

5
24



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

"SOLUCION A PROBLEMAS HIDRAULICOS
EN SISTEMAS DE CONDUCCION DE AGUA
A PRESION"

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE
INGENIERO CIVIL
P R E S E N T A :
HUGO AGUILAR SILVA



MEXICO, D. F.

1971

FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

INDICE

I. INTRODUCCION	1
II. TEORIA BASICA	3
III. FLUJO ESTABLECIDO EN SISTEMAS DE BOMBEO	64
IV. GOLPE DE ARIETE EN TUBERIAS A PRESION	95
V. CONCLUSIONES	118
VI. BIBLIOGRAFIA	119

I. INTRODUCCION

I. INTRODUCCION

La finalidad de la realización de este trabajo es con el propósito de contribuir con el desarrollo en forma didáctica de varios ejemplos de algunos de los temas vistos en la asignatura de hidromecánica, en particular se tratan los referentes a sistemas de bombeo.

Se ha intentado seguir toda la secuela en la teoría descrita, para que el estudiante pueda comprender y aprovechar al máximo la misma, en forma tal que la aplicación a la solución de problemas típicos sea lo más sencillo posible. En el caso del material expuesto sobre golpe de ariete se buscó desarrollar con detalle la teoría básica para que pueda ser fácilmente entendida, dada la escasa literatura en español referente a este tema y además de que la bibliografía de consulta existente son obras especializadas y de difícil acceso al estudiante.

Debe tomarse en cuenta que para la comprensión del flujo transitorio tiene como antecedente el flujo establecido, siendo estas las condiciones iniciales para el estudio del fenómeno de golpe de ariete, implicando que dentro de este trabajo se destine una parte del mismo al análisis y conceptos básicos de la hidráulica.

Así en el capítulo dos se maneja la teoría básica correspondiente al flujo establecido en la cual se tratan los temas de pérdidas de fricción y locales, sistemas de bifurcación, curvas características de las bombas, cargas de bombeo, succión y descarga y el concepto de potencia. Asimismo por lo que corresponde al tema de flujo transitorio se exponen las ecuaciones que rigen el fenómeno de golpe de ariete, el método de solución de Allievi y el método de las características.

I. INTRODUCCION

Además en el capítulo tres y cuatro, se citan varios problemas típicos de flujo establecido y del golpe de ariete respectivamente y la solución a los mismos; dándole el enfoque lo más didáctico posible, buscando siempre que pueda tomarse como apoyo al tema y comprensión del mismo.

Finalmente, en el capítulo cinco se exponen las conclusiones y recomendaciones del presente trabajo.

II. TEORIA BASICA

II. TEORIA BASICA

II.1 FLUJO ESTABLECIDO

II.1.1 Pérdidas de carga debidas a la fricción y locales

En toda conducción trabajando a presión o a superficie libre nos encontramos que en el proceso del movimiento de un fluido, existen diferentes obstrucciones y condiciones que se oponen al movimiento de este, creando una disminución de la energía o carga hidráulica que se presenta al inicio de la conducción; por este concepto, el proyectista de obras hidráulicas debe de tener bien determinado el valor en que se ve decrementada la energía disponible con que se cuenta originalmente; conociendo lo anterior se podrá calcular el nivel de energía o carga hidráulica que se tendrá en las redes de distribución de abastecimiento de agua potable, en los sistemas de bombeo, en las obras de toma, de excedencias y desvío en las plantas hidroeléctricas y termoeléctricas, etc., en todas las obras que atañen al ingeniero hidráulico.

Debe tenerse en consideración que una parte de la carga hidráulica estará destinada para vencer la resistencia que se oponga al movimiento del fluido circulante; lo anterior nos lleva a determinar la energía o carga disponible a utilizar en las obras hidráulicas, optimizando así la operación y funcionamiento de dichas obras ingenieriles tanto técnica como económicamente. Las pérdidas de energía durante el movimiento del fluido están clasificadas en dos tipos, que son: 1.- Las pérdidas de fricción y 2.- Las pérdidas locales; la suma de estos dos tipos darán la pérdida total de energía a lo largo de toda la trayectoria de la tubería o canal y en cualquier punto de esta.

Por lo que respecta el conocimiento y determinación de las pérdidas de fricción en conducciones trabajando a presión, se tienen varias fórmulas experimentales de diferentes investigadores

II. TEORÍA BÁSICA

para determinar el valor correspondiente a estas, y de las cuales las más comunes se mencionan a continuación: DARCY-WEISBACH, HAZEN-WILLIAMS y la de CHEZY, de las anteriores, la más usada y la más común es la fórmula experimental de DARCY-WEISBACH, dado que las gráficas del factor de fricción-número de REYNOLDS ($f \cdot R$) tienden a ser curvas y no lineales como sucede con las otras fórmulas experimentales. De esta forma, se toma en consideración el comportamiento real del flujo en contra de los efectos viscosos, además de la geometría y del material con que esta hecha la tubería. Por el contrario, en el caso de las gráficas lineales del factor de fricción-número de REYNOLDS ($f \cdot R$) (HAZEN-WILLIAMS, CHEZY) se subestima el valor del factor de fricción, implicando cálculo de energía disponible mayor que la real.

La ecuación de DARCY-WEISBACH para calcular las pérdidas por fricción está dada por

$$h_f = f \left(\frac{l}{d} \right) \left(\frac{v^2}{2g} \right) \quad (2.1)$$

donde

- h_f - pérdida de energía por fricción (m)
- f - factor de fricción adimensional
- l - longitud del tramo en consideración (m)
- d - diámetro de la sección transversal de la tubería (m)
- v - velocidad media en el conducto ($\frac{m}{s}$)
- g - aceleración de la gravedad ($\frac{m}{s^2}$)

El factor de fricción utilizado en la ecuación de DARCY-WEISBACH es obtenido del diagrama universal de MOODY para flujo turbulento y laminar, estando en función del número de REYNOLDS (R), de la rugosidad absoluta (ϵ) y del diámetro (d) de la tubería; el número de Reynolds se calcula de la siguiente manera

II. TEORIA BASICA

$$R_o = \frac{v d}{\nu} \quad (2.2)$$

donde

- R_o - número de Reynolds adimensional
- v - velocidad media de la tubería [$\frac{cm}{s}$, $\frac{m}{s}$]
- d - diámetro de la sección transversal de la tubería [cm, m]
- ν - viscosidad cinemática [$\frac{cm^2}{s}$, $\frac{m^2}{s}$]

Existe otro tipo de disminución de la energía disponible provocada por perturbaciones ya sea de tipo geométricas o de alteración del flujo; como pueden ser los cambios de diámetro en las tuberías o sección del cauce, bifurcaciones, cambios de dirección, dispositivos para el control del flujo (válvulas, compuertas, etc.), instalación de aforadores (venturímetros, diafragmas, toberas), etc., designándose así, que cualquier tipo de oposición al movimiento del flujo, independientemente de la longitud de recorrido de este, se denomina pérdida local.

Dicha pérdida de energía disponible se calcula mediante el auxilio de la siguiente expresión

$$h_l = k \left(\frac{v^2}{2g} \right) \quad (2.3)$$

donde

- h_l - pérdida local de la energía (m)
- k - factor adimensional que depende del tipo de accesorio o pieza especial
- v - velocidad media en la tubería o cauce inmediatamente después del tipo de accesorio o pieza especial ($\frac{m}{s}$)
- g - aceleración de la gravedad ($\frac{m}{s^2}$)

II. TEORIA BASICA

Conociendo el valor correspondiente a estos dos tipos de pérdidas en toda la trayectoria de la conducción del flujo, se determinarán las cargas necesarias y disponibles en los sistemas de conducción de fluidos a presión.

II.1.2 Solución en flujo establecido de sistemas de bifurcación

Quando se tiene la conducción de un fluido en tuberías trabajando a presión se encontrará que existen una o varias derivaciones de la tubería principal según se presente el caso o la necesidad de suministrar el fluido al mismo tiempo en diferentes puntos, por lo anterior es necesario dar solución a este problema con el o los sistemas de bifurcación; dichas necesidades pueden ser (por mencionar algunas): el caso de una repartición de gastos conducidos a un tanque de almacenamiento y a una red de distribución de agua potable de una localidad o a dos abastecimientos poblacionales, etc.

La fuente de abastecimiento al sistema puede ser de un pozo (extracción del fluido por debajo de la superficie del terreno), un tanque elevado o una combinación de estos, ya que se efectúa un bombeo del pozo al tanque elevado (regularización) y de éste se alimenta al sistema. Existen casos en que el sistema es alimentado directamente del pozo de extracción por no contar con un tanque elevado y superficial (almacenamiento) que proporcione la energía total para vencer las pérdidas de carga que se tendrían en estas condiciones, la cual se daría con el equipo de bombeo que se cuenta u otro tipo de manejo del movimiento del fluido circulante en el sistema o los sistemas.

Se tienen tres diferentes condiciones en que se presente un sistema de bifurcación y su alimentación, los cuales se mencionan a continuación

II. TEORIA BASICA

- a) Tuberías en serie o conducto sencillo.
- b) Tuberías en paralelo.
- c) Tuberías interconectadas.

II.1.2.1 Tuberías en serie o conducto sencillo

Una tubería en serie consiste en un sólo elemento o conducto unico, la alimentación aguas arriba de ésta ya sea un tanque elevado o un equipo de bombeo y la descarga la cual puede ser a la atmósfera o un depósito de almacenamiento. La tubería está constituida por uno o varios tramos de diferente diámetro, longitud y material con que está hecho, etc. El decremento de la energía inicial es debida a la que se tiene en todo el trayecto de la tubería y diferente en todos los tramos (figuras 2.1.1 y 2.1.2) e igual a la suma de las pérdidas en cada uno de ellos correspondientes a todo el sistema. Se cumple la ecuación de continuidad en todos los tramos, de las figuras 2.1.1 y 2.1.2, y de las condiciones que se presentan en el cálculo de una tubería en serie (o conducto sencillo) tenemos

La pérdida total (locales y de fricción) a lo largo de la tubería se calcula como sigue

$$h_t = h_{f_1} + h_{f_2} + \dots + h_{f_n} + h_{l_1} + h_{l_2} + \dots + h_{l_n} \quad (2.4)$$

siendo

- h_t - pérdida de energía total a lo largo de la tubería (m)
- h_{f_n} - pérdida de energía debida a la fricción en el tramo n (m)
- h_{l_n} - pérdida de energía debida a los accesorios y piezas especiales en el tramo n (m)

Se cumple la ecuación de continuidad

$$Q = Q_1 = Q_2 = Q_3 = \dots = Q_n \quad (2.5)$$

II. TEORIA BASICA

donde

Q - gasto que circula en el sistema ($\frac{m^3}{s}$)

Q₁ - gasto que circula por el tramo 1 ($\frac{m^3}{s}$)

Q_n - gasto que circula por el tramo n ($\frac{m^3}{s}$)

En este primer análisis de un sistema de tuberías en serie nos podemos encontrar con

- Calcular la carga inicial si son conocidos el gasto, las longitudes y los diámetros en los tramos.
- Calcular el gasto si se conoce la carga inicial, las longitudes y los diámetros en los tramos.

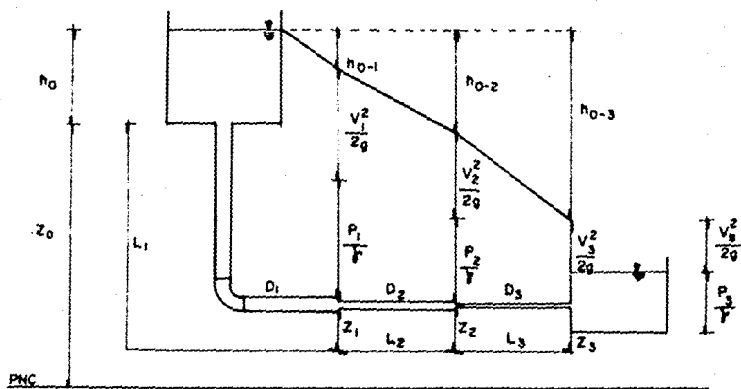
Los dos tipos de problemas anteriores, tienen la siguiente solución

Para el caso "a"

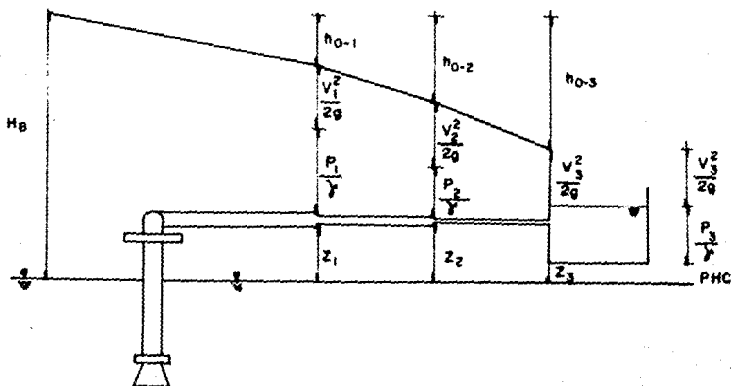
$$H = \Sigma h_f + \Sigma h_l + \frac{v^2}{2g} \quad (2.6)$$

donde

- H - desnivel existente entre la superficie libre del agua en el depósito aguas arriba y el centro de gravedad del tubo en la sección final de este o la superficie libre del agua en el depósito aguas abajo en (m) (figura 2.1.1); o es igual a la carga de bombeo proporcionada por la bomba en (m) (figura 2.1.2)
- h_f - suma de las pérdidas debidas a la fricción que existen en la tubería desde el inicio hasta el final del sistema, calculadas con la fórmula 2.1 en (m)
- Σ h_l - suma de las pérdidas debidas a los accesorios y/o piezas especiales existentes en toda la trayectoria del flujo, calculadas con la fórmula 2.3 en (m)



Figuro 2.1.1



Figuro 2.1.2

II. TEORIA BASICA

$\frac{v^2}{2g}$ - carga de velocidad a la salida del tramo final si es descarga libre o como pérdida de carga si la descarga es a otro depósito en (m)

Para el caso "b"

Planteando la ecuación de la energía entre el inicio y el final del sistema (figuras 2.1.1 y 2.1.2), llegamos a

$$H = (Z_o + h_o + \frac{v_o^2}{2g}) - (Z_i + h_i) = \frac{v_o^2}{2g} + \Sigma h_f + \Sigma h_l \quad (2.7)$$

De las ecuaciones 2.1 y 2.3, sustituidas en la anterior

$$H = \frac{v_o^2}{2g} + (f_1 \frac{l_1}{d_1} \frac{v_1^2}{2g} + \dots + f_n \frac{l_n}{d_n} \frac{v_n^2}{2g}) + (K_1 \frac{v_1^2}{2g} + \dots + K_n \frac{v_n^2}{2g}) \quad (2.8)$$

Simplificando se obtiene

$$H = \frac{v_o^2}{2g} + \sum_{i=1}^n f_i \frac{l_i}{d_i} \frac{v_i^2}{2g} + \sum_{i=1}^n K_i \frac{v_i^2}{2g} \quad (2.9)$$

De la ecuación 2.5

$$Q_o = Q_i \quad (2.10)$$

Sustituyendo la ecuación de continuidad en la anterior

$$v_o A_o = v_i A_i \quad (2.11)$$

Despejando v_i de 2.11 se tiene

$$v_i = \frac{v_o A_o}{A_i} \quad (2.12)$$

Sustituyendo v_i en 2.9 y simplificando, resulta

II. TEORIA BASICA

$$H = \frac{v_*^2}{2g} \left[1 + \sum_{i=1}^n f_i \frac{l_i}{d_i} \left(\frac{A_*}{A_i} \right)^2 + \sum_{i=1}^n K_i \left(\frac{A_*}{A_i} \right)^2 \right] \quad (2.13)$$

Despejando v_* de 2.13 se llega a

$$v_* = \sqrt{\frac{2gH}{1 + \sum_{i=1}^n f_i \frac{l_i}{d_i} \left(\frac{A_*}{A_i} \right)^2 + \sum_{i=1}^n K_i \left(\frac{A_*}{A_i} \right)^2}} \quad (2.14)$$

La ecuación 2.14 podría manejarse de la siguiente manera

$$v_* = \sqrt{\frac{2gH}{1 + \sum_{i=1}^n f_i l_i \frac{d_*^4}{d_i^5} + \sum_{i=1}^n K_i \left(\frac{d_*}{d_i} \right)^4}} \quad (2.15)$$

Por continuidad

$$Q = v_* A_* \quad (2.16)$$

Como se conocen las características de la tubería se pueden estimar valores para cada f_i por medio del diagrama de Moody, además de conocer también los K_i que sustituidos en la ecuación 2.15 se determina a v_* y con la expresión 2.16 se conoce el gasto (Q) que circula por la tubería.

Con el valor obtenido para Q se calculan los nuevos números de Reynolds (ecuación 2.2) para cada tramo, con los cuales y con la ayuda del diagrama de Moody se obtiene nuevos valores de f_i y el proceso se repite hasta tener variaciones pequeñas de f_i .

II. TEORIA BASICA

II.1.2.2 Tuberías en paralelo

Existen situaciones en que la tubería principal o de alimentación tiene que ser derivada o bifurcada, para después volverse a unir en un punto (figura 2.1.3); a este segundo tipo de sistema se le conoce como tuberías en paralelo.

La alimentación puede ser de un tanque elevado o de un equipo de bombeo.

En un sistema de tuberías en paralelo tenemos las condiciones siguientes

- a) Las pérdidas de carga entre el punto A y B son las mismas para cada bifurcación o derivación, por consiguiente existe un solo valor de la pérdida de carga entre A y B para cualquier ramal.
- b) El gasto que circula por la tubería de alimentación es igual a la suma de los gastos que conduce cada ramal.

Para un sistema de tuberías en paralelo, se tienen los dos siguientes casos a resolver

- 1) Se conoce la pérdida de carga entre el punto A y B, y se desea determinar el gasto en cada ramal.
- 2) Se conoce el gasto total y se desea determinar la pérdida de energía entre los puntos A y B, así como la distribución de gastos en cada ramal.

Para el primer caso, se tiene como dato a ΔH y entonces se puede calcular el caudal en cada bifurcación, basándose en que cada derivación trabaja con una carga igual a la pérdida determinada (dato ΔH) además que

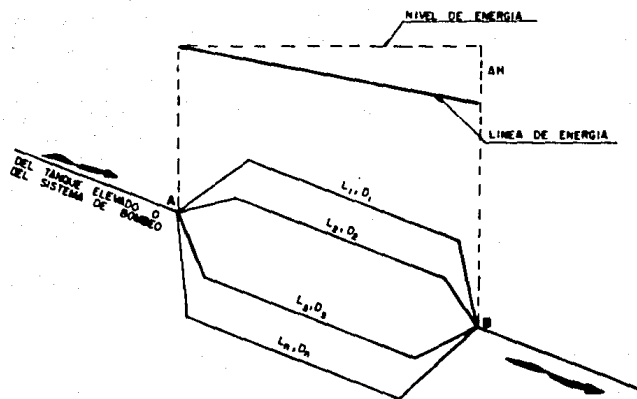


Figura 2.1.3

II. TEORIA BASICA

$$\Delta H = \Delta H_1 = \Delta H_2 = \Delta H_3 = \dots = \Delta H_n \quad (2.17)$$

donde

ΔH - pérdida de energía entre el punto A y B (m)

ΔH_i - pérdida de energía en el ramal i (m)

ΔH_n - pérdida de energía en el ramal n (m)

Esta pérdida se calcula de la siguiente manera

$$\Delta H = K_i \frac{v_i^2}{2g} \quad (2.18)$$

donde

ΔH - pérdida de energía (m)

K_i - suma de los coeficientes de pérdidas debidas a la fricción y locales que se tienen en el tramo i

$\frac{v_i^2}{2g}$ - carga de velocidad en el tramo i (m)

Despejando v_i de la ecuación 2.18 se tiene que

$$v_i = \sqrt{\frac{2g \Delta H}{K_i}} \quad (2.19)$$

Además

$$K_i = f_i \frac{l_i}{d_i} + \sum K_{L_i} \quad (2.19a)$$

Por lo cual, sustituyendo 2.19a en 2.19 la expresión para calcular la velocidad en el tramo i es

$$v_i = \sqrt{\frac{2g \Delta H}{f_i \frac{l_i}{d_i} + \sum K_{L_i}}} \quad (2.20)$$

II. TEORÍA BÁSICA

Por continuidad

$$Q_i = v_i A_i \quad (2.21)$$

donde

Q_i - gasto que circula en el tramo i ($\frac{m^3}{s}$)

v_i - velocidad en el tramo i ($\frac{m}{s}$)

A_i - área de la sección transversal del tramo i (m^2)

Para el segundo caso se supone que

$$\Delta H_o = \Delta H_1 = \Delta H_2 = \Delta H_3 = \dots = \Delta H_n \quad (2.22)$$

en la cual, se define que

ΔH_o - pérdida de energía equivalente, para una tubería imaginaria que conduce el gasto total de todos los tramos en m

ΔH_i - pérdida de carga en el tramo i en m

ΔH_n - pérdida de carga en el tramo n en m

Sustituyendo la ecuación 2.19 y 2.21 en la de continuidad, se obtiene

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots + Q_n \quad (2.23)$$

llegando entonces a

$$\frac{2g \Delta H}{K} \frac{nd^2}{4} = \sqrt{\frac{2g \Delta H_1}{K_1} \frac{nd_1^2}{4}} + \dots + \sqrt{\frac{2g \Delta H_n}{K_n} \frac{nd_n^2}{4}} \quad (2.24)$$

Por la ecuación 2.22, se tiene

II. TEORIA BASICA

$$\sqrt{\frac{2g \Delta H}{K}} \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi}{4} \sqrt{2g \Delta H} \left(\frac{d_1^2}{\sqrt{K_1}} + \dots + \frac{d_n^2}{\sqrt{K_n}} \right) \quad (2.25)$$

simplificando, se llega a

$$\frac{d^2}{\sqrt{K}} = \sum_{i=1}^n \frac{d_i^2}{\sqrt{K_i}} \quad (2.26)$$

o bien

$$\frac{K}{d^4} = \left[\frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{d_i^2}{\sqrt{K_i}}} \right]^2 \quad (2.27)$$

Es decir, la condición de equivalencia entre los conductos, en los que se elige un valor arbitrario para d o K y el otro se calcula con la ecuación 2.27, llegando así a que

$$\Delta H = K \frac{v^2}{2g} \quad (2.28)$$

Además

$$v = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{4Q}{\pi d^2} \quad (2.28a)$$

Sustituyendo 2.28a en 2.28, se obtiene

$$\Delta H = \frac{8K}{\pi^2 d^4} \frac{Q^2}{g} \quad (2.29)$$

Sustituyendo la ecuación 2.27 en la expresión anterior

$$H = \frac{8}{\left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{d_i^2}{\sqrt{K_i}} \right) \right]^2} \frac{Q^2}{g} \quad (2.30)$$

II. TEORIA BASICA

Una vez determinada la pérdida ΔH , la solución al problema se resuelve como para el primer caso.

II.1.2.3 Tuberías interconectadas

En las figuras 2.1.3a y 2.1.3b, se muestra un sistema sencillo de tuberías interconectadas ya sea el caso de tener solo depósitos en el sistema (figura 2.1.3a) o la combinación depósito-bomba (figura 2.1.3b); en el segundo tipo de sistema la bomba alimenta a dos o mas depósitos.

En ambos casos se desea conocer el flujo y el sentido del mismo en las tuberías, para ello, deben aplicarse y cumplirse para cada tubería las siguientes ecuaciones

- a) La ecuación para calcular las pérdidas de energía debidas a la fricción (ecuación 2.1) y
- b) La ecuación de continuidad

La magnitud y dirección del flujo para cada tubería, dependerá de la elevación relativa de los depósitos, en el primer tipo, y de la carga de bombeo-elevación relativa de los depósitos en el segundo.

De las figuras 2.1.3a y 2.1.3b, además de lo arriba citado, se debe cumplir que:

- En el punto de unión de las tuberías la línea de cargas piezométricas tiene un valor único y válida para cada una de las tuberías
- La suma de gastos en el punto de unión debe ser igual a cero.

De la figura 2.1.3a, podemos tener dos condiciones, dependiendo de la elevación de los depósitos, siendo estas las siguientes

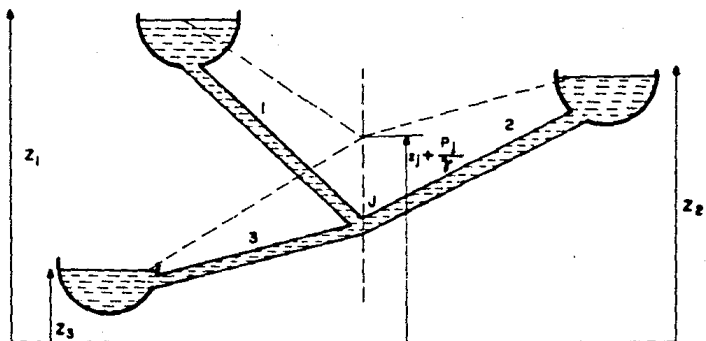


Figura 2.1.3a

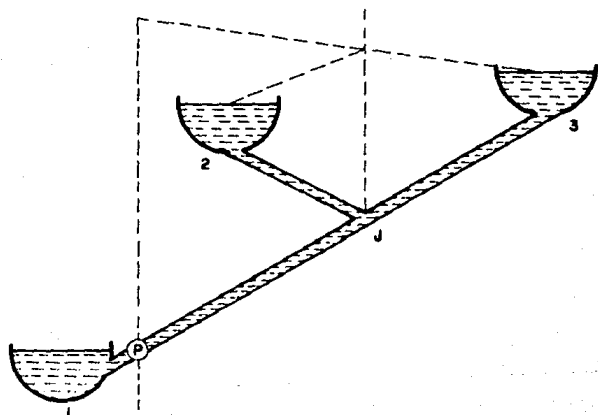


Figura 2.1.3b

II. TEORIA BASICA

$$Q_1 = Q_2 + Q_3 \quad (2.30a)$$

y

$$Q_3 = Q_1 + Q_2 \quad (2.30b)$$

Para que se cumpla la expresión 2.30a, el valor que tiene la línea de cargas piezométricas en el punto de unión debe estar por arriba de la elevación del depósito intermedio: en caso contrario se cumple la ecuación 2.30b.

La solución a este tipo de sistema de tuberías interconectadas, se resuelve suponiendo una elevación en el punto de unión (H), además de conocer la elevación en los depósitos, siendo la diferencia entre los niveles de estos y el punto de unión la pérdida de carga en cada tubería; reordenando la ecuación 2.1, se tiene

$$\frac{8f}{g\pi^2 d^5} Q^2 = \frac{h_f}{L} = S \quad (2.30c)$$

La primera parte del lado izquierdo de la ecuación 2.30c, se le llama factor de transporte de la tubería, por lo tanto puede escribirse esta expresión como a continuación se indica

$$\frac{Q^2}{K^2} = \frac{h_f}{L} = S \quad (2.30d)$$

Ahora, calculando los gastos para cada tubería, se tiene

$$Q_1 = \sqrt{\frac{H_1 - H}{L_1} K_1^2} \quad (2.30e)$$

Sustituyendo el valor de los gastos de cada tubería en la ecuación 2.30a, teniendo presente que si el gasto Q_1 es mucho mayor que $Q_2 + Q_3$, se supone una H más grande, en caso contrario se reduce el valor de H , y así hasta cumplir con la expresión 2.30a.

II. TEORIA BASICA

De la figura 2.1.3b, al bombear hacia los depósitos, es necesario conocer las características de la bomba, al suponer que la bomba trabaja a velocidad constante, su carga depende del gasto; una solución sería la siguiente

- Suponer un gasto Q a través de la bomba
- Se calcula la carga de bombeo obtenida con la curva características de la bomba
- Se calcula la carga de presión en el punto de unión
- Se calculan los gastos en las tuberías con la ecuación 2.30e
- Si el gasto bombeado es igual a la suma de los gastos para los depósitos el problema está resuelto, si el gasto bombeado es demasiado grande se supone un gasto menor, en caso contrario un gasto mayor y se repite el procedimiento

II.1.3 Tipos de sistemas de bombeo y su nomenclatura usual

El bombeo es utilizado para incrementar la energía disponible y con esta provocar el movimiento del fluido, además de poder manejar diferentes elevaciones de desplante del tipo de conducción (tubería a presión, canal, acueducto, etc.), donde se descargarán las aguas bombeadas.

Algunos de los propósitos del bombeo se mencionan a continuación

- 1.- Extracción del fluido de los pozos profundos
- 2.- Lograr el abastecimiento y distribución del agua potable a ciudades, pequeños poblados, edificios, casas, etc.
- 3.- Bombeo de aguas negras
- 4.- Para irrigación
- 5.- Para usos industriales
- 6.- Abatir el nivel freático, etc.

II. TEORIA BASICA

Para poder aclarar los diferentes tipos de sistemas de bombeo se hará uso de la figura 2.1.4 indicando en ésta todas las variables que intervienen en el mismo.

En la figura 2.1.4, H es el desnivel estático total existente entre los dos tanques en (m) y H_b es la carga de bombeo también en (m), quedando definida de la siguiente forma :

$$H_b = H + h_{ps} + h_{pd} \quad (2.31)$$

Donde

- H_b - carga de bombeo (m)
- H - desnivel existente entre los depósitos (m)
- h_{ps} - suma de pérdidas debidas a la fricción y locales en la tubería de succión (m)
- h_{pd} - suma de pérdidas debidas a la fricción y locales en la tubería de descarga (m)

En todo sistema de bombeo se tendrán dos tipos de tuberías, una antes y otra después de la bomba; llamadas comúnmente como tubería de succión al tramo de tubo que conduce el fluido antes de entrar a la bomba (línea aguas arriba de la bomba) y la tubería de descarga que conduce el agua bombeada por el sistema (conducto aguas abajo de la bomba).

Dentro de las dos características de conducción aguas arriba y aguas abajo de la bomba, el objetivo principal será el de determinar la altura o carga de succión y la carga de descarga del sistema, ambas determinarán la carga de bombeo de dicho sistema.

II.1.3.1 Determinación de la carga de succión para diferentes condiciones de operación, geometría y forma de un sistema de bombeo.

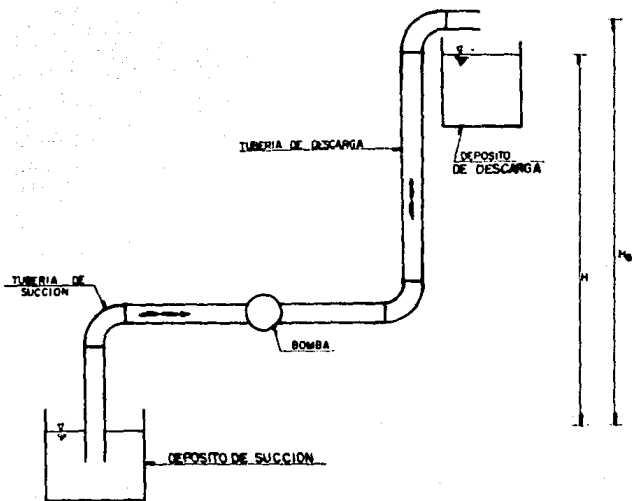


Figura 2.1.4

II. TEORIA BASICA

a) Primer caso

- Para la determinación de la carga de succión y sus características respectivas se utilizará la figura 2.1.5.

De la figura 2.1.5, se observa que

$$h_s = -s - h_{fs} - h_{ls} \quad (2.32)$$

donde

- h_s - altura o carga de succión (m)
- s - desnivel existente entre el eje del ojo del impulsor de la bomba y el nivel del agua en el depósito (m)
- h_{fs} - pérdidas de carga debidas a la fricción en la tubería de succión (m)
- h_{ls} - pérdidas de carga debidas a los accesorios y piezas especiales instaladas a lo largo de la tubería de succión (m)

El signo negativo indica la altura a vencer por la bomba.

b) Segundo caso

Para la comprensión del segundo tipo de conducción de la tubería de succión se hará uso de la figura 2.1.6.

De la figura 2.1.6 se tiene lo siguiente

$$h_s = s - h_{fs} - h_{ls} \quad (2.33)$$

La definición de los términos en la ecuación 2.33 se describen en la ecuación 2.32 sólo que ahora h_s es la carga de succión pues el signo positivo para el desnivel s indica carga a favor de la bomba.

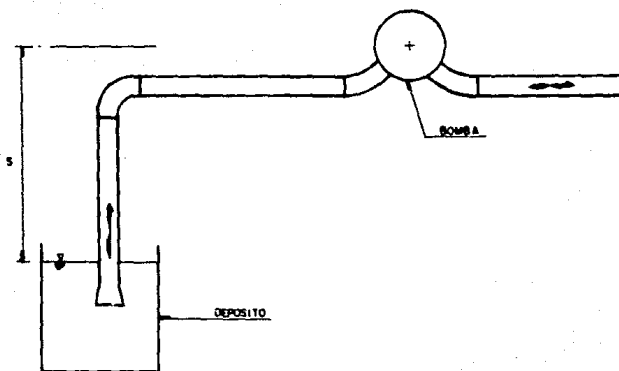


Figura 2.1.5

II. TEORIA BASICA

c) Tercer caso

Se utilizará la figura 2.1.7 para comprender y aclarar esta característica de la succión en las instalaciones de bombeo.

De la figura 2.1.7

$$h_s = s - h_{f_s} - h_{l_s} + P_s \quad (2.34)$$

Donde

h_s - carga de succión (m)

s - desnivel existente entre el nivel del agua en el tanque y el eje del ojo del impulsor de la bomba (m)

h_{f_s} - pérdidas de carga debidas a la fricción en la tubería de succión (m)

h_{l_s} - pérdidas de carga debidas a los accesorios y piezas especiales instaladas a lo largo de la tubería de succión (m)

P_s - carga de presión que se tiene en el tanque (m)

II.1.3.2 Determinación de la carga de descarga de un sistema de bombeo para diferentes condiciones de operación, geometría y forma de éste

a) Primer caso (figura 2.1.8)

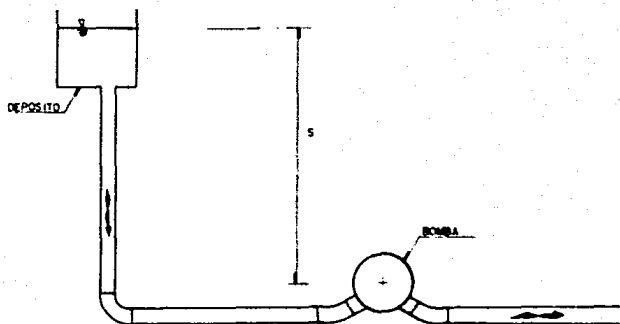
De la figura 2.1.8 se tiene

$$h_d = D + h_{f_d} + h_{l_d} + P_d \quad (2.35)$$

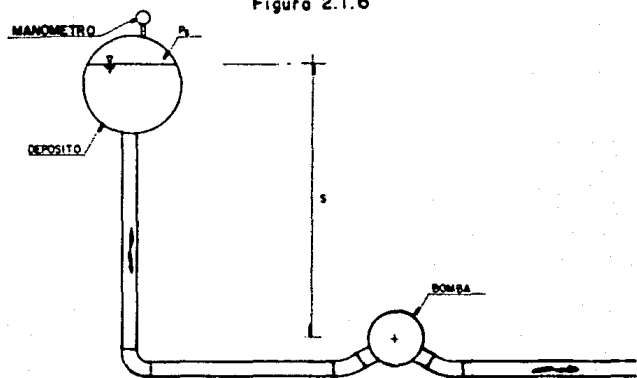
Donde

h_d - carga de descarga (m)

D - desnivel estático existente entre el nivel del agua en el depósito y el eje del ojo del impulsor de la bomba (m)



Figuro 2.1.6



Figuro 2.1.7

II. TEORIA BASICA

- h_{f_d} - pérdidas de cargas debidas a la fricción en la tubería de descarga (m)
- h_{l_d} - pérdidas de carga debidas a los accesorios y piezas especiales instalados en la trayectoria de la tubería de descarga (m)
- P_d - carga de presión (diferente a la atmosférica) que se tiene en el depósito (m)

b) Segundo caso (figura 2.1.9)

De la figura 2.1.9 se tiene

$$h_d = D + h_{f_d} + h_{l_d} \quad (2.36)$$

El significado de los términos se mencionan en la ecuación 2.35

c) Tercer caso (figura 2.1.10)

La carga de descarga de la figura 10 se determina con el auxilio de la ecuación 2.36

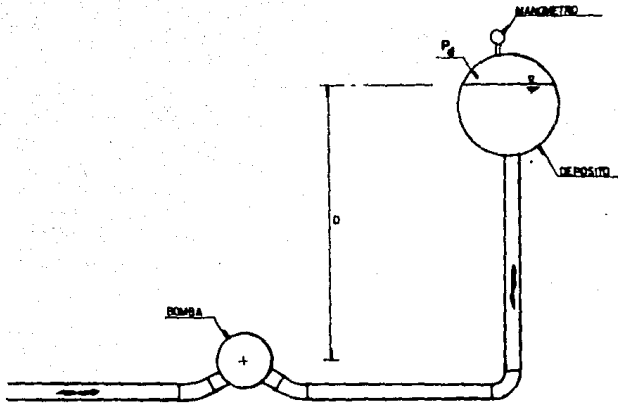
d) Cuarto caso (figura 2.1.11)

La carga de descarga para este caso se calculará con la ecuación 2.36, puede observarse en las figuras 2.1.9, 2.1.10 y 2.1.11 que la única diferencia en la determinación en la carga de descarga es el desnivel D, dicho desnivel es específico para cada caso.

e) Quinto caso (figura 2.1.12)

Para este caso se tiene que

$$h_d = -D + h_{f_d} + h_{l_d} \quad (2.37)$$



Figuro 2.1. 8

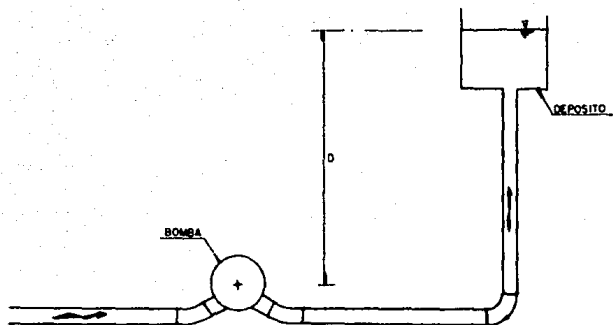
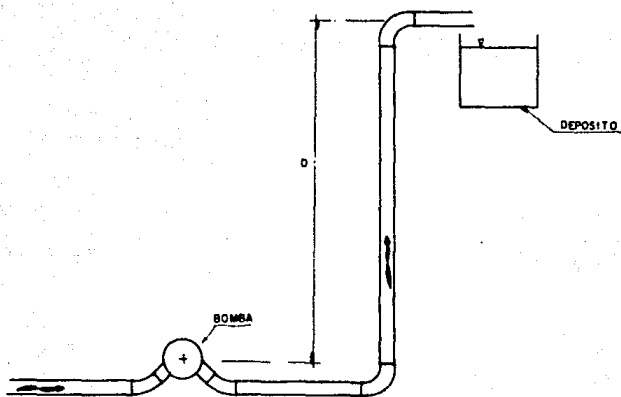


Figura 2.1.9



Figuro 2.1.10

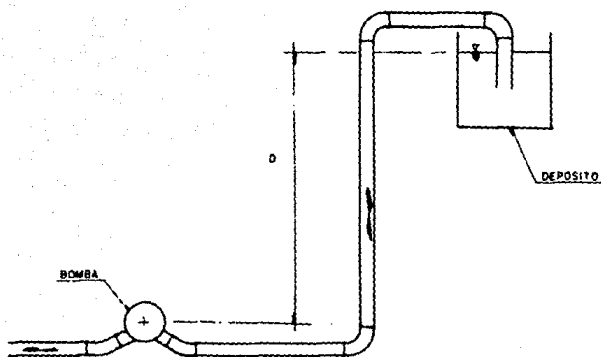


Figura 2.1.11

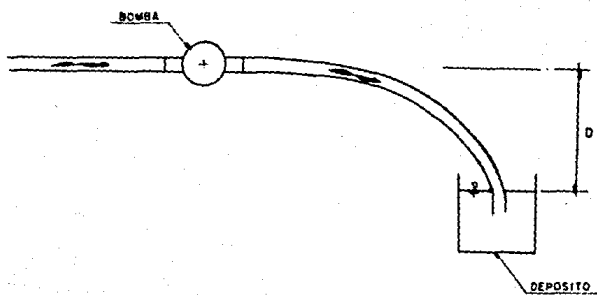


Figura 2.1.12

II. TEORIA BASICA

El signo negativo en el desnivel D indica carga a favor de la bomba y el significado de los términos son iguales que los mencionados en la ecuación 2.36

II.1.3.3 Determinación de la carga total de bombeo

La carga total de bombeo es indispensable, junto con el gasto bombeado, para la selección de la bomba a utilizar. Además de que la potencia necesaria en el motor de la misma esta en función de la carga de bombeo, lo cual implica que se tenga conocimiento de dicho valor de la carga para la selección adecuada del conjunto bomba-motor.

La carga total de bombeo queda determinada como sigue con base en la ecuación 2.31

$$H_{\text{B}} = H + h_{\text{ps}} + h_{\text{pd}}$$

la cual puede quedar

$$H_{\text{B}} = \pm h_{\text{s}} \pm h_{\text{d}} = \pm s \pm D \pm h_{\text{fs}} \pm h_{\text{ls}} \pm h_{\text{fd}} \pm h_{\text{ld}} \quad (2.38)$$

donde

$$H = \pm s \pm D$$

$$h_{\text{ps}} = h_{\text{fs}} + h_{\text{ls}}$$

$$h_{\text{pd}} = h_{\text{fd}} + h_{\text{ld}}$$

en la anterior expresión el signo positivo o negativo dependerá del arreglo en la succión y la descarga que se tenga.

Los valores de la carga de succión (h_{s}) y la carga de descarga (h_{d}) se calcularán según el caso y características de estos, los cuales fueron mencionados anteriormente.

II. TEORIA BASICA

II.1.4 Operación en serie y en paralelo de bombas

En un sistema de bombeo pueden existir una o más bombas dependiendo de las necesidades y problemas a resolver. Estos pueden ser para aumentar la carga y para incrementar el gasto bombeado. La operación del sistema de bombeo cuando se necesite aumentar la carga se le llama operación en serie y cuando es necesario incrementar el gasto el funcionamiento del sistema se le conoce como operación en paralelo de un sistema de bombeo.

Como ejemplo explicativo de un sistema de bombeo operando en serie se tiene la situación del bombeo del agua potable de la cisterna de un edificio de varios niveles hacia el tanque de almacenamiento ubicado en la azotea del mismo, para lo cual pueden utilizarse dos o más bombas instaladas en serie para vencer la altura total del edificio, el número de bombas a utilizar está en función del tipo de ésta y de la carga a vencer. Como ejemplo de un sistema de bombeo operando en paralelo, se tiene una planta de bombeo de aguas negras en la que sea necesario bombear una cantidad considerable de las mismas para mantener los niveles de operación de los cárcamos de bombeo; el número de bombas está en función de la capacidad de ésta y del agua a bombear en épocas de avenidas.

No siempre tienen que ser utilizadas todas las bombas existentes en el cárcamo de bombeo, pueden utilizarse dos, tres, etc. según la cantidad de agua que llegue al cárcamo y del nivel del agua que se tenga en este.

Una característica muy importante en el trabajo conjunto de las bombas tanto en serie como en paralelo es la eficiencia que se tendrá en el mismo, la cual será máxima cuando las características de las bombas son iguales o difieren poco una de otra.

II. TEORIA BASICA

II.1.4.1 Operación en serie

Las características de este sistema de bombeo son el gasto bombeado es el mismo en cada bomba existente en el sistema y la carga total será la suma de cada carga dada por las bombas existentes en el sistema.

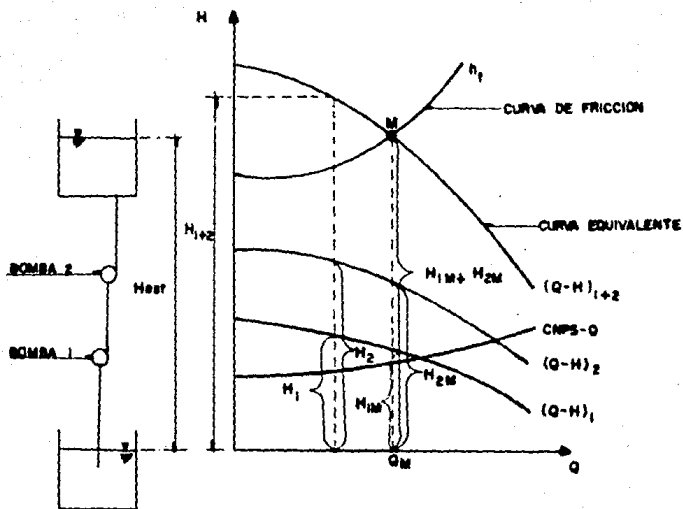
La solución al trabajo conjunto de la operación en serie de grupo de bombas consistirá en la construcción de la característica equivalente de todas las bombas que conforman a dicho sistema en una sola.

En la figura 2.1.13 se muestra la gráfica de gasto contra carga de las bombas y la curva de pérdidas totales contra gasto de la tubería (curva de fricción de la tubería), además de presentar la curva equivalente gasto contra carga de ambas bombas. El punto de trabajo de las bombas en el sistema está determinado por la intersección de la curva de pérdidas de la tubería con la curva equivalente gasto-carga de ambas bombas, dicho punto está designado por el punto M en la figura 1.2.13; la carga de trabajo de la bomba 1 es H_{1M} , y el de la bomba 2 es H_{2M} ; asociados cada una al gasto Q_M .

II.1.4.2 Operación en paralelo

Las características de este tipo de sistema de bombeo se mencionan a continuación: las cargas de bombeo para las bombas que conforman el sistema es igual para todas y los gastos bombeados son la suma del gasto por cada bomba correspondiente a la respectiva carga de bombeo.

La solución en conjunto de un sistema de bombeo operando en paralelo consiste en determinar la característica equivalente de



Figuro 2.1.13

II. TEORIA BASICA

las bombas, la cual se efectúa sumando los gastos bombeados por cada bomba para determinada carga de bombeo.

De la figura 2.1.14 se observan las curvas gasto contra carga para las bombas 1 y 2, la curva de pérdidas totales contra gasto, y la curva gasto contra carga equivalente de la suma de gastos de ambas bombas (curva punteada), el punto de trabajo de las bombas en el sistema estará definido por la intersección de la curva gasto-carga equivalente para ambas bombas y la curva de pérdidas totales contra gasto: dicho punto está marcado como M y con este punto queda definido el gasto de bombeo del sistema (Q_M), la carga de bombeo para el mismo (H_M) y los gastos de trabajo de las bombas Q_{1M} y Q_{2M} , la suma de $Q_{1M} + Q_{2M}$ nos da el Q_M .

II.1.4.3 Curvas características de las bombas

Existen cuatro variables que son indispensables para la selección de una bomba, ya que estos determinan el funcionamiento de la misma, dichas variables son la eficiencia, la carga, la potencia y la carga neta positiva de succión (NPSH).

Todas ellas son función del gasto bombeado y determinan el funcionamiento de la bomba; a estas variables se les denomina características de la bomba, tales curvas regirán en la buena selección de la bomba a utilizar para cumplir con las necesidades que se tienen.

En la figura 2.1.15 se observan las curvas características de una bomba, estando en el eje de las abscisas el gasto bombeado y en el eje de las ordenadas la eficiencia de la bomba, la potencia, la carga requerida y la carga neta positiva de succión.

Estas curvas se obtienen experimentalmente, y son proporcionadas por el fabricante; resultan de realizar diferentes aberturas de la

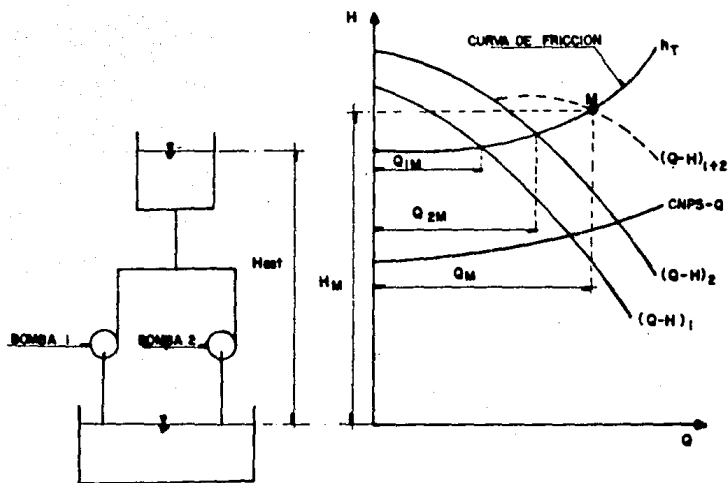


Figura 2.1.14

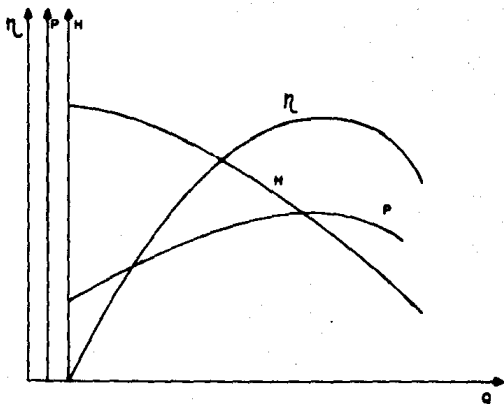


Figure 2.1.15

II. TEORIA BASICA

válvula de descarga, desde el cierre total hasta la abertura completa de la válvula, para cada posición de la abertura en la misma se miden y calculan los valores respectivos del gasto (Q), la carga (H), la potencia (P) y la eficiencia (η), manteniendo constante la velocidad de rotación (número de revoluciones por minuto) en cada abertura de la válvula.

Una bomba debe ser utilizada al máximo de su eficiencia o rendimiento, con lo cual se tendrá el consumo de energía adecuada, la carga necesaria y el gasto a utilizar en la instalación (a estos puntos se les llamará puntos de trabajo o características de trabajo).

Otra forma de encontrar el punto real de operación es graficar en las curvas características la altura estática más las pérdidas totales en la tubería contra gasto y donde se intersecten ambas se tendrá el punto de trabajo; proyectando el punto de trabajo sobre las curvas de potencia y eficiencia contra gasto se tendrán los restantes puntos, que corresponderán al gasto real de operación.

Lo que se busca con esto es que el punto real de operación del sistema corresponda al máximo rendimiento, o en su caso que se ubique dentro del rango de operación del mismo. Logrando así el funcionamiento esperado del sistema.

El rango de operación puede estar por arriba o por debajo del máximo rendimiento pero muy cercano a este.

II.1.5 Criterio de selección del conjunto bomba-motor

Un factor muy importante para el buen funcionamiento de un sistema de bombeo es la selección del conjunto bomba-motor; por lo cual debe de manejarse el rango de operación del equipo; obteniéndose así, que la eficiencia del sistema sea la óptima. Dicha eficiencia

II. TEORIA BASICA

deberá tener equiparidad con el equipo por adquirir, implicando que será fácil de obtener, mantener y operar para no caer en equipos especiales, que se requieren de un personal calificado que tendría como consecuencia un alto costo.

El objetivo de la utilización de una bomba, es el de proporcionar energía al fluido por la acción de una fuerza mecánica que descarga al mismo a un nivel previamente estudiado y analizado, motivo por el cual es necesario realizar una buena selección de la bomba y el motor a utilizar, buscando siempre la optimización en el funcionamiento de conjunto del sistema; evitando así un costo elevado en operación y mantenimiento del mismo.

En párrafos anteriores de este trabajo se mencionó sobre las curvas características de la bomba, siendo estas un requisito indispensable para la buena selección de la bomba, el otro requisito es la potencia que deberá tener el motor, la cual será tratada en esta parte.

II.1.5.1 Determinación de la potencia

Para cualquier sección de la tubería, la energía por unidad de peso que tiene el líquido se representa por

$$H = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} \quad (2.39)$$

donde

H - energía por unidad de peso (m)

z - carga de posición (m)

$\frac{p}{\gamma}$ - carga de presión (m)

$\frac{v^2}{2g}$ - carga de velocidad (m)

Dicha energía es medida desde el plano horizontal de referencia.

II. TEORIA BASICA

Si tomamos la ecuación anterior entre una sección inmediatamente después de la bomba y otra en la descarga (tanque elevado, etc.) tenemos

$$H_1 = H_2 + \sum^2 h_i \quad (2.40)$$

Ahora, la energía de un volumen V del líquido, respecto del plano horizontal de referencia, es

$$E = \gamma H V \quad (2.41)$$

Y por definición de energía y potencia en esa sección la potencia vale

$$P = \frac{dE}{dt} = \gamma H \frac{dV}{dt} \quad (2.42)$$

Del concepto y definición del gasto, siendo este

$$Q = \frac{dV}{dt} \quad (2.43)$$

se llega a

$$P = \gamma Q H \quad (2.44)$$

en donde

P - potencia (Kg m/s)

γ - peso específico del fluido (Kg/m³)

H - carga de bombeo (m)

Q - gasto bombeado (m³/s)

En la expresión anterior el gasto y la carga son los valores teóricos, debiéndose obtener los valores reales correspondientes de la forma siguiente

$$Q = \frac{Q_r}{\eta_v} \quad (2.45)$$

II. TEORIA BASICA

$$H = \frac{H_r}{\eta_h} \quad (2.46)$$

en donde

- Q - gasto teórico
- H - carga teórica
- Q_r - gasto real
- H_r - carga real
- η_v - rendimiento volumétrico
- η_h - rendimiento hidráulico

por otra parte se tiene además de la eficiencia volumétrica e hidráulica, la eficiencia mecánica η_m; estos tres rendimientos forman la eficiencia total de la bomba. Obteniéndose así la potencia de la bomba como sigue

$$P_n = \frac{\gamma Q_r H_r}{\eta_v \eta_h \eta_m} \quad (2.46)$$

o también puede quedar

$$P_n = \frac{\gamma Q_r H_r}{\eta} \quad (2.47)$$

siendo η la eficiencia total.

Calculando el valor de la potencia nominal, se analizará el motor comercial inmediatamente superior al obtenido anteriormente.

II. TEORIA BASICA

II.2 GOLPE DE ARIETE EN TUBERIAS A PRESION

En todo sistema de bombeo pueden existir cambios o perturbaciones del flujo establecido en sus conductos de alimentación y descarga originados por las condiciones de operación del mismo; estas alteraciones pueden ser causadas por el arranque o paro instantáneo del bombeo ya sea por falla eléctrica o del equipo en si, el cierre o abertura de una válvula, la disminución o incremento del gasto bombeado, etc., las cuales implican variaciones en la presión y la velocidad con respecto al tiempo y a lo largo del conducto.

Las perturbaciones se propagan en forma de ondas a partir del lugar donde se provocan hasta el depósito de almacenamiento o hasta la extremidad del mismo o hasta una bifurcación, un cambio de dirección, etc., donde se refleja total o parcialmente, para después regresar a la sección de origen; la que a su vez la refleja.

Debido a lo anterior, el conducto es recorrido por ondas de presión y velocidad, las cuales se van amortiguando por la disipación de la energía en forma de calor producida por la fricción en el conducto. De no ser por la disipación de la energía, el ciclo producido por el cambio de régimen continuaría por tiempo indefinido.

II.2.1 Ecuaciones fundamentales

El fenómeno de golpe de ariete, así como otros fenómenos hidráulicos, es necesario tener conocimiento de los efectos que estos producen en las obras hidráulicas, con los cuales se deberán tomar las medidas necesarias para disminuir o evitar tales efectos que pueden provocar el colapso de las mismas.

II. TEORIA BASICA

Dichos fenómenos físicos tienen una analogía matemática; para el caso que nos compete, el golpe de ariete se rige por las ecuaciones diferenciales siguientes.

II.2.1.1 Ecuación de movimiento

Para la determinación de esta ecuación se hará uso de la figura 2.1.16, considerando que la coordenada espacial esta representada por la variable x y t el tiempo, aplicando la segunda ley de Newton a un tramo de longitud diferencial, asumiendo que el flujo es unidimensional y que dicho tramo es un volumen de control se tiene

$$pA - \left[pA + \frac{\partial(pA)}{\partial x} dx \right] + \left[p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2} \right] \frac{\partial A}{\partial x} dx - \tau_o \pi D dx + \gamma A \sin \theta dx = \rho A dx \frac{dv}{dt} \quad (2.49)$$

En donde

- v - velocidad media en una sección determinada
- p - presión en la misma sección
- A - Área de la sección referida
- θ - ángulo de inclinación de la tubería con respecto a la horizontal de la misma
- τ_o - esfuerzo cortante de fricción
- D - diámetro de la sección transversal de la tubería
- γ - peso específico del fluido conducido
- ρ - densidad del fluido conducido

Despreciando el término $(dx)^2$ y simplificando, se obtiene'

$$\frac{\partial p}{\partial x} A + \tau_o \pi D - \rho g A \sin \theta + \rho A \frac{dv}{dt} = 0 \quad (2.50)$$

donde g es la aceleración de la gravedad.

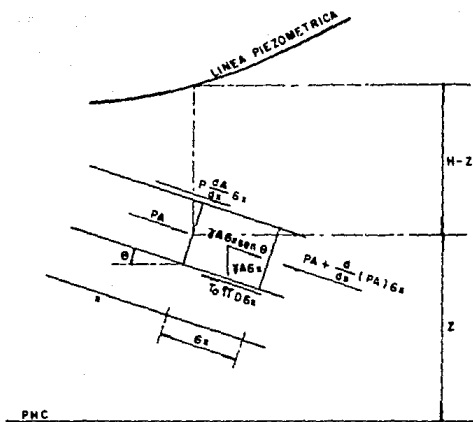


Figura 2.1.16

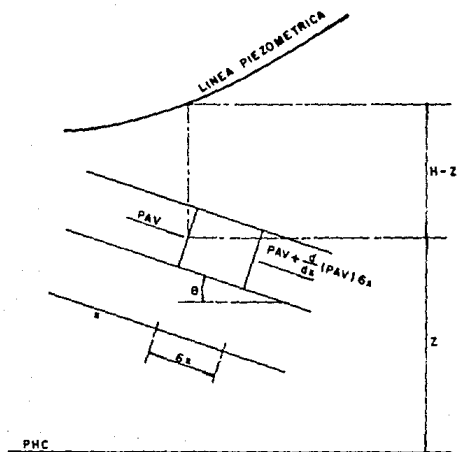


Figura 2.1.17

II. TEORIA BASICA

La presión que ejerce un fluido sobre el medio que lo contiene, se determina de la siguiente manera

$$p = \rho g(H - z) \quad (2.51)$$

Siendo H la carga piezométrica y z la carga de posición, ambas consideradas en la sección donde se quiera medir la presión.

Obteniendo la derivada parcial, se llega a

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho g \left[\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial x} \right] \quad (2.52)$$

Además $\frac{\partial z}{\partial x} = -\text{sen}\theta$, por consiguiente

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho g \left[\frac{\partial H}{\partial x} + \text{sen}\theta \right] \quad (2.53)$$

Las pérdidas de carga, calculadas con la ecuación de Darcy-Weisbach, son

$$\Delta H = f \frac{L}{D} \frac{v^2}{2g} \quad (2.54)$$

Si se hace un balance de fuerzas, en un flujo permanente, puede llegarse a

$$\Delta H \frac{\pi D^2}{4} = \tau_o \pi DL \quad (2.55)$$

Sustituyendo 2.54 en 2.55 se escribe

$$\tau_o = \frac{\rho f v |v|}{8} \quad (2.56)$$

Recordando la definición de derivada total, la aceleración puede expresarse como

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \left[\frac{\partial v}{\partial x} \right] \left[\frac{dx}{dt} \right] = \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.57)$$

II. TEORIA BASICA

Sustituyendo las expresiones 2.53, 2.56 y 2.57 en la 2.50, queda

$$g \frac{\partial H}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial t} + f \frac{v|v|}{2D} = 0 \quad (2.58)$$

Siendo esta la ecuación de movimiento para flujo transitorio en conducciones a presión.

II.2.1.2 Ecuación de continuidad

El principio de conservación de masa, cuando se tiene la condición de flujo transitorio, queda definida como la suma del flujo neto a través de la frontera de un volumen de control y el cambio en el tiempo de la masa dentro del propio volumen de control debe ser nula.

De la figura 2.1.17 y de lo expuesto en el párrafo anterior, se tiene

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho A v) dx + \frac{\partial}{\partial t}(\rho A) dx = 0 \quad (2.59)$$

Dado que dx no depende del tiempo, si se expanden las derivadas de productos de la ecuación anterior se llega a

$$\frac{v}{A} \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{v}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (2.60)$$

De la definición de derivada total, la ecuación anterior queda

$$\frac{1}{A} \frac{dA}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (2.61)$$

Donde el primer término de esta ecuación toma en cuenta los efectos de deformación elástica del tubo y el segundo los de compresibilidad del líquido.

II. TEORIA BASICA

El módulo de compresibilidad volumétrico de un líquido esta definido por

$$K = \frac{dp}{\frac{d\rho}{\rho}} \quad (2.62)$$

Dividiendo entre dt y arreglando terminos se llega a

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{K} \frac{dp}{dt} \quad (2.63)$$

Ahora bien, si se considera que el diámetro del tubo sufre un incremento ΔD , implica un incremento de área, el cual será de

$$\Delta A = \frac{\pi(D + \Delta D)^2}{4} - \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi D \Delta D}{2} + \frac{(\Delta D)^2}{4} \quad (2.64)$$

Despreciando $\frac{(\Delta D)^2}{4}$, se llega a

$$\Delta A = \frac{\pi D \Delta D}{2} \quad (2.65)$$

Considerando la deformación lateral circunferencial total unitaria $\Delta \epsilon_t$, se obtiene

$$\Delta D = \Delta \epsilon_t D \quad (2.66)$$

que sustituyendo en la ecuación 2.65, resulta

$$\Delta A = \frac{\pi D \Delta \epsilon_t D}{2} \quad (2.67)$$

Simplificando términos y haciendo uso de la fórmula para calcular el área de una sección circular, la expresión anterior queda

$$\frac{\Delta A}{A} = 2 \Delta \epsilon_t \quad (2.68)$$

Dividiendo (2.68) entre Δt y además que $\Delta t \rightarrow 0$, se llega a

II. TEORIA BASICA

$$\frac{1}{A} \frac{dA}{dt} = 2 \frac{dc}{dt} \quad (2.69)$$

Recordando la ley de Hooke para materiales elásticos

$$\Delta\sigma = E \Delta\epsilon \quad (2.70)$$

donde

$\Delta\sigma$ - incremento de esfuerzo normal

$\Delta\epsilon$ - incremento de deformación unitaria

E - módulo de elasticidad

Despejando y considerando la deformación lateral total, se tiene

$$\Delta\epsilon_t = \frac{1}{E} \Delta\sigma \quad (2.71)$$

Dividiendo entre Δt y haciendo $\Delta t \rightarrow 0$, se obtiene

$$\frac{d\epsilon_t}{dt} = \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} \quad (2.72)$$

Considerando que el tubo es de pared delgada, la fórmula que determina los esfuerzos correspondientes es

$$\Delta\sigma = \frac{D \Delta p}{2e} \quad (2.73)$$

donde

$\Delta\sigma$ - incremento de esfuerzo normal en la tubería

Δp - incremento de presión en la tubería

D - diámetro de la sección transversal de la tubería

e - espesor de la tubería

Dividiendo la ecuación 2.73 entre Δt y obteniendo el límite $\Delta t \rightarrow 0$ resulta

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{D}{2e} \frac{dp}{dt} \quad (2.74)$$

II. TEORIA BASICA

De las expresiones 2.69 y 2.72, se tiene

$$\frac{1}{A} \frac{dA}{dt} = 2 \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} = \frac{D}{Ee} \frac{dp}{dt} = \frac{n}{Ee} \frac{dp}{dt} C \quad (2.75)$$

Donde C es un valor menor que uno y esta en función del esfuerzo axial y de la condición de apoyo de la tubería.

Sustituyendo las ecuaciones 2.63 y 2.75 en la 2.61, se llega a

$$\left[\frac{1}{K} + \frac{D}{Ee} C \right] \frac{dp}{dt} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (2.76)$$

Las perturbaciones de presión, como las ondas sonoras, se transmiten en el interior de un fluido a una cierta velocidad que se conoce como celeridad, determinándose la misma de la forma siguiente

$$a^2 = \frac{1}{\rho \left[\frac{1}{K} + \frac{D}{Ee} C \right]} \quad (2.77)$$

La anterior expresión es precisamente, el cuadrado de la celeridad de las ondas de presión.

Multiplicando la ecuación 2.76 por el cuadrado de la celeridad (a^2) se llega a

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} + a^2 \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (2.78)$$

Tomando en cuenta la ecuación 2.50, se obtiene

$$\frac{dp}{dt} = v \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial t} = v \rho g \left[\frac{\partial H}{\partial x} + \text{sen} \theta \right] + \rho g \left[\frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial z}{\partial t} \right] \quad (2.79)$$

Al presentarse el fenómeno de golpe de ariete la densidad (ρ) del fluido varía con respecto a la distancia (x) y el tiempo (t) en forma menos importante que la carga (H), además, si el tubo no se mueve $\frac{\partial z}{\partial t} = 0$, por lo tanto se llega a que

II. TEORIA BASICA

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} = v g \left(-\frac{\partial H}{\partial x} + \text{sen} \theta \right) + g \frac{\partial H}{\partial t} \quad (2.80)$$

Sustituyendo 2.78 en 2.80 y dividiendo entre g , se tiene

$$\frac{a^2}{g} \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial t} + \text{sen} \theta = 0 \quad (2.81)$$

Siendo las ecuaciones 2.58 y 2.81 las que rigen el fenómeno de golpe de ariete.

II.2.2 Solución de las ecuaciones fundamentales

Existen diferentes métodos para resolver las ecuaciones que gobiernan el fenómeno del golpe de ariete, de los cuales en este trabajo se expondrán dos que son: el método algebraico y el método de las características.

II.2.2.1. Método algebraico

Considerando en las ecuaciones de movimiento y de continuidad que $\theta = 0$ y $F = 0$, además de que $v \frac{\partial v}{\partial x}$ es pequeña comparada con $\frac{\partial v}{\partial t}$ y $v \frac{\partial H}{\partial x}$ es despreciable con respecto $\frac{\partial H}{\partial t}$ se llega a las ecuaciones que a continuación se mencionan

$$g \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \quad (2.82)$$

$$\frac{a^2}{g} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad (2.83)$$

Ahora si multiplicamos la ecuación 2.83 por $\left[\frac{g}{a^2} \right]$, derivándola con respecto a t y derivando la ecuación 2.82 con respecto a x , restándole el resultado anterior se obtiene

$$\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \quad (2.84)$$

II. TEORIA BASICA

De manera similar, se obtiene

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (2.85)$$

La ecuación 2.84, puede expresarse en términos de presión quedando

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \quad (2.86)$$

Comúnmente se conoce como ecuaciones de onda a las expresiones 2.85 y 2.86; cuya solución la demostró Riemann y obtuvo las ecuaciones siguientes

$$p_x t = p_x o + \Phi \left(t - \frac{x}{a} \right) + \Psi \left(t + \frac{x}{a} \right) \quad (2.87)$$

$$v_x t = v_x o - \frac{g}{\gamma a} \left[\Phi \left(t - \frac{x}{a} \right) + \Psi \left(t + \frac{x}{a} \right) \right] \quad (2.88)$$

Las funciones $\Phi \left(t - \frac{x}{a} \right)$ y $\Psi \left(t + \frac{x}{a} \right)$ dependen de las condiciones de frontera, las cuales pueden ser asumidas a priori, llegando a ser muy complicado si se determinan en forma detallada.

Allievi realizó un método para determinar las funciones anteriores, dicho procedimiento es el siguiente.

El primer problema es la condición de frontera en el punto A (figura 2.1.18), a la entrada del depósito, la presión en este punto debe ser constante, para la condición $P_A = P_o$, en el punto A ($x = L$) que sustituido en la ecuación 2.87 resulta

$$P_A = P_o - \Phi \left(t - \frac{L}{a} \right) + \Psi \left(t + \frac{L}{a} \right) = P_o \quad (2.89)$$

y

$$\Phi \left(t - \frac{L}{a} \right) = - \Psi \left(t + \frac{L}{a} \right) \quad (2.90)$$

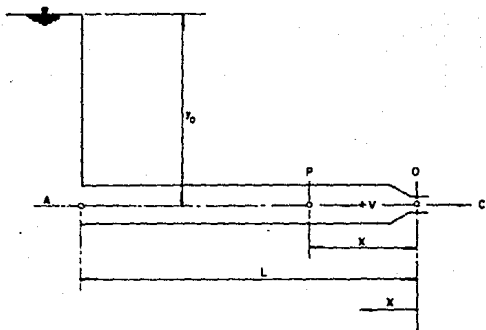


Figure 2.1.18

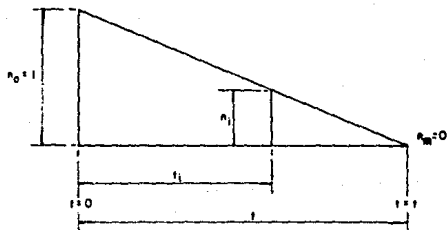


Figure 2.1.19

II. TEORIA BASICA

de este modo la onda primaria $\phi(t - \frac{x}{a})$ que es reflejada en A manteniéndose en valor absoluto, pero con cambio de signo. En el punto A ocurre una reflexión total con inversión de signo. Si t es reemplazada por

$$t = t_1 - \frac{L}{a} \quad (2.91)$$

de lo anterior, la función original puede reescribirse como

$$\phi(t - \frac{L}{a}) = \phi(t_1 - \frac{L}{a} - \frac{L}{a}) = \phi(t_1 - \frac{2L}{a}) = -\psi(t_1) \quad (2.92)$$

La función $\psi(t_1)$ es simplemente igual que la función $-\phi(t_1 - \frac{2L}{a})$, un periodo T anterior, por lo tanto esta función puede ser expresada en forma general por

$$\psi(t) = -\phi(t - T) \quad (2.93)$$

donde

$$T = \frac{2L}{a} \quad (2.94)$$

es el periodo de la tubería, siendo este el tiempo que toma la onda de presión en viajar de 0 a A y de A a 0.

La ecuación 2.93 es una propiedad muy importante del fenómeno de reflexión de la onda, pero es solamente válida cuando la reflexión ocurre en A, también es la clave del análisis del golpe de ariete en tuberías simples.

Considerando que la onda de presión sucede en los tiempos

$$t_1, t_1 + T, t_1 + 2T, \dots, t_1 + nT \quad (2.95)$$

o (si t_1 se elige que coincida con el inicio de la onda de presión) $t_1 = 0$ los tiempos son

II. TEORIA BASICA

$$0, T, 2T, \dots nT \quad (2.96)$$

Las ecuaciones 2.87 y 2.88 pueden escribirse desde el punto 0 hasta el punto final aguas abajo; dejando que Φ_i represente más en resumen a la función $\Phi(t_i)$ se tiene

$$P_{i-1} = P_0 + \Phi_{i-1} + \Psi_{i-1} \quad (2.97)$$

$$P_i = P_0 + \Phi_i + \Psi_i \quad (2.98)$$

Y si v representa la velocidad en la tubería inmediatamente aguas arriba a la salida de la válvula, resulta

$$v_{i-1} = v_0 - \frac{g}{\gamma a} (\Phi_{i-1} - \Psi_{i-1}) \quad (2.99)$$

$$v_i = v_0 - \frac{g}{\gamma a} (\Phi_i - \Psi_i) \quad (2.100)$$

La ecuación 2.93 puede reescribirse de la siguiente forma

$$\Psi_i = \Phi_{i-1} \quad (2.101)$$

$$P_{i-1} = P_0 + \Phi_{i-1} - \Phi_{i-2} \quad (2.102)$$

$$P_i = P_0 + \Phi_i - \Phi_{i-1} \quad (2.103)$$

$$v_{i-1} = v_0 - \frac{g}{\gamma a} (\Phi_{i-1} + \Phi_{i-2}) \quad (2.104)$$

$$v_i = v_0 - \frac{g}{\gamma a} (\Phi_i + \Phi_{i-1}) \quad (2.105)$$

Sumando las ecuaciones 2.102 y 2.103, se obtiene

$$P_i + P_{i-1} = 2 P_0 + \Phi_i - \Phi_{i-2} \quad (2.106)$$

Restando la expresión 2.105 a 2.104, se llega a

II. TEORIA BASICA

$$v_i - v_{i-1} = - \frac{g}{\gamma a} (\psi_i - \psi_{i-2}) \quad (2.107)$$

Despejando el término $(\psi_i - \psi_{i-2})$ de 2.107, se tiene

$$(\psi_i - \psi_{i-2}) = \frac{\gamma a}{g} (v_{i-2} - v_i) \quad (2.108)$$

Sustituyendo la expresión anterior en la 2.106, resulta

$$P_i + P_{i-1} - 2P_0 = \frac{\gamma a}{g} (v_{i-1} - v_i) \quad (2.109)$$

y dividiendo entre γ , se obtiene

$$h_i + h_{i-1} - 2 h_0 = \frac{a}{g} (v_{i-1} - v_i) \quad (2.110)$$

siendo la expresión anterior la fórmula clásica de Allievi.

En las ecuaciones anteriores el subíndice 0 indica, las condiciones en flujo establecido, mientras el subíndice i se refiere a cualquier instante después de provocado la alteración del cambio de régimen.

La fórmula clásica de Allievi, relaciona la carga de presión dinámica h_i y la velocidad v_i al final aguas abajo de tuberías simples. La eliminación de las funciones integrales $\psi(t - \frac{x}{a})$ y $\psi(t + \frac{x}{a})$ se realizó con el debido uso de la condición de frontera $p_A = p_0$ y reduciendo el problema a un número de ecuaciones simples conteniendo solamente la carga de presión dinámica h_i y la correspondiente velocidad v_i al cierre de la boquilla o válvula al final aguas abajo.

Adicionalmente se requiere la introducción de una segunda condición de frontera relacionando h_i y v_i . Allievi determinó que la ecuación de Bernoulli es válida al final aguas abajo e igual si se tiene flujo establecido o variable.

II. TEORIA BASICA

Si c_i es la velocidad a la salida y A_i el area efectiva aguas abajo en la válvula y t_i el tiempo, la velocidad al cierre de la válvula es

$$v_i = c_i \frac{A_i}{A} = \frac{A_i}{A} \sqrt{2g h_i} \quad (2.111)$$

si A_o es el area efectiva de la válvula completamente abierta, en las condiciones de flujo establecido ($Q = Q_o$), entonces $A_i = n_i A_o$ (el grado de abertura de la válvula es n_i), con flujo establecido $Q = Q_o$, los otros valores son $n_i = n_o = 1$, $v = v_o$ y $c = c_o$.

ahora v_i puede expresarse como

$$v_i = n_i \frac{A_o}{A} \sqrt{2g h_i} \quad (2.112)$$

y con

$$v_o = n_o \frac{A_o}{A} \sqrt{2g h_o} \quad (2.113)$$

de las dos expresiones anteriores se llega a

$$v_i = n_i v_o \sqrt{\frac{h_i}{h_c}} \quad (2.114)$$

Introduciendo la ecuación anterior en la expresión en cadena de Allievi, lleva a relaciones entre las dos variables que contienen a h_i y $h_i^{1/2}$. Esto es más conveniente si las ecuaciones en cadena de Allievi se manejan en términos adimensionales con las siguientes relaciones

$$\zeta_i^2 = \frac{h_i}{h_c} \quad (2.115)$$

siendo esta la relación de presión; también

II. TEORIA BASICA

$$\zeta_i^2 - 1 \quad (2.116)$$

es la relación de exceso de presión constante o establecida y

$$\rho = \frac{a v_0}{2g h_0} \quad (2.117)$$

como la característica de la tubería.

Si τ es el tiempo requerido para el cierre o abertura de la válvula, se llega a otra expresión que puede ser utilizada, siendo esta la que a continuación se menciona

$$\theta = \frac{\tau}{T} \quad (2.118)$$

reemplazando las ecuaciones anteriores en la 2.110, se obtiene

$$\zeta_{i-1}^2 + \zeta_i^2 - 2 = 2\rho (n_{i-1} \zeta_{i-1} - n_i \zeta_i) \quad (2.119)$$

II.2.2.1.1 Condiciones de frontera

En muchos problemas de la práctica la ley de cierre o apertura de la válvula es o se puede considerar semejante a una ley lineal; es decir, el factor de cierre n_i varía linealmente en t_i .

II.2.2.1.2 Cierre lineal

Para un cierre lineal (ver figura 2.1.19) el grado de abertura de la válvula es

$$n_i = \frac{\tau - t_i}{\tau} \quad (2.120)$$

y de acuerdo con $\theta = \frac{\tau}{T}$ e $i = \frac{t_i}{T}$

se tiene entonces que

$$n_1 = 1 - \frac{1}{\theta} \quad (2.121)$$

II.2.2.1.3 Cierre rápido ($\tau \leq T$ ó $\theta \leq 1$)

En el instante $t = 0$, el grado de abertura es $n_0 = 1$ y la relación de presión $\zeta = 1$; introduciendo relaciones adimensionales $t_r = \frac{t}{T}$ las condiciones en el tiempo τ , se describen por $t_r = 1$, $n_1 = 0$, sustituyendo estos valores en la ecuación adimensional de Allievi, se tiene

$$\zeta_1^2 - 1 = 2\rho \quad (2.122)$$

reemplazando en esta ecuación los términos adimensionales, resulta

$$h - h_0 = \frac{a v_0}{g} \quad (2.123)$$

la ecuación anterior se conoce con el nombre de ecuación de Joukowsky y permite determinar la máxima sobrepresión que ocurriría en la sección inmediata a la válvula, si el tiempo de cierre τ fuera menor que el tiempo característico T .

II.2.2.1.4 Cierre lento ($\tau > T$ ó $\theta > 1$)

De $\zeta_0 n_0 = 1$ y de la ecuación 2.119 (para la primera condición), resulta la siguiente expresión para la carga de presión en la válvula, al final del primer periodo T , donde $n_1 = 1 - \frac{1}{\theta}$

$$\zeta_1 = -\rho n_1 + \sqrt{\rho^2 n_1^2 + 1 + 2\rho} \quad (2.124)$$

para un cierre lineal ocurrido durante el intervalo τ , Allievi llegó a que los valores de $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \dots$ se acercan al valor final ζ_m que es fácilmente calculable con la ecuación 2.119, resultando

$$\zeta_{i-1} \cong \zeta_i = \zeta_m \quad (2.125)$$

II. TEORIA BASICA

y

$$n_{i-1} - n_i = \frac{1}{\theta} \quad (2.126)$$

llegando a

$$\zeta_m^2 - \frac{\rho}{\theta} \zeta_m - 1 = 0 \quad (2.127)$$

cuya solución es

$$\zeta_m = \frac{\rho}{2\theta} + \sqrt{\left(\frac{\rho}{2\theta}\right)^2 + 1} \quad (2.128)$$

II.2.2.1.5 Abertura lineal

Para este caso (ver figura 2.1.20), se parte de $Q = 0$ ($n_0 = 0$) a $Q = Q_0$ ($n_m = 1$), a un instante $t_r = \frac{T}{T} = 1$, con $n = n_i = \frac{1}{\theta}$, allí ocurre la primera onda de presión de intensidad

$$\zeta_i^2 - 1 = -2 \frac{\rho}{\theta} \zeta_i \quad (2.129)$$

cuya solución es

$$\zeta_i = -\frac{\rho}{\theta} + \sqrt{\left(\frac{\rho}{\theta}\right)^2 + 1} \quad (2.130)$$

con $n_i = \frac{1}{\theta}$ sustituido en la ecuación dimensional de Allievi (2.119), resulta

$$\zeta_i^2 + \zeta_{i+1}^2 - 2 = \frac{2\rho}{\theta} \left[1 \zeta_i - (i+1) \zeta_{i+1} \right] \quad (2.131)$$

con la apertura lineal lenta, es la misma aproximación aplicada al final del movimiento de la válvula como en el cierre lineal lento, obteniendo

$$\zeta_i \cong \zeta_{i+1} = \zeta_m \quad (2.132)$$

llegando a

$$\zeta_m^2 + \frac{\rho}{\theta} \zeta_m - 1 = 0 \quad (2.133)$$

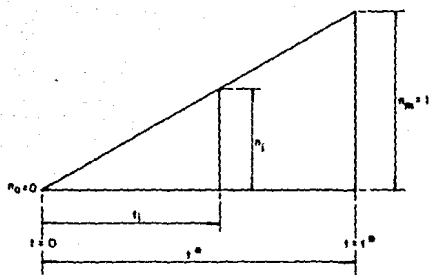


Figure 2.1.20

II. TEORIA BASICA

cuya solución es

$$\zeta_m = -\frac{\rho}{2\theta} + \sqrt{\left[\frac{\rho}{2\theta}\right]^2 + 1} \quad (2.134)$$

II.2.2.1.6 Golpe de ariete en cualquier punto de la tubería

La ecuación en cadena de Allievi (2.110) permite determinar las oscilaciones de presión en la sección próxima a la válvula; sin embargo, en secciones cualesquiera, estas se pueden determinar mediante una generalización de dicha ecuación.

Si se suman las ecuaciones 2.87 y 2.88, se obtiene

$$p_{x_1} - p_{x_0} + \frac{\gamma a}{g} (v_{x_0} - v_{x_1}) = 2\psi \left(t - \frac{x}{a}\right) \quad (2.135)$$

y si se resta la segunda de la primera, se tendrá

$$p_{x_1} - p_{x_0} - \frac{\gamma a}{g} (v_{x_0} - v_{x_1}) = 2\psi \left(t + \frac{x}{a}\right) \quad (2.136)$$

Las ecuaciones 2.135 y 2.136 son válidas para cualquier sección de una tubería de características única; así, por ejemplo, considerando que 2.137 se aplica a dos secciones C y D (de coordenadas XC y XD) para los instantes h e i, respectivamente, resulta

$$p_{c_h} - p_{c_0} + \frac{\gamma a}{g} (v_{c_0} - v_{c_h}) = 2\psi \left(t_h - \frac{x_c}{a}\right) \quad (2.137)$$

$$p_{d_i} - p_{d_0} + \frac{\gamma a}{g} (v_{d_0} - v_{d_i}) = 2\psi \left(t_i - \frac{x_d}{a}\right) \quad (2.138)$$

Para poder igualar 2.137 y 2.138 es necesario que ψ adopte el mismo valor en las secciones C y D y para que esto suceda, los argumentos deben ser iguales, es decir

II. TEORÍA BÁSICA

$$t_h - \frac{x_c}{a} = t_i - \frac{x_d}{a} \quad (2.139)$$

o bien, si se dividen ambos miembros de 2.138 entre T y se utiliza la notación antes usada, con $aT = 2L$, se obtiene

$$h = i - \frac{x_d - x_c}{2L} \quad (2.140)$$

Esto significa que, para que θ se presente con la misma intensidad en C y D, es necesario que transcurra un intervalo de tiempo $\frac{x_d - x_c}{2L}$.

De este modo, si se igualan 2.137 y 2.138, con $\frac{P}{\gamma} = h$ y $V_c = V_c$, se obtiene

$$h_h - h_i - (h_c - h_d) = \frac{a}{g} (V_h - V_i) \quad (2.141)$$

Si se aplica 2.136 a las mismas secciones C y D, pero ahora para los instantes j e i , respectivamente y se hacen razonamientos análogos, se tendrá

$$h_j - h_i - (h_c - h_d) = \frac{a}{g} (V_i - V_j) \quad (2.142)$$

Se debe, además, cumplir

$$j = i + \frac{x_d - x_c}{2L} \quad (2.143)$$

A las ecuaciones 2.141 y 2.142 se les conoce como ecuaciones conjugadas del golpe de ariete o ecuaciones de Angus, y permiten el cálculo de la carga de presión en un punto D para el instante i , si se conoce la misma en un punto C para instantes h y j antes y después de i y la variación de las velocidades en ambas secciones a lo largo del tiempo.

II. TEORIA BASICA

En caso de que fuera posible conocer la variación de la velocidad sólo en una sección (por ejemplo en la C), se puede eliminar V_i si se suman 2.141 y 2.142, con lo que se obtiene una ecuación única que es

$$h_c^h + h_c^j - 2h_c^i - 2(h_o^c - h_o^d) = \frac{a}{g} (V_c^h - V_c^j) \quad (2.144)$$

En el caso más general, se conocen las oscilaciones de presión en la sección B de la válvula a partir de las ecuaciones de Allievi; de este modo, con las ecuaciones 2.141 y 2.142 se pueden conocer las oscilaciones de presión de una sección cualquiera de la tubería.

Así, por ejemplo, considérese que C coincide con B y que el punto D se encuentra a la mitad de la tubería ($x = \frac{L}{2}$).

Los instantes h y j, de acuerdo con 2.140 y 2.143, serían

$$h = i - \frac{L/2}{2L} = i - 1/4$$

$$j = i + 1/4$$

Si corresponde al instante 1, entonces $h = 0.75$ y $j = 1.25$; por tanto, de 2.144 resulta

$$2h_{D_{0.75}} = h_{B_{0.75}} + h_{B_{1.25}} - 2(h_o^B - h_o^D) - \frac{a}{g} (V_{B_{0.75}} - V_{B_{1.25}}) \quad (2.145)$$

II.2.2.1.7 Golpe de ariete en tuberías con características variables

Lo descrito anteriormente corresponde a tuberías con diámetro, espesor y propiedades elásticas constantes en toda su longitud, pero se tienen casos en los que la tubería varía sus características geométricas y/o elásticas a lo largo de su

II. TEORIA BASICA

trayectoria, siendo aplicable lo expuesto en este capítulo para determinar la magnitud de la carga piezométrica en cualquier sección de la tubería partiendo de algunas hipótesis simplificadoras mediante las que se sustituye la tubería real por una equivalente.

El análisis de una tubería con características geométricas variables se lleva a cabo partiendo de la hipótesis de que la energía cinética del agua para el flujo permanente y el tiempo de traslación de la onda de presión para el flujo transitorio es lo mismo para la tubería real y equivalente.

Para la tubería equivalente, la energía cinética E_e puede expresarse como

$$E_e = \frac{\gamma}{2g} \left[L_1 A_1 + L_2 A_2 + \dots + L_n A_n \right] v_e^2 \quad (2.146)$$

donde

- E_e - energía cinética equivalente
- γ - peso específico del agua
- g - aceleración de la gravedad
- v_e - velocidad equivalente
- A_n - área de la sección transversal de la tubería del tramo n
- L_n - longitud del tramo n

para la tubería real

$$E_r = \frac{\gamma}{2g} \left[L_1 A_1 v_1^2 + L_2 A_2 v_2^2 + \dots + L_n A_n v_n^2 \right] \quad (2.147)$$

donde

- E_r - energía cinética real
- γ - peso específico del agua
- g - aceleración de la gravedad
- v_n - velocidad en el tramo n

II. TEORIA BASICA

A_n - Area de la sección transversal de la tubería del tramo n

L_n - longitud del tramo n

igualando ambas ecuaciones, recordando la ecuación de continuidad y despejando v_0 , se obtiene

$$v_0 = \frac{Q \sum_{i=1}^n L_i v_i}{\sum_{i=1}^n L_i A_i} \quad (2.148)$$

por otra parte, de acuerdo con la hipótesis referente al tiempo de traslación, se puede escribir

$$\frac{L_1}{a_1} + \frac{L_2}{a_2} + \dots + \frac{L_n}{a_n} = \frac{\sum_{i=1}^n L_i}{a_0} \quad (2.149)$$

o bien

$$a_0 = \frac{\sum_{i=1}^n L_i}{\sum_{i=1}^n \frac{L_i}{a_i}} \quad (2.150)$$

siendo a_0 la celeridad de la onda en el conducto equivalente.

Una vez obtenidos los valores de v_0 y a_0 se puede determinar la característica de la tubería ρ'

$$\rho' = \frac{a_0 v_0}{2g h_0} \quad (2.151)$$

y el periodo T' equivalente como

II. TEORIA BASICA

$$T' = \frac{2 \sum_{i=1}^n L_i}{a} \quad (2.152)$$

con los cuales se aplica la metodología descrita anteriormente.

El método de Allievi es aplicable para tuberías con diámetro y espesor de pared constantes en toda la trayectoria de la misma, y para maniobras lentas.

II.2.2.2 Método de las características

Las ecuaciones que rigen el fenómeno de golpe de ariete; expresiones 2.58 y 2.81, siendo estas las de movimiento y de continuidad forman un sistema de ecuaciones diferenciales parciales particulares que pueden ser transformadas en cuatro ecuaciones diferenciales ordinarias por medio del método de las características. Recordando que pueden ser despreciados los términos no lineales $v \frac{\partial v}{\partial x}$ y $v \frac{\partial H}{\partial x}$, se considera que $\theta = 0$, se tiene

$$L_1 = g \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial t} + f \frac{v|v|}{2D} = 0 \quad (2.153)$$

$$L_2 = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{a^2}{g} \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (2.154)$$

Las ecuaciones 2.153 y 2.154 pueden combinarse linealmente, utilizando una constante desconocida λ , por lo tanto se llega a

$$L = L_1 + \lambda L_2 \quad (2.155)$$

Sustituyendo 2.153 y 2.154 en 2.155, da como resultado

$$L = \lambda \left[\frac{g}{\lambda} \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial t} \right] + \left[\lambda \frac{a^2}{g} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial t} \right] + f \frac{v|v|}{2D} = 0 \quad (2.156)$$

II. TEORIA BASICA

Recordando la definición de derivada total y aplicándola en 2.156 se obtiene la ecuación diferencial ordinaria

$$\lambda \frac{dh}{dt} + \frac{dv}{dt} + f \frac{v|v|}{2D} = 0 \quad (2.157)$$

Siempre y cuando se cumpla que

$$\frac{dx}{dt} = \frac{g}{\lambda} = \lambda \frac{a^2}{g} \quad (2.158)$$

De la solución de la ecuación anterior se obtienen dos valores reales para la misma, siendo estos

$$\lambda = \pm \frac{g}{a} \quad (2.159)$$

que sustituidos en 2.158, llevan a que

$$\frac{dx}{dt} = \pm a \quad (2.160)$$

por lo tanto, considerando 2.159 en 2.157 y los valores correspondientes de 2.160, se obtiene el siguiente sistema de cuatro ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\left. \begin{aligned} \frac{g}{a} \frac{dh}{dt} + \frac{dv}{dt} + f \frac{v|v|}{2D} = 0 \\ \frac{dx}{dt} = a \end{aligned} \right\} C^+ \quad (2.161)$$

$$\frac{dx}{dt} = a \quad (2.162)$$

$$\left. \begin{aligned} -\frac{g}{a} \frac{dh}{dt} + \frac{dv}{dt} + f \frac{v|v|}{2D} = 0 \\ \frac{dx}{dt} = -a \end{aligned} \right\} C^- \quad (2.163)$$

$$\frac{dx}{dt} = -a \quad (2.164)$$

Debe hacerse notar que de acuerdo con el desarrollo efectuado, la ecuación 2.161 es válida sólo en la dirección dada por la expresión 2.162 así como la 2.163 en la dirección de 2.164.

II. TEORIA BASICA

Ahora bien, la solución de las ecuaciones 2.161 y 2.163, puede efectuarse si se expresan en términos de diferencias finitas.

De la figura 2.1.21, la longitud del tubo se ha dividido en N tramos iguales de Δx de longitud, considerando un intervalo de tiempo $\Delta t = \frac{\Delta x}{a}$ (de las ecuaciones 2.162 y 2.164). La ecuación 2.161 sería válida en la dirección AP mostrada en dicha figura y la ecuación 2.163 en la dirección BP, suponiendo conocidas las características de los puntos A y B (H_A, v_A y H_B, v_B), las ecuaciones en cuestión determinarán un sistema de dos ecuaciones que permitirán conocer la carga piezométrica y la velocidad en el punto P (H_P, v_P).

Las ecuaciones 2.161 y 2.163 pueden escribirse en términos del gasto. Haciendo la consideración anterior y multiplicando la ecuación 2.161 por $\frac{adt}{g} = \frac{dx}{g}$ y se integra a lo largo de la línea AP, se obtiene

$$\int_{H_A}^{H_P} dh + \frac{a}{gA} \int_{Q_A}^{Q_P} dQ + \frac{f}{2gDA^2} \int_{x_A}^{x_P} Q|Q| dx = 0 \quad (2.165)$$

Para integrar el último término de la ecuación anterior es necesario aproximar y suponer que es válido $Q = Q_A$, lo cual se cumple de mejor modo mientras más pequeñas sean Δx y Δt , por lo tanto la ecuación 2.165 queda

$$H_P - H_A + \frac{a}{gA} (Q_P - Q_A) + \frac{f\Delta x}{2gDA^2} Q_A |Q_A| = 0 \quad (2.166)$$

De manera similar se integra la ecuación 2.163, llegando a

$$H_P - H_B + \frac{a}{gA} (Q_P - Q_B) + \frac{f\Delta x}{2gDA^2} Q_B |Q_B| = 0 \quad (2.167)$$

Expresando de manera general las ecuaciones 2.166 y 2.167, se tiene

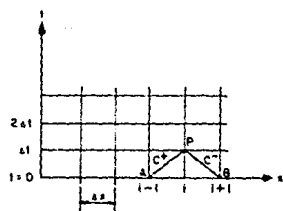


Figure 2.1.21

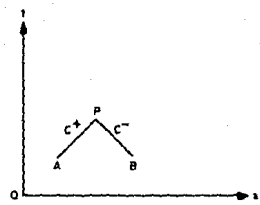


Figure 2.1.22

II. TEORIA BASICA

$$H_{P_i} = C_P - BQ_{P_i} \quad (2.168)$$

$$H_{P_i} = C_M + BQ_{P_i} \quad (2.169)$$

donde

$$C_P = H_{i-1} + BQ_{i-1} - RQ_{i-1}|Q_{i-1}| \quad (2.170)$$

$$C_M = H_{i+1} - BQ_{i+1} + RQ_{i+1}|Q_{i+1}| \quad (2.171)$$

además

$$B = \frac{a}{gA} \quad (2.172)$$

$$R = \frac{f\Delta x}{2gDA^2} \quad (2.173)$$

Las ecuaciones 2.168 y 2.169 forman un sistema en términos de H_{P_i} y Q_{P_i} cuya solución es

$$H_{P_i} = \frac{C_P + C_M}{2} \quad (2.174)$$

$$Q_{P_i} = \frac{C_P - C_M}{2B} \quad (2.175)$$

Generalmente, el cálculo del flujo transitorio comienza con los valores para flujo establecido permanente. Así para $t=0$, H y Q son conocidos para todas las secciones i del tubo. A partir de estos y de acuerdo con el procedimiento planteado, pueden calcularse todos los valores de dichas variables para $t=\Delta t$ e $i=1,2,3, N$. Esta secuencia se puede aplicar reiteradamente para $t=2\Delta t, 3\Delta t, etc.$, hasta que se desee interrumpirla.

II.2.2.2.1 Condiciones de frontera

En la frontera $i=1$ sólo se dispone de la ecuación 2.168 mientras que en la frontera $i=NS=N+1$, sólo con la 2.169 como se esquematiza en las figuras 2.1.22 y 2.1.23. Por tal motivo, es necesario contar en cualquier frontera con una relación adicional entre H y

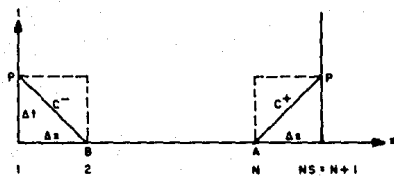


Figure 2.1.23

II. TEORIA BASICA

Q, a fin de poderlas determinar. A continuación se tratan las condiciones más frecuentes en una estación de bombeo.

II.2.2.2.1.1 Tanque de carga constante

Si en el extremo inicial de una tubería se conoce la carga H_{P_1} y constante a lo largo del tiempo, entonces la ecuación 2.169 (característica negativa) se puede despejar el gasto

$$Q_{P_1} = \frac{H_{P_1} - C_M}{B} \quad (2.176)$$

De manera similar se hace para el extremo final al cual le corresponde la característica positiva.

II.2.2.2.1.2 Bomba en el extremo inicial de la tubería

Si se coloca una bomba centrífuga con una velocidad de rotación constante en el extremo inicial de una tubería, se dispone de una relación entre H y Q a través de las curvas características del equipo. Dicha relación se puede manejar en forma tabular o por medio de la siguiente expresión

$$H_P = H_S + a_1 Q_P + a_2 Q_P^2 \quad (2.177)$$

En donde se ha considerado que el plano horizontal de referencia (PHR) se ha tomado en el nivel de succión y H_S , a_1 y a_2 dependen de la forma de la curva característica.

Resolviendo simultáneamente 2.169 y 2.177, se obtiene

$$Q_{P_1} = \frac{1}{2a_2} \left[B - a_1 - \sqrt{(B - a_1)^2 + 4a_2(C_M - H_S)} \right] \quad (2.178)$$

Una vez que Q_{P_1} es conocido, H_{P_1} se determina de 2.169 ó de 2.177

II. TEORIA BASICA

II.2.2.2.1.3 Arranque de una bomba

Para entender y aplicar el método de las características en este caso particular, se auxiliara de la figura 2.1.24.

Cuando se enciende una bomba, se supone que la velocidad de rotación crece desde cero hasta la velocidad nominal o de diseño (N_R) en forma lineal. El tiempo de encendido, para esta suposición se considera como un tercio del tiempo real de encendido; ahora considerando que

$$\alpha = \frac{N}{N_R} \quad (2.179)$$

Siendo N la velocidad de rotación en cualquier instante.

Por lo anterior y considerando las leyes de similitud para bombas con un tamaño fijo, se llega a

$$\frac{H}{\alpha^2} = \text{constante} \quad (2.180)$$

$$\frac{Q}{\alpha} = \text{constante} \quad (2.181)$$

por lo tanto puede escribirse que

$$H_{P2,1} + H_{P1,NS} = \alpha^2 H_2 + a_1 \alpha Q_{P1,NS} + a_2 Q_{P1,NS} \quad (2.182)$$

Si la ecuación anterior se combina con las ecuaciones 2.181 y 2.162, tenemos

$$Q_{P1,NS} = Q_{P2,1} = \frac{B_1 + B_2 + a_1 \alpha}{2a_2} \left[1 - \sqrt{\frac{4a_2 (\alpha^2 H_2 + C_{P1} - C_{M2})}{(B_1 + B_2 - a_1 \alpha)^2}} \right] \quad (2.183)$$

Habiendo determinado el gasto, se puede calcular las cargas con las ecuaciones 2.161 y 2.162.

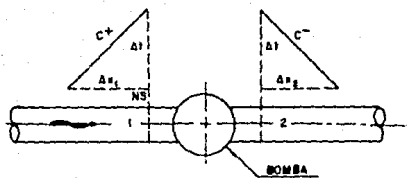


Figura 2.1.24

II. TEORIA BASICA

II.2.2.2.1.4 Paro brusco de una bomba

Cuando existe la interrupción de la energía eléctrica o el paro de una bomba, se produce el fenómeno transitorio del golpe de ariete, para lo cual es necesario determinar sus efectos que produce en las tuberías que conforman al sistema.

Considerando las leyes de similitud de bombas y que tenemos la misma bomba operando en dos situaciones distintas; además de trabajar con características adimensionales, se tiene

$$h = \frac{H_B}{H_{BR}} \quad (2.184)$$

$$\beta = \frac{T}{T_R} \quad (2.185)$$

$$v = \frac{Q}{Q_R} \quad (2.186)$$

$$\alpha = \frac{N}{N_R} \quad (2.187)$$

Donde el subíndice R significa el punto de mayor eficiencia, ahora expresando las curvas características de una bomba en los términos siguientes

$$\frac{h}{\alpha^2 + v^2} \quad \text{vs} \quad \pi + \tan^{-1}\left(\frac{v}{\alpha}\right) \quad (2.188)$$

$$\frac{\beta}{\alpha^2 + v^2} \quad \text{vs} \quad \pi + \tan^{-1}\left(\frac{v}{\alpha}\right) \quad (2.189)$$

Si consideramos que $x = \pi + \tan^{-1}\left(\frac{v}{\alpha}\right)$, se obtiene

$$W H(x) = \frac{h}{\alpha^2 + v^2} \quad (2.190)$$

II. TEORIA BASICA

$$W B(x) = \frac{\beta}{\alpha^2 + v^2} \quad (2.191)$$

De la característica positiva (tubo de succión), se tiene

$$H_{PS,N+1} = C_{P,N} - B_S Q_{PS,N+1} \quad (2.192)$$

en la cual

$$C_{P,N} = H_{S,N} + B_S Q_{S,N} - R_S Q_{R,N} |Q_{S,N}| \quad (2.193)$$

donde

$$B_S = \frac{a_S}{g A_S} \quad (2.194)$$

$$R_S = \frac{f \Delta x_S}{2g D_S A_S^2} \quad (2.195)$$

Para la característica negativa (tubo de descarga), se obtiene

$$H_{Pd,1} = C_{M,2} - B_d Q_{Pd,1} \quad (2.196)$$

en la cual

$$C_{M,2} = H_{d,2} - B_d Q_{d,2} + R_d Q_{d,2} |Q_{d,2}| \quad (2.197)$$

donde

$$B_d = \frac{a_d}{g A_d} \quad (2.198)$$

$$R_d = \frac{f \Delta x_d}{2g D_d A_d^2} \quad (2.199)$$

De la ecuación de continuidad

II. TEORIA BASICA

$$Q_{PS, N+1} = Q_{Pd, t} \quad (2.200)$$

por lo tanto se llega a

$$H_n = H_n h = H_n (\alpha^2 + v^2) WH \left(n + \tan^{-1} \frac{v}{\alpha} \right) \quad (2.201)$$

La curva WH como función de $x = n + \tan^{-1} \left(\frac{v}{\alpha} \right)$ puede ser reemplazada por una línea recta que la aproxime en la vecindad de x , un valor aproximado de x , se puede obtener por extrapolación de α y v de cálculos para intervalos de tiempo anteriores obteniéndose

$$I = \text{valor entero} \left(\frac{x}{\Delta x} + 1 \right) \quad (2.202)$$

además

$$(I - 1) \Delta x, WH(I) \quad (2.203)$$

$$I \Delta x, WH(I + 1) \quad (2.204)$$

siendo estos dos puntos a lo largo de los que se puede trazar la recta de aproximación $WH = A_0 + A_1 x$, siendo

$$A_1 = \frac{WH(I+1) - WH(I)}{\Delta x} \quad (2.205)$$

$$A_0 = WH(I-1) - IA_1 \Delta x \quad (2.206)$$

sustituyendo la recta de aproximación en 2.201, se tiene

$$H_n = H_n (\alpha^2 + v^2) \left[A_0 + A_1 \left(n + \tan^{-1} \frac{v}{\alpha} \right) \right] \quad (2.207)$$

sustituyendo la ecuación de la característica positiva y negativa, además de la de continuidad en la ecuación anterior

II. TEORIA BASICA

$$F_s = H_{PM} - B_s Q_v + H_m (\alpha^2 + v^2) \{A_o + A_s (\pi + \tan^{-1} \frac{v}{\alpha})\} = 0 \quad (2.208)$$

donde

$$H_{PM} = C_{P,N} - C_{M,Z} \quad (2.209)$$

$$B_s Q_v = (B_z + B_d) Q_m \quad (2.210)$$

considerando

$$Q_{Pd,s} = Q_{PM,N+1} = v Q_m \quad (2.211)$$

La ecuación de inercia de una bomba, se puede escribir como

$$T = - \frac{WR^2}{g} \frac{d\omega}{dt} \quad (2.212)$$

$$\text{si } T = \frac{T_o + T_p}{2} \quad (2.213)$$

Siendo T_o el valor del par motor en flujo establecido al inicio de Δt y T_p el desconocido al final del mismo, y si se considera que

$$\omega = N_m \frac{2\pi}{60} = N_m \frac{\pi}{30} = \alpha \quad (2.214)$$

$$\beta_o = \frac{T_o}{T_m} \quad (2.215)$$

$$\beta = \frac{T_p}{T_m} \quad (2.216)$$

Escribiendo la ecuación de inercia en términos de diferencias finitas obtenidas, se llega a

$$\beta + \beta_o - C_{M,Z} (\alpha_o - \alpha) = 0 \quad (2.217)$$

siendo α_o , la velocidad adimensional al principio de Δt y

$$C_{21} = \frac{WR^2}{2} \frac{N_R}{T_R} \frac{\pi}{15\Delta t} \quad (2.210)$$

de la ecuacion 2.191

$$\beta = (\alpha^2 + v^2) WB(x) = (\alpha^2 + v^2) \left[B_0 + B_1 \left(\pi + \tan^{-1} \frac{v}{\alpha} \right) \right] \quad (2.219)$$

donde B_0 y B_1 se determinan de manera similar que A_0 y A_1

$$F_2 = (\alpha^2 + v^2) \left[B_0 + B_1 \left(\pi + \tan^{-1} \frac{v}{\alpha} \right) \right] \quad (2.220)$$

La solución simultánea de F_1 y F_2 proporcionan los valores de α y v y estos de $Q_{PS,N+1}$, $K_{Pd,1}$ y T_p .

Como el sistema de ecuaciones formado por F_1 y F_2 es no lineal, se utiliza el método iterativo de Newton-Raphson para obtener su solución

$$F_1 + \frac{\partial F_1}{\partial v} \Delta v + \frac{\partial F_1}{\partial \alpha} \Delta \alpha = 0 \quad (2.221)$$

$$F_2 + \frac{\partial F_2}{\partial v} \Delta v + \frac{\partial F_2}{\partial \alpha} \Delta \alpha = 0 \quad (2.222)$$

siendo

$$\Delta \alpha = \frac{F_2 / \frac{\partial F_2}{\partial v} - F_1 / \frac{\partial F_1}{\partial v}}{\frac{\partial F_1}{\partial \alpha} / \frac{\partial F_1}{\partial v} - \frac{\partial F_2}{\partial \alpha} / \frac{\partial F_2}{\partial v}} \quad (2.223)$$

$$\Delta v = - \frac{F_1}{\frac{\partial F_1}{\partial v}} - \Delta \alpha \frac{\frac{\partial F_1}{\partial \alpha}}{\frac{\partial F_1}{\partial v}} \quad (2.224)$$

cuyas derivadas son

II. TEORIA BASICA

$$\frac{\partial F_1}{\partial v} = -B_0 Q + H_m \left(2v \left[A_0 + A_1 \left(\pi + \tan^{-1} \frac{v}{\alpha} \right) \right] + A_1 x \right) \quad (2.225)$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = H_m \left[2\alpha \left[A_0 + A_1 \left(\pi + \tan^{-1} \frac{v}{\alpha} \right) \right] - A_1 v \right] \quad (2.226)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial \alpha} = 2v \left[B_0 + B_1 \left(\pi + \tan^{-1} \frac{v}{\alpha} \right) \right] + B_1 \alpha \quad (2.227)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = 2\alpha \left[B_0 + B_1 \left(\pi + \tan^{-1} \frac{v}{\alpha} \right) \right] - B_1 v + C_{31} \quad (2.228)$$

Los valores de Δv y Δx proporcionan correcciones a valores supuestos de v y x . Como aproximación inicial se puede tomar

$$v = 2 V_0 - V_{00} \quad (2.229)$$

$$\alpha = 2 x_0 - \alpha_{00} \quad (2.230)$$

en donde V_{00} y α_{00} son los valores de v y x un Δt antes de V_0 y α_0

El procedimiento iterativo termina cuando se alcanza cierta tolerancia

$$|\Delta v| + |\Delta x| < 0.0002 \quad (2.231)$$

al término de esto, se deben comprobar los valores de A_0 , A_1 , B_0 y B_1 se calcula

$$II = \text{valor entero} \left[\frac{\pi + \tan^{-1} \frac{v}{\alpha}}{\Delta x} + 1 \right] \quad (2.232)$$

II. TEORIA BASICA

si es igual a I la solución es correcta, en caso contrario, se hace $I = II$ y se repite el procedimiento hasta cumplir con la igualdad.

El método de las características se aplica a sistemas de conducción más complejos aunado a la precisión que tiene este método sobre el de Allievi, además con el auxilio de una herramienta de cálculo como es la computadora personal la resolución a los problemas de golpe de ariete utilizando este método son bastante precisas.

III. FLUJO ESTABLECIDO EN SISTEMAS DE BOMBEO

III. FLUJO ESTABLECIDO EN SISTEMAS DE BOMBEO

III.1 Enunciado y solución a diversos problemas de flujo establecido

A continuación se enuncian diferentes problemas y la solución a los mismos usando como herramienta la teoría básica presentada en el capítulo 2 de este trabajo.

PROBLEMA III.1.1

Calcular la potencia de la bomba (figura 3.1) que tiene una eficiencia $\eta = 85\%$, para que el tubo 2 lleve un gasto de 5 l/s. La geometría es: $L_1 = 75$ m; $D_1 = 75$ mm; $f_1 = f_2 = f_3 = 0.03$; $L_2 = L_3 = 100$ m; $D_2 = D_3 = 50$ mm; $H = 10$ m y $K_V = 15$.

Las características geométricas de las tuberías son:

Área del tramo 1

$$A_1 = \frac{\pi d_1^2}{4} = \frac{\pi(0.075)^2}{4} = 0.0044 \text{ m}^2$$

para los tramos 2 y 3

$$A_2 = A_3 = \frac{\pi d_2^2}{4} = \frac{\pi(0.05)^2}{4} = 0.0020 \text{ m}^2$$

la velocidad media en el tramo 2 es

$$v_2 = \frac{Q_2}{A_2} = \frac{0.005}{0.002} = 2.54 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

La carga de velocidad correspondiente es

$$\frac{v_2^2}{2g} = \frac{(2.5465)^2}{19.62} = 0.3305 \text{ m}$$

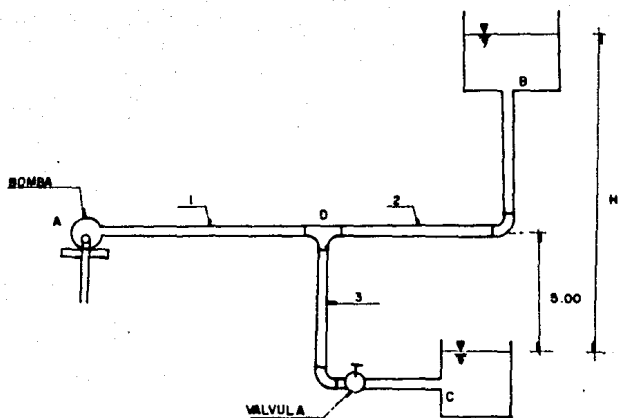


Figura 3.1

III. FLUJO ESTABLECIDO EN SISTEMAS DE BOMBEO

Considerando que las pérdidas de fricción son más significativas que las pérdidas locales se tiene que

$$K_2 = f_2 \frac{L_2}{d_2} = 0.03 \frac{100}{0.05} = 60$$

calculando la pérdida que se tendría en el tramo 2 (del punto D al B) se obtiene lo siguiente

$$\Delta H_2 = K_2 \frac{v_2^2}{2g} = 60 \times 0.3305 = 19.83 \text{ m}$$

para el tramo 3, se tienen pérdidas de fricción y pérdidas locales, estas últimas creadas por la válvula instalada aguas arriba del punto C, por lo cual el factor de pérdida de energía será el siguiente

$$K_3 = f_3 \frac{L_3}{d_3} + K_v = 0.03 \frac{100}{0.05} + 15 = 75$$

planteando la ecuación de la energía entre el punto A y el D resulta

$$H = \frac{P_d}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} f_1 \frac{L_1}{d_1}$$

ahora, entre el punto D y el B, se obtiene

$$\frac{P_d}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} f_1 \frac{L_1}{d_1} = z_B + \frac{v_2^2}{2g} f_2 \frac{L_2}{d_2}$$

haciendo lo mismo pero para el punto C

$$\frac{P_d}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} f_1 \frac{L_1}{d_1} = z_C + \frac{v_3^2}{2g} \left(K_v + f_3 \frac{L_3}{d_3} \right)$$

igualando las dos últimas ecuaciones se llega a

III. FLUJO ESTABLECIDO EN SISTEMAS DE BOMBEO

$$z_a + \frac{v_2^2}{2g} f_2 \frac{L_2}{d_2} = z_c + \frac{v_3^2}{2g} \left(K_v + f_3 \frac{L_3}{d_3} \right)$$

despejando de esta expresión a v_3 resulta

$$v_3 = \sqrt{\frac{\left(z_a - z_c + \frac{v_2^2}{2g} f_2 \frac{L_2}{d_2} \right)}{K_v + f_3 \frac{L_3}{d_3}}} 2g$$

Sustituyendo los valores correspondientes, el valor de v_3 es

$$v_3 = \sqrt{19.62 \left[\frac{5 - (-5) + \frac{(2.5465)^2}{19.62} 0.03 \frac{100}{0.05}}{15 + 0.03 \frac{100}{0.05}} \right]}$$

$$v_3 = 2.7935 \frac{m}{s}$$

Por continuidad

$$Q_3 = v_3 A_3$$

$$Q_3 = 2.7935 \times 0.002 = 0.00548 \frac{m^3}{s} = 5.48 \frac{l}{s}$$

de los cálculos anteriores el gasto que debe circular por el tramo 1, es igual a la suma de los gastos conducidos por los tramos 2 y 3, por lo tanto se llega a un gasto de

$$Q_1 = Q_2 + Q_3$$

$$Q_1 = 0.005 + 0.00548 = 0.01048 \frac{m^3}{s} = 10.48 \frac{l}{s}$$

III. FLUJO ESTABLECIDO EN SISTEMAS DE BOMBEO

planteando la ecuación de la energía entre el punto A y el B, resulta que

$$H = z_B + \frac{v_1^2}{2g} f_1 \frac{L_1}{d_1} + \frac{v_2^2}{2g} f_2 \frac{L_2}{d_2}$$

sustituyendo valores, se obtiene

$$H = 5 + \frac{(2.3722)^2}{19.62} 0.03 \frac{75}{0.075} + \frac{(2.5465)^2}{19.62} 0.03 \frac{100}{0.05}$$

$$H = 33.43 \text{ m}$$

Considerando la ecuación 2.47, el valor de la potencia es

$$P_n = \frac{\gamma Q H}{\eta} = \frac{1000 \times 0.01048 \times 33.43}{0.85}$$

$$P_n = 412.24 \text{ Kg} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 5.5 \text{ CV}$$

PROBLEMA III.1.2

Para el sistema de tuberías mostrado en la figura 3.2, calcular la potencia necesaria de la bomba (en CV) con una eficiencia $\eta = 85\%$, para que $Q_B = 5 \frac{\text{l}}{\text{s}}$, considerando $L = 210 \text{ m}$, $d = 0.10 \text{ m}$ y $f = 0.025$.

El gasto que debe circular por el tramo DB, tiene que ser igual a Q_B , por lo cual se tiene que cumplir la ecuación de continuidad, es decir, lo que entró al depósito superior debe ser igual a lo que salió del mismo.

Si el gasto que entra es mayor que el que sale, el nivel del agua en el depósito superior se desbordará; en caso contrario, el nivel del agua bajará.

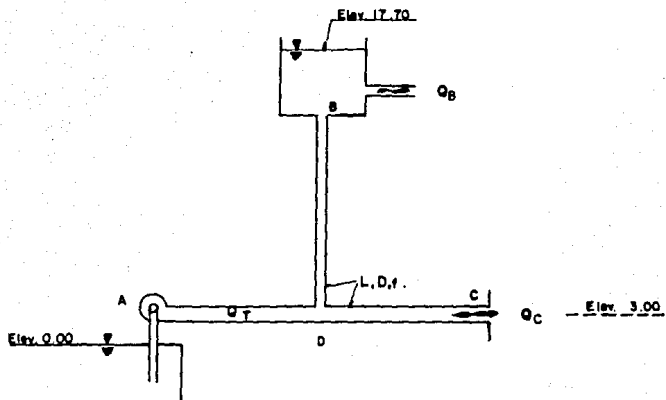


Figura 3.2

III. FLUJO ESTABLECIDO EN SISTEMAS DE BOMBEO

Por tratarse de tuberías largas, la energía inicial se ve decrementada por la fricción que se tiene en la conducción. El coeficiente de fricción correspondiente, resulta de la expresión 2.1

$$K = f \frac{L}{d} = 0.025 \frac{210}{0.10} = 52.50$$

las características geométricas de la tubería son

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi (0.10)^2}{4} = 0.0079 \text{ m}^2$$

la velocidad media para el tramo DB, se obtiene de la ecuación de continuidad (ec. 2.21)

$$v = \frac{Q}{A} = \frac{0.005}{0.0079} = 0.6386 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Correspondiéndole una carga de velocidad de

$$\frac{v^2}{2g} = \frac{(0.6386)^2}{19.62} = 0.0207 \text{ m}$$

con los valores obtenidos tanto para el factor de fricción y la carga de velocidad, la pérdida de energía debida a la fricción en el tramo DB tiene un valor de (ecuación 2.1).

$$H_f = K \frac{v^2}{2g} = 52.50 \times 0.0207 = 1.0845 \text{ m}$$

planteando la ecuación de la energía entre el punto A (inmediatamente después de la descarga de la bomba) y el punto B (expresión 2.6), resulta

$$H = z_B + \frac{v_B^2}{2g} + f \frac{L}{d} + \frac{v_B^2}{2g} (1 + f \frac{L}{d})$$

En la expresión anterior se está considerando como plano horizontal de comparación la elevación 3.0 m.

III. FLUJO ESTABLECIDO EN SISTEMAS DE BOMBEO

Ahora, haciendo lo mismo, pero para el punto A y el C, se llega a

$$H = \frac{v^2}{2g} f \frac{L}{d} + \frac{v_c^2}{2g} \left(1 + f \frac{L}{d}\right)$$

igualando las dos expresiones se llega a

$$z_B + \frac{v^2}{2g} f \frac{L}{d} + \frac{v^2}{2g} \left(1 + f \frac{L}{d}\right) = \frac{v^2}{2g} f \frac{L}{d} + \frac{v_c^2}{2g} \left(1 + f \frac{L}{d}\right)$$

simplificando términos y despejando a v_c , se obtiene

$$v_c = \sqrt{2g \left[\frac{z_B + \frac{v^2}{2g} \left(1 + f \frac{L}{d}\right)}{1 + f \frac{L}{d}} \right]}$$

sustituyendo valores en la ecuación anterior se llega a

$$v_c = \sqrt{19.62 \left[\frac{14.7 + \frac{(0.6366)^2}{19.62} \left(1 + 0.025 \frac{210}{0.10}\right)}{1 + 0.025 \frac{210}{0.10}} \right]}$$

$$v_c = 2.4075 \frac{m}{s}$$

por continuidad, el caudal que circula por el tramo C, es

$$Q_C = v_C A_C$$

$$Q_C = 2.4075 \times 0.0079 = 0.01891 \frac{m^3}{s} = 18.91 \frac{l}{s}$$

el gasto que circula por el tramo A, es la suma de los gastos que conducen los tramos B y C, por lo cual se tiene

III. FLUJO ESTABLECIDO EN SISTEMAS DE BOMBEO

$$Q_A = 5 + 18.91 = 23.91 \frac{1}{s}$$

la carga se determinará con el auxilio de la siguiente expresión

$$H = z_m + \frac{v^2}{2g} f \frac{L}{d} + \frac{v_m^2}{2g} \left(1 + f \frac{L}{d}\right)$$

sustituyendo valores, el valor de H es

$$H = 14.7 + \frac{(3.0441)^2}{19.62} 0.025 \frac{210}{0.10} + \frac{(.63666)^2}{19.62} \left[1 + 0.025 \frac{210}{0.10}\right]$$

$$H = 40.60 \text{ m}$$

De la ecuación 2.47, el valor de la potencia es

$$P_n = \frac{\gamma Q H}{\eta}$$

reemplazando valores se obtiene

$$P_n = \frac{1000 \times 0.02391 \times 40.60}{0.85} = 1142.05 \text{ Kg} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 15.23 \text{ CV}$$

PROBLEMA III.1.3

a) Determinar los gastos Q_2 y Q_3 descargados por los tubos del sistema mostrado en la figura 3.3, el cual está alimentado por una bomba que eleva la presión en M, hasta $5 \frac{\text{Kg}}{\text{cm}^2}$ (50 mca). b) Calcular el gasto descargado en uno sólo de los recipientes, cuando se cierre la válvula del otro depósito. c) ¿Cuál será la elevación máxima en C tolerable, de manera que se eviten presiones negativas para cada uno de los casos anteriores? d) Determinar la potencia de la bomba con una eficiencia $\eta = 80\%$ y con $L_1 = 40 \text{ m}$, $d_1 = 80 \text{ mm}$, $L_2 = L_3 = 80 \text{ m}$, $d_2 = d_3 = 50 \text{ mm}$, $f_1 = 0.025$, $f_2 = f_3 = 0.03$, $K_v = 3$.

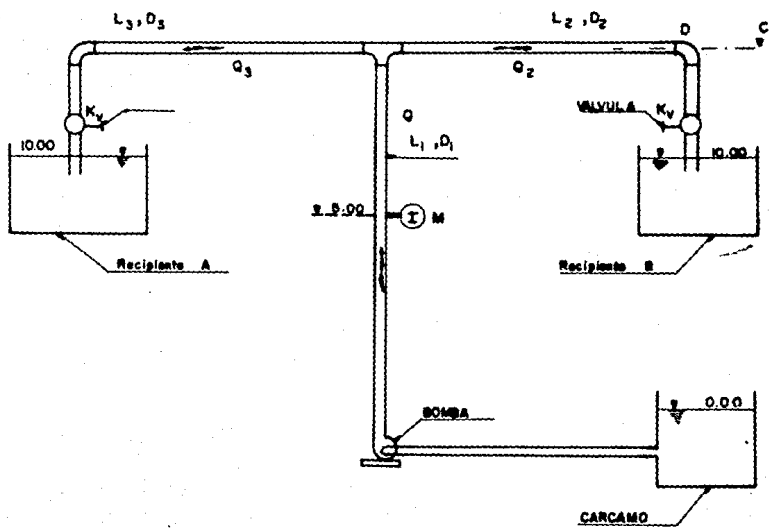


Figura 3.3

III. FLUJO ESTABLECIDO EN SISTEMAS DE BOMBEO

Solución a)

Planteando la ecuación de la energía entre la posición donde se ubica el manómetro y el recipiente A, considerando que el manómetro se localiza a la mitad del tramo L_1 , resulta que

$$z + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = z_A + \frac{P_A}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + \sum h_{r_{1-A}}$$

ahora, haciendo los mismos pasos, pero para el recipiente B

$$z + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = z_B + \frac{P_B}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + \sum h_{r_{1-B}}$$

de estas dos ecuaciones se deriva la siguiente

$$z_A + \frac{P_A}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + \sum h_{r_{1-A}} = z_B + \frac{P_B}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + \sum h_{r_{1-B}}$$

De la figura 3.3 se concluye que

$$z_A = z_B ; \frac{P_A}{\gamma} = \frac{P_B}{\gamma} = 0 \text{ por ser descarga a la atmósfera}$$

$$\text{además } L_{1-A} = L_{1-B} ; d_2 = d_3$$

por lo cual, sustituyendo en la ecuación anterior, se llega a

$$v_2 = v_3$$

por lo tanto $Q_1 = Q_2 + Q_3$ y como $Q_2 = Q_3$

$$Q_1 = 2 Q_2 = 2 Q_3$$

de lo espuesto anteriormente y haciendo uso de las ecuaciones 2.1, 2.3 y 2.21 se llega a

$$\frac{P_1}{\gamma} + \left(\frac{Q_1}{A_1}\right)^2 \frac{1}{2g} = z_B + \left(\frac{Q_2}{A_2}\right)^2 \frac{1}{2g} \left[f_2 \frac{L_2}{d_2} + \sum K \right] + \left(\frac{Q_1}{A_1}\right)^2 \frac{1}{2g} \left[f_1 \frac{L_1}{2d_1} \right]$$

$$\frac{P_1}{\gamma} = z_B + \left(\frac{Q_2}{A_2}\right)^2 \frac{1}{2g} \left[f_2 \frac{L_2}{d_2} + \sum K \right] + \left(\frac{2Q_2}{A_2}\right)^2 \frac{1}{2g} \left[f_1 \frac{L_1}{2d_1} - 1 \right]$$

$$\frac{P_1}{\gamma} = z_B + \frac{Q_2^2}{2g} \left[\frac{\left[f_2 \frac{L_2}{d_2} + \sum K \right]}{A_2^2} + \frac{4 \left[f_1 \frac{L_1}{2d_1} - 1 \right]}{A_1^2} \right]$$

$$\frac{P_1}{\gamma} = z_B + \frac{Q_2^2}{2g} \left[\frac{A_1^2 \left[f_2 \frac{L_2}{d_2} + \sum K \right] + 4A_2^2 \left[f_1 \frac{L_1}{2d_1} - 1 \right]}{(A_1 A_2)^2} \right]$$

$$Q_2 = \sqrt{\frac{2g (A_1 A_2)^2 \left[\frac{P_1}{\gamma} - z_B \right]}{A_1^2 \left[f_2 \frac{L_2}{d_2} + \sum K \right] + 4A_2^2 \left[f_1 \frac{L_1}{2d_1} - 1 \right]}}$$

sustituyendo valores, el gasto que conduce el tramo 2 es de

$$Q_2 = \sqrt{\frac{19.62 (0.005 \times 0.002)^2 (50 - 5)}{(0.005)^2 \left(0.03 \frac{80}{0.05} + 4 \right) + 4(0.002)^2 \left(0.025 \frac{40}{2 \times 0.08} - 1 \right)}}$$

$$Q_2 = 0.00798 \frac{m^3}{s} = 7.98 \frac{l}{s}$$

y como $Q_1 = 2 Q_2$

por lo tanto $Q_1 = 2 \times 7.98 = 15.97 \frac{l}{s}$

III. FLUJO ESTABLECIDO EN SISTEMAS DE BOMBEO

Solución b)

Si una de las válvulas se cierra, el gasto descargado a uno de los recipientes, será igual al bombeado, por lo cual se tiene lo siguiente.

Considerando que se cierra la válvula que controla los ingresos al tanque A y planteando la ecuación de la energía entre el manómetro y el tanque B, siguiendo el procedimiento efectuado en el inciso a, se obtiene

$$\frac{P_1}{\gamma} + \left(\frac{Q_1}{A_1}\right)^2 \frac{1}{2g} = z_B + \left(\frac{Q_1}{A_2}\right)^2 \frac{1}{2g} \left[f_2 \frac{L_2}{d_2} + \sum K \right] + \left(\frac{Q_1}{A_1}\right)^2 \frac{1}{2g} \left[f_1 \frac{L_1}{2d_1} \right]$$

$$\frac{P_1}{\gamma} = z_B + \frac{Q_1^2}{2g} \left[\frac{A_1^2 \left[f_2 \frac{L_2}{d_2} + \sum K \right] + A_2^2 \left[f_1 \frac{L_1}{2d_1} - 1 \right]}{(A_1 A_2)^2} \right]$$

$$Q_1 = \sqrt{\frac{2g (A_1 A_2)^2 \left[\frac{P_1}{\gamma} - z_B \right]}{A_1^2 \left[f_2 \frac{L_2}{d_2} + \sum K \right] + A_2^2 \left[f_1 \frac{L_1}{2d_1} - 1 \right]}}$$

Sustituyendo valores

$$Q_1 = \sqrt{\frac{19.62 (0.005 \times 0.002)^2 (50 - 5)}{(0.005)^2 \left(0.03 \frac{80}{0.05} + 4 \right) + (0.002)^2 \left(0.025 \frac{40}{2 \times 0.08} - 1 \right)}}$$

$$Q_1 = 0.00817 \frac{m^3}{s} = 8.17 \frac{1}{s}$$

III. FLUJO ESTABLECIDO EN SISTEMAS DE BOMBEO

Solución c)

- Para el gasto $Q_1 = 0.01597 \frac{m^3}{s}$ y $Q_2 = 0.00798 \frac{m^3}{s}$

por continuidad, las velocidades en los tramos son

$$v_1 = \frac{Q_1}{A_1} = \frac{0.01597}{0.005} = 3.1771 \frac{m}{s} ; v_2 = \frac{Q_2}{A_2} = \frac{0.00798}{0.002} = 4.0642 \frac{m}{s}$$

planteando la ecuación de la energía entre el manómetro y el punto D, resulta

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = z_c + \frac{P_d}{\gamma} + f_1 \frac{L_1}{2d_1} \frac{v_1^2}{2g} + \frac{v_2^2}{2g} \left[f_2 \frac{L_2}{d_2} + 1 \right]$$

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} - f_1 \frac{L_1}{2d_1} \frac{v_1^2}{2g} - \frac{v_2^2}{2g} \left[f_2 \frac{L_2}{d_2} + 1 \right] = z_c + \frac{P_d}{\gamma}$$

$$\frac{P_1}{\gamma} + \left[1 - f_1 \frac{L_1}{2d_1} \right] \frac{v_1^2}{2g} - \left[1 + f_2 \frac{L_2}{d_2} \right] \frac{v_2^2}{2g} = z_c + \frac{P_d}{\gamma}$$

$$\frac{P_d}{\gamma} = \frac{P_1}{\gamma} + \left[1 - f_1 \frac{L_1}{2d_1} \right] \frac{v_1^2}{2g} - \left[1 + f_2 \frac{L_2}{d_2} \right] \frac{v_2^2}{2g} - z_c$$

$$\text{Para que } \frac{P_d}{\gamma} \leq 0, \Rightarrow z_c \geq \frac{P_1}{\gamma} + \left[1 - f_1 \frac{L_1}{2d_1} \right] \frac{v_1^2}{2g} - \left[1 + f_2 \frac{L_2}{d_2} \right] \frac{v_2^2}{2g}$$

por lo anterior, el máximo valor que puede tomar z_c sin llegar a tener presiones negativas en C, es

$$z_c = \frac{P_1}{\gamma} + \left[1 - f_1 \frac{L_1}{2d_1} \right] \frac{v_1^2}{2g} - \left[1 + f_2 \frac{L_2}{d_2} \right] \frac{v_2^2}{2g}$$

sustituyendo valores, resulta

III. FLUJO ESTABLECIDO EN SISTEMAS DE BOMBEO

$$z_c = 50 + (1 - 0.025 \frac{40}{2 \times 0.08}) \frac{(3.1771)^2}{19.62} - (1 + 0.03 \frac{80}{0.05}) \frac{(4.0842)^2}{19.62}$$

$$z_c = 6.0468 \text{ m}$$

- Para el gasto de $Q = 0.00817 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$

Siguiendo el mismo procedimiento que en el inciso anterior y por continuidad

$$v_1 = \frac{Q}{A_1} \quad \text{y} \quad v_2 = \frac{Q}{A_2}$$

sustituyendo valores, se obtiene

$$v_1 = \frac{0.00817}{0.005} = 1.6253 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \text{y} \quad v_2 = \frac{0.00817}{0.002} = 4.1609 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

el valor de z_c , se determina de

$$z_c = \frac{P_1}{\gamma} + \left(1 - f_1 \frac{L_1}{2d_1}\right) \frac{v_1^2}{2g} - \left(1 + f_2 \frac{L_2}{d_2}\right) \frac{v_2^2}{2g}$$

sustituyendo valores, se tiene

$$z_c = 50 + (1 - 0.025 \frac{40}{2 \times 0.08}) \frac{(1.6253)^2}{19.62} - (1 + 0.03 \frac{80}{0.05}) \frac{(4.1609)^2}{19.62}$$

$$z_c = 6.0545 \text{ m}$$

Solución d)

Planteando la ecuación de la energía entre una sección inmediatamente después de la bomba y el punto donde está instalado el manómetro, resulta

III. FLUJO ESTABLECIDO EN SISTEMAS DE BOMBEO

$$H = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} + \sum h_{fs}$$

de las ecuaciones 2.1, 2.3 y 2.21 y para un gasto $Q = 0.01597 \frac{m^3}{s}$, se obtiene

$$H = 5 + 50 + \frac{(3.1771)^2}{19.62} \left(1 + 0.025 \frac{40}{2 \times 0.08}\right)$$

$$H = 58.73 \text{ m}$$

de la expresión 2.47, resulta

$$P_n = \frac{\gamma Q H}{\eta} = \frac{1000 \times 0.01597 \times 58.73}{0.80}$$

$$P_n = 1.172.4 \text{ Kg} \frac{m}{s} = 15.43 \text{ HP}$$

siguiendo la misma secuela, pero para el gasto $Q = 0.00817 \frac{m^3}{s}$, se tiene

$$H = 5 + 50 + \frac{(1.6254)^2}{19.62} \left(1 + 0.025 \frac{40}{2 \times 0.08}\right)$$

$$H = 55.97 \text{ m}$$

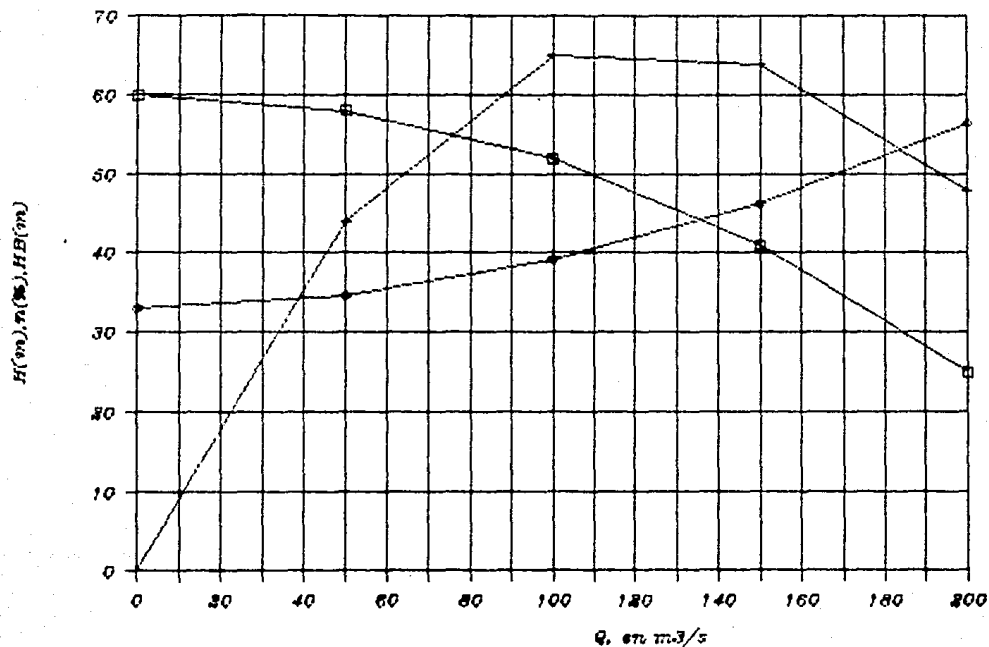
$$P_n = \frac{1000 \times 0.00817 \times 55.97}{0.80} = 571.66 \text{ Kg} \frac{m}{s} = 7.52 \text{ HP}$$

PROBLEMA III.1.4

Una bomba rotodinámica tiene las características abajo tabuladas y bombeará agua desde un río a la elevación 52.0 m hasta un tanque con un nivel del agua en la 85.0 m, a través de una tubería de hierro fundido de 350 mm de diámetro con una longitud de 2000 m ($\epsilon = 0.15 \text{ mm}$), suponiendo que las pérdidas en válvulas y demás piezas especiales sean de $10 \frac{v}{2g}$; calcular el gasto descarga en la tubería y el consumo de potencia.

CURVAS CARACTERISTICAS DE LA BOMBA

76



III. FLUJO ESTABLECIDO EN SISTEMAS DE BOMBEO

Q (l/s)	0	50	100	150	200
H (m)	60	58	52	41	25
η (%)	0	44	65	64	48

haciendo uso de la expresión 2.1, se obtiene lo siguiente

$$h_f = f \frac{L}{d} \frac{v^2}{2g}$$

en la cual, el factor de fricción f , está en función del número de Reynolds y de la rugosidad relativa, determinándose esta con base en

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{d}$$

llegando al valor de

$$\epsilon_r = \frac{0.15}{350} = 0.0004285$$

recordando que las pérdidas totales se calculan como sigue

$$h_t = \frac{v^2}{2g} \left(f \frac{L}{d} + K \right)$$

Con base en lo anterior y para diferentes gastos se forma la tabla siguiente; considerando un valor para la viscosidad cinemática (ν) del agua de $0.011 \times 10^{-6} \frac{\text{cm}^2}{\text{s}}$

el número de Reynolds se calcula con el auxilio de la expresión

$$R_e = \frac{v d}{\nu}$$

III. FLUJO ESTABLECIDO EN SISTEMAS DE BOMBEO

Q (l/s)	v (m/s)	R _s	f	h _t (m)	H _p (m)
0	0	0	0	0	33
50	0.52	165,365	0.0188	1.62	34.62
100	1.04	330,712	0.0178	6.16	39.16
150	1.56	496,067	0.017	13.29	46.29
200	2.08	661,423	0.01685	23.44	56.44

la carga que tiene que vencer la bomba es la carga estática más las pérdidas totales (h_t); la carga estática es de 33 m, a la cual sumándole los valores de h_t indicados en la tabla anterior nos da como resultado el renglón marcado con H_p . Superponiendo estos valores con las curvas características de la bomba (figura 3.5) obtenemos que el gasto bombeado es de

$$Q_b = 137 \frac{\text{l}}{\text{s}}$$

con una eficiencia de

$$\eta = 65.5 \%$$

Y una carga de bombeo de 46 m.

utilizando la expresión 2.47, se llega a

$$P_n = \frac{\gamma Q H}{\eta}$$

$$P_n = \frac{1000 \times 0.137 \times 46}{0.655} = 9,621.4 \text{ Kg } \frac{\text{m}}{\text{s}} = 126.6 \text{ HP}$$

PROBLEMA III.1.5

Si en la instalación indicada en el problema III.1.4 el gasto tiene un incremento hasta $175 \frac{\text{l}}{\text{s}}$, colocando una segunda bomba igual a la primera, entonces

III. FLUJO ESTABLECIDO EN SISTEMAS DE BOMBEO

- a) Determine el gasto sin regular producido por la operación de las bombas en paralelo y en serie
- b) Calcular la demanda de potencia cuando el gasto es regulado por una válvula de control a $175 \frac{1}{s}$, en los casos de: 1) operando en paralelo y 2) operando en serie

Solución a)

Cuando se tiene una instalación de bombeo en donde las bombas están trabajando en paralelo, la carga de bombeo es la misma para todos los equipos, pero el gasto bombeado por la instalación es la suma del gasto que bombea cada uno de ellos; con base en lo anterior se forma la tabla que a continuación se describe anexándole la característica de la tubería a la misma

H (m)	60	58	52	41	25
Q (l/s)	0	100	200	300	400
η (%)	-	44	65	64	48
H_p (m)	33	39.16	56.44	84.68	123.61

trazando las curvas características de la tubería y la equivalente para el sistema operando en paralelo (figura 3.6) el gasto bombeado en estas condiciones es de

$$Q_p = 186 \frac{1}{s}$$

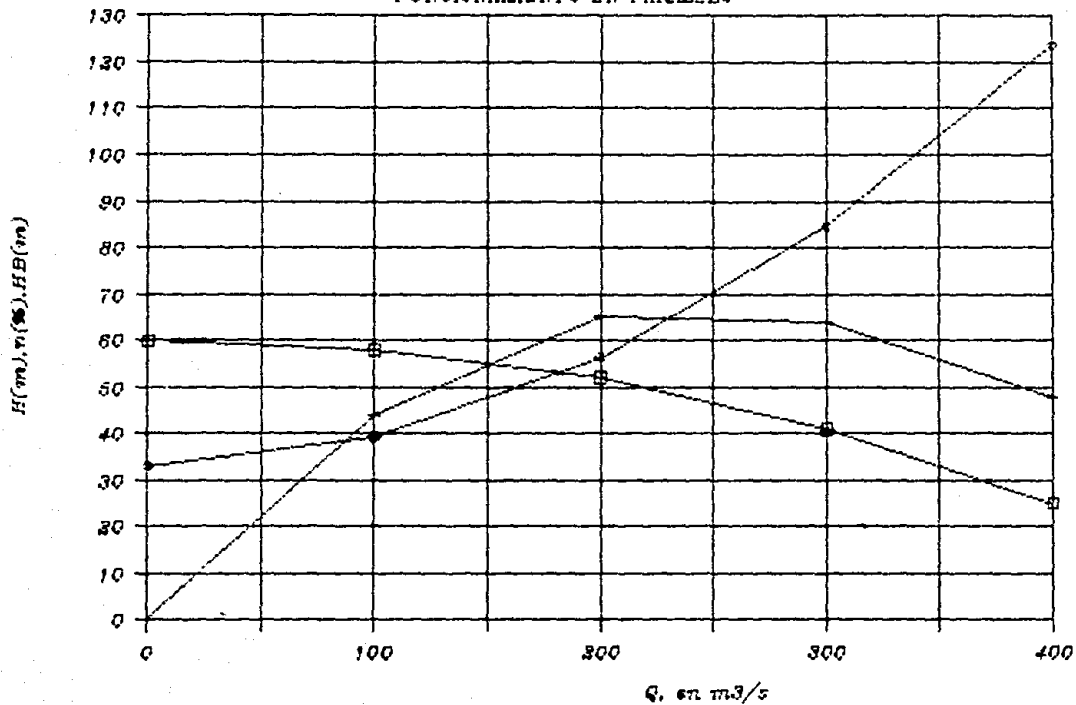
por lo cual, el gasto manejado por cada bomba, tiene un valor de

$$Q_b = 93 \frac{1}{s}$$

ahora, cuando las bombas tienen un funcionamiento en serie la carga de bombeo es la suma de las cargas que proporciona cada

CURVAS CARACTERISTICAS

FUNCIONAMIENTO EN PARALELO



III. FLUJO ESTABLECIDO EN SISTEMAS DE BOMBEO

equipo; mientras que el gasto con que opera el sistema es el mismo que bombea cada bomba. Así puede tomarse la tabla siguiente; anexándole a la misma la característica, de la tubería

H (m)	120	116	104	82	50
Q (l/s)	0	50	100	150	200
η (%)	-	44	65	64	48
H_b (m)	33	34.62	39.16	46.29	56.44

trazando las curvas características de la tubería y la equivalente del sistema operando en serie, el gasto bombeado por este es de

$$Q_b = 194 \frac{1}{s}$$

siendo éste, el gasto que debe bombear cada equipo.

Solución b)

Para este caso, debido a que el gasto es controlado por una válvula, las pérdidas de energía se ven incrementadas provocando que la curva carga estática más las pérdidas totales contra gasto se defase hacia arriba, hasta intersectar la curva carga contra gasto de la bomba en un valor para el caudal de $175 \frac{1}{s}$.

De las curvas características trazadas para el inciso a, cuando se tiene un sistema operando en paralelo se obtiene que para un gasto de $175 \frac{1}{s}$, le corresponde a cada bomba los siguientes valores:

Gasto bombeado

$$Q_b = 87.5 \frac{1}{s}$$

Carga de bombeo

$$H_b = 54 \text{ m}$$

Eficiencia

III. FLUJO ESTABLECIDO EN SISTEMAS DE BOMBEO

$$\eta = 57.5 \%$$

Con los anteriores datos y de la expresión 2.47, la potencia necesaria que deberá tener el equipo es de :

$$P_n = \frac{\gamma Q H}{\eta}$$

$$P_n = \frac{1000 \times 0.0875 \times 54}{0.575} = 8,217.4 \text{ Kg } \frac{\text{m}}{\text{s}} = 108.12 \text{ HP}$$

ahora, de las curvas características cuando el sistema trabaja en serie (figura 3.7) los valores correspondientes son

Gasto por bomba

$$Q_D = 175 \frac{\text{l}}{\text{s}}$$

Carga de bombeo

$$H_s = 34 \text{ m}$$

Con una eficiencia de

$$\eta = 59 \%$$

con los datos obtenidos, sustituidos en la expresión 2.47 se llega a

$$P_n = \frac{\gamma Q H}{\eta}$$

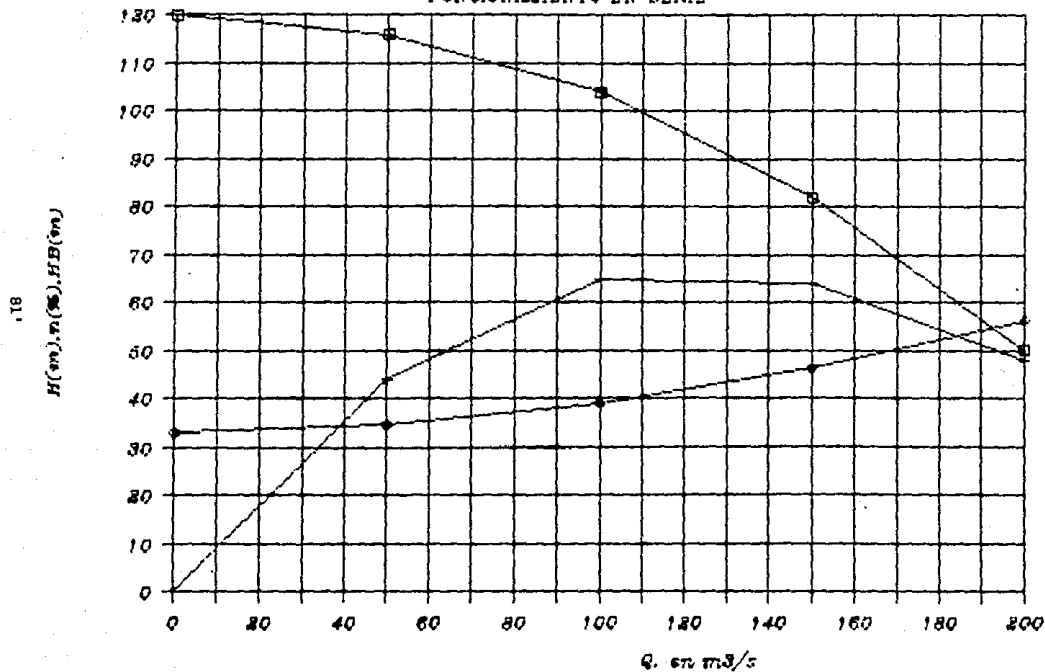
$$P_n = \frac{1000 \times 0.175 \times 34}{0.59} = 10,084.74 \text{ Kg } \frac{\text{m}}{\text{s}} = 132.7 \text{ HP}$$

PROBLEMA III.1.6

En la figura 3.8, se muestra el esquema del sistema de conducción de un acueducto desde el cárcamo de succión hasta los tanques mostrados en dicha figura. Así mismo, en la figura 3.9 se presenta la curva característica Q-H de las bombas seleccionadas (serán 6 bombas funcionando en paralelo para dar el gasto de diseño total

CURVAS CARACTERISTICAS

FUNCIONAMIENTO EN SERIE



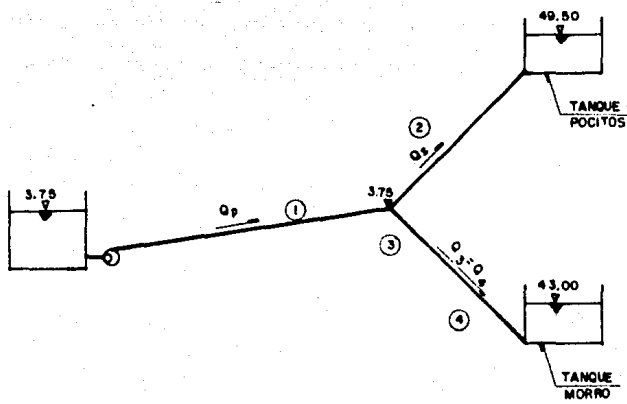


Figura 3.8

III. FLUJO ESTABLECIDO EN SISTEMAS DE BOMBEO

del acueducto). Con base en la información proporcionada determine.

- a) La curva del sistema de conducción completo, es decir, con bombeo simultáneo hacia ambos tanques
- b) La curva característica del sistema de conducción Planta de Bombeo - Tanque Morro (bombeo exclusivamente hacia el tanque Morro)
- c) La curva característica del sistema de conducción Planta de Bombeo - Tanque Pocitos (bombeo exclusivamente hacia el tanque Pocitos)
- d) Las curvas Q-H de las bombas funcionando en paralelo
- e) El gasto de bombeo para el sistema de conducción completo y el gasto correspondiente hacia cada tanque
- f) Analice y discuta las condiciones de operación de las bombas para los casos de bombear con 4 y 2 equipos en el sistema de conducción completo
- g) El gasto de bombeo para el sistema de conducción Planta de Bombeo - Tanque Pocitos en el caso de funcionar los 6 equipos

Las características de la instalación son

$$\begin{array}{llll} l_1 = 4772.45 \text{ m} & l_2 = 8058.25 \text{ m} & l_3 = 4641.00 \text{ m} & l_4 = 729.00 \text{ m} \\ D_1 = 1.067 \text{ m} & D_2 = 0.90 \text{ m} & D_3 = 0.61 \text{ m} & D_4 = 0.51 \text{ m} \\ f_1 = 0.013 & f_2 = 0.014 & f_3 = 0.015 & f_4 = 0.015 \end{array}$$

III. FLUJO ESTABLECIDO EN SISTEMAS DE BOMBEO

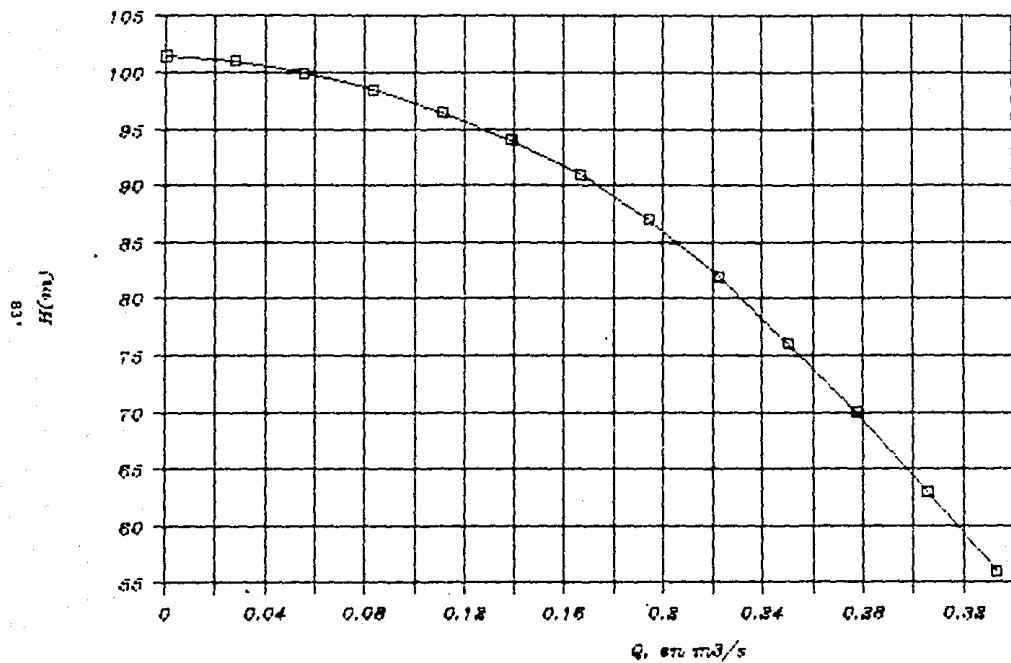
Solución a)

Para obtener la curva Q-H del sistema completo, esta se deberá formar para las 6 bombas debido a que se tiene un funcionamiento en paralelo. De la figura 3.9 se tienen los valores correspondientes carga-gasto para un equipo, recordando que el funcionamiento en paralelo implica la misma carga para todos los equipos que conforman el sistema y el gasto total será la suma de los gastos de cada uno de los equipos; con base en lo anterior, se forma la tabla 3.1.6

Tabla 3.1.6 Relación carga-gasto para los 6 equipos

H(m)	Q ₁ (m ³ /s)	Q ₂ (m ³ /s)	Q ₃ (m ³ /s)	Q ₄ (m ³ /s)	Q ₅ (m ³ /s)	Q ₆ (m ³ /s)
101.5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
101.0	0.0278	0.0556	0.0834	0.1111	0.1389	0.1667
100.0	0.0556	0.1111	0.1667	0.2222	0.2778	0.3333
98.5	0.0833	0.1667	0.2499	0.3333	0.4165	0.4998
96.5	0.1111	0.2222	0.3333	0.4444	0.5555	0.6666
94.0	0.1389	0.2778	0.4167	0.5556	0.6945	0.8334
91.0	0.1667	0.3333	0.5	0.6667	0.8334	1.0
87.0	0.1944	0.3888	0.5832	0.7776	0.9720	1.1644
82.0	0.2222	0.4444	0.6666	0.8888	1.1110	1.3332
76.0	0.25	0.50	0.75	1.0	1.25	1.5
70.0	0.2778	0.5556	0.8334	1.1112	1.3890	1.6668
63.0	0.3056	0.6112	0.9168	1.2224	1.5280	1.8336
56.0	0.3333	0.6666	0.9999	1.3332	1.6665	1.9998

CURVA DE LA BOMBA SELECCIONADA



III. FLUJO ESTABLECIDO EN SISTEMAS DE BOMBEO

La curva de fricción de la tubería correspondiente al tramo entre la bomba y el punto de bifurcación, se obtiene de

$$h_f = H_{est} + \sum h_t$$

debido a que se tiene una bifurcación, para poder calcular el gasto que llega al nudo, el proceso es iterativo, empezando con proponer un nivel de energía y con éste calcular los gastos que salen del nudo, sumando ambos gastos, estos tienen que ser iguales al que entra, en caso contrario, se propone otro nivel hasta cumplir con la igualdad. Habiendo realizado varias iteraciones se obtuvo que el nivel de la carga en el nudo es de 63.5 m, las pérdidas de energía que tiene influencia en la conducción son las de fricción por lo tanto se tiene

$$h_f = 63.50 + f \frac{1}{D} \frac{v^2}{2g}$$

sustituyendo la ecuación de continuidad en la anterior se llega a

$$h_f = 63.50 + f \frac{1}{D} \left[\frac{Q}{A} \right]^2 \frac{1}{2g}$$

poniendo los valores correspondientes queda

$$h_f = 63.50 + 0.013 \frac{4772.45}{1.067} \left[\frac{Q}{0.8942} \right]^2 \frac{1}{2g}$$

$$h_f = 63.50 + 3.7087 Q^2$$

para diferentes magnitudes de Q, h_f se comporta como se indica en la columna 1 de la tabla 3.1.7

III. FLUJO ESTABLECIDO EN SISTEMAS DE BOMBEO

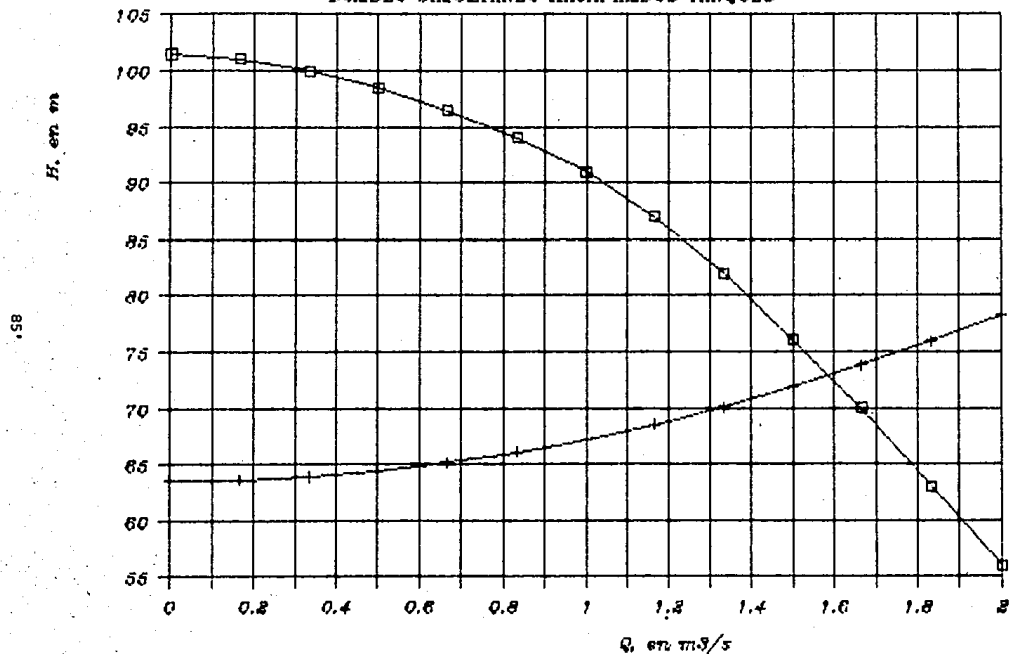
Tabla 3.1.7 Solución a los incisos a, b y c

Q(m ³ /s)	1	2	3
	h _f (m)	h _f (m)	h _f (m)
0.0	63.50	39.2500	45.7500
0.1	63.5371	40.2300	45.9449
0.2	63.6483	43.1899	46.5297
0.3	63.8336	48.0698	47.5044
0.4	64.0931	54.9297	48.8689
0.5	64.4267	63.7496	50.6232
0.6	64.8344	74.5294	52.7674
0.7	65.3163	87.2691	55.3015
0.8	65.8723	101.9688	58.2255
0.9	66.5024	118.6285	61.5392
1.0	67.2067	137.2482	65.2429
1.1	67.9851	157.8278	69.3364
1.2	68.8376	180.3674	73.8198
1.3	69.7643	204.8670	78.6930
1.4	70.7651	231.3265	83.9561
1.5	71.8401	259.7460	89.6090
1.6	72.9892	290.1254	95.6518
1.7	74.2124	322.4648	102.0845
1.8	75.5097	356.7642	108.9070
1.9	76.8812	393.0235	116.1194
2.0	78.3268	431.2428	123.7216

ahora, graficando los datos de las tablas 3.1.6 carga-gasto (para los 6 equipos) y 3.1.7 (columna 1 curva de la tubería) se obtiene la figura 3.10: que es la solución a este inciso.

SISTEMA DE CONDUCCION COMPLETO

BOMBEO SIMULTANEO HACIA AMBOS TANQUES



III. FLUJO ESTABLECIDO EN SISTEMAS DE BOMBEO

Solución b)

Este caso, se resuelve igual al anterior, exceptuando la curva de fricción de la tubería; que se determina de la siguiente forma

$$h_f = H_{\text{est}} + f_1 \frac{l_1}{D_1} \frac{v_1^2}{2g} + f_2 \frac{l_2}{D_2} \frac{v_2^2}{2g} + f_3 \frac{l_3}{D_3} \frac{v_3^2}{2g}$$

sustituyendo la ecuación de continuidad en la anterior se tiene

$$h_f = H_{\text{est}} + f_1 \frac{l_1}{D_1} \left[\frac{Q}{A_1} \right]^2 \frac{1}{2g} + f_2 \frac{l_2}{D_2} \left[\frac{Q}{A_2} \right]^2 \frac{1}{2g} + f_3 \frac{l_3}{D_3} \left[\frac{Q}{A_3} \right]^2 \frac{1}{2g}$$

simplificando términos se obtiene

$$h_f = H_{\text{est}} + \frac{Q^2}{2g} \left[f_1 \frac{l_1}{D_1} \frac{1}{A_1^2} + f_2 \frac{l_2}{D_2} \frac{1}{A_2^2} + f_3 \frac{l_3}{D_3} \frac{1}{A_3^2} \right]$$

sustituyendo valores se llega a

$$h_f = 39.25 + \frac{Q^2}{2g} \left[.013 \frac{4772.45}{1.067} \frac{1}{(.8942)^2} + .015 \left(\frac{4641}{0.61} \frac{1}{(.2922)^2} + \frac{729}{0.51} \frac{1}{(.2043)^2} \right) \right]$$

$$h_f = 39.25 + 97.9982 Q^2$$

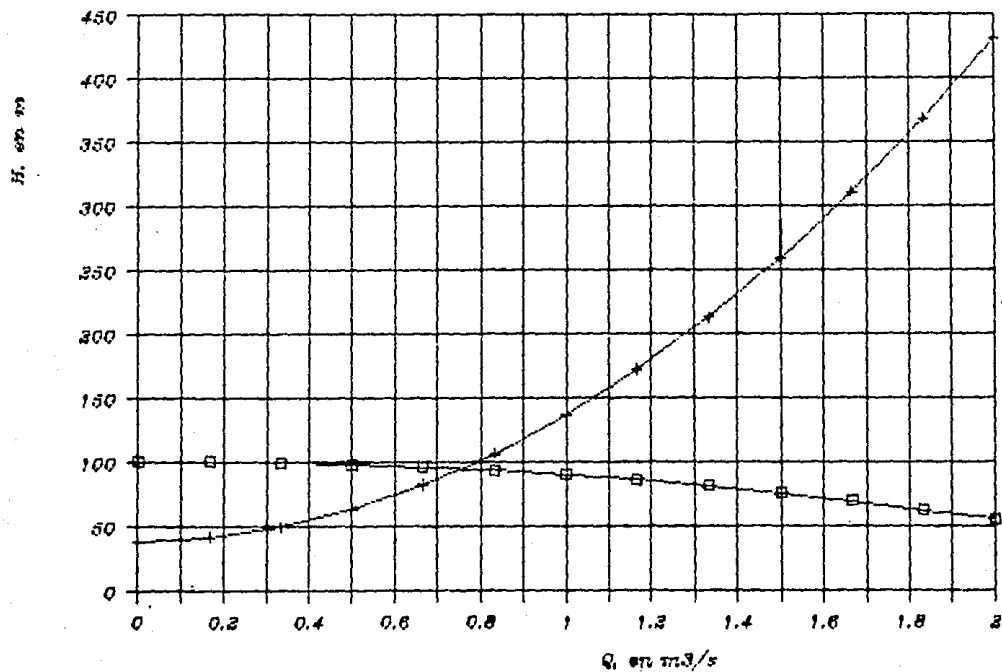
dando valores a Q se forma la columna 2 de la tabla 3.1.7 y con éstos se tiene la curva mostrada en la figura 3.11.

Solución c)

Para resolver este inciso, se harán los mismos pasos que los dos anteriores, excepto la curva de fricción de la tubería, la cual se obtiene de la siguiente forma

$$h_f = H_{\text{est}} + f_1 \frac{l_1}{D_1} \frac{v_1^2}{2g} + f_2 \frac{l_2}{D_2} \frac{v_2^2}{2g}$$

BOMBEO HACIA EL TANQUE MORRO



III. FLUJO ESTABLECIDO EN SISTEMAS DE BOMBEO

sustituyendo la ecuación de continuidad en la anterior se llega a

$$h_f = H_{\text{est}} + f_1 \frac{l_1}{D_1} \left[\frac{Q}{A_1} \right]^2 \frac{1}{2g} + f_2 \frac{l_2}{D_2} \left[\frac{Q}{A_2} \right]^2 \frac{1}{2g}$$

simplificando términos se obtiene

$$h_f = H_{\text{est}} + \frac{Q^2}{2g} \left[f_1 \frac{l_1}{D_1} \frac{1}{A_1^2} + f_2 \frac{l_2}{D_2} \frac{1}{A_2^2} \right]$$

sustituyendo valores en la expresión anterior se llega a

$$h_f = 45.75 + \frac{Q^2}{2g} \left[0.013 \frac{4772.45}{1.067} \frac{1}{(.8942)^2} + 0.014 \frac{8058.25}{0.90} \frac{1}{(0.6362)^2} \right]$$
$$h_f = 45.75 + 19.4929 Q^2$$

dando valores a Q se forma la columna 3 de la tabla 3.1.7 y con éstos resulta la figura 3.12.

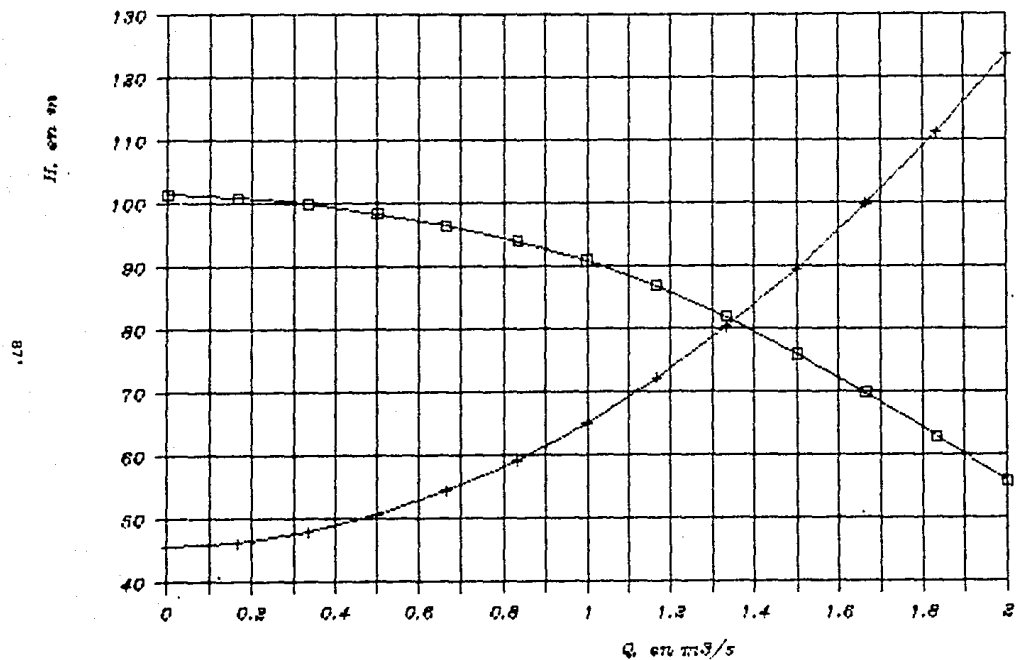
Solución d)

Para obtener las curvas Q-H de las bombas funcionando en paralelo, se hace uso de la tabla 3.1.6; con la cual se forma la figura 3.13, siendo esta la solución a este inciso.

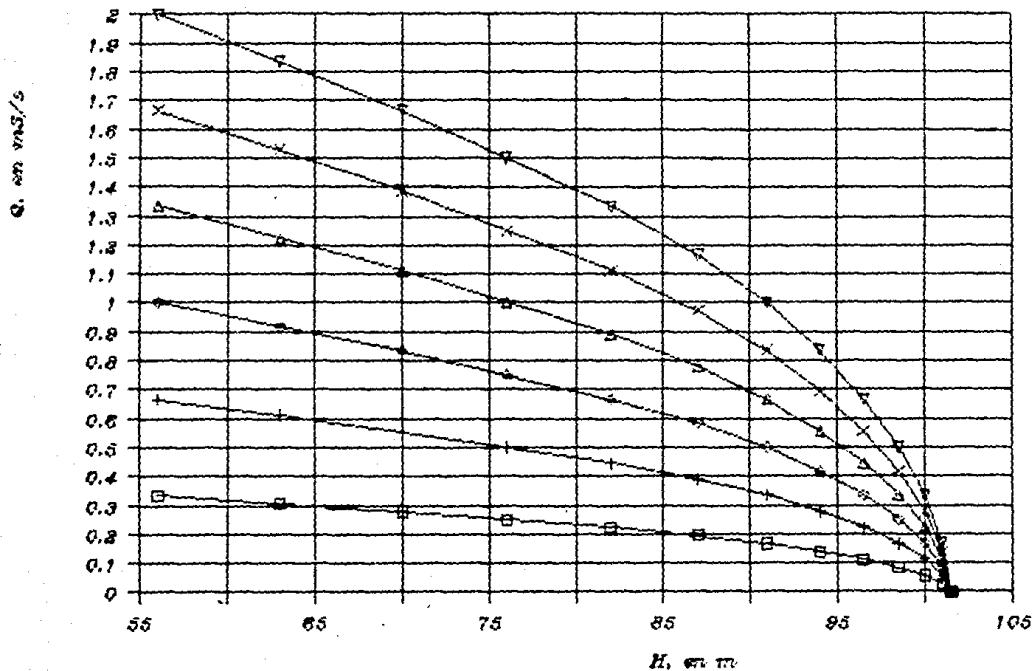
Solución e)

Haciendo uso de la curva obtenida en el inciso a, el gasto de operación y la carga correspondiente son de $1.570 \frac{m}{s}$ y 73.0 m respectivamente; con estos datos y planteando la ecuación de la energía entre una sección inmediatamente después de la bomba y el punto de bifurcación se tiene lo siguiente

BOMBEO HACIA EL TANQUE POCITOS



CURVA Q-H PARA LAS 6 BOMBAS EN PARALELO



III. FLUJO ESTABLECIDO EN SISTEMAS DE BOMBEO

$$H_p = z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} + h_{f0-1}$$

de la figura 3.8 se tiene que $z=0$; por otra parte, haciendo uso de la ecuación para calcular las pérdidas debidas a la fricción en la tubería y la expresión de continuidad que sustituidas en la anterior se llega a

$$H_p = \frac{P}{\gamma} + \left[\frac{Q}{A} \right]^2 \frac{1}{2g} \left[1 + f_1 \frac{L_1}{D_1} \right]$$

sustituyendo valores se tiene

$$73.0 = \frac{P}{\gamma} + \left[\frac{1.570}{0.8942} \right]^2 \frac{1}{2g} \left[1 + 0.013 \frac{4772.45}{1.067} \right]$$

$$\frac{P}{\gamma} = 63.7070 \text{ m}$$

Ahora, planteando la ecuación de la energía entre el punto de bifurcación y el tanque picotitos resulta

$$z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + h_{f1-2}$$

de la figura 3.8 resulta $z_1 = 0$ y $\frac{P_2}{\gamma} = 0$ por ser descarga a la atmósfera, implicando que

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{v_2^2}{2g} \left[1 + f_2 \frac{L_2}{D_2} \right]$$

haciendo lo mismo pero ahora para el tanque morro se obtiene

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = z_4 + f_3 \frac{L_3}{D_3} \frac{v_3^2}{2g} + f_4 \frac{L_4}{D_4} \frac{v_4^2}{2g}$$

igualando ambas ecuaciones se llega a

III. FLUJO ESTABLECIDO EN SISTEMAS DE BOMBEO

$$z_2 + \frac{v_2^2}{2g} \left[1 + f_2 \frac{l_2}{D_2} \right] = z_4 + f_3 \frac{l_3}{D_3} \frac{v_3^2}{2g} + f_4 \frac{l_4}{D_4} \frac{v_4^2}{2g}$$

recordando que $Q_1 = Q_2 + Q_4$ y que $Q_3 = Q_4$ (ver figura 3.8), además por continuidad la ecuación anterior queda

$$z_2 + \frac{v_2^2}{2g} \left[1 + f_2 \frac{l_2}{D_2} \right] = z_4 + f_3 \frac{l_3}{D_3} \left(\frac{D_4}{D_3} \right)^5 \frac{v_4^2}{2g} + \frac{v_4^2}{2g} \left[1 + f_4 \frac{l_4}{D_4} \right]$$

simplificando términos resulta

$$z_2 + \frac{v_2^2}{2g} \left[1 + f_2 \frac{l_2}{D_2} \right] = z_4 + \frac{v_4^2}{2g} \left[1 + f_3 \frac{l_3}{D_3} \left(\frac{D_4}{D_3} \right)^5 + f_4 \frac{l_4}{D_4} \right]$$

en función del gasto se tiene

$$z_2 + \left(\frac{Q_1 - Q_4}{A_2} \right)^2 \frac{1}{2g} \left[1 + f_2 \frac{l_2}{D_2} \right] = z_4 + \left(\frac{Q_4}{A_4} \right)^2 \frac{1}{2g} \left[1 + f_3 \frac{l_3}{D_3} \left(\frac{D_4}{D_3} \right)^5 + f_4 \frac{l_4}{D_4} \right]$$

$$z_2 - z_4 = \left(\frac{Q_4}{A_4} \right)^2 \frac{1}{2g} \left[1 + f_3 \frac{l_3}{D_3} \left(\frac{D_4}{D_3} \right)^5 + f_4 \frac{l_4}{D_4} \right] - \left(\frac{Q_1 - Q_4}{A_2} \right)^2 \frac{1}{2g} \left[1 + f_2 \frac{l_2}{D_2} \right]$$

sustituyendo valores se obtiene

$$6.5 = 95.5129 Q_4^2 - 15.9121 (Q_1 - Q_4)^2$$

como $Q_1 = 1.57 \text{ m}^3/\text{s}$ resulta la ecuación cuadrática siguiente

$$78.3759 Q_4^2 + 49.9640 Q_4 - 45.7217 = 0$$

resolviendo la ecuación anterior resulta

$$Q_4 = 0.5089 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

por lo tanto

III. FLUJO ESTABLECIDO EN SISTEMAS DE BOMBEO

$$Q_2 = 1.57 - 0.5089 = 1.0611 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

Solución f)

De la figura 3.14, se observa que el punto de trabajo cuando se está bombeando con cuatro bombas corresponde a un gasto de 1.14 m^3/s y una carga de bombeo de 67 m.

De la figura 3.14 el punto de trabajo funcionando dos bombas corresponde para un gasto de 0.595 m^3/s y una carga de bombeo de 64.95 m, de lo anterior se tiene que operando cuatro bombas se tiene una reducción en el gasto del 17% y para 2 bombas un 62%.

Solución g)

De la figura 3.12, el gasto de bombeo es de 1.35 m^3/s

PROBLEMA III.1.7

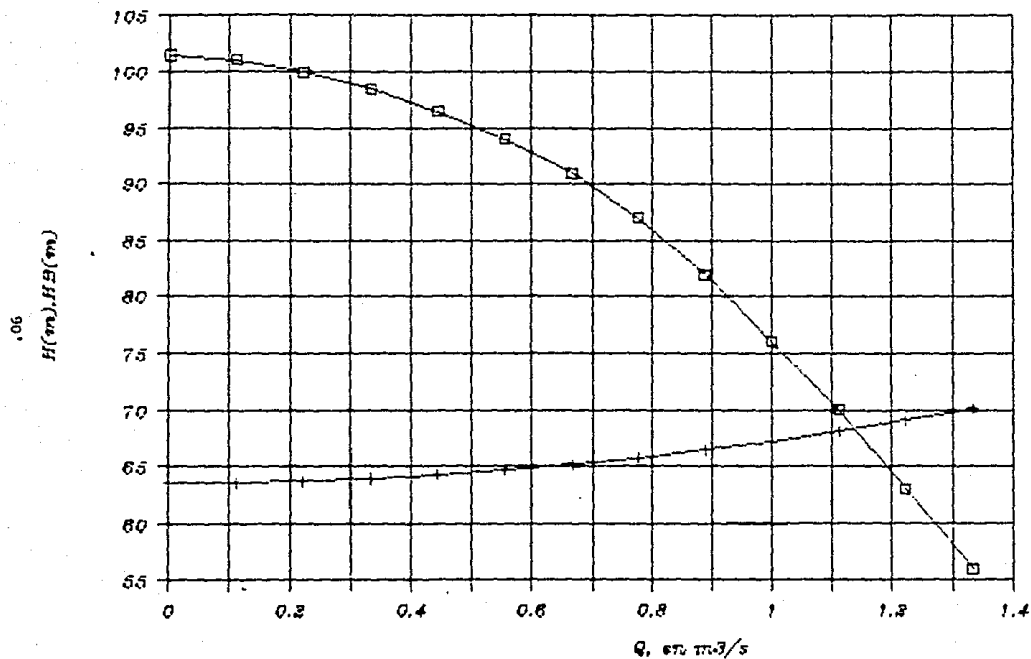
En la figura 3.15 se muestra la planta y elevación de un sistema de bombeo, para el cual se pide

- El gasto de bombeo Q_b , la potencia al freno P_{fb} y la carga neta positiva de solución $NPSH_b$ cuando funciona una bomba.
- El gasto de bombeo Q_b , el gasto total Q_v , la potencia al freno P_{fv} y la carga neta positiva de solución $NPSH_b$ cuando funcionan ambas bombas

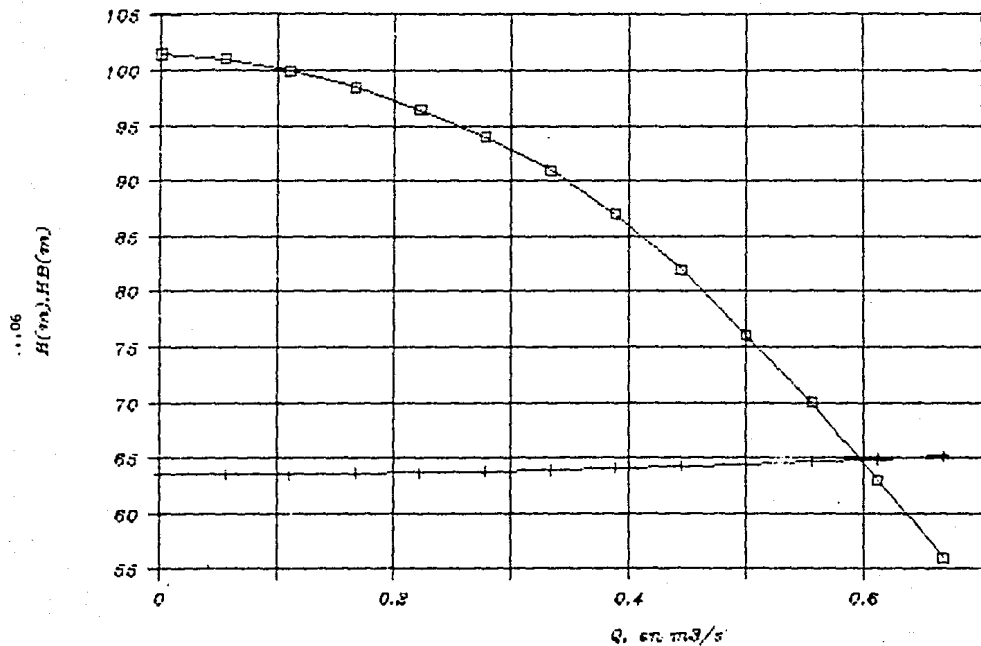
Solución a)

La curva de la bomba queda indicada en la tabla siguiente

CURVAS OPERANDO 4 BOMBAS

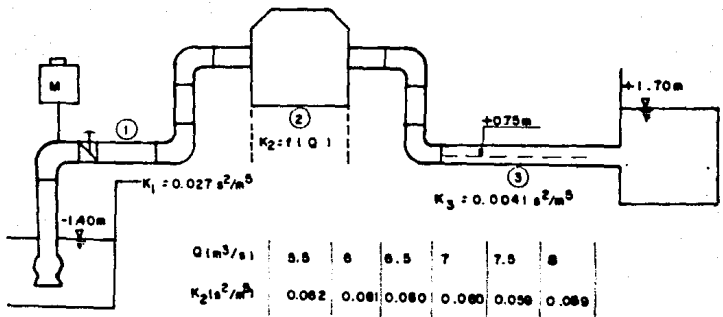


CURVAS OPERANDO 2 BOMBAS





PLANTA



ELEVACION

Figura 3.15

III. FLUJO ESTABLECIDO EN SISTEMAS DE BOMBEO

Q(m ³ /s)	2.0	2.5	3.0	4.0	5.0	5.5	6.0	6.5	7.0	7.5	8
H(m)	17.4	16.2	15.5	15.5	15	13.8	12.7	11.5	10.0	8.1	6
η(%)				76	82	85	88	90	88	82	79

la curva de fricción de la tubería es

$$H_B = H_{EST} + K Q^2$$

De la figura 3.15 se observa que la carga estática es de 3.10 m; debido a que se tiene variable el valor de K, la ecuación anterior queda

$$H_B = H_{EST} + Q^2 (K_1 + K_2 + K_3)$$

Por otra parte $K_2 = F(Q)$ como se indica en la siguiente tabla

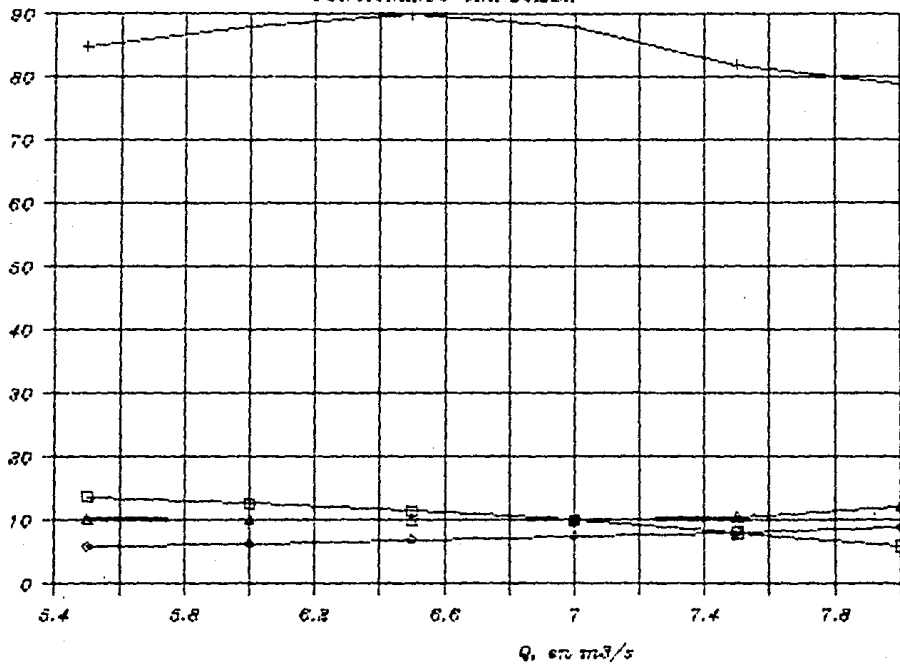
Q(m ³ /s)	5.5	6	6.5	7	7.5	8
K ₂ (s ² /m ⁵)	0.062	0.061	0.060	0.060	0.059	0.059

Q m ³ /s)	K ₁ (S ² /m ⁵)	K ₂ (S ² /m ⁵)	K ₃ (S ² /m ⁵)	K _T (S ² /m ⁵)	K _T Q ² (m)	H _{EST} (m)	H _B (m)
0						3.10	3.10
5.5	0.027	0.062	0.0041	0.931	2.8163	3.10	5.9160
6.0	0.027	0.061	0.0041	0.0921	3.3156	3.10	6.4156
6.5	0.027	0.060	0.0041	0.0911	3.8490	3.10	6.9490
7.0	0.027	0.060	0.0041	0.0911	4.4639	3.10	7.5639
7.5	0.027	0.059	0.0041	0.0901	5.0681	3.10	8.1681
8.0	0.027	0.059	0.0041	0.0901	5.7664	3.10	8.8664

CURVAS CARATERISTICAS

FUNCIONANDO UNA BOMBA

16
 $H(m), \eta(\%), HB(m), NPSH(M)$



III. FLUJO ESTABLECIDO EN SISTEMAS DE BOMBEO

El $Q_b = 7.5 \text{ m}^3/\text{s}$

$\eta = 82\%$ y $H_b = 8.2 \text{ m}$

$$P_p = \frac{\gamma Q H_b}{\eta} = \frac{1000 \times 7.5 \times 8.2}{0.82} = 75000 \text{ k}_m \text{ m/s}^2 = 986.8 \text{ HP}$$

La carga neta positiva de succión se obtiene de las curvas mostradas en la figura 3.16 el cual tiene un valor de

$$\text{NPS H} = 10.5 \text{ m}$$

Solución b)

Para este caso funcionarán las dos bombas al mismo tiempo, por lo cual se tiene que de la figura 3.15 las tuberías se unen hasta el punto tres, implicando que el gasto bombeado por cada bomba circule por el punto uno y dos; en el punto de unión se sumarán ambos gastos correspondiendo al tramo tres. De lo anterior, la curva de la bomba queda

$$H_b = H_{\text{EST}} + K_1 Q^2 + K_2 Q^2 + K_3 (2Q)^2$$

$$H_b = H_{\text{EST}} + Q^2 (K_1 K_2 + 4 K_3)$$

dando valores a Q se forma la tabla que a continuación se describe

III. FLUJO ESTABLECIDO EN SISTEMAS DE BOMBEO

Q (m ³ /s)	K ₁ (S ² /m ⁵)	K ₂ (S ² /m ⁵)	K ₃ (S ² /m ⁵)	K _T (S ² /m ⁵)	K _T Q ² (m)	H _{KST} (m)	H _B (m)
0					0	3.10	3.10
5.5	0.027	0.062	0.0164	0.1054	3.1889	3.10	6.2884
6.0	0.027	0.061	0.0164	0.1044	3.7584	3.10	6.8584
6.5	0.027	0.060	0.0164	0.1034	4.3687	3.10	7.4687
7.0	0.027	0.060	0.0164	0.1034	5.0666	3.10	8.1666
7.5	0.027	0.059	0.0164	0.1024	5.76	3.10	8.8600
8.0	0.027	0.059	0.0164	0.1024	6.5536	3.10	9.6536
11.0	0.027	0.059	0.0164	0.1024	12.3904	3.10	15.4904
12.0	0.027	0.059	0.0164	0.1024	14.7456	3.10	17.8456
13.0	0.027	0.059	0.0164	0.1024	17.3056	3.10	20.4056
14.0	0.027	0.059	0.0164	0.1024	20.0704	3.10	23.1704
15.0	0.027	0.059	0.0164	0.1024	23.090	3.10	26.14
16.0	0.027	0.059	0.0164	0.1024	26.2144	3.10	29.3144

De la figura 3.17 el gasto bombeado por cada bomba es de

$$Q_B = 7.375 \text{ m}^3/\text{s}$$

Por lo cual el gasto total es de

$$Q_T = 14.75 \text{ m}^3/\text{s}$$

para el $Q_B = 7.375 \text{ m}^3/\text{s}$ y de figura 3.16 la eficiencia tiene un valor de

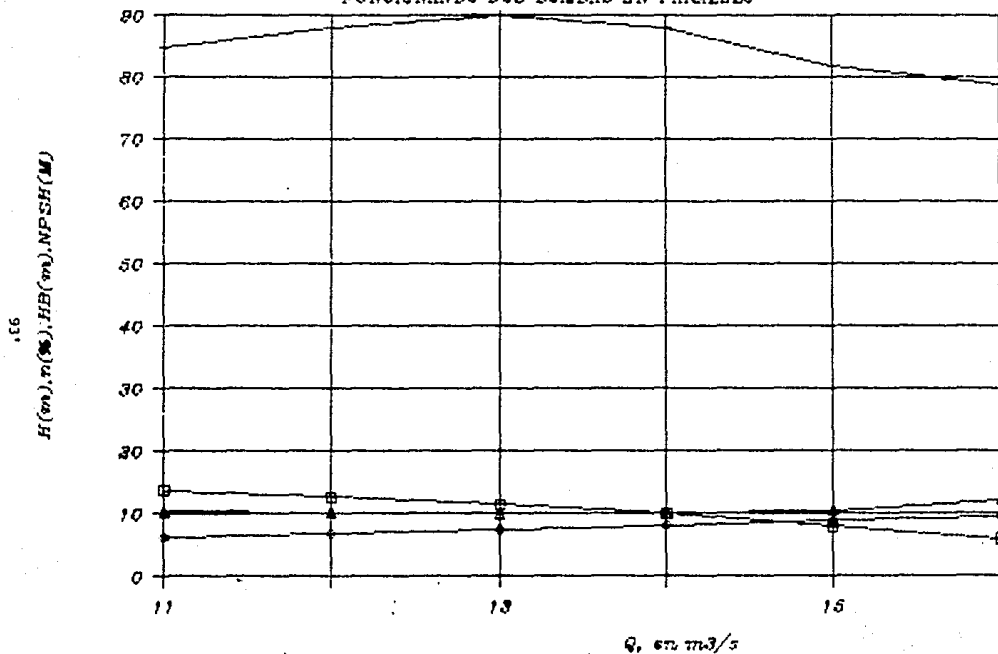
$$\eta = 83\%$$

por lo cual la potencia al freno vale

$$P_F = \frac{\gamma Q H}{\eta}$$

CURVAS CARATERISTICAS

FUNCIONANDO DOS BOMBAS EN PARALELO



III. FLUJO ESTABLECIDO EN SISTEMAS DE BOMBEO

reemplazando valores

$$P_v = \frac{1000 \times 7.375 \times 8.7}{0.83} = 77,304.2169 \text{ k}_m \text{ m/s}^2 = 1017.16 \text{ HP}$$

de la misma figura la carga neta positiva de succión es de

$$\text{NPSH} = 10.3 \text{ m}$$

IV. GOLPE DE ARIETE EN TUBERIAS A PRESION

IV. GOLPE DE ARIETE EN TUBERIAS A PRESION

A continuación se presenta el enunciado y la solución de varios problemas de flujo transitorio cuando sucede una perturbación en el sistema modificando las condiciones del flujo establecido; siguiendo la teoría expuesta en el capítulo II de este trabajo para llegar a la solución de los mismos.

PROBLEMA IV.1

Una tubería de acero de 1500 m de longitud, 300 mm de diámetro descarga agua desde un almacenamiento directamente a la atmósfera a través de una válvula instalada al final aguas abajo. La velocidad de la onda de presión es 1200 m/s. La válvula es cerrada gradualmente en 20 segundos y el Área de abertura de la válvula varía como se indica en la tabla 4.1.

- a) Despreciando la fricción, calcule la variación de la carga de presión durante el cierre de la válvula si la carga inicial en la misma es 10 m.
- b) Calcular la variación de presión a la mitad de la tubería.

Tabla 4.1 Relación de abertura de la válvula con respecto al tiempo de cierre.

t(s)	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
$A_v(m^2)$	0.03	0.025	0.02	0.015	0.010	0.008	0.006	0.005	0.004	0.002	0

Solución a)

El periodo T característico de la tubería vale

IV. GOLPE DE ARIETE EN TUBERIAS A PRESION

$$T = \frac{2L}{a} = \frac{2 \times 1500}{1200} = 2.5 \text{ s}$$

Por tanto, dado que el periodo T es menor al tiempo de cierre entonces se trata de una maniobra lenta y puede aplicarse el método de Allievi. Trabajando con intervalos de tiempo de 2.5 s, la correspondiente área de la válvula puede interpolarse linealmente de la tabla 4.1 llegando a la siguiente tabla.

Tabla 4.2 Área de la válvula para los intervalos de tiempo $\Delta t = \frac{2L}{a}$

t(s)	0	2.5	5.0	7.5	10.0	12.5	15.0	17.5	20.0
Av(m ²)	0.03	0.0237	0.0175	0.0113	0.008	0.0058	0.0045	0.0025	0.0

De la ecuación

$$\zeta_i^2 + \zeta_{i-1}^2 - 2 = \rho (n_{i-1} \zeta_{i-1} - n_i \zeta_i)$$

donde

$$\zeta_i^2 = \frac{h_i}{h_c} ; n_i = \frac{A_{vt}}{A_{vc}} \text{ y } \rho = \frac{a V_o}{2g h_o}$$

además

$$V_i = V_o n_i \zeta_i$$

para $i = 1$ se tiene

$$\zeta_1^2 + \zeta_o^2 - 2 = 2 \rho (n_o \zeta_o - n_1 \zeta_1)$$

sustituyendo valores

$$\zeta_1^2 + 1 - 2 = 2 \rho (1 - 0.79 \zeta_1)$$

$$\zeta_1^2 - 1 = 43.632 (1 - 0.79 \zeta_1)$$

IV. GOLPE DE ARIETE EN TUBERIAS A PRESION

$$\zeta_1^2 + 34.4693 \zeta_1 - 44.632 = 0$$

resolviendo la ecuación para la raíz positiva resulta

$$\zeta_1 = 1.2495$$

$$\text{y de } \zeta_1^2 = \frac{h_1}{h_0}$$

se obtiene

$$h_1 = \zeta_1^2 h_0 = (1.2495)^2 \times 10 = 15.6132 \text{ m}$$

por otra parte, sustituyendo valores en

$$V_1 = V_0 n_1 \zeta_1$$

da como resultado

$$V_1 = 3.567 \times 0.79 \times 1.2495 = 3.521 \text{ m/s}$$

para $i = 2$

$$\zeta_2^2 + \zeta_1^2 - 2 = 2 \rho (n_1 \zeta_1 - n_2 \zeta_2)$$

$$\zeta_2^2 + (1.2495)^2 - 2 = 43.632 (0.79 \times 1.2495 - 0.5833 \zeta_2)$$

$$\zeta_2^2 - 0.4387 = 43.0694 - 25.4505 \zeta_2$$

$$\zeta_2^2 + 25.4505 \zeta_2 - 43.5081 = 0$$

resolviendo la ecuación se llega a

$$\zeta_2 = 1.6079$$

IV. GOLPE DE ARIETE EN TUBERIAS A PRESION

y de

$$\zeta_z^2 = \frac{h_z}{h_0}$$

$$h_z = \zeta_z^2 h_0 = (1.6079)^2 \times 10 = 25.8534 \text{ m}$$

$$V_z = V_0 n_z \zeta_z = 3.567 \times 0.5833 \times 1.6079 = 3.3454 \text{ m/s}$$

siguiendo los mismos pasos para los diferentes intervalos, se forma la tabla siguiente

Tabla 4.3 Resumen de calculos

T(i)	t(s)	n _i	ζ _i	h _i (m)	V (m/s)
0	0	1	1	10	3.567
1	2.5	0.790	1.2495	15.6132	3.521
2	5.0	0.5833	1.6079	25.8534	3.3454
3	7.5	0.3767	2.1681	47.0066	2.9133
4	10.0	0.2667	2.3540	55.4132	2.2394
5	12.5	0.1933	2.2355	49.9746	1.5414
6	15.0	0.15	1.8818	35.4117	1.0069
7	17.5	0.0833	1.9347	37.4314	0.5749
8	20.0	0	2.2997	52.8870	0

Solución b)

Por este caso el intervalo de tiempo vale $\Delta t = 0.25 T$ y tendrá incrementos de tiempo igual al período característico de la tubería T, por lo cual interpolando de la tabla 4.1 se forma la siguiente

IV. GOLPE DE ARIETE EN TUBERIAS A PRESION

Tabla 4.4 Area de la vlvula para los intervalos de tiempo
 $\Delta t = 0.25 T$, $\Delta t = 0.25 T + T$

t(s)	0	0.625	3.125	5.625	8.125	10.625	13.125	15.625	18.125	20.625
Av(m ²)	0.03	0.0284	0.0222	0.0159	0.0099	0.0074	0.0054	0.0042	0.0019	0

siguiendo los mismos pasos que en el inciso anterior se tiene para $i = 0.25$, la ecuación de Allievi queda

$$\zeta_{0.25}^2 + \zeta_{-0.75}^2 - 2 = 2 \rho (n_{-0.75} \zeta_{-0.75} - n_{0.25} \zeta_{0.25})$$

sustituyendo valores

$$\zeta_{0.25}^2 + 1 - 2 = 43.632 (1 - 0.9467 \zeta_{0.25})$$

$$\zeta_{0.25}^2 - 1 = 43.632 - 41.305 \zeta_{0.25}$$

$$\zeta_{0.25}^2 + 41.305 \zeta_{0.25} - 44.632 = 0$$

resolviendo la ecuación para la raíz positiva, resulta

$$\zeta_{0.25}^2 = 1.0536$$

de

$$\zeta_{0.25}^2 = \frac{h_{0.25}}{h_0}$$

resulta

$$h_{0.25} = \zeta_{0.25}^2 h_0$$

entonces

$$h_{0.25} = (1.0536)^2 \times 10 = 11.1007 \text{ m}$$

la velocidad se calcula de

IV. GOLPE DE ARIETE EN TUBERIAS A PRESION

$$V_{0.25} = V_0 n_{0.25} \zeta_{0.25}$$

sustituyendo valores, se llega a

$$V_{0.25} = 3.567 \times 0.9467 \times 1.0536 = 3.5579 \text{ m/s}$$

para $i = 1.25$

$$\zeta_{1.25}^2 + \zeta_{0.25}^2 - 2 = 2 \rho (n_{0.25} \zeta_{0.25} - n_{1.25} \zeta_{1.25})$$

sustituyendo valores

$$\zeta_{1.25}^2 + (1.0536)^2 - 2 = 43.632 (0.9467 \times 1.0536 - 0.74 \zeta_{1.25})$$

$$\zeta_{1.25}^2 - 0.8899 = 43.5204 - 32.2877 \zeta_{1.25}$$

$$\zeta_{1.25}^2 + 32.2877 \zeta_{1.25} - 44.4103 = 0$$

resolviendo la ecuación para la raíz positiva se tiene que

$$\zeta_{1.25} = 1.3214$$

de

$$\zeta_{1.25}^2 = \frac{h_{1.25}}{h_0}$$

resulta

$$h_{1.25} = \zeta_{1.25}^2 h_0$$

sustituyendo valores

$$h_{1.25} = (1.3214)^2 \times 10 = 17.4602$$

IV. GOLPE DE ARIETE EN TUBERIAS A PRESION

y la velocidad

$$V_{1.25} = V_0 n_{1.25} \zeta_{1.25}$$

tiene un valor de

$$V_{1.25} = 3.567 \times 0.74 \times 1.3214 = 3.4879 \text{ m/s}$$

continuando los mismos pasos para los demás intervalos se forma la tabla siguiente

T(i)	t(s)	n_i	ζ_i	h_i (m)	V (m/s)
0	0	1	1	10	3.567
0.25	0.625	0.9487	1.0536	11.1007	3.5579
1.25	3.125	0.74	1.3214	17.4602	3.4879
2.25	5.625	0.53	1.7270	29.8246	3.2649
3.25	8.125	0.33	2.3288	54.2319	2.7413
4.25	10.625	0.2467	2.3040	53.0824	2.0275
5.25	13.125	0.18	2.1487	46.1674	1.3796
6.25	15.625	0.14	1.8024	32.4865	0.9001
7.25	18.125	0.0633	2.0349	41.4082	0.4595
8.25	20.625	0	1.8653	34.7952	0

PROBLEMA IV.2

Una tubería de acero de 2000 m de longitud y 300 mm de diámetro descarga agua desde un almacenamiento directamente a la atmósfera a través de una válvula. El coeficiente de descarga es 0.6. La válvula es cerrada de modo que el área decrece linealmente de 0.065 m^2 a cero en a) 15 seg y b) 30 seg. Si la carga inicial en la válvula es 3.0 m y la velocidad de la onda es de 1333.3 m/s calcule, despreciando la fricción, la carga de presión y velocidad

IV. GOLPE DE ARIETE EN TUBERIAS A PRESION

en la válvula para periodos discretos del golpe de ariete usando el método de Allievi.

Solución a)

El periodo T del golpe de ariete vale

$$T = \frac{2 L}{a} = \frac{2 \times 2000}{1333.3} = 3. \text{ seg}$$

si la válvula cierra en 15 seg se forma la siguiente tabla

Tabla 4.5 Area de la válvula para intervalos de tiempo $\Delta t = \frac{2 L}{a}$

t(s)	0	3	6	9	12	15
$A_v(m^2)$	0.065	0.052	0.039	0.026	0.013	0

de la ecuación

$$\zeta_i^2 + \zeta_{i-1}^2 - 2 = 2 \rho (n_{i-1} \zeta_{i-1} - n_i \zeta_i)$$

donde

$$\zeta_i^2 = \frac{h_i}{h_0}; \quad n_i = \frac{A_{vi}}{A_{v0}} \quad \text{y} \quad \rho = \frac{a V_0}{2g h_0}$$

además

$$V_i = V_0 n_i \zeta_i$$

para $i = 1$ se tiene

$$\zeta_1^2 + \zeta_0^2 - 2 = 2 \rho (n_0 \zeta_0 - n_1 \zeta_1)$$

sustituyendo valores

$$\zeta_1^2 + 1 - 2 = 2 \rho (1 - 0.8 \zeta_1)$$

IV. GOLPE DE ARIETE EN TUBERIAS A PRESION

$$\zeta_1^2 - 1 = 191.7678 \cdot (1 - 0.8 \zeta_1)$$

$$\zeta_1^2 + 153.4142 \zeta_1 - 192.7678 = 0$$

resolviendo la ecuación, resulta

$$\zeta_1 = 1.2464$$

y de $\zeta_1^2 = \frac{h_1}{h_0}$

se obtiene $h_1 = \zeta_1^2 h_0 = (1.2464)^2 \times 3 = 4.6605 \text{ m}$

recordando que

$$V_1 = V_0 n_1 \zeta_1$$

sustituyendo valores se tiene

$$V_1 = 4.2329 \times 0.8 \times 1.2464 = 4.2207 \text{ m/s}$$

para $i = 2$ siguiendo los mismos pasos, se llega a

$$\zeta_2^2 + \zeta_1^2 - 2 = 2 \rho (n_1 \zeta_1 - n_2 \zeta_2)$$

$$\zeta_2^2 + (1.2464)^2 - 2 = 191.7678 (0.8 \times 1.2464 - 0.8 \zeta_2)$$

$$\zeta_2^2 - 0.4465 = 191.2155 - 115.0607 \zeta_2$$

$$\zeta_2^2 + 115.0607 \zeta_2 - 191.6620 = 0$$

resolviendo la ecuación resulta

$$\zeta_2 = 1.6427$$

IV. GOLPE DE ARIETE EN TUBERIAS A PRESION

$$\text{y de } \zeta_2^2 = \frac{h_2}{h_0}$$

$$h_2 = \zeta_2^2 h_0 = (1.6427)^2 \times 3 = 8.095 \text{ m}$$

la velocidad es

$$V_2 = V_0 n_2 \zeta_2 = 4.2329 \times 0.6 \times 1.6427 = 4.172 \text{ m/s}$$

la tabla 4.6 resume, los resultados obtenidos

Tabla 4.6 Resultados

T(i)	t(s)	n_i	ζ_i	h_i (m)	V(m/s)
0	0	1	1	3	4.2329
1	3	0.80	1.2464	4.6605	4.2207
2	6	0.60	1.6427	8.0950	4.1720
3	9	0.40	2.3810	17.0075	4.0314
4	12	0.20	4.2052	53.0519	3.5600
5	15	0	12.0666	436.8075	0

Solución b)

El tiempo de cierre de la válvula es de 30 segundos, por lo cual, la ley de cierre de la válvula queda, como se indica en la tabla siguiente

Tabla 4.7

t(s)	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
$Av(m^2)$	0.065	0.0585	0.520	0.0455	0.0390	0.0328	0.0260	0.0195	0.13	0.0065	0

IV. GOLPE DE ARIETE EN TUBERIAS A PRESION

Siguiendo el mismo procedimiento que en el inciso anterior, se forma la tabla de resultados que a continuación se escribe

Tabla 4.8

T(i)	t(s)	n_i	ζ_i	h_i (m)	V(m/s)
0	0	1	1	3	4.2329
1	3	0.90	1.1098	3.6948	4.2127
2	6	0.80	1.2435	4.6385	4.2109
3	9	0.70	1.4097	5.9619	4.1770
4	12	0.60	1.6219	7.8917	4.1192
5	15	0.50	1.9020	10.8525	4.0255
6	18	0.40	2.2882	15.7070	3.8743
7	21	0.30	2.8532	24.4220	3.6232
8	24	0.20	3.7525	42.2446	3.1768
9	27	0.10	5.3708	86.5367	2.2734
10	30	0	8.7263	228.4475	0

PROBLEMA IV.3

Una tubería de 0.60 m de diámetro, 2000 m de longitud, factor de fricción $f = 0.018$, descarga directamente a la atmósfera por medio de una válvula desde un almacenamiento; el nivel del agua en el depósito es de 40 m con respecto al centro de la tubería. Calcular el golpe de ariete por medio del método de las características. La velocidad de la onda de presión es 1000 m/s y el gasto en flujo establecido de $0.3 \text{ m}^3/\text{s}$.

Las características del gasto y el tiempo de cierre se resumen en la siguiente tabla.

IV. GOLPE DE ARIETE EN TUBERIAS A PRESION

Tabla 4.9

t(s)	0	2	4	6	8	10
Q _b (m ³ /s)	0.3	0.246	0.194	0.096	0.047	0

de las ecuaciones

$$C^+ H_{PB} + B Q_{PB} - C_P = 0$$

$$C^- H_{PA} - B Q_{PA} - C_M = 0$$

implica que

$$H_{PB} = C_P - B Q_{PB}$$

y

$$Q_{PA} = \frac{H_{PA} - C_M}{B}$$

donde

$$C_P = H_A - B Q_A \left(1 - \frac{F}{2 D A} |Q_B| \Delta t\right)$$

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{a}$$

solución

Calculos preliminares

$$A = 0.785 (0.6)^2 = 0.2826 \text{ m}^2$$

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{0.3}{0.2826} = 1.06 \text{ m/s}$$

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} = 0.018 \frac{2000}{0.6} \frac{(1.06)^2}{19.62} = 3.434 \text{ m}$$

$$H_B = H_A - h_f = 40 - 3.434 = 36.56 \text{ m}$$

$$B = \frac{a}{gA} = \frac{1000}{(9.81)(0.2826)} = 360.7105421$$

IV. GOLPE DE ARIETE EN TUBERIAS A PRESION

$$R = \frac{B f \Delta t}{2 D A} = 38.2919896$$

Aplicación del método de las características

$$C_M = 36.56 - (60.71)(0.3) \left\{ 1 - \frac{0.018}{(2)(0.6)(0.2326)} [0.3]2 \right\}$$

$$C_M = -68.21$$

$$Q_{PA} = \frac{40 (-68.21)}{360.71} = 0.29 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$H_{PB} = 144.76 - (3.60)(0.246) = 56.025 \text{ m}$$

para $\Delta_1 = 2(2) = 4$

$$C_M = 56.025 - (360.71)(0.240) + 38.29 (0.246) [0.246] = 30.39$$

siguiendo la misma secuencia se forma la siguiente tabla

Tabla 4.10

t	C_M	C_P	Q_{PA}	H_{PB}
0				
2	-68.20088357	144.7668836	0.2999825925	56.03209021
4	-30.3854251	144.76100044	0.1951299363	74.78315926
6	6.246471412	108.9274311	0.0935751098	74.29921906
8	40.02390599	73.41823239	-0.0000662747	56.46483691
10	39.59602844	39.97609419	0.0011199328	39.97609419

PROBLEMA IV.4

Si para el problema IV.3 se modifica el incremento en el tiempo a 1 y 0.5 segundos calcular el golpe de ariete en estas condiciones

IV. GOLPE DE ARIETE EN TUBERIAS A PRESION

Solución a) $\Delta t = 1$ segundo

Cálculos preliminares

pérdida por fricción para $\Delta x = 1000$ m

$$h_f = f \frac{L}{A} \frac{V^2}{2g} = 0.018 \frac{1000}{0.6} \frac{(1.06)^2}{19.62} = 1.718 \text{ m}$$

$$H_c = H_A - h_f = 40 - 1.718 = 38.2819 \text{ m}$$

$$B = \frac{a}{gA} = \frac{1000}{(9.81)(0.2826)} = 360.7105421$$

$$R = \frac{B f \Delta t}{2 D A} = 19.1459948$$

Ecuaciones para los puntos interiores

$$\left. \begin{array}{l} C^+ : H_{Pi} = C_P - B Q_{Pi} \\ C^- : H_{Pi} = C_M + B Q_{Pi} \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} H_{Pi} = \frac{C_P + C_M}{2} \\ Q_{Pi} = \frac{H_{Pi} - C_M}{B} \end{array}$$

donde

$$C_P = H_{i-1} + B Q_{i-1} - R Q_{i-1} |Q_{i-1}|$$

$$C_M = H_{i-1} - B Q_{i-1} + R Q_{i-1} |Q_{i-1}|$$

Ecuaciones para la frontera aguas arriba

$$C^- : H_{PA} = C_M + B Q_{PA} = > Q_{PA} = \frac{40 - C_M}{B}$$

$$H_{PA} = H_R = 40 \text{ m}$$

donde

$$C_M = H_c - B Q_c + R Q_c |Q_c|$$

IV. GOLPE DE ARIETE EN TUBERIAS A PRESION

Ecuaciones para la frontera aguas abajo

$$C^* : H_{PB} = C_p - B Q_{PB}$$

$$Q_{PB} = F(t)$$

donde

$$C_p = H_c + B Q_c - R Q_c |Q_c|$$

Tabla 4.11

t	H _{Pl}	Q _{Pl}	Q _{PA}	H _{PB}
0				
1	38.28	0.2999912963	0.2999860269	46.2979451
2	47.86802151	0.2733968405	0.29998286971	56.03219021
3	57.47003834	0.2467740531	0.2476168764	65.69774147
4	57.70609315	0.1952757033	0.1951094132	75.3402537
5	57.86608287	0.1435585868	0.1441649717	76.1931144
6	58.98109041	0.0918265736	0.0929344385	74.62638539
7	56.76584711	0.0459959506	0.040143771	65.83201374
8	47.38375371	0.019588209	-0.0005964024	56.36317011
9	39.61847316	0.0004613256	-0.0009021818	46.14573845
10	38.76705666	0.0025154576	0.0015190235	39.78487409
11	40.16637885	0.0010576479	0.00059337178	39.67446789
12	40.90707117	0.0024171118	0.0005963354	40.54781218

IV. GOLPE DE ARIETE EN TUBERÍAS A PRESIÓN

Solución b) $\Delta t = 0.5$ segundos

Siguiendo la misma secuela que en el inciso a pero para $\Delta t = 0.05$ segundos se tiene

Tabla 4.12

t	H_{P1}	Q_{P1}	$H_{P1+\Delta t}$	$Q_{P1+\Delta t}$	$H_{P1+2\Delta t}$	$Q_{P1+2\Delta t}$	Q_{PA}	H_{PB}
0.5	39.1410	0.3000	38.2815	0.3000	37.4210	0.3000	0.3000	41.6112
1	39.1414	0.3000	38.2800	0.3000	42.4306	0.2861	0.3000	46.2980
1.5	39.1391	0.3000	43.2516	0.2862	47.0830	0.2732	0.3000	51.0617
2	44.0715	0.2863	47.8666	0.2834	51.8143	0.2603	0.3000	56.1792
2.5	48.6565	0.2736	52.5661	0.2606	56.8967	0.2464	0.2728	61.0103
3	48.4633	0.2474	57.6169	0.2468	61.6970	0.2335	0.2476	65.8322
3.5	48.9584	0.2211	57.5620	0.2206	66.4926	0.2205	0.2223	71.0814
4	49.0950	0.1958	57.8328	0.1952	66.9167	0.1933	0.1951	75.6025
4.5	48.8749	0.1694	58.4451	0.1689	66.9404	0.1690	0.1696	75.6951
5	48.3490	0.1429	57.9818	0.1434	67.2221	0.1438	0.1440	76.4016
5.5	49.1060	0.1182	58.1271	0.1180	67.4410	0.1166	0.1164	76.3166
6	48.7799	0.0917	58.5635	0.0917	67.2216	0.0924	0.0926	74.7499
6.5	49.4566	0.0662	57.8751	0.0663	65.8763	0.0711	0.0672	70.5365
7	49.0946	0.0418	56.7727	0.0458	61.2019	0.0569	0.0398	65.8838
7.5	47.3185	0.0195	52.4285	0.0325	56.7942	0.0457	0.0166	60.4273
8	43.3377	0.0073	47.3482	0.0194	51.6656	0.0346	-0.0008	56.2938
8.5	40.031	-0.0009	42.5802	0.0094	46.8562	0.0208	-0.0020	51.5161
9	39.2430	0.0001	39.5416	0.0005	42.4362	0.0098	-0.0010	46.0508
9.5	39.5101	0.0004	39.0993	0.0005	38.7387	0.0027	0.0022	42.0007
10	39.8564	0.0026	38.7072	0.0026	38.8644	0.0017	0.0018	39.7178

PROBLEMA IV.5

Una conducción descarga agua hacia la atmósfera desde un almacenamiento por medio de una válvula instalada al final aguas abajo. La tubería cambia sus características geométricas a lo

IV. GOLPE DE ARIETE EN TUBERIAS A PRESION

largo de toda su trayectoria como sigue $L_1 = 500$ m, $D_1 = 0.60$ m, $f_1 = 0.015$, $a_1 = 1000$ m/s, $L_2 = 250$ m, $D_2 = 0.90$ m, $f_2 = 0.01$, $a_2 = 800$ m/s, $L_3 = 750$ m, $D_3 = 0.50$ m, $f_3 = 0.025$, $a_3 = 1.100$ m/s y $L_4 = 750$ m, $D_4 = 0.75$ m, $f_4 = 0.02$, $a_4 = 500$ m/s. Calcular la carga de presión y la velocidad en la válvula para un cierre y apertura de 20 segundos usando el método de Allievi. La ley de cierre y apertura se indica en las siguientes tablas

Ley de cierre

t(s)	0	5	10	15	20
n_i	1	0.8333	0.6667	0.5	0

Ley de apertura

t(s)	0	5	10	15	20
n_i	0	0.5	0.6667	0.8333	1

El nivel de agua en el almacenamiento es de 100 m con respecto al centro de la tubería

Solución

La ubicación a la salida es

$$v_s = \sqrt{\frac{2gH}{1 + \sum_{i=1}^n \left[F_i L_i \frac{d_s^4}{d_i^5} + K_i \left(\frac{d_s}{d_i} \right)^4 \right]}}$$

Despreciando las pérdidas locales

Sustituyendo valores se tiene

IV. GOLPE DE ARIETE EN TUBERIAS A PRESION

$$V_z = \frac{19.42 \times 100}{1 + \frac{0.015 \times 500}{(0.00)^5} + \frac{(0.75)^4}{0.01 \times 2.50} + \frac{(0.75)^4}{(0.00)^5} + \frac{0.02 \times 750}{(0.50)^5} + \frac{(0.75)^4}{0.02 \times 750} + \frac{(0.75)^4}{(0.75)^5}}$$

$$V_z = 2.8432 \text{ m/s}$$

de continuidad

$$Q = A_o V_o$$

obteniéndose

$$Q = 0.4418 \times 2.8432 = 1.2561 \text{ m}^3/\text{s}$$

la longitud equivalente es

$$L_o = L_1 + L_2 + L_3 + L_4$$

$$L_o = 500 + 250 + 750 + 750 = 2250 \text{ m}$$

La velocidad equivalente vale

$$Q_o = \frac{L_o}{\sum_{i=1}^n \frac{L_i}{a_i}}$$

$$Q_o = \frac{2250}{\frac{500}{1000} + \frac{250}{800} + \frac{750}{1100} + \frac{750}{500}} = 751.4321 \text{ m}^3/\text{s}$$

el Area equivalente

$$A_o = \frac{L_o}{\sum_{i=1}^n \frac{L_i}{A_i}}$$

$$A_o = \frac{2250}{\frac{500}{0.2827} + \frac{250}{0.6362} + \frac{750}{0.1963} + \frac{750}{0.4418}} = 0.2930 \text{ m}^2$$

de la ecuación para la velocidad equivalente

IV. GOLPE DE ANIETE EN TUBERIAS A PRESION

$$V_0 = \sqrt{\frac{1.2561 (500 \times 4.4432 + 250 \times 1.9744 + 750 \times 2.8432)}{500 \times 0.2827 + 250 \times 0.6382 + 750 \times 0.1963 + 750 \times 0.4418}}$$

$$V_0 = 3.9440 \text{ m/s}$$

la característica de la tubería equivalente es de

$$\rho' = \frac{751.4231 \times 3.944}{19.62 \times 100} = 1.5105$$

El período equivalente vale

$$T_0 = \frac{2 L_0}{a_0}$$

$$T_0 = \frac{2 \times 2250}{751.4231} = 5.9886 \text{ seg} = 6 \text{ seg}$$

Solución cuando se efectúa el cierre lineal.

De la ecuación

$$\zeta_1^2 + \zeta_{i-1}^2 - 2 = 2 \rho (n_{i-1} \zeta_1 - n_i \zeta_i)$$

los valores de n_i

$$\zeta_1^2 + 1 - 2 = 2 \times 1.5105 (1 - 0.8 \zeta_1)$$

$$\zeta_1^2 - 1 = 3.0210 - 2.4168 \zeta_1$$

$$\zeta_1^2 + 2.4168 \zeta_1 - 4.0210 = 0$$

resolviendo la ecuación

$$\zeta_1 = 1.1328$$

de

$$\zeta_1^2 = \frac{h_1}{h_0}$$

IV. GOLPE DE ARIETE EN TUBERIAS A PRESION

se tiene que $h_1 = (1.1328)^2 \times 100 = 128.3236 \text{ m}$.

De la ecuación

$$V_1 = V_0 n_1 \zeta_1$$

$$V_1 = 3.9440 \times 0.8 \times 1.1328 = 3.5742 \text{ m/s}$$

para $i = 2$ se tiene

$$\zeta_2^2 + \zeta_1^2 - 2 = 2 \rho (n_1 \zeta_1 - n_2 \zeta_2)$$

sustituyendo valores

$$\zeta_2^2 + (1.1328)^2 - 2 = 3.0210 (0.8 \times 1.1328 - 0.6 \zeta_2)$$

$$\zeta_2^2 - 0.7168 = 2.7378 - 1.8126 \zeta_2$$

$$\zeta_2^2 + 1.8126 \zeta_2 - 3.4546 = 0$$

resolviendo la ecuación

$$\zeta_2 = 1.1651$$

la carga de presión es

$$h_2 = \zeta_2^2 h_0$$

$$h_2 = (1.1651)^2 \times 100 = 134.9185 \text{ m}$$

la velocidad vale

$$V_2 = V_0 n_2 \zeta_2$$

IV. GOLPE DE ARIETE EN TUBERIAS A PRESION

$$V_2 = 3.9440 \times 0.6 \times 1.1651 = 2.7571 \text{ m/s}$$

siguiendo la misma secuencia para los demás valores, se forma la siguiente tabla

i	t(s)	n_t	ζ_t	h_t (m)	V_t (m/s)
0	0	1	1	100	3.944
1	6	0.8	1.1328	128.3236	3.5742
2	12	0.6	1.1651	134.9185	2.7571
3	18	0.20	1.3848	191.7665	1.0923
4	24	0	0.9586	91.8914	0

ahora, resolviendo la situación para la abertura

de la ecuación de Allievi

$$\zeta_i^2 + \zeta_{i-1}^2 - 2 = 2 \rho (n_{i-1} \zeta_{i-1} - n_i \zeta_i)$$

para $i = 1$

$$\zeta_1^2 + \zeta_0^2 - 2 = 2 \rho (n_0 \zeta_0 - n_1 \zeta_1)$$

$$\zeta_1^2 + 1 - 2 = 2 \times 1.5105 (0 - 0.5333 \zeta_1)$$

$$\zeta_1^2 + 1 = -1.6112 \zeta_1$$

$$\zeta_1^2 + 1.6112 \zeta_1 - 1 = 0$$

$$\zeta_1 = 0.4785$$

de la ecuación

$$\zeta_i^2 = \frac{h_i}{h_0}$$

$$h_i = \zeta_i^2 h_0$$

IV. GOLPE DE ARIETE EN TUBERIAS A PRESION

$$h_1 = (0.4785)^2 \times 100 = 22.8992 \text{ m}$$

la velocidad

$$V_1 = V_0 h_1 \zeta_1$$

$$V_1 = 3.944 \times 0.5333 \times 0.4785 = 1.0064 \text{ m/s}$$

si $i = 2$ se llega a

$$\zeta_2^2 + \zeta_1^2 - 2 \rho (n_1 \zeta_1 - n_2 \zeta_2)$$

sustituyendo valores

$$\zeta_2^2 + (0.4785)^2 - 2 = 3.021 (0.5333 \times 0.4785 - 0.7333 \zeta_2)$$

$$\zeta_2^2 - 1.7710 = 0.7709 - 2.2154 \zeta_2$$

$$\zeta_2^2 + 2.2154 \zeta_2 - 2.5419 = 0$$

$$\zeta_2 = 0.8337$$

$$h_2 = (0.8337)^2 \times 100 = 69.4998 \text{ m}$$

la velocidad vale

$$V_2 = V_0 h_2 \zeta_2$$

$$V_2 = 2.944 \times 0.7333 \times 0.8337 = 2.4112 \text{ m/s}$$

siguiendo el mismo procedimiento para los puntos restantes se forma la siguiente tabla

IV. GOLPE DE ARIETE EN TUBERIAS A PRESION

i	t(s)	n_t	ζ_t	h_t (m)	V_t (m/s)
0	0	0	1	100	0
1	6	0.5333	0.4785	22.8992	1.0064
2	12	0.7333	0.8337	69.4998	2.4112
3	18	0.9333	0.8572	73.484	3.1553
4	24	1.0	0.9316	86.7824	3.6742

V. CONCLUSIONES

V. CONCLUSIONES

Con lo expuesto en este trabajo se han sentado las bases de la hidráulica correspondiente a sistemas de bombeo, haciendo énfasis en el flujo permanente para después entrar al flujo transitorio. Siendo el enfoque didáctico y de apoyo, con lo anterior el estudiante podrá aplicar por sí solo los conocimientos adquiridos en su asignatura de hidromecánica y el manejo de la información expuesta en este trabajo para resolver nuevos problemas relacionados con el tema, que se presentan tanto en la vida estudiantil como en la práctica profesional.

La ecuación para determinar las pérdidas de fricción se ha manejado la de Darcy-Weisbach, por considerarse que los valores arrojados por la misma llevan a valores menos conservadores que las otras fórmulas experimentales (Chezy, Manning, etc.).

La solución a los problemas de golpe de ariete se ha hecho paso a paso, para que el estudiante pueda aplicar la secuencia que se debe seguir para resolver el mismo y dado el auge que se tiene en las computadoras personales y la facilidad de adquirirlas, pueda realizar un programa enfocado a la resolución de este tipo de problemas.

El método de solución de flujo transitorio más recomendable por su precisión es de las características, además de tener más flexibilidad en el manejo de diferentes condiciones geométricas y características de los sistemas de conducción.

El método de Allieve no tiene mucho rango de aplicación, debido a sus limitaciones como son, tuberías de diámetro y espesor constantes, maniobras lentas y sistemas de conducción sencillos, pero es un indicador preliminar del fenómeno.

VI. BIBLIOGRAFIA

VI. BIBLIOGRAFIA

1. R.E. Featherstone and C. Nalluri, Civil Engineering Hydraulics. Essential Theory With Worked Examples. Granada Publishing Limited, Londres (1982).
2. R. Guarga, J. L. Sánchez Bribiesca, R. Carmona y L. Aguilar. Diseño y Operación Hidráulicos de Conducciones de Agua a Presión, Instituto de Ingeniería, UNAM, México (1985).
3. Ch. Jaeger. Fluid Transients In Hydro-Electric Engineering Practice, Blackie & Sons, Limited, Londres (1977).
4. U. Mancebo. Teoría del Golpe de Ariete y sus Aplicaciones en Ingeniería Hidráulica, Limusa (1987).
5. C. Mataix. Mecánica de Fluidos y Máquinas Hidráulicas, Harla (1982).
6. F. S. Merrit. Guía del Ingeniero Civil. Mc Graw Hill (1989).
7. J. Parmakian. Waterhammer Analysis, Dover Publications, Inc. Nueva York (1963).
8. N. N. Pashkov y F. M. Dolqachev. Hidráulica y Máquinas Hidráulicas, Mir, Moscú (1985).
9. M. Reyes. Cursos de Máquinas Hidráulicas. Facultad de Ingeniería, UNAM, Representaciones y Servicios de Ingeniería, S.A. (1965).
10. A. Schlag. Hidráulica, Limusa (1982).
11. A. Simon. Hidráulica Básica, Limusa (1983)
12. G. Sotelo. Hidráulica General, Volumen I, Limusa (1979)
13. V. Streeter y B. Wylie, Mecánica de los Fluidos, Mc Graw Hill (1987).
14. Streeter and Wylie, Hydraulic Transients, Mc Graw Hill, Nueva York (1967).