

40

2ej



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

LA DEMOSTRACION EN EL PENSAMIENTO
DE LUDWIG WITTGENSTEIN

T E S I S
 QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:
 M A T E M A T I C O
 P R E S E N T A I
 GUILLERMO EDUARDO ZAMBRANA CASTAÑEDA

FALLA DE ORIGEN

MEXICO, D. E.

1991



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

Introducción

La presente tesis se plantea como problema central, una primera aproximación a lo que en Ludwig Wittgenstein podría llamarse una Filosofía Matemática) en particular a lo que éste dice acerca de la demostración en las matemáticas.

El carácter provisional de la misma obedece al hecho de que el tema, en un sentido global y desde la perspectiva considerada, no se agota con lo que en este lugar se expone; ciertamente, es preciso apuntar que sobre el asunto hay, en los textos de Wittgenstein, muchos más elementos que permitirían una profundización de éste. El hacerlo, por otra parte, rebasaría, precisamente, el carácter provisional de este trabajo.

La importancia del tema elegido se confirma por el hecho de que la demostración, la prueba, es en las matemáticas la piedra de toque para la validez de cualquier proposición o teoría que pretenda formar parte de ellas. Si bien es posible una discusión mucho más amplia sobre el tema, ésta ha sido eludida por ahora, aunque la aproximación elegida constituye un buen punto de partida para la discusión posterior, en la medida en la que, como se verá, los planteamientos de Wittgenstein se desarrollan manteniéndose cerca de lo matemático.

ocurren en el uso ordinario del lenguaje, quitando así, "...la niebla mental" que parece envolverlo.⁴

Lo anterior permitirá estudiar con ventaja, "...los problemas de verdad y falsedad, acerca del acuerdo o desacuerdo de las proposiciones con la realidad, acerca de la naturaleza de la suposición, afirmación, y pregunta"⁵, que aparecerán ahora con claridad.

Sin embargo, no hay que pensar que todo lo anterior representa una escisión radical con nuestras formas más complejas de comunicación, las que pueden ser construidas añadiendo nuevas formas a las anteriores, más simples.⁶

Para lo que puede considerarse la definición última de "juego de lenguaje", Wittgenstein considera, primero, un lenguaje en el cual las palabras individuales nombran objetos y en el cual las oraciones son combinaciones de dichos nombres; en dicho lenguaje, toda palabra tiene un significado y viceversa. Este significado es el objeto representado por la palabra.⁷

Después, un lenguaje para el que valga la descripción anterior, y que sirva como "... comunicación entre un albañil A y su asistente B. A está construyendo con piedras de construcción: Hay tabiques. pilastras, losas y vigas. B tiene que pasar el material en el orden en el que A lo

⁴ Véase *op. cit.* p. 17.

⁵ Véase *Ibid.*

⁶ Véase *Ibid.*

⁷ Véase Wittgenstein, Ludwig; *Philosophical investigations*, traducida por G.E.M. Anscombe; Basil Blackwell, Oxford; 1983. párrafo 1. p. 2e. Este lenguaje corresponde a la idea de lenguaje en San Agustín. En adelante este libro será abreviado por *Investigaciones*.

necesite. Para este propósito usan un lenguaje que consiste en las palabras 'tabique', 'pilastra', 'losa', 'viga'. A las grita - B le lleva la piedra que ha aprendido a llevar a ese grito. - Concibe a este como un lenguaje primitivo completo."⁸

Además de la posibilidad de pensar a este lenguaje como un sistema completo de comunicación humana⁹, la práctica de su uso puede ser pensada como una serie de órdenes que alguien sigue ante la emisión de las palabras que lo componen; en su enseñanza se encontrará un proceso mediante el cual el aprendiz reproduce la palabra correspondiente al objeto cuando el maestro lo señale y el proceso mediante el cual el alumno repite lo que el maestro le dice. Ambos se parecen al lenguaje.¹⁰

El proceso a través del cual se usan las palabras de este mismo lenguaje también puede ser imaginado "... como uno de esos juegos con los que los niños aprenden su lengua materna."¹¹

Hechas estas consideraciones, Wittgenstein concluye: "... llamaré a estos juegos '*juegos de lenguaje*' y hablaré a veces de un lenguaje primitivo como un juego de lenguaje ... Llamaré también '*juego de lenguaje*' al todo formado por el lenguaje y las acciones con las cuales está entretelado."¹²

⁸ *Investigaciones* párrafo 2. p. 3e. Véase también *The blue and brown books*; Harper & Row, New York; 1960. p. 77.

⁹ Véase *The blue and brown books*; p. 81.

¹⁰ *Investigaciones*; párrafo 7. p. 5e.

¹¹ *Ibid.*

¹² *Ibid.*

La última afirmación permite ampliar la idea de lo que son los juegos de lenguaje, a partir de ella, Wittgenstein sostiene que "... imaginar un lenguaje significa imaginar una forma de vida."¹² Y que hablar el lenguaje forma parte de una actividad o de una forma de vida.

Así, es fácil imaginar una multiplicidad de juegos de lenguaje; imaginar "... innumerables tipos diferentes de empleo de todo lo que llamamos 'signos', 'palabras', 'oraciones'. Y esta multiplicidad no es algo fijo, dado de una vez por todas; sino que nuevos tipos de lenguaje, nuevos juegos de lenguaje¹⁴, como podemos decir, nacen y otros envejecen y se olvidan."¹⁵

Wittgenstein, desde luego, ofrece varios ejemplos:

"Dar órdenes y actuar siguiendo órdenes --

Describir un objeto por su apariencia o por sus medidas--

Fabricar un objeto de acuerdo con una descripción (un dibujo)--

Relatar un suceso--

Hacer conjeturas sobre el suceso--

Formar y comprobar una hipótesis--

Presentar los resultados de un experimento mediante tablas y diagramas--

Inventar una historia; y leerla--

¹² *Op. cit.* párrafo 19. p. 80.

¹⁴ Subrayado mío.

¹⁵ *Op. cit.* párrafo 23. p. 116. Wittgenstein agrega: "Un cuadro aproximado de esto puede darnoslo los cambios en las matemáticas."

Actuar en teatro--

Cantar a coro--

Adivinar adivinanzas--

Hacer un chiste; contarlo--

Resolver un problema de aritmética aplicada--

Traducir de un lenguaje a otro--

Suplicar, agradecer, maldecir, saludar, rezar."14

¹⁴ Ibid.

Uno

En la exposición siguiente se resumen los elementos básicos que ofrecen un punto de partida para un análisis inicial de la posición de Wittgenstein acerca de las matemáticas.

Con la intención de aclarar el posible significado de la palabra *saber*, Wittgenstein propone la consideración del siguiente caso: "A escribe series de números; B lo observa y trata de encontrar una ley para la secuencia de números. Si tiene éxito exclama: '¡Ahora puedo seguir!' -Esta capacidad, este entendimiento, es algo que hace su aparición en un instante. Tratemos de ver qué es lo que hace su aparición aquí. -A ha escrito los números 1,5, 11,19,29; en este punto B dice que sabe como seguir. ¿Qué pasó aquí?"¹

Wittgenstein ofrece varias alternativas: mientras A escribe, B prueba fórmulas algebraicas hasta dar con la fórmula $a_n = n^2+n-1$, la cual al ser usada resulta la correcta; o B encuentra la serie de diferencias 4,6,8,10 y dice que puede seguir; o B dice conozco esa serie y continúa; o B sin decir nada continúa, "...quizás tuvo lo que podría llamarse la sensación '¡es fácil!'". (Tal sensación es, por ejemplo, la de un ligero y breve suspiro, como cuando uno es ligeramente sobresaltado.)"²

¹ *Op. cit.* párrafo 151 p. 59e.

² *Ibid.*

el que 'seguimos' una señal de tránsito⁶) a las cuales juzgamos por bien empleadas de acuerdo a lo que B haga a continuación.* Vale la pena señalar que en este segundo caso va implícito un criterio empírico, cualquiera que este sea, para comprobar que, efectivamente, B puede seguir. Si tengo este criterio, se elimina todo problema; digo que B sigue o no sigue con la serie de acuerdo con el resultado del "experimento" (por así decirlo).

En tanto que el considerar las cosas como en el segundo caso no genera problema alguno, es a partir de la diferencia entre el primer caso y el segundo que continuará el análisis. Esta diferencia es planteada por Wittgenstein al proponer la posibilidad de que B diga que puede continuar, y que cuando trate de hacerlo no sea capaz de ello. "...¿Diremos que estaba equivocado cuando dijo que podía seguir, o que entonces podía y ahora no? Es claro que diremos cosas diferentes en casos diferentes."⁷ Cuando esto sucede, lo que está en cuestión es la manera en la que se aprende el uso de las palabras en los distintos juegos de lenguaje, esto es, los distintos posibles papeles que éstas pueden desempeñar en distintos juegos de lenguaje.

Wittgenstein ofrece como ilustración de esto último el análisis de la gramática de las palabras 'ajustar', 'poder' y 'entender'. Se trata de explicar cómo es que, en tanto que los criterios distintos que aceptamos para las palabras

⁶ Véanse *op. cit.* párrafos 85, 86 y 87 pp. 39 y 40.

* Véase *op. cit.* párrafo 180 p. 73e.

⁷ *Op. cit.* párrafo 181 p. 73e.

'ajustar', 'poder' y 'entender' son más complicados de lo que pensamos usualmente, "... el juego con estas palabras, su uso en el tráfico lingüístico que se realiza a través de ellas (su gramática), es más intrincado -el papel de estas palabras en nuestro lenguaje es más diferente- de lo que estamos tentados a creer."⁸

Es precisamente la comprensión de estos papeles diversos lo que posibilita la solución de las paradojas filosóficas; es por esto que una definición no es suficiente, como tampoco lo es el decir que una palabra es indefinible.

Esta idea puede aclararse si nos preguntamos por los distintos casos en los podría aparecer un uso múltiple para cada una de las palabras mencionadas arriba; veamos: (1) ¿Cuándo se dice que un cilindro C 'ajusta' en un cilindro hueco H? ¿Sólo cuando C está metido en H? (2) A veces decimos que C ha dejado de ajustar en H en tal y cual momento. ¿Cuáles son los criterios usados en tal caso para decir que eso sucedió en ese momento? (3) ¿Cuáles se considera que son los criterios para decir que un cuerpo ha cambiado de peso en un momento dado, si en ese momento no estaba sobre la balanza? (4) Ayer me sabía el poema de memoria; hoy ya no me lo sé. ¿En qué caso tiene sentido preguntar: '¿Cuándo dejé de saberlo?' (5) Alguien me pregunta '¿Puedes levantar este peso?' Contesto que sí. Ahora me dice '¡Hazlo!' -y no puedo. ¿En qué tipo de circunstancias puede

⁸ *Op. cit.* párrafo 182 p. 73e.

ser una justificación el decir: 'Cuando dije que <si> podía, pero ahora no puedo?'¹⁰

Es precisamente en la dirección propuesta por este ejemplo, y como veremos, de modo pertinente para el conjunto de sus concepciones, que Wittgenstein reflexiona sobre el significado de la palabra guiar¹⁰. Al preguntarse por la experiencia de ser guiado¹² propone la consideración de varios casos: la experiencia de ser conducido o guiado de la mano, la de ser conducido en un baile por la pareja, la de caminar con alguien a quien se sigue, seguir una vereda en el campo. Si bien todas estas situaciones son similares entre sí, puede preguntarse ¿Qué es lo común a éstas experiencias?

A la posible objeción de que seguramente el ser guiado es una experiencia particular Wittgenstein responde que seguramente se piensa en una experiencia particular de ser guiado.¹² Añade que también es posible pensar que se puede ser guiado al escribir (añadiendo determinaciones: cuidadosamente, conscientemente, objetivamente ...), al leer, etc. Pero que ante la descripción de lo que hago y la pregunta de que si no será esto la experiencia de ser guiado, la respuesta sigue siendo no, sino que parece que es algo más interno, más esencial y aclara: - "Es como si al principio todos estos procesos, más o menos insenciales estuvieran envueltos en una atmósfera particular que se

¹⁰ *Ibid.*

¹¹ Véanse *op. cit.* párrafos 172 a 178, pp. 70e. a 72e.

¹² *Op. cit.* párrafo 172 p. 70e.

¹³ *Ibid.*

modo, cuando digo ser guiado, y pienso en lo sucedido, añado a su consideración el haberlo hecho a través del concepto 'porque' o el de 'influencia' o el de 'causa' o el de 'conexión'. De este modo, cuando decimos ser guiados y acompañamos a la afirmación con el gesto de guiar a alguien, lo que es posible en una diversidad de situaciones, en realidad es esta mera¹⁶ forma (*forma singular*) de guiar la que fuerza la expresión en nosotros¹⁷, aunque, como ya vimos, este movimiento no contenga la "esencia" de guiar.

Tenemos, entonces, que es esta multiplicidad de criterios lo que explica el significado de ser guiado, más que una idea única, "esencial" de ello. Aunque subsista, de alguna manera, una separación entre lo puramente experimental, empírico y aquello que sucede al margen y aparentemente con independencia de ello; en el lenguaje o en el pensamiento.

Volviendo al primer ejemplo, Wittgenstein se pregunta si en éste la frase 'Ahora puedo seguir' querrá decir lo mismo que 'Ahora se me ocurrió la fórmula' o algo distinto. La respuesta, en concordancia con la idea expresada arriba, es que en estas circunstancias (las del ejemplo) estas expresiones tienen el mismo sentido, es decir, logran lo mismo. Pero, y en este punto Wittgenstein hace resaltar la diferencia que existe con el resultado meramente empírico, en general las dos oraciones no tienen el mismo sentido. De modo que el decir 'Ahora puedo seguir, quiero decir, conozco

¹⁶ Subrayado mío

¹⁷ Véase *op. cit.*, párrafo 178 p. 72e.

la fórmula.' es semejante a las afirmaciones 'Puedo caminar, quiero decir, tengo tiempo. '; 'Puedo caminar, quiero decir, ya estoy suficientemente fuerte. '; 'Puedo caminar, por lo que respecta a la condición de mis piernas.' En tanto contrastamos esta condición de caminar con otras.

Wittgenstein nos previene, sin embargo, de pensar que exista una totalidad de condiciones para cada caso tales que, de cumplirse todas ellas, no pudiera sino cumplirse el caso. El ejemplo que ofrece es que no puede uno pensar en que hubiera una totalidad de condiciones que hicieran, en caso de cumplirse, que alguien no tenga otra opción que caminar.¹⁰

Joyce expresa esta idea, de mejor manera, en forma de preguntas: "Had Pyrrhus not fallen by a beldam's hand in Argos or Julius Caesar not been knifed to death? They are not to be thought away. Time has branded them and fettered they are lodged in the room of the infinite possibilities they have ousted. But can those have been possible seeing that they never were? Or was that only possible which came to pass?"¹¹

(¿Si Pirro no hubiera caído en Argos a manos de una bruja o Julio César no hubiera sido acuchillado hasta morir? No deben deshecharse. El tiempo las ha marcado y, encadenadas, están guardadas en el cuarto de las posibilidades infinitas que anularon. ¿Pero pudieron éstas

¹⁰ Véase *op. cit.* párrafo 183 p. 74e.

¹¹ Joyce, J.; *Ulysses*; Penguin] p. 31.

ser posibles viendo que nunca fueron? ¿O era posible sólo lo que sucedió?")

En este punto parece pertinente insistir en el hecho de la separación entre el resultado empírico de una afirmación y los posibles y múltiples significados que esa afirmación puede tener en el terreno del lenguaje; por ejemplo, digo: 'Puedo caminar,...' y me quedo sentado.

En esta misma dirección, puede considerarse un ejemplo más. Ante el hecho de recordar súbitamente una canción, decir 'Ahora la sé' y cantarla, surge la pregunta ¿Cómo fué que la supe repentinamente? ante la cual pueden hacerse varias consideraciones. "¡Seguramente no puede haberseme ocurrido en su totalidad en ese momento! -Quizás podría decir: 'Es una sensación particular, como si estuviera ahí' -¿pero está ella ahí? ¿Qué pasa si ahora comienzo a cantarla y me atoro? -¿No podría haber estado seguro en ese momento de que la sabía? ¡Así, en algún sentido u otro estaba ahí después de todo! -¿Pero en qué sentido?"*

Las respuestas que ofrece Wittgenstein a esta última pregunta destacan de nueva cuenta esta separación en la que ha insistido entre lo empírico y aquello que sucede en el lenguaje o en la mente; el primer par de respuestas afirma que podemos decir que la canción está presente si a) alguien la canta toda; es decir si ocurre, experimentalmente, que sea emitida por alguien. b) Que alguien la oiga mentalmente de principio a fin. c) Esto no excluye que la afirmación

* Investigaciones; párrafo 184 p. 74e.

podiera tener otros significados, por ejemplo, el que se tenga un papel en el cual está escrita; y todavía quedaría por saber en qué consisten el estar seguro, el sabérsela. d) Como definición de la expresión 'la canción está presente en su mente en su totalidad' podemos dar el que si alguien dice con convicción que ahora se sabe la tonada, entonces ésta está presente en su mente en su totalidad en ese momento de alguna manera.²¹

De esta manera, pueden resaltarse los distintos y múltiples criterios que son utilizados en general para el uso de las palabras en el tráfico lingüístico, en distintos juegos de lenguaje, a los que corresponde, para cada uno, algún resultado o expresión empírica.

Es a partir de las consideraciones anteriores, que es posible continuar, sobre terreno firme, la discusión en la que se ha enfrascado Wittgenstein en relación a las matemáticas.

"Examinemos ahora este tipo de juego de lenguaje: B debe escribir, a una orden de A, series de signos de acuerdo con una regla de formación.

La primera de estas series debe ser la de los números naturales en sistema decimal. -¿Cómo es que llegó a entender este sistema? -En primer lugar se le escriben series de números y se le exhorta a copiarlas. (No te resistas a la expresión 'series de números'; no está siendo usada erróneamente aquí.) Ya hay aquí una reacción normal y una

²¹ Véase *Ibid.*

anormal en quien aprende. -Quizás al principio quremos su mano al escribir la serie del 0 al 9; pero después la posibilidad de comprensión dependerá de que él siga escribiéndola independientemente. -Y aquí podemos imaginarnos, por ejemplo, que copia ciertamente las cifras independientemente, pero no la serie, escribe, sin regla, a veces una, a veces otra. Y entonces la comprensión cesa en ese punto. - O también que él cometa 'errores' en el orden de la serie. -La diferencia entre este y el primer caso es, desde luego, en la frecuencia. -O: él hace errores sistemáticos, por ejemplo, copia sólo un número de cada dos, o copia la serie 0,1,2,3,4,5,... así: 1,0,3,2,5,4,... Aquí casi estaríamos tentados de decir que ha entendido incorrectamente.

Pero obsérvese! No hay una distinción tajante entre un error irregular y uno sistemático. Esto es, entre lo que se está inclinado a llamar 'irregular' y 'sistemático'.

Tal vez sea posible deshabituarlo del error sistemático (como de un vicio). O quizás uno acepte su modo de copiar y trate de enseñar el propio como una variante del suyo.- Y también aquí, la capacidad de nuestro alumno para aprender puede tener un fin."²²

Acerca de este juego de lenguaje, y en concordancia con el mecanismo que hemos venido señalando, el criterio propuesto para entender la escritura de la serie en sistema decimal, es básicamente el que B sea capaz de escribirla

²² *Op. cit.* párrafo 143. p. 56e.

independientemente) es decir, estamos ante la adopción de un criterio *práctico*, no obstante la posibilidad de que B cometa distintos errores. Sin embargo, en la discusión que se establece a continuación, Wittgenstein planteará distintas alternativas que surgen al margen del resultado "experimental", en función de posibles criterios alternativos para la palabra *entender*.

En el caso en que B continúe cometiendo errores, el que su capacidad de entender pudiera tener un fin —el que ésto sea posible— estaría referida al hecho de que le he pedido que acepte un cuadro²³ (*Bild*) que cambia su modo de ver las cosas, que le permite, o no, considerar de modo distinto un caso dado, compararlo con esta serie de cuadros.²⁴ Si suponemos que B es capaz de continuar correctamente con la serie —i.e. como lo hacemos nosotros— podemos decir que B ha dominado el sistema, pero tendríamos que preguntarnos hasta donde tiene que escribir la serie para que podamos afirmar esto. Es evidente que la respuesta no puede depender de que sea capaz de continuar la serie hasta tal o cual número, pues esto sólo sería la aplicación de lo que ha entendido. "El entender mismo es un estado del cual surge el uso correcto."²⁵ A la posibilidad de que aquí estemos pensando en la derivación de la serie por medio de

²³ Este concepto es básico dentro del conjunto de las ideas de Wittgenstein. Aunque será discutido posteriormente, me parece que una aproximación intuitiva basta por el momento. En todo caso, adelanto la definición de cuadro (*Bild*) que aparece en el *Tractatus logico-philosophicus*: Un cuadro es un hecho (2.141).

²⁴ Véase *Investigaciones*; párrafo 144 p. 57e.

²⁵ Véase *op. cit.* párrafo 146 p. 58e.

su fórmula algebraica o en algo similar, Wittgenstein responde que, además de ser el lugar en el que ya estábamos, siempre puede pensarse en más de una aplicación para cada fórmula y cada aplicación siempre puede formularse algebraicamente. "La aplicación continúa siendo un criterio de comprensión."²⁶

Y, sin embargo, también puedo afirmar que conozco (o sé) la aplicación de la regla de la serie prescindiendo totalmente de un recuerdo de las aplicaciones efectivas a determinados números. Esto en función de que no es necesario desarrollar la serie en todos sus términos, que por lo demás, son infinitos; y de que el que yo sepa de cual serie se trata, no depende de que lo haya descubierto después de usarla de un modo específico varias veces, sino que por lo general sabemos desde antes de que serie se trata.

Quedaría, no obstante, la necesidad de responder a dos preguntas, a saber: ¿En qué consiste este conocimiento? y ¿Cuándo sabemos esta aplicación?; curiosamente, Wittgenstein responde con más preguntas: ¿siempre? ¿de día y de noche? ¿sólo cuando pienso en la regla?. ¿cómo me sé el alfabeto y las tablas de multiplicar? ¿es este conocimiento un estado de conciencia o un proceso? ¿el pensamiento de algo?²⁷ Las cuales, en mi opinión, señalan los distintos criterios que

²⁶ *Ibid.*

²⁷ Aquí hay que hacer notar que en el idioma Alemán no existen los gerundios; quizás un análisis del uso de 'estoy recordando', 'estoy aplicando', etc. podría introducir elementos novedosos para la comprensión de estos asuntos; en particular estoy pensando -nótese el gerundio- en que por esta vía se hace énfasis en la acción del sujeto y no en su estado.

Supóngase ahora que se le pide que continúe la serie +2 más allá de 1000 y que escribe 1000, 1004, 1008, 1012,...

Ante la convicción de B de que *debía seguir así*, o de que *está siguiendo la orden +2*, seguramente no serviría de nada repetir los ejemplos anteriores; quizás pudiéramos decir que B entiende la orden tal y como nosotros entenderíamos la orden: 'suma 2 hasta 1000, 4 hasta 2000, 6 hasta 3000, etc.'. "Tal caso presentaría similitudes con el de que una persona reaccionara ante el gesto de apuntar con la mano fijándose en la dirección de la línea que va de la punta de los dedos a la muñeca, y no de la muñeca a la punta de los dedos."³¹

El problema en este caso es, evidentemente, el de como se decide el paso correcto en un punto determinado.

Si decimos que "...-El paso correcto es el que concuerda con la orden -como fue significada'"³² y lo que estamos diciendo es que B debía haber escrito el sucesor del sucesor después de cada número, y que de esto se siguen todas las cifras; y no estamos diciendo que cuando se dio la orden +2 esto quiere decir que B escriba 1002 después de 1000, ..., 1868 después de 1866, ..., 1000036 después de 1000034, etc.. Todavía quedarían por responder las preguntas: ¿qué se sigue, en cualquier lugar, de esto? ¿qué debemos llamar, en cualquier lugar, 'concordancia' con esto (y con el significado que le damos, cualquiera que éste

³¹ *Op. cit.* párrafo 185 p. 75e.

³² *Op. cit.* párrafo 186 p. 75e.

seal? Parecería correcto decir que más que una intuición, es necesaria una decisión en cada paso."³³

Más aún, a la posibilidad de que digamos que sabíamos, al momento de dar la orden, que B debía escribir 1002 después de 1000, Wittgenstein hace notar que sí, y que también podemos decir que lo *significábamos* pero que no hay, que dejarse desorientar por la gramática de las palabras saber y significar; cuando decimos que sabíamos, seguramente quiere decir algo así como: "Si me hubieran preguntado que número debía escribir después de 1000, hubiera dicho que 1002..."³⁴ y no que estaba pensando en ese instante en el paso de 1000 a 1002. "Esta suposición es más bien de este tipo: 'Si se hubiera caído en el agua, yo habría saltado tras él.' -¿En dónde reside lo erróneo de tu idea?"³⁵

"Aquí quisiera decir ante todo: tu idea era que este significar la orden había dado todos esos pasos a su manera: fue como si tu mente volara con la significación, adelantándose y tomando todos los pasos antes de que tú llegaras físicamente a éste o aquél.

Así, estabas inclinado a usar expresiones tales como: 'Los pasos ya han sido realmente dados, aún antes de que lo haga por escrito, oralmente o en el pensamiento.' Y parecía como si estuvieran predeterminados, anticipados, de un modo singular. -como sólo el significar puede anticipar la realidad."³⁶ Considerando las ideas implícitas en la

³³ *Op. cit.* párrafo 186 p. 75e.

³⁴ *Op. cit.* párrafo 187 p. 76e.

³⁵ *Ibid.*

³⁶ *Op. cit.* párrafo 188 p. 76e.

sonete la expresión 'Los pasos están determinados'³⁹ por la fórmula ...'³⁷

Wittgenstein ofrece diversas circunstancias que aclararían el asunto. En el primer caso, dice: "...-Quizás podríamos referirnos al hecho de que la gente está obligada por su educación (entrenamiento) a usar de tal manera la fórmula $y=x^2$, que todos obtienen el mismo valor para y cuando substituyen el mismo número por x ."⁴⁰

En un segundo caso propone: "O podríamos decir: 'Estas personas están de tal manera entrenadas, que todas realizan el mismo paso en el mismo punto cuando reciben la orden <<sumen 3>>'. Podríamos expresar esto diciendo: para estas gentes la orden <<sumen 3>> determina completamente los pasos de un número al otro. (En contraste con otras gentes que no saben que hacer cuando reciben esta orden, o que reaccionan a la misma con una certeza perfecta, pero de una manera distinta cada una.)"⁴¹

Sin embargo es preciso hacer una consideración alternativa, se tratará de "contrastar diferentes tipos de fórmulas, y los diferentes tipos de uso (diferentes tipos de entrenamiento)⁴² adecuados a ellas."⁴³

Propone así, dos tipos de fórmulas. Para el primer caso dice: "... Haremos a las fórmulas de un tipo particular (con los métodos apropiados para su uso)

³⁹ Subrayado mío

³⁷ Véase *Ibid.*

⁴⁰ *Ibid*

⁴¹ *Ibid*

⁴² Subrayados míos.

⁴³ *Ibid.*

ser un problema matemático dilucidar si hay una sola variable del lado derecho de la fórmula, como por ejemplo en el caso $y = (x^2+z)^2 - z(2x^2+z)$.⁸⁰

En lo que evidentemente es un intento por sanjar la cuestión, Wittgenstein afirma: "Ahora puede decirse": 'La manera en que la fórmula tiene sentido determina cuáles son los pasos que deben seguirse'.⁸¹

De modo consistente con la forma de razonar que ha seguido al analizar los distintos posibles significados de las palabras, plantea la siguiente pregunta: "¿Cuál es el criterio para la forma en que la fórmula tiene sentido?"⁸² La respuesta es dada no sólo en términos del análisis previo, sino que además propone un criterio (previsible) para entender el asunto; dice: "Presumiblemente la forma en que siempre la usamos, la manera en la que nos enseñaron a usarla.

Decimos, por ejemplo, a alguien que usa un signo desconocido para nosotros: 'Si por $x!2$ quieres decir x al cuadrado, entonces obtienes este valor para y , si quieres decir raíz cuadrada de x , este otro.' - Ahora pregúntese: ¿Cómo quiere decir una cosa u otra por $x!2$?

Eso será como el tener sentido puede determinar los pasos de antemano."⁸³

⁸⁰ Ibid.

⁸¹ Investigaciones; párrafo 190 p. 77e.

⁸² Observaciones; párrafo 1.2. p. 36. Investigaciones; párrafo 190 p. 77e.

⁸³ Ibid.

⁸⁴ Observaciones; párrafo 1.2. p. 36. Investigaciones; párrafo 190 p. 77e.

Frente a lo anterior, podemos señalar lo siguiente: la fórmula y las preguntas que la acompañan nos colocan frente a su resolución²²; no sólo debemos contestarlas, sino que además se supone que debemos tener claro cual es el sentido de la fórmula y cuales son los pasos que debemos usar para resolverla; la posición de Wittgenstein es clara: Sabemos como resolver lo que se nos pide porque así lo hacemos siempre, porque así nos lo enseñaron.

También hay que destacar lo siguiente: ¿Cómo responder a la pregunta que nos plantea Wittgenstein? Podríamos empezar con una pregunta básicamente equivalente: ¿Con qué criterio hacemos equivalente $x:2$ a x^2 o a raíz cuadrada de x ? Parece que la respuesta está definitivamente asociada, y es aquí donde adquiere sentido la discusión previa, a lo que entendemos por uso. Si no es de este modo, la respuesta resulta irrelevante, si no estamos usando el signo puedo responder del modo que mejor me convenga, es decir, asocio algún signo conocido a uno desconocido de acuerdo a la hora del día, al azar, etc.) de otro modo el criterio dependerá, necesariamente, de como lo uso, cuando lo uso, donde lo uso, para que lo uso, por que lo uso, con que lo uso, etc. y será esto lo que determine de antemano los pasos a seguir.

Wittgenstein, sin embargo, hace notar en relación con el uso lo siguiente: "Es como si pudiéramos captar de golpe

²² El propio Wittgenstein nos obliga a ello. En el *Libro Azul* (p. 1), nos hace ver que este tipo de preguntas nos conducen a tratar de mostrar algo que las responda; más aún, dice: "Estamos frente a una de las grandes fuentes del azoro filosófico: un sustantivo nos hace buscar una cosa que le corresponda."

ejemplo, algún cuadro (Bild) a alguien y asumimos que el derivará el movimiento de las partes a partir de él. (Exactamente como podemos darle un número a alguien diciéndole que es el vigésimo quinto de la serie 1, 4, 9, 16, ...)

'La acción de la máquina parece estar en ella desde el principio' quiere decir: usted está inclinado a comparar los movimientos futuros de la máquina en su determinación con objetos que ya están en un cajón y a los cuales entonces sacamos.

Pero no hablamos así cuando nos concierne predecir el comportamiento efectivo de la máquina. En este caso, por lo general no se nos olvida la posibilidad de una deformación de las partes y cosas así.

Sin embargo, ciertamente hablamos así cuando nos preguntamos por el modo en que podemos usar una máquina para simbolizar un movimiento dado - pues ésta también puede moverse de modos enteramente *distingtos*.

Ahora, podemos decir que una máquina, o el cuadro (Bild) de ella, es el primero de una serie de cuadros (Bildern) que hemos aprendido a derivar a partir de éste.

Pero cuando recordamos que una máquina también podría haberse movido de manera diferente, nos parece rápidamente como si el modo en que se mueve debe estar contenido en la máquina-como-símbolo mucho más determinadamente que en la máquina real. Como si no fuera suficiente aquí para los movimientos en cuestión el estar empíricamente determinados

por adelantado, sino que deberían estar en realidad -en un sentido misterioso- presentes desde antes. Y es muy cierto: el movimiento de la máquina-como-símbolo está predeterminado en un sentido diferente de aquél en el cual está predeterminado el movimiento de cualquier máquina real dada.**

"¿Cuándo tiene uno el pensamiento los posibles movimientos de una máquina están ya ahí de algún modo misterioso? -Bueno, cuando uno hace filosofía. ¿Y qué nos conduce a pensar esto? La manera en que hablamos acerca de las máquinas. Decimos, por ejemplo, que una máquina tiene (posee) tal-y-tal posibilidades de movimiento, hablamos de la máquina idealmente rígida que sólo puede moverse de tal-y-tal manera. - ¿Qué es esta posibilidad de movimiento? No es el movimiento, pero tampoco parecen ser las solas condiciones físicas para moverse -como el que haya un cierto espacio entre el perno y el socket, donde el perno no quede muy apretado en el socket. Pues mientras ésta es la condición *explícita* para el movimiento, uno puede imaginar que fuera de otro modo. Se supone, más bien, que la posibilidad del movimiento es una sombra del movimiento mismo. ¿Pero sabe usted de semejante sombra? Y por una sombra no quiero decir algún cuadro (Bild) del movimiento; pues tal cuadro (Bild) no sería necesariamente un cuadro (Bild) de solo este movimiento. Pero lo posibilidad de este

** Observaciones; párrafo I.122 p. 84. Investigaciones; párrafo 193, pp. 77e., 78e.

entendemos sino que las malinterpretamos. Cuando hacemos filosofía somos como salvajes, gente primitiva, que oyen las expresiones de los hombres civilizados, les confieren una interpretación falsa, y obtienen conclusiones raras de ellas."⁸⁰

Wittgenstein regresa ahora al planteamiento previo, es decir, a lo que debe entenderse por la posibilidad de captar de golpe el uso total de una palabra; y de paso termina por aclarar por qué es el uso lo que determinará el significado de la fórmula. Veamos: "Pero no quiero decir que lo que hago ahora (el captar un sentido) determina el uso futuro causalmente y como asunto de la experiencia, sino que de una manera extraña, el uso mismo está presente en algún sentido.' ¡Pero desde luego lo está 'en algún sentido'! (¿Y qué no digo también: 'los eventos de los años pasados están presentes para mí'?) En realidad la única cosa errónea de lo que dices es la expresión 'de una manera extraña'. El resto es correcto; y la oración solo parece extraña cuando uno imagina un juego de lenguaje diferente de aquel en el cual la usamos de hecho. (Alguien me dijo alguna vez que de niño se preguntaba cómo un sastre 'cosía un vestido' -el pensaba que esto quería decir que un vestido era producido solo cosiendo, al coser un hilo al otro.)"⁸¹

"En nuestro fracaso para entender el uso de una palabra la tomamos como la expresión de un proceso raro. (Como

⁸⁰ Observaciones; párrafo I.125 p. 86. Investigaciones; párrafo 194, p. 78e.

⁸¹ Observaciones; párrafo I.126 p. 87. Investigaciones; párrafo 195, p. 79e.

pensamos al tiempo como un medio raro, al alma como ser extraño.)"²²

"Es como si pudiéramos captar de golpe el uso total de la palabra.' -Y eso es justamente lo que decimos que hacemos. Esto es decir: algunas veces describimos lo que hacemos con estas palabras. Pero no hay nada asombroso, nada raro acerca de lo que pasa. Se vuelve raro cuando somos llevados a pensar que el desarrollo futuro debe estar presente de algún modo en el acto de captar el uso y sin embargo no estarlo. - Pues decimos que no hay ninguna duda de que entendemos esa palabra y que por otra parte su significado reside en su uso. No hay ninguna duda de que ahora quiero jugar ajedrez, pero el ajedrez es el juego que es en virtud de todas sus reglas (y así sucesivamente). ¿Qué no sé, entonces, que juego quería jugar hasta que lo haya jugado? ¿O están todas las reglas contenidas en mi acto de intención? ¿Es la experiencia la que me dice que este tipo de juego sigue usualmente de este acto de intención? ¿Así que me es imposible estar seguro de lo que tengo intención de hacer? Y si esto fuera un sinsentido, ¿qué tipo de conexión super-rígida existe entre el acto de intención y lo intentado? - ¿Dónde se efectúa la conexión entre el sentido de la expresión 'Juguemos un partido de ajedrez' y todas las reglas del juego? - Bueno, en la lista de reglas del juego, en su enseñanza, en la práctica cotidiana de jugarlo."²³

²² Observaciones; párrafo 1.127 p. 88. Investigaciones; párrafo 196, p.79e.

²³ Observaciones; párrafo 1.130 p. 88. Investigaciones; párrafo 197, p.80e.

ideas, y que sea prácticamente imposible obtener, a partir de su revisión reiterada, en concordancia con su posición general, una idea unitaria, una solución única, una gran visión global para las preguntas que se hace.

Como ya vimos, Wittgenstein proporciona un conjunto de criterios para pensar los problemas planteados por la escritura de una serie. En las *Observaciones*, reinicia, con ferocidad, la re-discusión y análisis subsiguiente de éstos.

Así, propone² nuevas preguntas en relación con la escritura de los números sucesivos de la serie de los números pares: ¿cómo sé cuál es el número que sigue en ésta, y si sabemos de antemano cuál sigue, cómo sé que hacer con este conocimiento cuando tengo que escribir, de hecho, al número? ¿Qué hacer con la certeza de que puedo continuar?

El asunto, entonces, derivará hacia la discusión de la respuesta a la siguiente pregunta: "¿... en que consiste la inexorabilidad peculiar de las matemáticas?"³. A saber: "- ¿Qué no sería un buen ejemplo la inexorabilidad con la que 2 sigue de 1 y 3 sigue de 2? -"⁴. Respuesta que señala un tema, el de la inexorabilidad, a partir del cual surgen, para Wittgenstein, cuestiones básicas en torno a las cuales aparecerán elementos que permiten avanzar en la comprensión y fijación de asuntos básicos para las matemáticas.

Destaca entonces, una aproximación en donde lo convencional (dado por el uso), el entrenamiento, son lo que

² Véase Wittgenstein, L.; *Observaciones*, párrafo 1.3, p. 36.

³ *Op. cit.* párrafo 1.4 p. 37

⁴ *Ibid.*

explican tanto lo que llamamos inexorable como la posible verdad de lo matemático: "pero presumiblemente esto quiere decir: sigue en la serie de los números cardinales; puesto que en una serie diferente se sigue algo diferente. ¿Y no está esta serie definida por esta sucesión? - '¿Se supone que esto quiere decir que es correcto que una persona cuente, de cualquier modo, y de que cualquiera puede contar como le plazca? Presumiblemente no deberíamos llamar 'contar' si todo mundo dijera los números uno detrás de otro de cualquier manera; pero desde luego, no es simplemente una cuestión de nombre. Pues lo que llamamos 'contar' es una parte importante de nuestras actividades vitales. Contar y calcular no son -e.g.- simplemente un pasatiempo. Contar (y esto significa: contar así) es una técnica que se emplea diariamente en las operaciones más variadas de nuestras vidas. Y por eso es que aprendemos a contar como lo hacemos: con una práctica interminable, con una exactitud sin piedad; esto es por lo que se insiste inexorablemente en que todos debemos decir 'dos' después de 'uno', 'tres' después de 'dos' etc.. - ¿Pero entonces es este modo de contar solamente un uso; no hay alguna verdad que corresponda a esta sucesión? La verdad es que el contar ha probado su valía. - '¿Entonces quiere usted decir que 'ser verdadero' quiere decir: ser útil?' - No, eso no; Sino que no puede decirse de la serie de números naturales - no más que de

nuestro lenguaje - que sea verdadera, sino que es útil, y sobre todo, que *se usa*."¹⁰

Con respecto a la insistencia en el carácter convencional de las matemáticas; en particular, ante el hecho de que la serie de números cardinales esté *definida* por la sucesión que conocemos; ante la pregunta que el propio Wittgenstein se hace: ¿Entonces, contar es posiblemente cualquier cosa? Y la respuesta: contar así tiene implicaciones en la vida cotidiana Vale la pena fijar desde ya, claramente, su posición:

"¿Puede decirse que los conceptos que produce la matemática son una convención, que esencialmente podríamos prescindir de ellos?

Primero, y de modo más importante, la adopción de estos conceptos expresa la esperanza *segura* de ciertas experiencias.

No aceptamos (por ejemplo) una multiplicación que no obtenga siempre el mismo resultado.

Y lo que esperamos con certeza es esencial para toda nuestra vida"¹¹

En cuanto a la inexorabilidad y la verdad, éstas serán asociadas de manera específica a la necesidad lógica y a la inferencia lógica en el siguiente párrafo.

" ¿Pero qué no se sigue con necesidad lógica que se obtienen dos cuando sumamos uno más uno, y tres cuando sumamos uno más dos? ¿Y no es esta inexorabilidad la misma

¹⁰ *Ibid.*

¹¹ *Op. cit.* párrafo 52, libro IV, p. 253.

que la de la inferencia l6gica?' - ¡Si! Es la misma. - '¿Pero, no hay una verdad correspondiente a la inferencia l6gica? ¿ No es verdad que esto sigue de aquello?'"⁷ Wittgenstein opta, en primer t6rmino, por fijar su posici6n con respecto a la relaci6n entre la verdad y la inferencia l6gica: "La proposici6n 'Es verdad que esto sigue de aquello' significa simplemente: esto sigue de aquello. ¿Y c6mo usamos esta proposici6n? - ¿Qu6 pasaría si hiciéramos una inferencia distinta - c6mo entraríamos en conflicto con la verdad?"⁸ A la explicaci6n que Wittgenstein ofrece en seguida, s6lo hay que a~adirle la consideraci6n, tambi6n ya se~alada por el mismo, de la relaci6n entre verdad y uso:

"¿C6mo entraríamos en conflicto con la verdad si nuestras reglas estuvieran hechas de un hule muy suave en vez de madera y acero? - 'Bueno, no podríamos llegar a saber la medida correcta de la mesa.' - Quiere decir: no podríamos obtener, o no estaríamos seguros de obtener la medida que obtenemos con nuestras reglas rígidass. De tal manera que si usted hubiera medido la mesa con una regla elástica y dicho que medía cinco pies de acuerdo con nuestro modo usual de medir, usted estaría en lo incorrecto; pero si dice que mide cinco pies de acuerdo con su método de medir, estará en lo correcto. - '¡Pero de seguro eso no es de ningún modo medir!.' - Es similar a lo que llamamos medir y, capaz, en ciertas circunstancias, de llenar un 'prop6sito

⁷ *Op. cit.* párrafo I.5 p. 38.

⁸ *Ibid.*

es inexorable y verdadera en el sistema en el que estoy midiendo (es inexorable que dos cosas puedan ser unidas exactamente si miden exactamente lo mismo cuando son medidas con la misma regla, así como es inexorable que no lo sean si son medidas con una regla elástica y con una rígida respectivamente).¹⁰ Se entiende entonces que la proposición, 'Es verdad que esto se sigue de aquello' solo significa 'esto sigue de aquello'. La implicación depende de en donde esté trabajando.

Me parece, sin embargo, que la cuestión podría pensarse en términos más radicales. Vistas así las cosas, el que esto siga de aquello adquiere un carácter estrictamente declarativo en el cual el "problema" de la verdad ha quedado relegado a un segundo plano. En las matemáticas abundan los ejemplos, sólo basta cambiarse de teoría para que los objetos matemáticos tengan un sentido distinto, y para que lo que puede ser inferido a partir de postulados distintos dependa exclusivamente de ellos, y en donde puedo considerar como verdaderos resultados que serían mutuamente contradictorios. Piénsese tan solo en las consecuencias que acarrea el aceptar o no el quinto postulado de Euclides (axioma de las paralelas) y la diferencia entre \mathbb{R}^n y los números Complejos (las propiedades algebraicas de $a+bi$ son distintas de las de (a,b) ; reflexiónese en la diferencia entre el álgebra lineal y el análisis complejo).

¹⁰ En este punto es interesante comparar esta posición con la idea de que el significado (la gramática) de una palabra en un juego de lenguaje está dado por el uso de la misma dentro de éste.

Una vez que Wittgenstein ha resuelto de este modo el asunto de la verdad, vuelve su atención a la discusión de la inferencia. "Debemos tener claro en que consiste realmente inferir! Quizás debíamos decir que consiste en la transición de una afirmación a otra. ¿Pero quiere decir esto que inferir es algo que sucede cuando hacemos una transición de una afirmación a otra, y entonces antes de que la segunda sea expresada - o que inferir consiste en hacer que una afirmación siga de otra, esto es, e.g., en expresarla después de otra? Confundidos por el uso especial del verbo 'inferir' imaginamos rápidamente que inferir es una actividad peculiar, un proceso a la mitad del entendimiento, como si fuera la cocción de un vapor del cual saldrá la deducción. Pero veamos que pasa aquí. - Hay una transición de una proposición a otra vía otras proposiciones, esto es, una cadena de inferencias; pero no necesitamos hablar de esto; pues presupone otro tipo de transición, a saber la que va de un eslabón de la cadena al siguiente. Ahora puede ocurrir un proceso de transición entre los eslabones. No hay nada oculto en este proceso; es la derivación de una oración a otra de acuerdo a una regla; una comparación de ambas con cualquier paradigma, el cual representa el esquema de la transición, o algo de este tipo."¹¹ Esto puede desarrollarse sobre el papel, oralmente, o 'en la cabeza'. - Sin embargo, la conclusión puede derivarse de tal modo que una proposición se exprese después

¹¹ Subrayado mio

de otra sin tal proceso; o el proceso puede consistir meramente en que digamos 'Por lo tanto' o 'Se sigue de esto', o algo parecido. Llamamos 'conclusión' a la proposición inferida cuando de hecho puede ser derivada de la premisa."¹²

Se podría resumir diciendo que el aspecto central, y como veremos, uno de los elementos clave para la comprensión de lo que Wittgenstein dice acerca de las matemáticas, lo constituye el hecho de que una vez que la inferencia ha sido desligada de la "verdad", aparecen como integrantes fundamentales del proceso de inferir el seguimiento de una regla y la comparación con un paradigma.

Aunque la discusión anterior (capítulo uno) proporciona una idea general acerca de lo que "seguir" puede significar (en función de su uso), hay que señalar que el "problema" que plantea la obtención de una regla o la adquisición de un punto de referencia (paradigma) que permitan ser usados en la actividad de inferir, y en general en relación a las matemáticas, constituirá uno de los temas básicos en la discusión posterior.

Como en el caso de la posición que adopta con respecto a la "verdad", Wittgenstein nos ofrece ahora una posición con respecto a lo que quiere decir inferir, dice: "Lo que llamamos 'inferencia lógica' es una transformación de nuestra expresión. Por ejemplo, la traducción de una medida a otra. Una orilla de la regla está marcada en pulgadas, la

¹² *Op. cit.* párrafo 1.6. p. 39.

otra en centímetros. Mido la mesa en pulgadas y traduzco a centímetros sobre la regla. - Y desde luego hay tal cosa como bien y mal (correcto-incorrecto) al pasar de una medida a la otra ¿pero cuál es la realidad con la que 'bien' está de acuerdo aquí? Presumiblemente con una convención, o un uso, y quizás nuestros requerimientos prácticos."¹³

Son precisamente estas tesis las que ofrecen el contexto en el que es posible entender las concepciones, proposiciones y preguntas complementarias con respecto a la inferencia. En particular, es importante pensar en dos aspectos: lo que implica que en efecto pueda derivarse una conclusión a partir de una regla y que realmente se infiera lo que se sigue a partir de las reglas dadas. Esto plantea dos posibilidades: la inferencia se logra a partir de un cálculo (para el cual hemos sido entrenados, etc.)¹⁴, o gracias a la concordancia de las reglas con una realidad (una lógica) que aparece como algo abstracto, muy general y muy rígido.¹⁵

Así, para Wittgenstein, aprendemos a inferir¹⁶. Es en la práctica y en el uso donde aprendemos el significado de "todo", "...aprendiendo que 'f(a)' sigue de '(x).f(x)'"¹⁷, dándole importancia por el hecho de que en nuestro lenguaje

¹³ *Op.cit.* párrafo I.9. p. 40.

¹⁴ Véase *op. cit.* párrafo I.7. p. 40.

¹⁵ Véase *op. cit.* párrafo I.8. p. 40.

¹⁶ Véase *op. cit.* párrafo I.11. p. 41.

¹⁷ *Op. cit.* párrafo I.10. p. 41.

procedimiento son. El uso peculiar de estos verbos nos sugiere que seguir es la existencia de una conexión entre proposiciones, la cual seguimos cuando inferimos. Esto puede verse de modo muy instructivo en el trabajo de Russell (*Principia Mathematica*). Que una proposición $\vdash q$ siga de una proposición $\vdash p \supset q$, es aquí una ley fundamental de la lógica:

$$\vdash p \supset q . p . \supset . \vdash q \quad ^{23}$$

Esto, dice uno, nos justifica en inferir $\vdash q$ de $\vdash p \supset q$. ¿Pero en que puede consistir el procedimiento de 'inferir', que está ahora justificado? Seguramente en esto: en que en algún juego de lenguaje expresamos, escribimos, etc., a una proposición como una afirmación después de otra: ¿y cómo me puede justificar en esto la ley fundamental?

Ahora Russell quiere decir: 'Así es como voy a inferir, y está bien'. Así que intenta decirnos como va a inferir! Esto se hace con una regla de inferencia. ¿Cómo funciona? ¿en qué esa proposición implica esa otra? - Presumiblemente en que en las pruebas en este libro una proposición como ésta debe venir después de una proposición como ésta. - ¡Pero se supone una ley fundamental de la lógica el que sea correcto inferir de esta manera! - Entonces la ley fundamental debería decir: 'Es correcto inferir ... de ...'! y esta ley fundamental debería ser, presumiblemente, auto-evidente -- en cuyo caso la regla misma será auto-

²³ Lo que está implicado por una premisa verdadera es verdadero

determinación de la regla, pues siempre cabe la posibilidad de usar distintas reglas de inferencia. Los procesos de inferencia (las conexiones entre las cosas) que la gente realiza en la vida cotidiana no tienen por que obedecer (de hecho casi nunca lo hacen) a la misma lógica. Los ejemplos son abundantísimos.

Volvamos, con estas reflexiones, al punto de partida. Ahora podemos explicar en que sentido puede entenderse el que en una serie (la serie +2) las transiciones esten dadas de antemano; podemos explicar por que sabemos como seguir. En la medida en que un modo seguro de determinar las transiciones que alguien ha de hacer es el hacerlas primero, siempre podemos discurrir un método que nos lo garantice. Así, podemos delinear tenuemente la serie, podemos dictarla, etc. Y podemos, también, entrenar a la gente, en el sentido que tienen el aprendizaje y la enseñanza, para que realice las cosas de la misma manera y con resultados concordantes (como el multiplicar). De este modo, si por esta vía tenemos la certeza de que la transición de un término de la serie al otro será correcta, podríamos usar a la expresión de que los pasos ya han sido dados, como un cuadro (Bild)²³ que describe el hecho.²⁴

Una última apreciación de Wittgenstein merece ser destacada de manera especial. Con relación a la seguridad

²³ Aquí, como habíamos señalado, vale la pena recordar que el concepto de cuadro (Bild) es un concepto clave en el conjunto del pensamiento de Wittgenstein. Adelante se verá con cuidado este concepto.

²⁴ Véanse *op. cit.* párrafos 21 y 22. p. 46.

con la que inferimos una proposición de otra, frente al hecho de que aseguramos que unas proposiciones se siguen de otras, dice: "... - Nosotros aseguramos que lo que está escrito aquí sigue de lo que está escrito ahí. Y esta proposición está siendo usada *temporalmente*."²⁷ Esta idea de que la inferencia es un hecho temporal jugará un papel importante en los sucesivos.

La discusión anterior no agota el tema, éste será ampliado, y referido, en las matemáticas, a un elemento clave de las mismas: la prueba, la demostración: "Cuando digo 'Esta proposición sigue de aquélla', eso es aceptar una regla. La aceptación está *basada* en la prueba. Es decir, encuentro a esta cadena (esta figura) aceptable como una *prueba*. - '¿Pero podría hacer otra cosa? ¿No tengo que encontrarla aceptable?' - ¿Por qué dices que tienes qué? Porque al final de la prueba dices, e.g. 'Sí - tengo que aceptar esta conclusión'. Pero esto es, después de todo, sólo la expresión de su aceptación incondicional.

I.e. (Yo creo): las palabras 'tengo que admitir esto' se usan en *dos tipos* de caso: cuando tenemos una prueba - y también con referencia a los pasos individuales de la prueba."²⁸

Si bien es, precisamente, en torno a los "pasos individuales de la prueba" que gira la discusión previa, falta ver a dónde conduce una discusión sobre la prueba y donde y como adquiere ésta su sentido. Wittgenstein, como

²⁷ *Op. cit.* párrafo I.23. p. 46.

²⁸ *Op. cit.* párrafo I.33. p. 50.

Puedo considerar a la figura (c) como un cuadro (Bild) esquemático de la asignación de un bastón a cada uno."³⁰

Para Wittgenstein, el dibujar las líneas que correlacionan las figuras (a) y (b), en tanto acto temporal, no puede ser considerado como una prueba matemática; sin embargo, la figura (c) prueba que (a) - a la que puedo llamar H- tiene tantas marcas como (b) - a la que puedo llamar P. Y esta proposición, la figura (c), es no temporal.³¹

Aquí cabe destacar la distinción entre lo temporal y lo no-temporal. El proceso de probar, las transiciones e inferencias que se hacen de una proposición a la siguiente, que se realizan de modo temporal, producen un 'resultado' atemporal cuya validez lógica está ahora fija, al margen de cualquier eventualidad.

Así, la prueba es pensada como un patrón singular, con un principio y un final, del cual puede describirse el "diseño" (a saber, la cadena de inferencias entre el principio y el final), y el cual, una vez obtenido, nos muestra que tiene sentido que la proposición p se deriva de q y de r.³² La prueba, entonces, será ahora un paradigma que sirve para certificar o para deducir lo que sucede con distintas cosas en circunstancias parecidas. En el ejemplo

³⁰ *Op. cit.* párrafos I. 25 y 26. p. 47. Ver nota 25.

³¹ Véase *op. cit.* párrafo I.27. p. 48.

³² Aquí, Wittgenstein no está demasiado lejos de la definición que hace Kleene de demostración: "La demostración de teoremas, o la deducción de las consecuencias a partir de suposiciones, procede, en las matemáticas, típicamente a la Euclídea, poniendo oraciones en una lista llamada 'prueba' o 'deducción'." Kleene, S. C.; *Mathematical logic*, Wiley & Sons Inc., New York, 1967, p. 33.

ontológica del mundo, es apenas la marca de una construcción, una aproximación epistemológica del mismo.

Wittgenstein considera clave el ejemplificar los conceptos anteriores. Nos propone pensar en cien canicas a las que acomodamos y numeramos, en grupos de diez canicas, cada uno colocado debajo de otro, con una pequeña separación entre cada cinco canicas en cada uno de los grupos. Además, nos propone pensar en que todo el proceso, que puede ser pensado como un experimento, ha sido filmado, y que lo vemos en la pantalla. Dice: "... Lo que veo ahora en la pantalla no es, seguramente, un experimento, pues el cuadro de un experimento no es en sí mismo un experimento. - ¡Pero también veo la cosa 'matemáticamente esencial' acerca del proceso en la proyección! Pues aquí aparecen primero cien puntos, y después son acomodados en decenas, y así sucesivamente.

Por lo tanto puedo decir: la prueba no sirve como un experimento; pero sí sirve como el cuadro de un experimento"³⁸

La cercanía de esta idea con lo que hacen los matemáticos puede apreciarse confrontándola con algunos aspectos del pensamiento de Georg Cantor.

Cuando éste elabora el concepto de potencia o número cardinal, empieza por definir un conjunto como: "... cualquier colección dentro de un todo M de objetos α definidos y distintos, de nuestra intuición o nuestro

³⁸ *Op. cit.*, párrafo I.36 p. 51. Nótese, de nueva cuenta, el uso del concepto "cuadro". Subrayado mío.

Cantor no está en duda, en el epígrafe del texto que analizo, afirma: "*Hypotheses non fingo*": No hago hipótesis.⁴³

El hacer lo anterior le permite definir propiedades básicas de los números cardinales. Así, define equivalencia y algunas propiedades de ésta (identidad, transitividad); a partir de lo cual le es posible demostrar los primeros teoremas sobre el asunto, y, eventualmente continuar con el desarrollo de la teoría de números transfinitos.⁴⁴

Volviendo a Wittgenstein, encontramos que todavía es posible decir más en torno a la prueba. Plantea, para la mejor comprensión del papel que la prueba representa en lo matemático, las siguientes cuestiones.

Cuando pensamos en un rectángulo, dividido en piezas triangulares de esta manera:



como la solución exitosa de un rompecabezas podemos afirmar que descubrimos una posición para los triángulos en la cual no habíamos pensado de antemano, descubrimos que pueden ser acomodados de esta manera,⁴⁵ aunque al ver la solución pudiéramos decir que nunca pensamos en esta forma de acomodarlas.⁴⁶ Más aún, para Wittgenstein es posible pensar

⁴³ *Ibid.* p. 85.

⁴⁴ Véase *Ibid.* pp. 87.-89. y ss.

⁴⁵ Véase *Observaciones* párrafo I.42. p. 55.

⁴⁶ Véase *Ibid.* párrafo I.43. p. 55.

Wittgenstein se plantea la posibilidad de que para un niño resultara sorprendente el que los lados sesgados de un paralelogramo formen una línea recta y que le fuera difícil reproducir un rectángulo con las piezas propuestas, al extremo de que la formación de éste pareciera ser producto de un acto de magia, de un truco, de algo no natural; como si los paralelogramos hubieran cambiado su naturaleza.⁶⁰

Pero admitimos que la figura sirve como prueba, a pesar de que lo que ésta nos revela puede sorprendernos⁶¹; a saber, que, sin pensarlo, embonamos el paralelogramo superior al inferior y vemos el resultado.⁶²

Entonces, "Cuando uno dice: 'Esta forma consiste de éstas formas' - uno está pensando en la figura como en un dibujo fino, como un marco fino...en el cual, de hecho, se despliegan las cosas que tienen esta forma."⁶³ Y es así como, para Wittgenstein, se muestra "...la propiedad esencial de ésta forma." - (la figura) me ha mostrado un nuevo cuadro. (Bild)... 'La prueba me ha enseñado - me ha mostrado - que éste es el caso' "⁶⁴

Esta referencia a lo esencial tiene que ser vista desde la perspectiva señalada anteriormente; lo esencial, también aquí, es sólo la marca de un concepto, y en tanto que "...es como si (la forma) hubiera sido construida así de una vez

⁶⁰ Véase *Ibid.*

⁶¹ Véase *Ibid.* párrafo I.69. p. 63.

⁶² Véase *Ibid.* párrafo I.68. p. 63.

⁶³ *Ibid.* párrafo I.71. p.63. Wittgenstein agrega: Compárese la concepción platónica de las propiedades como ingredientes de la cosa.

⁶⁴ *Ibid.* párrafo I.72. p. 64. Subrayado mio.

por todas (por quien quiera que pone en las cosas las propiedades esenciales)"⁶⁶, sólo puede ser empleada como un símil."⁶⁷

Más aún, ante la posibilidad de suponer que esta esencialidad de la figura o de la forma excluye cualquier otro modo de partición, Wittgenstein afirma que al hablar de esencia, se denota una mera convención y que "...a la profundidad que vemos en la esencia le corresponde la necesidad profunda de la convención."⁶⁸ De este modo, cuando decimos que una proposición expresa la esencia de una forma, queremos decir que la proposición expresa una propiedad de esa forma. Es decir, aquello de lo cual la proposición afirma una propiedad y que en este caso llamo 'forma' "...es el cuadro (Bild) que no puedo evitar hacerme cuando oigo la palabra 'forma'."⁶⁹

El alcance de las ideas expresadas en los párrafos anteriores, así como el sentido pleno de la palabra cuadro en los distintos lugares en los que aparece en este texto,

⁶⁶ *Ibid.*

⁶⁷ En qué medida no se trata para Wittgenstein de un asunto ontológico lo muestra el siguiente texto: "La palabra 'ser' ha sido usada para un tipo de existencia sublimada y etérea. Considere ahora la proposición 'El rojo es' (por ejemplo). Desde luego nadie la usa; pero si de todos modos tuviera que inventar un uso para ella, sería éste: como una fórmula introductoria para afirmaciones que procedieran a hacer uso de la palabra 'rojo'. Cuando pronuncio la fórmula miro una muestra del color rojo.

Uno se ve tentado a pronunciar la oración 'El rojo es' cuando se mira atentamente al color, esto es, en la misma situación en la cual uno observa la existencia de una cosa (un insecto con forma de hoja por ejemplo)." tomado de *Ibid.*

⁶⁸ *Ibid.* párrafo I.74. p. 65.

⁶⁹ *Ibid.*

2.13 En un cuadro, los objetos tienen los elementos del cuadro que les corresponden.

2.131 En un cuadro, los elementos del cuadro son representantes de objetos.

2.14 Lo que constituye un cuadro es que sus elementos están relacionados uno con otro de una manera determinada.

2.15 El hecho de que los elementos de un cuadro están relacionados uno con otro de una manera determinada representa que las cosas están relacionadas una con otra de la misma manera.

Llamemos a esta conexión de sus elementos la estructura del cuadro, y llamemos a la posibilidad de esta estructura la forma cuadrática del cuadro.

2.151 La forma cuadrática es la posibilidad de que las cosas estén relacionadas una con otra de la misma manera que los elementos del cuadro."⁴¹

En este punto, es preciso no ceder a la tentación de mostrar, necesariamente, objetos o cosas ante la intimación de los cuadros. Wittgenstein insiste; podemos imaginar una narración o una historia hecha en base a una serie de cuadros esquemáticos, en oposición a cuadros realistas, y muy próxima a nuestro lenguaje habitual; es evidente que para entender los cuadros esquemáticos no necesitamos traducirlos a cuadros realistas, del mismo modo que "entendemos" las fotografías en blanco y negro, o no necesitamos colorear las películas viejas para hacer lo

⁴¹ *Ibid.*, pp. 8 - 9.

sólo que con cuatro dimensiones?' --¡No, yo no quiero decir eso! ---¿Pero qué quiero decir? ¿Cuál es mi cuadro? Bueno, no es el cubo de cuatro dimensiones como lo dibujaste. Ahora tengo como cuadro sólo las palabras y mi rechazo a cualquier cosa que puedas enseñarme.**

Cuando se acepta que la figura rectangular formada por paralelogramos vista anteriormente sirve como prueba de una proposición, no sólo se ponen de relieve las características ya vistas de la prueba; también queda planteada la imposibilidad de no aceptar que, en efecto, ese acomodo prueba que se obtiene ese perímetro con esas piezas.** Si este es el caso, para Wittgenstein el problema no se termina con la aceptación de la proposición geométrica más simple, a saber, la aceptación de la composición propuesta para el rectángulo, pues parecería que se está aceptando algo más que no es una proposición estrictamente geométrica.** Claramente, aunque resulta difícil sorprenderse con la figura, pues en ella no pasa nada, resulta sorprendente la manera en la que se han colocado juntos lo recto y lo sesgado; nos asombramos de que la forma haya sido producida con esas piezas, nos asombra el obtener ese resultado después de esperar algo distinto.** Aunque estemos convencidos de la facilidad con la que es posible producir

** *Ibid.* párrafo 249. pp. 46e.-47e. En el original no aparece ningún dibujo, el que aparece es una propuesta de los editores.

** Véase *Observaciones* párrafo I.48. p. 56.

** Véase *Ibid.* párrafo I.57. p. 59.

** Véanse *Ibid.* párrafos I.58. y I.60. p. 60.

Conclusiones

1. Existe una relación, hecha explícita por el propio Wittgenstein, entre lo que puede llamarse el cuerpo de su filosofía y la consideración de lo matemático.
2. Como en el caso de los juegos de lenguaje, es el uso de los distintos símbolos, fórmulas, reglas, palabras, en la práctica de lo que llamamos matemáticas lo que define su sentido y su significado.
3. Es en la perspectiva anterior que el análisis de conceptos como inexorabilidad, verdad, inferir, demostrar, seguir, saber, tiene sentido.
4. En la medida en que la matemática es un uso y una práctica, un hecho de nuestra historia natural, esta es concebida como una actividad básicamente convencional.
5. La demostración es uno de los elementos claves de la actividad matemática.
 - 6.1. La demostración, como actividad temporal, produce un resultado atemporal que crea una esencia (matemática) que es la marca de un concepto y no la propiedad de un objeto.
 - 6.2. La demostración muestra lo que es el caso, genera un nuevo cuadro (Bild). Nos muestra (también a la mosca) la salida del frasco.

Bibliografía

Cantor, Georg: *Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers*; Dover Publications, Inc., New York; 1955.

Janik, Allan & Toulmin, Stephen; *La Viena de Wittgenstein*, Taurus ediciones, S.A., Madrid; 1983.

Joyce, James; *Ulyses*; Penguin

Kleene, Stephen Cole; *Mathematical logic*; John Wiley & Sons, Inc., New York; 1967.

Wittgenstein, Ludwig; *Philosophical investigations*, traducida por G.E.M. Anscombe; Basil Blackwell, Oxford; 1983
 --- *Investigaciones filosóficas*, traducida por Alfonso García Suárez y Ulises Moulines; UNAM, México; Grijalbo, Barcelona; 1988.

--- *Remarks on the foundations of mathematics*, editados por: G.H. von Wright, R. Rhees y G.E.M. Anscombe, traducido por G.E.M. Anscombe; The MIT Press, Cambridge, Massachusetts y Londres; 1978.

--- *Tractatus logico-philosophicus*, traducido por D.F. Pears y B.F. McGuinness; Routledge & Kegan Paul, Londres y Henley; 1981.

--- *The blue and brown books*; Harper & Row, New York; 1960.

--- *Zettel*, editado por G.E.M. Anscombe y G.H. von Wright, traducido por G.E.M. Anscombe; University of California Press, Berkeley; 1970.

--- *Wittgenstein's lectures, Cambridge 1930 - 1932*, editadas
por Desmond Lee; Basil Blackwell, Oxford; 1980.

INDICE

Introducción	1
Uno	7
Das	34
Conclusiones	63