31
2ej

México, D. F. 1991

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"DISFRACCION DE LUZ POR ULTRASONIDO CON FRENTES PARABOLICOS"

T E S I S

Que para obtener el Título de

F I S I C O

p r e s e n t a

MARIA DEL PILAR GONZALEZ AMARO

AGRADECIMIENTOS

Agradesco al Fís Andrés Porta Contreras por la dirección de esta tesis, por su paciente orientación y comprensión así como por su decidido apoyo como maestro y amigo.

Al Fís. José Luis Sandoval Davalos quien con su experiencia en el tema de Difracción de luz por ultrasonido y sus efectos Acusto - Opticos me han orientado en la elaboración de este trabajo y por la revisión del mismo.

Al Fís. Manuel Jesús Jiménez Jiménez por su ayuda en el área de Optica, por su apoyo y amistad.

Deseo expresar mi agradecimiento al Fís. Esteban Amano Toyomoto, al M en C Alfonso Huanosta Tera , por haber aceptado fungir como sinodales.

Al Laboratorio de Acústica de la Facultad de Ciencias de la U.N.A.M. por las facilidades presentadas en la realización de este trabajo.

INDICE

PREFACIO

Desde principio de siglo la difracción de luz por ondas de sonido de muy alta frecuencia es un fenómeno conocido, uno de los principales iniciadores fue León Brillouin en 1921, al hacer el estudio de la dispersión de la luz por vibraciones térmicas en líquidos, una decada después fueron presentados ensayos experimentales sobre el fenómeno de la difracción de luz por ondas ultrasónicas por Debye - Sears y por Lucas - Biquard en forma independiente, así como el excelente trabajo experimental de R. Bär en 1933.

La teoría expuesta por C.V. Raman y N.S. Nagendra Nath dada a conocer en 1935 - 1936 es la que ha fundamentado la teoría del fenómeno. Posteriormente se han presentado una gran cantidad de investigaciones sobre este tema pero siempre tomando como base la teoría expuesta por Raman - Nath. Todo lo anterior va dando como resultado un campo prometedor dentro de la Acústica.

El objetivo de este trabajo es desarrollar un modelo teórico para la difracción de luz por ondas de sonido de muy alta frecuencia, en donde los frentes producidos por el ultrasonido tienen un perfil parabólico apreciable. El modelo se desarrolla suponiendo que el medio donde se propaga la onda ultrasónica es un líquido viscoso.

El capítulo I, se divide en dos secciones; en la primera parte se presenta una introducción histórica sobre el fenómeno, haciendo incapie en las investigaciones hechas por Raman - Nath[8.0]; advirtiendo que es en uno de los trabajos[8.1] de estos autores en los que se fundamenta esta tesis. La segunda parte consta de una serie de temas básicos necesarios para desarrollar y comprender el modelo original de Raman - Nath; así como a su vez entender el aquí propuesto.

En el capítulo II se analiza el primer artículo publicado por Raman - Nath; en él, los autores tratan el caso cuando un haz luminoso incide perpendicularmente sobre una onda ultrasónica que se propaga en un líquido . Las intensidades del patrón de difracción resultante se encuentra a través de una integral de difracción. El desarrollo matemático se presenta en el apéndice A .

El capítulo III se aboca al desarrollo del modelo para frentes parabólicos, objeto de este trabajo. Se anexan hipótesis para el frente propuesto, haciendo un análisis matemático paralelo al de Raman - Nath, es decir, por medio de una integral de difracción. Se presentan también un conjunto de gráficas para intensidades cuyo valor es semejante a los propuestos por Raman - Nath y los encontrados experimentalmente por Bär.

Por último se presentan las conclusiones y comentarios sobre los resultados obtenidos.

SIMBOLOGIA

Distancia focal	a
Vector de propagación del sonido	$\vec{b}$
Cambio de fase	$\Delta\phi$
Coordenadas del foco	$f(0,a)$
Coeficiente de viscosidad	η
Altura en un punto de la parábola	H
Longitud del camino óptico	L
Coseno director en la dirección x	lx
Longitud de onda de la luz	λ
Longitud de onda del sonido	λ^{*}
Máxima variación del índice de refracción	μ
Indice de refracción de todo el medio en su estado estable	μ_o
Indice de refracción en el medio a una altura x del origen ..	$\mu(x)$
Indice de refracción en el medio	$\mu(x,y)$
Un entero mayor o igual a cero	n
Números enteros	n,m,r,s
Frecuencia de la Luz	ν
Frecuencia del sonido	ν^{*}
Longitud del rayo a lo largo del eje x	p
Factor de inclinación	$Q(\theta,\theta')$
Factor de forma	q
Densidad del medio	ρ
Angulo de dispersión	θ
Vector de propagación de la luz	$\vec{u}$
Argumento de la función Bessel para el frente de onda plano ...	v
Argumento de la función Bessel para el frente de onda parabólico	v'

Vertice de la parábola .... $V(0,0)$

Dirección de propagación de la onda ultrasónica X

Dirección de propagación del has luminoso .... Z

Representa el frente de onda parábolico .... $(4ay)^{1/2}$

PRIMERA PARTE

CAPITULO I

INTRODUCCION HISTORICA

La difracción de lus por ondas de sonido de muy alta frecuencia es un fenómeno conocido desde principio de siglo. Leon Brillouin[3,1] en 1921, predijo la formación de patrones de difracción de un has de lus, al crusar una región perturbada por una onda sonora periódica .

Sin embargo la confirmación experimental se realisó una decada después cuando, los grupos de Lucas y Biquard[2] en Francia y Debye y Sears[1] en Estados Unidos produjeron por este medio patrones de difracción usando ondas sonoras entre 10^6 a 10^7 herts, en tolueno y xilol. Una descripción simplificada del arreglo experimental usado por Lucas para generar el fenómeno se muestra en la figura 1.,en donde un has luminoso A colimado por una rendija R incide con un frente de onda plano sobre una celda que contiene un líquido, en el que viaja una onda ultrasónica la cual se propaga perpendicularmente a la dirección del has luminoso .

Debye[3,2] obtuvo resultados en los que se indica la presencia de un solo orden del espectro de difracción. Para explicar los órdenes superiores, él sugiere la posibilidad de una relación no lineal entre densidades y constantes dieléctricas a altas frecuencias; o bien, que el cristal piesoeléctrico vibra en ciertos armónicos los cuales producen un número de órdenes de difracción simples que a su ves se dispersan.

Lucas y Biquard[3,1] atribuyeron el fenómeno al efecto de espejismo de la onda de lus en el medio, afirmando que las proposiciones de Debye son improbables; la primera, porque las amplitudes en las presiones involucradas son relativamente pequeñas y la segunda, se relaciona también con el cristal piezoeléctrico, afirmando que éste sólo resonará en armónicos impares .

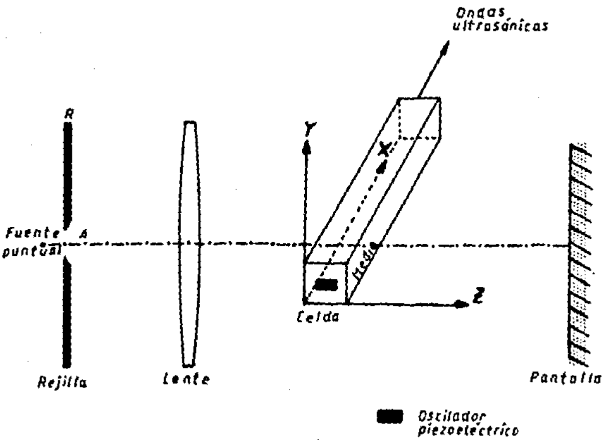


Fig. 1. Arreglo experimental del fenómeno de difracción de luz por ondas de sonido de muy alta frecuencia.

En 1933 en Zürich se publicó un trabajo experimental elaborado por R. Bär[8,1] quien observó que únicamente el orden cero y el primer orden (el orden cero fuerte y el primero débil) se presentan cuando la intensidad ultrasónica no es grande, y explica que los demas órdenes aparecen cuando ésta se incrementa, siguiendo una determinada secuencia; cuando aparecen los demas órdenes la intensidad del orden cero decrece mientras que el primer orden gana intensidad; al aumentar aún más la intensidad ultrasónica el primer orden se debilita, mientras que la intensidad del segundo y tercer orden es aproximadamente la misma. Bär utilizó el método de interferencia encontrando la relación que existe entre las componentes de difracción de la luz, y descubrió que los diversos órdenes pueden ser clasificados en dos grupos, uno para órdenes pares y otro para impares y concluyó:

"Dos órdenes de diferentes grupos son completamente incoherentes, mientras que dos órdenes del mismo grupo son parcialmente coherentes".

Los resultados obtenidos por Bär están en estrecha relación con la teoría expuesta por C.V. Raman y N.S. Nagendra Nath[3] ,publicada en una serie de cinco artículos entre 1935 - 1936. En su primer artículo[3,4], desarrollan la teoría de la difracción de la luz por ondas sonoras de alta frecuencia partiendo de las siguientes consideraciones: Estudiaron el caso en el que un haz de luz monocromática incide normalmente sobre una celda que contiene un líquido en el que viaja una onda ultrasónica; la interacción de ambos campos (luz - sonido) es estrictamente perpendicular, supusieron que el líquido al ser perturbado presenta una serie de capas paralelas estratificadas de índice de refracción variable. Consideraron también el caso en el cual el haz de luz incidente es paralelo al plano de las ondas sonoras, la luz que emerge del medio consistirá de varios rayos que viajan en diferentes direcciones; la inclinación de un rayo con respecto al haz de luz incidente se denota por θ encontraron experimentalmente la formula I.1 la cual quedo establecida en su teoría siendo esta:

$$\operatorname{sen}\theta = \pm \frac{n\lambda}{\lambda^{*}} \longrightarrow (1.1)$$

siendo n un entero mayor o igual a cero y λ es la longitud de onda del rayo de luz incidente así como λ^{*} es la longitud de onda del sonido en el medio.

Encontraron también que la intensidad relativa de la m-ésima componente a la n-ésima componente esta dada por las funciones Bessel de m-ésimo y n-ésimo orden fórmula I.2

$$\frac{J_m^2(2\pi\mu L/\lambda)}{J_n^2(2\pi\mu L/\lambda)} \longrightarrow (1.2)$$

siendo μ la máxima variación del índice de refracción y L la trayectoria recorrida por la luz en la celda. Observaron que en el estado perturbado las intensidades relativas dependen de $2\pi\mu L/\lambda$.

En su segunda publicación[3,2] se extendió la teoría al caso de la incidencia oblicua de la luz sobre las ondas sonoras, los resultados obtenidos explicaron en forma adecuada las variaciones de los efectos de difracción reportados por Debye y Sears para diferentes ángulos de incidencia. Para no tener complicaciones innecesarias en las dos publicaciones anteriores ambos investigadores deliberadamente no tomaron en cuenta la dependencia del índice de refracción con respecto al tiempo siendo lo anterior, una medida para dar a conocer de una manera esencial el rasgo principal de la teoría que explica el fenómeno.

En su tercer trabajo[3,3] se tomó en cuenta la variación del índice de refracción con respecto al tiempo. En esta parte, demostraron que la luz difractada por ondas progresivas exhiben efecto Doppler de un tipo muy simple. El resultado de la teoría allí expuesta concordó totalmente con los experimentos de Bär, en los que se remarcaba la coherencia observada que indica la presencia de una serie de componentes de frecuencia en cada uno de los espectros de difracción, para órdenes pares e impares.

En su penúltimo trabajo [2.4] propusieron un método para obtener la función de onda de luz considerando la ecuación diferencial parcial que gobierna la propagación de la luz en un medio ocupado por ondas sonoras. Se tomaron en cuenta de una manera natural los cambios periódicos en amplitud y en fase que acompañan al haz luminoso. En el caso de una onda sonora progresiva encontraron que la componente de difracción del n-ésimo orden, la cual está inclinada en un ángulo $\mathrm{Sen}^{-1}(-n\lambda/\lambda^{*})$ con respecto a la dirección de propagación de la luz incidente, tiene la frecuencia $\nu - n\nu^{*}$, donde ν y λ denotan la frecuencia y la longitud de onda de la luz incidente y ν^{*} y λ^{*} corresponden a la onda sonora. Demostraron también que si se tiene una perturbación de tipo armónica simple en el medio, la intensidad relativa del n-ésimo orden está dada por $|\varphi_n|^2$ de donde φ_n es la solución de la ecuación diferencial siguiente:

$$\mu^2 \frac{d^2\varphi_n}{d\xi^2} - 2i\mu_o\mu \frac{d\varphi_n}{d\xi} - \frac{n^2\lambda^2}{\lambda^{*2}}\varphi_n = \mu_o\mu i\,(\varphi_{n-1} - \varphi_{n+1})$$

de donde $\xi = 2\pi\mu z/\lambda$, μ_o es el índice de refracción del medio sin perturbar, μ es la amplitud de la variación del índice de refracción y el eje Z es la dirección de propagación de la luz incidente.

En su última publicación[2.5] todo el tratamiento del trabajo anterior se utilizó para el caso de incidencia oblicua y se encontró en general, que la distribución de la intensidad no es simétrica, lo cual explicó los resultados de Debye - Sears, Lucas - Biquard y Bär. Así mismo, las consideraciones en los cambios de amplitud en el haz luminoso explicaron los resultados de Heindeman, Lucas y Bär .

En fechas posteriores se ha presentado una cantidad considerable de investigaciones referentes al fenómeno, tomando como teoría medular la expuesta por Raman y Nath.

Ese mismo año, F.H. Sanders[4] en Canada realizó medidas de la distribución de energía luminosa de un patrón de difracción el cual se produjo al hacer pasar un haz de luz monocromática a través de un líquido por el que viaja una onda ultrasónica de 5Mhz, obtuvo resultados experimentales para la variación del grado de dispersión al variar la intensidad de la onda sonora; así como para las medidas absolutas de la misma intensidad.

Al inicio, en los años 40, de los trabajos de Sanders, Nomoto[5] realizó experimentos similares, con diferentes líquidos y determinó las intensidades desde el orden cero hasta el séptimo orden para valores de v ($v = 2\pi\mu L/\lambda$) entre 1.44 y 6.0

En el año de 1953 A. B. Bathia y W. J. Noble[6] trataron el fenómeno en términos de la dispersión de ondas electromagnéticas al incidir sobre un medio en el que existe una perturbación periódica . El problema conduce a una ecuación integral que se resuelve para un campo eléctrico polarizado. La teoría de Bathia Noble no se aplica en general, ya que es incapaz de explicar los órdenes superiores que aparecen en el experimento.

En la misma década P. Phariseau[7] presentó una investigación teórica en la que desarrolló un tratamiento matemático para la difracción ocasionada por un sistema ultrasónico tridimensional, *considerando un medio isotrópico y homogéneo que es perturbado por tres ondas sonoras progresivas e independientes, viajando en direcciones arbitrarias, las cuales producen ondas armónicas de compresión que ocasionan fluctuaciones en la densidad del medio. También postuló que las variaciones en el índice de refracción son directamente proporcionales a las variaciones en la densidad.*

Cinco años despues se tiene un trabajo reportado por W. R. Klein y E. A. Heideman[8] los cuales hicieron consideraciones solamente para el orden cero y compararon sus resultados con una función Bessel corregida siguiendo la teoría propuesta por Raman - Nath.

En México también se han hecho estudios del fenómeno en el Laboratorio de Acústica de la Facultad de Ciencias en la U.N.A.M. En 1980[9] se realizó un análisis detallado de los resultados experimentales corroborando la teoría de Raman - Nath, mostrando de una manera cualitativa algunos efectos producidos por una onda ultrasónica que se desplaza a través de un líquido, dichos efectos son similares a los observados en óptica.

Posteriormente se realizó un trabajo teórico[10] en el que se consideró de una manera más real la propagación de la onda ultrasónica en el medio, presentando ésta una alteración debida al transductor; es decir, al tomarse en cuenta las dimensiones finitas del transductor entonces no se tiene un frente de onda plano como en el caso Raman - Nath[6,1] sino que éste se verá deformado y sujeto a condiciones de frontera. Como consecuencia de lo anterior se propuso un frente de onda de perfil exponencial que se propaga en la dirección Y debido a que el oscilador piezoeléctrico vibra como si fuera una barra fija sujeta por uno de los extremos.

SEGUNDA PARTE

DESCRIPCION GENERAL DE LA DIFRACCION

Un cuerpo opaco colocado entre una pantalla y una fuente puntual, forma una sombra intrincada hecha de regiones claras y oscuras muy diferentes de las que se esperarían encontrar según la óptica geométrica[†1] (fig.2). La fig.3 es una ampliación de una región próxima a la sombra de un borde de la hoja . Se observa que una pequeña cantidad de lus ha dado la vuelta al borde y ha penetrado dentro de la sombra geométrica, la cual está separada por bandas alternativamente brillantes y oscuras. Se observa también que en la primera banda brillante, inmediatamente fuera de la sombra geométrica, la iluminación es mayor que en la región de iluminación uniforme del extremo isquierdo. La descripción dada en el parrafo anterior sirve para dar alguna idea de la verdadera complejidad de lo que se considera frecuentemente como el fenómeno óptico más elemental: la sombra arrojada por una fuente puntual.

El primer estudio detallado que se publicó sobre esta desviación de la lus de su propagación rectilínea, fué hecho por Francisco Grimaldi en el siglo XVII, algo que llamo "difracción". El efecto es una característica general de los fenómenos ondulatorios que ocurren siempre que una porción del frente de onda, es obstruida de alguna manera.

El término de difracción se aplica a los problemas relacionados con el efecto resultante producido por una porción limitada de un

[†1] La idealización de la óptica geométrica viene siendo un límite conceptual cuando $\lambda_o \longrightarrow 0$ teniendo así propagación rectilínea en medios homogeneos para que los efectos de difracción sean poco significativos o "casi nulos".

frente de onda. Puesto que en la mayor parte de los problemas de difracción se encuentra algo de luz dentro de regiones correspondientes a la sombra geométrica, la difracción se define a veces como la flexión de la luz alrededor de un obstáculo, (figs.3 y 4).

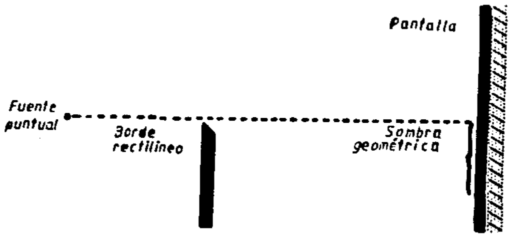


Fig. 2. Sombra geométrica de un borde rectilíneo[10].

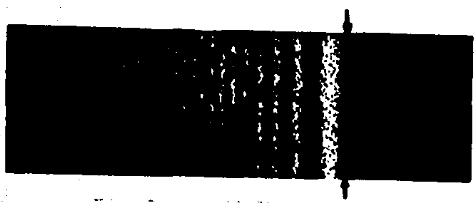


Fig. 3. Sombra de un borde rectilíneo[10].

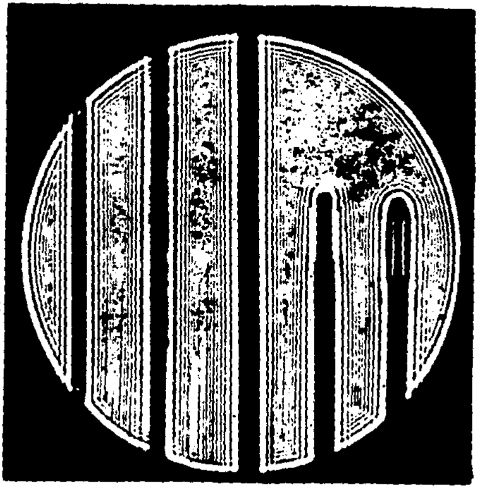


Fig. 4. Sombras de agujas de varios tamaños[10].

La difracción es considerada como una desviación de la óptica geométrica y tradicionalmente involucra aberturas u obstáculos, cuyas dimensiones son grandes comparadas con la longitud de onda. Un argumento basado en las transformadas de Fourier demuestra que los ángulos de deflexión de las ondas estan confinadas a la región $\theta \leq \lambda/d$; donde λ es la longitud de onda y d es la dimensión lineal de la abertura u obstáculo. Varias aproximaciones se discuten en trabajos[14] para $\lambda/d \ll 1$, y fallan en su totalidad para $\lambda \sim d$ o para $\lambda > d$.

Como una aproximación inicial para abordar el problema del fenómeno de difracción se considera el principio de Huygens, de acuerdo con éste, cada punto del frente de ondas se puede visualizar como una fuente de ondas secundarias que se propagan en todas direcciones. La forma del frente de ondas en un instante posterior se encuentra construyendo la envolvente de las ondas secundarias, el inconveniente fué en que no se le dió relevancia física a las ondas secundarias y sí a la envolvente de estas. Posteriormente, al interpretarse de un modo más completo la teoría ondulatoria, se comprobó que el principio de Huygens no puede explicar el proceso de difracción, debido a que ignora la mayoría de las ondas secundarias y la superposición de éstas. La dificultad fué resarcida por Fresnel mediante la adición del concepto de interferencia; describiendo la superposición de las ondas con más detalle tanto matemático como físico; pero presenta algunas desventajas además del hecho de que es bastante hipotético[16].

$$\tilde{E}(r) = \frac{i}{\lambda} \int\int_{\Sigma_0} \tilde{E}_{inc}(r') \frac{e^{-ik|r-r'|}}{|r - r'|} \, d\sigma \longrightarrow (I.3)$$

La ecuación (I.3) forma la base para la teoría de difracción de

Fresnel[16]; el coeficiente i/λ representa una pequeña dependencia del factor de inclinación $Q(\theta,\theta')$ el cual varía de una manera muy lenta como se representa en la fig.5, siendo θ el ángulo entre la dirección de la luz incidente y la normal, el término θ' es el ángulo entre la normal y la linea de $P'(r')$ al punto de observación $P(r)$.

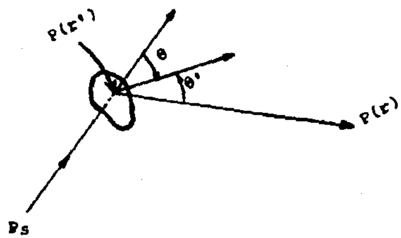


Fig.5. Representación de los ángulos θ y θ' que intervienen en el factor de inclinación.

El factor de inclinación viene dado por la expresión:
$Q = \frac{1}{2}(\cos\theta + \cos\theta')$ el cual debe de ser tomado en cuenta en el fenómeno de difracción[16], por lo tanto es considerado en la integral (1.3), como una función que varía muy lentamente con los ángulos θ y θ'. Q es unitario en la misma dirección y va decayendo suavemente quedando la ecuación (1.4)[16].

$$\tilde{E}(r) = \frac{i}{\lambda}\int\int_{\Sigma_o} \tilde{E}_{inc}(r') \frac{e^{-ik|r-r'|}}{|r - r'|} \frac{(\cos\theta + \cos\theta')}{2}\, d\sigma' \longrightarrow (1.4)$$

La ecuación anterior representa la integral de Fresnel - Kirchhoff de la teoría escalar de la difracción, más que una ecuación básica es una aproximación de la siguiente ecuación (I.5) conocida como el Teorema de Helmholtz - Kirchhoff.

$$\tilde{E}(r) = \frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma} \left[\frac{e^{-ik|r-r'|}}{|r-r'|} \frac{\partial \tilde{E}(r')}{\partial n} - \tilde{E}(r')\frac{\partial}{\partial n}\frac{e^{-ik|r-r'|}}{|r-r'|} \right] d\sigma' \longrightarrow (I.5)$$

La ecuación I.5 se obtiene de la solución de la ecuación diferencial parcial de onda

$$\nabla^2 E = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \longrightarrow (I.6)$$

Suponiendo que un análisis de Fourier puede separa las frecuencias constitutivas de tal manera que solamente necesitamos manejar una de tales frecuencias a la vez, considerando que se toma una onda en la cual no se especifica su naturaleza espacial; se puede escribir:

$$E(r, t) = \mathrm{Re}\, \tilde{E}(r)\, e^{2\pi i \nu t} \longrightarrow (I.7)$$

sustituyendo en la ecuación (I.6) se obtiene

$$\nabla^2 \tilde{E} + k^2\tilde{E} = 0 \longrightarrow (I.8)$$

la expresión (I.8) se conoce como la ecuación de Helmholtz y resolviendo, con la ayuda del Teorema de Green y aplicando el Teorema de Gauss se encuentra la ecuación de Helmholtz - Kirchhoff la cual presenta el campo eléctrico en un punto r en términos de E(r') y su derivada normal $\partial E(r')/\partial n$ evaluada sobre una superficie cerrada Σ bajo ciertas condiciones[13].

Es necesario mencionar que el desarrollo anterior (ec.1.5) fué presentado por Gustav Kirchhoff en su teoría escalar de la difracción; aunque Kirchhoff era contemporáneo de Maxwell hizo sus estudios antes de la demostración de Hertz acerca de la propagación de las ondas electromagnéticas en 1887. Fue así como Kirchhoff empleó la antigua teoría elástico - sólida de la luz, éste análisis dió credibilidad a la superposición de Fresnel dando como resultado una formulación más precisa del principio de Huygens como una consecuencia exacta de la ecuación de onda.

Considerando también que la teoría de Kirchhoff es en sí una aproximación, válida para longitudes de onda suficientemente pequeñas; esto es, cuando las aberturas difractoras tienen dimensiones que son grandes en comparación con λ. Sin embargo, la teoría de Kirchhoff funciona muy bien aunque maneja solamente ondas escalares y es insensible al hecho de que la luz es un campo vectorial transversal; a pesar de su inconsistencia matemática y de su deficiencia física dicha teoría trabaja notoriamente bien en el dominio óptico. Un tratamiento formal del teorema integral de Kirchhoff véase la referencia 14 en donde se deriva la integral básica del mismo, su aproximación operativa, se comenta la dificultad matemática y se describen las modificaciones de Raleigh y Sommerfeld que remueven las inconsistencias matemáticas.

DIFRACCION POR UNA RENDIJA ESTRECHA Y LARGA

Para plantear los dos casos de difracción que se presentan por una rendija estrecha y larga se partirá de las siguientes hipótesis: Primeramente, se supone que se tiene una fuente lineal idealizada de osciladores electrónicos los que se comportan como si fueran fuentes secundarias, las cuales cumplen con el principio de Huygens - Fresnel, representadas en la fig. 6a, la que se describe a continuación: para una rendija larga cuyo ancho y' es mucho menor que la longitud de onda, la potencia de las fuentes (osciladores electrónicos) se supone muy débil, así como su número de éstas extremadamente grande y la separación entre ellas es sumamente pequeña. Considérese un segmento muy pequeño pero finito $\Delta x'$ de tal manera que los osciladores dentro de ella tengan una diferencia de fase despreciable y sus campos se sumen constructivamente, en consecuencia se puede suponer que el conjunto se transforma en una fuente lineal continua (coherente); de todo lo anterior se puede decir que la luz que pasa a través de una rendija estrecha y larga está colimada y se propaga paralelamente a la normal del plano de la rendija fig. 6b , teniendo:

$$\tilde{E}_{inc}(r') = E_o \text{ , una constante}$$

Sea y' el ancho de la rendija tan pequeño que R es independiente de y'. Evaluando el campo en el plano que contiene la rendija y la normal a la abertura, la ecuación de Kirchhoff llega a ser:

$$\tilde{E}(r) = \frac{i}{\lambda}\,\Delta y'\,E_o \int_{-x_o}^{x_o} \frac{e^{ikR}}{R}\,dx' \longrightarrow \quad (1.9)$$

Para $R = |r - r'|$ se debe utilizar una expresión matemática apropiada de la cual surgen dos casos generales de difracción conocidos como difracción de Fraunhofer y difracción de Fresnel; cualitativamente, la difracción de Fraunhofer ocurre cuando ambas ondas incidente y difractada son planas. Este sería el caso cuando la distancia de la fuente a la abertura de difracción y la distancia de la abertura al punto donde se detecta, son lo bastante grandes como para despreciar la curvatura de las ondas incidente y difractada fig.7 .El segundo caso se presenta cuando la fuente o el punto donde se recibe la onda están cerca de la abertura de difracción, la curvatura del frente de onda es significativa, entonces se tiene difracción de Fresnel fig.8.

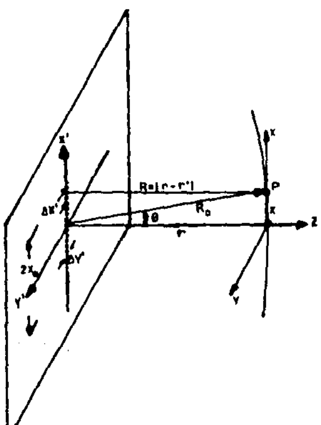


Fig. 6a. Una fuente lineal coherente

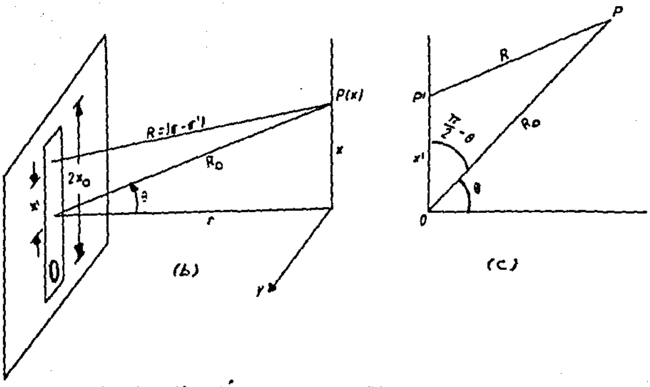


Fig. 6b. Difracción para una rendija estrecha y larga.

Fig. 6c. Aplicando la ley de los cosenos triángulos, OP'P [16] .

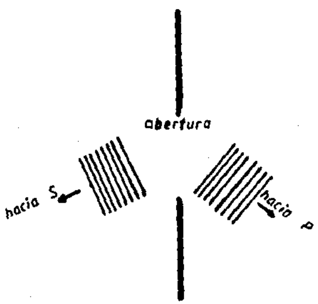


Fig. 7. Difracción para una abertura. Caso Fraunhofer.

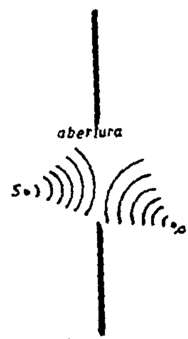


Fig. 8. Difracción para una abertura. Caso Fresnel.

En la difracción de Fraunhofer la altura de la rendija es de $2x_0$. Suponiendo que ésta es mucho más pequeña que la distancia R_0 y aplicando la ley de los cosenos para triángulos, OP'P en la fig.6c. se obtiene :

$$R^2 = R_0^2 + x'^2 - 2x'R_0 sen\theta$$

factorizando R_0^2 se tiene:

$$R^2 = R_0^2 \left[1 + \left(\frac{-2x'}{R_0} \; sen\theta \; + \; \frac{x'^2}{R_0^2} \right) \right]$$

$$\text{sea} \qquad \epsilon = \left(\frac{-2x'}{R_0} \; sen\theta \; + \; \frac{x'^2}{R_0^2} \right) \qquad \text{entonces:}$$

$$R = R_0 \sqrt{1 + \epsilon}$$

usando el teorema del binomio

$$\sqrt{1 + \epsilon} = 1 + \frac{1}{2} \epsilon - \frac{1}{8} \epsilon^2 + \ldots$$

tomando solamente los tres primeros términos y calculándolos hasta el segundo orden en x'

$$R = R_0 \left[1 - \frac{x'}{R_o} sen\theta + \frac{x'^2}{2R_0^2} - \frac{x'^2 sen^2\theta}{2R_0^2} + 0 \, (x'^3) \right]$$

El producto $kR = 2\pi R/\lambda$ aparece en la exponencial en la integral de la ecuación (1.9), se puede aproximar utilizando

$$kR_0 - kx' sen\theta << 1$$

se tiene:

$$x_0 << \sqrt{\lambda R_0}$$

solamente la linealidad en el término x' es importante. Este es el caso límite de Fraunhofer. Para $1/R$ en la ecuación (I.9) se usa simplemente $1/R_0$.

Se obtiene

$$\tilde{E}\,(r) = \frac{i}{\lambda}\,\Delta y'\,E_o\,\frac{e^{-ikR_o}}{R_o}\int_{-x_o}^{x_o} e^{ikx'\operatorname{sen}\theta}\,dx'$$

resolviendo la integral se encuentra:

$$\frac{e^{ikx_o\operatorname{sen}\theta} - e^{-ikx_o\operatorname{sen}\theta}}{ik\operatorname{sen}\theta} = \frac{2x_o\operatorname{sen}(kx_o\operatorname{sen}\theta)}{kx_o\operatorname{sen}\theta}$$

así,

$$\tilde{E}\,(r) = \frac{i}{\lambda}\,\sigma\,\tilde{E}_o\,\frac{e^{-ikR_o}}{R_o}\;\frac{\operatorname{sen}(kx_o\operatorname{sen}\theta)}{(kx_o\operatorname{sen}\theta)}$$

con $\operatorname{sen}\theta = \frac{x}{R_o}$ y $\sigma = \Delta y' 2x_o$.

El valor máximo de $|\tilde{E}|$ ocurre en la dirección en que $\theta = 0$.

Como

$$\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen}\,t}{t} = 1$$

entonces,

$$\tilde{E}_{max} = \frac{i}{\lambda}\,\sigma\,\tilde{E}_o\,\frac{e^{-ikr}}{r} \longrightarrow \quad (I.10)$$

El segundo caso se presenta cuando se toma en cuenta los términos cuadráticos, en la expansión de R, para este caso se presenta la difracción de Fresnel.

$$R = \sqrt{r^2 + (x - x')^2} \cong r + \frac{1}{2r}(x - x')^2$$

Aplicando la ecuación de Kirchhoff,

$$E(r) = \frac{i}{\lambda} \Delta y' E_o \frac{e^{-ikr}}{r} \int_{-x_o}^{x_o} e^{-(i\pi/\lambda r)(x - x')^2} dx' \longrightarrow (1.11)$$

La integral dada en la ec.(1.11) es llamada la integral de Fresnel, la cual no se discutirá en este trabajo ya que el fenómeno óptico que se presenta es puramente difracción de Fraunhofer.

REJILLA DE DIFRACCION

Una red de difracción es el conjunto repetitivo de elementos difractores de una onda, bien sean aberturas u obstáculos, el cual tiene el efecto de producir alteraciones periódicas en la fase, en la amplitud o en ambas. Una de las configuraciones más simples es la de rendijas múltiples las cuales fueron inventadas por el astrónomo David Rittenhousen alrededor de 1785. Algunos años más tarde y de una forma independiente Joseph Von Fraunhofer descubrió el principio haciendo un buen número de contribuciones importantes tanto a la teoría como a la tecnología de redes. Los primeros dispositivos de redes múltiples consistían de una rejilla de alambre muy fino o hilo enrollado y extendido entre dos tornillos paralelos que servían como espaciadores, fig.9 . Al pasar a través de tal sistema un frente de onda se encuentra con regiones opacas y transparentes alternadas ocasionando una modulación en amplitud fig. 10.; por lo tanto una configuración *múltiple de rendijas es una red de transmisión de amplitud fig.9. Otra forma más común de la red de transmisión se hace rayando o raspando hendiduras en la superficie de una placa de vidrio clara y plana fig. 11.*

Cuando se tiene una red totalmente transparente no hay modulación en la amplitud o ésta es totalmente despreciable; las variaciones regulares en el espacio óptico (diferentes longitudes de camino óptico) a través de la red dan una modulación en la fase teniendo lo que se conoce como una red de transmisión de fase fig.12 . En la representación de Huygens - Fresnel se puede visualizar las ondas secundarias como irradiadas con diferentes fases sobre la superficie de la red . Por lo tanto un frente de onda que emerge de una red de transmisión de fase contiene variaciones periódicas en su forma más que en su amplitud.

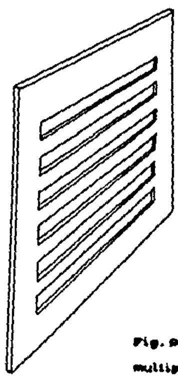


Fig.9. Geometría de rendijas múltiples.

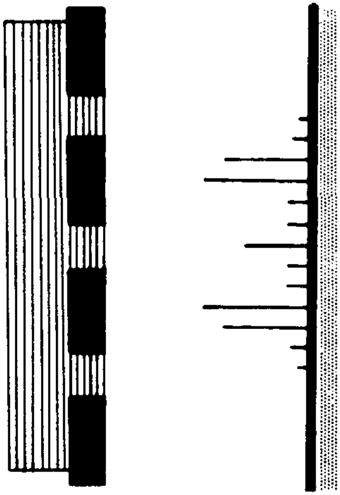


Fig. 10. representación de una red de amplitud.

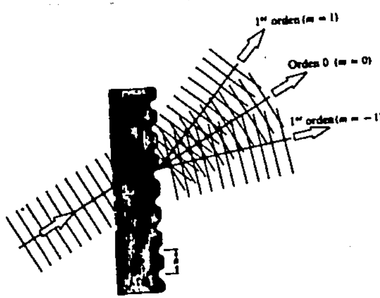


Fig. 11. Una red de transmisión[11].

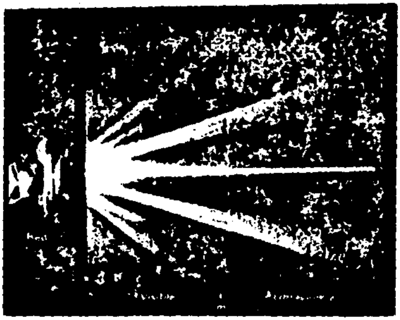


Fig. 12. Luz pasando a través de una red. La región de la izquierda es el espectro visible, el de la derecha es el ultravioleta[11].

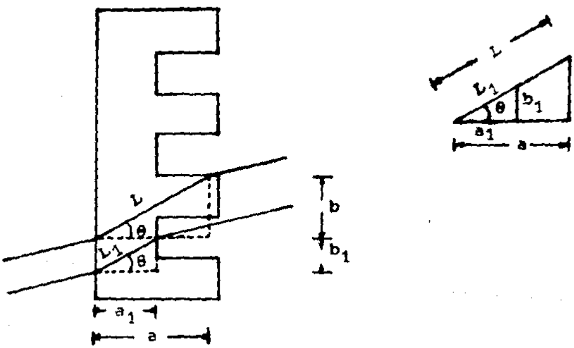


Fig. 13. Representación del medio por el que viaja la onda sonora; red de transmisión de fase.

En la fig. 13 se "representa" graficamente un líquido que al ser perturbado por ondas sonoras de alta frecuencia, éste se comporta como una red de transmisión de fase , por consiguiente la luz que emerja del líquido tendrá un defasamiento, como se demuestra en el siguiente análisis:

Por triángulos semejantes a y a_1, b y b_1 así como L y L_1 tienen lados homólogos entonces:

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{L}{L_1} = \varepsilon$$

de donde $\varepsilon \geq 1$ por construcción (ver fig. 13).

Se supone que el plano de observación está tan retirado que los rayos que se encuentran sobre él en algún punto P son practicamente paralelos; todas las ondas tienen la misma amplitud en P así que el campo resultante es:

$$A_p = A\, e^{2\pi i\nu\{t - L\mu(x)/c\}} + A\, e^{2\pi i\nu\{t - L_1\mu(x)/c\}}$$

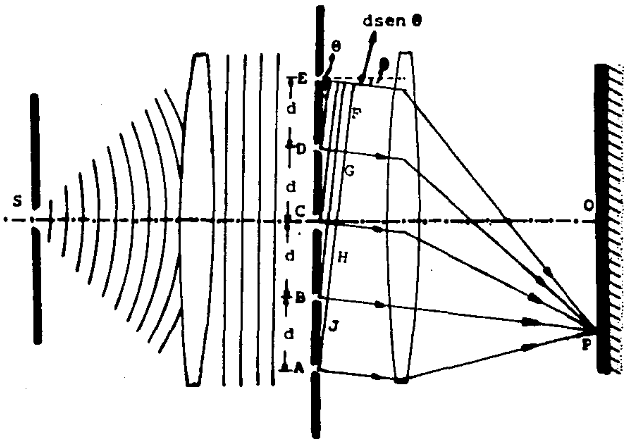
$$A_p = A\, e^{2\pi i\nu t}\, e^{-2\pi i\nu L\mu(x)/c}\, [1 + e^{2\pi i\nu\{(L - L_1)\mu(x)/c\}}]$$

$$A_p = A\, e^{2\pi i\nu t}\, e^{-2\pi i\nu L\mu(x)/c}\, [1 + e^{2\pi i\nu\{L(1 - \frac{1}{\varepsilon})\mu(x)/c\}}]$$

siendo $L(1 - \frac{1}{\varepsilon})$ la diferencia de fase debido al camino óptico recorrido por la onda incidente.

ECUACION DE LA RED PARA INCIDENCIA NORMAL

Como se describió anteriormente una red es un dispositivo óptico el cual consiste, en una de sus formas, en un gran número de rendijas estrechas muy próximas y equidistantes.



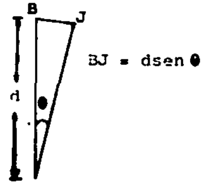


Fig. 16. Interferencia entre las ondas luminosas que pasan a través de un gran número de rendijas. Principio de la red.

La expresión $d\,sen\theta_n = n\lambda$ se conoce como la ecuación de la red para incidencia normal la cual queda establecida en la teoría de Raman - Nath. En esta sección sólo se analizará de manera sencilla la obtención de la ecuación 1.1.

En la fig. 14 una rendija S es iluminada desde la izquierda por luz monocromática. Como se tienen ondas secundarias que parten en fase de todas la rendijas de la red, se intercala entre ésta y la rendija una lente colimadora, de tal modo que la rendija se encuentre en su plano focal objeto. Los frentes de onda que salen entonces de la lente son planos perpendiculares al eje del sistema; en seguida se coloca una segunda lente y por último una pantalla o película fotográfica en su plano focal imagen. Puesto que una lente hace que los rayos paralelos converjan en este plano focal, la lente forma sobre la pantalla una imagen reducida de la figura de difracción que aparecería sobre una pantalla colocada en el infinito.

Las ondas secundarias que divergen desde las rendijas de la red parten en fase, pero recorren trayectorias distintas antes de alcanzar el punto P . Considérense aquellas fracciones de las ondas secundarias que abandonan la red en una dirección arbitraria formando un ángulo θ con el eje del sistema. Trazando la línea AF perpendicular a esa dirección; si el número de ondas es el mismo para todos los rayos desde un plano que pasa por AF hasta el punto imagen P, entonces las diferencias de fase de las ondas secundarias permanecen invariables después de atravesar este plano, y si se consideran solamente las diferencias de fase relativas en A, J, H, G y F donde los rayos procedentes de las rejillas cortan a la línea AF de la figura (1.14), se deduce que la distacia $BJ = d\,sen\theta$, $CH = 2d\,sen\theta$, etc. Si el ángulo θ tiene un valor tal que BJ es igual a una longitud de onda, CH es igual a dos longitudes de onda, etc., para este ángulo particular las diferencias de fase entre las ondas secundarias que llegan a P son 2π , 4π , etc,. de modo que todas las amplitudes se suman y la pantalla resulta brillante a lo largo de una franja que pasa por P paralela a las rejillas; esto es, P se encuentra sobre una franja brillante si:

$$sen\theta = \frac{\lambda}{d} , \frac{2\lambda}{d} , \frac{3\lambda}{d} , \ldots$$

o bien,

$$sen\theta_n = \frac{n\lambda}{d} , \text{ con } n \text{ entero;}$$

considerando $d = \lambda^*$ se tiene:

$$sen\theta_n = \frac{n\lambda}{\lambda^*}, \text{ con } n \text{ entero}$$

si se aumenta el número de rendijas los máximos del patrón de difracción se hacen mucho más brillantes y estrechos.

VISCOSIDAD EN UN FLUIDO

Los fluidos que existen en la naturaleza siempre presentan una especie de fricción o rozamiento interno, a ésta propiedad se le conoce como viscosidad. A causa de la viscosidad, es necesario ejercer una fuerza para obligar a una superficie a deslizarse sobre otra cuando hay entre ambas una capa de líquido. Tanto los líquidos como los gases presentan viscosidad siendo los primeros mucho más viscosos *que los últimos. Al estudiar el movimiento de un fluido viscoso se puede notar que el problema que presenta es muy semejante al del esfuerzo y deformación cortante unitaria de un sólido.*

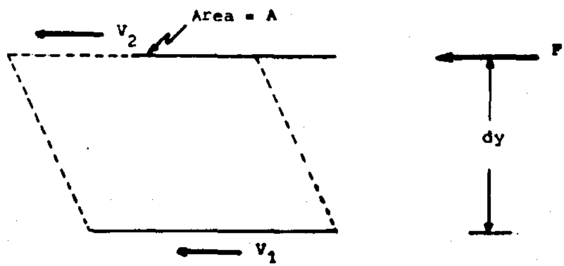


Fig. 15. Régimen laminar de un fluido viscoso.

Considérese una porción de capa líquida figura (1.15), si se le aplica un esfuerzo cortante o de deslizamiento de fluido, habrá un movimiento relativo de una capa con respecto a otra del mismo fluido. En consecuencia, la superficie inferior de este elemento se moverá con una velocidad v_1 , mientras la superior lo hará con otra velocidad v_2. El cambio o variación en la velocidad para una distancia dy entre losplanos será $(v_2 - v_1) = dv$. En un fluido, la deformación unitaria cortante aumenta sin límite mientras se aplica el esfuerzo, y se encuentra experimentalmente que éste no es proporcional a la deformación unitaria cortante sino a su derivada respecto al tiempo.

$$\frac{F}{A} = \eta \frac{dv}{dy}$$

de donde η se llama coeficiente de viscosidad, viscosidad dinámica, viscosidad absoluta o simplemente viscosidad.

Es evidente que la velocidad de un fluido viscoso que circula por una celda no debe de ser la misma en todos los puntos de una sección transversal. La capa más externa se adhiere a las paredes de la celda y su velocidad es nula, las paredes ejercen sobre esta capa un arrastre hacia atrás que, a su vez, tira también hacia atrás de la capa que sigue, y así sucesivamente. Siempre que el movimiento no sea demasiado rápido, el flujo es laminar, con una velocidad que es máxima en el centro de la celda y disminuye hasta anularse en las paredes.

Considérese una porción de la celda de longitud d, por la que circula, con régimen laminar, un fluido de viscosidad η fig. 16. Un pequeño paralelepípedo de longitud l está en equilibrio (moviéndose a velocidad constante) bajo la acción de una fuerza impulsora originada por la diferencia de presión entre sus extremos y de la fuerza retardadora, debida a la viscosidad, que actua sobre su superficie lateral. La fuerza impulsora está dada por: $(p_1 - p_2)\ l^2$ si la fuerza de viscosidad es :

$$- \eta\ A \frac{dv}{dl} = - 4\eta l d \frac{dv}{dl}$$

y si dv/dl es el gradiente de velocidad a una distancia central $l/2$ del eje, entonces:

$$(p_1 - p_2)\ l^2 = - 4\eta l d \frac{dv}{dl}$$

$$- \int_{v}^{0} dv = \frac{p_1 - p_2}{4\eta d} \int_{l}^{L} l dl$$

El signo negativo se debe a que v disminuye cuando l aumenta

$$v = \frac{P_1 - P_2}{4\eta d}\,(L^2 - l^2) \longrightarrow (I.12)$$

La expresión (I.12) es la ecuación de una parábola, la figura 17 es la gráfica que representa dicha ecuación, siendo las longitudes de las flechas proporcionales a las velocidades de sus respectivas posiciones. El gradiente de velocidad dv/dl, para una longitud cualquiera, es la pendiente de esta curva medida respecto a un eje vertical. Se dice entonces que el flujo tiene un perfil de velocidad parabólico.

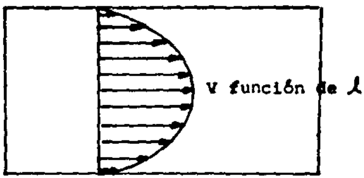


Fig. 17. Distribución de velocidades en un fluido viscoso (perfil de velocidad parabólico).

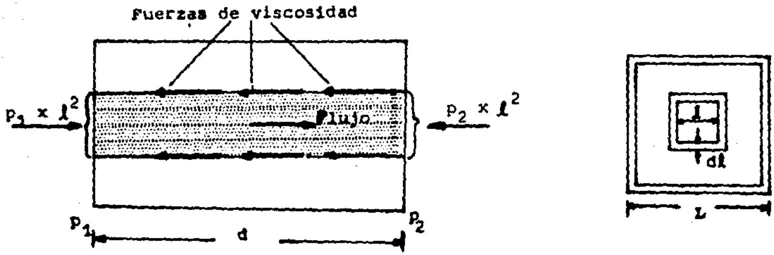


Fig.10. Fuerzas sobre un elemento de una celda rectangular de un fluido viscoso.

CAPITULO II

TEORIA DE RAMAN - NATH

Como se mensionó en el capítulo anterior los artículos de C.V. Raman y N.S. Nath[8] se han tomado como la teoría para fundamentar el fenómeno de difracción de luz por ondas sonoras de alta frecuencia.

En este capítulo se discute el primer artículo de Raman y Nath este artículo es fundamental para el estudio que se realiza en esta tesis, ya que es en él donde se desarrolla el tratamiento de ondas estacionarias y de incidencia normal, que es el único caso que se trata en este trabajo. Es conveniente enfatizar que los cuatro artículos restantes, son también importantes, pero tratan los casos de ondas dependientes del tiempo y el efecto adicional de incidencia inclinada.

En el primer artículo[8,1] ambos investigadores proponen una teoría sobre la difracción de luz por ondas sonoras de alta frecuencia considerando de una manera simple la transmisión regular de luz en el medio y los cambios de fase que la acompañan.

Raman y Nath, para explicar el fenómeno, se basaron en las investigaciones presentadas años anteriores por: Debye y Sears, Brillouin, Lucas y Biquard y R. Bär los cuales presentan, describen y atribuyen el fenómeno de difracción de luz producido por ondas ultrasónicas como sigue:

Debye y Sears hicieron experimentos, ilustrando la difracción de luz para ondas sonoras de alta frecuencia dentro de un líquido. Ambos investigadores no presentan resultados cuantitativos y es díficil comprender la teoría que proponen, ya que manejan muchos órdenes y varias intensidades (bajo diversas condiciones del experimento).

Lucas y Biquard atribuyen el fenómeno al efecto de espejismo (mirage effect) de las ondas de luz en el medio; en esta teoría la ecuación I.1 que describe una red de difracción para incidencia normal, no tiene una explicación clara.

En la teoría de Brillouin el fenómeno es atribuido a la reflexión de la luz al incidir en un medio, el cual es perturbado por ondas sonoras de alta frecuencia. Se conoce, sin embargo, del trabajo de Rayleigh, que la reflexión de la luz debido a un medio de índice de refracción variable es despreciable si la variación es gradual comparada con la logitud de onda de la luz. Lo que ocurre con un cambio de densidad de carácter senoidal; consecuencia de la exitación ultrasónica. Se puede, quisás, bajo condiciones extremas, obtener el fenómeno de Brillouin pero las componentes de reflexión deben ser débiles en intensidad comparadas a las transmitidas.

Es importante mencionar el trabajo presentado por R. Bär el cual observa que al variar la intensidad, se desvia una gran cantidad de órdenes de espectros cuando las condiciones del experimento varian. Se hace la aclaración en particular que lo observado por Bär no tiene explicación en ninguna de las teorías arriba señaladas.

En los trabajos de Raman Nath se propone una teoría sobre la difracción de luz por ondas sonoras de alta frecuencia estimando la transmisión regular de luz en el medio y los cambios de fase que la acompañan. Primeramente consideran:

a).- El rayo de luz incidente no será desviado si el medio es homogéneo e isotrópico.

b).- El medio es atravesado por ondas sonoras de alta frecuencia, haciendo que éste se comporte o presente una serie de capas paralelas estratificadas cuyo índice de refracción varíe de manera periódica.

c).- El tratamiento matemático que se presenta en este artículo[8,1] está limitado al caso de incidencia normal.

d).- La fórmula 1.1 queda establecida en la teoría de Raman - Nath.

El arreglo experimental queda representado en el esquema 1 el cual se describe como sigue:

Un haz de luz monocromática atraviesa una rendija distante y un lente colimador e incide normalmente sobre una celda de sección transversal rectangular la cual contiene un líquido; el haz de luz emerge por el lado opuesto de la celda, el líquido es perturbado por ondas sonoras de alta frecuencia generadas por un transductor piezoeléctrico colocado en el interior de la celda. Por último, en la pantalla se proyecta el espectro de difracción, el cual cambia si se varía la intensidad de las ondas sonoras en el medio o si las condiciones del experimento varían.

Con respecto al haz de luz incidente se considera que llega a la cara opuesta de la celda con variaciones en la fase en sus diferentes partes. El cambio en la fase de la luz emergente puede calcularse por medio de la longitud del camino óptico, el cual se encuentra al multiplicar la distancia entre las caras de la celda y el índice de refracción del líquido en esa región, siendo mínima la trayectoria recorrida por el haz de luz.

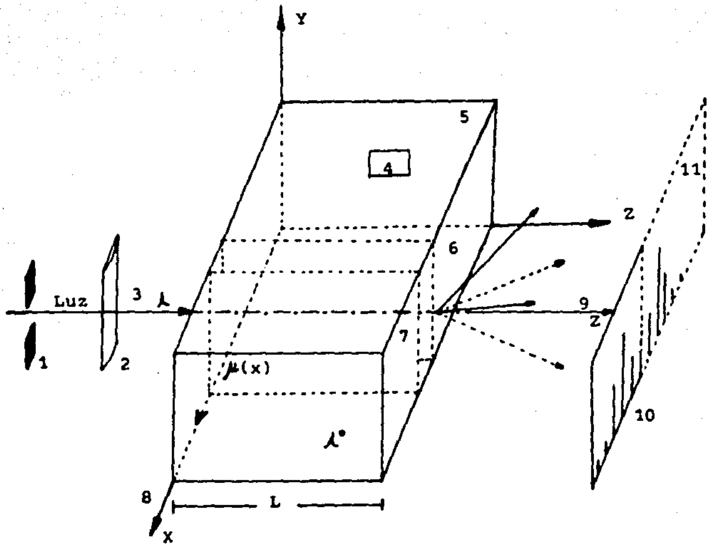


Fig.1. Arreglo del experimento.

1 Colimador.
2 Lente.
3 Haz de luz.
4 Transductor piezoeléctrico.
5 Celda rectangular.
6 Líquido.
7 Capas de índice de refracción variable.
7 Plano de ondas sonoras.
8 El eje X es perpendicular al frente de ondas sonoras, siendo X la dirección de las ondas sonoras.
9 El haz de luz se propaga en dirección del eje Z, siendo el haz de luz paralelo al plano de las ondas sonoras.
10 Pantalla.
11 Patrón de difracción.

El tratamiento matemático que se le dá al fenómeno se encuentra escrito en forma más específica en el apéndice A. Partiendo de las siguientes consideraciones:

El origen de los ejes de referencia se escoje en el centro del has incidente proyectado sobre la cara por donde sale el has. El eje X es perpendicular a la dirección del frente (plano) de las ondas sonoras, siendo paralelo a la propagación de las ondas sonoras. El eje Z se encuentra a lo largo de la dirección del has incidente de luz y se encuentra contenido en el plano de las ondas sonoras.

Se representa por μ_o el cual es el índice de refracción de todo el medio en su estado estable y por $\mu(x)$ el índice de refracción del medio a una altura x del origen; por λ^* y λ quedan representadas las longitudes de onda del sonido en el medio y la del has de luz incidente respectivamente.

La onda incidente se representa por la siguiente expresión: $Ae^{2\pi i\nu t}$, para la onda transmitida se toma en cuenta el cambio en la fase, el cual se calcula, como ya se dijo anteriormente, multiplicando la longitud del camino óptico por el índice de refracción en el medio:

$$\Delta\phi = \Delta\mu(x) = L\mu(x)$$

entonces la onda transmitida se puede expresar como:
$Ae^{2\pi i\nu(t-L\mu(x)/c)}$ siendo el argumento de la función $t - L\mu(x)/c$ la nueva fase o la diferencia de fase.

Despreciando la variación en el tiempo, Raman y Nath proponen una expresión matemática que describe las variaciones periódicas del índice de refracción. Si el radio de curvatura del frente de onda estratificado es grande comparado con la distancia entre las dos caras de la celda se puede escribir:

$$\mu(x) = \mu_o - \mu \operatorname{sen}\left[\frac{2\pi x}{\lambda^*} \right]$$

La amplitud de onda en un punto en una pantalla distante y surgiendo a partir del origen de un coseno director l en la dirección X, depende de la evaluación de la integral de difracción:

$$\int_{-p/2}^{p/2} e^{2\pi i(lx + \mu L \operatorname{sen}(2\pi x/\lambda^*))/\lambda} \, dx \longrightarrow (II.1)$$

en donde p es la longitud del rayo a lo largo del eje X. La parte real y la parte imaginaria estan dadas por la siguiente integral:

$$\int_{-p/2}^{p/2} \left[\cos(ulx) \cos(v \operatorname{sen} bx) - \operatorname{sen}(ulx) \operatorname{sen}(v \operatorname{sen} bx) \right] dx \; +$$

$$i \int_{-p/2}^{p/2} \left[\cos(ulx) \operatorname{sen}(v \operatorname{sen} bx) + \operatorname{sen}(ulx) \cos(v \operatorname{sen} bx) \right] dx$$

en donde: $u = 2\pi/\lambda$, $b = 2\pi/\lambda^*$ y $v = u\mu L = 2\pi\mu L/\lambda$

Resolviendo las integrales para la parte real se obtiene:

$$p \sum_{r=0}^{\infty} J_{2r}(v) \left[\frac{\operatorname{sen}(ul - 2rb)p/2}{(ul - 2rb)p/2} + \frac{\operatorname{sen}(ul + 2rb)p/2}{(ul + 2rb)p/2} \right] +$$

$$p \sum_{r=0}^{\infty} J_{2r+1}(v) \left[\frac{\operatorname{sen}[ul + (2r+1)b]p/2}{[ul + (2r+1)b]p/2} - \frac{\operatorname{sen}[ul - (2r+1)b]p/2}{[ul - (2r+1)b]p/2} \right]$$

$$\longrightarrow (II.2)$$

la integral de difracción de la parte imaginaria es cero (apéndice A).

Cada término individual de la expresión (II.2) presenta un máximo relativo (ya que el otro máximo es pequeño comparado con el mas alto) cuando el denominador tiende a cero. También se puede notar que cuando alguno de los términos es máximo, los demas términos tienen valores detectables; el numerador de cada uno no puede exceder de la unidad y el denominador de un grupo de integrales no desaparece. Así el máximo de la magnitud de (II.2) corresponde al máximo de las magnitudes del término individual.

Por lo tanto el máximo ocurre cuando:

$$ul \pm nb = 0 \quad \text{para} \quad n \text{ (entero)} \geq 0 \longrightarrow \text{(II.3)}$$

La ecuación (II.3) da la dirección para la cual la amplitud de la magnitud es máxima, correspondiendo esta también al máximo de la intesidad. Si θ denota el ángulo entre la dirección en el plano XZ y la dirección de la luz incidente, la ecuación (II.3) se escribe como:

$$\operatorname{sen}\theta = \pm \frac{n\lambda}{\lambda^{*}} \longrightarrow \text{(I.1)}$$

La magnitud de varias componentes en la dirección dada por (I.1) se calcula si se conoce $J_n(v)$ de donde $v = 2\pi\mu L/\lambda$ Así la intensidad relativa de la m-ésima componente a la n-ésima componente esta dada por:

$$\frac{J_m^2(v)}{J_n^2(v)} \quad \text{con} \quad v=2\pi\mu L/\lambda \longrightarrow \text{(I.2)}$$

En el estado estable (sin perturbar) no hay variación del índice de refracción, esto es; $\mu = 0$ para este caso todas las componentes desaparecen excepto la componente cero, entonces: $J_m(0) = 0$ para toda $m = 0$ y $J_o(0) = 1$.

Se tiene que los resultados calculados dependen fuertemente de los valores que toma v .

Raman y Nath presentan los cálculos para varias intensidades relativas de diversas componentes para valores de v entre 0 y 8, figura 2.

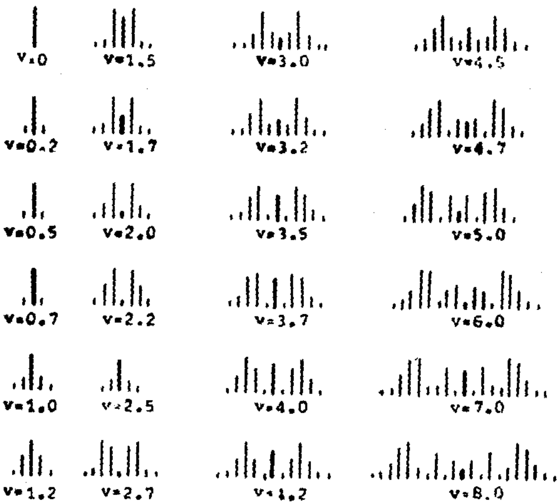


Fig. 2. Intensidades relativas de algunas componentes del espectro de difracción. Las líneas gruesas representa la componente central.

La figura 2 muestra que el número de componentes observados se incrementan cuando v aumenta. Para $v = 0$, se tiene solamente la componente central; si se comiensa a incrementar partiendo desde $v=0$, el primer orden empiesa a aparecer; si v se incrementa aún más, la intensidad de la componente central decrece firmemente y el primer orden aumenta notablemente hasta que ésta llega a ser máxima. Justo cuando el orden cero tiende a desaparecer el segundo orden surgirá; conforme v sigue aumentando, el orden cero resurge y vuelve a intensificarse, el primer orden decáe en intensidad y van sobresaliendo los segundos órdenes, mientras comiensan a surgir los terceros ordenes y así sucesivamente. Lo cual puede observarse para los espectros de difracción en los que v es igual a .5, 1.7 y 2.5 .

Lo descrito anteriormente sobre las componentes observadas al ir incrementando v concuerda de una manera satisfactoria con los resultados experimentales obtenidos por Bär. El cual obtuvo dos patrones del fenómeno usando lus con una longitud de onda de 4750°A y 3650°A ; con la primera obtuvo 7 componentes y con la segunda 11 componentes este último espectro tiene una gran semejansa con el obtenido por Raman - Nath para $v = 4.8$.

Raman y Nath hacen mención de la dependencia del efecto sobre el valor de la magnitud L, esto es; un incremento en L corresponde a un incremento en v produciendo efectos semejantes como cuando se aumenta la intensidad ultrasónica, ocasionando un aumento en el índice de refracción o en último de los casos cuando decrece la longitud de onda de la lus. Pero las bases de la teoría propuesta por Raman - Nath para el fenómeno no cubren un gran cambio en L .

Aun así la teoría tiene la grandísima ventaja de que explica los resultados experimentales.

CAPITULO III

TRATAMIENTO CON PERFIL PARABOLICO DEL FRENTE DE ONDA

Como se describió anteriormente C. V. Raman y N. S. Nagendra Nath explican teoricamente el fenómeno de la difracción de la luz por ondas sonoras de alta frecuencia, los resultados obtenidos por ambos concuerdan satisfactoriamente con los reportados por R. Bär.

En este capítulo se partirá del estudio hecho por Raman y Nath[3,4], en base a las hipótesis propuestas en su primer artículo; a las cuales se anexará la siguiente proposición: El medio en donde se propaga la onda ultrasónica es un líquido viscoso; en consecuencia, el frente de onda no es plano debido al gradiente de velocidades que resulta por la presencia de la viscosidad.

De la hipótesis anterior y de acuerdo a lo discutido en el capítulo I de este trabajo, el perfil del frente de onda es ahora un perfil parabólico. Anexando la consideración de que la celda de prueba no tiene tapa y las paredes laterales de ésta se encuentran lo suficientemente alejadas; el efecto de curvatura se deberá principalmente al arrastre inducido por el fondo.

La forma del perfil propuesto con estas restricciones deben ser semejantes al que se presenta en la figura 1.

Para explicar como se forma el frente de onda parabólico, supóngase que el transductor piezoeléctrico al perturbar el medio, aplica un esfuerzo cortante o de deslizamiento en el fluido, provocando un movimiento relativo de una capa con respecto a otra del fluido como consecuencia del arrastre entre capas por la presencia del fondo, lo que produce que las velocidades sean diferentes, como se *denota en la figura 2. Se considera también que el movimiento en el medio no es demasiado rápido, para tener así un flujo laminar.*

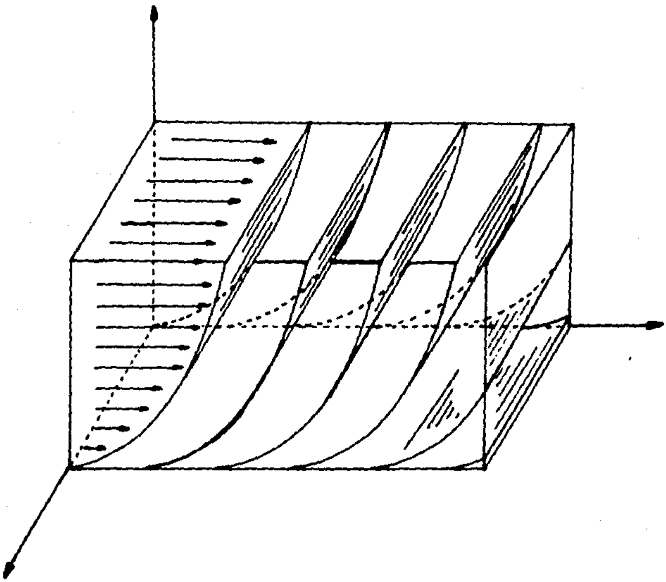


Fig. 2. Perfil del frente de onda propuesto (perfil parabólico).

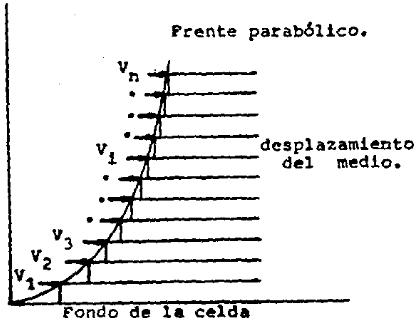


Fig. 2. Arrastre entre capas en un flujo laminar.

Como el rayo de luz monocromática emerge de una rendija distante y de una lente colimadora, el punto objeto del eje cuya imagen se forma en el infinito ocasiona que ambas ondas tanto la incidente (sobre la celda que contiene el líquido) y la difractada tengan sus radios de curvatura muy grandes comparados con la distancia entre las paredes de la celda; por lo tanto, se considera que ambas ondas son planas, por consiguiente se tiene difracción de Fraunhofer.

El medio es perturbado por un transductor piezoeléctrico el cual genera ondas de alta frecuencia, causando que las moléculas del medio se compriman más en ciertas regiones (planas) y en otras se dilaten de una forma ordenada, tal y como se muestra en la figura 3. Esto hace que el medio presente una serie de capas paralelas estratificadas de índice de refracción variable, como lo indicaron Raman y Nath.

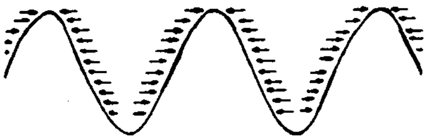


Fig. 3. Representación gráfica para comprender la compresión y dilatación de las moléculas del medio.

Al incidir la onda luminosa sobre el medio perturbado, éste se comporta como una rejilla de fase la cual estará regida por la fórmula I.1.

El arreglo experimental es semejante al propuesto por Raman y Nath el cual se describió en el capítulo II (figura 2) .

El sistema de coordenadas se representa en la figura 4, la cual se describe a continuación: La onda ultrasónica se propaga en la dirección X , el haz luminoso se propaga en la dirección Z y los vectores de propagación $\vec{u}$ *y* $\vec{b}$ *son perpendiculares.*

Se considera un frente de onda parabólico cuyo vértice está en el origen v(0,0), las coordenadas del foco son f(0,a). La ecuación de la parábola está dada por $x = (4ay)^{1/2}$ *(ver apéndice B), como se muestra en la figura 5.*

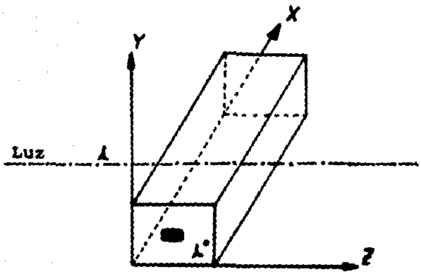


Fig. 4. Sistema de coordenadas.

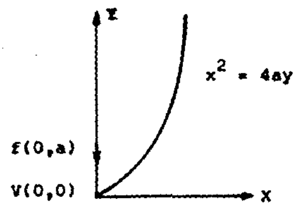


Fig. 5. Parábola con vértice en el origen de un sistema de coordenadas y cuyo foco está sobre la parte positiva del eje y .

Despreciando las variaciones en el tiempo, la ecuación para el índice de refracción en este caso puede escribirse como:

$$\mu(x,y) = \mu_o - 2\mu_1(ay)^{1/2}\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi x}{\lambda^*}\right)$$

de donde μ_o es el índice de refracción para el estado estable, μ es la máxima variación del índice de refracción, λ es la longitud de onda de la luz incidente, λ^* es la longitud de onda del sonido en el medio, a es la distancia focal, L es la distancia entre las paredes de la celda y $(4ay)^{1/2}$ representa a un frente de onda .

Tanto la onda incidente como la onda transmitida se representa igual que en el cap. II, tomando en cuenta las mismas consideraciones expuestas ahí y agregando la formación del frente parabólico en el eje Y, el cambio de fase se expresa como:

$$\Delta\phi = \Delta\mu(x,y) = L\mu(x,y)$$

y la onda transmitida por: $Ae^{2\pi i(lx - L\mu(x,y)/c)}$, de donde, lx representa nuevamente al coseno director en la dirección x .

La amplitud de la onda luminosa en un punto del plano imagen depende de la evaluación de la integral de difracción:

$$\int_0^{N}\int_{-p/2}^{p/2} e^{2\pi i(lx + 2\mu L(ay)^{1/2}\mathrm{sen}(2\pi x/\lambda^*))/\lambda}\, dx\, dy \longrightarrow \quad III.1$$

La integral (III.1) se resuelve de una forma más detallada en el apéndice B.

proponiendo:

$$u = \frac{2\pi}{\lambda} \quad ; \quad b = \frac{2\pi}{\lambda^{*}} \quad ; \quad v = \frac{2\pi\mu L}{\lambda} \quad y \quad v' = 2v(ay)^{1/2}$$

y utilizando las siguientes identidades:

$$\cos(v'\,\text{sen}\,bx) = 2 \sum_{r=0}^{\infty}{}' J_{2r}(v')\cos(2rbx)$$

$$\text{sen}(v'\,\text{sen}\,bx) = 2 \sum_{r=0}^{\infty} J_{2r+1}(v')\,\text{sen}[(2r + 1)bx]$$

la ecuación III.1 queda:

$$\int_{0}^{\infty}\int_{-p/2}^{p/2} 2 \left\{ \sum_{r=0}^{\infty}{}' J_{2r}(v')\cos(ulx)\cos(2rbx) \quad - \right.$$

$$\left. \sum_{r=0}^{\infty} J_{2r+1}(v')\,\text{sen}(ulx)\,\text{sen}[(2r + 1)bx] \right\} dx\, dy \quad +$$

$$i\int_{0}^{\infty}\int_{-p/2}^{p/2} 2 \left\{ \sum_{r=0}^{\infty} J_{2r+1}(v')\cos(ulx)\,\text{sen}[(2r + 1)bx] \quad + \right.$$

$$\left. \sum_{r=0}^{\infty}{}' J_{2r}(v')\,\text{sen}(ulx)\cos(2rbx) \right\} dx\, dy$$

$\sum_{r=0}^{\infty}{}'$ indica que el coeficiente de J_0 debe dividirse entre dos.

Los resultados de las integrales con respecto a x se presentan en el apéndice A, quedando la ecuación II.2 , la cual se sustituye en la expresión anterior :

$$p\sum_{r=0}^{\infty}{}' \left\{ \left[\frac{\text{sen}(ul - 2rb)p/2}{(ul - 2rb)p/2} + \frac{\text{sen}(ul + 2rb)p/2}{(ul + 2rb)p/2} \right] \int_{0}^{\infty} J_{2r}(v')\, dy \right\} \quad +$$

$$p\sum_{r=0}^{\infty}\left\{\left[\frac{sen[ul+(2r+1)b]p/2}{[ul+(2r+1)b]p/2}-\frac{sen[ul-(2r+1)b]p/2}{[ul-(2r+1)b]p/2}\right]\int_0^H J_{2r+1}(v')\,dy\right\}$$

$$\longrightarrow \quad III.2$$

la parte imaginaria es igual a cero (ver apéndice A).

Para resolver la integral en y se hace un cambio de variable; ya que ésta viene dada en función de v' ; proponiendo $y = \dfrac{(v')^2}{4av^2}$ entonces $dy = \dfrac{v'dv'}{2av^2}$ y los límites son: si $y = 0$ entonces $v' = 0$ y si $y = H$ entonces $v' = s = \dfrac{4\pi\mu L}{\lambda}(aH)^{1/2}$ sustituyendo en la ecuación III.2 se tiene:

$$pq\sum_{r=0}^{\infty}{}'\left\{\left[\frac{sen(ul-2rb)p/2}{(ul-2rb)p/2}+\frac{sen(ul+2rb)p/2}{(ul+2rb)p/2}\right]\int_0^s v'J_{2r}(v')\,dv'\right\} +$$

$$pq\sum_{r=0}^{\infty}\left\{\left[\frac{sen[ul+(2r+1)b]p/2}{[ul+(2r+1)b]p/2}-\frac{sen[ul-(2r+1)b]p/2}{[ul-(2r+1)b]p/2}\right]\int_0^s v'J_{2r+1}(v')\,dv'\right.$$

de donde $q = \dfrac{1}{2av^2}$ es un factor de forma.

En las funciones pares se presenta una discontinuidad para $(r=0)$, la cual se resuelve separando de esa serie éste término llegando a que:

$$2pq\,\frac{sen(ul)p/2}{(ul)p/2}\int_0^s v'J_0(v')dv' = pqs\,\frac{sen(ul)p/2}{(ul)p/2}\,J_1(s)$$

sustituyendo en la expresión anterior:

$$pqs\,\frac{sen(ul)p/2}{(ul)p/2}\,J_1(s) \quad +$$

$$pq\sum_{r=1}^{\infty}\left\{\left[\frac{sen(ul-2rb)p/2}{(ul-2rb)p/2}+\frac{sen(ul+2rb)p/2}{(ul+2rb)p/2}\right]\int_0^s v'J_{2r}(v')\,dv'\right\} +$$

$$pq\sum_{r=0}^{\infty}\left\{\left[\frac{sen[ul+(2r+1)b]p/2}{[ul+(2r+1)b]p/2}-\frac{sen[ul-(2r+1)b]p/2}{[ul-(2r+1)b]p/2}\right]\int_0^z v' J_{2r+1}(v')dv'\right\}$$

$$\longrightarrow \quad III.3$$

la ecuación III.3 se resuelve más detalladamente en el apéndice B quedando la siguiente ecuación:

$$pqz\,\frac{sen(ul)p/2}{(ul)p/2}\,J_1(z) \;+$$

$$pqz\sum_{r=1}^{\infty}\left\{\left[\frac{sen(ul-2rb)p/2}{(ul-2rb)p/2}+\frac{sen(ul+2rb)p/2}{(ul+2rb)p/2}\right]\times\right.$$

$$\left.\left[\frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2r+2k+1)\Gamma(r+k)}{\Gamma(r+k+2)}\,J_{2(r+k)+1}(z)\right]\right\} \;+$$

$$pqz\sum_{r=0}^{\infty}\left\{\left[\frac{sen[ul+(2r+1)b]p/2}{[ul+(2r+1)b]p/2}-\frac{sen[ul-(2r+1)b]p/2}{[ul-(2r+1)b]p/2}\right]\times\right.$$

$$\left.\left[\frac{\Gamma(r+\frac{3}{2})}{\Gamma(r+\frac{1}{2})}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2(r+k+1)\Gamma(r+k+\frac{1}{2})}{\Gamma(r+k+\frac{5}{2})}\,J_{2(r+k+1)}(z)\right]\right\}$$

$$\longrightarrow \quad III.4$$

Utilizando la identidad[17]:

$\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$

y substituyendo en la ecuación III.4 se tiene:

$$pqz\frac{sen(ul)p/2}{(ul)p/2}\,J_1(z) \;+$$

$$pqz\sum_{r=1}^{\infty} r\left\{\left[\frac{sen(ul-2rb)p/2}{(ul-2rb)p/2}+\frac{sen(ul+2rb)p/2}{(ul+2rb)p/2}\right]\times\right.$$

$$\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2r+2k+1}{(r+k)^2 + (r+k)} J_{2(r+k)+1}(z)\right]\Bigg\} +$$

$$pqz\sum_{r=0}^{\infty}(r+\tfrac{1}{2})\Bigg\{\left[\frac{\operatorname{sen}[ul+(2r+1)b]p/2}{[ul+(2r+1)b]p/2} - \frac{\operatorname{sen}[ul-(2r+1)b]p/2}{[ul-(2r+1)b]p/2}\right] \times$$

$$\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2(r+k+1)}{(r+k)^2 + 2(r+k) + \frac{3}{4}} J_{2(r+k+1)}(z)\right]\Bigg\} \longrightarrow \quad III.5$$

Para poder interpretar los resultados es necesario desarrollar la serie, para $r = 0, 1, 2, 3 \ldots$ y con $k = 0, 1, 2, 3 \ldots$ escribiendo a continuación los términos que la componen:

Para $r = 0$; $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

$$pqz\frac{\operatorname{sen}(ul)p/2}{(ul)p/2} J_1(z) + \frac{pqz}{2}\left[\frac{\operatorname{sen}(ul+b)p/2}{(ul+b)p/2} - \frac{\operatorname{sen}(ul-b)p/2}{(ul-b)p/2}\right] \times$$

$$\left[\frac{2(4)}{3} J_2(z) + \frac{4(4)}{15} J_4(z) + \frac{6(4)}{35} J_6(z) + \frac{8(4)}{63} J_8(z) + \ldots\right] +$$

Para $r = 1$; $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

$$pqz\left[\frac{\operatorname{sen}(ul-2b)p/2}{(ul-2b)p/2} + \frac{\operatorname{sen}(ul+2b)p/2}{(ul+2b)p/2}\right]\left[\frac{3}{2}J_3(z) + \frac{5}{6}J_5(z) +\right.$$

$$\left.\frac{7}{12} J_7(z) + \frac{9}{20} J_9(z) + \ldots\right] + \frac{3}{2}\, pqz\left[\frac{\operatorname{sen}(ul+3b)p/2}{(ul+3b)p/2} - \frac{\operatorname{sen}(ul+3b)p/2}{(ul+3b)p/2}\right.$$

$$\times \left[\frac{4(4)}{15} J_4(z) + \frac{6(4)}{35} J_6(z) + \frac{8(4)}{63} J_8(z) + \frac{10(4)}{99} J_{10}(z) + \ldots \right] +$$

Para $r = 2$; $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

$$2pqz \left[\frac{\operatorname{sen}(ul - 4b)p/2}{(ul - 4b)p/2} + \frac{\operatorname{sen}(ul + 4b)p/2}{(ul + 4b)p/2}\right]\left[\frac{5}{6} J_5(z) + \frac{7}{12} J_7(z) + \right.$$

$$\left. \frac{9}{20} J_9(z) + \frac{11}{30} J_{11}(z) + \ldots \right] + \frac{5}{2}\, pqz \left[\frac{\operatorname{sen}(ul + 5b)p/2}{(ul + 5b)p/2} - \frac{\operatorname{sen}(ul - 5b)p/2}{(ul - 5b)p/2} \right]$$

$$\times \left[\frac{6(4)}{35} J_6(z) + \frac{8(4)}{63} J_8(z) + \frac{10(4)}{99} J_{10}(z) + \frac{12(4)}{143} J_{12}(z) \ldots \right] +$$

Para $r = 3$; $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

$$3pqz \left[\frac{\operatorname{sen}(ul - 6b)p/2}{(ul - 6b)p/2} + \frac{\operatorname{sen}(ul + 6b)p/2}{(ul + 6b)p/2}\right]\left[\frac{7}{12} J_7(z) + \frac{9}{20} J_9(z) \right.$$

$$\left. + \frac{11}{30} J_{11}(z) + \frac{13}{42} J_{13}(z) \ldots \right] + \frac{7}{2}\, pqz \left[\frac{\operatorname{sen}(ul + 7b)p/2}{(ul + 7b)p/2} - \frac{\operatorname{sen}(ul - 7b)p/2}{(ul - 7b)p/2}\right]$$

$$\times \left[\frac{8(4)}{63} J_8(z) + \frac{10(4)}{99} J_{10}(z) + \frac{12(4)}{143} J_{12}(z) + \frac{14(4)}{195} J_{14}(z) \ldots \right] +$$

Finalmente a continución se presentan las gráficas de los espectros que corresponden a los valores de las funciones Bessel $J_n(u')$. Se dieron algunos valores propuestos por Raman - Nath y por Bär (cap. II), para poder comparar resultados.

Para obtener los valores de las gráficas 6, 7 y 8 *se mantienen constantes el índice de refracción del medio, la longitud del camino óptico así como la longitud de la onda de la luz; se varían las* coordenadas del frente parabólico, teniendo así los valores para $\upsilon' =$ 0.2, 0.5 y 0.7; se sigue:

gráfica 6.A y 6.B:

$\mu = 1 \times 10^{-5}$, $L = 10.0$ cm., $x = 2.0$ cm., $H = 1$ cm.,

$\lambda = 6328$ °A, $a = 1$ cm., $\upsilon' = 0.2$

gráfica 7.A y 7.B:

$\mu = 1 \times 10^{-5}$, $L = 10.0$ cm., $x = 5.0$ cm., $H = 5.6$ cm.,

$\lambda = 6328$ °A, $a = 1.1$ cm., $\upsilon' = 0.5$

gráfica 8.A y 8.B:

$\mu = 1 \times 10^{-5}$, $L = 8.0$ cm., $x = 8.8$ cm., $H = 9.9$ cm.,

$\lambda = 6328$ °A, $a = 2.0$ cm., $\upsilon' = 0.7$

En la gráfica 9 se propone un cambio en el índice de refracción y en la longitud de onda de la luz, con respecto a los valores anteriores; se tiene:

gráfica 9.A y 9.B:

$\mu = 5 \times 10^{-5}$, $L = 8.0$ cm., $x = 4.7$ cm., $H = 4.7$ cm.,

$\lambda = 4750$ °A, $a = 1.2$ cm., $\upsilon' = 2.5$

Los datos para los espectros de difracción de las gráficas 10, 11 y 12, se vuelve a tener un cambio en el índice de refracción y en la longitud de onda de la luz. El valor numérico de la coordenada en la dirección de propagación de la onda ultrasónica varía en las gráficas 10 y 11, y el valor de la altura en un punto de la parábola del frente de onda cambia en 11 y 12.

gráfica 10.A y 10.B:

$\mu = 8 \times 10^{-5}$, $L = 7.0$ cm., $x = 5.0$ cm., $H = 6.0$ cm.,

$\lambda = 3650$ °A, $a = 1.04$ cm., $\upsilon' = 4.8$

gráfica 11.A y 11.B:

$\mu = 8 \times 10^{-5}$, $L = 7.0$ cm., $x = 7.3$ cm., $H = 5.0$ cm.,

$\lambda = 3650\ ^{o}A$, $a = 1.9$ cm., $v' = 7.0$

gráfica 12.A y 12.B:

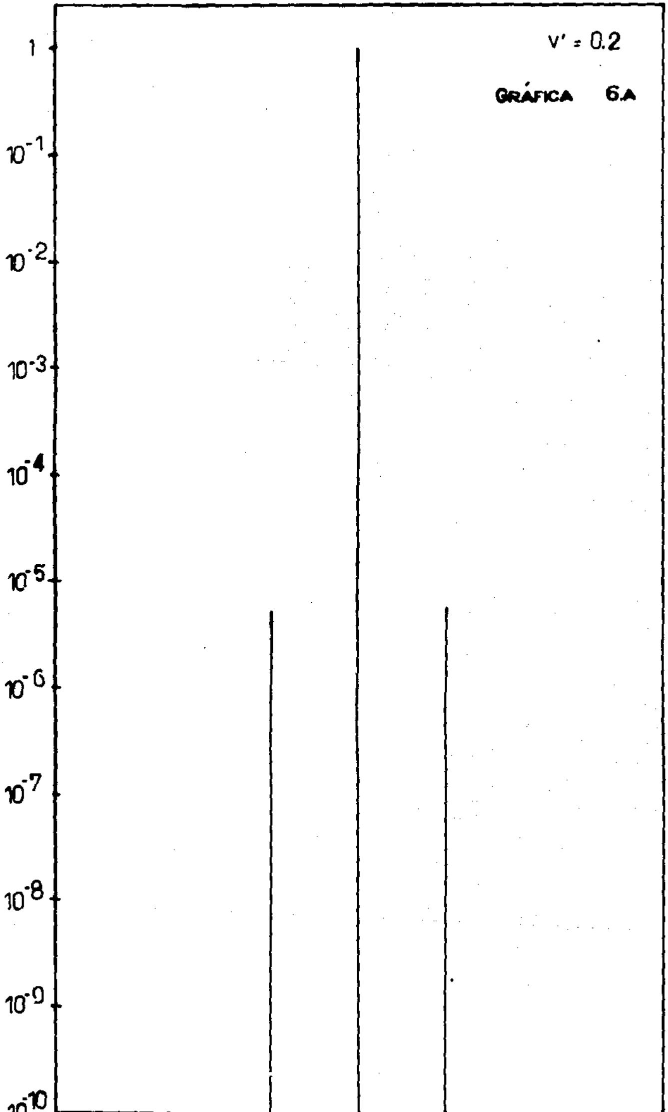
$\mu = 8 \times 10^{-5}$, $L = 8.0$ cm., $x = 7.3$ cm., $H = 6.0$ cm.,

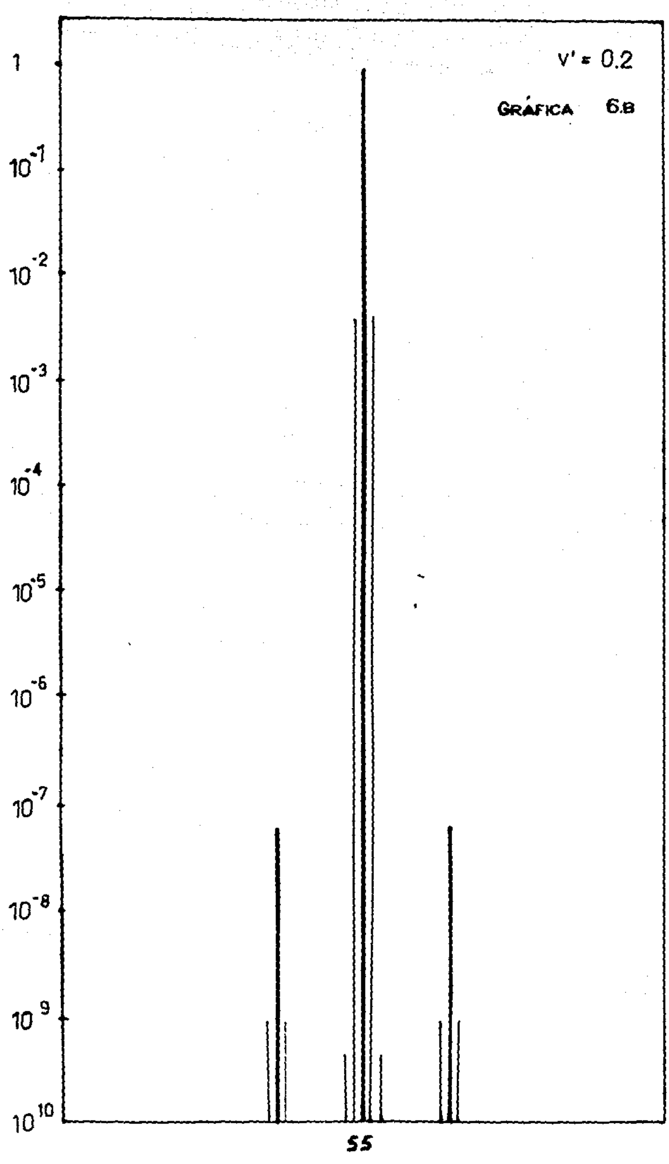
$\lambda = 3650\ ^{o}A$, $a = 2.2$ cm., $v' = 8.0$

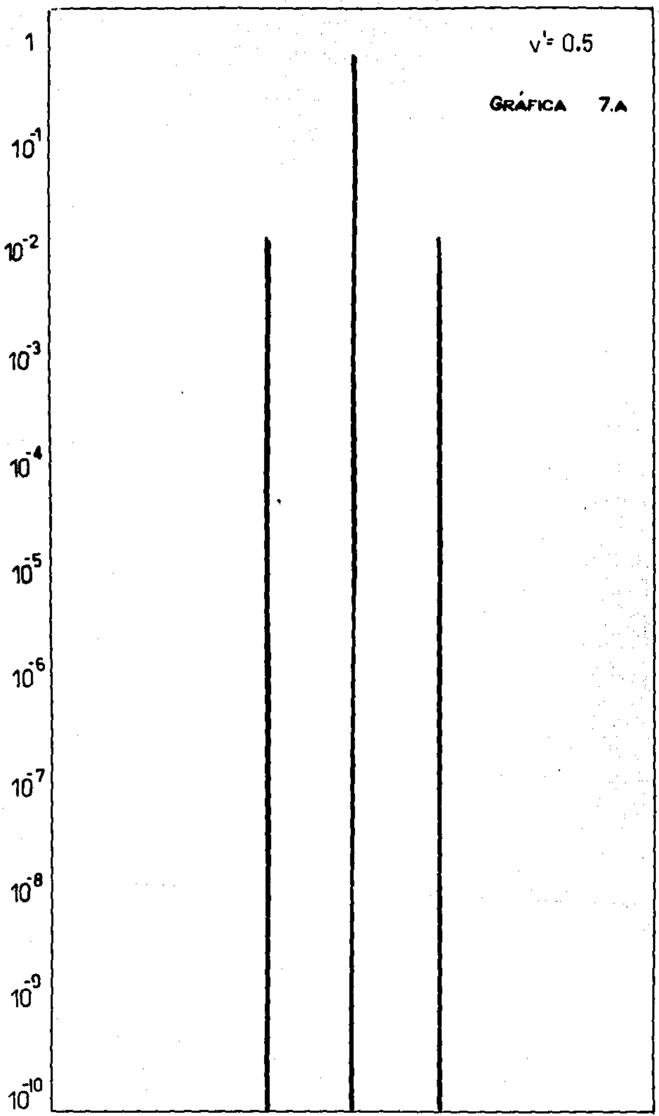
Para intensidades pequeñas $v' = 0.2$, $v' = 0.5$ y $v' = 0.7$; los patrones de difracción son semejantes con los reportados por Raman - Nath, a medida que v' se incremente los patrones ya no concuerdan, como lo muestran las gráficas A 9, 10, 11 y 12

Las gráficas A son la imagen de las sumas de las intensidades de los diferentes ordenes que componen cada línea del espectro.

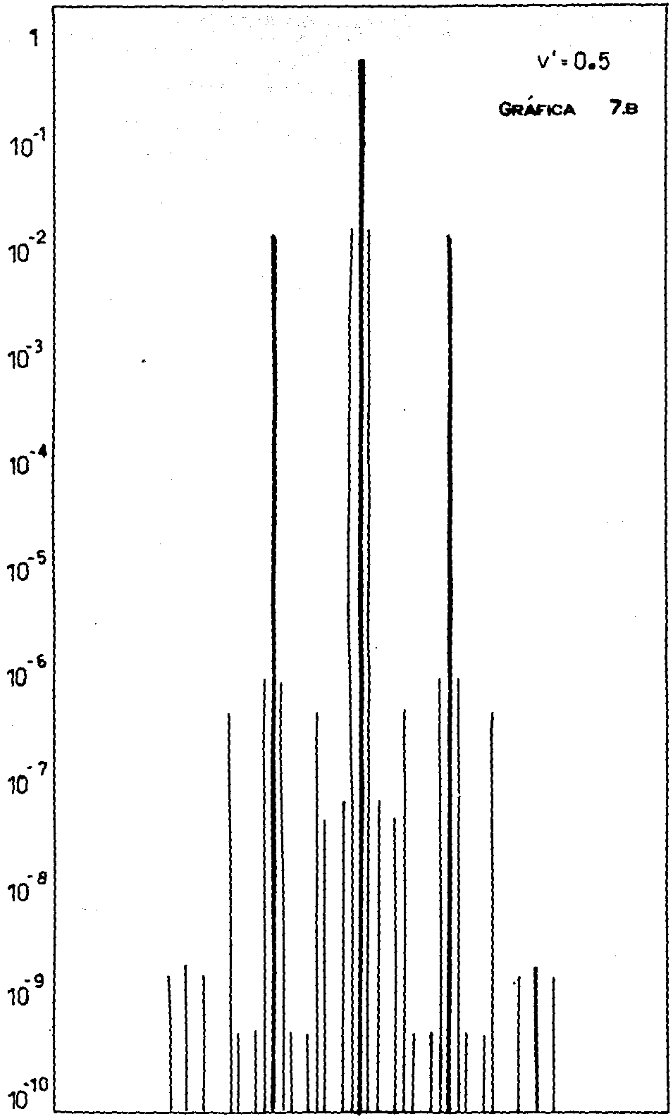
La ec III.4 presenta matemáticamente una doble suma, la cual se interpretó en cada patrón de difracción como una separación en sus diferentes órdenes; gráficas B 6,7,...,12.

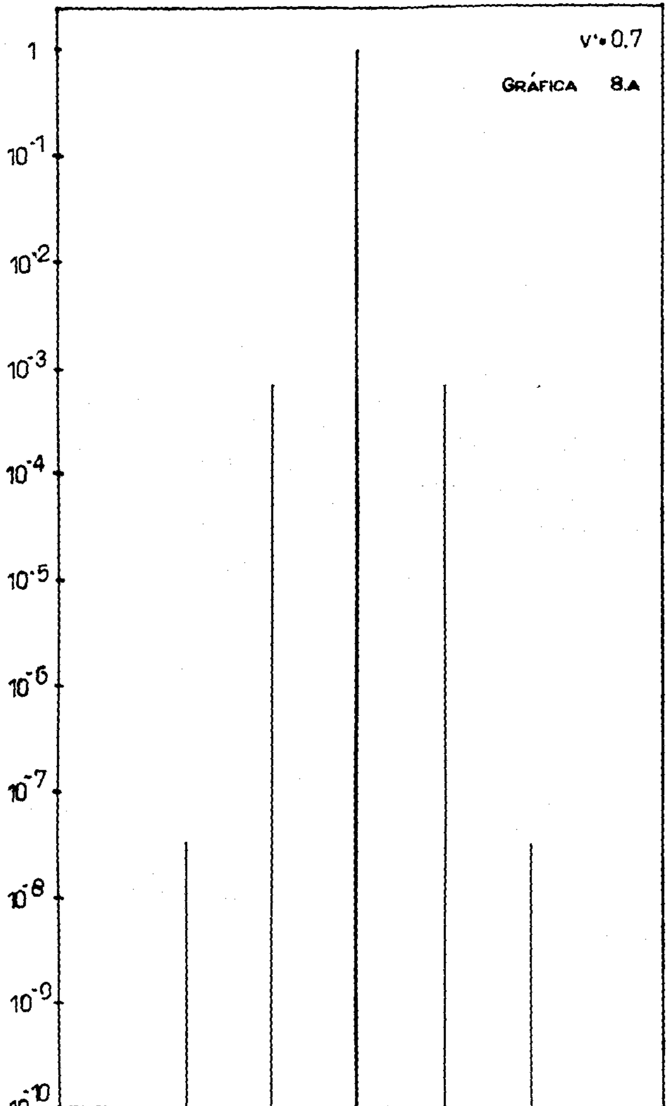

V' = 0.2
GRÁFICA 6.A
1
10-1
10-2
10-3
10-4
10-5
10-6
10-7
10-8
10-9
10-10

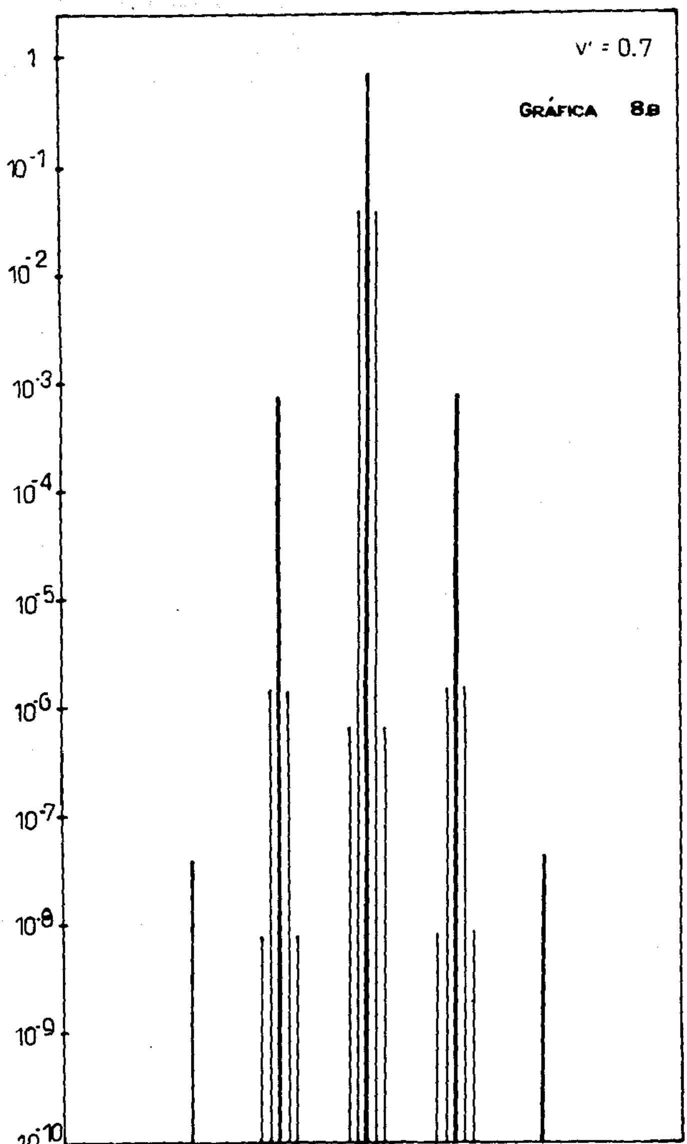

V' = 0.2
GRÁFICA 6.B
1
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
10^{-4}
10^{-5}
10^{-6}
10^{-7}
10^{-8}
10^{9}
10^{10}
55

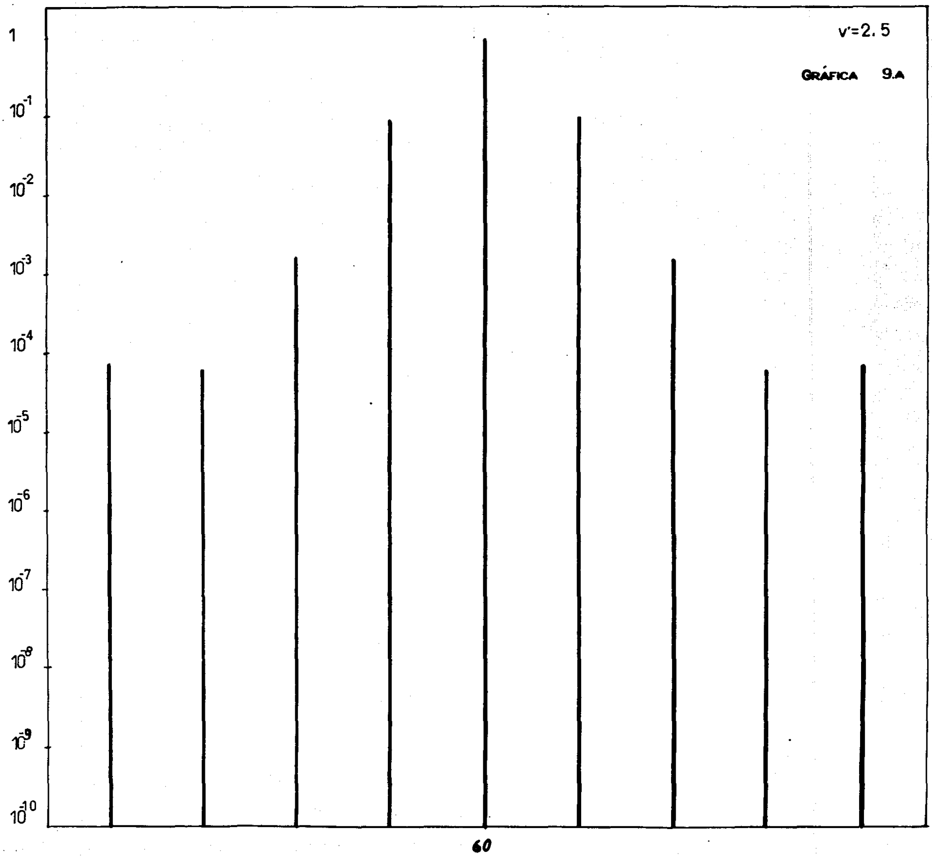


v'= 0.5
GRÁFICA 7.A
1
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
10^{-4}
10^{-5}
10^{-6}
10^{-7}
10^{-8}
10^{-9}
10^{-10}

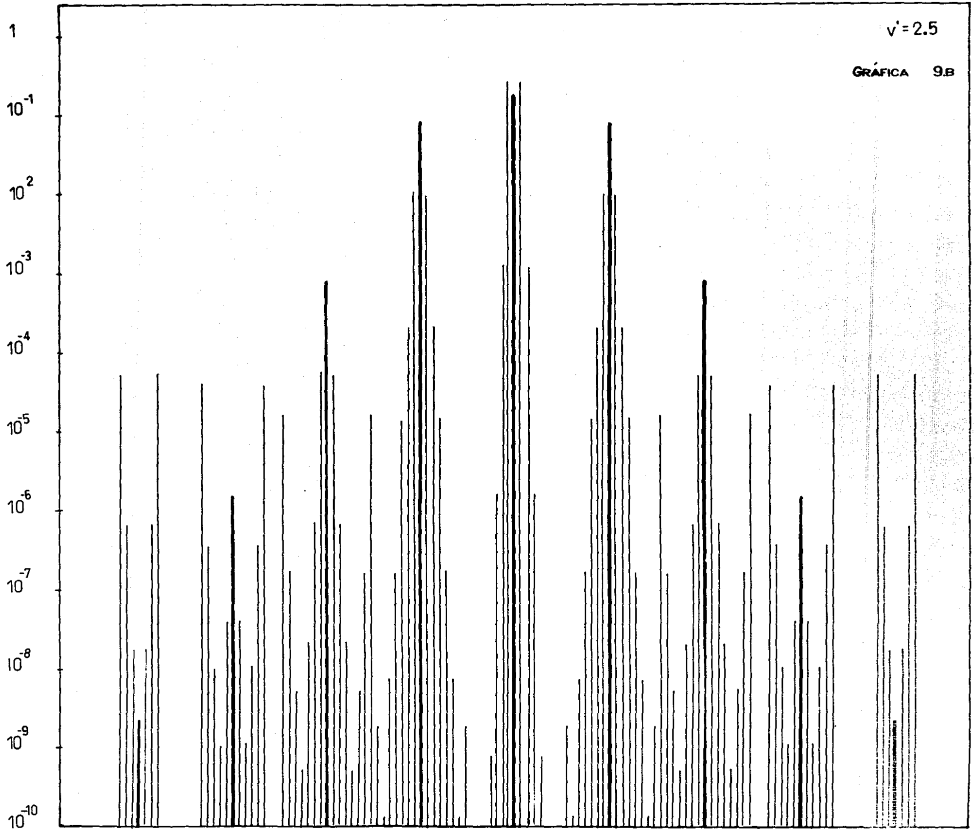

V' = 0.5
GRÁFICA 7.B
1
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
10^{-4}
10^{-5}
10^{-6}
10^{-7}
10^{-8}
10^{-9}
10^{-10}

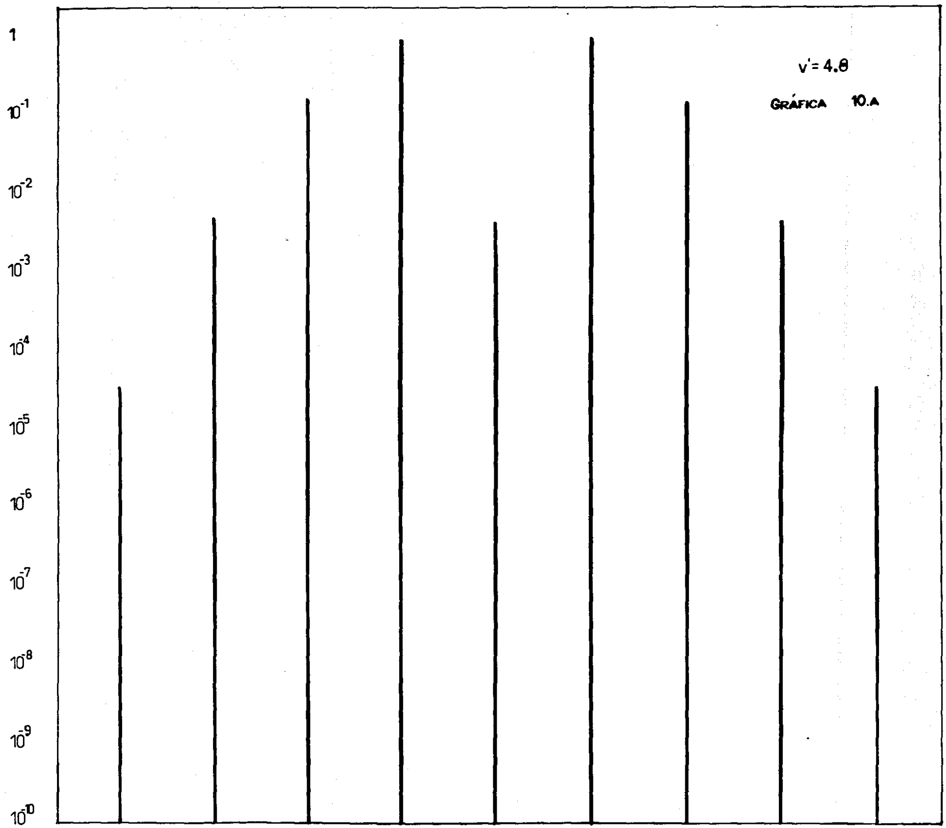

V'= 0.7
GRÁFICA 8.A
1
10-1
10-2
10-3
10-4
10-5
10-6
10-7
10-8
10-9
10-10

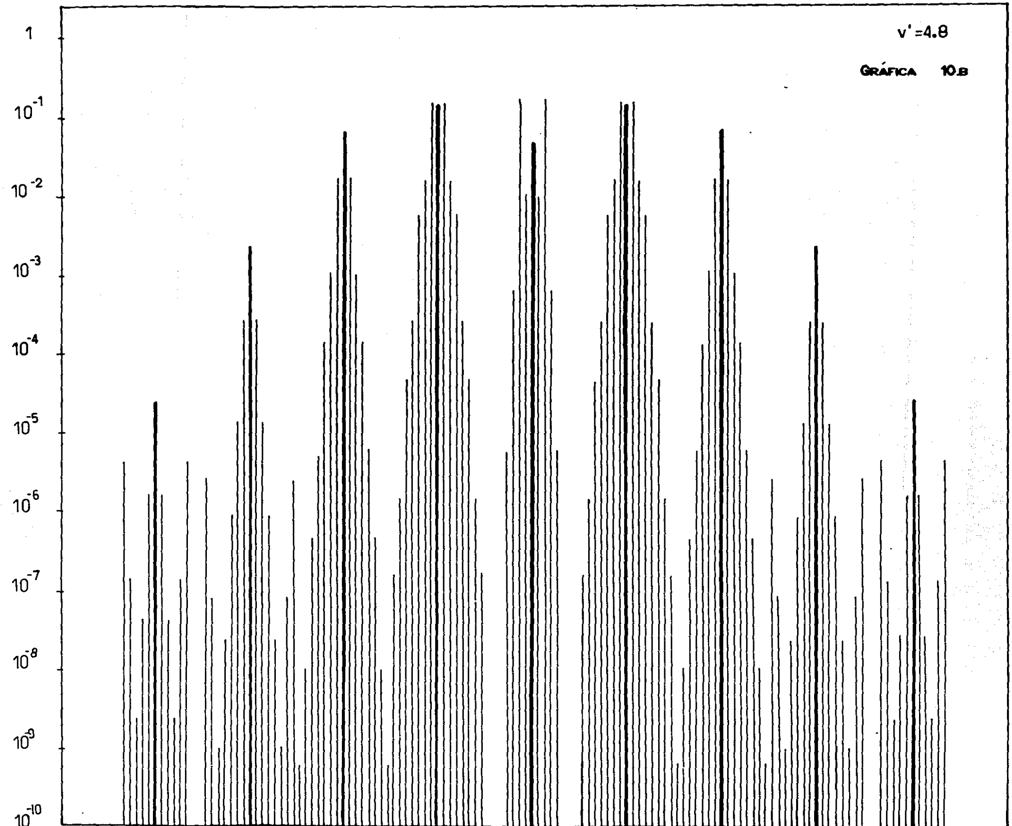

V' = 0.7
GRÁFICA 8B
1
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
10^{-4}
10^{-5}
10^{-6}
10^{-7}
10^{-8}
10^{-9}
10^{-10}

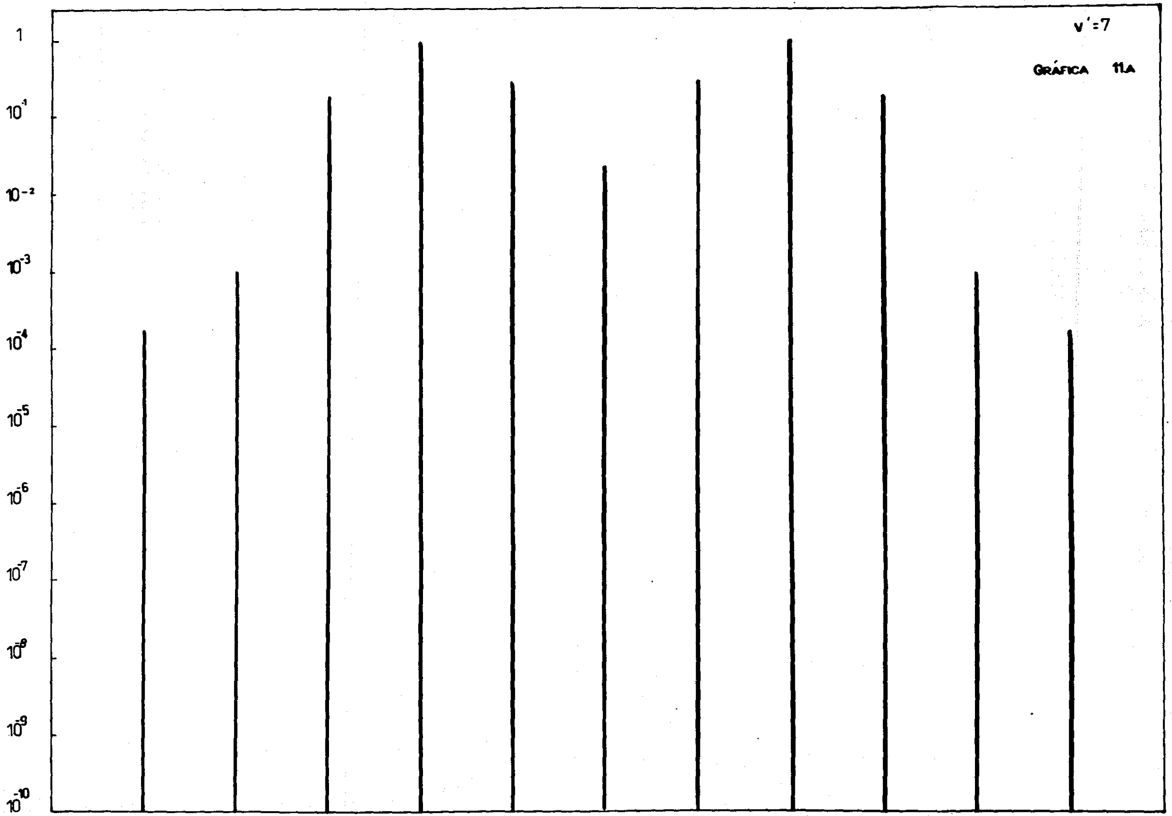


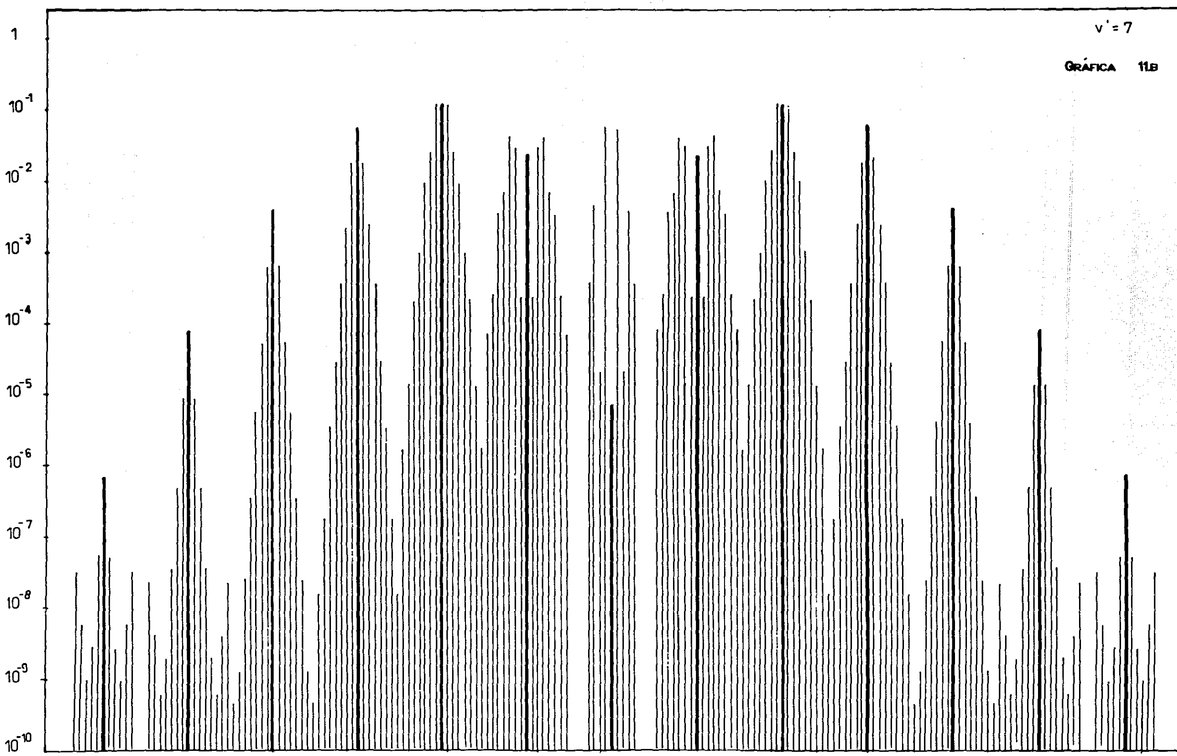
v'=2. 5
GRÁFICA 9.A
1
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
10^{-4}
10^{-5}
10^{-6}
10^{-7}
10^{-8}
10^{-9}
10^{-10}
60


v' = 2.5
GRÁFICA 9.B
1
10-1
10-2
10-3
10-4
10-5
10-6
10-7
10-8
10-9
10-10

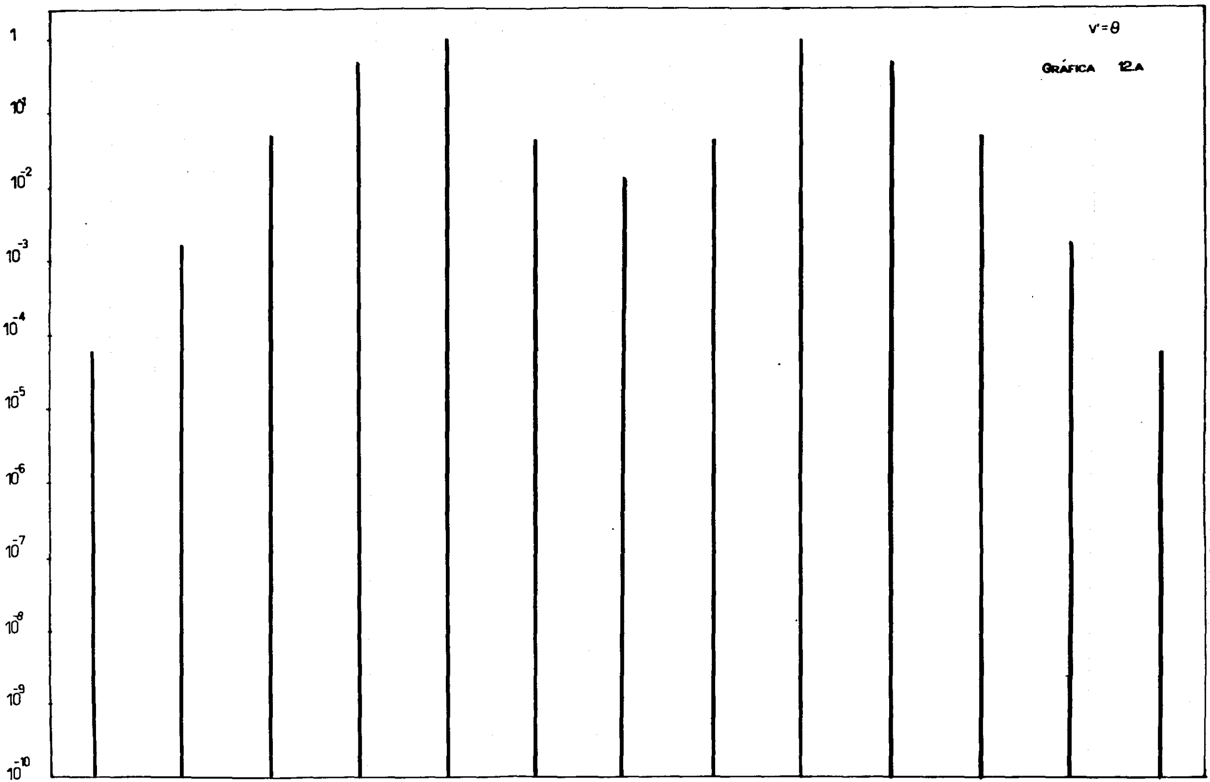

v' = 4.8
GRÁFICA 10.A
1
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
10^{-4}
10^{-5}
10^{-6}
10^{-7}
10^{-8}
10^{-9}
10^{-10}

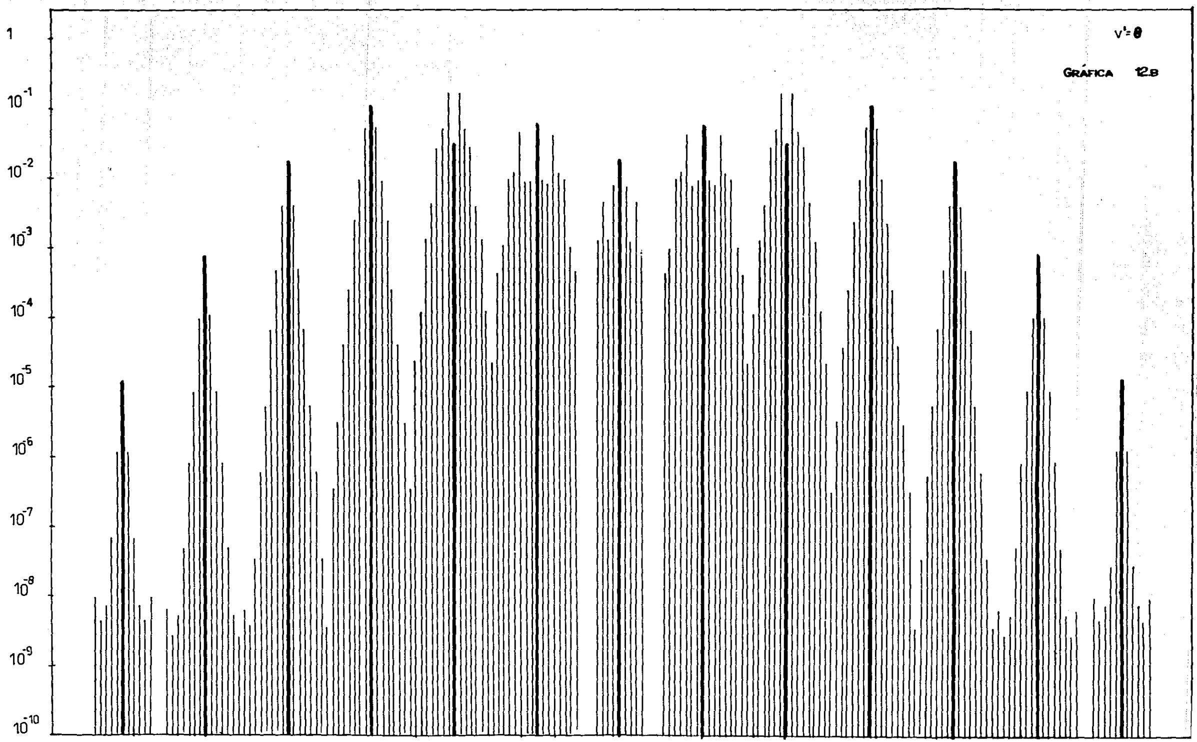

v' =4.8
GRÁFICA 10.B
1
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
10^{-4}
10^{-5}
10^{-6}
10^{-7}
10^{-8}
10^{-9}
10^{-10}


v' = 7
GRÁFICA 11.A
1
10⁻¹
10⁻²
10⁻³
10⁻⁴
10⁻⁵
10⁻⁶
10⁻⁷
10⁻⁸
10⁻⁹
10⁻¹⁰



1
10^-1
10^-2
10^-3
10^-4
10^-5
10^-6
10^-7
10^-8
10^-9
10^-10
v' = 7
GRÁFICA 11.B


V' = 8
GRÁFICA 12.A
1
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
10^{-4}
10^{-5}
10^{-6}
10^{-7}
10^{-8}
10^{-9}
10^{-10}


v'=8
GRÁFICA 12.B
1
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
10^{-4}
10^{-5}
10^{-6}
10^{-7}
10^{-8}
10^{-9}
10^{-10}

CONCLUSIONES Y COMENTARIOS

Este trabajo se basa en las hipótesis hechas en las investigaciones de Raman - Nath y en los resultados experimentales obtenidos por Bär. Dichas hipótesis sin embargo, trabajan bajo ciertas limitaciones, por ejemplo; Raman y Nath consideran a la onda sónica como una onda plana infinita de amplitud constante; en la práctica esto no puede ser implementado, pues todos los excitadores de ultrasonido son finitos y deben tomarse en cuenta las condiciones de frontera del elemento de vibración, de donde pueden surgir diferentes suposiciones de la forma del frente de onda ultrasónica así como de su propagación[10]. Otra de las limitaciones que se presentan es la de suponer válida la linealidad entre la presión y la constante dieléctrica, que implícitamente se le pide al líquido donde se propaga la onda ultrasónica; sin embargo ésta sólo puede considerarse cuando las variaciones de presión en la onda ultrasónica son pequeñas (en el caso de ondas de choque o macrosonido el tratamiento no es correcto).

Por otra parte, los cambios de presión influyen directamente sobre las características eléctricas del medio, esto implica que la linealidad debería de esperarse en ε (constante dieléctrica estática) más que en μ (índice de refracción0). Suponiendo que se tiene un medio no magnético y si $\mu = \sqrt{\varepsilon}$; entonces no hay linealidad entre los cambios de presión y el índice de refracción, a menos que los valores de $\Delta\varepsilon/\varepsilon \ll 1$, con lo que una aproximación a primer orden es válida ($\Delta\varepsilon/\varepsilon \ll 10^{-4}$).

Cuando se tienen sustancias densas experimentan el campo inducido por sus compañeras, para éste tipo de sustancias se utilisa la ecuación de Clausius - Mossotti la cual es una aproximación especialmente si la constante dieléctrica es grande.

$$\gamma_{mol} = \frac{3}{4\pi N} \left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon - 2} \right)$$

de donde γ_{mol} es la constante de polarisación la cual caracterisa la respuesta de las moleculas debido a un campo eléctrico aplicado. Remplasando μ^2 por ε en la expresión anterior se tiene la ecuación de Lorents - Lorents[14] de donde $(\varepsilon-1/\varepsilon-2)$ es proporcional a la densidad de la sustancia.

Partiendo de las hipótesis anteriores y tomando en cuenta sus limitaciones se anexarón las siguientes proposiciones (capítulo III): El medio donde se propaga la onda ultrasónica es un líquido viscoso, en consecuencia, el frente de onda no es plano debido al gradiente de velocidades que resulta por la presencia de la viscosidad, se propuso un prefil parabólico del frente de onda, considerando que la celda de prueba no tiene tapas y las paredes laterales de ésta se encuentran lo suficientemente alejadas; de tal manera, que el efecto de curvatura se deberá principalmente al arrastre inducido por el fondo. Para explicar como se forma el frente de onda parabólico, se supone que el transductor piesoeléctrico al perturbar el líquido, aplica un esfuerso cortante o de deslisamiento en el fluido, provocando un movimiento relativo de una capa con respecto a otra del líquido como consecuncia del arrastre entre capas por la presencia del fondo, produciendo que las velocidades sean diferentes. Se consideró también que el movimiento en el líquido no es demasiado rápido, para tener así un flujo laminar.

Los patrones de difracción calculados teóricamente en este trabajo son semejantes con los reportados por Raman - Nath para intensidades pequeñas v'= 0.2, v'= 0.5 y v'= 0.7, pero a medida que v' se incrementa los patrones van cambiando y ya no concuerdan con los de Raman - Nath como se puede observar en las gráficas 8A, 9A,... 12A del Capítulo III, comparandolas con la gráfica 2 del Capítulo II. Las gráficas A, representan las sumas de las intensidades de los diferentes órdenes (pares con pares e impares con impares) que componen cada línea del espectro; además matemáticamente se presentan como una doble suma (ec.III.4) la cual se interpreta en cada patrón de difracción como una separación de las líneas en sus diferentes órdenes como se muestra en las gráficas 6B, 7B,...12B; del capítulo III. El hecho de obtener una separación en los diferentes órdenes de los patrones de difracción, es consecuencia del modelo propuesto para el perfil sugerido por la región donde viaja la onda y las propiedades físicas del medio (μ, η, ρ). Sin embargo, la forma más natural de demostrarlo es realisando el experimento, aunque ésto esta fuera del alcance de este trabajo y se deja para futuras investigaciones. Un trabajo experimental acerca de la separación de las líneas expectrales es el presentado por B. V. Raghavendra Rao[19] sobre la dispersión de la velocidad acústica en líquidos, muestra fotografías de los patrones de difracción para diferentes sustancias, trabaja en la región hipersónica de 1000 a 6000 mega-ciclos por segundo, sugiere el uso del espectroscópio Fabry-Perot etalon: "Por experiencia ganada en este campo particular, se decidió el uso de un Fabry-Perot etalon, el cual nos da confiansa de la indicación correcta de una línea compleja, tanto con respecto a las componentes como con respecto a sus intensidades relativas, otra de las ventajas del uso de este

espectroscópio es su poder de resolución, y además, la dispersión del instrumento puede ser ajustada y adaptada a nuestras necesidades".
Una suposición sería que el medio al ser perturbado se comporta como una rejilla de fase de ancho variable, cuyo resultado se manifiesta como una suma de sumas en los espectros de difracción.

Es necesario mencionar que los patrones de difracción son inherentes a las propiedades del medio y a la región donde viaja el frente de onda; esto es a v'. Lo cual se manifiesta en el perfil de la onda; es decir, si la distancia focal es pequeña (a) el perfil no se abrirá tanto, si la distancia focal es más grande el perfil sera más ancho, en consecuencia el frente de onda parabólico puede tener una curvatura pequeña o grande dependiendo de la distancia focal, la cual está relacionada con la viscosidad del líquido.

Si el término $(4ay)^{1/2}$ en la ec. III.1, fuera igual con 1 se tendría la integral de difracción para el caso Raman - Nath, es decir; en el caso límite para v' pequeñas se tendría un frente de onda plano (la viscosidad sería igual a la de las sustancias con las que trabajaron Raman - Nath); pero a medida que v' se incrementa para el caso de un perfil parabólico, la viscosidad empieza a jugar un papel importante ya que el índice de refración sí se vera afectado.

APENDICE A

La onda incidente a lo largo del tratamiento es descrita por expresión:

$$Ae^{2\pi i\nu t}$$

Para la onda transmitida sin embargo, hay que tomar el cambio en la fase, el cual se calcula multiplicando la longitud de camino óptico por el índice de refracción en el medio; esto es:

$$\Delta\phi = \Delta\mu(x) = L\mu(x),$$

siendo μ_o el índice de refracción de todo el medio en su estado estable, y $\mu(x)$ el índice de refracción de el medio a una distancia x de el origen. Si el radio de curvatura del frente de onda corrugada es grande comparada con la distancia entre las dos caras de la celda se tiene que las variaciones en el índice de refracción del medio pueden expresarse como:

$$\mu(x) = \mu_o - \mu \text{ sen } (\frac{2\pi x}{\lambda^{*}})$$

Sustituyendo esta última expresión en la integral de difracción se encuentra

$$\int_{-p/2}^{p/2} e^{2\pi i\{lx + \mu L Sen(2\pi x/\lambda^{*})\}/\lambda} dx \longrightarrow (II.1)$$

en donde p es la longitud del rayo a lo largo del eje X .El sistema de coordenadas está representado en la fig.4 del cap. III.

Definiendo $u = \frac{2\pi}{\lambda}$, $b = \frac{2\pi}{\lambda^{*}}$, $v = u\mu L$

y utilizando la ecuación de Euler en el integrando de la Ec.II.1 por

lo tanto,

$$e^{iulx}e^{iusen(bx)} = [\cos(ulx) + i\,sen(ulx)][\cos(usen(bx)) + i\,sen(usen(bx))]$$

$$e^{iulx}e^{iusen(bx)} = \cos(ulx)\cos(usen(bx)) - sen(ulx)sen(usen(bx)) + i\cos(ulx)sen(usen(bx)) + i\,sen(ulx)\cos(usen(bx))$$

quedando la parte real y la parte imaginaria de la integral como:

$$\int_{-p/2}^{p/2} [\cos(ulx)\cos(usen(bx)) - sen(ulx)sen(usen(bx))]\,dx +$$

$$i\int_{-p/2}^{p/2} [\cos(ulx)sen(usen(bx)) + sen(ulx)\cos(usen(bx))]\,dx \longrightarrow (A.1)$$

Ahora, puesto que

$$\cos(usenbx) = 2\sum_{r=0}^{\infty}{}' J_{2r}(u)\cos(2rbx)$$

$$sen(usenbx) = 2\sum_{r=0}^{\infty} J_{2r+1}(u)sen[(2r+1)bx]$$

la primera parte de la integral A.1 queda como:

$$\int_{-p/2}^{p/2} [\cos(ulx)\cos(u\,senbx) - sen(ulx)\,sen(u\,senbx)]\,dx =$$

$$2\sum_{r=0}^{\infty}{}' J_{2r}(u)\int_{-p/2}^{p/2}\cos(ulx)\cos(2rbx)\,dx -$$

$$2\sum_{r=0}^{\infty} J_{2r+1}(u)\int_{-p/2}^{p/2} sen(ulx)sen[(2r+1)bx]\,dx$$

en donde el apostrofe indica que el coeficiente de J_0 debe dividirse entre dos.

Utilizando posteriormente las igualdades trigonométricas:

$$2\cos z_1 \cos z_2 = \cos(z_1 - z_2) + \cos(z_1 + z_2)$$

$$2\,\mathrm{sen}\, z_1\, \mathrm{sen}\, z_2 = \cos(z_1 - z_2) - \cos(z_1 + z_2)$$

se sigue:

$$\sum_{r=0}^{\infty}{}' J_{2r}(v) \int_{-p/2}^{p/2} [\cos(ul - 2rb)x + \cos(ul + 2rb)x]\,dx -$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} J_{2r+1}(v) \int_{-p/2}^{p/2} \{\cos[ul - (2r+1)b]x - \cos[ul + (2r+1)b]x\}\,dx =$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}{}' J_{2r}(v) \left[\frac{\mathrm{sen}(ul - 2rb)x}{(ul - 2rb)} + \frac{\mathrm{sen}(ul + 2rb)x}{(ul + 2rb)}\right]\Bigg|_{-p/2}^{p/2} -$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} J_{2r+1}(v) \left[\frac{\mathrm{sen}\,[ul - (2r+1)b]x}{[ul - (2r+1)b]} - \frac{\mathrm{sen}\,[ul + (2r+1)b]x}{[ul + (2r+1)b]}\right]\Bigg|_{-p/2}^{p/2}$$

Evaluando:

$$\sum_{r=0}^{\infty}{}' J_{2r}(v) \left[\frac{\mathrm{sen}(ul - 2rb)p/2}{(ul - 2rb)} - \frac{\mathrm{sen}(ul - 2rb)(-p/2)}{(ul - 2rb)} + \right.$$

$$\left. \frac{\mathrm{sen}(ul + 2rb)p/2}{(ul + 2rb)} - \frac{\mathrm{sen}(ul + 2rb)(-p/2)}{(ul + 2rb)}\right] -$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} J_{2r+1}(v) \left[\frac{\mathrm{sen}\,[ul - (2r+1)b]p/2}{[ul - (2r+1)b]} - \frac{\mathrm{sen}\,[ul - (2r+1)b](-p/2)}{[ul - (2r+1)b]} - \right.$$

$$\left. \frac{\mathrm{sen}\,[ul + (2r+1)b]p/2}{[ul + (2r+1)b]} + \frac{\mathrm{sen}\,[ul + (2r+1)b](-p/2)}{[ul + (2r+1)b]}\right]$$

pero dado que: $\mathrm{sen}\, z = -\mathrm{sen}(-z)$ entonces,

$$\sum_{r=0}^{\infty}{}' J_{2r}(v) \left[\frac{2\mathrm{sen}(ul - 2rb)p/2}{(ul - 2rb)} + \frac{2\mathrm{sen}(ul + 2rb)p/2}{(ul + 2rb)}\right] +$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} J_{2r+1}(v)\left[\frac{2sen\,[ul + (2r+1)b]p/2}{[ul + (2r+1)b]} - \frac{2sen\,[ul - (2r+1)b]p/2}{[ul - (2r+1)b]}\right]$$

Si ahora, esta última expresión se multiplica por p se tiene finalmente:

$$p\sum_{r=0}^{\infty}{}' J_{2r}(v)\left[\frac{sen(ul - 2rb)p/2}{(ul - 2rb)p/2} + \frac{sen(ul + 2rb)p/2}{(ul + 2rb)p/2}\right] +$$

$$p\sum_{r=0}^{\infty} J_{2r+1}(v)\left[\frac{sen\,[ul + (2r+1)b]p/2}{[ul + (2r+1)b]p/2} - \frac{sen\,[ul - (2r+1)b]p/2}{[ul - (2r+1)b]p/2}\right]$$

$$\longrightarrow (II.2)$$

Por otro lado, tomando la parte imaginaria de la Ec. A.1 se sigue:

$$i\int_{-p/2}^{p/2}[\cos(ulx)sen(v\,sen(bx)) + sen(ulx)\cos(v\,sen(bx))]\,dx =$$

$$i\left[2\sum_{r=0}^{\infty} J_{2r+1}(v)\int_{-p/2}^{p/2}\cos(ulx)sen[(2r+1)bx]\,dx + \right.$$

$$\left. 2\sum_{r=0}^{\infty}{}' J_{2r}(v)\int_{-p/2}^{p/2}sen(ulx)\cos(2rbx)dx\right]$$

Nuevamente utilizando la identidad

$$2sen\,s_1\cos s_2 = sen(s_1 + s_2) + sen(s_1 - s_2)$$

se obtiene:

$$i\sum_{r=0}^{\infty} J_{2r+1}(v)\int_{-p/2}^{p/2}\{sen[(2r+1)b + ul]x + sen[(2r+1)b + ul]x\}\,dx +$$

$$i\sum_{r=0}^{\infty}{}' J_{2r}(v)\int_{-p/2}^{p/2}[sen(ul + 2rb)x + sen(ul - 2rb)x]\,dx =$$

$$i\sum_{r=0}^{\infty} J_{2r+1}(v)\left[-\frac{\cos[ul+(2r+1)b]x}{[ul+(2r+1)b]} - \frac{\cos[-ul+(2r+1)b]x}{[-ul+(2r+1)b]}\right]\Bigg|_{-p/2}^{p/2} +$$

$$i\sum_{r=0}^{\infty}{}' J_{2r}(v)\left[-\frac{\cos(ul+2rb)x}{(ul+2rb)} - \frac{\cos(ul-2rb)x}{(ul-2rb)}\right]\Bigg|_{-p/2}^{p/2}$$

evaluando,

$$i\sum_{r=0}^{\infty} J_{2r+1}(v)\left[-\frac{\cos[ul+(2r+1)b]p/2}{[ul+(2r+1)b]} + \frac{\cos[ul+(2r+1)b](-p/2)}{[ul+(2r+1)b]} -\right.$$

$$\left.\frac{\cos[-ul+(2r+1)b]p/2}{[-ul+(2r+1)b]} + \frac{\cos[-ul+(2r+1)b](-p/2)}{[-ul+(2r+1)b]}\right] +$$

$$i\sum_{r=0}^{\infty} J_{2r}(v)\left[-\frac{\cos(ul+2rb)p/2}{(ul+2rb)} + \frac{\cos(ul+2rb)(-p/2)}{(ul+2rb)} -\right.$$

$$\left.\frac{\cos(ul-2rb)p/2}{(ul-2rb)} + \frac{\cos(ul-2rb)(-p/2)}{(ul-2rb)}\right]$$

considerando la identidad: $\cos(-a) = \cos a$ se observa que la parte imaginaria es igual a cero, quedando solamente la ecuación II.2 .

APENDICE B

Se considera que se tiene una parábola de vértice $V(0,0)$, las coordenadas del foco son $f(0,a)$; (Fig.5 , Cap. III) . La ecuación de la parábola está dada por:

$$(x-h)^2 = 4a(y-k)$$

de donde:

$$(x-0)^2 = 4a(y-0)$$

$$x^2 = 4ay$$

$$x = 2(ay)^{1/2}$$

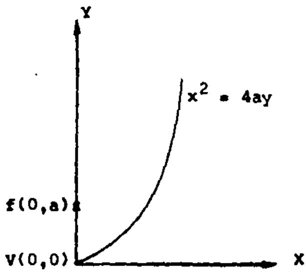


Fig.5. Parábola con vértice en el origen de un sistema de coordenadas y cuyo foco está sobre la parte positiva del eje y .

Es importante tomar en cuenta la distancia focal a ya que los patrones de difracción para cada perfil del frente de onda van a depender fuertemente de los valores que ésta tome; esto es, si la distancia focal es pequeña el perfil no se abrirá mientras que, si es más grande el perfil será más ancho.

El índice de refracción para este caso puede escribirse como:

$$\mu(x,y) = \mu_o - 2\mu_1(ay)^{1/2}\text{sen}\left(\frac{2\pi x}{\lambda^*}\right)$$

Ahora, la expresión para la luz incidente es:

$$Ae^{2\pi i\nu t}$$

mientras que para la onda transmitida es:

$$Ae^{2\pi i(lx-L\mu(x,y)/c)}$$

Tomando en cuenta que el cambio de fase se expresa como:

$$\Delta\phi = L\mu(x,y),$$

la integral de difracción se escribe como:

$$\int_{0}^{M}\int_{-p/2}^{p/2} e^{2\pi i(lx + 2\mu L(ay)^{1/2}\mathrm{sen}(2\pi x/\lambda^{*}))/\lambda}\, dx\, dy \longrightarrow \text{III.1}$$

Utilizando la relación de Euler en el integrando de la ecuación III.1 y definiendo

$$u = \frac{2\pi}{\lambda} \; ; \; b = \frac{2\pi}{\lambda^{*}} \; ; \; v = \frac{2\pi\mu L}{\lambda} \; \text{y} \; v' = 2v(ay)^{1/2}$$

se encuentra que:

$$e^{iulx}e^{iv'\mathrm{sen}(bx)} = [\cos(ulx) + i\,\mathrm{sen}(ulx)][\cos(v'\mathrm{sen}(bx)) + i\,\mathrm{sen}(v'\mathrm{sen}(bx$$

$$e^{iulx}e^{iv'\mathrm{sen}(bx)} = \cos(ulx)\cos(v'\mathrm{sen}(bx)) - \mathrm{sen}(ulx)\mathrm{sen}(v'\mathrm{sen}(bx)) +$$

$$i\cos(ulx)\mathrm{sen}(v'\mathrm{sen}(bx)) + i\,\mathrm{sen}(ulx)\cos(v'\mathrm{sen}(bx))$$

Si ahora se toman en consideración las identidades:

$$\cos(v'\mathrm{sen}bx) = 2\sum_{r=0}^{\infty}{}' J_{2r}(v')\cos(2rbx)$$

$$\mathrm{sen}(v'\mathrm{sen}bx) = 2\sum_{r=0}^{\infty} J_{2r+1}(v')\mathrm{sen}[(2r+1)bx]$$

y sustituyendo en la ecuación III.1 :

$$\int_{0}^{M}\int_{-p/2}^{p/2} 2\Big\{ \sum_{r=0}^{\infty}{}' J_{2r}(v')\cos(ulx)\cos(2rbx) \; -$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} J_{2r+1}(v')\mathrm{sen}(ulx)\mathrm{sen}[(2r+1)bx] \Big\}\, dx\, dy \; +$$

$$i\int_0^H\int_{-p/2}^{p/2} 2\left\{\sum_{r=0}^{\infty}{}' J_{2r+1}(v')\cos(ulx)\operatorname{sen}[(2r+1)bx] \; + \right.$$

$$\left.\sum_{r=0}^{\infty} J_{2r}(v')\operatorname{sen}(ulx)\cos(2rbx)\right\} dx\, dy \quad \longrightarrow \quad B.1$$

donde J_n' *tienen el mismo significado de antes y las integrales con respecto a la variable x, se han calculado en el apéndice A.*

Sustituyendo en B.1 la ecuación II.2 se tiene:

$$p\sum_{r=0}^{\infty}{}'\left\{\left[\frac{\operatorname{sen}(ul-2rb)p/2}{(ul-2rb)p/2} + \frac{\operatorname{sen}(ul+2rb)p/2}{(ul+2rb)p/2}\right]\int_0^H J_{2r}(v')\,dy\right\} \; +$$

$$p\sum_{r=0}^{\infty}\left\{\left[\frac{\operatorname{sen}[ul+(2r+1)b]p/2}{[ul+(2r+1)b]p/2} - \frac{\operatorname{sen}[ul-(2r+1)b]p/2}{[ul-(2r+1)b]p/2}\right] \times \right.$$

$$\left.\int_0^H J_{2r+1}(v')\,dy\right\} \quad \longrightarrow \quad III.2$$

En donde, de acuerdo con el apéndice A, la parte imaginaria es igual a cero.

Ahora, tomando en cuenta el cambio de variable:

$$v' = 2v\,(ay)^{1/2}$$

se encuentra que,

$$y = \frac{(v')^2}{4av^2}$$

y

$$dy = \frac{v'dv'}{2av^2}$$

Los límites de integración en consecuencia deben remplazarse ahora por:

$$v' = 0 \quad \text{en} \quad y = 0,$$

$$v' = \frac{4\pi\mu L}{\lambda}(aH)^{1/2} \quad \text{en} \quad y = H$$

y la diferencial en y tendrá que reescribirse como:

$$dy = \frac{\lambda^2 \upsilon' d\upsilon'}{8a(\pi\mu L)^2}$$

Sustituyendo en III.2 y considerando

$$q = \frac{1}{2a\upsilon^2} \quad ; \quad z = \frac{4\pi\mu L}{\lambda}(aH)^{1/2}$$

se tiene:

$$\rho q \sum_{r=0}^{\infty}{}' \left\{ \left[\frac{\operatorname{sen}(ul - 2rb)p/2}{(ul - 2rb)p/2} + \frac{\operatorname{sen}(ul + 2rb)p/2}{(ul + 2rb)p/2} \right] \int_0^z \upsilon' J_{2r}(\upsilon')\, d\upsilon' \right\} +$$

$$\rho q \sum_{r=0}^{\infty} \left\{ \left[\frac{\operatorname{sen}[ul + (2r+1)b]p/2}{[ul + (2r+1)b]p/2} - \frac{\operatorname{sen}[ul - (2r+1)b]p/2}{[ul - (2r+1)b]p/2} \right] \times \right.$$

$$\left. \int_0^z \upsilon' J_{2r+1}(\upsilon')\, d\upsilon' \right\} \longrightarrow \quad B.2$$

Analizando la ecuación B.2 se observa que esta presenta una discontinuidad en el origen en los términos que contienen las funciones pares $J_{2r}(\upsilon')$. Para resolverla se separa de la serie el origen, y calculando esta integral para $r = 0$ se puede escribir esa parte de la ecuación como sigue:

$$\rho q \frac{\operatorname{sen}(ul)p/2}{(ul)p/2} \int_0^z \upsilon' J_0(\upsilon') d\upsilon' \longrightarrow \quad B.3$$

utilizando la igualdad[17]:

$$\int_0^z t^{\nu} J_{\nu-1}(t)\, dt = z^{\nu} J_{\nu}(z) \qquad Re\ (\nu) > 0$$

para $\nu = 1$ se tiene:

$$\int_0^z t\, J_0(t)dt = z\, J_1(z)$$

Aplicando la expresión anterior a la ecuación B.3 se encuentra:

$$pqz\, \frac{sen(ul)\rho/2}{(ul)\rho/2}\, J_1(z) \longrightarrow \quad B.4$$

Expresandose entonces la ecuación B.2 como sigue:

$$pqz\, \frac{sen(ul)\rho/2}{(ul)\rho/2}\, J_1(z) \; +$$

$$pq\sum_{r=1}^{\infty}\left\{\left[\frac{sen(ul - 2rb)\rho/2}{(ul - 2rb)\rho/2} + \frac{sen(ul + 2rb)\rho/2}{(ul + 2rb)\rho/2}\right]\int_0^z v' J_{2r}(v')\, dv'\right\} \; +$$

$$pq\sum_{r=0}^{\infty}\left\{\left[\frac{sen[ul + (2r + 1)b]\rho/2}{[ul + (2r + 1)b]\rho/2} - \frac{sen[ul - (2r + 1)b]\rho/2}{[ul - (2r + 1)b]\rho/2}\right] \times \right.$$

$$\left.\int_0^M v' J_{2r+1}(v')\, dv'\right\} \longrightarrow \quad III.3$$

Si se utiliza la relación[17] *se sigue:*

$$\int_0^z t^m J_n(t)dt = \frac{z^m \Gamma\left(\frac{n+m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-m+1}{2}\right)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+2k+1)\Gamma\left(\frac{n-m+1}{2} + k\right)}{\Gamma\left(\frac{n+m+3}{2} + k\right)}\, J_{n+2k+1}(z)$$

para resolver las integrales de la Ec. III.3 se encuentra después de reducir términos que:

$$pqz\, \frac{sen(ul)\rho/2}{(ul)\rho/2}\, J_1(z) \; +$$

$$pqz\sum_{r=1}^{\infty}\left\{\left[\frac{sen(ul - 2rb)\rho/2}{(ul - 2rb)\rho/2} + \frac{sen(ul + 2rb)\rho/2}{(ul + 2rb)\rho/2 .}\right] \times \right.$$

$$\left.\left[\frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2r+2k+1)\Gamma(r+k)}{\Gamma(r+k+2)}\, J_{2(r+k)+1}(z)\right]\right\} \; +$$

$$pq\sum_{r=0}^{\infty}\left\{\left[\frac{sen[ul+(2r+1)b]p/2}{[ul+(2r+1)b]p/2}-\frac{sen[ul-(2r+1)b]p/2}{[ul-(2r+1)b]p/2}\right]\times\right.$$

$$\left.\left[\frac{\Gamma(r+\frac{3}{2})}{\Gamma(r+\frac{1}{2})}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2(r+k+1)\Gamma(r+k+\frac{1}{2})}{\Gamma(r+k+\frac{5}{2})}J_{2(r+k+1)}(z)\right]\right\} \longrightarrow \quad III.4$$

Ahora bien, utilizando la identidad[17]

$$\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$$

en los términos de la Ec. III.4 que tienen función gamma se encuentra:

$$\frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r)} = \frac{r\,\Gamma(r)}{\Gamma(r)} = r$$

$$\frac{\Gamma(r+k)}{\Gamma(r+k+2)} = \frac{\Gamma(r+k)}{(r+k+1)\,\Gamma(r+k+1)} = \frac{\Gamma(r+k)}{(r+k+1)(r+k)\,\Gamma(r+k)} =$$

$$= \frac{1}{(r+k)^2 + (r+k)}$$

$$\frac{\Gamma(r+\frac{3}{2})}{\Gamma(r+\frac{1}{2})} = \frac{(r+\frac{1}{2})\Gamma(r+\frac{1}{2})}{\Gamma(r+\frac{1}{2})} = (r+\tfrac{1}{2})$$

$$\frac{\Gamma(r+k+\frac{1}{2})}{\Gamma(r+k+\frac{5}{2})} = \frac{\Gamma(r+k+\frac{1}{2})}{(r+k+\frac{3}{2})(r+k+\frac{1}{2})\,\Gamma(r+k+\frac{1}{2})} =$$

$$= \frac{1}{(r+k)^2 + 2(r+k) + \frac{3}{4}}$$

Sustituyendo en la ecuación III.4 se tiene entonces que:

$$pq\frac{sen(ul)p/2}{(ul)p/2}\,J_1(z) \;+$$

$$pq\sum_{r=1}^{\infty}r\left\{\left[\frac{sen(ul-2rb)p/2}{(ul-2rb)p/2}+\frac{sen(ul+2rb)p/2}{(ul+2rb)p/2}\right]\times\right.$$

$$\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2r+2k+1}{(r+k)^2 + (r+k)} J_{2(r+k)+1}(z) \right]\right\} +$$

$$pqz \sum_{r=0}^{\infty} (r + \tfrac{1}{2}) \left\{\left[\frac{\operatorname{sen}[ul + (2r+1)b]p/2}{[ul + (2r+1)b]p/2} - \frac{\operatorname{sen}[ul - (2r+1)b]p/2}{[ul - (2r+1)b]p/2} \right] \right.,$$

$$\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2(r+k+1)}{(r+k)^2 + 2(r+k) + \frac{3}{4}} J_{2(r+k+1)}(z) \right]\right\} \longrightarrow III.5$$

Ahora, desarrollando la serie para $r = 0, 1, 2, 3, \ldots$ y $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ se encuentra de esta forma cada uno de los términos de la serie; esto es,

En $r = 0$ y $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ se encuentra que la Ec. III.5 tiene la forma:

$$pqz \frac{\operatorname{sen}(ul)p/2}{(ul)p/2} J_1(z) + \frac{pqz}{2} \left[\frac{\operatorname{sen}(ul + b)p/2}{(ul + b)p/2} - \frac{\operatorname{sen}(ul - b)p/2}{(ul - b)p/2} \right] \times$$

$$\left[\frac{2(4)}{3} J_2(z) + \frac{4(4)}{15} J_4(z) + \frac{6(4)}{35} J_6(z) + \frac{8(4)}{63} J_8(z) + \ldots \right] +$$

Para $r = 1$ y $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ la Ec. III.5 se expresa como:

$$pqz \left[\frac{\operatorname{sen}(ul - 2b)p/2}{(ul - 2b)p/2} + \frac{\operatorname{sen}(ul + 2b)p/2}{(ul + 2b)p/2} \right] \left[\frac{3}{2} J_3(z) + \frac{5}{6} J_5(z) + \right.$$

$$\left. \frac{7}{12} J_7(z) + \frac{9}{20} J_9(z) + \ldots \right] + \frac{3}{2}\, pqz \left[\frac{\operatorname{sen}(ul + 3b)p/2}{(ul + 3b)p/2} - \right.$$

$$\left. \frac{\operatorname{sen}(ul + 3b)p/2}{(ul + 3b)p/2} \right] \times \left[\frac{4(4)}{15} J_4(z) + \frac{6(4)}{35} J_6(z) + \frac{8(4)}{63} J_8(z) + \right.$$

$$\frac{10(4)}{99} J_{10}(z) + \ldots \Big] +$$

Si $r = 2$ y $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ se tiene:

$$2pqz\left[\frac{\operatorname{sen}(ul - 4b)p/2}{(ul - 4b)p/2} + \frac{\operatorname{sen}(ul + 4b)p/2}{(ul + 4b)p/2}\right]\Big[\frac{5}{6}J_6(z) + \frac{7}{12}J_7(z) +$$

$$\frac{9}{20} J_9(z) + \frac{11}{30} J_{11}(z) + \ldots\Big] + \frac{5}{2}\, pqz \left[\frac{\operatorname{Sen}(ul + 5b)p/2}{(ul + 5b)p/2} -\right.$$

$$\left.\frac{\operatorname{Sen}(ul - 5b)p/2}{(ul - 5b)p/2}\right] \times \Big[\frac{6(4)}{35} J_6(z) + \frac{8(4)}{63} J_8(z) + \frac{10(4)}{99} J_{10}(z) +$$

$$\frac{12(4)}{143} J_{12}(z) \ldots\Big] +$$

Para $r = 3$ y $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$se sigue:

$$3pqz\left[\frac{\operatorname{sen}(ul - 6b)p/2}{(ul - 6b)p/2} + \frac{\operatorname{sen}(ul + 6b)p/2}{(ul + 6b)p/2}\right]\Big[\frac{7}{2} J_7(z) + \frac{9}{20} J_9(z) +$$

$$\frac{11}{30} J_{11}(z) + \frac{13}{42} J_{13}(z) + \ldots\Big] + \frac{7}{2}\, pqz \left[\frac{\operatorname{sen}(ul + 7b)p/2}{(ul + 7b)p/2} -\right.$$

$$\left.\frac{\operatorname{sen}(ul - 7b)p/2}{(ul - 7b)p/2}\right] \times \Big[\frac{8(4)}{63} J_8(z) + \frac{10(4)}{99} J_{10}(z) + \frac{12(4)}{143} J_{12}(z) +$$

$$\frac{14(4)}{193} J_{14}(z) \ldots\Big] +$$

BIBLIOGRAFIA

(1). Debye, P. y Sears , F. W. Proc. Nath. Acad. Sci, Vol 18, 410 (1932)

(1). Debye, P. y Sears , F. W. Proc. Nath. Acad. Sci, Vol 18, 410 (1932).

(2). Lucas, R. y Biquard, P. Jour. Phys. Radium Vol. 3, 464 (1932).

(3). Raman, C.V. y Nath, N.S.N. Proc. Ind. Acad. Sci.
(3.1). Vol. 2A, 406 (1935).
(3.2). Vol. 2A, 413 (1935).
(3.3). Vol. 3A, 75 (1936).
(3.4), Vol. 3A, 119 (1936).
(3.5), Vol. 3A, 459 (1936).

(4). Sanders F.H. Can. Jour. Rev. Vol. A14, 158 (1936).

(5). Nomoto, O.J. J. Phys-Math. Soc. Jap. Vol. 22, 314 (1940).

(6). Bathia, A.B. y Noble, W.J. Proc. R. Soc. Vol. A220, 356 (1953).

(7). Phariseau P. Physica, Vol. 24 985 (1958).

(8). Klein, W.R. y Heidemann, E.A. Physica, Vol. 29, 981 (1963).

(9). Sandoval, D.J.L. Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias, U.N.A.M. (1980).

(10). Montiel, E.M.D.V. Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias, U.N.A.M. (1985).

(19). B.V. Raghavendra Rao. Proc. Ind. Acad. Sci.Bangalore. Sección A, Vol.7, 163 (1938).

CITAS BIBLIOGRAFICAS

(11). E. Hencht, A. Zajac. Optica Adisson Wesley (1970).

(12). Francis W. Sears. Fundamentos de Física III Optica. Aguilar (1974).

(13). Grant. R. Fowles. Introduction to Modern Optics. Holt Richart and Winston (1975).

(14). John David Jackson. Classical Electrodynamics. John Wiley (1970).

(15). Jurgen R. Meyer Arent. Introduction Classical and Modern Optics. Printice - Hall (1972).

(16). Miles V. Klein. Optics Wiley International Edition (1970).

(17). Milton Abramowitz e Irene A. Stegun. Handbook of Mathematical Funcions. Dover Publications (1970).

(18). Sears. Zemansky Física Aguilar (1972).