UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

Facultad de Ciencias

UNA CARACTERIZACION AXIOMATICA DE LOS NUMEROS REALES

T E S I S

Que para obtener el Titulo de

M A T E M A T I C O

p r e s e n t a

ROCIO BERENICE ZEPEDA LEE

1 9 9 1

I N D I C E

CAPITULO I: ANTECEDENTES 5

CAPITULO II: SUCESIONES DE CAUCHY 15

CAPITULO III: CONJUNTOS COMPACTOS 32

CAPITULO IV: LOS NUMEROS REALES 45

CAPITULO V: TEOREMA 57

CONCLUSION 75

BIBLIOGRAFIA 78

Prólogo

El análisis matemático puede describirse como la parte de la matemática que trata de los números reales $\mathbb{R}$ y de otros sistemas de igual cardinalidad $2^{\aleph_0}$. En contraste las aritméticas de la TEORIA DE LOS NUMEROS se refieren a los números naturales $\mathbb{N}$ y a algunas de sus extensiones, en general numerables. (El estudio de sumas y productos de cardinales transfinitos constituyen una notable excepción).

En el análisis y en la teoría de números, se emplean sistemas de objetos que se suponen determinados en forma categórica, esto es, con un sólo modelo -excepto por isomorfismos - y , por supuesto, la base -canónica- de los estudios análiticos es el CONTINUO DE LOS NUMEROS REALES. Sus propiedades se conocen por lo menos desde la epoca de los griegos. Para ellos, un número real era simplemente la relación a/b entre las magnitudes de dos segmentos, y a partir de esta concepción puramente geométrica, desarrollaron su teoría en la que *los postulados que establecen que* $\mathbb{R}$ *es un campo arquimedianamente ordenado y completo* tenían el aspecto de teoremas geométricos.

El descubrimiento de que la diagonal de un cuadrado y el lado del mismo tienen magnitudes inconmensurables entre sí, los obligó a abandonar la idealización de $\mathbb{R}$ como cocientes terminar en puros nueves se hace con el objeto de eliminar las representaciones diferentes para algunos reales por ejemplo 2 = 1.9999... etc.

Esta construcción es la que se aprende en los cursos elementales, con las modificaciones obvias (la parte *decimal* no necesariamente es positiva y no se menciona explícitamente la *prohibición*) y conduce a una muy concreta representación de $\mathbb{R}$. Aun cuando las definiciones precisas de *suma* , *producto* y orden resulten extraordinariamente complicadas, esto no altera el hecho de que, para las matemáticas elementales (necesariamente poco rigurosas) resulte un modelo sumemente conveniente que se adecua muy bien a un gran número de aplicaciones prácticas.

Por supuesto que, cambiando la cota para las "b", ($0 \leq b < n$) se obtienen *las representaciones n-cimales infinitas*, entre las que n=2 es la más utilizada.

Nuevamente aquí, se evita la duplicidad de representaciones, prohibiendo las sucesiones de "casi puros" n-1.

2) Clases de equivalencias de *sucesiones de Cauchy* de números racionales.

3) Clases de equivalencias de *encajes de intervalos*.

4) Cortaduras de Dedekind.

CAPITULO I

ANTECEDENTES

I. ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS

Definición. Un conjunto G no vacío se dice que forma un *grupo* si en G esta definida una operación binaria, llamada producto y denotada por $*$ tal que:

1) $a,b \in G$ implica que $a*b \in G$
2) $a,b,c \in G$ implica que $a*(b*c) = (a*b)*c$
3) Existe un único elemento $e \in G$ tal que
   $a*e = e*a = a$, para todo $a \in G$
4) Para todo $a \in G$ existe un único elemento $a^{-1} \in G$ tal que $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$

El grupo G se dice que es *Abeliano* o *conmutativo* si para cualesquier $a,b \in G$ se tiene: $a*b = b*a$.

Definición. Un conjunto no vacío R se dice que es un *Anillo asociativo* si en R están definidas dos operaciones, denotadas por ``$+$'' y ``$\circ$'' respectivamente tales que para cualesquiera a,b,c de R:

1) $a+b$ está en R
2) $a+b = b+a$
3) $(a+b)+c = a+(b+c)$
4) Hay un elemento 0 en R tal que $a+0=a$, para toda $a \in R$
5) Existe un elemento $-a$ en R tal que $a+(-a)=0$
6) $a \circ b$ está en R
7) $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$
8) $a \circ (b+c) = a \circ b + a \circ c$ y $(a+b) \circ c = a \circ c + b \circ c$

ii) $x \odot y$ es de la forma $\alpha+\beta\sqrt{p} \in \mathbb{Q}(\sqrt{p})$ $\therefore$ es cerrado y satisface las propiedades que caracterizan a un anillo conmutativo con unitario.

iii) Sea $x = a+b\sqrt{p} \neq 0$, el inverso multiplicativo de x es x^{-1}, donde:

$$x^{-1} = \frac{a-b\sqrt{p}}{a^2-pb^2}$$

ya que:

$$(a+b\sqrt{p})\left(\frac{a-b\sqrt{p}}{a^2-pb^2}\right) = \frac{a^2-b^2p}{a^2-pb^2} + \frac{-ab+ab}{a^2-pb^2}\sqrt{p} = 1$$

además, $a^2-pb^2 \neq 0$, ya que $a^2-pb^2 = 0 \Rightarrow a^2 = pb^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{a}{b} = \sqrt{p}$!! sí $b \neq 0$.
sí $b = 0$, entonces $a = 0$ $\therefore$ $a + b\sqrt{p} = 0$!!

2. $\mathbb{Z}_p = \{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3},\ldots,\overline{p-1}\}$, p número primo.

Es fácil demostrar que $\mathbb{Z}_p$ cumple con las propiedades que caracterizan a un anillo conmutativo con unitario, para demostrar que no tiene divisores propios de cero, sean:
$a,b \in \mathbb{Z}_p$ tales que $\overline{ab} = \overline{0}$, P.D. $\overline{a} = \overline{0}$ ó $\overline{b} = \overline{0}$.
$\overline{ab} = \overline{0} \Rightarrow ab \equiv 0 \text{ mód } p$ *i.e.* $p|ab$ $\therefore$ $p|a$ ó $p|b$

$$p|a \Rightarrow a \equiv 0 \text{ mód } p \quad \therefore \quad \overline{a} = \overline{0}$$

$$p|b \Rightarrow b \equiv 0 \text{ mód } p \quad \therefore \quad \overline{b} = \overline{0}.$$

Definición. Una relación binaria T en A ($T \subset A \times A$) satisface la *Ley de tricotomía* si para todo $a,b \in A$ vale una y sólo una de las siguientes condiciones:

$$a \, T \, b \qquad\qquad b \, T \, a \qquad\qquad a = b$$

Definición. Un *Dominio Entero Ordenado* A es un dominio entero en el cual se ha definido una relación de orden $<$ tal que, para todo $a,b,c \in A$ se satisface:

i) La ley de tricotomía;

ii) Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$;

iii) Si $a < b$, entonces $a+c < b+c$;

iv) Si $a < b$, y $0 < c$, entonces $ac < bc$.

Y si $\{A,+,\circ\}$ es un campo, se dice que $\{A,+,\circ,<\}$ es un *Campo ordenado*.

Por ejemplo, el conjunto de los enteros con la relación " $<$ " y las operaciones usuales de suma y producto, es un dominio entero ordenado. También $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ son dominios enteros ordenados que a la vez son campos ordenados.

Definición. Sea A un dominio entero, entonces un subconjunto A^+ de A se denomina un *Conjunto de elementos positivos de A* o una *Clase positiva* si:

i) $a+b \in A^+$ para todo $a,b \in A^+$

ii) $a \cdot b \in A^+$ para todo $a,b \in A^+$

iii) para $a \in A$ vale una y sólo una de las siguientes condiciones:

$$a \in A^+ \qquad\qquad a = 0 \qquad\qquad -a \in A^+$$

A los elementos de A^+ se les llama *elementos positivos de* A. A los elementos $a \in A$ tales que $-a \in A^+$ se les denomina *elementos negativos de* A, y a los elementos de $A^+ \cup \{ 0 \}$ se les llama *elementos no negativos de* A .

Teorema. Si A es un dominio entero y A^+ es un conjunto de elementos positivos de A ,entonces:

i) la relación de orden M ($M \subset A \times A$), definida como:

$$M = \{ (a,b) \mid b-a \in A^+ \} ,$$

en la que $(a,b) \in M$ se denota como "$a < b$", es tal que $\{ A,+,\cdot,< \}$ es un dominio entero ordenado.

ii) $A^+ = \{ a \mid a \in A \text{ y } a>0 \}$.

Demostración:

1) Sean $a,b \in A$, por definición de A^+ es válida sólo una de las siguientes condiciones:

$b - a \in A^+$, $\quad b - a = 0$, $\quad -(b - a) = a - b \in A^+$

esto es, satisface la ley de tricotomía.

2) Si (a,b) y (b,c) están en M , entonces $b - a$ y $c - b$ están en A^+, por lo tanto, por definición,

$$c - a = (c - b) + (b - a) \in A^+$$

de donde $(a,c) \in M$, esto es, vale la transitividad.

3) Si $(a,b) \in M$, entonces para cualquier $c \in A$,

$(b + c)-(a + c) = (b - a) \in A^+ \quad \therefore \quad (a + c,\ b + c) \in M$.

4) Si $(a,b) \in M$ y $c \in A^+$ entonces, por definición,

$bc - ac = (b - a)c \in A^+$. Por lo tanto $(ac,\ bc) \in M$.

Esto es, A es un dominio entero ordenado.

ii) $a > 0$ si y sólo si $a = a-0 \in A^+$.

Teorema. Si A es un dominio entero ordenado, entonces:

i) El conjunto $A^+ = \{ a \mid a \in A \text{ y } a > 0 \}$ es un conjunto de elementos positivos de A y la relación de orden dada por $M = \{ (a,b) \mid b-a \in A^+ \}$, es el orden dado en A.

ii) Si $a \neq 0$, $a \cdot a$ es positivo en A,

iii) El idéntico multiplicativo 1 es positivo.

iv) A es un conjunto infinito.

Demostración:

i) Sean $a,b \in A^+$, p.d. $a+b \in A^+$, $a \circ b \in A^+$ y que es válida la ley de tricotomía.

1) $a,b \in A^+ \therefore a,b \in A$ con $a > 0$ y $b > 0$,

$b > 0 \Rightarrow a+b > a > 0 \therefore a+b > 0 \therefore a+b \in A^+$,

2) $a > 0$ y $b > 0 \therefore ab > 0 \therefore ab \in A^+$,

3) $A^+ \subset A \therefore \forall a \in A^+$ es válida la ley de tricotomía, de donde, A^+ es un conjunto de elementos positivos para A.

4) Se define $a \blacktriangleright b \Leftrightarrow (a,b) \in M$, esto es, $b-a \in A^+$,

p.d. $< = \blacktriangleright$

1) Sea $(a,b) \in <$ i.e. $a<b \therefore a+(-a) < b+(-a)$

$\therefore 0 < b-a \therefore b-a \in A^+ \therefore a \blacktriangleright b$ i.e. $(a,b) \in \blacktriangleright$

$\therefore < \subset \blacktriangleright$.

2) Sea $(a,b) \in \blacktriangleright$ i.e. $b-a \in A^+ \therefore 0 < b-a \therefore a < b$

i.e. $(a,b) \in < \therefore \blacktriangleright \subset <$, de donde: $< = \blacktriangleright$.

ii) Sea $a \neq 0$, si $a > 0$ entonces $a \circ a > 0$;

si $a < 0$ entonces $-a > 0$ y $(-a)(-a) = a \circ a > 0$

por lo tanto, $a \circ a \in A^+$.

iii) Por definición $1 \neq 0$, entonces por *ii)* $1 = 1^2 > 0$.

iv) Por inducción:

$1 \in A^+$, por el inciso *iii*), ahora supongase $k \in A^+$, $\therefore$ $k+1 \in A^+$, ya que A^+ es cerrado bajo sumas $\therefore$ $\mathbb{Z}^+ \subset A^+$ $\therefore$ A^+ es infinito.

Corolario. Ningún campo finito es ordenable.

IV. Orden Arquimediano

Definición. Un conjunto S de elementos de un dominio entero ordenado D tiene una *cota superior* o está *acotado superiormente*, si existe un número $c \in$ D (el cual no necesariamente está en S) tal que, para toda $x \in$S, $x \leq c$.
A cualquier número c con dichas características se le llama una *cota superior de* S.

Definición. Un conjunto S de elementos de un dominio entero ordenado D tiene una *cota inferior* o *está acotado inferiormente*, si existe un número $b \in$ D (el cual no necesariamente está en S) tal que, para toda x$\in$S, $x \geq b$.
A cualquier número b que satisfaga está condición se le llama una *cota inferior* de S.

Definición. Un conjunto S de elementos de un dominio entero ordenado D está *acotado* si existe un número c tal que, para toda $x \in S$, $-c \leq x \leq c$. Esto es, si S tiene cota superior y cota inferior.

Definición. Un número c de S es una *mínima cota superior* de S, denotado por $c = sup$ S, si c es una cota superior de S y si ningún elemento menor que c es una cota superior para S, esto es, si para toda $x \in$ S, $x \le c$ y para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $x \in$ S tal que $x > c-\varepsilon$.

Definición. Un número b de S es una *máxima cota inferior* de S, denotado por $b = inf$ S, si b es una cota inferior de S y si ningún número mayor que b es una cota inferior para S, esto es, si para toda $x \in$ S, $b \le x$ y para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $x \in$ S tal que $x < b+\varepsilon$.

Axioma del supremo. Sí S es un conjunto no vacío de elementos de $\mathbb{R}$ el cual está acotado superiormente, entonces S tiene una mínima cota superior en $\mathbb{R}$.

Teorema. El conjunto $\mathbb{Z}^+$ de los enteros positivos 1,2,3,... no está acotado superiormente.

Demostración:

Por reducción al absurdo. Suponemos que $\mathbb{Z}^+$ está acotado superiormente, puesto que $\mathbb{Z}^+$ no es vacío, el axioma del supremo de los números reales dice que $\mathbb{Z}^+$ tiene supremo, sea éste s .El número $s - 1$, siendo menor que s , no puede ser cota superior de $\mathbb{Z}^+$. Luego, existe un entero positivo n tal que $n > s-1$. Para este entero n se tiene que $n+1 > s$. Ya que n+1 pertenece a $\mathbb{Z}^+$, se contradice el hecho de que s es una cota superior para $\mathbb{Z}^+$.

CAPITULO II

SUCESIONES DE CAUCHY

I. Espacios Métricos

Definición. Un conjunto $\mathcal{X}$, a cuyos elementos se les llama *puntos*, es un *espacio métrico* si para dos puntos arbitrarios $x,y \in \mathcal{X}$ está definida una función real, no negativa, $d(x,y)$, llamada la distancia de x a y, la cual tiene las siguientes propiedades: para todo $x,y,z \in \mathcal{X}$,

1) $d(x,y) > 0$ si $x \neq y$; $d(x,x) = 0$;
2) $d(x,y) = d(y,x)$;
3) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$;

Si $(\mathcal{X}, d)$ es un espacio métrico y $\mathbb{C}$ es cualquier subconjunto de $\mathcal{X}$, entonces $(\mathbb{C},d)$ también es un espacio métrico, conocido como un *subespacio* del espacio métrico original.

Como ejemplo de un espacio métrico, a continuación se describirá el Espacio Euclidiano n-dimensional.
Considerese el conjunto de todas las eneadas ordenadas de números reales $(x_1,x_2, \ldots ,x_n)$, en donde :

$$\overline{x} = (x_1,x_2, \ldots ,x_n)$$

a este conjunto se le denota por $\mathbb{R}^n$ y a sus elementos se les llama *vectores* o *puntos*.
Si $\overline{x},\overline{y} \in \mathbb{R}^n$ y a es un número real, se definen la suma de vectores y el producto de un escalar por un vector como:

$$\overline{x} + \overline{y} = (x_1+ y_1, \ldots , x_n+ y_n),$$

$$a\overline{x} = (ax_1,\ldots , ax_n),$$

de donde, $(\overline{x} + \overline{y}) \in \mathbb{R}^n$ y $a\overline{x} \in \mathbb{R}^n$. Estas dos operaciones satisfacen las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva del producto respecto a la suma y convierten a $\mathbb{R}^n$ en un *espacio vectorial sobre el campo de los números reales.* El elemento cero de $\mathbb{R}^n$, llamado el *origen* o *el vector nulo*, es el vector $\overline{0}$, cuyas coordenadas son todas 0.

Definición. Si $\overline{x},\overline{y} \in \mathbb{R}^n$ se define el *producto interior* (o el *producto escalar*) de $\overline{x}$ y $\overline{y}$ como

$$\overline{x}\circ\overline{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Algunas propiedades algebraicas del producto interior están dadas en el siguiente teorema.

Teorema. Sean $\overline{x},\overline{y},\overline{z} \in \mathbb{R}^n$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$. Entonces:

1) $\overline{x}\circ\overline{y} = \overline{y}\circ\overline{x}$

2) $(\alpha\,\overline{x} + \beta\,\overline{y})\circ\overline{z} = \alpha(\overline{x}\circ\overline{z}) + \beta(\overline{y}\circ\overline{z})$

3) $\overline{x}\cdot\overline{x} \geq 0$,

4) $\overline{x}\cdot\overline{x} = 0$ si y sólo si $\overline{x} = \overline{0}$.

A partir de la definición se pueden demostrar fácilmente estas propiedades por lo cual se omite su demostración.

Definición. Sea $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ se define la *norma* de $\overline{x}$ como

$$\|\overline{x}\| = (\overline{x}\circ\overline{x})^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$$

Teorema. Desigualdad de Cauchy-Bunyakovskii-Schwarz. Sean $\overline{x},\overline{y} \in \mathbb{R}^n$, entonces:

$$\overline{x}\circ\overline{y} \leq \|\overline{x}\|\,\|\overline{y}\|$$

Demostración:

Sean $a = \bar{y}\circ\bar{y}$, $b = -\bar{x}\circ\bar{y}$. Si $a = 0$, el teorema es válido, ya que $\bar{y} = \bar{0}$ y ambos lados de la desigualdad se reducen a cero. Por lo que se supone que $a \neq 0$. Por el teorema anterior, se tiene que:

$$0 \leq (a\,\bar{x} + b\,\bar{y})\circ(a\,\bar{x} + b\,\bar{y}) = a^2\,\bar{x}\cdot\bar{x} + 2ab\,\bar{x}\circ\bar{y} + b^2\,\bar{y}\circ\bar{y}$$

$$= (\bar{y}\circ\bar{y})^2\,(\bar{x}\cdot\bar{x}) - (\bar{y}\circ\bar{y})(\bar{x}\circ\bar{y}\,)^2$$

Dividiendo entre $\bar{y}\circ\bar{y}$ se tiene

$$0 \leq (\bar{y}\circ\bar{y})(\bar{x}\cdot\bar{x}) - (\bar{x}\circ\bar{y}\,)^2$$

por lo tanto

$$(\bar{x}\circ\bar{y}\,)^2 \leq (\bar{x}\cdot\bar{x})(\bar{y}\circ\bar{y}) = \|\,\bar{x}\,\|^2\,\|\,\bar{y}\,\|^2$$

de donde, sacando raíz cuadrada en cada término de la desigualdad, se obtiene el resultado deseado.

Teorema. Si $\bar{x},\bar{y},\bar{z} \in \mathbb{R}^n$, y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces:

1) $\|\,\bar{x}\,\| \geq 0$ y $\|\,\bar{x}\,\| = 0$ si y sólo si $\bar{x} = \bar{0}$;

2) $\|\,\alpha\bar{x}\,\| = |\alpha|\,\|\,\bar{x}\,\|$;

3) $\|\,\bar{x} + \bar{y}\,\| \leq \|\,\bar{x}\,\| + \|\,\bar{y}\,\|$;

Demostración:

La pruebas de los incisos 1) y 2) son triviales, 3) es consecuencia del teorema de Cauchy, ya que:

$$\|\,\bar{x} + \bar{y}\,\|^2 = (\bar{x} + \bar{y})\circ(\bar{x} + \bar{y}) = \bar{x}\circ\bar{x} + 2\bar{x}\circ\bar{y} + \bar{y}\circ\bar{y}$$

$$\leq \|\,\bar{x}\,\|^2 + 2\,\|\,\bar{x}\,\|\,\|\,\bar{y}\,\| + \|\,\bar{y}\,\|^2$$

$$= (\|\,\bar{x}\,\| + \|\,\bar{y}\,\|)^2.$$

Teorema. Si $\bar{x} = (x_1,x_2, \ldots ,x_n)$ es un punto arbitrario de $\mathbb{R}^n$, entonces:

$$|x_i| \leq \|\,\bar{x}\,\| \leq \sqrt{n}\ \sup\,\{|x_1|,|x_2|,\ldots,|x_n|\}$$

Por lo tanto, una 1-celda en $\mathbb{R}$ es el intervalo $[a_1, b_1]$.

En $\mathbb{R}^2$ una 2-celda es un rectángulo cuyos vértices son: $[a_1, a_2]$, $[a_1, b_2]$, $[b_1, a_2]$ $[b_1, b_2]$.

Un subconjunto de $\mathbb{R}^k$ está acotado si está contenido en alguna k- celda.

Definición. Si $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$, el *disco abierto* D *(disco cerrado)* con centro en $\bar{x}$ y radio r se define como el conjunto de todos los puntos $\bar{y} \in \mathbb{R}^n$ tales que $\bar{y} - \bar{x} < r$ ($\bar{y} - \bar{x} \leq r$).

II. Conjuntos Abiertos y Cerrados

Definición. Sea $\mathbb{X}$ un espacio métrico, sean $\mathbb{E} \subset \mathbb{X}$ y $p, q \in \mathbb{X}$.

a) Una *vecindad* de un punto p es el conjunto $V_r\, p$ que consta de todos los puntos q tales que $d(p,q) < r$. El número r es el radio de la vecindad.

b) Un punto p es un *punto de acumulación* del conjunto $\mathbb{E}$,si cada vecindad de p contiene un punto $q \neq p$ tal que $q \in \mathbb{E}$.

c) Si $p \in \mathbb{E}$ y p no es un punto de acumulación de $\mathbb{E}$, entonces p se llama un *punto aislado* de $\mathbb{E}$.

d) El conjunto $\mathbb{E}$ es un *conjunto cerrado* si cada punto de acumulación de $\mathbb{E}$ es un punto de $\mathbb{E}$.

e) Un punto p es un *punto interior* de $\mathbb{E}$ si existe una vecindad V de p tal que $V \subset \mathbb{E}$.

f) Un conjunto $\mathbb{E}$ es un *conjunto abierto* si cada punto de $\mathbb{E}$ es un punto interior de $\mathbb{E}$.

g) El *complemento de* $\mathbb{E}$, denotado por $\mathbb{E}^c$, es el conjunto de todos los puntos $p \in \mathbb{X}$ tales que $p \notin \mathbb{E}$.

h) Un punto p es un *punto exterior* de $\mathbb{E}$ si existe una vecindad V de p la cual no contiene puntos de $\mathbb{E}$, esto es, si existe una vecindad V de p la cual está totalmente contenida en $\mathbb{E}^c$.

i) Un punto p es un *punto frontera* de $\mathbb{E}$ si cada vecindad de p contiene al menos un punto de $\mathbb{E}$ y al menos un punto del complemento de $\mathbb{E}$.

j) El conjunto Int($\mathbb{E}$) de todos los puntos interiores de $\mathbb{E}$ se llama el *interior* de $\mathbb{E}$. El conjunto Ext ($\mathbb{E}$) de todos los puntos exteriores de $\mathbb{E}$ se llama el *exterior* de $\mathbb{E}$, y el conjunto $\delta(\mathbb{E})$ de todos los puntos frontera de $\mathbb{E}$ se llama la *frontera de* $\mathbb{E}$ *en el espacio* $\mathbb{X}$..

k) El conjunto $\mathbb{E}$ es *acotado* si existe un número real M y un punto $q \in \mathbb{X}$ tal que $d(p,q) < M$, para todo $p \in \mathbb{E}$.

l) El conjunto $\mathbb{E}$ es *denso* en $\mathbb{X}$ si cada punto de $\mathbb{X}$ es un punto de $\mathbb{E}$ ó un punto de acumulación de $\mathbb{E}$.

Teorema. Toda vecindad de un punto p es un conjunto abierto.

Demostración:

Si $q \in V_r(p)$, entonces $d(p,q) < r$. Sea $d(p,q) = s$. Se puede ver que la vecindad $V_{r-s}(q)$ está contenida en $V_r(p)$ de la siguiente manera:

Si $x \in V_{r-s}(q)$ entonces

$$d(p,x) \leq d(p,q) + d(q,x) < s + (r - s) = r,$$

por lo tanto, $x \in V_r(p)$, $\therefore$ $V_{r-s}(q) \subset V_r(p)$,

de donde, $V_r(p)$ es abierto.

Demostración:

i) Supongase que E^c es cerrado. Sea $x \in E$, entonces $x \notin E^c$ y en consecuencia, por hipótesis, x no es un punto de acumulación de E^c, por lo tanto, existe una vecindad V de x tal que $E^c \cap V$ es vacía, esto es, $V \subset E$. Por lo tanto x es un punto interior de E y así E es un conjunto abierto.

ii) Supongase que E es abierto. Sea x un punto de acumulación de E^c, entonces toda vecindad de x contiene puntos de E^c, de manera que x no es un punto interior de E. Pero como E es abierto, se tiene que $x \in E^c$. Por lo tanto E^c es cerrado.

Corolario. Un conjunto A es cerrado si y sólo si su complemento es abierto.

Teorema.

a) Para cualquier colección $\{E_\alpha\}$ de conjuntos abiertos, el conjunto $\bigcup_\alpha E_\alpha$, es abierto.

b) Para cualquier colección $\{C_\alpha\}$ de conjuntos cerrados, se tiene que el conjunto $\bigcap_\alpha C_\alpha$, es cerrado.

c) Para cualquier colección finita $E_1,\dots,E_n$, de conjuntos abiertos, el conjunto $\bigcap_{i=1}^{n} E_i$ es un conjunto abierto.

d) Para cualquier colección finita $C_1,\dots,C_n$, de conjuntos cerrados, el conjunto $\bigcup_{i=1}^{n} C_i$ es cerrado.

Demostración:

a) Sea $A = \bigcup_{\alpha} E_{\alpha}$. Si $x \in A$, entonces $x \in E_{\alpha}$ para alguna α. Ya que x es un punto interior de E_{α} , x también es un punto interior de A, y por lo tanto A es abierto.

b) Por hipótesis, C_{α} es cerrado $\therefore$ C_{α}^{c} es abierto $\therefore$ $\bigcup_{\alpha} C_{\alpha}^{c}$ es abierto y como $\bigcup_{\alpha} C_{\alpha}^{c} = (\bigcap_{\alpha} C_{\alpha})^{c}$ entonces $(\bigcap_{\alpha} C_{\alpha})^{c}$ es abierto,

$\therefore$ $\bigcap_{\alpha} C_{\alpha}$ es cerrado.

c) Sea $B = \bigcap_{i=1}^{n} E_i$, para cada $x \in B$, existen vecindades V_i de x, con radio r_i , tales que $V_i \subset E_i$, $i = 1,\ldots,n$. Sea

$$r = \text{mín } (r_1,\ldots,r_n),$$

y sea V la vecindad de x de radio r. Entonces $V \subset E_i$,para $i = 1,\ldots,n$, así que $V \subset B$, $\therefore$ B es abierto.

d) Por hipótesis C_i es cerrado $\therefore$ C_i^c es abierto $\therefore$ $\bigcap_{i=1}^{n} C_i^c$ es abierto (por *c*), pero $\bigcap_{i=1}^{n} C_i^c = (\bigcup_{i=1}^{n} C_i)^c$ $\therefore$ $(\bigcup_{i=1}^{n} C_i)^c$ es abierto $\therefore$ $\bigcup_{i=1}^{n} C_i$ es cerrado.

Teorema. Sea $\mathbb{E}$ un conjunto cerrado de números reales el cual está acotado por arriba y sea $s = \sup \mathbb{E}$. Entonces $s \in \mathbb{E}$.

Demostración:

Por reducción al absurdo. Supongase que $s \notin \mathbb{E}$. Por definición de supremo, para cada $\varepsilon > 0$ existe un punto $x \in \mathbb{E}$ tal que $s - \varepsilon \leq x \leq s$, porque si no fuera así, $s - \varepsilon$ sería una cota superior de $\mathbb{E}$. Por lo tanto, cada vecindad de s contiene un punto x de $\mathbb{E}$, y además, $x \neq s$, ya que $s \notin \mathbb{E}$.

Por lo tanto, s es un punto de acumulación de $\mathbb{E}$ pero no está en $\mathbb{E}$, así que $\mathbb{E}$ no es un conjunto cerrado, esto contradice la hipótesis.

iii) Sucesiones.

Definición. Una *sucesión* es una función f cuyo dominio es algún conjunto de la forma $k + \mathbb{N}$, $\left(k + \mathbb{N} = \{k,k+1,k+2,\ldots\}\right)$ por lo tanto, una sucesión real de puntos f es una correspondencia de un conjunto $k + \mathbb{N}$ a un conjunto de números reales; a cada entero $n \in (k + \mathbb{N})$ le corresponde un punto $f(n)$. Generalmente se escribe f_n en vez de $f(n)$ y se denota la sucesión f por el símbolo $\{ x_n \}$, ó algunas veces se escribe $\{ x_1, x_2, x_3, \ldots\}$.

Los *términos* de la sucesión son los valores de f, esto es, los elementos x_n . Si A es un conjunto y si $x_n \in A$ para todo $n \in (k + \mathbb{N})$, entonces se dice que $\{ x_n \}$ es una *sucesión de elementos de* A.

Definición. Una sucesión $\{ p_n\}$ en un espacio métrico $\mathbb{X}$ *converge*, si existe un punto $p \in \mathbb{X}$ con la siguiente propiedad: Para cada $\varepsilon > 0$ existe un entero N, tal que $n \geq N$ implica que $d(p_n, p) < \varepsilon$. En este caso se dice que $\{ p_n \}$ converge a p , o que p es el límite de $\{ p_n \}$ cuando $n \longrightarrow \infty$ y se denota por $p_n \longrightarrow p$, $n \longrightarrow \infty$, o bien:

$$\lim_{n \to \infty} p_n = p$$

Considerese $\varepsilon > 0$ fija y sea V el conjunto de todos los puntos $q \in X$ tales que $d(p,q) < \varepsilon$. Por hipótesis, existe una N (correspondiente a esta V) tal que $p_n \in V$ si $n \geq N$.

Por lo tanto, $d(p_n, p) < \varepsilon$ si $n \geq N$; esto es $p_n \longrightarrow p$.

b) Dada $\varepsilon > 0$, existen enteros N y N' tales que:

$$n \geq N \text{ implica que } d(p_n , p) < \varepsilon/2 ,$$

$$n \geq N' \text{ implica que } d(p_n , p') < \varepsilon/2 ,$$

Por lo tanto si $n \geq$ máx (N , N'), se tiene:

$$d(p , p') \leq d(p ,p_n) + d(p_n , p') < \varepsilon$$

Como ε fué arbitraria, se concluye que $d(p , p') = 0$.

c) Supongase que $p_n \longrightarrow p$ y sea $\varepsilon > 0$. Por definición, existe un entero N tal que si $n \geq N$, entonces $d(p_n ,p) < 1$.

Sea, $$L = \text{máx } \{1, d(p_1 , p),\ldots,d(p_N , p)\},$$

entonces $d(p_n ,p) \leq L$ para $n = 1,2,3,\ldots.$

d) Para cada entero positivo n , existe un punto $p_n \in \mathbb{E}$ tal que $d(p_n,p) < 1/n$. Dado $\varepsilon > 0$, se elige N de tal manera que $N\varepsilon > 1$. Si $n \geq N$, se sigue que $d(p_n,p) < \varepsilon$. Esto es $p_n \longrightarrow p$.

Definición. Si $\{ p_n \}$ es una sucesión y $\{ n_k \}$ es una sucesión creciente de enteros positivos, entonces la sucesión $\{ p_{n_k} \}$ se denomina una *subsucesión* de $\{ p_n \}$.

Notese que $\{ p_{n_k} \}$ está constituido por la composición de dos funciones, esto es más evidente si se escribe $\{ p_{n_k} \}$ en la

IV. Sucesiones de Cauchy.

Definición. Se dice que una sucesión $\{p_n\}$ en un espacio métrico X es una *Sucesión de Cauchy* si para cada $\varepsilon > 0$ existe un entero N, tal que $d(p_n,p_m) < \varepsilon$, siempre que $n \geq N$ y $m \geq N$.

Teorema. Toda sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}^k$ está acotada.

Demostración:

Sea $\{p_n\}$ una sucesión de Cauchy y sea $\varepsilon = 1$.

Entonces por definición, existe un entero N, tal que

$$d(p_n - p_N) < 1 \text{ , siempre que } n \geq N.$$

Por lo tanto, por la desigualdad del triángulo esto implica que $d(p_n,p) < d(p_N,p) + 1$, para $n \geq N$. Por lo tanto, si

$$M = \sup \{ d(p_n, p_1), \ldots, d(p_n,p_{N-1}) + 1 \},$$

entonces se tiene que $d(p_n,p) \leq M$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, la sucesión de Cauchy $\{ p_n \}$ está acotada.

Definición. Sea $\mathbb{E}$ un subconjunto de un espacio métrico X, y sea S el conjunto de todos los números reales de la forma $d(p,q)$, con $p \in \mathbb{E}$ y $q \in \mathbb{E}$. La mínima cota superior de S se llama el *diámetro* de $\mathbb{E}$.

Teorema. Si $\{ p_n\}$ es una sucesión en X, X un espacio métrico y si $\mathbb{E}_N$ consiste de los puntos $\{ p_N, p_{N+1}, p_{N+2}, \ldots, \}$ entonces, $\{ p_n\}$ es una sucesión de Cauchy si y sólo si:

$$\lim_{N \to \infty} \operatorname{diam} \mathbb{E}_N = 0$$

Si $\lim_{n\to\infty} p_n = p$, y $\varepsilon > 0$, entonces existe un entero N, tal que para toda $n \geq N$, $d(p_n, p) < \varepsilon/2$, por lo tanto, si $n, m \geq N$, se tiene que:

$$d(p_n, p_m) \leq d(p_n, p) + d(p, p_m) < \varepsilon ,$$

así que $\{ p_n \}$ es una sucesión de Cauchy.

ii) Si $\{ p_n \}$ es una sucesión de Cauchy entonces $\{ p_n \}$ es una sucesión convergente.

Sea $A = \{ p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots \}$ el rango de la sucesión. Si A es finito, entonces todos los términos de $\{ p_n \}$ excepto un número finito, son iguales y por lo tanto $\{ p_n \}$ converge hacia este valor común.

Si A es infinito, se demostrará primero que A tiene un punto de acumulación p y después se demostrará que $\{ p_n \}$ converge hacia p. En un teorema anterior se demostró que si $\{ p_n \}$ es de Cauchy entonces está acotada, de donde al ser A un conjunto infinito acotado, tiene un punto de acumulación p en $\mathbb{R}^k$, por el teorema de Bolzano-Weierstrass. A continuación se probará que $\{ p_n \}$ converge hacia p.

Dado $\varepsilon > 0$, existe un entero N, tal que $d(p_n - p_m) < \varepsilon/2$ siempre que $n, m \geq N$. La vecindad V con centro en p y radio $\varepsilon/2$ contiene un punto p_m con $m \geq N$. Luego, si $n \geq N$, se tiene:

$$d(p_n - p) \leq d(p_n - p_m) + d(p_m - p) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon ,$$

por lo tanto, $\lim_{n\to\infty} p_n = p$, esto es, $\{ p_n \}$ es convergente.

CAPITULO III

CONJUNTOS COMPACTOS

Teorema. Los subconjuntos compactos de un espacio métrico $\mathbb{X}$ son subconjuntos cerrados de $\mathbb{X}$.

Demostración:

Sea $\mathbb{K}$ un subconjunto compacto de un espacio métrico $\mathbb{X}$. Se demostrará que el complemento de $\mathbb{K}$ es un subconjunto abierto de $\mathbb{X}$. Supongase que:

$p \in \mathbb{X}$, $p \notin \mathbb{K}$. $\forall\ q \in \mathbb{K}$, sean V_q y $\mathcal{G}_q$ vecindades de p y q, respectivamente, de radio menor que $\frac{1}{2}\, d(p,q)$ $\therefore$ $\{ \mathcal{G}_q \}_{q \in \mathbb{K}}$ es una cubierta abierta de $\mathbb{K}$ y puesto que $\mathbb{K}$ es compacto, existen un número finito de puntos $q_1, \ldots, q_n$ en $\mathbb{K}$ tales que:

$$\mathbb{K} \subset \mathcal{G}_{q_1} \cup \mathcal{G}_{q_2} \cup \ldots \cup \mathcal{G}_{q_n} = \mathcal{G}$$

Si $V = V_{q_1} \cap V_{q_2} \cap \cdots \cap V_{q_n}$, entonces V es una vecindad de p la cual tiene intersección vacía con $\mathcal{G}$. De donde $V \subset \mathbb{K}^c$, así que p es un punto interior de $\mathbb{K}^c$, por lo tanto $\mathbb{K}^c$ es abierto.

Teorema. Los subconjuntos cerrados de conjuntos compactos son compactos.

Demostración:

Supongase $\mathbb{F} \subset \mathbb{K} \subset \mathbb{X}$, en donde $\mathbb{F}$ es cerrado (relativo a $\mathbb{X}$), y $\mathbb{K}$ es compacto. Sea $\{ V_\alpha \}$ una cubierta abierta de $\mathbb{F}$. Si $\mathbb{F}^C$ se une a $\{ V_\alpha \}$ se obtiene una cubierta abierta Ψ de $\mathbb{K}$. Puesto que $\mathbb{K}$ es compacto, existe una subcolección finita ϕ de Ψ la cual cubre a $\mathbb{K}$ y por lo tanto a $\mathbb{F}$. Si $\mathbb{F}^C$ es un elemento de ϕ, se le puede quitar de ϕ y se tiene todavía una cubierta abierta de $\mathbb{F}$. Esto es, se ha demostrado que una subcolección finita de $\{ V_\alpha \}$ cubre a $\mathbb{F}$.

Corolario. Si $\mathbb{F}$ es cerrado y $\mathbb{K}$ es compacto, entonces $\mathbb{F} \cap \mathbb{K}$ es compacto.

Demostración:

Si $\mathbb{K}$ es compacto entonces $\mathbb{K}$ es cerrado y por lo tanto $\mathbb{F} \cap \mathbb{K}$ es cerrado. Puesto que $(\mathbb{F} \cap \mathbb{K}) \subset \mathbb{K}$, por el teorema anterior se tiene que $\mathbb{F} \cap \mathbb{K}$ es compacto.

Teorema. Si $\{ \mathbb{K}_\alpha \}$ es una colección de subconjuntos compactos de un espacio métrico $\mathbb{X}$, tales que la intersección de cada subcolección finita de $\{ \mathbb{K}_\alpha \}$ es no vacía, entonces $\bigcap \mathbb{K}_\alpha$ es no vacía.

Demostración:

Por reducción al absurdo. Considerese fijo un elemento $\mathbb{K}_1$ de $\{ \mathbb{K}_\alpha \}$. Se supondrá que ningún punto de $\mathbb{K}_1$ pertenece a cada $\mathbb{K}_\alpha$ y sea $\mathbb{G}_\alpha = \mathbb{K}_\alpha^c$. Entonces los conjuntos $\mathbb{G}_\alpha$ forman una cubierta abierta de $\mathbb{K}_1$; y puesto que $\mathbb{K}_1$ es compacto, existe un número finito de índices $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ con la propiedad que $\mathbb{K}_1 \subset \mathbb{G}_{\alpha_1} \cup \ldots \cup \mathbb{G}_{\alpha_n}$. Pero esto significa que:

$$\mathbb{K}_1 \cap \mathbb{K}_{\alpha_1} \cap \ldots \cap \mathbb{K}_{\alpha_n} = \emptyset$$

en contradicción con la hipótesis. Por lo tanto, existe algún punto de $\mathbb{K}_1$ que pertenece a cada $\mathbb{K}_\alpha$.

Teorema de los intervalos anidados. Sea I_n, $n \in \mathbb{N}$, una sucesión de intervalos cerrados, no vacios de $\mathbb{R}$ y supongase que esta sucesión está anidada en el sentido que

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq \ldots \supseteq I_n \supseteq \ldots.$$

Entonces existe un número real que pertenece a cada uno de estos intervalos.

Demostración:

Supongase que $I_n = [a_n, b_n]$, donde $a_n \leq b_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Como $I_n \subseteq I_1$ para toda n, se tiene que $a_n \leq b_1$ para toda n. Por lo tanto, el conjunto $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ está acotado por arriba sea ξ su supremo, por lo tanto $a_n \leq \xi$ para toda n.

Se debe cumplir que $\xi \leq b_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. En caso contrario debe existir alguna $m \in \mathbb{N}$ tal que $b_m < \xi$ .Como ξ es el supremo de $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ debe de existir a_p tal que $b_m < a_p$. Sea q el mayor de los números naturales m y p .

Ya que $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \leq \ldots$ y $b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n \geq \ldots$ se deduce que $b_q \leq b_m < a_p \leq a_q$. Pero esto implica que $b_q < a_q$, contrario a la hipótesis de que $I_q = [a_q, b_q]$ es un intervalo cerrado no vacío. Por lo tanto $\xi \leq b_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. De donde como $a_n \leq \xi \leq b_n$, se deduce que $\xi \in I_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Se debe hacer notar que, bajo las condiciones del teorema anterior, puede haber más de un punto en común. De hecho, si $\eta = \inf\{ b_n \mid n \in \mathbb{N} \}$, se puede demostrar que $[\xi, \eta] = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$.

Demostración:

Sea $I_n = [a_n, b_n]$ donde $a_n \le b_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Como $I_n \subseteq I_1$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces $a_1 \le b_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto el conjunto $\{ b_n | n \in \mathbb{N} \}$ está acotado por abajo. Sea η su infimo; por lo tanto $\eta \le b_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Se afirma que $a_n \le \eta$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Si no fuera así existiría alguna $m \in \mathbb{N}$ tal que $a_m > \eta$. Como $\eta = \inf\{ b_n | n \in \mathbb{N} \}$ existe b_p tal que $a_m > b_p$. Sea q el mayor de los números m y p. Puesto que $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n \le \ldots \le b_n \le \ldots \le b_2 \le b_1$ se deduce que $a_q \ge a_m > b_p \ge b_q$. Pero esto implica que $a_q > b_q$ contrario a la hipótesis de que I_q es un intervalo no vacío. Por lo tanto, $a_n \le \eta$ para toda $n \in \mathbb{N}$. De donde, $\eta \in I_n = [a_n, b_n]$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Teorema de las celdas anidadas. Sea $\{ I_k \}$ una sucesión de celdas cerradas no vacías de $\mathbb{R}^n$, la cual está anidada en el sentido de que $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \ldots \supseteq I_k \supseteq \ldots$. Entonces existe un punto en $\mathbb{R}^n$ el cual pertenece a todas las celdas.

Demostración:

Supongase que I_k es la celda:

$$I_k = \{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) | a_{k,1} \le x_1 \le b_{k,1}, \ldots, a_{k,n} \le x_n \le b_{k,n} \}$$

Es fácil ver que las celdas $I_{k,1} = [a_{k,1}, b_{k,1}]$, $k \in \mathbb{N}$, forman una sucesión anidada de celdas cerradas no vacías de números reales y por lo tanto, por el teorema anterior existe un número real y_1 el cual pertenece a todas estas celdas.

Aplicando este argumento a cada coordenada se obtiene un punto $y = (y_1,\ldots,y_n) \in \mathbb{R}^n$ con la propiedad de que si i satisface $i = 1,2,\ldots,n$, entonces y_i pertenece a todas las celdas $I_{k,i} = \{ [a_{k,i},b_{k,i}] \mid k \in \mathbb{N} \}$. Por lo tanto el punto y pertenece a todas las celdas I_k .

Teorema de Heine-Borel. Un subconjunto de $\mathbb{R}^k$ es compacto si y sólo si es cerrado y acotado.

Demostración:

Primero se demostrará que si $\mathbb{E}$ es compacto en $\mathbb{R}^k$, entonces $\mathbb{E}$ está acotado (esto es, $\mathbb{E}$ está contenido en algún conjunto $\{x \in \mathbb{R}^k \mid \| x \| < M \}$ para M suficientemente grande). En efecto, para cada número natural n, sea $\mathbb{B}_n$ el conjunto abierto definido por

$$\mathbb{B}_n = \{x \in \mathbb{R}^k \mid \| x \| < n \}$$

Todo el espacio $\mathbb{R}^k$, y por lo tanto $\mathbb{E}$, está contenido en la unión creciente de los conjuntos $\mathbb{B}_n$, $n \in \mathbb{N}$. Pero como $\mathbb{E}$ es compacto, existe un número natural M tal que $\mathbb{E} \subset \mathbb{B}_M$. Esto prueba que $\mathbb{E}$ está acotado.

En seguida se demostrará que si $\mathbb{E}$ es compacto en $\mathbb{R}^k$ entonces $\mathbb{E}$ es cerrado.

Sea $x \in \mathbb{E}^c$ y para cada número natural m sea V_m el conjunto definido por

$$V_m = \{y \in \mathbb{R}^k \mid \| y - x \| > 1/m \}$$

por lo tanto, cada conjunto V_m, $m \in \mathbb{N}$, es abierto en $\mathbb{R}^k$ y además la unión de todos los conjuntos V_m, $m \in \mathbb{N}$, consiste de todos los puntos de $\mathbb{R}^k$ excepto x. Puesto que $x \notin \mathbb{E}$, cada punto de $\mathbb{E}$ pertenece a algún conjunto V_m. Por otro lado, como $\mathbb{E}$ es compacto, existe un número natural M tal que $\mathbb{E}$ está contenido en la unión de los conjuntos $V_1, V_2, \quad , V_M$. Como los conjuntos V_m son crecientes con m, entonces $\mathbb{E}$ está contenido en V_M. Por lo tanto, se tiene que la vecindad $\{z \in \mathbb{R}^k | \ \| z - x \| < 1/M \}$ no intersecta a $\mathbb{E}$,esto demuestra que $\mathbb{E}^c$ es abierto y por lo tanto, $\mathbb{E}$ es cerrado en $\mathbb{R}^k$.

Para la demostración de la segunda parte se supondrá que $\mathbb{E}$ es un conjunto cerrado y acotado y se demostrará que es compacto, esto es, que si $\mathbb{E}$ está contenido en la unión de una colección $\mathcal{G} = \{ \mathcal{G}_\alpha \}$ de conjuntos abiertos en $\mathbb{R}^k$, entonces $\mathbb{E}$ está contenido en la unión de un número finito de conjuntos en $\mathcal{G}$. Como por hipótesis el conjunto $\mathbb{E}$ está acotado, se le puede encerrar en una celda I_1 en $\mathbb{R}^k$. Por ejemplo se puede tomar, para r suficientemente grande:

$$I_1 = \{ (x_1, \ldots, x_k) | \ |x_i| \leq r, \quad i = 1, \ldots, k \} \text{ para } r > 0$$

Con el propósito de obtener una contradicción, se supondrá que $\mathbb{E}$ no está contenido en la unión de ningún número finito de conjuntos en $\mathcal{G}$. Por lo tanto, al menos una de las 2^k celdas cerradas obtenidas al bisectar los lados de I_1 contiene puntos de $\mathbb{E}$ y es tal que la parte de $\mathbb{E}$ que está en ella no está contenida en la unión de ningún número finito de los conjuntos en $\mathcal{G}$.(Por que si cada una de las 2^k partes de $\mathbb{E}$ estuvieran contenidas en la unión de un número finito de conjuntos en $\mathcal{G}$,entonces $\mathbb{E}$ estaría contenido en la unión de un número finito de conjuntos en $\mathcal{G}$, contrario a la hipótesis). Sea I_2 cualquiera de las subceldas en esta subdivisión de I_1, la cual es tal que el conjunto no vacío $\mathbb{E} \cap I_2$ no está contenido en la unión de ningún número finito de conjuntos en $\mathcal{G}$. Este proceso se puede continuar bisectando cada uno de los lados de I_2 para obtener 2^k subceldas cerradas de I_2 en este caso, I_3 sería una de éstas subceldas, tal que el conjunto no vacío $\mathbb{E} \cap I_3$ no esté contenido en la unión de un número finito de conjuntos en $\mathcal{G}$ y así sucesivamente.

De esta manera se obtiene una sucesión anidada I_n de celdas no vacías, de acuerdo con el teorema de las celdas anidadas, existe un punto y común a las I_n . Como cada I_n contiene puntos de $\mathbb{E}$, el punto común y es un punto de acumulación de $\mathbb{E}$. Como $\mathbb{E}$ es cerrado, entonces $y \in \mathbb{E}$ y está contenido en algún conjunto abierto $\mathcal{G}_\beta$ en $\mathcal{G}$. Por lo tanto, existe un número $\varepsilon > 0$ tal que todos los puntos w que satisfacen la condición $\|y - w\| < \varepsilon$ pertenecen a $\mathcal{G}_\beta$. Por otro lado, como las celdas I_k , $k \geq 2$, se obtienen al bisectar sucesivamente los lados de la celda I_1 se tiene que la longitud del lado de I_k es $r/2^{k-2}$. Por lo tanto, si $w \in I_k$ entonces $\| y - w \| \leq r\sqrt{p}\,/2^{k-3}$ .Así que si k se elige tal que $r\sqrt{p}\,/2^{k-3} < \varepsilon$, entonces todos los puntos en I_k están contenidos en el conjunto $\mathcal{G}_\beta$. Pero esto contradice la construcción de I_k como el conjunto tal que $\mathbb{E} \cap I_k$ no está contenido en la unión de un número finito de conjuntos en $\mathcal{G}$.

Esta contradicción muestra que la suposición de que el conjunto cerrado y acotado $\mathbb{E}$ requiere para cubrirlo un número infinito de conjuntos en $\mathcal{G}$ es insostenible.

Teorema. Toda k-celda es compacta.

Demostración:

Sea $I = \{(x_1, x_2, \ldots, x_k) \mid a_1 \le x_1 \le b_1, \ldots, a_k \le x_k \le b_k\}$ una k-celda y sea:

$$\delta = \left(\sum_{1}^{k} (b_i - a_i)^2 \right)^{1/2}$$

Entonces $\| \bar{x} - \bar{y} \| \le \delta$, si $\bar{x} \in I$, $\bar{y} \in I$.

La demostración se hará por reducción al absurdo, para obtener una contradicción, supongase que existe una cubierta abierta $\{ \mathcal{G}_\alpha \}$ de I, la cual no tiene una subcubierta finita. Al bisectar cada uno de sus lados, se divide I en 2^k k-celdas por lo tanto, al menos una de estas celdas no puede ser cubierta por ninguna subcubierta finita de $\{ \mathcal{G}_\alpha \}$ ya que si así fuera entonces I también podría ser cubierta por una subcubierta finita. A continuación se subdivide a su vez esta nueva celda I_1 y se continua el mismo proceso, obteniendose así una sucesión $\{I_n\}$ de celdas con las siguientes propiedades:

(a) $I \supset I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \ldots$

(b) Para cada n, I_n no puede ser cubierta por ninguna subcolección finita de $\{ \mathcal{G}_\alpha \}$

(c) Si $\bar{x} \in I_n$ y $\bar{y} \in I_n$, entonces $\| \bar{x} - \bar{y} \| \le \delta / 2^n$.

Por lo tanto como (*a*) satisface las hipótesis del teorema de las celdas anidadas, existe un punto x^* que pertenece a cada celda I_n. Para alguna α se tiene que $x^* \in \mathcal{G}_\alpha$, como $\mathcal{G}_\alpha$ es abierto, existe $r > 0$ tal que, si $\| \bar{y} - \bar{x}^* \| < r$ entonces $y \in \mathcal{G}_\alpha$. Por otro lado, para n suficientemente grande se tiene que $\delta/2^n < r$, tal n existe, ya que si no fuera así se tendría que $2^n \le \delta/r$ para todo entero positivo n, lo cual es absurdo. Entonces, por (*c*), se tiene que $I_n \subset \mathcal{G}_\alpha$, pero esto contradice a (*b*), de donde la suposición de que existe una cubierta abierta de I la cual no tiene una subcubierta finita es falsa y por lo tanto I es compacta.

Teorema. Si un conjunto $\mathbb{E}$ en $\mathbb{R}^k$ tiene una de las siguientes tres propiedades, entonces tiene las otras dos:

a) $\mathbb{E}$ es cerrado y acotado.

b) $\mathbb{E}$ es compacto.

c) Todo subconjunto infinito de $\mathbb{E}$ tiene un punto de acumulación en $\mathbb{E}$.

Demostración:

El teorema de Heine-Borel demuestra la equivalencia de los incisos (*a*) y (*b*), el teorema *** demuestra que (*b*) implica (*c*), así que sólo falta por demostrar que (*c*) implica (*a*).

La demostración se hará por reducción al absurdo.

Si $\mathbb{E}$ no fuera acotado, entonces $\mathbb{E}$ contendría puntos $\bar{x}_n$ tales que, para toda $n \in \mathbb{N}$,

$$| \bar{x}_n | > n$$

El conjunto de todos estos puntos es infinito y claramente no tiene puntos de acumulación en $\mathbb{R}^k$, por lo tanto tampoco tiene puntos de acumulación en $\mathbb{E}$, lo cual contradice la hipótesis, así que (*c*) implica que $\mathbb{E}$ está acotado.

Si $\mathbb{E}$ no es cerrado, entonces existe un punto $\bar{x}_0 \in R^k$ que es un punto de acumulación de $\mathbb{E}$ pero no es un punto de $\mathbb{E}$. Por lo tanto, para $n = 1,2,\ldots,$ existen puntos $\bar{x}_n \in \mathbb{E}$ tales que $|\bar{x}_n - \bar{x}_0| < 1/n$. Sea S el conjunto de estos puntos $\bar{x}_n$, entonces S es infinito (ya que de otro modo $|\bar{x}_n - \bar{x}_0|$ tendría un valor positivo constante, para un número infinito de n), S tiene al punto $\bar{x}_0$ como un punto de acumulación y además S no tiene otro punto de acumulación en $\mathbb{R}^k$, ya que si $\bar{y} \in \mathbb{R}^k$, $\bar{y} \neq \bar{x}_0$, entonces

$$| \bar{x}_n - \bar{x}_0 | \leq | \bar{x}_n - \bar{y} | + | \bar{x}_0 - \bar{y} |$$

$$\therefore | \bar{x}_n - \bar{y} | \geq | \bar{x}_0 - \bar{y} | - | \bar{x}_n - \bar{x}_0 |$$

$$\geq | \bar{x}_0 - \bar{y} | - \frac{1}{n} \geq \frac{1}{2} | \bar{x}_0 - \bar{y} |$$

para toda $n \in \mathbb{N}$, excepto un número finito de n, por lo tanto $\bar{y}$ no es un punto de acumulación de S, ya que existe una vecindad de $\bar{y}$ que contiene un número finito de puntos de S. Por lo tanto S no tiene un punto de acumulación en $\mathbb{E}$, así que $\mathbb{E}$ debe de ser cerrado si es que es válido (*c*).

Se debe hacer notar, en este punto, que (*b*) y (*c*) son equivalentes en cualquier espacio métrico, pero que, en general, (*a*) no implica (*b*) y (*c*).

CAPITULO IV

LOS NUMEROS REALES

Los Números Reales

I. Antecedentes

La historia de los números reales se inicia con el descubrimiento, algunas veces atribuido al matemático Griego Pitágoras, de que no hay un número racional cuyo cuadrado sea dos, esto es, que el sistema de los números racionales debe de ampliarse si se desea incluir en él, a números tales como raíces cuadradas, cúbicas, etc. A estos nuevos números se les llama *irracionales.* Los antiguos griegos no trabajaron con el concepto abstracto de número, en vez de esto consideraron entidades geométricas, tales como segmentos de rectas, como sus elementos básicos. Así de manera puramente geométrica, desarrollaron un sistema lógico, útil para trabajar y operar tanto con cantidades que son inconmensurables[1] con la unidad como con las cantidades racionales mesurables ya conocidas. Este hecho, iniciado por los Pitagóricos, fué desarrollado por Eudoxio y está incluído en los famosos Elementos de Euclídes, libro V; es el análogo geométrico de la teoría de Dedekind sobre los números reales, creada 2200 años más tarde. Posteriormente, la matemática se recreó y se desarrolló de acuerdo a conceptos numéricos más que geométricos, se supuso como cosa natural que a cada punto sobre el eje numérico le correspondía un número racional o uno irracional y que esta totalidad de números "reales" cumplía con las mismas leyes

[1] Dos cantidades cuya razón es un número racional se llaman conmensurables entre sí debido a que pueden ser expresadas como múltiplos enteros de una unidad común.

que rigen a los números racionales. No fué sino hasta años más tarde, en el siglo XIX, que se sintió la necesidad de justificar tal suposición, lo que se logró en un trabajo publicado por Richard Dedekind, quien demostró que el sistema de los números reales es un instrumento adecuado para la medición científica, y que en este sistema continúan siendo válidas las reglas de cálculo del sistema de los números racionales, esto es, los axiomas de campo.

ii) Intervalos anidados

No siempre es fácil describir los números irracionales, para algunos números tales como $\sqrt{2}$ ó π existe una caracterización geométrica simple (?), pero esto no siempre es posible. Un método suficientemente flexible para producir cada número real consiste en describir el valor x del número real por una sucesión de aproximaciones racionales de mayor precisión. Específicamente x se aproxima simultáneamente desde la derecha y desde la izquierda con una precisión creciente y de tal manera que el margen de error tiende a cero. En otras palabras, se usa una "sucesión" de intervalos racionales que contienen al punto x, de tal manera que cada intervalo de la sucesión contiene al siguiente y tales que la longitud de los intervalos, y con ello el error de la aproximación, puede hacerse mas pequeño que cualquier número positivo dado, tomando un número suficientemente grande de intervalos en la sucesión.

Definición. Una *sucesión anidada de intervalos racionales* es una sucesión de intervalos cerrados I_n con puntos extremos racionales a_n, b_n, tales que cada intervalo está contenido en el precedente, y cuyas longitudes forman una sucesión nula, esto es:

$$a_{n-1} \le a_n \le b_n \le b_{n-1}$$

$$\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0.$$

Dado que cada intervalo $I_n = [a_n, b_n]$ de una sucesión anidada contiene a todos los intervalos que le siguen, un número racional r que esté fuera de cualquiera I_n también estará fuera (y del mismo lado) que de todos los intervalos subsecuentes. Por lo tanto, una sucesión anidada de intervalos racionales genera una separación de todos los números racionales en tres clases, la primera clase, denotada por I_i, consiste de los números racionales r que están a la izquierda de los intervalos I_n, para n suficientemente grande, es decir, para los cuales $r < a_n$ para casi toda n. La segunda clase, denotada por I_o, consiste de los números racionales r contenidos en todos los intervalos I_n . Esta clase contiene a lo mas un número, ya que la longitud del intervalo I_n tiende a cero conforme se incrementa n. La tercera clase, denotada por I_d consiste de los números racionales r para los cuales $r > b_n$, para casi toda n. Es claro que cualquier número de la primera clase es menor que cualquiera de la segunda clase, y que cualquier número de la segunda clase es menor que cualquiera de la

Demostración:

Por definición:

$I_i = \{ p \in \mathbb{Q} \mid \exists\, n_o \in \mathbb{N},\ p < a_{n_o} \} \quad \therefore \quad p < a_m \quad \forall\, m > n_o$

$I_o = \{ p \in \mathbb{Q} \mid a_n \le p \le b_n \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \}$

$I_d = \{ p \in \mathbb{Q} \mid \exists\, m_o \in \mathbb{N},\ b_{m_o} < p \} \quad \therefore \quad b_m < p \quad \forall\, m > m_o$

i) Se supondrá que $p \notin I_i \quad \therefore \quad \forall\, n,\ a_n \le p,$ de donde:
si $\exists\, n,$ tal que $b_n < p$ entonces $p \in I_d,$
si $\forall\, n,\ p \le b_n$ entonces $p \in I_o.$

ii) Sea $p \in I_i \quad \therefore \quad \exists\, n,$ tal que $p < a_n \quad \therefore \quad p \notin I_o,$
y como $\forall\, m,n,\ b_m \ge a_n$ se tiene $b_m \ge p \quad \forall\, m, \therefore p \notin I_d$
luego $I_i \cap I_o = I_i \cap I_d = \phi$.

iii) Si $p \in I_o,\ p \ge a_n\ \forall\, n, \quad \therefore \quad p \notin I_i,$
y también $p \le b_n \quad \forall\, n, \quad \therefore \quad p \notin I_d \quad \therefore \quad p \notin I_d \cup I_i$
luego $I_o \cap I_d = I_o \cap I_i = \phi$.

iv) Si $p \in I_d$ $\exists n$ tal que $p > b_n \ge a_m \quad \forall m \quad \therefore \quad p \notin I_i$
$\therefore \quad p \notin I_o \quad \therefore \quad p \notin I_i \cup I_o \quad \therefore \quad I_d \cap I_o = I_d \cap I_i = \phi$.

Definición. Dos sucesiones anidadas de intervalos racionales $[a_n,\ b_n]$ y $[a'_n,\ b'_n]$ *son equivalentes* si dan lugar a la misma separación de los números racionales en tres clases, es decir, si $\{I_i,\ I_o,\ I_d\}$ y $\{I'_i,\ I'_o,\ I'_d\}$ son las particiones inducidas por cada sucesión, entonces $I_i = I'_i,$ $I_o = I'_o$, $I_d = I'_d$.

Lema. Si $[a_n,\ b_n]$ es una sucesión anidada de intervalos racionales entonces $a_n \le b_m \quad \forall\ n,m.$

Dado $\varepsilon>0$, se desea encontrar $k\in\mathbb{N}$ tal que $n>k \Rightarrow a'_n - a_n < \varepsilon$, por definición de sucesión anidada se sabe que $[a_n, b_n]$ y $[a'_n, b'_n]$ son sucesiones nulas, así que existen n_1, n_2 tales que $n > n_1 \Rightarrow b_n - a_n < \varepsilon$ $\quad n > n_2 \Rightarrow b'_n - a'_n < \varepsilon$ por lo tanto, si $N = \max\{n_1, n_2\}$ suceden ambas cosas. Luego:

$$a_n \leq b'_n \Rightarrow a_n - a'_n \leq b'_n - a'_n < \varepsilon,$$

$$a'_n \leq b_n \Rightarrow a'_n - a_n \leq b_n - a_n < \varepsilon,$$

$\therefore\ -\varepsilon < a'_n - a_n < \varepsilon$, esto es, $|a'_n - a_n| < \varepsilon$ si $n > N$. $\dagger$

iii) $a'_n - a_n$ es una sucesión nula $\Rightarrow [a_n, b_n] \sim [a'_n, b'_n]$

Sean $I = \{ I_i. I_o, I_d \}$ y $I' = \{ I'_i, I'_o, I'_d \}$ las particiones que inducen $[a_n, b_n]$ ^ $[a'_n, b'_n]$ respectivamente.

Por demostrar que $I = I'$, en el sentido de que $I_i = I'_i$, $I_o = I'_o$, $I_d = I'_d$.

•) Sea $p \in I_i \therefore \exists\ k\in\mathbb{N}$ tal que $p < a_k \therefore p < a_n\ \forall\ n > k$, sea $\varepsilon = a_k - p$. Por otro lado, por hipótesis $a'_n - a_n$ es una sucesión nula, por lo tanto, $\exists\ m \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\ n > m$, $|a'_n - a_n| < \varepsilon$, *i.e.* $-\varepsilon < a_n - a'_n < \varepsilon$, si $N = \text{máx}\{k, m\}$ y $n > N$, pasan ambas cosas y por lo tanto, $a_n - a'_n < a_k - p$ $\therefore\ p < a'_n - (a_n - a_k) \leq a'_n$, $\therefore\ p \in I'_i$, $\therefore\ I_i \subset I'_i$, y como el argumento es claramente simétrico, $I'_i \subset I_i$, por lo tanto, $I_i = I'_i$.

••) Sea $p \in I_d$, $\therefore$ $\exists$ $k \in \mathbb{N}$, tal que $b_k < p$ $\therefore$ $b_n < p$, $\forall n > k$ sea $\varepsilon = p - b_k$. Por otro lado, por hipótesis $b'_n - b_n$ es una sucesión nula, por lo tanto, $\exists$ $m \in \mathbb{N}$ tal que $\forall$ $n > m$, $|b'_n - b_n| < \varepsilon$, *i.e.* $-\varepsilon < b'_n - b_n < \varepsilon$, si $N = \text{máx} \{ k,m \}$ $\forall$ $n > N$, pasan ambas cosas y por lo tanto, $b'_n - b_n < p - b_k$ $\therefore$ $b'_n < p - (b_k - b_n) \leq p$, $\therefore$ $b'_n < p$ $\therefore$ $p \in I'_d$ $\therefore$ $I_d \subset I'_d$, y como el argumento es claramente simétrico, $I'_d \subset I_d$, por lo tanto, $I_d = I'_d$.

•••) Se sabe que $\mathbb{Q} = I_i \cup I_o \cup I_d$ $\therefore$ $I_o = \mathbb{Q} - (I_i \cup I_d)$, pero, por los dos incisos anteriores $I_d = I'_d$ $I_i = I'_i$ por lo tanto $\mathbb{Q} - (I_i \cup I_d) = \mathbb{Q} - (I'_i \cup I'_d) = I'_o$, esto es, $I_o = I'_o$. †

Del teorema anterior, resulta inmediato que la relación ' ~ ' es una relación de equivalencia en el conjunto de encajes de intervalos, ($[a_n, b_n] \sim [a'_n, b'_n] \Leftrightarrow$ definen igual partición) por lo tanto induce, en este conjunto, una partición de los encajes de intervalos en clases de equivalencia y se definen los números reales como las clases de equivalencia inducidas. Cada sucesión es un representante de su clase y por lo tanto, es un nombre para el número real que determina, por ejemplo, $\{[-1/n , 1/n]\}$ es un nombre del número real "cero". Si para un encaje dado, $[a_n, b_n]$ se tiene que $I_o \neq \phi$ entonces, por definición, $I_o = \{ r\}$ para algún racional r y se identifica a la sucesión $\{ [a_n, b_n] \}$ con el número racional r y se considera entonnces que se trata de un real "racional".

Si $I_o = \phi$, entonces $I'_o = \phi$, $\forall$ I'_o de los encajes que pertenecen a la misma clase, en este caso se dice que la clase es un real "irracional".

Los números reales determinados por dos sucesiones anidadas diferentes se considerarán iguales si las sucesiones son equivalentes. De acuerdo con esto, un número real se representará por la separación de los números racionales en tres clases generadas por sucesiones anidadas equivalentes de intervalos racionales. Si la segunda clase consiste de un número racional r, se considerará que el número real representado por esta separación en clases es idéntico al número racional r.

Habiendo definido los números reales, se pueden ahora definir los conceptos de orden, suma, diferencia, producto, límite, etc. entre ellos y probar que tienen las propiedades usuales.

III. Cortaduras de Dedekind

Definición. Si $\mathbb{A}$ es un campo ordenado, entonces la pareja ordenada $(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ es una *cortadura* en $\mathbb{A}$ si $\mathbb{X}$ y $\mathbb{Y}$ son subconjuntos no vacíos de $\mathbb{A}$ tales que:

i) $\mathbb{X} \cap \mathbb{Y} = \phi$,

ii) $\mathbb{X} \cup \mathbb{Y} = \mathbb{A}$,

iii) si $x \in \mathbb{X}$, y $y \in \mathbb{Y}$, entonces $x < y$.

Los conjuntos $\mathbb{X}$ y $\mathbb{Y}$ se denominan, respectivamente, la *clase inferior* y la *clase superior* de la cortadura.

Definición. Una cortadura es una *brecha* o *rendija* si su clase inferior no tiene un elemento máximo y si su clase superior no tiene un elemento mínimo, en A.

Definición. Una *cortadura de Dedekind* en $\mathbb{Q}$, es un conjunto X de números racionales que cumplen:

i) $\phi \subset X \subset \mathbb{Q}$;

ii) Si $a < b$ y $a \in X$, entonces $b \in X$;

iii) X no tiene elemento mínimo.

Los conjuntos de números racionales que satisfacen estas tres condiciones de la definición, se denominan también *cortaduras superiores de Dedekind,* pero aquí se les mencionará simplemente como cortaduras.

Definición. Una *cortadura inferior de Dedekind* en $\mathbb{Q}$, es un conjunto X de números racionales tales que:

i) $\phi \subset X \subset \mathbb{Q}$;

ii) $a > b$ y $a \in X$ entonces $b \in X$,

iii) X no tiene un elemento máximo.

Definición. Si X es una cortadura de Dedekind y X^c tiene un máximo r, a la cortadura X se le identifica con r y se le llama una *cortadura racional*. Si X^C no tiene máximo, esto es, es una brecha en $\mathbb{Q}$, se dice que es una *cortadura irracional*.

Teorema. Si $\mathbb{X}$ y $\mathbb{Y}$ son cortaduras de Dedekind, entonces se satisface solamente una de las siguientes relaciones:

$\mathbb{X} \subset \mathbb{Y}$, $\mathbb{X} = \mathbb{Y}$, $\mathbb{X} \supset \mathbb{Y}$

Demostración:

En esta demostración se utiliza el Teorema de la Deducción, en donde se asegura que demostrar $p \vee q \vee r$ es equivalente a suponer $\neg p \wedge \neg q$ y entonces demostrar r. En efecto:

$$\vdash p \vee q \vee r \equiv \vdash \neg p \wedge \neg q \Rightarrow r, \quad \neg p, \neg q \vdash r.$$

Supongase que no se cumplen $\mathbb{X} \subset \mathbb{Y}$, ni $\mathbb{X} = \mathbb{Y}$. Entonces existe un elemento $a \in \mathbb{X}$ tal que $a \notin \mathbb{Y}$. Si $b \in \mathbb{Y}$, entonces $b \leq a$ es imposible, ya que por definición, esto implicaría que $a \in \mathbb{Y}$; así que, $a < b$. Como $a \in \mathbb{X}$, entonces, por definición, $b \in \mathbb{X}$. Por lo tanto, se ha demostrado que, si $b \in \mathbb{Y}$ entonces $b \in \mathbb{X}$, esto es, $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X}$. Pero como por hipótesis, $\mathbb{Y} \neq \mathbb{X}$, se tiene que $\mathbb{X} \supset \mathbb{Y}$. Esto prueba, que al menos una de las tres relaciones se cumple.

Es conveniente hacer notar que la igualdad, el orden, la suma, la negación, y la multiplicación de cortaduras, se pueden definir por el procedimiento usual. Sin embargo, en este trabajo se omiten tales definiciones

Definición. *El conjunto* $\mathbb{R}$ *de todos los números reales* es el conjunto de todas las cortaduras de Dedekind, en donde la igualdad es, efectivamente, identidad.

Los números reales pueden definirse usando cortaduras inferiores de Dedekind, este procedimiento tiene la ventaja de que la definición de orden resulta muy natural, sin embargo tiene el inconveniente de que la definición de multiplicación es menos natural.

Teorema. El sistema $\mathbb{R}$ de los números reales, dado por la definición de números reales, con las operaciones de adición, negación, multiplicación y orden y con $\mathbb{X}(0)$ y $\mathbb{X}(1)$ como cero y elemento idéntico respectivamente, es un campo ordenado.

CAPITULO V

TEOREMA

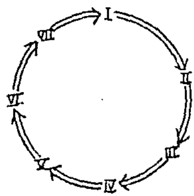
Proposición VII

a) $\mathbb{A}$ es un campo arquimedeano y

b) Si, para cada $n \in \mathbb{N}$, I_n es un intervalo cerrado en $\mathbb{A}$, y si $I_{n+1} \subset I_n$, entonces $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \neq \phi$.

Teorema. En un campo ordenado $\mathbb{A}$, las proposiciones I a VII son equivalentes.

Se probará la equivalencia estableciendo el siguiente ciclo de implicaciones:



I implica II: Si $\mathbb{A}$ es un campo Arquimedeano y cada sucesión fundamental en $\mathbb{A}$ tiene un límite en $\mathbb{A}$, entonces cada subconjunto no vacío de $\mathbb{A}$ acotado por arriba tiene una mínima cota superior en $\mathbb{A}$.

Demostración:

Se supondrá que $\mathbb{X}$ es un subconjunto no vacío de $\mathbb{A}$, que b es una cota superior para $\mathbb{X}$ y que $x \in \mathbb{X}$.

Primero se observa que $b - x \geq 0$ ya que $x \leq b \quad \forall\, x \in \mathbb{X}$, además puesto que $\mathbb{A}$ es Arquimedeano para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $m(1/n) > b - x$, esto es,

$$x + m/n > b \quad \text{en } \mathbb{A}.$$

Por lo tanto, $x + m/n$ es una cota superior para $\mathcal{X}$. Así que, para cada $n \in \mathbb{N}$ se puede construir un conjunto no vacío $\mathcal{B}_n = \{ m \in \mathbb{N} \mid x + m/n$ es una cota superior de $\mathcal{X}$ $\}$ esto es,

$$\mathcal{B}_1 = \{ m \in \mathbb{N} \quad x + m \text{ es una cota superior de } \mathcal{X} \}$$
$$= \{ m, m + 1, m + 2, \ldots, \}$$
$$\mathcal{B}_2 = \{ m \in \mathbb{N} \mid x + m/2 \text{ es una cota superior de } \mathcal{X} \}$$
$$= \{ m/2, (m + 1)/2, (m + 2)/2, \ldots, \}$$
$$\vdots$$
$$\mathcal{B}_n = \{ m \in \mathbb{N} \mid x + m/n \text{ es una cota superior de } \mathcal{X} \}$$
$$= \{ m/n, (m + 1)/n, (m + 2)/n, \ldots, \}$$

de donde, hay una familia de conjuntos $\mathcal{B}_n$ tales que cada conjunto tiene un elemento mínimo (Principio de Buen Orden), sea m_n este elemento mínimo, (notese que m_n depende de n). Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, se construye:

$$y_n = x + m_n/n \qquad (1)$$

es claro que y_n es una cota superior para $\mathcal{X}$, ya que por construcción $y_n \in \mathcal{B}_n$.

Sea:

$$x_n = y_n - 1/n \qquad (2)$$
$$= x + \frac{m_n - 1}{n} < x_o \text{ en } \mathbb{A}, \text{ para alguna } x_o \in \mathcal{X} ,$$

por lo tanto,

$$x_n < y_n$$

Por otro lado, dado que m_n es el menor elemento de $\mathcal{B}_n$ se tiene que $m_n - 1 \notin \mathcal{B}_n$, es decir, $x_n = x + \frac{m_n - 1}{n}$ no es cota superior de $\mathbb{X}$ $\therefore$ $\exists\, x_k \in \mathbb{X}$, tal que:

$$x + \frac{m_n - 1}{n} < x_k \leq y_m \text{ , } \forall\, m \in \mathbb{N}$$

esto es,

$$x_n < y_m \text{ , } \qquad \forall\, m,n \in \mathbb{N}$$

y además, para toda $n \in \mathbb{N}$, $y_n - x_n = \frac{1}{n}$.

Por lo tanto,

$$x_m - x_n < y_n - (\ y_n - 1/n\ ) = 1/n \text{ ,}$$

y

$$\begin{aligned} |x_m - x_n| &= \max\{\ x_m - x_n \text{ , } \ x_n - x_m\ \} \\ &\leq \max\{\ 1/n \text{ , } 1/m\ \} \text{ en } \mathbb{A} \quad \forall\, m,n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Pero, $\lim_{n\to\infty} (1/n) = 0$ en el campo ordenado Arquimedeano $\mathbb{A}$, se tiene entonces que $\{\ x_n\ \}$ es una sucesión fundamental en $\mathbb{A}$, y por hipótesis tiene un límite $a \in \mathbb{A}$. Además $a = \sup \mathbb{X}$ ya que a es una cota superior para $\mathbb{X}$, si no lo fuera, entonces $a < z$ para alguna $z \in \mathbb{X}$. Pero como $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, por definición, para cada $\varepsilon > 0$ existe un entero N, tal que $n \geq N$ implica que $|\ x_n - a\ | < \varepsilon$.

Analogamente, $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$, por lo tanto, para cada $\varepsilon > 0$ existe un entero N, tal que $n \geq N$ implica que $|\ 1/n\ | < \varepsilon$, esto es, dado $c = \frac{z - a}{2}$, existe alguna $n \in \mathbb{N}$ tal que,

$x_n - a \leq |x_n - a| < \frac{z - a}{2}$, $\wedge$ $1/n < \frac{z - a}{2}$, en $\mathbb{A}$.

Entonces, por (2),

$$y_n = x_n + \frac{1}{n} < \left(a + \frac{z - a}{2}\right) + \frac{z - a}{2} = z \quad \text{en } \mathbb{A}$$

esto es, se ha demostrado que $y_n < z$, pero $z \in \mathbb{X}$ y por (1) y_n es una cota superior para $\mathbb{X}$, ¡Contradicción!. Por lo tanto, a es una cota superior para $\mathbb{X}$.

La demostración de que a es la mínima cota superior de $\mathbb{X}$, se hará por reducccción al absurdo, esto es se supondrá que si c es cualquier cota superior para $\mathbb{X}$, entonces $a > c$ en $\mathbb{A}$, por lo tanto $a - c > 0$ en $\mathbb{A}$. Entonces, para alguna $n \in \mathbb{N}$ se tiene que:

$$a - x_n \leq |a - x_n| < a - c, \quad \text{en } \mathbb{A}$$

$$\therefore \quad a - x_n < a - c \quad \therefore \quad x_n > c,$$

pero, por (2), $x_n \leq x$ para alguna $x \in \mathbb{X}$,

$\therefore$ $c < x_n \leq x$, en $\mathbb{A}$ para alguna $x \in \mathbb{X}$,

¡Contradicción ! ya que c es una cota superior para $\mathbb{X}$.

Por lo tanto, $a \leq c$ $\therefore$ a es la mínima cota superior de $\mathbb{X}$, esto es, $a = \sup \mathbb{X}$. †

II implica III: Si cada subconjunto no vacío de $\mathbb{A}$ que esté acotado por arriba tiene supremo en $\mathbb{A}$, entonces ninguna cortadura (X,Y) en $\mathbb{A}$ es una rendija.

Demostración:

Supongase que (X,Y) es una cortadura en $\mathbb{A}$, entonces, por definición, X es un subconjunto no vacío de $\mathbb{A}$ y además cada elemento del conjunto no vacío Y es una cota superior para X entonces por hipótesis, existe alguna $a \in \mathbb{A}$ con la propiedad que $a = \sup X$ en $\mathbb{A}$.

Pero, como (X,Y) es una cortadura en $\mathbb{A}$, se tiene que $a \in X$ ó bien $a \in Y$. Si $a \in X$, entonces $\sup X = a = \max X$. Si $a \in Y$, entonces como todo elemento de Y es cota superior de X, se tiene que $a = \min Y$, de donde, (X,Y) es una cortadura en $\mathbb{A}$ que no es rendija.

III implica IV: Si ninguna cortadura (X,Y) en $\mathbb{A}$ es una rendija, entonces todo subconjunto no vacío de $\mathbb{A}$ acotado por abajo tiene una máxima cota inferior.

Demostración:

Supongase que B es un subconjunto no vacío de $\mathbb{A}$, el cual está acotado por abajo. Sean:

$$X = \{x \mid x \leq b \text{ en } \mathbb{A} \text{ para toda } b \in B\}, \quad (3)$$

$$Y = \mathbb{A} - X \quad (4)$$

Entonces (X,Y) es una cortadura en $\mathbb{A}$, porque:

i) Como B está acotado por abajo y X es el conjunto de todas las cotas inferiores de B, se tiene que $X \neq \varnothing$.

ii) $B \neq \varnothing \;\therefore\; \exists\, b \in B \;\therefore\; b + 1 \in \mathbb{A}$, pero $b + 1 > b$, así que $b + 1 \notin X \;\therefore\; b + 1 \in Y \;\therefore\; Y \neq \varnothing$.

iii) Por construcción $X \cap Y = \varnothing$.

iv) Por construcción $X \cup Y = \mathbb{A}$.

Entonces el conjunto $\mathbb{M} = \mathbb{K} \cup \mathbb{H}$ de intervalos abiertos es una cubierta de $[a,b]$.

Ahora sea

$\mathbb{L} = \{x \mid x \in [a,b] \wedge [x,b]$ está cubierto por un subconjunto finito de $\mathbb{M}\}$.

Si $b \in \mathbb{X}$, $[b,b]$ está cubierto por algún intervalo abierto de $\mathbb{M}$, obviamente, así que $b \in \mathbb{L}$ y por lo tanto $\mathbb{L} \neq \emptyset$. Por otro lado, puesto que $a \leq x$ para toda $x \in \mathbb{L}$, se tiene que $\mathbb{L}$ está acotado por abajo, así que por hipótesis $\mathbb{L}$ tiene una máxima cota inferior x_o.

Se demostrará que $[x_o, b]$ está cubierto por un subconjunto finito de $\mathbb{M}$, esto es que, $x_o \in \mathbb{L}$. Como $x_o \in [a,b]$ existe un intervalo abierto $J_o \in \mathbb{M}$, tal que $x_o \in J_o$. Sea $J_o = (c,d)$, entonces $c < x_o < d$, por otro lado, como x_o es la máxima cota inferior de $\mathbb{L}$, existe algún $z_o \in \mathbb{L}$ tal que $x_o < z_o < d$ pero, como $z_o \in \mathbb{L}$, existe un conjunto finito $\{J_1, \ldots, J_m\} \subset \mathbb{M}$, el cual cubre a $[z_o, b]$. Por lo tanto, el conjunto finito $\{J_o, J_1, \ldots, J_m\} \subset \mathbb{M}$, cubre al conjunto $[x_o, b]$.

A continuación se demostrará, por reducción al absurdo, que $x_o = a$, para ello se supone que $x_o \neq a$, por lo tanto $a < x_o$, pero como $c < x_o$, entonces $\text{máx}\,(a,c) < x_o$.

Si, $z_1 = \dfrac{x_o + \text{máx}\,(a,c)}{2}$, $z_1 \in \mathbb{A}$, por lo tanto,

$$a, c \leq \text{máx}\ \{a, c\} < z_1 < x_o < d \leq b.$$

Por lo tanto, $z_1 \in [a, b]$ y $[z_1, b]$ esta cubierto por $\{J_o, J_1, \ldots, J_m\}$ así que $z_1 \in \mathbb{L}$, y $z_1 < x_o$, pero esto no es posible, ya que x_o es cota inferior de $\mathbb{L}$, esto es, se ha demostrado que $[a, b]$, y por lo tanto, el subconjunto $\mathbb{X}$ de $[a, b]$, está cubierto por $\{J_o, J_1, \ldots, J_m\} \subset \mathbb{M} = \mathbb{K} \cup \mathbb{H}$.

Como por construcción, ningún intervalo en $\mathbb{H}$ contiene puntos de $\mathbb{X}$, se tiene que $\mathbb{K} \cap \{J_o, J_1, \ldots, J_m\}$ es un subconjunto finito de $\mathbb{K}$ que cubre a $\mathbb{X}$.

V implica VI:

Si todo conjunto de intervalos abiertos que cubren a un subconjunto cerrado y acotado $\mathbb{X}$ de $\mathbb{A}$, contiene un subconjunto finito el cual cubre a $\mathbb{X}$, entonces todo subconjunto infinito y acotado de $\mathbb{A}$ tiene un punto de acumulación en $\mathbb{A}$.

Demostración:

Por reducción al absurdo. Sea $\mathbb{X}$ un subconjunto infinito y acotado de $\mathbb{A}$ y supongase que $\mathbb{X}$ no tiene puntos de acumulación, entonces, por definición, $\mathbb{X}$ es un conjunto cerrado. Sea $x \in \mathbb{X}$, como x no es un punto de acumulación de $\mathbb{X}$, existe un intervalo abierto I_x tal que $\mathbb{X} \cap I_x = \{x\}$. El conjunto $\mathbb{K} = \{ I_x \mid x \in \mathbb{X} \}$ cubre a $\mathbb{X}$, pero como $\mathbb{X}$ es cerrado y acotado, por hipótesis, existe un subconjunto finito S de $\mathbb{K}$ el cual cubre a $\mathbb{X}$. Si $S = \{ I_{x_1}, \ldots, I_{x_n} \mid n \in \mathbb{N} \}$

entonces, para cada $x \in \mathbb{X}$, existe alguna $k \in \{ 1,\dots,n \}$ tal que $x \in I_{x_k}$ y por lo tanto, $x = x_k$, de donde el conjunto $\mathbb{X} = \{ x_1,\dots,x_n\}$ es un conjunto finito, lo cual contradice la hipótesis.

VI implica VII: Si todo subconjunto infinito y acotado de $\mathbb{A}$ tiene un punto de acumulación en $\mathbb{A}$, entonces:

a) $\mathbb{A}$ es un campo arquimedeano y

b) Si, para cada $n \in \mathbb{N}$, I_n es un intervalo cerrado en $\mathbb{A}$, y si $I_{n+1} \subset I_n$, entonces $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$.

Demostración:

(*a*) Por reducción al absurdo. Si $\mathbb{A}$ no es un campo Arquimedeano, entonces existen $a,b \in \mathbb{A}$ tales que $0 < a < b$ en $\mathbb{A}$, pero $a \leq na < b$, para toda $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, el conjunto $\mathbb{X} = \{ na \mid n\in\mathbb{N} \}$ es infinito y acotado, pero no tiene puntos de acumulación, lo cual contradice la hipótesis, por lo tanto, $\mathbb{A}$ es un campo Arquimedeano.

(*b*) Supongase $I_n = [a_n, b_n]$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $I_{n+1} \subset I_n$. Entonces $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$, para cada $n\in\mathbb{N}$. Sea $\mathbb{X} = \{ a_n \mid n\in\mathbb{N} \}$, como $a_1 \leq a_n \leq b_1$ para toda $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $\mathbb{X}$ es un subconjunto acotado de $\mathbb{A}$.

Si, para alguna $j \in \mathbb{N}$, $a_m = a_j$ para toda $m \geq j$, entonces se tiene que $a_n \leq a_j \leq b_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, y $a_j \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$. En caso contrario, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe alguna $m \in \mathbb{N}$, tal que $a_m > a_n$, de modo que el conjunto $\mathbb{X}$ no tiene un elemento máximo y es, por lo tanto un subconjunto infinito de $\mathbb{A}$ así es que por hipótesis, el conjunto infinito y acotado $\mathbb{X}$ tiene un punto de acumulación $x \in \mathbb{A}$. A continuación se demostrará, por reducccción al absurdo, que $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$.

Si $a_n > x$ para alguna $n \in \mathbb{N}$, entonces $a_m \geq a_n > x$, para toda $m \geq n$, por lo tanto, si $0 < \varepsilon < a_n - x$, el intervalo $(x - \varepsilon , x + \varepsilon)$ contiene sólo un número finito de puntos de $\mathbb{X}$, a saber desde a_1 hasta a_{n-1}, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $a_n \leq x$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Análogamente, si para alguna $n \in \mathbb{N}$, $b_n < x$, entonces se tiene que $a_m \leq b_n < x$, para toda $m \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, si $0 < \varepsilon < x - b_n$, el intervalo $(x - \varepsilon , x + \varepsilon)$ no contiene puntos de $\mathbb{X}$ ¡contradicción!. Por lo tanto, $x \leq b$, para toda $n \in \mathrm{N}$. Pero, entonces, lo que se ha demostrado es que $a_n \leq x \leq b_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, y así $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$.

VII implica I: Si

a) $\mathbb{A}$ es un campo arquimedeano y

b) Si, I_n es una sucesión de intervalos cerrados en $\mathbb{A}$, tales que $I_{n+1} \subset I_n$, para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \neq \phi$ entonces:

$a')$ $\mathbb{A}$ es un campo arquimedeano y

$b')$ Cada sucesión fundamental en $\mathbb{A}$ tiene un límite en $\mathbb{A}$.

Demostración:

$a')$ Es obviamente válido.

Para demostrar $b')$ supongase que $\{ x_n \}$ es una sucesión fundamental en $\mathbb{A}$.

Entonces, por definición, para cada $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{Z}$, tal que $|x_n - x_m| < \varepsilon$, siempre que $n,m \geq \mathbb{N}$. Esto es:

$$- \varepsilon < x_n - x_m < \varepsilon, \quad \text{siempre que} \quad n,m \geq \mathbb{N}.$$

$$\therefore \qquad x_m - \varepsilon < x_n < x_m + \varepsilon, \quad \text{siempre que} \quad n,m \geq \mathbb{N}.$$

Sea, para cada $k \in \mathbb{N}$, $\varepsilon(k) = 1/k$, $m = n_k$, entonces, para cada $k \in \mathbb{N}$, $\exists\ n_k \in \mathbb{N}$, tal que:

(1) $\quad x_{n_k} - \frac{1}{k} < x_n < x_{n_k} + \frac{1}{k}$, en $\mathbb{A}$ para toda $n \geq n_k$ en $\mathbb{N}$.

Para cada $m \in \mathbb{N}$, existen:

(2) $\quad p_m = \text{máx} \{ n_k | \ k \leq m \ \text{ en } \mathbb{N} \} \in \mathbb{N}$,

(3) $\quad a_m = \text{máx} \{ x_{n_k} - \frac{1}{k} \ | \ k \leq m \text{ en } \mathbb{N} \} \in \mathbb{A}$,

(4) $\quad b_m = \text{mín} \{ x_{n_k} + \frac{1}{k} \ | \ k \leq m \text{ en } \mathbb{N} \} \in \mathbb{A}$,

entonces, por (2), (3) y (4):

(5) $\quad a_m \leq a_{m+1} < x_n < b_{m+1} \leq b_m$ en $\mathbb{A}$, para toda $m \in \mathbb{N}$ y toda $n \geq p_{m+1}$ en $\mathbb{N}$.

Sea $I_m = [a_m , b_m]$ para cada $m \in \mathbb{N}$.

entonces, por (5), $I_{m+1} \subset I_m$ para toda $m \in \mathbb{N}$.

Por lo tanto, por la hipótesis (*b*), existe algún $a \in \mathbb{A}$ tal que

(6) $$a \in \bigcap_{m \in N} I_m .$$

En seguida se demostrará que $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$.

Por (1),(3),(4) y (6), se tiene que:

(7) $$x_n - \frac{1}{m} \le a_m \le a \le b_m \le x_n + \frac{1}{m}, \text{ en } \mathbb{A} \text{ para toda } m \in \mathbb{N}.$$

Por (1),

(8) $$x_{n_m} - \frac{1}{m} < x_n < x_{n_m} + \frac{1}{m}, \text{ en } \mathbb{A} \text{ para toda } n \geq n_m \text{ en } \mathbb{N}.$$

Por lo tanto, por (7) y (8),

(9) $$|x_n - a| = \text{máx } \{x - a, a - x\}$$
$$\le 2/m \text{ en } \mathbb{A} \text{ para toda } m \in \mathbb{N} \text{ y toda } n \geq n_m \text{ en } \mathbb{N}.$$

Sea $\varepsilon > 0$ en $\mathbb{A}$, como $\mathbb{A}$ es Arquimedeano, existe algún $m \in \mathbb{N}$ tal que:

$$m\varepsilon > 2 \text{ en } \mathbb{A}, \quad \therefore \quad 2/m < \varepsilon ,$$

Por lo tanto, por (9),

$$|x_n - a| < \varepsilon \text{ en } \mathbb{A} \text{ para toda } n \geq n_m \text{ en } \mathbb{N},$$

así que $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$.

CATEGORICIDAD

A continuación se demostrará que cualquiera de las proposiciones I a VII caracteriza a $\mathbb{R}$ entre todos los campos ordenados, o también que la proposición "$\mathbb{A}$ es un campo ordenado" junto con cualquiera de las proposiciones de la I a la VII constituyen un conjunto de axiomas categóricos para el campo ordenado de los números reales. Debido a la equivalencia de las siete proposiciones anteriores, es suficiente con demostrar que cualquiera de las proposiciones caracteriza $\mathbb{R}$ entre los campos ordenados.

Antes de hacerlo se demostrará que cualquier campo ordenado Arquimedeanamente puede ser sumergido isomórficamente en el campo ordenado de los números reales $\mathbb{R}$.

Definición. Sea $\mathbb{A}$ un campo ordenado, O el neutro aditivo de $\mathbb{A}$, $e \in \mathbb{A}$ el idéntico multiplicativo, se define:

a) $0e = O$

b) $(n+1)e = ne +_{A} e$

c) $-ne = -_{A}(ne)$

de aquí resulta trivial demostrar por inducción que:

i) $ne+me = (n+m)e, \quad \forall\, n,m \in \mathbb{Z}$

ii) $n(me) = nme = neme$

iii) $ne = O \Rightarrow n = 0$

Teorema. Si se define $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{A}$ como $f(n) = ne$, entonces f es una función uno a uno de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{A}$ tal que preserva la adición, la multiplicación y el orden.

Demostración:

$i)$ $ne = me \Rightarrow (n-m)e = 0 \quad \therefore \quad n-m = 0 \quad \therefore \quad n = m,$

$ii)$ $f(n+m) = (n+m)e = ne+me = f(n)+f(m),$

$iii)$ $f(nm) = nme = neme = f(n)f(m),$

esto es, es una inmersión.

Teorema. Sea $\mathbb{Z}_A$ la imágen isomórfica de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{A}$ y sea $\mathbb{Q}_A$ su campo de cocientes, sea $n'=f(n)=ne \in \mathbb{Z}_A$, se define:

$$\mathbb{Q}_A=\{ \overline{n'/m'} \mid n',m' \in \mathbb{Z}_A \ , \ m' \neq 0 \},$$

en donde:

$a)$ $\overline{n_1' / m_1'} = \overline{n_2' / m_2'} \quad \Leftrightarrow \quad n_1' m_2' = m_1' n_2',$

$b)$ $\overline{n'/m'} + \overline{p'/q'} = \dfrac{\overline{n'q' + m'p'}}{m'q'} ,$

$c)$ $\overline{n'/m'} \cdot \overline{p'/q'} = \dfrac{n'p'}{m'q'} ,$

entonces f induce un isomorfismo entre $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q}_A$, a saber:

$$f(\overline{p/q}) = \overline{p'/q'} = \overline{pe/qe}$$

Demostración:

$i)$ inyectiva, $f(\overline{p/q}) = f(\overline{r/s}) \quad \therefore \quad \overline{p'/q'} = \overline{r'/s'} \quad \therefore$

$\therefore \quad p's' = r'q' \quad \therefore \quad pe\ se = re\ qe \quad \therefore \quad (ps-rq)e = 0$

$\therefore \quad ps = rq \quad \therefore \quad p/q = r/s$.

ii) $f(\overline{p/q} + \overline{r/s}) = \overline{p'/q'} + \overline{r'/s'}$

$$= \frac{pc}{qc} + \frac{sc}{rc} = f(\overline{p/q}) + f(\overline{r/s}).$$

iii) $f(\overline{p/q} \cdot \overline{r/s}) = f(\overline{pr/qs}) = \dfrac{(\overline{pr})'}{(\overline{qs})'} = \dfrac{\overline{prc}}{\overline{qsc}}$

$$= \frac{\overline{pc}}{\overline{qc}} \cdot \frac{\overline{rc}}{\overline{sc}} = \frac{\overline{p}'}{\overline{q}'} \cdot \frac{\overline{r}'}{\overline{s}'}$$

$$= f(\overline{p/q})\cdot f(\overline{r/s}) \; _{\dagger}$$

Teorema. Cualquier campo ordenado Arquimedeanamente puede ser sumergido isomórficamente en el campo ordenado de los números reales $\mathbb{R}$.

Demostración:

Sea $\mathbb{A}$ un campo ordenado arquimedeanamente. Sea $\mathbb{Q}_{\mathbb{A}}$ el conjunto de todos los elementos racionales de $\mathbb{A}$, y sea $\tilde{x}$ el elemento racional de $\mathbb{A}$ que corresponde a $x \in \mathbb{Q}$ bajo el isomorfismo $\mathcal{H} : \mathbb{Q} \to \mathbb{A}$ definido por:

$$\mathcal{H}(1) = 1_{\mathbb{A}}$$

$$\mathcal{H}(h/k) = h1_{\mathbb{A}}/k1_{\mathbb{A}}, \qquad h/k \in \mathbb{Q}$$

$\mathcal{H}$ es una función uno a uno de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{A}$ la cual preserva el orden, la adición y la multiplicación, como se demostró en el teorema anterior.

Sea $\mathcal{F}_{\mathbb{Q}}$ el conjunto de todas las sucesiones racionales de Cauchy, el conjunto:

$$(1) \qquad \mathcal{F} = \left\{ \left(\lim_{n\to\infty} \tilde{x}_n, \lim_{n\to\infty} x_n \right) : \{x_n\} \in \mathcal{F}_{\mathbb{Q}} \right\}$$

es un mapeo de $\mathbb{A}$ en $\mathbb{R}$, ya que si $a \in \mathbb{A}$, entonces para alguna sucesión $\{\tilde{x}_n\}$ en $\mathbb{Q}_A$, $a = \lim \tilde{x}_n$. Puesto que $\{\tilde{x}_n\}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{A}$, $\{\tilde{x}_n\}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{Q}_A$ y $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{Q}$ y en $\mathbb{R}$. Pero como $\mathbb{R}$ es completo, $\lim_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{R}$, y así $\left(a, \lim_{n\to\infty} x_n\right) \in \mathcal{F}$.

Para cualquier $\{x_n\}$, $\{y_n\} \in \mathcal{F}_Q$,

(2) $$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n \quad \text{en } \mathbb{R}$$

si y sólo si

(3) $$\lim_{n\to\infty} (x_n - y_n) = 0 \quad \text{en } \mathbb{Q}.$$

Pero (3) vale si y sólo si

(4) $$\lim_{n\to\infty} (\tilde{x}_n - \tilde{y}_n) = 0 \text{ en } \mathbb{Q}_A,$$

y (4) vale si y sólo si

(5) $$\lim_{n\to\infty} \tilde{x}_n = \lim_{n\to\infty} \tilde{y}_n \quad \text{en } \mathbb{A}.$$

Por lo tanto, (2) y (5) son equivalentes, y así $\mathcal{F}$ es una función uno a uno de $\mathbb{A}$ en $\mathbb{R}$.

Obviamente, para toda $a, b \in \mathbb{A}$:

$$\mathcal{F}(a +_A b) = \mathcal{F}(a) +_R \mathcal{F}(b)$$

$$\mathcal{F}(a \cdot_A b) = \mathcal{F}(a) \cdot_R \mathcal{F}(b)$$

Por lo tanto, $\mathcal{F}$ preserva la adición y la multiplicación.

Además si $a = \lim_{n\to\infty} \tilde{x}_n$ es un elemento positivo en $\mathbb{A}$, entonces $\{\tilde{x}_n\}$ es una sucesión positiva en $\mathbb{A}$ y $\{x_n\}$ es una sucesión positiva en $\mathbb{R}$ y así $\lim_{n\to\infty} x_n$ es un número real positivo, por lo tanto $\mathcal{F}$ preserva el orden.

Teorema. Cualquier campo completo ordenado Arquimedeanamente es isomorfo al campo ordenado de los números reales.

Demostración:

Si $\mathbb{A}$ es completo, la función $\mathcal{F}$ del teorema anterior mapea $\mathbb{A}$ sobre $\mathbb{R}$, ya que, si $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ en $\mathbb{R}$, entonces $\{\tilde{x}_n\}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{A}$, y como $\mathbb{A}$ es completo, se tiene que $\lim_{n\to\infty} \tilde{x}_n = a\in\mathbb{A}$. Pero entonces, $x = \mathcal{F}(a)$. Por lo tanto, $\mathcal{F}$ es un isomorfismo del campo ordenado $\mathbb{A}$ sobre el campo ordenado de los números reales $\mathbb{R}$.

Corolario. Cualquier campo ordenado que satisfaga a una cualquiera de las proposiciones I a VII es isomorfo al campo ordenado de los números reales $\mathbb{R}$.

Conclusión

Se inicia esta parte con las siguientes definiciones:

Definición 1. Un sistema abstracto S es un conjunto A formado por los "objetos del sistema", y por una colección finita $R_1, \ldots, R_n$ de relaciones n-arias en A.

Definición 2. Sean $\mathcal{S} = (A, R_1, \ldots, R_k)$ y $\mathcal{T} = (B, \mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_k)$ dos sistemas abstractos, se dice que $\mathcal{S}$ y $\mathcal{T}$ son isomorfos si existe una función biyectiva $\eta: A \longrightarrow B$, tal que, para todo $R_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, relación en $\mathcal{S}$, se tiene que:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in R_i \Leftrightarrow (\eta(a_1), \eta(a_2), \ldots, \eta(a_n)) \in \mathcal{R}_i.$$

Análogamente dados los campos ordenados, $\mathcal{K} = (\ K,\ +, \cdot, \leq\ )$ y $\mathcal{F} = (\ F,\ \oplus\ , \odot\ , \leq\ )$, "$\mathcal{K}$ isomorfo a $\mathcal{F}$" quiere decir, explícitamente, que existe una función biyectiva $f: K \longrightarrow F$ tal que , para todo $a, b \in K$, se cumple que:

$$f(a + b) = f(a) \oplus f(b)$$

$$f(a \cdot b) = f(a) \odot f(b)$$

$$a \leq b \Leftrightarrow f(a) \leq f(b)$$

El resultado final de esta tesis es que cuando $\mathcal{K}$ y $\mathcal{F}$ son completos (en el sentido de Dedekind), tal isomorfismo siempre existe, por lo que, excepto por esto, hay cuando mucho, <u>un</u> campo ordenado completo, del que $\mathbb{R}$, construído a partir de $\mathbb{N}$ por cualquier procedimiento "adecuado", es un modelo, es decir hay, al menos uno.

Los resultados más recientes sobre las teorías axiomáticas, y muy especialmente los teoremas de Gödel, aseguran, entre otras cosas, que ningún sistema axiomático consistente permite deducir todas las propiedades de los números enteros. Además dado que existen proposiciones indecidibles para $\mathbb{Z}$ (ni la proposición ni su negación son demostrables), tiene que aceptarse que existen modelos para los enteros $\mathbb{Z}$, que no son isomorfos (esto es, los axiomas de cualquier teoría consistente para $\mathbb{Z}$ no son categóricos).

De aquí resulta natural pensar que a partir de dos de estos modelos no isomorfos, digamos $\mathbb{Z}_1$ y $\mathbb{Z}_2$ los números reales que se obtienen $\mathbb{R}_1$ y $\mathbb{R}_2$ NO PUEDEN ser isomórfos, aunque como campos ordenados necesariamente lo sean, es decir que como ya se apuntó en el prólogo, las características no isomorfas, esto es, las diferencias entre las propiedades de uno y de otro no parecen ser "analíticas" en tanto que no pueden deducirse a través de un razonamiento lógico a partir de axiomas de campo, o de teoremas de los de "dominio entero" para $\mathbb{Z}$, ya que, como es claro, estos razonamientos, no pueden demostrar propiedades indemostrables que son las que se suponen y usan para distinguir $\mathbb{Z}_1$ de $\mathbb{Z}_2$.

En este nivel, resulta intrascendente el ignorar las diferencias, al no ser analíticas, además de que, ni siquiera es claro si tales diferencias son esenciales en $\mathbb{Z}$ ó si simplemente son producto de los mecanismos lógicos que se usan para derivarlas y por lo tanto son "removibles".

Bartle dice a este respecto: "La afirmación de que existe un único campo ordenado arquimedianamente y completo, es un tema lógico delicado que evidentemente depende de las reglas válidas de inferencia que se tengan en el sistema lógico en el que se pretendan formalizar los argumentos, sin embargo para el análisis matemático clásico, estas sutilezas no son un obstáculo, en tanto se tenga modo de construir, al menos uno (un campo ordenado arquimediano y completo) y que exista una notación adecuada para sus elementos".

Finalmente se apunta que el aparato deductivo (informal) que el matemático usa en su práctica ordinaria, y que es el que se aprende durante la estancia en la escuela, es suficientemente "bueno" . Prueba de ello es que una demostración considerada "correcta" por un buen matemático, se acepta <u>en general</u> como "correcta" por cualquier otro buen matemático, (al menos por cualquier otro buen matemático de la "misma escuela") y por lo tanto, no queriendo "ser más papistas que el Papa " damos por válida nuestra lógica y concluimos aquí, que con base en ella, "EXISTE UN UNICO CAMPO ORDENADO Y COMPLETO ", que es el que conocemos (?) y al que llamamos "EL CAMPO $\mathbb{R}$ DE LOS NUMEROS REALES ".

BIBLIOGRAFIA

Apostol, Tom M., *Análisis Matemático.* segunda edición. Reverté, s.a. 1986.

Bartle,Robert. *The Elements of Real Analysis,* segunda edición. Wiley International Edition. 1964.

Beaumont, Ross and Pierce, Richard. *The Algebraic Foundations of Mathematics.* Addison-Wesley Publishing Company, Inc. 1963.

Birkhoff G. and Mac Lane S. *A Survey of Modern Algebra.* Mac Millan Co., 1965.

Cohen Leon and Ehrlich Gertrude *The structure of the real number system.* Van Nostrand Company, inc. 1963.

Halmos, P. *Teoría Intuitiva de los Conjuntos.* CECSA.

Herstein, I, N,, *Algebra Moderna.* Trillas, 1968.

Kleene, S. C., *Introduction to Metamathematics.* Van Nostrand, Inc., 1967.

Rudin, Walter. *Principles of Mathematicas Analysis,* segunda edición. Mc. Graw Hill Book Company, 1964.

Stoll, Robert. *Set Theory and Logic.* Freeman and Co., 1963.