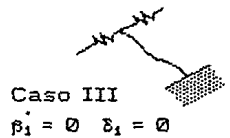
Tabla 3.2 Ecuaciones de unión

Geometría y ecuaciones de los diferentes tipos de uniones.

Caso I

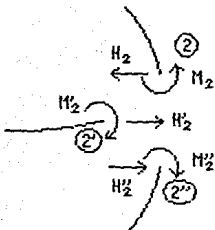


$$\begin{bmatrix} M_2 \\ H_2 \\ \beta_2 \\ \delta_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M_2' \\ H_2' \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta_2' \\ \delta_2' \end{bmatrix}$$



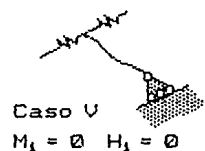
Caso III  
 $\beta_1' = 0 \quad \delta_1' = 0$

Caso II



$$\begin{bmatrix} M_2 \\ H_2 \\ \beta_2 \\ \delta_2 \\ \beta_2 \\ \delta_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M_2' \\ H_2' \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M_2'' \\ H_2'' \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta_2' \\ \delta_2' \\ \beta_2'' \\ \delta_2'' \end{bmatrix}$$

Caso IV  
 $M_1 = 0 \quad \delta_1 = 0$



Caso V  
 $M_1 = 0 \quad H_1 = 0$

hacia arriba. En el borde inferior, los momentos en sentido contrario a las manecillas del reloj, los cortantes horizontales hacia el eje de revolución y los cortantes verticales hacia abajo.



### 3.2 Descripción del procedimiento de interacción

Para llevar un seguimiento adecuado del procedimiento, se selecciona como ejemplo el silo de la fig 3.12.

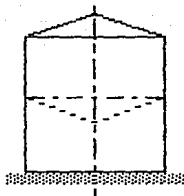


Fig 3.12

Para empezar, hay que separar los elementos que forman al sistema multicascarón ( fig 3.13 ).

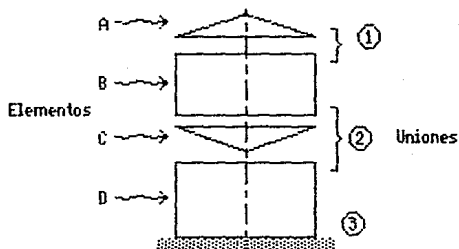


Fig 3.13

Así hecho, se pueden considerar elementos estáticamente determinados.

En cada uno de los elementos, se colocan las fuerzas correctivas, todas positivas según la convención de signos propuesta. Una vez resuelto el problema se sabría el sentido real de las fuerzas en los bordes. La colocación se hará en el lado derecho de un corte longitudinal hecho al multicascarón ( fig 3.14 ).

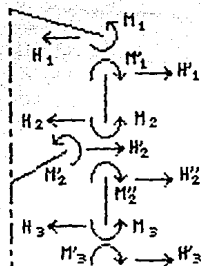


Fig 3.14

Según la configuración de cada elemento, a estos les corresponde un sistema de ecuaciones de equilibrio ( tabla 3.1 ). Al identificar a los elementos con letras de arriba hacia abajo, se establecen a continuación las ecuaciones mencionadas:

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \delta_1 \end{bmatrix} = [ \alpha_A ] \begin{bmatrix} M_1 \\ H_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_{10} \\ \delta_{10} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \delta_1 \\ \beta_2 \\ \delta_2 \end{bmatrix} = [ \alpha_B ] \begin{bmatrix} M_1' \\ H_1' \\ M_2 \\ H_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta'_{10} \\ \delta'_{10} \\ \beta_{20} \\ \delta_{20} \end{bmatrix}$$

Ecs 3.9

$$\begin{bmatrix} \beta'_2 \\ \delta'_2 \end{bmatrix} = [ \alpha_C ] \begin{bmatrix} M_2' \\ H_2' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta'_{20} \\ \delta'_{20} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \beta''_2 \\ \delta''_2 \\ \beta_3 \\ \delta_3 \end{bmatrix} = [ \alpha_D ] \begin{bmatrix} M_2'' \\ H_2'' \\ M_3 \\ H_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta''_{20} \\ \delta''_{20} \\ \beta_{30} \\ \delta_{30} \end{bmatrix}$$

Según la configuración de la unión, se tienen sistemas de ecuaciones que representan el equilibrio de las uniones ( tabla 3.2 ), como las ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ H_1 \\ \beta_1 \\ \delta_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M_1' \\ H_1' \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta_1' \\ \delta_1' \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} M_2 \\ H_2 \\ \beta_2 \\ \delta_2 \\ \beta_2 \\ \delta_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M_2' \\ H_2' \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M_2'' \\ H_2'' \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta_2' \\ \delta_2' \\ \beta_2'' \\ \delta_2'' \end{bmatrix}$$

Ecs 3.10

$$\begin{bmatrix} M_3 \\ H_3 \\ \beta_3 \\ \delta_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M_3' \\ H_3' \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta_3' \\ \delta_3' \end{bmatrix}$$

Cuando la unión sea con la base de la estructura se deben tomar las condiciones de frontera apropiadas, como se muestra en la tabla 3.2, y para el ejemplo, son:

$$\beta_3 = \beta_3' = 0 \quad \text{y} \quad \delta_3 = \delta_3' = 0$$

Con todas las ecuaciones que se han formado a partir de los elementos de la estructura y de sus uniones, se llega a un sólo sistema de **ocho** ecuaciones con **ocho** incógnitas, tal como se muestra:

	$M_1$	$H_1$	$M_2$	$H_2$	$M_2'$	$H_2'$	$M_3$	$H_3$	
1	++	--	--	--					$\begin{bmatrix} C_{10} \\ C_{10} \\ C_{20} \\ C_{30} \\ C_{40} \\ C_{50} \\ C_{60} \\ C_{70} \\ C_{80} \end{bmatrix}$
2	--	++	--	--					
3			++	--	--	--	--	--	
4	--	--	--	++	--	--	--	--	
5			--	--	++	--	--	--	
6			--	--	--	++	--	--	
7			--	--	--	--	++	--	
8			--	--	--	--	--	++	

Ecs 3.11

Los coeficientes de la matriz son combinaciones de las matrices de flexibilidades, mientras los términos independientes son de los desplazamientos por solución primaria de los miembros estructurales o cascarones que componen la estructura. En estas ecuaciones se suprimieron seis variables, por estar en función del resto de las variables, por existir las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} M_1' &= M_1 & M_2'' &= M_2 - M_2' & M_3' &= M_3 \\ H_1' &= H_1 & H_2'' &= H_2 - H_2' & H_3' &= H_3 \end{aligned}$$

Al resolver el sistema de ecuaciones, se conocen las cargas correctivas de los bordes.

En la siguiente configuración del sistema de ecuaciones, resultan tres sistemas de ecuaciones simultáneas. Estos se pueden resolver de manera independiente. Este es el resultado de tener miembros cuya geometría permite que la influencia sobre un borde de un cascarón cualquiera no se transmita hacia el otro borde. Aquí las tres uniones se resuelven por separado.

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array} \left[ \begin{array}{cccccccc} M_1 & H_1 & M_2 & H_2 & M_2' & H_2' & M_3 & H_3 \\ ++ & -- & & & & & & \\ -- & ++ & & & & & & \\ & & ++ & -- & -- & -- & & \\ & & -- & ++ & -- & -- & & \\ & & -- & -- & ++ & -- & & \\ & & -- & -- & -- & ++ & & \\ & & & & & & ++ & -- \\ & & & & & & -- & ++ \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} C_{i0} \\ C_{10} \\ C_{20} \\ C_{30} \\ C_{40} \\ C_{50} \\ C_{60} \\ C_{70} \\ C_{80} \end{array} \right]$$

Ecs 3.12

De acuerdo con el tipo de carga que se tiene en la estructura y las cargas en los bordes, se tienen las condiciones para calcular los elementos mecánicos en cualquier punto de la estructura. Las expresiones necesarias son dependientes del tipo de carga, como se mencionó en la sección 2.

#### 4. Método de elementos banda para análisis estructural

La literatura existente respecto a elementos banda hacen referencia a problemas específicos en el análisis de silos.

De los trabajos que plantean este tipo de solución está el de Sukhvarsh y Boresi ( ref 11 ) para silos cilíndricos de fondo plano y cubierta cónica ( fig 4.1 ), tratado también en su tesis de maestría por Rafael Cedeño ( ref 6 ).

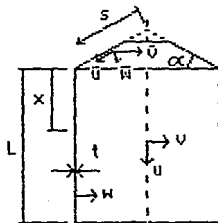


Fig 4.1

El planteamiento general consiste en establecer las ecuaciones que rigen el comportamiento de cada sección definida geoméricamente como un elemento independiente y enlazar todos estos elementos mediante las condiciones de frontera que prevalezcan para cada unión.

A diferencia del método de las fuerzas, en el de elementos banda intervienen todo tipo de acciones posibles en un elemento diferencial; esto es, que se incluyen las fuerzas de membrana, así como las acciones de flexión ( flexión y torsión ) desde un principio en el planteamiento de la solución. Todo esto hace del método de elementos banda ideal para conocer los efectos de cargas asimétricas sobre silo, ya que son este tipo de cargas la que producen flexión.

En el trabajo realizado por Sukhvarsh y Boresi, el procedimiento implica la obtención de las ecuaciones básicas de la pared cilíndrica ortotrópica así como las condiciones de frontera para la unión de la pared cilíndrica con la cubierta cónica mediante el principio de energía potencial estacionaria. Todas las ecuaciones planteadas se resuelven por aproximación de polinomios y el método de partición.

La pared cilíndrica es de un material isotrópico que

adquiere características ortotrópicas por su configuración corrugada ( fig 4.2 ).

El manejo de cargas y desplazamientos se lleva a cabo mediante series de Fourier, especialmente para cargas asimétricas como son las de viento, que es extremadamente irregular. El uso de series de Fourier transforma las ecuaciones diferenciales de equilibrio y frontera en ecuaciones algebraicas como se mencionó al tratar la acción del viento sobre silos.



Fig 4.2

Las condiciones de frontera, en lo referente a la unión de elementos, deben establecer la compatibilidad de desplazamientos de los elementos que concurren a la unión, secciones cilíndricas, conos, anillos, etc. Para el apoyo de la base de silos, las condiciones de frontera generalmente se consideran momentos nulos y fuerzas horizontales cuando se trata de apoyos simples, y desplazamientos nulos cuando el apoyo es empotrado.

El desarrollo del método de elementos banda para un problema simple de un silo de pared cilíndrica con cubierta cónica y fondo plano es un despliegue impresionante de ecuaciones. Como no todos los silos tienen estas mismas características, la solución a un silo que además tenga cambios de espesor en la pared lateral, tolva de descarga, o faldón de soporte atiesado, significa una alteración y aumento en el número de ecuaciones a utilizar como en los trabajos ya publicados.

## 5. Aplicación a un ejemplo de estructura industrial

El ejemplo que se trata es un silo utilizado en una empresa de pegamentos. En las figs 5.1 y 5.2 se muestra el silo con sus dimensiones con los detalles de las secciones cónicas y anillos en tres uniones. En la fig 5.3 se tiene la identificación de los elementos por letras y las uniones por números encerrados en círculos. En las características geométricas del anillo en la unión 2, la inercia combinada es la suma de inercias de cada franja, no es la inercia de la sección total ya que las franjas sólo están remachadas, la unión no es de todo firme.

El silo está construido con placas de acero A36 ( $f_y = 2530 \text{ kg/cm}^2$ ), peso volumétrico  $w_a = 7900 \text{ kg/m}^3$ , módulo de elasticidad  $E = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2 = 2.1 \times 10^{10} \text{ kg/m}^2$ , módulo de Poisson  $\mu = 0.3$ , coeficiente de dilatación por temperatura  $\alpha = 1.2 \times 10^{-5}$ . Las condiciones de apoyo en la base permiten el giro libre, pero restringen el desplazamiento horizontal.

El material para almacenar en el silo tiene como características: peso volumétrico de 38 libras/pie<sup>3</sup>,  $w_m = 608 \text{ kg/m}^3$ ; ángulo de fricción interna efectivo  $\delta = 43^\circ$ ; el ángulo de fricción con la pared varía de  $22^\circ$  a  $28^\circ$ , referencia 11.

Para iniciar al análisis, se identificará el comportamiento de los elementos del silo, calculando la longitud de onda de cada uno. En caso de que algunas longitudes de onda no lleguen al extremo opuesto de sus respectivos elementos, será posible aislar en secciones el silo para un análisis reducido.

Longitudes de onda.

Secciones cilíndricas.

$$k = \frac{[3(1 - \mu^2)]^{1/4}}{(Rt)^{1/2}} \quad \lambda = \frac{2\pi}{k} \quad R = 3.99 \text{ m}$$

Elemento D,  $t = 12 \text{ ga} = 0.266 \text{ cm}$ .

$$k = \frac{[3(1 - 0.3^2)]^{1/4}}{[3.99(0.00266)]^{1/2}} = 12.477 \quad \lambda = \frac{2\pi}{12.477} = 0.504 \text{ m}$$

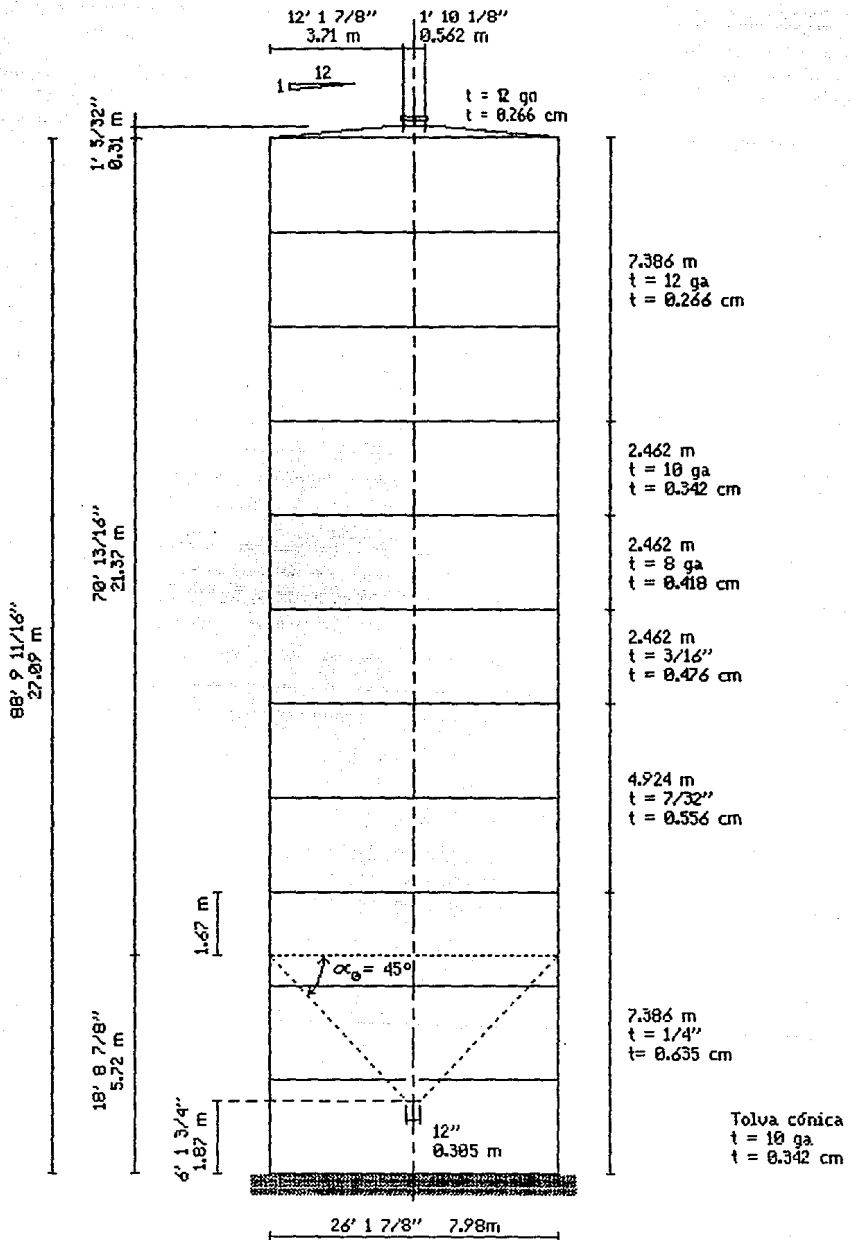
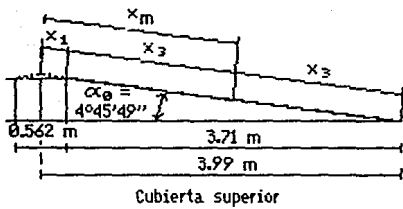


Fig 5.1 Dimensiones del silo.





$$x_m = x_1 + x_3$$

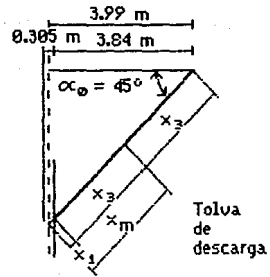
$$x_m = 2.143 \text{ m}$$

$$x_1 = \frac{0.562}{2 \cos \alpha_0} = 0.282 \text{ m}$$

$$x_2 = x_3 + x_m$$

$$x_2 = 4.004 \text{ m}$$

$$x_3 = \frac{3.71}{2 \cos \alpha_0} = 1.861 \text{ m}$$



$$x_1 = \frac{0.305}{2 \cos \alpha_0} = 0.216 \text{ m}$$

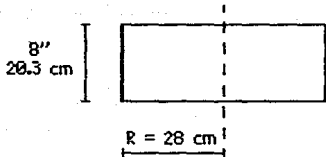
$$x_2 = x_3 + x_m$$

$$x_2 = 5.646 \text{ m}$$

$$x_3 = \frac{3.84}{2 \cos \alpha_0} = 2.715 \text{ m}$$

$$x_m = x_1 + x_3$$

$$x_m = 2.931 \text{ m}$$

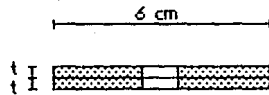


$$t = 1/8'' = 0.318 \text{ cm}$$

$$I_{xx} = 221.7 \text{ cm}^4$$

$$A = 6.46 \text{ cm}^2$$

Anillo de la unión 1



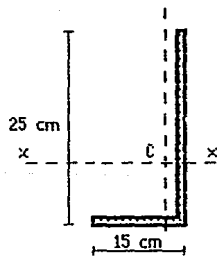
$$t = 0.266 \text{ cm}$$

$$\text{Area combinada} = 3.2 \text{ cm}^2$$

$$\text{Inercia combinada} 0.019 \text{ cm}^4$$

$$\text{Radio del anillo } R = 4.02 \text{ m}$$

Anillo de la unión 2



$$t = 0.635 \text{ cm}$$

$$C_x = 3.1 \text{ cm}$$

$$C_y = 8.1 \text{ cm}$$

$$I_{xx} = 1687 \text{ cm}^4$$

$$A = 25 \text{ cm}^2$$

Radio del anillo al  
centroide de la  
sección  $R = 3.959 \text{ m}$

Anillo de la unión 8

Fig 5.2

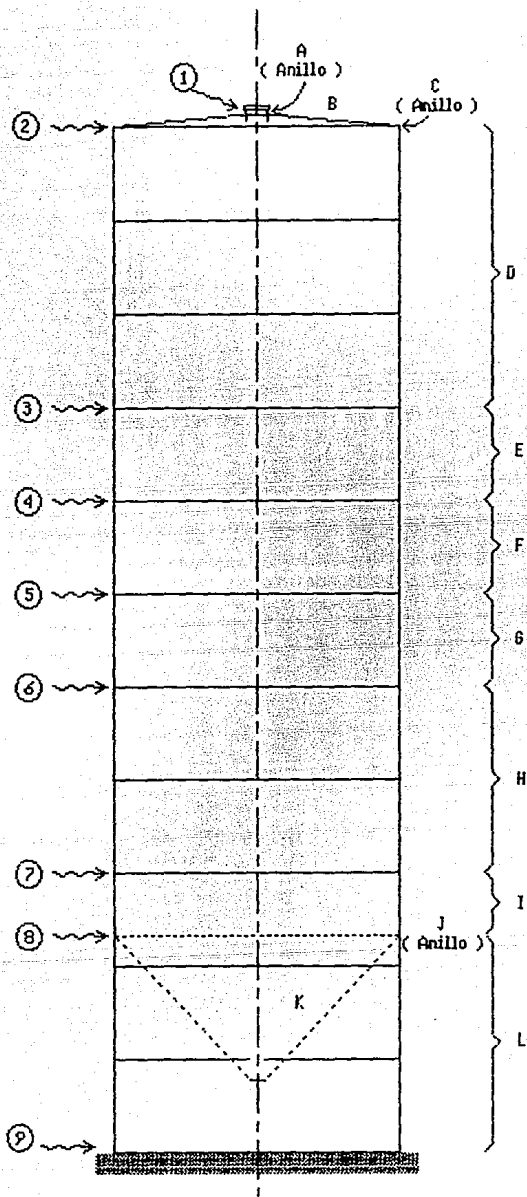


Fig 5.3 Identificación de miembros y uniones

Elemento E,  $t = 10 \text{ ga} = 0.342 \text{ cm}$ .

$$k = \frac{[3(1 - 0.3^2)]^{1/4}}{[3.99(0.00342)]^{1/2}} = 11.004 \quad \lambda = \frac{2\pi}{11.004} = 0.571 \text{ m}$$

Elemento F,  $t = 8 \text{ ga} = 0.418 \text{ cm}$ .

$$k = \frac{[3(1 - 0.3^2)]^{1/4}}{[3.99(0.00418)]^{1/2}} = 9.953 \quad \lambda = \frac{2\pi}{9.953} = 0.631 \text{ m}$$

Elemento G,  $t = 3/16'' = 0.476 \text{ cm}$ .

$$k = \frac{[3(1 - 0.3^2)]^{1/4}}{[3.99(0.00476)]^{1/2}} = 9.327 \quad \lambda = \frac{2\pi}{9.327} = 0.674 \text{ m}$$

Elemento H,  $t = 7/32'' = 0.556 \text{ cm}$ .

$$k = \frac{[3(1 - 0.3^2)]^{1/4}}{[3.99(0.00556)]^{1/2}} = 8.630 \quad \lambda = \frac{2\pi}{8.630} = 0.728 \text{ m}$$

Elementos L e I,  $t = 1/4'' = 0.635 \text{ cm}$ .

$$k = \frac{[3(1 - 0.3^2)]^{1/4}}{[3.99(0.00635)]^{1/2}} = 8.075 \quad \lambda = \frac{2\pi}{8.075} = 0.778 \text{ m}$$

Secciones cónicas.

$$k = \frac{[3(1 - \mu^2)]^{1/4}}{(t \times x_m \text{ ctg} \alpha_0)^{1/2}} \quad \lambda = \frac{2\pi}{k}$$

Cubierta superior, elemento B.

$t = 0.00266 \text{ m}$ .  $x_m = 2.143 \text{ m}$ .  $\alpha_0 = 4^\circ 45' 49''$ .

$$k = \frac{[3(1 - 0.3^2)]^{1/4}}{[0.00266 (2.143) \text{ ctg} 4^\circ 45' 49'']^{1/2}} = 4.915$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{4.915} = 1.278 \text{ m}$$

Tolva de descarga, elemento K.

$t = 0.00342$  m.  $x_m = 2.931$  m.  $\alpha_0 = 45^\circ$ .

$$k = \frac{[3(1 - 0.3^2)]^{1/4}}{[0.00342 (2.931) \text{ctg}45^\circ]^{1/2}} = 12.839$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{12.839} = 0.489 \text{ m}$$

Al revisar las longitudes de onda, se nota que las perturbaciones en cada uno de los extremos de cada elemento que forma el sistema estructural, no llegan al extremo opuesto. Esto permite hacer el análisis del sistema por uniones separadas.

Tomando en cuenta lo anterior, se desarrollaron los sistemas de ecuaciones para uniones de dos, tres y cuatro elementos. Estas ecuaciones son de la forma:

$$[ \alpha_{UX} ] \{ F_{UX} \} = \{ \Delta_{UX}^0 \}$$

$[ \alpha_{UX} ]$  es la matriz de flexibilidades de la unión,  $\{ F_{UX} \}$  es el vector de fuerzas correctivas y  $\{ \Delta_{UX}^0 \}$  es el vector de combinaciones de desplazamientos bajo régimen de membrana, todas estas matrices de la unión X.

Para las tres situaciones, las ecuaciones de desplazamientos en los bordes son del caso 2 de la tabla 3.1.

En la fig 5.4 se muestra la nomenclatura a utilizar en una unión de dos elementos, con las ecuaciones de deformaciones mostradas a continuación:

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \delta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1^M & \beta_1^H \\ \delta_1^M & \delta_1^H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ H_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1^O \\ \delta_1^O \end{bmatrix} = [ \alpha_1 ] \begin{bmatrix} M_1 \\ H_1 \end{bmatrix} + \{ \Delta_1 \}$$

Ecs 5.1

$$\begin{bmatrix} \beta_2 \\ \delta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_2^M & \beta_2^H \\ \delta_2^M & \delta_2^H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_2 \\ H_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_2^O \\ \delta_2^C \end{bmatrix} = [ \alpha_2 ] \begin{bmatrix} M_2 \\ H_2 \end{bmatrix} + \{ \Delta_2 \}$$

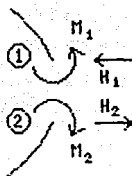


Fig 5.4

$[\alpha_i]$  y  $\{\Delta_i\}$  son la matriz de flexibilidades y el vector de desplazamientos por régimen de membrana, ambos del elemento  $i$ .

La ecuación de la unión corresponde al caso 1 de la tabla 3.2.

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ H_1 \\ \beta_1 \\ \delta_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M_2 \\ H_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta_2 \\ \delta_2 \end{bmatrix} \quad \text{Ecs 5.2}$$

De los dos renglones superiores de los vectores de la ecuación matricial 5.2, se obtiene la condición de equilibrio de la unión. Con los dos renglones inferiores se maneja la condición de compatibilidad de desplazamientos.

$$M_1 = M_2 \quad \text{y} \quad H_1 = H_2 \quad \text{Ecs 5.3}$$

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \delta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_2 \\ \delta_2 \end{bmatrix} \quad \text{Ecs 5.4}$$

Al sustituir sucesivamente las ecs 5.3 en las 5.1, y estas últimas en las ecs 5.4, se obtiene:

$$[\alpha_1] \begin{bmatrix} M_1 \\ H_1 \end{bmatrix} + \{\Delta_1\} = [\alpha_2] \begin{bmatrix} M_1 \\ H_1 \end{bmatrix} + \{\Delta_2\}$$

Al arreglar términos:

$$([\alpha_1] - [\alpha_2]) \begin{bmatrix} M_1 \\ H_1 \end{bmatrix} = \{\Delta_2\} - \{\Delta_1\} \quad \text{Ecs 5.5}$$

Esta es la ecuación matricial necesaria para obtener las fuerzas correctivas en los bordes.

Para la unión de tres elementos, la fig 5.5 muestra el tercer elemento agregado, y enseguida la ecuación de deformaciones en el borde:

$$\begin{bmatrix} \beta_3 \\ \delta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_3^M & \beta_3^H \\ \delta_3^M & \delta_3^H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_3 \\ H_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_3^0 \\ \delta_3^0 \end{bmatrix} = [\alpha_3] \begin{bmatrix} M_3 \\ H_3 \end{bmatrix} + \{ \Delta_3 \} \quad \text{Ecs 5.6}$$

La ecuación de la unión corresponde al caso 2 de la tabla 3.2.

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ H_1 \\ \beta_1 \\ \delta_1 \\ \beta_1 \\ \delta_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M_2 \\ H_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M_3 \\ H_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta_2 \\ \delta_2 \\ \beta_3 \\ \delta_3 \end{bmatrix} \quad \text{Ecs 5.7}$$

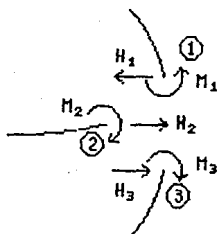


Fig 5.5

Al igual que en la unión de dos elementos, de los dos renglones superiores de los vectores de la ecuación matricial 5.7, se obtiene la condición de equilibrio de la unión. Con los cuatro renglones inferiores se tiene la condición de compatibilidad de desplazamientos.

$$M_1 = M_2 + M_3 \quad \gamma \quad H_1 = H_2 + H_3 \quad \text{Ecs 5.8}$$

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \delta_1 \\ \beta_1 \\ \delta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_2 \\ \delta_2 \\ \beta_3 \\ \delta_3 \end{bmatrix} \quad \text{Ecs 5.9}$$

Al sustituir la ec 5.8 en las ecs 5.1, y estas últimas y las ecs 5.6 en las ecs 5.9, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} [\alpha_1] \begin{bmatrix} M_2 + M_3 \\ H_2 + H_3 \end{bmatrix} + \{ \Delta_1 \} \\ [\alpha_1] \begin{bmatrix} M_2 + M_3 \\ H_2 + H_3 \end{bmatrix} + \{ \Delta_1 \} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\alpha_2] \begin{bmatrix} M_2 \\ H_2 \end{bmatrix} + \{ \Delta_2 \} \\ [\alpha_3] \begin{bmatrix} M_3 \\ H_3 \end{bmatrix} + \{ \Delta_3 \} \end{bmatrix}$$

Al arreglar términos:

$$\begin{bmatrix} \left[ [\alpha_1] - [\alpha_2] \right] \begin{bmatrix} M_2 \\ H_2 \end{bmatrix} + [\alpha_1] \begin{bmatrix} M_3 \\ H_3 \end{bmatrix} \\ [\alpha_1] \begin{bmatrix} M_2 \\ H_2 \end{bmatrix} + \left[ [\alpha_1] - [\alpha_3] \right] \begin{bmatrix} M_3 \\ H_3 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{ \Delta_2 \} - \{ \Delta_1 \} \\ \{ \Delta_3 \} - \{ \Delta_1 \} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} [\alpha_1] - [\alpha_2] & [\alpha_1] \\ [\alpha_1] & [\alpha_1] - [\alpha_3] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_2 \\ H_2 \\ M_3 \\ H_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{ \Delta_2 \} - \{ \Delta_1 \} \\ \{ \Delta_3 \} - \{ \Delta_1 \} \end{bmatrix}$$

Ecs 5.10

Para cuatro elementos, en la fig 5.6 aparece el cuarto elemento agregado y enseguida la ecuación de desplazamientos en el borde:

$$\begin{bmatrix} \beta_4 \\ \delta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_4^M & \beta_4^H \\ \delta_4^M & \delta_4^H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_4 \\ H_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_4^0 \\ \delta_4^0 \end{bmatrix} = [\alpha_4] \begin{bmatrix} M_4 \\ H_4 \end{bmatrix} + \{ \Delta_4 \} \quad \text{Ecs 5.11}$$

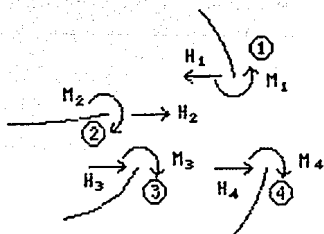


Fig 5.6

La ecuación de la unión corresponde al caso 2 de la tabla 3.2.

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ H_1 \\ \beta_1 \\ \delta_1 \\ \beta_1 \\ \delta_1 \\ \beta_1 \\ \delta_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M_2 \\ H_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M_3 \\ H_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M_4 \\ H_4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta_2 \\ \delta_2 \\ \beta_3 \\ \delta_3 \\ \beta_4 \\ \delta_4 \end{bmatrix} \quad \text{Ecs 5.12}$$

De manera análoga a las otras uniones, de los dos renglones superiores de los vectores de la ecuación matricial 5.12, se obtiene la condición de equilibrio de la unión. Con los seis renglones inferiores, se tiene la condición de compatibilidad de desplazamientos.

$$M_1 = M_2 + M_3 + M_4 \quad \text{y} \quad H_1 = H_2 + H_3 + H_4 \quad \text{Ecs 5.13}$$

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \delta_1 \\ \beta_1 \\ \delta_1 \\ \beta_1 \\ \delta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_2 \\ \delta_2 \\ \beta_3 \\ \delta_3 \\ \beta_4 \\ \delta_4 \end{bmatrix} \quad \text{Ecs 5.14}$$

Al sustituir la ec 5.13 en las ecs 5.1, y estas últimas con las ecs 5.6 y 5.11 en las ecs 5.14, se obtiene:



$$\begin{bmatrix} [\alpha_1] \begin{bmatrix} M_2 + M_3 + M_4 \\ H_2 + H_3 + H_4 \end{bmatrix} + \{ \Delta_1 \} \\ [\alpha_1] \begin{bmatrix} M_2 + M_3 + M_4 \\ H_2 + H_3 + H_4 \end{bmatrix} + \{ \Delta_1 \} \\ [\alpha_1] \begin{bmatrix} M_2 + M_3 + M_4 \\ H_2 + H_3 + H_4 \end{bmatrix} + \{ \Delta_1 \} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\alpha_2] \begin{bmatrix} M_2 \\ H_2 \end{bmatrix} + \{ \Delta_2 \} \\ [\alpha_3] \begin{bmatrix} M_3 \\ H_3 \end{bmatrix} + \{ \Delta_3 \} \\ [\alpha_4] \begin{bmatrix} M_4 \\ H_4 \end{bmatrix} + \{ \Delta_4 \} \end{bmatrix}$$

Al arreglar términos:

$$\begin{bmatrix} [\alpha_1] - [\alpha_2] \\ [\alpha_1] \\ [\alpha_1] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_2 \\ H_2 \\ M_2 \\ H_2 \\ M_2 \\ H_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [\alpha_1] \\ [\alpha_1] - [\alpha_3] \\ [\alpha_1] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_3 \\ H_3 \\ M_3 \\ H_3 \\ M_3 \\ H_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [\alpha_1] \\ [\alpha_1] \\ [\alpha_1] - [\alpha_3] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_4 \\ H_4 \\ M_4 \\ H_4 \\ M_4 \\ H_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{ \Delta_2 \} - \{ \Delta_1 \} \\ \{ \Delta_3 \} - \{ \Delta_1 \} \\ \{ \Delta_4 \} - \{ \Delta_1 \} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} [\alpha_1] - [\alpha_2] & [\alpha_1] & [\alpha_1] \\ [\alpha_1] & [\alpha_1] - [\alpha_3] & [\alpha_1] \\ [\alpha_1] & [\alpha_1] & [\alpha_1] - [\alpha_3] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_2 \\ H_2 \\ M_3 \\ H_3 \\ M_4 \\ H_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{ \Delta_2 \} - \{ \Delta_1 \} \\ \{ \Delta_3 \} - \{ \Delta_1 \} \\ \{ \Delta_4 \} - \{ \Delta_1 \} \end{bmatrix}$$

Ecs 5.15

Las ecs 5.5, 5.10 y 5.15 son la forma general de uniones de dos, tres y cuatro elementos, sin influencia de un borde sobre el otro, en todos sus elementos.

## 5.1 Matrices de flexibilidades de los elementos estructurales

Las matrices de los elementos en su forma general son del tipo que aparece en la tabla 3.1 como caso 1, pero para el análisis de la estructura, sólo es necesaria la matriz de flexibilidades que representa el comportamiento en el borde ( caso 2, tabla 3.1 ).

Las secciones cilíndricas se denominarán  $\alpha_{X \text{ inf}}$  y  $\alpha_{X \text{ sup}}$  para los extremos inferior y superior del elemento X. En las secciones cónicas se denominarán  $\alpha_{X \text{ may}}$  y  $\alpha_{X \text{ men}}$  si se trata del radio mayor o menor. En los anillos la denominación se limita a  $\alpha_X$ .

$$D = \frac{Et^3}{12(1 - \mu^2)} \quad \alpha_X = \begin{bmatrix} \beta^M & \beta^H \\ \delta^M & \delta^H \end{bmatrix}$$

### Secciones cilíndricas

Del apéndice A

Matriz inferior

$$\beta^M = \frac{-1}{Dk} \quad \beta^H = \delta^M = \frac{1}{2Dk^2} \quad \delta^H = \frac{-1}{2Dk^3}$$

Matriz superior

$$\beta^M = \frac{1}{Dk} \quad \beta^H = \delta^M = \frac{1}{2Dk^2} \quad \delta^H = \frac{1}{2Dk^3}$$

Elemento D

$$L = 7.386 \text{ m} \quad t = 0.00266 \text{ m} \quad k = 12.477 \quad D = 36.194 \text{ kg m}$$

$$[ \alpha_{D \text{ inf}} ] = \begin{bmatrix} -2.2144 & 0.08874 \\ 0.08874 & -0.0071122 \end{bmatrix} \times 10^{-3}$$

$$[ \alpha_{D \text{ sup}} ] = \begin{bmatrix} 2.2144 & 0.08874 \\ 0.08874 & 0.0071122 \end{bmatrix} \times 10^{-3}$$

Elemento E

$$L = 2.462 \text{ m} \quad t = 0.00342 \text{ m} \quad k = 11.004 \quad D = 76.926 \text{ kg m}$$

$$[\alpha_{E \text{ inf}}] = \begin{bmatrix} -1.8134 & 0.053678 \\ 0.053678 & -0.004878 \end{bmatrix} \times 10^{-3}$$

$$[\alpha_{E \text{ sup}}] = \begin{bmatrix} 1.8134 & 0.053678 \\ 0.053678 & 0.004878 \end{bmatrix} \times 10^{-3}$$

Elemento F

$$L = 2.462 \text{ m} \quad t = 0.00418 \text{ m} \quad k = 9.953 \quad D = 140.451 \text{ kg m}$$

$$[\alpha_{F \text{ inf}}] = \begin{bmatrix} -7.1535 & 0.35937 \\ 0.35937 & -0.036106 \end{bmatrix} \times 10^{-4}$$

$$[\alpha_{F \text{ sup}}] = \begin{bmatrix} 7.1535 & 0.35937 \\ 0.35937 & 0.036106 \end{bmatrix} \times 10^{-4}$$

Elemento G

$$L = 2.462 \text{ m} \quad t = 0.00476 \text{ m} \quad k = 9.327 \quad D = 207.404 \text{ kg m}$$

$$[\alpha_{G \text{ inf}}] = \begin{bmatrix} -5.1694 & 0.27712 \\ 0.27712 & -0.029712 \end{bmatrix} \times 10^{-4}$$

$$[\alpha_{G \text{ sup}}] = \begin{bmatrix} 5.1694 & 0.27712 \\ 0.27712 & 0.029712 \end{bmatrix} \times 10^{-4}$$

Elemento H

$$L = 4.924 \text{ m} \quad t = 0.00556 \text{ m} \quad k = 8.630 \quad D = 330.538 \text{ kg m}$$

$$[\alpha_{H \text{ inf}}] = \begin{bmatrix} -3.5056 & 0.20311 \\ 0.20311 & -0.023535 \end{bmatrix} \times 10^{-4}$$

$$[\alpha_{H \text{ sup}}] = \begin{bmatrix} 3.5056 & 0.20311 \\ 0.20311 & 0.023535 \end{bmatrix} \times 10^{-4}$$

Elemento I, L.  $L_I = 1.67 \text{ m}$   $L_L = 5.72 \text{ m}$

$t = 0.00635 \text{ m}$   $k = 8.075$   $D = 492.400 \text{ kg m}$

$$[ \alpha_{I, L \text{ inf}} ] = \begin{bmatrix} -2.515 & 0.15573 \\ 0.15573 & -0.019285 \end{bmatrix} \times 10^{-4}$$

$$[ \alpha_{I, L \text{ sup}} ] = \begin{bmatrix} 2.515 & 0.15573 \\ 0.15573 & 0.019285 \end{bmatrix} \times 10^{-4}$$

Secciones cónicas

Matriz inferior

$$\beta^M = \frac{-1}{Dk} \quad \beta^H = \delta^M = \frac{\text{sen}\alpha_0}{2Dk^2} \quad \delta^H = \frac{-\text{sen}^2\alpha_0}{2Dk^3}$$

Matriz superior

$$\beta^M = \frac{1}{Dk} \quad \beta^H = \delta^M = \frac{\text{sen}\alpha_0}{2Dk^2} \quad \delta^H = \frac{\text{sen}^2\alpha_0}{2Dk^3}$$

Cubierta superior. Elemento B.

$L = 4.004 \text{ m}$   $t = 0.00266 \text{ m}$   $k = 4.915$   $D = 36.194 \text{ kg m}$   
 $\alpha_0 = 4^\circ 45' 49''$

$$[ \alpha_{B \text{ inf}} ] = \begin{bmatrix} -5.6213 & 0.047490 \\ 0.047490 & -0.00080237 \end{bmatrix} \times 10^{-3}$$

$$[ \alpha_{B \text{ sup}} ] = \begin{bmatrix} 5.6213 & 0.047490 \\ 0.047490 & 0.00080237 \end{bmatrix} \times 10^{-3}$$

Tolva de descarga. Elemento K. Para este elemento sólo es necesaria la matriz  $\alpha_{K \text{ sup}}$ .

$L = 5.643 \text{ m}$   $t = 0.00342 \text{ m}$   $k = 12.839$   $D = 76.926 \text{ kg m}$   
 $\alpha_0 = 45^\circ$

$$[ \alpha_{K \text{ sup}} ] = \begin{bmatrix} 1.0125 & 0.027882 \\ 0.027882 & 0.0015356 \end{bmatrix} \times 10^{-3}$$

### Elementos anulares

Como elemento superior

$$\beta^M = \frac{-R^2}{EI} \quad \beta^H = \delta^M = 0 \quad \delta^H = \frac{-R^2}{EA}$$

Como elemento inferior

$$\beta^M = \frac{R^2}{EI} \quad \beta^H = \delta^M = 0 \quad \delta^H = \frac{R^2}{EA}$$

### Elemento A

$$R = 0.28 \text{ m} \quad A = 6.46 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \quad I = 2.217 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$[\alpha_{A \text{ inf}}] = \begin{bmatrix} -1.684 & 0.0 \\ 0.0 & -0.005779 \end{bmatrix} \times 10^{-6}$$

### Elemento C

$$R = 4.02 \text{ m} \quad A = 3.2 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \quad I = 1.9 \times 10^{-10} \text{ m}^4$$

$$[\alpha_{C \text{ sup}}] = \begin{bmatrix} 4.0502 & 0.0 \\ 0.0 & 2.4048 \times 10^{-6} \end{bmatrix}$$

### Elemento J

$$R = 3.959 \text{ m} \quad A = 0.0025 \text{ m}^2 \quad I = 1.687 \times 10^{-5} \text{ m}^4$$

$$[\alpha_{J \text{ sup}}] = \begin{bmatrix} 4.42422 & 0.0 \\ 0.0 & 0.029855 \end{bmatrix} \times 10^{-5}$$

## 5.2 Matrices de uniones

El orden alfabético de los elementos permite un seguimiento apropiado, en el momento de establecer las matrices de las uniones. En cada una de las uniones, del primer elemento se tomará la matriz inferior y del resto la matriz inferior.

A continuación, se identifican cada una de las uniones con su respectiva ecuación tipo ( ecs 5.5, 5.10 o 5.15 ), la correspondiente identificación de elementos con los de la ecuación tipo y se muestra la matriz de unión  $[ \alpha_{UX} ]$  resultante. En los sistemas de ecuaciones bastará calcular los términos independientes los cuales dependen del estado de carga que se desee analizar.

Unión 1. Ec 5.5

Elementos: 1 = A ( anillo ); 2 = B ( cubierta superior ).

$$[ \alpha_{U1} ] = \begin{bmatrix} -5.623 & -0.047490 \\ -0.047490 & -0.000808149 \end{bmatrix} \times 10^{-3}$$

Unión 2. Ec 5.10

Elementos: 1 = B (cubierta superior); 2 = C (anillo);  
3 = D (pared cilíndrica)

$$[ \alpha_{U2} ] = \begin{bmatrix} -4.05582 & 0.000047490 & -0.0056213 & 0.000047490 \\ 0.000047490 & -3.20717 \times 10^{-6} & 0.000047490 & -8.0237 \times 10^{-7} \\ -0.0056213 & 0.000047490 & -0.0078357 & -0.00004125 \\ 0.000047490 & -8.0237 \times 10^{-7} & -0.00004125 & -7.91457 \times 10^{-6} \end{bmatrix}$$

Unión 3. Ec 5.5

Elementos: 1 = D; 2 = E. Pared cilíndrica.

$$[ \alpha_{U3} ] = \begin{bmatrix} -4.0278 & 0.035062 \\ 0.035062 & -0.0119902 \end{bmatrix} \times 10^{-3}$$

Unión 4. Ec 5.5

Elementos: 1 = E; 2 = F. Pared cilíndrica.

$$[ \alpha_{U4} ] = \begin{bmatrix} -2.5288 & 0.017741 \\ 0.017741 & -0.0084886 \end{bmatrix} \times 10^{-3}$$

Unión 5. Ec 5.5

Elementos: 1 = F; 2 = G. Pared cilíndrica.

$$[ \alpha_{U5} ] = \begin{bmatrix} -1.23229 & 0.008225 \\ 0.008225 & -0.0065818 \end{bmatrix} \times 10^{-3}$$

Unión 6. Ec 5.5

Elementos: 1 = G; 2 = H. Pared cilíndrica.

$$[ \alpha_{U6} ] = \begin{bmatrix} -8.675 & 0.07401 \\ 0.07401 & -0.053247 \end{bmatrix} \times 10^{-4}$$

Unión 7. Ec 5.5

Elementos: 1 = H; 2 = I. Pared cilíndrica.

$$[ \alpha_{U7} ] = \begin{bmatrix} -6.0206 & 0.04738 \\ 0.04738 & -0.04282 \end{bmatrix} \times 10^{-4}$$

Unión 8. Ec 5.15

Elementos: 1 = I (pared cilíndrica); 2 = J (anillo);  
3 = K (tolva de descarga); 4 = L (falda del silo)

$$[ \alpha_{U7} ] = \begin{bmatrix} -0.29574 & 0.015573 & -0.2515 & 0.015573 & -0.2515 & 0.015573 \\ 0.015573 & -0.00222705 & 0.015573 & -0.0019285 & 0.015573 & -0.0019285 \\ -0.2515 & 0.015573 & -1.264 & -0.012309 & -0.2515 & 0.015573 \\ 0.015573 & -0.0019285 & -0.012309 & -0.0034641 & 0.015573 & -0.0019285 \\ -0.2515 & 0.015573 & -0.2515 & 0.015573 & -0.503 & 0.0 \\ 0.015573 & -0.0019285 & 0.015573 & -0.0019285 & 0.0 & -0.003857 \end{bmatrix}$$

$\times 10^{-3}$

Unión 9. Ec 5.5

Elementos: 1 = L (pared cilíndrica); 2 = Empotramiento  
de la base matriz de flexibilidades nula.

$$[ \alpha_{U9} ] = [ \alpha_{L \text{ inf}} ] = \begin{bmatrix} -2.515 & 0.15573 \\ 0.15573 & -0.019285 \end{bmatrix} \times 10^{-4}$$



### 5.3 Estados de carga para analizar

Se calculan las fuerzas correctivas de los estados de carga de peso propio y de la descarga del material, según la propuesta de análisis de Walker, para flujo de masa como caso más desfavorable en el accionar del silo.

En el análisis de peso propio, la mayoría de los elementos están sujetos, además de su propio peso, al peso de los elementos que están encima del mismo. Esta carga se manifiesta como una carga vertical en el borde superior del elemento ( carga de linternilla ). Este tipo de carga es el que se presenta en la falda del silo al analizar la descarga del material del interior.

Se mantiene el orden de las uniones para hacer las observaciones pertinentes a cada caso.

Los anillos en sí no producen desplazamientos por peso propio pero son carga que soporta el miembro inmediato inferior, como carga de linternilla.

Deformaciones de los elementos bajo régimen de membrana por peso propio.

Elemento A, anillo superior de la cubierta cónica.

Vector de desplazamientos **nulo**.

Elemento B, cubierta cónica superior.

En el cono superior existe la carga del anillo ( elemento A ) y de un domo que cubre el orificio de carga. La carga total de los dos elementos se tomará como el doble del peso del anillo dado por dos veces el peso volumétrico del acero por la altura y por el espesor del anillo.

$$P_1 = 7900(0.00266) = 21.014 = 21 \text{ kg/m}^2 \text{ Peso de la cubierta}$$

$$P_2 = 2(7900)(0.203)(0.00266) = 10.2 \text{ kg/m} \text{ Carga de linternilla}$$

Detalles del cono:  $\alpha_0 = 4.76361111^\circ$ ,  $x_1 = 0.282 \text{ m}$ ,  $t = 0.00266 \text{ m}$ . De las ecs 2.5 y 2.7 se obtienen las ecuaciones de desplazamientos, con los dos tipos de cargas para la cubierta cónica:

$$\Delta r = -2.25564 \times 10^{-6} x^2 ( 1.98621 - 0.3[ 1 - (0.282/x)^2 ] ) -$$

$$- 1.85375 \times 10^{-7}$$

$$\beta = 2.71618 \times 10^{-5} x ( 2.96828 + [0.282/x]^2 ) -$$

$$- 7.4407 \times 10^{-6} /x$$

Al evaluar las expresiones para  $x_1$  ( borde superior ):

$$\{ \Delta_B \text{ sup} \} = \begin{bmatrix} \beta_B \\ \delta_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.01009 \times 10^{-6} \text{ radianes} \\ -5.41656 \times 10^{-7} \text{ m} \end{bmatrix}$$

Y en el borde inferior en  $x_2 = 4.004 \text{ m}$

$$\{ \Delta_B \text{ inf} \} = \begin{bmatrix} \beta_B \\ \delta_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.21499 \times 10^{-4} \text{ rad} \\ -6.12167 \times 10^{-5} \text{ m} \end{bmatrix}$$

Elemento C, anillo inferior de la cubierta cónica.

Vector de desplazamientos nulo.

Elemento D, pared cilíndrica

Traslación de la carga de linternilla del borde superior de la cubierta cónica al borde inferior.

$$10.2 r_{\text{men}}/r_{\text{may}} = 10.2(0.28)/3.99 = 0.72 \text{ kg/m}$$

Carga de la cubierta cónica sobre el borde superior del elemento D:

$$x_3 (r_{\text{may}} + r_{\text{men}}) w_{at}/ r_{\text{may}}$$

$$1.861(3.99 + 0.28)7900(0.00266)/3.99 = 41.9 \text{ kg/m}$$

Carga del anillo, elemento C (área transversal = 3.2 cm<sup>2</sup>), sobre el borde superior del elemento D:

$$w_a A = 7900(0.00032) = 2.53 \text{ kg/m}$$

Carga total en el borde superior del elemento D

$$p_2 = 0.72 + 41.9 + 2.53 = 45.15 \text{ kg/m}$$

$p_1 = 7900(0.00266) = 21 \text{ kg/m}^2$  Peso del elemento D.

A partir de las ecs 2.6 y 2.8, donde  $p_1$  es el peso del elemento y  $p_2$  la carga total en el borde se, obtienen las ecuaciones generales de deformación de la sección cilíndrica, para poder utilizarlas en el resto de las uniones:

$$\Delta r = \frac{\mu p_1 L}{Et} \left( \frac{1 - \xi + \xi^2}{2} \right) + \frac{\mu p_2 R}{B}$$

$$\beta = \frac{\mu p_1 L}{Et} (\xi - 1)$$

Además de las constantes ya conocidas, R es el radio del cilindro, L es la altura del cilindro y B la rigidez extensional,  $B = Et/(1-\mu^2)$ .

$\xi = x/L$ , medido desde la base del cilindro.

R = 3.99 m para todos los cilindros.

En el extremo superior de cualquier cilindro cargado de igual manera, los desplazamientos son:

$$\Delta r = \frac{\mu p_2 R}{B} \quad \beta = 0 \quad \text{Ecs 5.16}$$

Y en el extremo inferior:

$$\Delta r = \frac{\mu p_1 L}{2Et} + \frac{\mu p_2 R}{B} \quad \beta = \frac{-\mu p_1 L}{Et} \quad \text{Ecs 5.17}$$

Al sustituir todas las constantes,  $L = 7.386$  m,  $t = 0.00266$  m, se obtienen:

$$\{ \Delta_D \text{ sup} \} = \begin{Bmatrix} \beta_D \\ \delta_D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0 \text{ rad} \\ 8.80425 \times 10^{-7} \text{ m} \end{Bmatrix}$$

$$\{ \Delta_D \text{ inf} \} = \begin{Bmatrix} \beta_D \\ \delta_D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -8.3301 \times 10^{-7} \text{ rad} \\ 1.2969 \times 10^{-6} \text{ m} \end{Bmatrix}$$

Elemento E, pared cilíndrica.

La carga en el borde superior es la carga en el borde superior del elemento inmediato superior más el peso de éste.

$$p_2 = 45.15 + 7900(0.00266)(7.386) = 200.36 \text{ kg/m}$$

$$p_1 = 7900(0.00342) = 25.12 \text{ kg} \quad \text{Peso del elemento E}$$

Con las ecs 5.16 y 5.17,  $t = 0.00342 \text{ m}$ ,  $L = 2.462 \text{ m}$ , se tiene:

$$\{ \Delta_E \text{ sup} \} = \begin{bmatrix} \beta_E \\ \delta_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0 \text{ rad} \\ 3.0388 \times 10^{-6} \text{ m} \end{bmatrix}$$

$$\{ \Delta_E \text{ inf} \} = \begin{bmatrix} \beta_E \\ \delta_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.5834 \times 10^{-7} \text{ rad} \\ 3.168 \times 10^{-6} \text{ m} \end{bmatrix}$$

En los elementos F, G, H e I la determinación de la carga en el borde superior ( $p_2$ ) es igual que en elemento D.

Elemento F, pared cilíndrica.

$$p_2 = 200.36 + 7900(0.00342)(2.462) = 266.88 \text{ kg/m}$$

$$p_1 = 7900(0.00418) = 33.02 \text{ kg} \quad \text{Peso del elemento F}$$

Con las ecs 5.16 y 5.17,  $t = 0.00418 \text{ m}$ ,  $L = 2.462 \text{ m}$ , se tiene:

$$\{ \Delta_F \text{ sup} \} = \begin{bmatrix} \beta_F \\ \delta_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0 \text{ rad} \\ 3.3117 \times 10^{-6} \text{ m} \end{bmatrix}$$

$$\{ \Delta_F \text{ inf} \} = \begin{bmatrix} \beta_F \\ \delta_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.7784 \times 10^{-7} \text{ rad} \\ 3.4507 \times 10^{-6} \text{ m} \end{bmatrix}$$

Elemento G, pared cilíndrica.

$$p_2 = 266.88 + 7900(0.00418)(2.462) = 348.18 \text{ kg/m}$$

$$p_1 = 7900(0.00476) = 37.6 \text{ kg} \quad \text{Peso del elemento G}$$

Con las ecs 5.16 y 5.17,  $t = 0.00476 \text{ m}$ ,  $L = 2.462 \text{ m}$ , se tiene:

$$\{ \Delta_G \text{ sup} \} = \begin{bmatrix} \beta_G \\ \delta_G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0 \text{ rad} \\ 3.7941 \times 10^{-6} \text{ m} \end{bmatrix}$$

$$\{ \Delta_G \text{ inf} \} = \begin{bmatrix} \beta_G \\ \delta_G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.7782 \times 10^{-7} \text{ rad} \\ 3.9331 \times 10^{-6} \text{ m} \end{bmatrix}$$

Elemento H, pared cilíndrica.

$$p_2 = 348.18 + 7900(0.00476)(2.462) = 440.76 \text{ kg/m}$$

$$p_1 = 7900(0.00556) = 43.92 \text{ kg} \quad \text{Peso del elemento H}$$

Con las ecs 5.16 y 5.17,  $t = 0.00556 \text{ m}$ ,  $L = 4.924 \text{ m}$ , se tiene:

$$\{ \Delta_H \text{ sup} \} = \begin{bmatrix} \beta_H \\ \delta_H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0 \text{ rad} \\ 4.1119 \times 10^{-6} \text{ m} \end{bmatrix}$$

$$\{ \Delta_H \text{ inf} \} = \begin{bmatrix} \beta_H \\ \delta_H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5.5566 \text{ rad} \\ 4.3897 \times 10^{-6} \text{ m} \end{bmatrix}$$

Elemento I, pared cilíndrica.

$$p_2 = 440.76 + 7900(0.00556)(4.924) = 657.04 \text{ kg/m}$$

$$p_1 = 7900(0.00635) = 50.17 \text{ kg} \quad \text{Peso del elemento H}$$

Con las ecs 5.16 y 5.17,  $t = 0.00635 \text{ m}$ ,  $L = 1.67 \text{ m}$ , se tiene:

$$\{ \Delta_I \text{ sup} \} = \begin{bmatrix} \beta_I \\ \delta_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0 \text{ rad} \\ 5.367 \times 10^{-6} \text{ m} \end{bmatrix}$$

$$\{ \Delta_I \text{ inf} \} = \begin{bmatrix} \beta_I \\ \delta_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.8849 \times 10^{-7} \text{ rad} \\ 5.4613 \times 10^{-6} \text{ m} \end{bmatrix}$$

Elemento J, anillo en el borde superior de la tolva de descarga.

Vector de desplazamientos **nulo**.

Elemento K, tolva de descarga.

Detalles del cono:  $\alpha_0 = 45^\circ$ ,  $x_1 = 0.216$  m,  $t = 0.00342$  m. De las ecs 2.5, se obtiene:

$$\Delta r = 1.88095 \times 10^{-7} x^2 (1 - 0.3[1 - (0.216/x)^2])$$
$$\beta = 2.66007 \times 10^{-7} x (0.7 + [0.216/x]^2)$$

Al evaluar para  $x_2 = 5.646$  m (borde superior):

$$\{ \Delta_K \text{ sup} \} = \begin{bmatrix} \beta_K \\ \delta_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.05351 \times 10^{-6} \text{ rad} \\ 4.1998 \times 10^{-6} \text{ m} \end{bmatrix}$$

Elemento L, falda del silo.

Carga de la tolva sobre el borde superior de la falda:

$$x_3 (r_{\text{may}} + r_{\text{men}}) w_a t / r_{\text{may}}$$
$$2.715(3.99 + 0.152)7900(0.00342)/3.99 = 76.15 \text{ kg/m}$$

Carga del anillo, elemento J (área transversal = 25 cm<sup>2</sup>), sobre el borde superior de la falda del silo:

$$w_a A = 7900(0.0025) = 19.75 \text{ kg/m}$$

Carga por los elementos superiores:

$$657.04 + 7900(1.67)(0.00635) = 740.82 \text{ kg/m}$$

Carga total en el borde superior:

$$p_2 = 76.15 + 19.75 + 740.82 = 836.72 \text{ kg/m}$$
$$p_1 = 7900(0.00635) = 50.17 \text{ kg/m}^2$$

Con las ecs 5.16 y 5.17,  $t = 0.00635$  m,  $L = 5.72$  m, se tiene:

$$\{ \Delta_L \text{ sup} \} = \begin{bmatrix} \beta_L \\ \delta_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0 \text{ rad} \\ 6.8348 \times 10^{-6} \text{ m} \end{bmatrix}$$

$$\{ \Delta_L \text{ inf} \} = \begin{bmatrix} \beta_L \\ \delta_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6.45607 \times 10^{-7} \text{ rad} \\ 7.15755 \times 10^{-6} \text{ m} \end{bmatrix}$$

## 5.4 Análisis de presiones por efectos de descarga del material

Para describir el proceso de descarga según lo propone Walker ( ref 2 ), se calcula  $\epsilon_1$  y  $\mu'K$  por las ecs 2.23 con los datos del material,  $\phi' = 22^\circ$  --  $28^\circ$ ,  $\delta = 43^\circ$ ,  $w_m = 608 \text{ kg/m}^3$ . El caso más desfavorable para el valor de  $\phi'$  es  $22^\circ$ . Así:

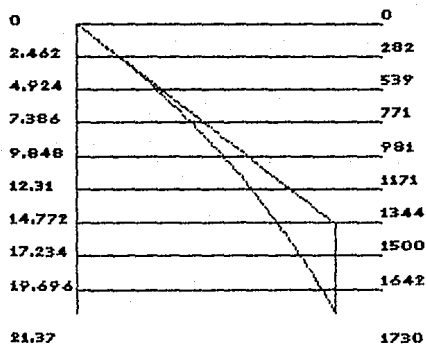
$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= 168.6825^\circ & \mu'K &= 0.0802038 \\ \mu' &= \text{tg } \phi' = \text{tg } 22^\circ = 0.404026 & K &= 0.1985 \\ R &= 7.98/4 = 1.995 \text{ m} \end{aligned}$$

Con la fórmula de Janssen, las presiones quedan definidas por:

$$p_v = 15123.5 (1 - e^{-0.0402024y}); \quad p_h = 3002.2 (1 - e^{-0.0402024y})$$

Para obtener una aproximación lineal de la función de la presión lateral, se deriva ésta y se evalúa en  $y = 0$ . De esta forma se tiene que la recta que aproxima a la función exponencial abarcándola es:

$$p_h = 120.7 y$$



En la gráfica, se observa que la aproximación en  $y = 14.772 \text{ m}$ , profundidad de la unión ó, la presión lateral es  $p_h = 1783 \text{ kg/m}^2$ . A partir de esta profundidad se toma esta presión uniforme hasta  $y = 21.37 \text{ m}$  donde está la unión con la tolva de descarga.

Se mencionó anteriormente que esta situación es una simplificación de una aproximación. Se puede así establecer la aproximación más adecuada. Hacer que la aproximación lineal

llegue exactamente hasta la unión 6, evita el cálculo adicional de flexión en un punto intermedio del elemento 6 como si fuera una unión más.

En la tolva de descarga las presiones están dadas por la ec 2.24, para la que:

$$h = 3.99 \text{ m} \quad \varepsilon_2 = 55.32 \quad K_w = 0.4972$$

$$p_{vt} = 1730/0.1985 = 8715 \text{ kg/m}^2$$

$$p_v = -4824.8 \left( \frac{z}{3.99} \right) + 13000 \left( \frac{z}{3.99} \right)^{0.4972}$$

Al evaluar la ecuación para  $z = 1, 2, 3, 4$ , las presiones son 5324, 6803, 7653 y 8179  $\text{kg/m}^2$  respectivamente. Conservadoramente, se utilizará la presión 8179  $\text{kg/m}^2$  como uniforme en el diámetro mayor de la tolva, para seguir la revisión.



### 5.5 Carga en los elementos y deformaciones por solución primaria

Los elementos D, E, F, G, H e I están sujetos a presión lateral. Con presión vertical tiene a la tolva, elemento K. Finalmente por fuerza vertical en su borde superior está el elemento L, falda del silo, que soporta todo el peso del material.

De las ecs 2.28 para la pared cilíndrica, en el extremo superior donde  $\xi = 1$ , se tiene que los desplazamientos son:

$$w = \Delta r = \frac{p_h R^2 \lambda_p}{Et} \quad \beta = \frac{-p_h R^2}{Et} \quad \text{Ecs 5.18}$$

Y en el extremo inferior donde  $\xi = 0$ :

$$w = \Delta r = \frac{p_h R^2}{Et} (1 + \lambda_p) \quad \beta = \frac{-p_h R^2}{Et} \quad \text{Ecs 5.19}$$

Elemento D.  $L = 7.386$  m.  $t = 0.00266$  m.  $R = 3.99$  m.

Presión en el extremo superior = 0.

Presión en el extremo inferior =  $7.386(120.7) = 891.5$  kg/m<sup>2</sup>

De las ecs 2.28 se obtiene:

$$p_h = 891.5 \text{ kg/m}^2 \quad \text{y} \quad \lambda_p = 0$$

Con las ecs 5.18 y 5.19, los vectores de desplazamientos son:

$$\{ \Delta_0 \text{ sup} \} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \delta_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.000254 \text{ rad} \\ 0.0 \text{ m} \end{bmatrix}$$

$$\{ \Delta_0 \text{ inf} \} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \delta_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.000254 \text{ rad} \\ 0.000254 \text{ m} \end{bmatrix}$$

Elemento E.  $L = 2.462$  m.  $t = 0.00342$  m.  $R = 3.99$  m.

Presión en el extremo superior =  $891.5$  kg/m<sup>2</sup>

Presión en el extremo inferior =  $9.848(120.7) = 1188.7$  kg/m<sup>2</sup>

De las ecs 2.28 se obtiene:

$$p_h = 1188.7 - 891.5 = 297.2 \text{ kg/m}^2 \quad \text{y} \quad \lambda_p = 3$$

Con las ecs 5.18 y 5.19, los vectores de desplazamientos son:

$$\{ \Delta_E \text{ sup} \} = \begin{bmatrix} \beta_E \\ \delta_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.000065879 \text{ rad} \\ 0.0001976 \text{ m} \end{bmatrix}$$

$$\{ \Delta_E \text{ inf} \} = \begin{bmatrix} \beta_E \\ \delta_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.000065879 \text{ rad} \\ 0.00026351 \text{ m} \end{bmatrix}$$

Elemento F. L = 2.462 m. t = 0.00418 m. R = 3.99 m.

Presión en el extremo superior = 1188.7 kg/m<sup>2</sup>

Presión en el extremo inferior = 12.31(120.7) = 1485.8 kg/m<sup>2</sup>

De las ecs 2.28:

$$p_h = 1485.8 - 1188.7 = 297.2 \text{ kg/m}^2 \quad \text{y} \quad \lambda_p = 4$$

Con las ecs 5.18 y 5.19, los vectores de desplazamientos son:

$$\{ \Delta_F \text{ sup} \} = \begin{bmatrix} \beta_F \\ \delta_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.000053901 \text{ rad} \\ 0.000215605 \text{ m} \end{bmatrix}$$

$$\{ \Delta_F \text{ inf} \} = \begin{bmatrix} \beta_F \\ \delta_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.000053901 \text{ rad} \\ 0.000269506 \text{ m} \end{bmatrix}$$

Elemento G. L = 2.462 m. t = 0.00476 m. R = 3.99 m.

Presión en el extremo superior = 1485.8 kg/m<sup>2</sup>

Presión en el extremo inferior = 14.772(120.7) = 1783 kg/m<sup>2</sup>

De las ecs 2.28:

$$p_h = 1783 - 1485.7 = 297.2 \text{ kg/m}^2 \quad \text{y} \quad \lambda_p = 5$$

Con las ecs 5.18 y 5.19, los vectores de desplazamientos son:

$$\{ \Delta_G \text{ sup} \} = \begin{bmatrix} \beta_G \\ \delta_G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.000047333 \text{ rad} \\ 0.00023667 \text{ m} \end{bmatrix}$$

$$\{ \Delta_G \text{ inf} \} = \begin{bmatrix} \beta_G \\ \delta_G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.000047333 \text{ rad} \\ 0.000284 \text{ m} \end{bmatrix}$$

En los elementos H e I, por tener presión lateral uniforme,  $17 \text{ kg/m}^2$ , sólo tienen  $\Delta r$  y giro  $\beta = 0$ . De las ecs 5.18,  $w$  se obtiene por la presión uniforme.

Elemento H.  $L = 2.24 \text{ m}$ .  $t = 0.00556 \text{ m}$ .  $R = 3.99 \text{ m}$ .

$$\{ \Delta_H \text{ sup} \} = \{ \Delta_H \text{ inf} \} = \begin{bmatrix} \beta_H \\ \delta_H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0 \text{ rad} \\ 0.00024311 \text{ m} \end{bmatrix}$$

Elemento I.  $L = 1.67 \text{ m}$ .  $t = 0.00635 \text{ m}$ .  $R = 3.99 \text{ m}$ .

$$\{ \Delta_I \text{ sup} \} = \{ \Delta_I \text{ inf} \} = \begin{bmatrix} \beta_I \\ \delta_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0 \text{ rad} \\ 0.00021286 \text{ m} \end{bmatrix}$$

Elemento K. Tolva de descarga.  $p = 8179 \text{ kg/m}^2$ .

Detalles:  $\alpha_0 = 45^\circ$ ,  $t = 0.00342 \text{ m}$ ,  $x_1 = 0.216 \text{ m}$ ,  $x_2 = 5.646 \text{ m}$ . De las ecs 2.29 se calculan los desplazamientos:

$$\Delta r = 4.02644 \times 10^{-5} x^2 [ 1 - 0.3( 1 - [0.216/x]^2 ) ]$$

$$\beta = 5.6941 \times 10^{-5} x ( 0.7 + [0.216/x]^2 )$$

Al evaluar en  $x_2$ , para el borde superior de la tolva, se obtiene el vector de desplazamientos:

$$\{ \Delta_K \text{ sup} \} = \begin{bmatrix} \beta_K \\ \delta_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.00022551 \text{ rad} \\ 0.00089903 \text{ m} \end{bmatrix}$$

Elemento L.  $L = 5.72 \text{ m}$ .  $t = 0.00635 \text{ m}$ .  $R = 3.99 \text{ m}$ .

Carga total del cilindro. Al tomar el volumen completo de la tolva, ya que es insignificante la porción del orificio:

$$p_2 = [ 3.99(21.37)/2 + 3.99^2/6 ] 608 = 27534.2 \text{ kg/m}^2$$

Con las ecs 2.8, se calculan los vectores de desplazamientos:

$$\{ \Delta_{L \text{ sup}} \} = \{ \Delta_{L \text{ inf}} \} = \begin{bmatrix} \beta_L \\ \delta_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0 \text{ rad} \\ 0.00022491 \text{ m} \end{bmatrix}$$

## 5.6 Fuerzas correctivas bajo carga de peso propio

Enseguida se identifica cada una de las uniones con su respectiva ecuación tipo ( ecs 5.5, 5.10 o 5.15 ), la correspondiente identificación de elementos con los de la ecuación tipo, y se muestra el vector de deformaciones en la unión (  $\Delta_{UX}^0$  ) con el que se calcula el vector de fuerzas correctivas (  $F_{UX}$  ) en cada elemento.

Unión 1. Ec 5.5

Elementos: 1 = A ( anillo ); 2 = B ( cubierta superior ).

$$\{ \Delta_{U1}^0 \} = \{ \Delta_{B \text{ sup}} \} = \begin{bmatrix} 4.01009 \times 10^{-6} \text{ rad} \\ -5.41656 \times 10^{-7} \text{ m} \end{bmatrix}$$

$$\{ F_{U1} \} = \begin{bmatrix} M_A \\ H_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.012654 \text{ kg-m/m} \\ 1.41384 \text{ kg/m} \end{bmatrix}$$

Unión 2. Ec 5.10

Elementos: 1 = B ( cubierta superior ); 2 = C ( anillo );  
3 = D ( pared cilíndrica )

$$\{ \Delta_{U2}^0 \} = \begin{bmatrix} -3.21499 \times 10^{-4} \text{ rad} \\ 6.12167 \times 10^{-5} \text{ m} \\ -3.21499 \times 10^{-4} \text{ rad} \\ 6.20971 \times 10^{-5} \text{ m} \end{bmatrix}$$

$$\{ F_{U2} \} = \begin{bmatrix} M_C \\ H_C \\ M_D \\ H_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.00014822 \text{ kg-m/m} \\ -18.2122 \text{ kg/m} \\ -0.038716 \text{ kg-m/m} \\ -5.7987 \text{ kg/m} \end{bmatrix}$$

Unión 3. Ec 5.5

Elementos: 1 = D; 2 = E. Pared cilíndrica.

$$\{ \Delta U_3^0 \} = \begin{bmatrix} 8.3301 \times 10^{-7} \text{ rad} \\ 1.7419 \times 10^{-6} \text{ m} \end{bmatrix}$$

$$\{ F_{U3} \} = \begin{bmatrix} M_b \\ H_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.001599 \text{ kg-m/m} \\ -0.14969 \text{ kg/m} \end{bmatrix}$$

Unión 4. Ec 5.5

Elementos: 1 = E; 2 = F. Pared cilíndrica.

$$\{ \Delta U_4^0 \} = \begin{bmatrix} 2.5834 \times 10^{-7} \text{ rad} \\ 1.437 \times 10^{-7} \text{ m} \end{bmatrix}$$

$$\{ F_{U4} \} = \begin{bmatrix} M_E \\ H_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.00001636 \text{ kg-m/m} \\ 0.01689 \text{ kg/m} \end{bmatrix}$$

Unión 5. Ec 5.5

Elementos: 1 = F; 2 = G. Pared cilíndrica.

$$\{ \Delta U_5^0 \} = \begin{bmatrix} 2.7784 \times 10^{-7} \text{ rad} \\ 3.434 \times 10^{-7} \text{ m} \end{bmatrix}$$

$$\{ F_{U5} \} = \begin{bmatrix} M_F \\ H_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0005785 \text{ kg-m/m} \\ -0.052897 \text{ kg/m} \end{bmatrix}$$

Unión 6. Ec 5.5

Elementos: 1 = G; 2 = H. Pared cilíndrica.

$$\{ \Delta U_6^0 \} = \begin{bmatrix} 2.7782 \times 10^{-7} \text{ rad} \\ 1.788 \times 10^{-7} \text{ m} \end{bmatrix}$$

$$\{ F_{U6} \} = \begin{bmatrix} M_G \\ H_G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.00061401 \text{ kg-m/m} \\ -0.034433 \text{ kg/m} \end{bmatrix}$$

Unión 7. Ec 5.5

Elementos: 1 = H; 2 = I. Pared cilíndrica.

$$\{ \Delta_{U7}^0 \} = \begin{bmatrix} 5.5566 \times 10^{-7} \text{ rad} \\ 9.773 \times 10^{-7} \text{ m} \end{bmatrix}$$

$$\{ F_{U7} \} = \begin{bmatrix} M_H \\ H_H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0027429 \text{ kg-m/m} \\ -0.23127 \text{ kg/m} \end{bmatrix}$$

Unión 8. Ec 5.15

Elementos: 1 = I (pared cilíndrica); 2 = J (anillo);  
3 = K (tolva de descarga); 4 = L (falda del silo)

$$\{ \Delta_{U8}^0 \} = \begin{bmatrix} 1.8849 \times 10^{-7} \text{ rad} \\ -5.4613 \times 10^{-6} \text{ m} \\ 1.242 \times 10^{-6} \text{ rad} \\ -1.2615 \times 10^{-5} \text{ m} \\ 1.8849 \times 10^{-7} \text{ rad} \\ 1.3735 \times 10^{-6} \text{ m} \end{bmatrix}$$

$$\{ F_{U8} \} = \begin{bmatrix} M_J \\ H_J \\ M_K \\ H_K \\ M_L \\ H_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.10491 \text{ kg-m/m} \\ 1.7687 \text{ kg/m} \\ -0.26843 \text{ kg-m/m} \\ 9.8763 \text{ kg/m} \\ 0.44192 \text{ kg-m/m} \\ -6.8389 \text{ kg/m} \end{bmatrix}$$

Unión 9. Ec 5.5

Elementos: 1 = L (pared cilíndrica); 2 = Apoyo simple  
 $\delta = 0, M = 0.$

$$\{ \Delta_{U9}^0 \} = - \{ \Delta_{L_{inv}} \} = \begin{bmatrix} 6.45607 \times 10^{-7} \text{ rad} \\ -7.15755 \times 10^{-6} \text{ m} \end{bmatrix}$$

$$H_L = -\delta_{L^0} / \delta_{L^H}$$

$$\{ F_{U9} \} = \begin{bmatrix} M_L \\ H_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0 \text{ kg-m/m} \\ 3.71146 \text{ kg/m} \end{bmatrix}$$

### 5.7 Fuerzas correctivas bajo efecto de materiales en el interior

Se seguirá el mismo procedimiento que en el caso de peso propio. Sólo la unión 1 se encuentra libre de la acción del material en el interior.

Unión 2. Ec 5.10

Elementos: 1 = B ( cubierta superior ); 2 = C ( anillo );  
3 = D ( pared cilíndrica )

$$\{ \Delta U_2^0 \} = \begin{bmatrix} 0.0 \text{ rad} \\ 0.0 \text{ m} \\ -0.000254 \text{ rad} \\ 0.0 \text{ m} \end{bmatrix}$$

$$\{ F_{U2} \} = \begin{bmatrix} M_c \\ H_c \\ M_D \\ H_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.000047845 \text{ kg-m/m} \\ 0.62047 \text{ kg/m} \\ 0.037574 \text{ kg-m/m} \\ -0.25902 \text{ kg/m} \end{bmatrix}$$

Unión 3. Ec 5.5

Elementos: 1 = D; 2 = E. Pared cilíndrica.

$$\{ \Delta U_3^0 \} = \begin{bmatrix} 0.000319879 \text{ rad} \\ -0.0000564 \text{ m} \end{bmatrix}$$

$$\{ F_{U3} \} = \begin{bmatrix} M_D \\ H_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.039476 \text{ kg-m/m} \\ 4.5884 \text{ kg/m} \end{bmatrix}$$

Unión 4. Ec 5.5

Elementos: 1 = E; 2 = F. Pared cilíndrica.

$$\{ \Delta U_4^0 \} = \begin{bmatrix} 0.000011978 \text{ rad} \\ -0.000047905 \text{ m} \end{bmatrix}$$



$$\{ F_{U4} \} = \begin{bmatrix} M_E \\ H_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.03537 \text{ kg-m/m} \\ 5.7174 \text{ kg/m} \end{bmatrix}$$

Unión 5. Ec 5.5

Elementos: 1 = F; 2 = G. Pared cilíndrica.

$$\{ \Delta_{U5}^{\circ} \} = \begin{bmatrix} 6.568 \times 10^{-6} \text{ rad} \\ -0.000032836 \text{ m} \end{bmatrix}$$

$$\{ F_{U5} \} = \begin{bmatrix} M_F \\ H_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.028204 \text{ kg-m/m} \\ 5.0242 \text{ kg/m} \end{bmatrix}$$

Unión 6. Ec 5.5

Elementos: 1 = G; 2 = H. Pared cilíndrica.

$$\{ \Delta_{U6}^{\circ} \} = \begin{bmatrix} 0.000047333 \text{ rad} \\ -0.00004089 \text{ m} \end{bmatrix}$$

$$\{ F_{U6} \} = \begin{bmatrix} M_G \\ H_G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.011084 \text{ kg-m/m} \\ 7.6947 \text{ kg/m} \end{bmatrix}$$

Unión 7. Ec 5.5

Elementos: 1 = H; 2 = I. Pared cilíndrica.

$$\{ \Delta_{U7}^{\circ} \} = \begin{bmatrix} 0.0 \text{ rad} \\ -0.00003025 \text{ m} \end{bmatrix}$$

$$\{ F_{U7} \} = \begin{bmatrix} M_H \\ H_H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.056083 \text{ kg-m/m} \\ 7.1265 \text{ kg/m} \end{bmatrix}$$

Unión 8. Ec 5.15

Elementos: 1 = I ( pared cilíndrica ); 2 = J ( anillo );  
3 = K ( tolva de descarga ); 4 = L ( falda del silo )

$$\{ \Delta_{U8}^0 \} = \begin{bmatrix} 0.0 \text{ rad} \\ -0.00021286 \text{ m} \\ 0.00022551 \text{ rad} \\ 0.00068617 \text{ m} \\ 0.0 \text{ rad} \\ 0.00001205 \text{ m} \end{bmatrix}$$

$$\{ F_{U8} \} = \begin{bmatrix} M_j \\ H_j \\ M_k \\ H_k \\ M_L \\ H_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13.4365 \text{ kg-m/m} \\ 794.5502 \text{ kg/m} \\ 22.1172 \text{ kg-m/m} \\ -832.5666 \text{ kg/m} \\ -5.5174 \text{ kg-m/m} \\ 50.9332 \text{ kg/m} \end{bmatrix}$$

Unión 9. Ec 5.5

Elementos: 1 = L (pared cilíndrica); 2 = Apoyo simple

$d = 0, M = 0.$

$$\{ \Delta_{U9}^0 \} = - \{ \Delta_{L \text{ inf}} \} = \begin{bmatrix} 0.0 \text{ rad} \\ -0.00022491 \text{ m} \end{bmatrix}$$

$$H_L = -\delta_L^0 / \delta_L^H$$

$$[ F_{U9} ] = \begin{bmatrix} M_L \\ H_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0 \text{ kg-m/m} \\ 116.62432 \text{ kg/m} \end{bmatrix}$$

## 5.8 Combinación de estados de carga

En la fig 5.7 se muestran las fuerzas correctivas de los dos estados de carga ( a y b ) y la suma de ambos ( c ). Es evidente que el caso más desfavorable es el que involucra el material en el interior, pero es obvio que este estado de carga no puede existir por sí solo, por lo que los elementos mecánicos de revisión o diseño se harán con la suma de las fuerzas correctivas de los dos estados de carga.

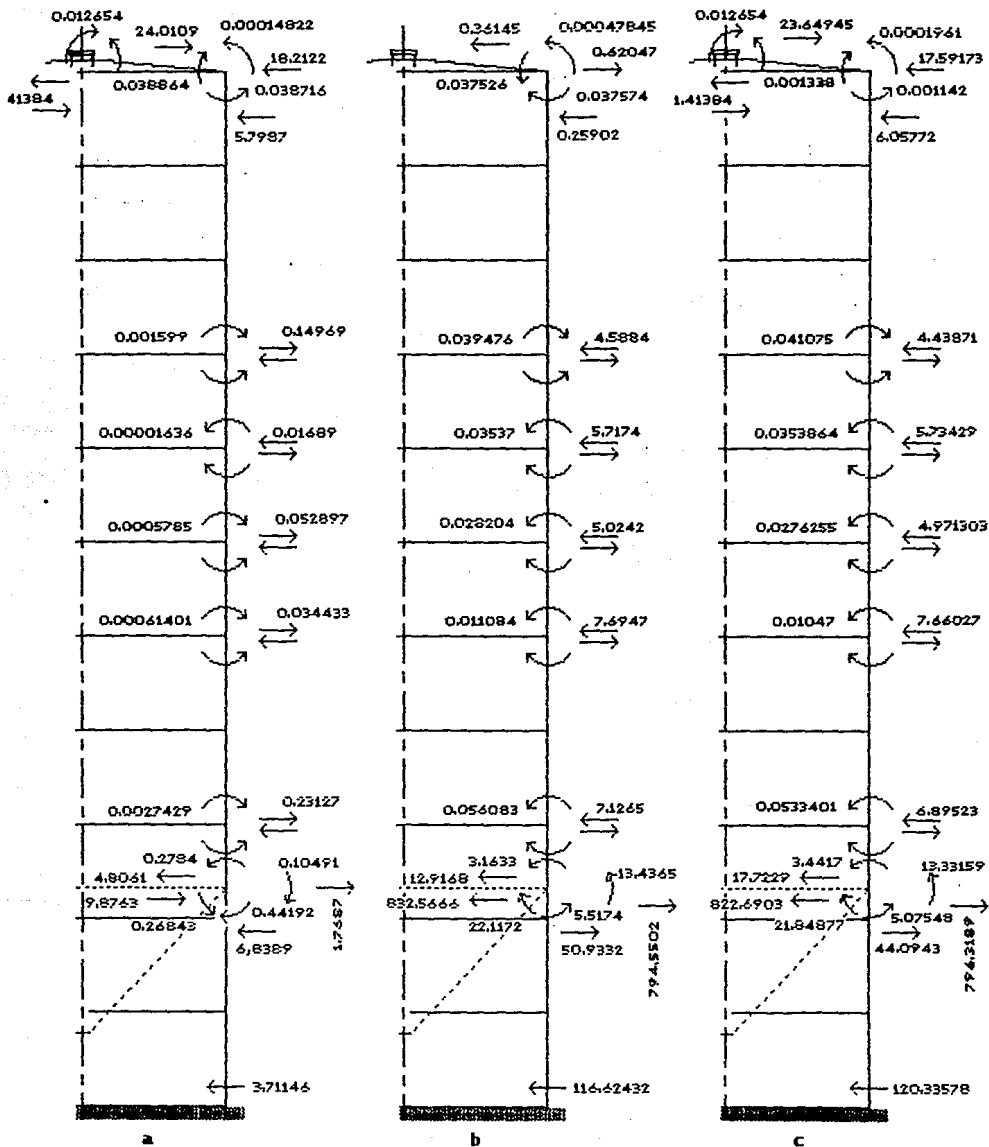


Fig 5.7

## 6. Elementos mecánicos para fines diseño

En el ejemplo seleccionado, se eligen los elementos mecánicos de la unión B, por ser la parte del silo en donde las presiones son mayores y se encuentran las fuerzas correctivas máximas.

En los elementos cilíndricos (elementos I, L), los elementos mecánicos por las fuerzas correctivas se obtienen con las ecuaciones para tubo largo del apéndice A. Las ecuaciones generales de elementos mecánicos son:

$$N_x = p_1 L \left( \xi - \frac{1}{2} - \frac{\xi^2}{2} \right) - p_2$$

$$\begin{aligned} N_\theta = & p_3 R + 2M_i k^2 R 2^{1/2} e^{-kx} \cos(kx + \pi/4) \\ & + 2H_i k R e^{-kx} \cos kx \\ & + 2M_s k^2 R 2^{1/2} e^{-k(L-x)} \cos(k[L-x] + \pi/4) \\ & + 2H_s k R e^{-k(L-x)} \cos k[L-x] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_x = & + 2^{1/2} M_i e^{-kx} \sin(kx + \pi/4) + \frac{H_i e^{-kx}}{k} \sin(kx) \\ & + 2^{1/2} M_s e^{-k(L-x)} \sin(k[L-x] + \pi/4) \\ & + \frac{H_s e^{-k(L-x)}}{k} \sin k[L-x] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_x = & 2k M_i e^{-kx} \sin kx + 2^{1/2} H_i e^{-kx} \cos(kx + \pi/4) \\ & + 2k M_s e^{-k(L-x)} \sin k[L-x] \\ & + 2^{1/2} H_s e^{-k(L-x)} \cos(k[L-x] + \pi/4) \end{aligned}$$

Los subíndices i se refieren al borde inferior, es decir, el borde de donde parte el origen de los ejes coordenados, y el subíndice s es indicación del borde superior.

Cuando únicamente aparece  $x$  en las funciones exponenciales estas se evalúan hasta el valor de la longitud de onda ( $\lambda$ ). Cuando aparece ( $L - x$ ) las funciones se empiezan a evaluar a partir de  $L - \lambda$ .

Al sustituir en las ecuaciones todas las constantes, donde  $p_1$  es la carga por peso propio por unidad de área,  $p_2$  es la carga en el borde superior del elemento y  $p_3$  es la carga lateral por el material en el interior del silo, se encuentran las ecuaciones para cada elemento.

Se hace notar que existen  $x$  y  $\xi = x/L$  en las ecuaciones de los elementos mecánicos.

En el elemento I:

$$N_x = 83.7839 \left( \xi - \frac{1}{2} - \frac{\xi^2}{2} \right) - 657.04$$

$$\begin{aligned} N_\theta &= 7114.17 + 2532.6549 e^{-8.075 X} \cos(8.075x + \pi/4) \\ &\quad - 1142.0371 e^{-8.075 X} \cos(8.075x) \\ &\quad + 39.251547 e^{-8.075(1.67-X)} \cos(8.075[1.67-x] + \pi/4) \\ &\quad + 444.31828 e^{-8.075(1.67-X)} \cos(8.075[1.67-x]) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_x &= 4.867299 e^{-8.075 X} \sin(8.075x + \pi/4) \\ &\quad - 2.1947864 e^{-8.075 X} \sin(8.075x) \\ &\quad + 0.07543429 e^{-8.075(1.67-X)} \sin(8.075[1.67-x] + \pi/4) \\ &\quad + 0.8538985 e^{-8.075(1.67-X)} \sin(8.075[1.67-x]) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_x &= 55.583455 e^{-8.075 X} \sin(8.075x) \\ &\quad - 25.063966 e^{-8.075 X} \cos(8.075x + \pi/4) \\ &\quad + 0.8614426 e^{-8.075(1.67-X)} \sin(8.075[1.67-x]) \\ &\quad + 9.7513278 e^{-8.075(1.67-X)} \cos(8.075[1.67-x] + \pi/4) \end{aligned}$$

En el elemento L:

$$N_x = 286.9724 \left( \xi - \frac{1}{2} - \frac{\xi^2}{2} \right) - 28370.92$$

$$\begin{aligned} N_\theta &= -7754.25716 e^{-8.075 X} \cos(8.075x) \\ &\quad - 3734.9094 e^{-8.075(5.72-X)} \cos(8.075[5.72-x] + \pi/4) \\ &\quad + 2841.37055 e^{-8.075(5.72-X)} \cos(8.075[5.72-x]) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_x &= -14.9022638 e^{-8.075 X} \sin(kx) \\ &\quad - 7.1778127 e^{-8.075(5.72-X)} \sin(8.075[5.72-x] + \pi/4) \\ &\quad + 5.4605944 e^{-8.075(5.72-X)} \sin(8.075[5.72-x]) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_x &= -170.180492 e^{-8.075 X} \cos(8.075x + \pi/4) \\ &\quad - 81.969 e^{-8.075(5.72-X)} \sin(8.075[5.72-x]) \\ &\quad + 62.358757 e^{-8.075(5.72-X)} \cos(8.075[5.72-x] + \pi/4) \end{aligned}$$

En la tolva de descarga sólo existen fuerzas en el borde superior y las ecuaciones de los elementos mecánicos son:

$$N_x = \frac{p_1 x}{\operatorname{sen} \alpha_0} \left[ 1 - \left( \frac{x_1}{x} \right)^2 \right] + \frac{p_2 x}{2} \left[ 1 - \left( \frac{x_1}{x} \right)^2 \right] \operatorname{ctg} \alpha_0 \\ + 2 M k \operatorname{ctg} \alpha_0 e^{-k(x_2-x)} \operatorname{sen}(k[x_2-x]) \\ + 2^{1/2} H \cos \alpha_0 e^{-k(x_2-x)} \cos(k[x_2-x] + \pi/4)$$

$$N_0 = \frac{p_1 x}{\operatorname{sen} \alpha_0} \cos^2 \alpha_0 + \frac{p_2 x}{\operatorname{sen} \alpha_0} \cos^3 \alpha_0 \\ + 2 M k^2 2^{1/2} x_m \operatorname{ctg} \alpha_0 e^{-k(x_2-x)} \cos(k[x_2-x] + \pi/4) \\ + 2 H k x_m \cos \alpha_0 e^{-k(x_2-x)} \cos(k[x_2-x])$$

$$M_x = 2^{1/2} M e^{-k(x_2-x)} \operatorname{sen}(k[x_2-x] + \pi/4) \\ + \frac{H}{k} e^{-k(x_2-x)} \operatorname{sen}(k[x_2-x])$$

$$Q_x = 2 M k e^{-k(x_2-x)} \operatorname{sen}(k[x_2-x]) \\ + 2^{1/2} H \operatorname{sen} \alpha_0 e^{-k(x_2-x)} \cos(k[x_2-x] + \pi/4)$$

En la tolva de descarga sólo existen fuerzas en el borde superior, en  $x = x_2$ .

Al sustituir las constantes,  $p_1$  que es el peso propio por unidad de área y  $p_2$  que es el peso del material en el interior del silo por  $m^2$ , los elementos mecánicos resultan ser:

$$N_x = 4125.02504 x \left[ 1 - \left( \frac{0.216}{x} \right)^2 \right] \\ + 561.03272 e^{-12.839(5.646-x)} \operatorname{sen}(k[x_2-x]) \\ - 822.6903 e^{-12.839(5.646-x)} \cos(12.839[5.646-x] + \pi/4)$$

$$N_0 = 4107.262522 x \\ + 29857.7736 e^{-12.839(5.646-x)} \cos(12.839[5.646-x] + \pi/4) \\ - 43782.2818 e^{-12.839(5.646-x)} \cos(12.839[5.646-x])$$

$$M_x = 30.898827 e^{-12.839(5.646-x)} \operatorname{sen}(12.839[5.646-x] + \pi/4) \\ - 64.07744373 e^{-12.839(5.646-x)} \operatorname{sen}(12.839[5.646-x])$$

$$Q_x = 561.03271 e^{-12.839(5.646-x)} \operatorname{sen}(12.839[5.646-x]) \\ - 822.6903 e^{-12.839(5.646-x)} \cos(12.839[5.646-x] + \pi/4)$$

En todas las ecuaciones en que aparece el término  $L-x$  ó

$x_2-x$  indica la acción de perturbaciones del borde alejado del origen de los ejes coordenados.

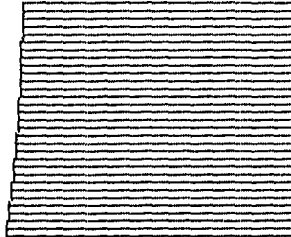
En las páginas siguientes se encuentran los diagramas de los elementos mecánicos de cada una de las secciones que integran la unión B. A partir de ellos se revisa la eficiencia del diseño de esa parte del silo.

El sentido positivo de las gráficas se encuentra del lado derecho para todos los elementos mecánicos. En los momentos no es precisamente positivo del lado derecho sino que los diagramas indican el lado de las fibras en compresión.



**Nx, Elemento i**  
**L = 1.67**

**657.84**

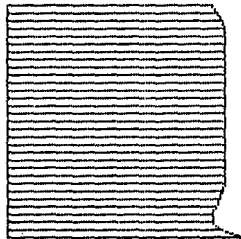


**698.93195**

**-698.93195, y = 0**

**No, Elemento i**  
**L = 1.67**

**7586.24331**



**7762.99814**

**7762.99814, y = 0**

Mx, Elemento i  
L = 1.67

.0533401

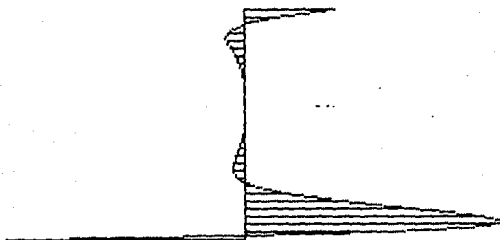


3.4417

3.4417, y = 0

Qx, Elemento i  
L = 1.67

6.89523001

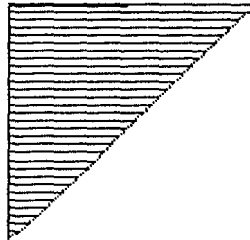


-17.7229

19.1775174, y = .12525

**Nx, Elemento k**  
**L = 5.43**

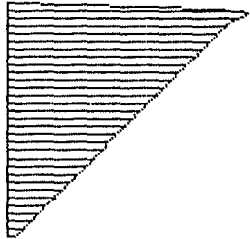
**22674.0742**



**23147.6823, y = 5.38475003**

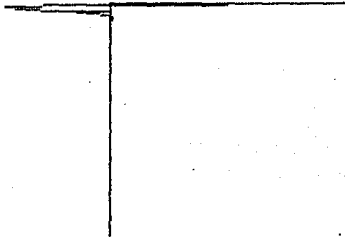
**No, Elemento k**  
**L = 5.43**

**519.60572**



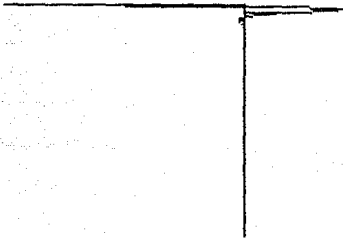
**23195.9041, y = 5.20375003**

**Mx, Elemento k**  
**L = 5.43**  
**21.84877**



**21.8487976, y = 5.64680004**

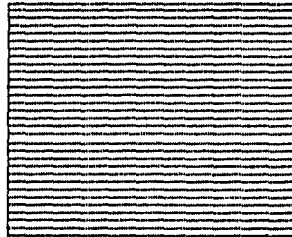
**Qx, Elemento k**  
**L = 5.43**  
**-581.72989**



**-581.730633, y = 5.43080004**

Nx, Elemento 1  
L = 5.72

28370.92

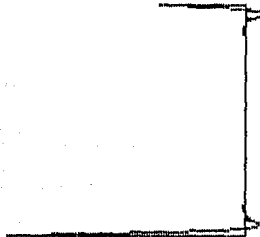


28514.4062

-28514.4062, y = 0

No, Elemento 1  
L = 5.72

200.390781

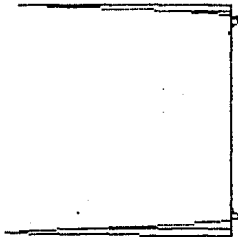


-7754.25716

-7754.25716, y = 0

Mx, Elemento 1  
L = 5.72

-5.07548

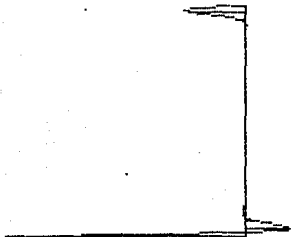


0

-4.80326567, y = .0953333333

Qx, Elemento 1  
L = 5.72

44.0943



-120.33578

-120.33578, y = 0

En el elemento I se revisa el nivel de esfuerzos en las cercanías de la unión B.

$$t = 0.00635 \text{ m}, M_{\max} = 3.4417 \text{ kg-m/m}, N_x = -698.93195 \text{ kg/m}$$
$$N_0 = 7762.99014 \text{ kg/m}, Q_x = 19.17752 \text{ kg/m}$$

$$\text{Módulo de sección } S = t^2/6 = 0.00635^2/6 = 6.7204 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

Esfuerzo longitudinal máximo.

$$\sigma_{x\max} = M_{x\max}/S + N_{x\max}/t$$
$$\sigma_{x\max} = 3.4417/6.7204 \times 10^{-6} + 698.93195/0.00635 =$$
$$\sigma_{x\max} = 622195.3 \text{ kg/m}^2 = 62.2 \text{ kg/cm}^2 \text{ en compresión.}$$

Esfuerzo tangencial máximo.

$$\sigma_{\theta\max} = N_{\theta\max}/t = 7762.99014/0.00635 = 1222518.13 \text{ kg/m}^2$$
$$\sigma_{\theta\max} = 122.25 \text{ kg/cm}^2 \text{ en tensión.}$$

Esfuerzo cortante máximo.

$$\sigma_{q\max} = Q_{x\max}/t = 19.17752/0.00635 = 3020.08 \text{ kg/m}^2$$
$$\sigma_{q\max} = 0.302 \text{ kg/cm}^2.$$

Los esfuerzos anteriores son 2.46%, 4.83% y 0.012% respectivamente del esfuerzo de fluencia  $\sigma_y = 2530 \text{ kg/cm}^2$ .

Los esfuerzos del anillo ( elemento J ) se revisan conforme a la ref 7.

$$A = 25 \text{ cm}^2 = 0.0025 \text{ m}^2, I = 1687 \text{ cm}^4 = 1.687 \times 10^{-5} \text{ m}^4,$$
$$S = 99.82 \text{ cm}^3 = 9.982 \times 10^{-5} \text{ m}^3, R = 3.959 \text{ m.}$$
$$M = 13.154 \text{ kg-m/m}, H = 796.3189 \text{ kg/m.}$$

$$\sigma_{\max} = R ( M/S + H/A ) =$$
$$\sigma_{\max} = 3.959 ( 13.154/9.982 \times 10^{-5} + 796.3189/0.0025 ) =$$
$$\sigma_{\max} = 1782756.541 \text{ kg/m}^2 = 178.3 \text{ kg/cm}^2 \text{ en tensión}$$
$$\sigma_{\max} = 0.0705 \sigma_y$$

Tolva de descarga.

$$t = 0.00342 \text{ m}, S = t^2/6 = 0.00342^2/6 = 1.9494 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$
$$M_{\text{max}} = 21.8487976 \text{ kg-m/m}, N_x = 23147.6823 \text{ kg/m},$$
$$N_0 = 23195.9041 \text{ kg/m}, Q_x = -581.730149 \text{ kg/m}$$

Esfuerzo longitudinal máximo. Se toma el caso extremo de los esfuerzos máximos, aunque estos no se desarrollen en el mismo punto si se encuentran muy próximos.

$$\sigma_{x\text{max}} = 21.8487976/1.9494 \times 10^{-6} + 23147.6823/0.00342 =$$
$$\sigma_{x\text{max}} = 17976288.4 \text{ kg/m}^2 = \mathbf{1797.6 \text{ kg/cm}^2} \text{ en tensión.}$$

Esfuerzo tangencial máximo.

$$\sigma_{\text{emax}} = 23195.9041/0.00342 = 6782428.1 \text{ kg/m}^2$$
$$\sigma_{\text{emax}} = \mathbf{678.24 \text{ kg/cm}^2} \text{ en tensión.}$$

Esfuerzo cortante máximo.

$$\sigma_{q\text{max}} = 581.730149/0.00342 = 170096.5 \text{ kg/m}^2$$
$$\sigma_{q\text{max}} = \mathbf{17.0 \text{ kg/cm}^2}.$$

Los esfuerzos anteriores son 71.1%, 26.81% y 0.672% respectivamente del esfuerzo de fluencia  $\sigma_y = 2530 \text{ kg/cm}^2$ .

Para el elemento L, faldón del silo, se tiene la situación de que está reforzado longitudinalmente por 17 columnas ( 6" x 15 lbs ), repartidas en la sección transversal del faldón a cada 1.475 m. Según el manual IMCA, un equivalente comercial tiene un momento de inercia de 1211 cm<sup>4</sup>.

$$t = 0.00635 \text{ m}, S = 6.7204 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$
$$N_{x\text{max}} = 28514.4062 \text{ kg/m}, N_{0\text{max}} = 7754.25715 \text{ kg/m},$$
$$M_{x\text{max}} = 4.80326567 \text{ kg-m/m}, Q_{x\text{max}} = 120.33578 \text{ kg/m}$$

Esfuerzo longitudinal máximo. Igual que en la tolva de descarga, se toman las fuerzas máximas, aunque éstas no se desarrollen en el mismo punto. Por la ref 2, se determina el



esfuerzo crítico propuesto por Shang para secciones cilíndricas atiesadas longitudinalmente.

$$\sigma_{cr} = \frac{k_1 k_2 \pi^2 E}{12(1-\mu^2)(b/t)^2}$$

donde:

b = distancia entre atiesadores, 1.475 m.

t = espesor de la sección cilíndrica, 0.635 cm.

r = radio de la sección, 3.99 m.

E = módulo de elasticidad,  $2.1 \times 10^4$  kg/cm<sup>2</sup>.

$\mu$  = relación de Poisson, 0.3.

$k_1 = 1.3 + 0.24b^2 / (rt) = 21.909$ .

I = inercia del atiesador, 1211 cm<sup>4</sup>.

$\gamma = 10.9 I / (bt^3) = 349.5$ .

$k_2 = 1 - 0.75 [ (500 - \gamma) / (k_1 \gamma) ]$  si  $\gamma < 500$

$k_2 = 1$  si  $\gamma \geq 500$

$k_2 = 0.98526$ .

Al sustituir las variables en la fórmula resulta:

$$\sigma_{cr} = 759.33 \text{ kg/cm}^2$$

El esfuerzo máximo actuante es:

$$\begin{aligned} \sigma_{max} &= 28514.4062 / 0.00635 + 4.80326567 / 6.7204 \times 10^{-6} = \\ \sigma_{max} &= 5205186.8 \text{ kg/m}^2 = 520.5 \text{ kg/cm}^2 \end{aligned}$$

El resultado es satisfactorio. Si no se contara con los atiesadores, el esfuerzo crítico estaría regido por el pandeo local dado por:

$$\sigma_{cr} = \frac{CEt}{r}$$

En esta expresión, C = 0.6, según Timoshenko, pero investigadores han encontrado que C puede llegar a valer hasta un mínimo de 0.05, dependiendo de la relación r/t para la que proponen muy diversas ecuaciones ( ref 2 ).

**Esfuerzo tangencial máximo.**

$$\sigma_{\text{max}} = 7754.25715/0.00635 = 1221142.9 \text{ kg/m}^2$$

$$\sigma_{\text{max}} = 122.1 \text{ kg/cm}^2 \text{ en compresión.}$$

**Esfuerzo cortante máximo.**

$$\sigma_{\text{qmax}} = 120.33578/0.00635 = 18950.5 \text{ kg/m}^2$$

$$\sigma_{\text{qmax}} = 1.895 \text{ kg/cm}^2 \text{ en compresión.}$$

Los esfuerzos tangencial y cortante son 4.83% y 0.075% respectivamente de  $\sigma_y$ .

En general, la elección de los espesores para cada elemento que interviene en la unión B es satisfactoria, si se considera que los esfuerzos máximos son de tensión y se desarrollan en la tolva, como resultado de soportar el material depositado en el silo.

Comentarios referentes al tipo de junta de placas que forman la tolva, se harán en la sección 7.

## 7. Principales problemas a evitar

Después de hacer una recopilación de los aspectos básicos para el análisis de silos de pared delgada, y haber llevado a cabo el análisis de fuerzas correctivas y revisado el nivel de esfuerzos en los elementos de una de sus uniones, se resaltan algunos de los problemas más importantes que se pueden presentar en el funcionamiento de este tipo de silo.

El objetivo de un silo es el almacenamiento de materiales a granel. Es el comportamiento de este material un factor muy importante, como se hizo saber al tratar sus efectos en el interior de un silo. Si el comportamiento es difícil de predecir al considerar un material ideal de propiedades bien definidas, es más difícil adaptarse a la realidad de la irregularidad del mismo, ya sea que por condiciones ambientales, y porque las presiones internas del material no siguen un patrón uniforme para la misma profundidad. Si a ésto se agrega carga y/o descarga excéntrica, las presiones en el silo se tornan complicadas de estimar y de representar para el análisis estructural del silo. Lo más práctico es evitar en lo posible, las cargas y descargas excéntricas.

Se deben evitar las concentraciones excesivas de esfuerzos. Estas concentraciones se deben en parte a las fuerzas correctivas modificando el régimen de membrana de los elementos de la unión.

No siempre las fuerzas correctivas en los bordes aumentan los esfuerzos. En el borde superior de la tolva de descarga del ejemplo, se nota un cambio brusco reductivo en las fuerzas tangenciales de tensión.

Una forma efectiva de evitar las concentraciones de esfuerzos por efecto de fuerzas correctivas, consiste en modificar las condiciones de conexión de elementos; tal es la situación del faldón del silo con la base de soporte, donde se restringe únicamente el desplazamiento horizontal.

En el ejemplo de las secciones 5 y 6, las secciones resultaron ser satisfactorias en cuanto al espesor necesario por sus elementos, dada la configuración general del silo. Casi se puede afirmar que una primera estimación de los espesores de los elementos se basa en esfuerzos de membrana

exclusivamente; después de analizarlos se proponen nuevos espesores o reforzar los elementos propuestos en un principio. Tal es el caso del faldón del silo, que desde un análisis preliminar con esfuerzos de membrana se sabe que se debe reforzar con columnas, para evitar el pandeo local de la lámina. Como se mencionó en su oportunidad, el esfuerzo crítico definido por:

$$\sigma_{cr} = \frac{C Et}{r}$$

Donde C puede tener un valor hasta de 0.05 dependiendo de la expresión que se utilice para su determinación, y de ser este el caso, entonces  $\sigma_{cr} = 167.1 \text{ kg/cm}^2$ , que es mucho menor que el esfuerzo actuante de  $520.5 \text{ kg/cm}^2$ . Es obvio que la elección de las columnas o atiesadores de 6" 15 libras/pie es acertada, al considerar un esfuerzo crítico de  $759.33 \text{ kg/cm}^2$ .

Se ha dicho que la elección de los espesores y de los atiesadores es correcto, pero no existe evidencia que justifique su elección como podemos ver en la memoria original del silo, donde el único cálculo es la separación de los tornillos que unen las placas que forman la tolva ( apéndice B ).

Por irónico que parezca, el silo falló por desgarramiento de los orificios de los tornillos ( fig 7.1 ).

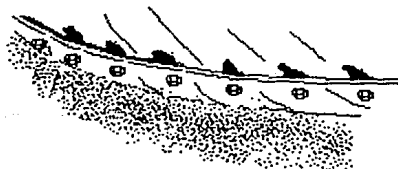


Fig 7.1

La separación entre tornillos es  $2'' = 5 \text{ cm}$  sin ningún problema aparente de ruptura de los mismos. Para determinar la falla se verifica la distancia mínima (  $e_{min}$  ) recomendada por el manual AISI ( ref 18 ). La fuerza tangencial en la tolva

es de 23195.9041 kg/m, asumiendo que es la fuerza de diseño correcta. A cada tornillo ( $\phi = 1/2''$ ) le corresponde una carga de 1160 kg. El manual AISI establece:

$$e_{\min} = \frac{P}{0.5 F_u t} \quad \text{si} \quad F_u / F_y \geq 1.15$$

$$e_{\min} = \frac{P}{0.45 F_u t} \quad \text{si} \quad F_u / F_y < 1.15$$

Pero no menor de 1.5 d.

d = diámetro del orificio.

d = diámetro del tornillo ( $\phi$ ) + 1/16", cuando el diámetro del tornillo es mayor o igual a 1/2".

d = diámetro del tornillo + 1/32", cuando el diámetro del tornillo es menor a 1/2".

P = carga resistida por cada tornillo.

$F_y$  = esfuerzo de fluencia del acero.

$F_y = 2530 \text{ kg/cm}^2$ .

$F_u$  = esfuerzo de resistencia última del acero.

$F_u = 4100 \text{ kg/cm}^2$ .

t = espesor del elemento más delgado para unir.

t = 0.342 cm.

Mediante la aplicación de la fórmula correspondiente:

$e_{\min} = 1.65 \text{ cm}$  muy cercano a 1.5 d = 1.67 cm

Estos valores se aproximan a la separación real que se muestra en la fig 7.2.

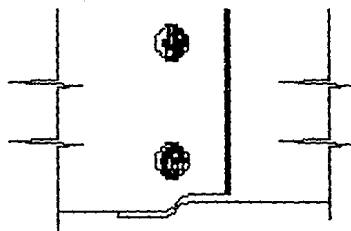
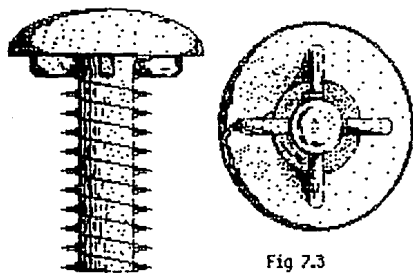


Fig 7.2

La falla puede atribuirse a la utilización de tornillos de

cabeza redonda, con una cruz resaltada por la parte de la rosca ( fig 7.3 ).



Estos tornillos son recomendados por fabricantes, ya que una sola persona puede colocar una línea completa de tornillos por un lado y después sujetarlos con tuercas por el otro, sin ayuda para impedir el giro de la cabeza del tornillo, la que se mantiene fija por la cruz que está en contacto con la lámina de la tolva. Al sujetar firmemente el tornillo, la cruz de este perfora en la lámina cuatro muescas ( fig 7.4.a ); en casos severos llega a ser una fractura. Ya debilitada la lámina se produce el desgarramiento ( fig 7.4.b ).

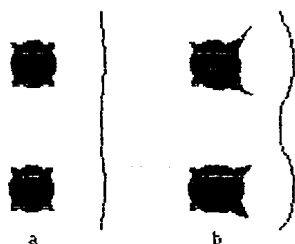


Fig 7.4

Hasta ahora se han descrito problemas que se ocasionan en el silo por efecto del material contenido en el silo, y se podrían enumerar más aún si existiera un modelo de uso práctico para analizar el comportamiento de silos por viento y sismos.

## 8. Comentarios finales

En el análisis estructural de silos de pared delgada, se ha visto como son afectados los silos por las cargas a las que pueden estar sometidos. Los tipos de cargas axisimétricas ( peso propio, contenido de materiales, efectos térmicos ) tienen solución práctica en base a métodos como el de las fuerzas. Su metodología es de fácil comprensión, al contar con soluciones de diversos cascarones de revolución por régimen de membrana y de flexión.

Para las cargas asimétricas, como viento y sismo, no se tiene un procedimiento de uso práctico, y los existentes plantean soluciones particulares, atendiendo a la configuración de la estructura que se trate. Ahora bien, procedimientos como el método de los elementos banda proporcionan soluciones exactas para cualquier tipo de carga, axisimétrica o asimétrica.

La elección del método apropiado se deja a consideración del ingeniero calculista, por la precisión de resultados y alcances que desee obtener en el análisis estructural.

Los métodos están planteados, pero de poco o nada sirven si las cargas actuantes no se determinan correctamente. El único estado de carga del que se puede estar casi completamente seguro es el de peso propio. Los efectos que produce el material en el interior han sido ampliamente estudiados, sin embargo, no existe un criterio único para su evaluación. Al respecto, es conveniente siempre utilizar los procedimientos que, a criterio del calculista, garanticen un margen de seguridad aceptable.

Para cargas asimétricas es recomendable que las investigaciones no sólo se enfoquen a la obtención de coeficientes de presión y factores para cortante en la base, sino también a la manipulación de esta información para conocer el comportamiento de silos. Está visto que esas cargas sólo pueden ser manejadas por soluciones particulares, según el problema que se trate. Soluciones como la obtenida por G. Worch ( ref 1, sección 2 ) para cascarones cilíndricos bajo la acción del viento serían ideales para estudiar el comportamiento de silos bajo esa acción, pero se ve que es la única solución la del cascarón cilíndrico, la que se encuentra de forma explícita.

En la acción sísmica, los estudios se encuentran reducidos a silos desplantados al nivel del terreno natural y tratar los silos elevados o soportados por faldones o columnas como tanques elevados. El tratamiento de tanques elevados proporciona una idea del comportamiento de los soportes del silo, pero no de las paredes laterales que encierran el material depositado. Se recomienda realizar más investigaciones para conocer más a fondo el fenómeno. A diferencia de la acción del viento, en sismos primero se debe estudiar el comportamiento de aceleraciones de la masa contenida en el silo y del mismo para así anticipar una interpretación de resultados, sea cual fuere el método de análisis a utilizar.

De los métodos de análisis socorridos a últimas fechas está el de elementos finitos y muchos trabajos hechos para estudiar silos son "cajas negras", es decir, entran datos y salen resultados sin saber que pasó en el proceso intermedio que da origen a los resultados, pero no por eso deja de ser un auxiliar recomendable.

A partir del análisis se sigue el diseño de los elementos estructurales para los que existen recomendaciones, según la ref 2.

Como se nota en la memoria original del silo del ejemplo, no se hace referencia alguna sobre el análisis del mismo y tampoco sobre especificaciones de diseño. El análisis en este trabajo es un poco laborioso, pero con bases firmes que permiten interpretar correctamente los resultados. Con estos resultados, la revisión sobre la distancia al borde de las placas que forman la tolva se hizo con base en normas estadounidenses por no existir referencia alguna en reglamentos mexicanos. Las expresiones no indican el tipo de estructura para la que son aplicables, sólo suponen una fuerza actuando en un eje longitudinal sobre el que se desarrollan los esfuerzos. Respecto a los elementos mecánicos en la tolva de descarga, existen esfuerzos longitudinales y tangenciales. Este hecho pudo haber provocado la falla del silo por fatiga del material estructural de la tolva.

Son necesarias especificaciones y normas de diseño de los elementos que conforman un silo, para no tener que adecuar normas convencionales para estructuras reticulares, ya que es muy complejo el comportamiento de elementos en los que actúan



fuerzas de membrana longitudinales, tangenciales, cortantes longitudinales, momentos longitudinales y tangenciales en elementos orientados de forma ortogonal.

Se puede hacer muy extenso el tema de silos, porque no todos son de pared delgada y no todos son de sección transversal circular. Más extenso resultaría si se contase con procedimientos para análisis sísmico y edílico para resaltar los puntos relevantes referentes a su análisis.

En este trabajo se ha pretendido mostrar lo que se ha hecho y lo que falta por hacer en el análisis de silos de pared delgada.

## 9. Referencias

1. Baker, E. H., Kovalevsky, L. y Rish, F. L., "Structural Analysis of Shells". Robert E. Krieger Publishing Co. Nueva York, 1981.

2. Gaylord, E. H. y Gaylord, CH., "Design of Steel Bins for Storage of Bulk Solids". Prentice Hall, Inc. Nueva Jersey, 1984.

3. Reimbert, M. L. y Reimbert, A. M., "Silos. Theory and Practice". Trans Tech Publications, Cloustral, Alemania, 1976.

4. ACI 313-77, "Recommended Practice for Design and Construction of Concrete Bins, Silos and Bunkers for Storing Granular Materials (ACI 313-77) and Commentary". American Concrete Institute, Box 19150, Redford Station, Detroit, Michigan 48219.

5. Ooi, J. Y., Pham, L. y Rotter, J. M., "Systematic and Random Features of Measured Pressures on Full-Scale Silo-Walls". Informe R-590. Universidad de Sidney, Australia, febrero 1989.

6. Cedeño, R.: "Análisis por Viento de Silos de Lámina Delgada para Almacenamiento de Granos". Tesis de Maestría, Sección de Estructuras, DEPEI-UNAM, 1983.

7. Belluzi, Odone: "Scienza delle Costruzioni", Volumen 3, Nicola Zanichelli, Bologna, 1951.

8. "Transactions of the American Society of Civil Engineers", Volumen 126, part II, 1961, New York.

9. Ravenet, Juan: "Silos: Teoría, Investigación, Construcción". Editores Técnicos Asociados, S. A., Maignón, 26, Barcelona 12, España, 1977.

10. Standards Association of Australia: "Minimum Design Loads on Structures". Part 2: Wind Loads, Standards, Australia. North Sydney, NSW, 1989.

11. Sukhvarsh, Jerath y Boresi, Arthur P., "Stress Analysis of Bins by Shells Bending Theory". Structural Division, ASCE, junio 1979.

12. Jenike and Johanson Inc., "Analysis of Hopper Problems at Industrias Resistol", octubre 1984.

13. Normas Técnicas Complementarias del Reglamento del Distrito Federal, 1987.

14. Rodríguez Cuevas, N., "Fluid-Structure Interaction" en "Civil Engineering Practice". Editado por P. N. Cheremisinoff, N. P. Cheremisinoff y S. L. Cheng, Technomic Publishing Co., 1988.

15. Rotter, J. M. y Hull, T. S., "Wall Loads in Squat Steel Silos During Earthquakes". Engineering Structures, Volumen 2, julio 1989.

16. Salazar Daré, Leopoldo, "Acción sísmica en silos de pared delgada". Trabajo de investigación ( DEPFI ), mayo de 1989.

17. Shibata, Koichi, "Study on the Vibration Characteristics os Steel Silos". Reporte de investigación, mayo de 1982.

18. AISI, "Cold-formed Steel Design Manual". American Iron and Steel Institute, 1983 Edition, 1000 16th Street NW, Washington, D. C., 20036.

Desplazamientos y elementos mecánicos provocados por perturbaciones de borde en conos truncados y cilindros.

En la referencia 1, de la cual provienen las soluciones secundarias por perturbación de borde, se establece la convención de sentido en los desplazamientos como positivo cuando en los desplazamientos lineales ( $\Delta r$ ) se aleja del eje de revolución del cascarón y en los giros cuando estos son en sentido de las manecillas del reloj, visto en un corte longitudinal del lado derecho del cascarón.

Para la utilización de las fórmulas de los elementos mecánicos y desplazamientos considérese el sentido mostrado en la figura y aplíquese la **magnitud** de la perturbación correspondiente en la fórmula deseada.

En las soluciones exactas de conos truncados y cilindros el sentido mostrado se tomaron directamente de la referencia 1 dada la complejidad de las expresiones  $F_i$  y  $F_i(\xi)$  ( en el final del apéndice ) para establecer el sentido de elementos mecánicos y desplazamientos.

En la sección 3 se hace referencia de considerar positivos los cortantes en los bordes que produzcan desplazamientos lineales positivos y los momentos que produzcan tensión en la cara interna del cascarón que se trate. Debe cuidarse mucho esta convención de signos porque, por ejemplo, un **momento positivo** bajo esta convención, produce **giro negativo** en un **borde inferior**. Esta convención es la que se utiliza en la solución secundaria de cilindros ( tubos largos ) y conos truncados en los que la longitud de onda no va de un extremo a otro ( sección 3 ).

Más que establecer una convención de **signos** es establecer una convención de **sentidos**.

En las gráficas se encuentran repartidas las referencias de las variables que intervienen en el estudio de cada tipo de cascarón.

## Cascarón cilíndrico. Soluciones exactas

Las soluciones exactas obtenidas por E. Hampe son válidas tanto para cilindros cortos y largos.

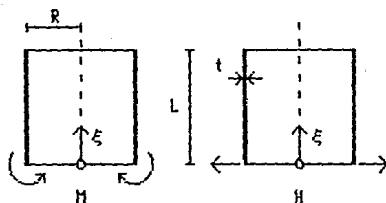


Fig A.1

Momento en el borde inferior

$$N_{\theta} = M \frac{2k^2 R}{F_1} \left[ -\frac{F_2}{F_1} F_7(\xi) + \frac{F_3}{F_1} F_{10}(\xi) - F_8(\xi) \right]$$

$$M_x = M \left[ \frac{F_2}{F_1} F_8(\xi) - \frac{F_3}{F_1} F_9(\xi) - F_7(\xi) \right]$$

$$Q_x = -kM \left[ \frac{F_2}{F_1} F_{10}(\xi) - \frac{2F_3}{F_1} F_8(\xi) + F_8(\xi) \right]$$

$$\Delta r = \frac{M}{2Dk^2} \left[ -\frac{F_2}{F_1} F_7(\xi) + \frac{F_3}{F_1} F_{10}(\xi) + F_8(\xi) \right]$$

$$\beta = \frac{M}{2Dk} \left[ \frac{F_2}{F_1} F_9(\xi) + \frac{2F_3}{F_1} F_7(\xi) - F_{10}(\xi) \right]$$

Cortante en el borde inferior

$$N_{\theta} = H \frac{2k R}{F_1} \left[ \frac{F_4}{F_1} F_7(\xi) - \frac{F_5}{F_1} F_{15}(\xi) - \frac{F_6}{F_1} F_{16}(\xi) \right]$$

$$M_x = \frac{H}{k} \left[ \frac{F_4}{F_1} F_8(\xi) - \frac{F_5}{F_1} F_{16}(\xi) + \frac{F_6}{F_1} F_{15}(\xi) \right]$$

$$Q_x = H \left[ \frac{F_4}{F_1} F_{10}(\xi) + \frac{F_5}{F_1} F_{13}(\xi) - \frac{F_6}{F_1} F_{14}(\xi) \right]$$

$$\Delta r = \frac{H}{2 Dk^3} \left[ \frac{F_4}{F_1} F_7(\xi) - \frac{F_5}{F_1} F_{15}(\xi) - \frac{F_6}{F_1} F_{16}(\xi) \right]$$

$$\beta = \frac{-H}{2 Dk^2} \left[ \frac{F_4}{F_1} F_9(\xi) + \frac{F_5}{F_1} F_{14}(\xi) + \frac{F_6}{F_1} F_{13}(\xi) \right]$$

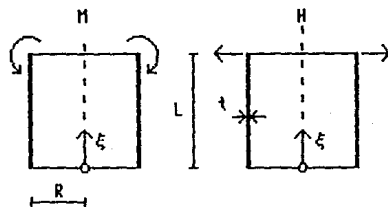


Fig A.2

Momento en el borde superior

$$N_0 = M \, 2k^2 R \left[ - \frac{2F_8}{F_1} F_7(\xi) + \frac{F_{10}}{F_1} F_{10}(\xi) \right]$$

$$M_x = M \left[ \frac{2F_8}{F_1} F_8(\xi) - \frac{F_{10}}{F_1} F_9(\xi) \right]$$

$$Q_x = - kM \left[ \frac{2F_8}{F_1} F_{10}(\xi) - \frac{2F_{10}}{F_1} F_8(\xi) \right]$$

$$\Delta r = \frac{M}{2Dk^2} \left[ - \frac{2F_8}{F_1} F_7(\xi) + \frac{F_{10}}{F_1} F_{10}(\xi) \right]$$

$$\beta = \frac{M}{2Dk} \left[ \frac{2F_8}{F_1} F_9(\xi) + \frac{2F_{10}}{F_1} F_7(\xi) \right]$$

Cortante en el borde superior

$$N_{\theta} = H \ 2k \ R \left[ \frac{-F_9 \ F_7(\xi) + F_8 \ F_{10}(\xi)}{F_1} \right]$$

$$M_x = \frac{H}{k} \left[ \frac{F_9 \ F_8(\xi) - F_8 \ F_9(\xi)}{F_1} \right]$$

$$Q_x = -H \left[ \frac{F_9 \ F_{10}(\xi) - 2F_8 \ F_8(\xi)}{F_1} \right]$$

$$\Delta r = \frac{H}{2 \ Dk^3} \left[ \frac{-F_9 \ F_7(\xi) + F_8 \ F_{10}(\xi)}{F_1} \right]$$

$$\beta = \frac{H}{2 \ Dk^2} \left[ \frac{F_9 \ F_9(\xi) + 2F_8 \ F_7(\xi)}{F_1} \right]$$

En estas expresiones se tiene:

$$k = [ 3(1-\mu^2) ]^{1/4} / (Rt)^{1/2} \quad \text{y} \quad \xi = x/L$$

Los factores  $F_i$  y  $F_i(\xi)$  se encuentran al final del apéndice.

Deformaciones en los bordes para distintas perturbaciones en los mismos mediante expresiones simplificadas ( fig A.3 ).

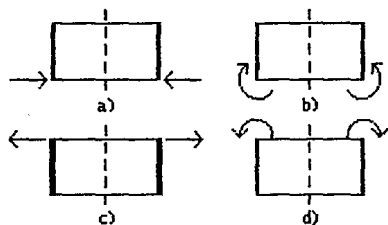


Fig A.3

Deformaciones

	$\Delta r$ inf	$\beta$ inf	$\Delta r$ sup	$\beta$ sup
Cortante inferior (a)	$\frac{-H}{2Dk^3} \frac{F_4}{F_1}$	$\frac{H}{2Dk^2} \frac{F_2}{F_1}$	$\frac{H}{2Dk^3} \frac{F_9}{F_1}$	$\frac{H}{Dk^2} \frac{F_8}{F_1}$
Momento inferior (b)	$\frac{M}{2Dk^2} \frac{F_2}{F_1}$	$\frac{-M}{Dk} \frac{F_3}{F_1}$	$\frac{-M}{Dk^2} \frac{F_8}{F_1}$	$\frac{-M}{Dk} \frac{F_{10}}{F_1}$
Cortante superior (c)	$\frac{-H}{2Dk^3} \frac{F_9}{F_1}$	$\frac{H}{Dk^2} \frac{F_8}{F_1}$	$\frac{H}{2Dk^3} \frac{F_4}{F_1}$	$\frac{H}{2Dk^2} \frac{F_2}{F_1}$
Momento superior (d)	$\frac{-M}{Dk^2} \frac{F_8}{F_1}$	$\frac{M}{Dk} \frac{F_{10}}{F_1}$	$\frac{M}{2Dk^2} \frac{F_2}{F_1}$	$\frac{M}{Dk} \frac{F_3}{F_1}$



Cascarón cilíndrico. Solución de tubo largo

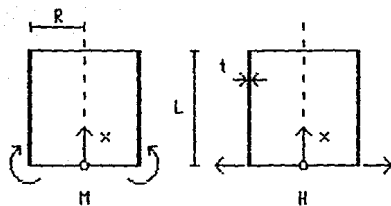


Fig A.4

Momentos en el borde inferior

$$N_x = 0$$

$$N_\theta = 2 M 2^{1/2} R k^2 e^{-kx} \cos(kx + \pi/4)$$

$$M_x = 2^{1/2} M e^{-kx} \sin(kx + \pi/4)$$

$$Q_x = 2 M k e^{-kx} \operatorname{sen} kx$$

$$\beta = \frac{-M e^{-kx} \operatorname{cos} kx}{Dk}$$

$$\Delta r = \frac{M e^{-kx} \operatorname{cos}(kx + \pi/4)}{2^{1/2} Dk^2}$$

En  $x = 0$  y  $M = 1$

$$\beta = \frac{-M}{Dk}$$

$$\Delta r = \frac{M}{2 Dk^2}$$

Cortante en el borde inferior

$$N_x = 0$$

$$N_\theta = 2H R k e^{-kx} \operatorname{cos} kx$$

$$M_x = \frac{H e^{-kx} \operatorname{sen} kx}{k}$$

$$Q_x = 2^{1/2} H e^{-kx} \cos(kx + \pi/4)$$

$$\beta = \frac{-H e^{-kx} \operatorname{sen}(kx + \pi/4)}{2^{1/2} Dk^2}$$

$$\Delta r = \frac{H}{2 Dk^3} e^{-kx} \cos kx$$

En  $x = 0$  y  $H = 1$

$$\beta = \frac{-H}{2 Dk^2}$$

$$\Delta r = \frac{H}{2 Dk^3}$$

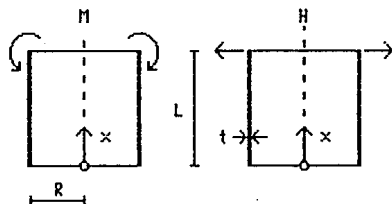


Fig A.5

Momentos en el borde superior

$$N_x = 0$$

$$N_\theta = 2 M 2^{1/2} R k^2 e^{-k[L-x]} \cos(k[L-x] + \pi/4)$$

$$M_x = 2^{1/2} M e^{-k[L-x]} \operatorname{sen}(k[L-x] + \pi/4)$$

$$Q_x = 2 M k e^{-k[L-x]} \operatorname{sen}k[L-x]$$

$$\beta = \frac{M e^{-k[L-x]} \operatorname{cos}k[L-x]}{Dk}$$

$$\Delta r = \frac{M}{2^{1/2} Dk^2} e^{-k(L-x)} \cos(k[L-x] + \pi/4)$$

$$\text{En } x = L \text{ y } M = 1$$

$$\beta = \frac{M}{Dk} \qquad \Delta r = \frac{M}{2 Dk^2}$$

Cortante en el borde superior

$$N_x = 0$$

$$N_e = 2H R k e^{-k(L-x)} \cos k[L-x]$$

$$M_x = \frac{H}{k} e^{-k(L-x)} \text{sen } k[L-x]$$

$$Q_x = 2^{1/2} H e^{-k(L-x)} \cos(k[L-x] + \pi/4)$$

$$\beta = \frac{H}{2^{1/2} Dk^2} e^{-k(L-x)} \text{sen}(k[L-x] + \pi/4)$$

$$\Delta r = \frac{H}{2 Dk^3} e^{-k(L-x)} \cos k[L-x]$$

$$\text{En } x = L \text{ y } H = 1$$

$$\beta = \frac{H}{2 Dk^2} \qquad \Delta r = \frac{H}{2 Dk^3}$$

Como truncado con perturbaciones en el radio menor

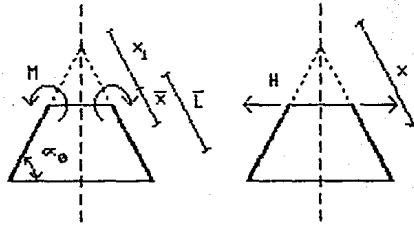


Fig A.6

Momentos

$$N_x = M \frac{2k \cot \alpha_0}{F_1} [ \frac{F_4}{F_1} F_{15}(\xi) + \frac{F_5}{F_1} F_{16}(\xi) - \frac{F_3}{F_1} F_8(\xi) ]$$

$$N_\theta = M \frac{2k^2 x_m \cot \alpha_0}{F_1} [ \frac{F_4}{F_1} F_{14}(\xi) + \frac{F_5}{F_1} F_{13}(\xi) - \frac{F_3}{F_1} F_{10}(\xi) ]$$

$$M_x = M [ \frac{F_4}{F_1} F_{13}(\xi) - \frac{F_5}{F_1} F_{14}(\xi) + \frac{F_3}{F_1} F_9(\xi) ]$$

$$Q_x = M \frac{2k}{F_1} [ \frac{F_4}{F_1} F_{15}(\xi) + \frac{F_5}{F_1} F_{16}(\xi) - \frac{F_3}{F_1} F_8(\xi) ]$$

$$\Delta r = \frac{M \operatorname{sen} \alpha_0}{2 Dk^2} [ \frac{F_4}{F_1} F_{14}(\xi) + \frac{F_5}{F_1} F_{13}(\xi) - \frac{F_3}{F_1} F_{10}(\xi) ]$$

$$\beta = -\frac{M}{Dk} [ \frac{F_4}{F_1} F_{16}(\xi) - \frac{F_5}{F_1} F_{15}(\xi) - \frac{F_3}{F_1} F_7(\xi) ]$$

Cortantes

$$N_x = -H \cos \alpha_0 [ F_7(\xi) - \frac{F_4}{F_1} F_{10}(\xi) - \frac{F_2}{F_1} F_6(\xi) ]$$

$$N_\theta = H x_m k \cos \alpha_0 [ F_9(\xi) + \frac{2F_4}{F_1} F_7(\xi) - \frac{F_2}{F_1} F_{10}(\xi) ]$$

$$M_x = \frac{H \operatorname{sen} \alpha_0}{2k} \left[ F_{10}(\xi) - \frac{2F_4}{F_1} F_8(\xi) + \frac{F_2}{F_1} F_9(\xi) \right]$$

$$Q_x = -H \operatorname{sen} \alpha_0 \left[ F_7(\xi) - \frac{F_4}{F_1} F_{10}(\xi) + \frac{F_2}{F_1} F_8(\xi) \right]$$

$$\Delta r = \frac{H \operatorname{sen}^2 \alpha_0}{4 Dk^4} \left[ F_9(\xi) + \frac{2F_4}{F_1} F_7(\xi) - \frac{F_2}{F_1} F_{10}(\xi) \right]$$

$$\beta = \frac{H \operatorname{sen} \alpha_0}{2 Dk^2} \left[ -F_8(\xi) + \frac{F_4}{F_1} F_9(\xi) + \frac{F_2}{F_1} F_7(\xi) \right]$$

Cono truncado con perturbaciones en el radio mayor

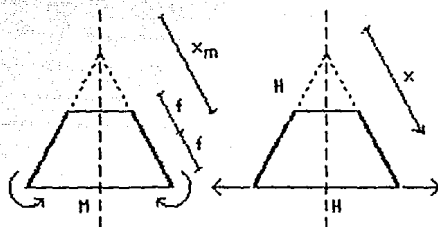


Fig A.7

Momentos

$$N_x = M \frac{2k \cot \alpha_0}{F_1} \left[ \frac{F_8}{F_1} F_{10}(\xi) - \frac{F_{10}}{F_1} F_8(\xi) \right]$$

$$N_\theta = M \frac{2k^2 x_m \cot \alpha_0}{F_1} \left[ \frac{2F_8}{F_1} F_7(\xi) - \frac{F_{10}}{F_1} F_{10}(\xi) \right]$$

$$M_x = -M \left[ \frac{2F_8}{F_1} F_8(\xi) - \frac{F_{10}}{F_1} F_9(\xi) \right]$$

$$Q_x = M \frac{2k}{F_1} \left[ \frac{F_8}{F_1} F_{10}(\xi) - \frac{F_{10}}{F_1} F_8(\xi) \right]$$

$$\Delta r = \frac{M \operatorname{sen} \alpha_0}{2 Dk^2} \left[ \frac{2F_8}{F_1} F_7(\xi) - \frac{F_{10}}{F_1} F_{10}(\xi) \right]$$

$$\beta = \frac{M}{Dk} \left[ \frac{F_8}{F_1} F_7(\xi) + \frac{F_{10}}{F_1} F_7(\xi) \right]$$

Cortantes

$$N_x = H \cos \alpha_0 \left[ -\frac{F_7}{F_1} F_{10}(\xi) + \frac{2F_8}{F_1} F_8(\xi) \right]$$

$$N_\theta = 2H x_m k \cos \alpha_0 \left[ -\frac{F_7}{F_1} F_7(\xi) + \frac{F_8}{F_1} F_{10}(\xi) \right]$$

$$M_x = \frac{H \operatorname{sen} \alpha_0}{k} \left[ \frac{F_7}{F_1} F_8(\xi) - \frac{F_8}{F_1} F_7(\xi) \right]$$

$$Q_x = H \operatorname{sen} \alpha_0 \left[ -\frac{F_7}{F_1} F_{10}(\xi) + \frac{2F_8}{F_1} F_8(\xi) \right]$$

$$\Delta r = \frac{H \operatorname{sen}^2 \alpha_0}{2 Dk^3} \left[ -\frac{F_7}{F_1} F_7(\xi) + \frac{F_8}{F_1} F_{10}(\xi) \right]$$

$$\beta = -\frac{H \operatorname{sen} \alpha_0}{2 Dk^2} \left[ \frac{F_7}{F_1} F_7(\xi) + \frac{2F_8}{F_1} F_7(\xi) \right]$$

En las expresiones anteriores se tiene que:

$$k = [3(1-\mu^2)]^{1/4} / (t x_m \cot \alpha)^{1/2} \quad \text{y} \quad D = Et^3/[12(1-\mu^2)]$$

Deformaciones en los bordes para distintas perturbaciones en los mismos mediante expresiones simplificadas ( fig A.8 ).

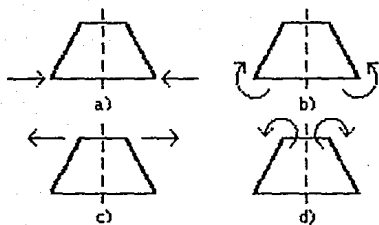


Fig A.8

Deformaciones

	$\Delta r$ inf	$\beta$ inf	$\Delta r$ sup	$\beta$ sup
Cortante inferior (a)	$\frac{-H \operatorname{sen}^2 \alpha_0 F_4}{20k^3 F_1}$	$\frac{H \operatorname{sen} \alpha_0 F_2}{20k^2 F_1}$	$\frac{H \operatorname{sen}^2 \alpha_0 F_9}{20k^3 F_1}$	$\frac{H \operatorname{sen} \alpha_0 F_8}{0k^2 F_1}$
Momento inferior (b)	$\frac{M \operatorname{sen} \alpha_0 F_2}{20k^2 F_1}$	$\frac{-M F_3}{0k F_1}$	$\frac{-M \operatorname{sen} \alpha_0 F_8}{0k^2 F_1}$	$\frac{-M F_{10}}{0k F_1}$
Cortante superior (c)	$\frac{-H \operatorname{sen}^2 \alpha_0 F_9}{20k^3 F_1}$	$\frac{H \operatorname{sen} \alpha_0 F_8}{0k^2 F_1}$	$\frac{H \operatorname{sen}^2 \alpha_0 F_4}{20k^3 F_1}$	$\frac{H \operatorname{sen} \alpha_0 F_2}{20k^2 F_1}$
Momento superior (d)	$\frac{-M \operatorname{sen} \alpha_0 F_8}{0k^2 F_1}$	$\frac{M F_{10}}{0k F_1}$	$\frac{M \operatorname{sen} \alpha_0 F_2}{20k^2 F_1}$	$\frac{M F_3}{0k F_1}$

Cono truncado. Solución de cascarón largo

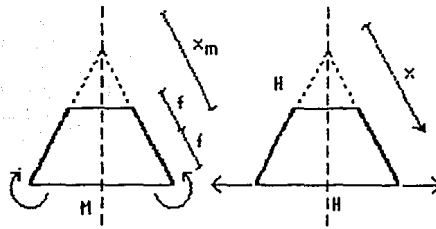


Fig A.9

Momentos en el borde inferior

$$N_x \approx 2 M k \operatorname{ctg} \alpha_0 e^{-k(x_2-x)} \operatorname{sen} k[x_2-x]$$

$$N_\theta \approx 2 M \frac{2^{1/2}}{k^2} x_m \operatorname{ctg} \alpha_0 e^{-k(x_2-x)} \cos(k[x_2-x] + \pi/4)$$

$$M_x \approx 2^{1/2} M e^{-k(x_2-x)} \operatorname{sen}(k[x_2-x] + \pi/4)$$

$$Q_x \approx 2 M k e^{-k(x_2-x)} \operatorname{sen} k[x_2-x]$$

$$\beta \approx \frac{-M e^{-k(x_2-x)} \cos k[x_2-x]}{Dk}$$

$$\Delta r \approx \frac{M \operatorname{sen} \alpha_0}{2 Dk^2} e^{-k(x_2-x)} \cos(k[x_2-x] + \pi/4)$$

En  $x = x_2 \quad M = 1$

$$\beta \approx \frac{-M}{Dk}$$

$$\Delta r \approx \frac{M \operatorname{sen} \alpha_0}{2 Dk^2}$$

Cortante en el borde inferior

$$N_x \approx 2^{1/2} H \cos \alpha_0 e^{-k(x_2-x)} \cos(k[x_2-x] + \pi/4)$$

$$N_\theta \approx 2H x_m \cos \alpha_0 k e^{-k(x_2-x)} \cos k[x_2-x]$$



$$M_x = \frac{H e^{-k(x_2-x)} \operatorname{sen} k[x_2-x]}{k}$$

$$Q_x = 2^{1/2} H \operatorname{sen} \alpha_0 e^{-k(x_2-x)} \cos(k[x_2-x] + \pi/4)$$

$$\beta = \frac{-H \operatorname{sen} \alpha_0}{2^{1/2} Dk^2} e^{-k(x_2-x)} \operatorname{sen}(k[x_2-x] + \pi/4)$$

$$\Delta r = \frac{H \operatorname{sen}^2 \alpha_0}{2 Dk^3} e^{-k(x_2-x)} \cos k[x_2-x]$$

En  $x = x_2$  y  $H = 1$ .

$$\beta = \frac{-H \operatorname{sen} \alpha_0}{2 Dk^2}$$

$$\Delta r = \frac{H \operatorname{sen}^2 \alpha_0}{2 Dk^3}$$

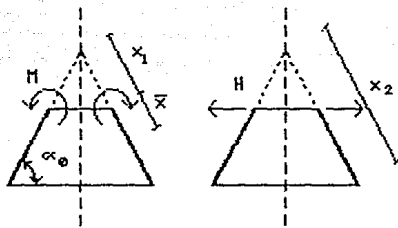


Fig A.10

Momentos en el borde superior

$$N_x = 2 M k \operatorname{ctg} \alpha_0 e^{-k(x-x_1)} \operatorname{sen} k[x-x_1]$$

$$N_\theta = 2 M 2^{1/2} k^2 x_m \operatorname{ctg} \alpha_0 e^{-k(x-x_1)} \cos(k[x-x_1] + \pi/4)$$

$$M_x = 2^{1/2} M e^{-k(x-x_1)} \operatorname{sen}(k[x-x_1] + \pi/4)$$

$$Q_x = 2 M k e^{-k(x-x_1)} \operatorname{sen} k[x-x_1]$$

$$\beta = \frac{M e^{-k(x-x_1)} \cos k[x-x_1]}{Dk}$$

$$\Delta r = \frac{M \operatorname{sen} \alpha_0}{2 D k^2} e^{-k(x-x_1)} \cos(k[x-x_1] + \pi/4)$$

En  $x = x_1$  y  $M = 1$

$$\beta = \frac{M}{Dk} \quad \Delta r = \frac{M \operatorname{sen} \alpha_0}{2 D k^2}$$

Cortante en el borde superior

$$N_x = 2^{1/2} H \cos \alpha_0 e^{-k(x-x_1)} \cos(k[x-x_1] + \pi/4)$$

$$N_0 = 2H x_m \cos \alpha_0 k e^{-k(x-x_1)} \cos k[x-x_1]$$

$$M_x = \frac{H e^{-k(x-x_1)} \operatorname{sen} k[x-x_1]}{k}$$

$$Q_x = 2^{1/2} H \operatorname{sen} \alpha_0 e^{-k(x-x_1)} \cos(k[x-x_1] + \pi/4)$$

$$\beta = \frac{H \operatorname{sen} \alpha_0}{2^{1/2} D k^2} e^{-k(x-x_1)} \operatorname{sen}(k[x-x_1] + \pi/4)$$

$$\Delta r = \frac{H \operatorname{sen}^2 \alpha_0}{2 D k^3} e^{-k(x-x_1)} \cos k[x-x_1]$$

En  $x = x_1$  y  $H = 1$

$$\beta = \frac{H \operatorname{sen} \alpha_0}{2 D k^2} \quad \Delta r = \frac{H \operatorname{sen}^2 \alpha_0}{2 D k^3}$$

Para obtener la solución de cono largo invertido únicamente cambia de signo el valor del giro ( $\beta$ ). Literalmente es invertir la gráfica del cono, el eje de referencia siempre es el vértice del cono completo y las fuerzas se manifiesta igual, momentos positivos que producen tensiones en el interior y cortantes positivos que producen desplazamientos positivos.

## Deformaciones unitarias por perturbación de borde en anillos

En los anillos se presentan los casos de momento radial uniforme y/o fuerza radial uniforme actuante en el plano del anillo ( fig A.11, ref 7 ).

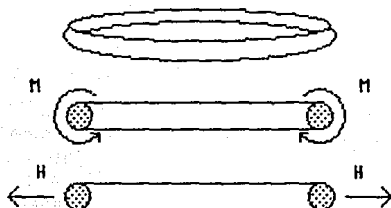


Figura A.11

$$M = 1 \quad \beta = \frac{R^2}{EI} \quad H = 1 \quad \Delta r = \frac{R^2}{EA}$$

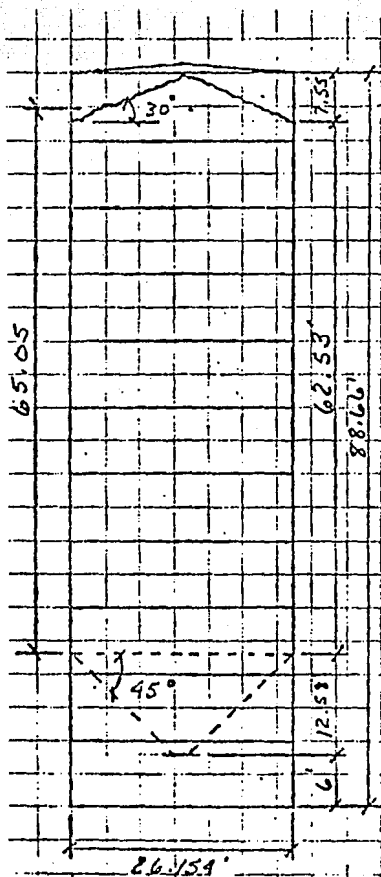
Por la configuración de estos elementos estructurales, los momentos radiales no producen deformación lineal y fuerzas radiales no producen deformación angular.

## Tabla de funciones

	$F_1(\xi)$	$F_2$
1	$\text{senh}^2 kL\xi - \text{sen}^2 kL\xi$	$\text{senh}^2 kL - \text{sen}^2 kL$
2	$\text{senh}^2 kL\xi + \text{sen}^2 kL\xi$	$\text{senh}^2 kL + \text{sen}^2 kL$
3	$\text{senh } kL\xi \cosh kL\xi - \text{sen } kL\xi \cos kL\xi$	$\text{senh } kL \cosh kL - \text{sen } kL \cos kL$
4	$\text{senh } kL\xi \cosh kL\xi + \text{sen } kL\xi \cos kL\xi$	$\text{senh } kL \cosh kL + \text{sen } kL \cos kL$
5	$\text{sen}^2 kL\xi$	$\text{sen}^2 kL$
6	$\text{senh}^2 kL\xi$	$\text{senh}^2 kL$
7	$\cosh kL\xi \cos kL\xi$	$\cosh kL \cos kL$
8	$\text{senh } kL\xi \text{sen } kL\xi$	$\text{senh } kL \text{sen } kL$
9	$\cosh kL\xi \text{sen } kL\xi - \text{senh } kL\xi \cos kL\xi$	$\cosh kL \text{sen } kL - \text{senh } kL \cos kL$
10	$\cosh kL\xi \text{sen } kL\xi + \text{senh } kL\xi \cos kL\xi$	$\cosh kL \text{sen } kL + \text{senh } kL \cos kL$
11	$\text{sen } kL\xi \cos kL\xi$	$\text{sen } kL \cos kL$
12	$\text{senh } kL\xi \cosh kL\xi$	$\text{senh } kL \cosh kL$
13	$\cosh kL\xi \cos kL\xi - \text{senh } kL\xi \text{sen } kL\xi$	$\cosh kL \cos kL - \text{senh } kL \text{sen } kL$
14	$\cosh kL\xi \cos kL\xi + \text{senh } kL\xi \text{sen } kL\xi$	$\cosh kL \cos kL + \text{senh } kL \text{sen } kL$
15	$\cosh kL\xi \text{sen } kL\xi$	$\cosh kL \text{sen } kL$
16	$\text{senh } kL\xi \cos kL\xi$	$\text{senh } kL \cos kL$
17	$\exp(-kL\xi \cos kL\xi)$	$\exp(-kL \cos kL)$
18	$\exp(-kL\xi \text{sen } kL\xi)$	$\exp(-kL \text{sen } kL)$
19	$\exp[-kL\xi (\cos kL\xi + \text{sen } kL\xi)]$	$\exp[-kL (\cos kL + \text{sen } kL)]$
20	$\exp[-kL\xi (\cos kL\xi - \text{sen } kL\xi)]$	$\exp[-kL (\cos kL - \text{sen } kL)]$

## Apéndice B

Memoria de cálculo original del silo de las secciones 5 y 6 ( revisión de fuerzas que deben resistir los tornillos de la tolva de descarga para determinar la separación de estos ).



## PRODUCT LOADS

VERTICAL PRESSURE

$$q = WD(1 - \exp(-4K \mu^2 H/D)) / (4K \mu^2)$$

LATERAL PRESSURE

$$p = qK = WD(1 - \exp(-4K \mu^2 H/D)) / (4 \mu^2)$$

HOPPER NORMAL PRESSURE

$$P_N = p \sin^2(\alpha) + q \cos^2(\alpha)$$

WHERE:

$q$  = VERTICAL PRESSURE,  $^{\circ}/\text{ft}^2$

$p$  = LATERAL PRESSURE,  $^{\circ}/\text{ft}^2$

$P_N$  = HOPPER NORMAL PRESSURE,  $^{\circ}/\text{ft}^2$

$W$  = BULK DENSITY,  $^{\circ}/\text{ft}^3$

$D$  = TANK DIAMETER, Ft

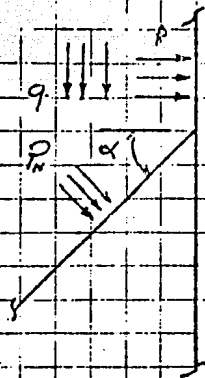
$K$  = RATIO OF VERTICAL TO LATERAL PRESSURE =

$\mu^2 \tan^2(\text{WALL FRICTION ANGLE } (26^{\circ}))$

$H$  = DEPTH OF PRODUCT Ft

$\alpha$  = HOPPER ANGLE ( $45^{\circ}$ )

## HOPPER DESIGN



$$q = \frac{10 \times 26.154}{4 \times 4 \times 4.877} \left( 1 - \exp\left( \frac{-4 \times 4 \times 4.877 \times 65.05}{26.154} \right) \right)$$

$$= 1148 \text{ #/ft}^2$$

$$p = qk = 1148 \times 4 = 459 \text{ #/ft}^2$$

PRESSURE NORMAL TO HOPPER WALL

$$P_n = 459 \times \sin^2(45) + 1148 \times \cos^2(45) = 809 \text{ #/ft}^2$$

NOTE: DUE TO THE STIFFNESS OF THE HOPPER, COMPRESSION BAR, AND SHELL CONNECTION THE HOPPER RADIAL SEAM IS CHECKED AT 1'-0" DOWN.

$$\text{SEAM LOAD} = P_n \times R_n$$

WHERE  $R_n$  = RADIUS NORMAL TO HOPPER SHEET

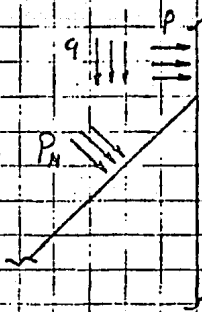
$$R_n = \frac{(R_{\text{SHELL}} - 1')}{\sin \alpha} = 17.08'$$

SIN  $\alpha$

$$\text{SEAM LOAD} = 809 \text{ #/ft}^2 \times 17.08 \text{ ft} = 13732 \text{ #/ft}$$

OR 1144 #/in

## HOPPER DESIGN



$$q = \frac{40 \times 15.385}{4 \times 4 \times 4877} \left( 1 - \exp \left( \frac{-4 \times 4 \times 4877 \times 72.51}{75.385} \right) \right)$$

$$= 769 \text{ #/ft}^2$$

$$P = qK = 769 \times .4 = 308 \text{ #/ft}^2$$

PRESSURE NORMAL TO HOPPER WALL

$$P_N = 308 \times \sin^2(45) + 769 \times \cos^2(45) = 539 \text{ #/ft}^2$$

$$\text{SEAM LOAD} = P_N \times R_N$$

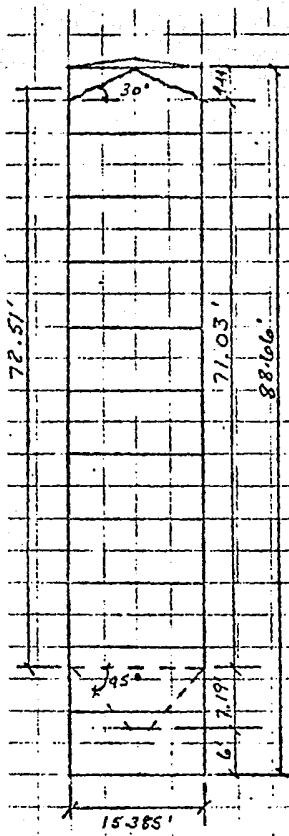
$$R_N = \frac{(R_{\text{SEAM}} - 1)}{\sin \alpha} = 9.46'$$

$$\text{SEAM LOAD} = 539 \text{ #/ft}^2 \times 9.46' = 5099 \text{ #/ft}$$

OR 425 #/in

$$\text{BOLT SPACING} = 2" \therefore \text{BOLT LOAD} = 850 \text{ #/2"}'$$





Product Loads

VERTICAL PRESSURE

$$q = wD (1 - \cos(\alpha)) / (4K)$$

LATERAL PRESSURE

$$p = qK = wD (\sin(\alpha)) / (4M)$$

HOPPER NORMAL PRESSURE

$$P_N = p \sin^2(\alpha) + q \cos^2(\alpha)$$

(SEE PAGE 1 OF 5)

1/2 - 4 -

