01184

3

29

TEORIA DE DECISIONES MULTICRITERIO:

METODO DE RELACIONES BINARIAS DE SOBRECLASIFICACION QUE USA UNA FAMILIA DE FUNCIONES DE UTILIDAD

MAYRA STELLA TREJOS ALVARADO

TESIS DOCTORAL

Presentada a la Division de Estudios de posgrado de la
FACULTAD DE INGENIERIA
de la
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

Como requisito para obtener el grado de

DOCTOR EN INVESTIGACION DE OPERACIONES

CIUDAD UNIVERSITARIA, D.F., ABRIL, 1991

INTRODUCCION

En las últimas décadas la investigación de operaciones ha contribuido a la formulación y solución de problemas de muy diversos tipos en los que generalmente están involucradas grandes inversiones. Inicialmente se ocupó principalmente de las técnicas de optimación y de los problemas que se podían atacar con estas técnicas, para después ampliar considerablemente su cobertura, de modo que en la actualidad una parte importante de ella es la relacionada con la estadística y la toma de decisiones. Dentro de esta última se encuentra la toma de decisiones multicriterio, la cual es un campo de investigación que continuamente se amplía con nuevos métodos. Al resolver este tipo de problemas se usan métodos propios de la ciencia [Roy, B; 1990], principalmente por tratar con modelos que se refieren a situaciones externas al propio modelo, como las preferencias de los decisores y las consecuencias de las acciones.

Actualmente predominan dos tendencias, la denominada teoría de utilidad multiatributo y el enfoque de relaciones binarias de sobreclasificación, las cuales se cultivan principalmente en Estados Unidos y Francia, respectivamente. Ellas atribuyen papeles diferentes a la teoría en la solución de problemas reales [Roy, B; 1989], lo que se manifiesta en que dan nombres distintos a los problemas; en la primera tendencia se denominan de *toma* de decisiones multicriterio y en la segunda de *ayuda* a la decisión multicriterio. De acuerdo con esto, difieren en la capacidad que exigen del decisor para que discrimine preferencialmente las alternativas y para que sus preferencias cumplan determinadas condiciones, denominadas genéricamente de "racionalidad".

El enfoque de teoría de utilidad multiatributo, o enfoque clásico, se caracteriza por una serie de condiciones que deben cumplir las preferencias del decisor para que estas admitan ser modeladas mediante una función de utilidad, como la transitividad de la preferencia y de la indiferencia. Estas condiciones, denominadas de racionalidad, exigen del decisor cierta precisión y claridad en sus preferencias. Antecedentes de este enfoque son los trabajos de Von Neumann y Morgenster [1943] y los de Luce y Raiffa [1957], quienes se restringen al caso de un decisor y un solo criterio de evaluación.

Manteniendo el concepto de racionalidad del enfoque clásico, Kuhn y Tucker (1951) formularon el problema del vector máximo y derivaron las condiciones de optimalidad para la existencia de soluciones eficientes, iniciando junto con Koopmans (concepto de solución eficiente) la teoría de decisiones multiobjetivo.

Cuando el decisor es una organización o grupo de personas o cuando hay más de un criterio de evaluación, que es el caso que nos interesa, es más difícil que se cumplan los supuestos de racionalidad del enfoque clásico. Como respuesta a esta dificultad en la década de los sesenta Bernard Roy [1968] introduce el enfoque de sobreclasificación, el cual se centra más en el procedimiento para modelar las preferencias del decisor que en la estructura matemática del modelo de preferencias y los correspondientes requerimientos de racionalidad.

En el enfoque de sobreclasificación se construye una relación binaria sobre el conjunto de acciones alternativas, la cual modela solamente la parte que mejor se conoce de las preferencias del decisor. En esta relación, llamada de sobreclasificación, una acción sobreclasifica a otra significa que los argumentos a favor de que la primera acción es preferible a la segunda son significativos, mientras que aquellos en favor de la preferencia inversa no son muy fuertes. Los distintos métodos de sobreclasificación difieren en la forma como se expresa y se construye esta relación.

La relación de sobreclasificación en general no es transitiva y tampoco completa, por lo que puede haber pares de acciones no comparables en que ninguna sobreclasifica a la otra. Por tanto esta relación es más pobre que la resultante de una función de utilidad y en principio no lleva a una decisión "óptima", como cuando se modelan las preferencias del decisor mediante una función de utilidad.

Lo anterior hace ver la necesidad de un modelo que incluya imprecisiones en las preferencias, que sea compatible con violaciones a las condiciones de racionalidad de la teoría de utilidad, pero que en condiciones de perfecta racionalidad y precisión en las preferencias se reduzca o sea equivalente a un modelo de utilidad. Un modelo de este tipo podría seguir globamente al enfoque de relaciones binarias de sobreclasificación en el que la relación correspondiente fuera definida sobre una familia de funciones de utilidad, la cual de alguna manera reflejara las contradicciones e imprecisiones en las preferencias del decisor.

El objetivo del trabajo que se presenta es desarrollar un método de toma de decisiones multicriterio orientado a resolver la necesidad antes mencionada, que pueda ser implantado en computadora y probar su utilidad prática en un problema real.

El trabajo se desarrolla como sigue: En el capítulo 1 se considera la estructura de los problemas de toma de decisiones y los diversos métodos de toma de decisiones multicriterio, empezando por los métodos básicos. Después se describen los enfoques más importantes para resolver problemas multicriterio, a saber, el de toma de decisiones multiobjetivo, toma de decisiones multiatributo y el de relaciones binarias de sobreclasificación. A estos enfoques pertenecen en general uno o más métodos específicos de toma de decisiones, de los cuales se consideran los métodos de teoría de utilidad multiatributo, el método UTA y los ELECTRE de relaciones binarias de sobreclasificación, de donde surgen ideas para aprovechar ventajas de uno y otro enfoque.

En el capítulo 2 se presenta el método de toma de decisiones multicriterio al que se llegó en la investigación. La contribución consiste esencialmente en que además de su facilidad de manejo cumple los objetivos antes enunciados: el modelo incluye imprecisiones en las preferencias, es compatible con violaciones a las condiciones de racionalidad de la teoría de utilidad, pero en condiciones de perfecta racionalidad y precisión en las preferencias se reduce a un modelo de utilidad. En este método las preferencias se modelan mediante una relación binaria de sobreclasificación que se construye en dos etapas. En la primera se determina una familia de funciones de utilidad mediante intervalos de variación de parámetros asociados a los criterios; con esta familia las preferencia del decisor se modelan sobre una escala continua. En la segunda se dan umbrales de preferencia, indiferencia y veto, con lo que el sistema de preferencias se expresa ahora sobre una escala discreta que permite discriminar entre preferencia, indiferencia y no comparabilidad. Esta relación permite en principio resolver el problema de toma de decisiones específico. Se describe el procedimiento correspondiente, el cual se ilustra con un ejemplo.

En el capítulo 3 se relacionan los resultados de la investigación con el campo actual de conocimientos, se hacen comparaciones con otros métodos multicriterio y se sugieren posibles extensiones de la investigación.

En el capítulo 4 se dan especificaciones del programa de computadora elaborado para aplicar el método propuesto. Se dan dos ejemplos. El primero es una aplicación del método UTA (para destacar similitudes y diferencias con el propuesto) y el segundo se refiere a la selección del sitio de una planta nucleoeléctrica, el cual se resuelve con el método propuesto y es de interés porque ha sido analizado con los métodos de teoría de utilidad multiatributo [Keeney y Nair, 1976], con el que originalmente se resolvió el problema real, y el de relaciones binarias de sobreclasificación [Roy y Bouyssou; 1986]. Además se describe una aplicación del método a un caso específico real.

El capítulo 5 se dedica a las conclusiones del trabajo. Para no interrumpir la continuidad del texto algunas afirmaciones hechas en las secciones 2.3 y 2.4 del capítulo 2 se demuestran en el anexo.

1. EL PROBLEMA DE TOMA DE DECISIONES

La toma de decisiones se da dentro de un proceso que contiene los siguientes pasos: análisis de la problemática, modelado de las preferencias del decisor y solución del problema. El primer paso consiste en estudiar los elementos relevantes que inciden en la problemática con el objeto de diseñar posibles soluciones y determinar los criterios de evaluación a los que éstas se someterán. El segundo paso consiste en construir un modelo matemático de las preferencias del decisor de manera que dadas dos acciones, reales o ficticias, el modelo determine cuál sería el resultado de que el decisor las comparara preferencialmente. Por último, la solución consiste, dependiendo del problema, en elegir una mejor alternativa, ordenar el conjunto de alternativas en orden decreciente o creciente según las preferencias del decisor o en seleccionar un subconjunto de ellas. Se considera la estructura de los problemas de toma de decisiones y los diversos métodos de toma de decisiones multicriterio empezando por los métodos básicos. Después se describen y comparan los dos enfoques de toma de decisiones multicriterio que más relación tienen con el método propuesto, el de toma de decisiones multiatributo y el de relaciones binarias de sobreclasificación. Algunos de sus métodos, como la teoria de utilidad multiatributo, el método UTA de Siskos y los ELECTRE, se describen con cierto detalle.

1.1 Estructura de un problema de toma de decisiones

Para resolver un problema de toma de decisiones se consideran las siguientes etapas [Nijkamp,P.;Voogd,H.;1985].

Etapa I: **Definición de las acciones y formulación del problema**

(escoger una acción, seleccionar un subconjunto de acciones, ordenar acciones)

Etapa II: **Determinación de criterios y modelado de las preferencias del decisor respecto a cada uno de estos criterios**

Etapa III: **Síntesis de la información existente en un modelo global** (agregación de criterios)

Etapa IV: **Aplicación de algún procedimiento para resolver el problema de toma de decisiones**

Formalmente tomar una decisión consiste en determinar:

a) un conjunto de *cursos de acción*, A;

b) un conjunto de *consecuencias*, C;

c) un conjunto de *estimados de consecuencias*, E;

d) una función $e : A \longrightarrow E$ llamada *estimación de consecuencias*;

e) una relación binaria asimétrica de ordenamiento $\succcurlyeq$ sobre E, llamada *relación de preferencias*;

f) un curso de acción $a^{\bullet} \in A$ tal que $e(a^{\bullet}) \succcurlyeq e(b)$ para todo curso de acción $b \in A$, llamada *solución* del problema de toma de decisiones.

Cada uno de los conjuntos A, C es un conjunto excluyente y exhaustivo. La realización de cualquier curso de acción $a \in A$ implica que se realiza un cierto elemento de C, llamado la *consecuencia* del curso de acción a o un estimado $e(a) \in E$ de dicha consecuencia. La decisión consiste en elegir el curso de acción $a^{\bullet} \in A$ de modo que el estimado de su consecuencia, $e(a^{\bullet})$, sea al menos tan preferible como el de cualquier otro curso de acción, lo que se denota por $e(a) \succcurlyeq e(b)$.

Los problemas de toma de decisiones pueden ser clasificados según la forma matemática de los estimados de las consecuencias: si para cada $a \in A$, $e(a) \in E$ es un elemento de C, un conjunto de C o una distribución de probabilidad sobre C, entonces se dice que el problema es bajo certeza, incertidumbre o riesgo, respectivamente (otra posibilidad es que $e(a)$ sea un conjunto borroso de C, [Roubens y Vincke , 1987]).

Si el conjunto de consecuencias C, es un producto cartesiano, el problema de toma de decisiones se llama multicriterio (objetivos o atributos múltiples) porque cada una de las componentes se asocia con un criterio relevante para la decisión.

Un criterio es una función real sobre el conjunto de acciones que representa las preferencias del decisor según uno de sus puntos de vista. Si la estructura de preferencias es de preorden total, cuasi orden, orden de intervalo o un seudo orden, entonces este criterio resulta ser un criterio verdadero, cuasi criterio, criterio de intervalo o seudo criterio, respectivamente [Vincke; 1989].

La representación de los criterios por una familia $F=\{g_1,...g_n\}$ de criterios es una de las partes más delicadas de la formulación de un problema de toma de decisiones. Roy y Bouyssou [1987a] dan las propiedades para que una familia de criterios sea coherente en el sentido que las preferencias parciales de los criterios sean consistentes con las preferencias considerando todos los criterios simultáneamente (preferencias *globales*). El concepto de *importancia* de los criterios difiere para los distintos métodos por lo que comparar sus correspondientes evaluaciones puede carecer de sentido. Desde un punto de vista práctico se han propuesto muchos métodos para estimar la importancia de los criterios pero sin que sus autores se interesen por su interpretación. Eckenrode [1966] compara experimentalmente seis de estos métodos para asignarle importancia a los criterios. El método de Saaty [1980] jerarquiza los criterios mediante la técnica del autovector. En cuanto a la interpretación de los pesos Vansnick [1988] propone que " cuando un decisor declara que un criterio j es más importante que un criterio k, eso significa que la diferencia de las preferencias en un nivel medio (ni atractivo, ni repulsivo) y un nivel excelente (totalmente atractivo) es mayor sobre el criterio j que sobre el criterio k", afirmación que aunque parece razonable no ha sido demostrada.

Otros autores que han investigado al respecto son Bana e Costa [1986 y 1988] y Climaco *et al* [1987].

1.2 Enfoques en la toma de decisiones multicriterio

El auge de la investigación de operaciones empezó en la segunda guerra mundial. Entonces los problemas de decisión resultaban bien definidos desde el punto de vista matemático porque optimizaban una función objetivo, pero en muchos casos tenían el inconveniente de apartarse de la realidad. Después surgen enfoques más realistas que permiten tomar en cuenta múltiples criterios [Roy, B.; 1987]. Los enfoques de toma de decisiones multicriterio pueden separarse en tres grandes áreas:

a) toma de decisiones multiobjetivo
b) toma de decisiones multiatributo
c) toma de decisiones basada en relaciones binarias de sobreclasificación.

Roy clasifica los enfoques según sean interactivos con iteraciones ensayo-error, de criterio único con acciones comparables entre sí y los de sobreclasificación, que toman en cuenta la incomparabilidad. Por otro lado, Scharlig [1985] clasifica a los métodos de agregación en locales, completos y parciales.

La toma de decisiones multiobjetivo se aplica en ambientes de certeza, pudiéndose manejar un número grande de alternativas (pero pocos criterios porque cada uno de ellos incrementa en uno la dimensión del espacio considerado); este enfoque es de uso más frecuente en problemas de administración. El análisis de decisiones multiatributo se aplica en ambientes de incertidumbre; este enfoque se ha usado más frecuentemente en problemas públicos con un número pequeño de alternativas, pero muy controvertidas, como la ubicación de una planta nuclear o de un aeropuerto y la administración de recursos hidráulicos [Keeney R.L. y Raiffa H., 1976]. El enfoque de relaciones binarias de sobreclasificación en sus modalidades actuales puede usarse en ambientes de certeza o de incertidumbre y se ha aplicado a problemas públicos y privados [Roy, B.; 1989].

En la toma de decisiones multiobjetivo el espacio de decisiones en general es continuo y está íntimamente relacionado con la programación matemática que considera varias funciones objetivo. Intenta resolver el denominado problema del vector máximo, estudiado originalmente por Kuhn y Tucker. Entre los enfoques multiobjetivo destacan la programación lineal multiobjetivo, la programación por metas y los métodos interactivos [Steuer, R.;1985]. Los dos primeros suponen que las preferencias del decisor se pueden representar por una función objetivo que es una combinación de las funciones objetivo de los criterios individuales. En el primero la función objetivo es una agregación de las funciones objetivo de los criterios individuales y en el segundo es una distancia a una solución ideal fija. El tercer enfoque usa solamente información local para llegar a una solución de compromiso aceptable. Los aspectos matemáticos de las otras dos áreas, toma de decisiones multiatributo y la de relaciones binarias de sobreclasificación, se consideran con detalle en la sec **1.4** a través de los métodos que más relación tienen con los resultados de la investigación.

Existen metodologías alternativas que utilizan la teoría Bayesiana de decisiones; a este respecto se mencionan los trabajos de DeGroot (1970), Bernardo (1979) y Venegas-Martínez (1990).

1.3 Métodos básicos

Media ponderada

En este método se tiene una estructura global de preferencia {P, I} dada por

$$\begin{cases} aPb \text{ si y sólo si} & \sum_{j=1}^{n} p_j\, g_j(a) > \sum_{j=1}^{n} p_j\, g_j(b) \\ aIb \text{ si y sólo si} & \sum_{j=1}^{n} p_j\, g_j(a) = \sum_{j=1}^{n} p_j\, g_j(b) \end{cases}$$

donde los pesos p_j representan tasas de sustitución entre criterios. Es aplicable cuando todos los criterios se pueden expresar en la misma escala mediante cambios de unidades. Este método es generalmente aceptable cuando los objetivos se pueden compensar para cambios locales suficientemente pequeños. Los criterios son criterios verdaderos, por lo que la estructura resultante es de preorden total. Si dichos criterios son pseudo-criterios o cuasi-criterios entonces las relaciones P, I no son necesariamente transitivas [Roy y Bouyssou, 1987b]. Este último es el caso de la aplicación de Scharling [1985] a las evaluaciones de estudiantes.

Método lexicográfico

En este método se tiene una estructura global de preferencia {P, I} dada por

$$\begin{cases} aPb \text{ si y sólo si existe un criterio } j \text{ tal que } g_j(a) > g_j(b) \text{ y} \\ \qquad g_i(a) = g_i(b) \text{ para todo criterio } i \text{ más importante que } j \\ aIb \text{ si y sólo si } g_i(a) = g_i(b)\ \forall\ i \end{cases}$$

Fishburn [1974] axiomatizó este método, el cual puede verse como un caso particular de la media ponderada: a los criterios se les asocian pesos cuyas diferencias son suficientemente grandes de manera que un incremento en un criterio nunca puede en la prática ser compensado por incrementos en criterios menos importantes. El interés de este método es más bien metodológico.

Método de suma de rangos (Borda)

En este método se tiene una estructura global de preferencia {P, I} dada por

$$\begin{cases} aPb \text{ si y sólo si } \sum_j r_j(a) < \sum_j r_j(b) \\ aIb \text{ si y sólo si } \sum_j r_j(a) = \sum_j r_j(b) \end{cases}$$

donde $r_j(a)$ es el rango de a para el criterio j, es decir la posición que ocupa a cuando las acciones se ordenan en el orden en que decrecen los valores de la función g_j. Este método puede verse como un caso particular del método de la media ponderada: para todo j hacer $p_j = 1$ y

$$g_j(a) = (|A| + 1) - r_j(a)$$

(El término (|A| + 1) por ser una constante puede omitirse, sirve para evitar signos menos en $g_j(a)$). Este método fue propuesto (en una forma más general) a la Academia de Ciencias de Paris en 1770 por Jean-Charles de Borda para agregar n ordenamientos en un ordenamiento único. Es el primer método en el que los datos del problema se dan en forma ordinal. La suma de los rangos puede verse como el inicio de la teoría de utilidad multiatributo [Vansnick, 1986].

Método de la mayoría (Condorcet)

En 1785 el marquez de Condorcet propone una solución distinta al problema estudiado por Borda, la cual consiste en considerar que *aPb* cuando el número de criterios (o de votantes) para los cuales *a* es mejor que *b* es mayor que el número de criterios para los cuales *b* es mejor que *a*, es decir se tiene una estructura global de preferencia {P, I} dada por

$$\begin{cases} a\text{P}b \text{ si y sólo si } \#(a,b) > \#(b,a) \\ a\text{I}b \text{ si y sólo si } \#(a,b) = \#(b,a) \end{cases}$$

donde $\#(a,b)$ es el número de criterios en que *a* es mejor que *b*.

La relación P no es necesariamente transitiva. La paradoja de Condorcet se da cuando ocurre un ciclo en la relación P. Por ejemplo, se tienen tres criterios respecto de los cuales las acciones *a*, *b* y *c* tienen los ordenamientos *abc*, *bca* y *cab*, respectivamente. El número de criterios en que *a* es mejor que *b* es dos, mientras que el número de criterios en que *b* es mejor que a es uno, por lo que aPb; similarmente resulta bPc, cPa. A diferencia del método de Borda, dos alternativas que se encuentran próximas en los ordenamientos de todos los criterios no necesariamente se encuentran próximas en el ordenamiento final. El método de Condorcet puede verse como el inicio de los métodos de sobreclasificación [Vansnick, 1986].

1.4 Otros métodos

Método de teoría de utilidad multiatributo

El modelo básico considera:

- un conjunto finito de alternativas de decisión

$$X = \{X_i\} \ , \ i=1,2,\ldots,n$$

- un conjunto finito de metas, atributos o criterios

$$G = \{g_j\} \ , \ j=1,2,\ldots,m$$

con los que se juzga cada alternativa o acción. Se pretende determinar la alternativa óptima idónea para el decisor.

En la teoría de utilidad multiatributo las preferencias del decisor para cada criterio (atributo) i se modelan mediante una función u_i tal que para todo a, $b \in A$ se tiene a mejor que b respecto al atributo i si y sólo si $u_i(a) > u_i(b)$. Estas funciones u_i se agrupan en una función $U : A \longrightarrow \mathbb{R}$, que convierte el problema multicriterio en uno de optimización matemática. Para garantizar la existencia de la función de utilidad U que modela las preferencias del decisor se tiene una serie de postulados que deben cumplir dichas preferencias (como la transitividad). Al aplicar este método se presentan tres tipos de problemas:

a) cuáles deben ser las propiedades de las preferencias del decisor para que U adopte una determinada forma en términos de los criterios g_1, g_2,..., g_n; (por ejemplo: $U = \sum_{i=1}^{n} g_i$)

b) cómo probar e identificar esas propiedades

c) cómo construir dicha función U.

Una idea fundamental sobre la que reposa la teoría de utilidad multiatributo es la de independencia preferencial. $K \subset G$ es *preferencialmente independiente* en G si las preferencias entre acciones que difieren sólo en los criterios en K no dependen de sus valores para los criterios en G\K. Formalmente [Fishburn; 1970].

Sean $G = G_1 \times G_2$, un orden débil. Para todo x_1, $y_1 \in G_1$ y

$$x_2, y_2 \in G_2, \text{ si } (x_1, x_2) \quad (y_1, x_2) \Rightarrow (x_1, y_2) \quad (y_1, y_2)$$

$$\text{y } (x_1, x_2) \quad (x_1, y_2) \Rightarrow (y_1, x_2) \quad (y_1, y_2)$$

entonces G_1 y G_2 son *preferencialmente independientes.*

Otro concepto fundamental es el de tasa de sustitución ("tradeoff"). La existencia de una función U que agrega los criterios $g_1, g_2, \ldots, g_n$ exige la existencia de una función W_{ij} que mida el monto que el decisor concede sobre el j-ésismo criterio para obtener una unidad en el i-ésismo criterio. W_{ij} es la *tasa de sustitución* entre el i-ésismo y el j-ésismo criterio. En la práctica no es fácil determinar la función U y las tasas de sustitución. Además la condición de independencia preferencial no siempre se cumple.

Método UTA [Siskos;1980, Jacquet-Lagreze,Siskos;1982, mejorado en Siskos, J., Yannacopoulos D.; 1983]

Existen muchos métodos para determinar una función de utilidad U que se ajuste "lo mejor posible" a las preferencias globales dadas para un conjunto de alternativas. Entre estos están los de análisis del discriminante o de regresión lineal múltiple, los cuales tratan de determinar las constantes k_j que dan el mejor ajuste a una función de utilidad aditiva

$$U(a) = \sum_{j=1}^{n} k_j g_j(a)$$

En el método UTA (**UT**ility **A**ditive) se generaliza esta formulación intentando determinar una función de utilidad "óptima" usando programación lineal seguida de un análisis de sensibilidad. Los criterios X_j se expresan en forma numérica. Sean x_j y y_j el peor y el mejor estado de X_j. El intervalo $[x_j, y_j]$ se subdivide en r_j intervalos equidistantes denotados por $[u_j^i, u_j^{i+1}]$,

$l=1,\dots,r_j$, donde

$$u_j^l = x_j + \frac{l-1}{r_j}(y_j - x_j)$$

El método consiste en encontrar $U_j(u_j^l)$, con lo que se determina la función de utilidad. Si $z_j \in [u_j^l , u_j^{l+1}]$ mediante interpolaciones lineales se tiene

$$U_j(z_j) = U_j(u_j^l) + \frac{z_j - u_j^l}{u_j^{l+1} - u_j^l}\left[U_j(u_j^{l+1}) - U_j(u_j^l) \right]$$

Sea
$$U(a) = \sum_{j=1}^{n} U_j(x_j^a) + \sigma(a)$$

donde $x_j^a = g_j(a)$ y $\sigma(a)$ es el error asociado a la estimación de $U(a)$. Se supone que las preferencias del decisor sobre un subconjunto A' de acciones reales o ficticias se conocen. Se tienen las restricciones

$$\begin{cases} U(a) - U(b) > 0 \text{ si } aPb, \\ U(a) - U(b) = 0 \text{ si } aIb, \\ U_j(u_j^{l+1}) - U_j(u_j^l) > 0, \ \forall j, \ \forall l, \\ \sum_{j=1}^{n} U_j(y_j) = 1 \qquad \forall\ a,b \in A' \\ U_j(x_j) = 0, \qquad \forall j, \\ U_j(u_j^l) \geq 0, \quad \sigma(a) \geq 0, \end{cases}$$

donde $U(a)$ y $U(b)$ se reemplazan por sus expresiones en las variables u_j^l, $\sigma(a)$ y $\sigma(b)$. La primera etapa del método consiste en determinar las variables de manera que se minimice

$$\sum_{a \in A'} \sigma(a)$$

Se resuelve el programa lineal con

$$Q + 2\sum_{q=1}^{Q}(n_q - 1) + \sum_{j=1}^{n} r_j$$

restricciones (la transitividad de P y de I permiten eliminar restricciones redundantes) y

$$\sum_{j=1}^{n} r_j + \sum_{q=1}^{Q} n_q$$

variables, donde Q es el número de clases de indiferencia del preorden total sobre A' y n_q(q=1,2,...,Q) es el número de acciones en la q^{e} clase. Las restricciones de positividad estricta son reemplazadas por desigualdades en las que los segundos miembros son números positivos pequeños (que pueden ser interpretados como umbrales de indiferencia).

En esta primera etapa se encuentra una función de utilidad U lineal por partes. Esta función es relativamente arbitraria porque depende de la elección del criterio de error a minimizar, a saber, la suma de los errores $\sigma(a)$. En efecto, si el mínimo es igual a cero, esto significa que el poliedro de las restricciones no es vacío y que hay numerosas funciones U que representan sin errores las preferencias del decisor sobre el conjunto A'. Si el mínimo no es cero, entonces las preferencias no son representables sin error por una función lineal por partes U en los intervalos mencionados; la función que representa mejor las preferencias depende entonces del criterio elegido: por ejemplo, el preorden total que corresponde a la solución óptima del programa lineal no es necesariamente más próxima (en el sentido de los índices clásicos de Kendall o de Spearman) al preorden total construido por el decisor. Esta es la razón por la que los autores del método UTA proponen una segunda etapa en el que se explora la vecindad de la solución obtenida. Esta exploración se hace adjuntando al sistema de restricciones de la etapa anterior la desigualdad

$$\sum_{a \in A'} \sigma(a) \le F^{*} + \Delta,$$

donde F^{*} es el valor mínimo obtenido en la etapa anterior y Δ un pequeño porcentaje de F^{*}. Bajo el nuevo sistema de restricciones, las funciones

$$\sum_{j=1}^{n} \rho_j U_j(y_j)$$

donde ρ_j = 0 ó 1, $\forall$ j, y esto, para diferentes juegos de valores de ρ_j, genera un conjunto $\mathcal{U}$ de funciones de utilidad aceptables para representar las preferencias del decisor.

De esta información se puede obtener ya sea una función única, como en PREFCALC [Jaquet-Lagreze; 1984], que es un programa de ayuda a la decisión basado en un modelo aditivo, o bien una relación de sobreclasificación determinista o borrosa [Jaquet-Lagreze; 1981].

El UTA mejorado utiliza un programa lineal para estimar las utilidades marginales u_i con las restricciones dadas anteriormente. La técnica de estimación supone la discretización de cada intervalo de variación de los criterios

$$[g_{i*}, g_i^*] = [g_{i*} \equiv g_i^1, g_i^2, \ldots, g_i^{\alpha_i} \equiv g_i^*]$$

Las modificaciones en el nuevo modelo son:

-para las restricciones de monotonía de los criterios se hacen las transformaciones de variables

$$w_{ij} = u_i(g_i^{j+1}) - u_i(g_i^j) \geq 0 \quad \forall\ i \text{ et } j$$

-las utilidades $u[g(a)]$ son funciones de w_{ij}, es decir, como $u_i(g_i^1) = 0$, en a, para $j > i$:

$$u_i(g_i^j) = \sum_{k=1}^{j-1} w_{ik}$$

-se introduce una doble función de error:

$$\Delta(a,b) = u[g(a)] - u[g(b)] + \sigma^+(a) - \sigma^-(a) - \sigma^+(b) + \sigma^-(b)$$

-se resuelve el programa lineal:

$$\text{minimizar } F = \sum_{a \in A}[\sigma^+(a) - \sigma^-(a)]$$

restringido a

$$\Delta(a,b) \geq \delta \qquad \text{si } a \succ b$$

$$\Delta(a,b) = 0 \qquad \text{si } a \sim b$$

$$\sum_i \sum_j W_{ij} = 1$$

$W_{ij} \geq 0$, $\sigma^+(a) \geq 0$, $\sigma^-(a) \geq 0$ $\forall$ i, j, $a \in A$, $\delta \in \mathbb{R}$ pequeño positivo

Métodos ELECTRE y otros

La rama más reciente de la toma de decisiones es la de relaciones binarias de sobreclasificación. Nace al inicio de los años sesenta con Bernard Roy con el nombre de "ayuda a la decisión multicriterio", y da más importancia a la aplicabilidad de los resultados que a los métodos. Roy da un paso importante en la solución de problemas reales usando la optimación de un criterio como una aproximación para resolver problemas con multiplicidad de ellos. En este enfoque los problemas no se resuelven reemplazando al decisor por un modelo sino ayudándolo a construir su solución describiendo sus posibilidades. Roy afirma que no siempre es necesario tener una completa clasificación de las decisiones factibles para tomar una decisión. En los métodós ELECTRE la evaluación según los criterios puede ser cualitativa.

El proceso se desarrolla en dos etapas que pueden ser tratadas de acuerdo con la formulación particular del problema. En la primera se construye una relación de sobreclasificación sobre el conjunto de decisiones, la cual modela sólo la parte segura de las preferencias del decisor según cada criterio y la información disponible y en la segunda se aprovecha dicha relación para resolver el problema de toma de decisiones.

Definición

Sean a,b *dos acciones del conjunto* A. *Se dice que la acción* a sobreclasifica a b *si los argumentos a favor de la preferencia de* a *sobre* b, *considerando todos los criterios, son significativos y aquellos en favor de la preferencia inversa no los son.*

Todo problema de evaluación se puede reducir a una de las siguientes problemáticas de referencia (tabla 1.1).

Problemática	Objetivos	Resultados
α	Aclarar la decisión por la elección de un subconjunto lo más restringido posible con vista a una elección final de una sola acción, este subconjunto debe contener a las «mejores» acciones (óptimas) o en su defecto acciones «satisfactorias» (a satisfacer)	Una *selección* o un proceso de elección
β	Aclarar la decisión por una selección resultante de una afectación de cada acción a una categoría; las categorías se definen *a priori* en función de normas que tienen que ver con el seguimiento que se va a dar a las acciones que están destinadas a recibir	Una *clasificación* o procedimiento de segmentación
γ	Aclarar la decisión por una clasificación obtenida al reagrupar todo o parte (las «que más satisfacen») de las acciones en clases de equivalencia, estas clases se ordenan de manera completa o parcial conforme a las preferencias	Un *ordenamiento* o un procedimiento de clasificación
∂	Aclarar la decisión por una descripción en un lenguaje apropiado, de las acciones y de sus consecuencias	Una *descripción* o un conocimiento cognoscitivo

[Roy, B.; 1985]

Tabla 1.1

Existen varios métodos de sobreclasificación, los cuales difieren en el tipo de información que requieren y que proporcionan. A continuación se describen algunos de estos métodos.

El ELECTRE I [Roy, B; 1968] es un procedimiento para encontrar el subconjunto de alternativas no dominadas, lo que permite reducir el número de alternativas del problema. Resuelve problemas del tipo γ (tabla 1.1).

El ELECTRE II [Roy,B;Bertier,P;1971] es una generalización del método anterior. Considera niveles de concordancia y discordancia para construir dos relaciones de sobreordenamiento, una fuerte y otra débil. Estas relaciones se utilizan en un proceso iterativo para obtener un ordenamiento parcial de las alternativas. La problemática que trabaja es tipo γ.

El ELECTRE III [Roy B.; 1978] ordena parcialmente un conjunto de acciones evaluadas con una familia de pseudo-criterios. El modelo de sobreclasificación se construye utilizando índices de concordancia y discordancia, un grado de verosimilitud marginal y un umbral de discriminación. Como resultado se obtienen dos ordenamientos, uno ascendente y otro descendente, los cuales no necesariamente coinciden. Si esto último ocurre se elige uno intermedio que resuelve las discrepancias entre ellos. Para la elección del ordenamiento ascendente [Roy y Slowinski; 1990].

El ELECTRE IV [Roy B., Hugonnard J. C.; 1982] fue diseñado para enfrentar imprecisión e incertidumbre en la evaluación de alternativas con seudo-criterios y carencia de pesos para la valorización relativa entre ellos, lo cual no contempla el ELECTRE III. El ELECTRE IV, a diferencia del III, obtiene el correspondiente ordenamiento parcial a través de dos relaciones de sobreclasificación, una fuerte y la otra débil.

El método ORESTE [Roubens, M; 1982] construye una relación de sobreclasificación sobre el conjunto de acciones. Se supone que las preferencias del decisor forman un orden débil en cada criterio y un semi-orden sobre el conjunto de los criterios dados. El método tiene tres etapas: en la primera, se definen distancias respecto a cada criterio de un origen arbitrario a las distintas acciones, en la segunda se clasifican las acciones y en la tercera se considera una agregación de preferencias. Finalmente se obtiene un ordenamiento parcial de alternativas. Una extensión de este método se encuentra en Pastijn H., *et al.* [1989].

El método MAPPACC [Matarazzo,B.; 1984, 1986] resuelve problemas de selección discreta caracterizados por criterios múltiples de evaluación. Se basa en comparaciones de pares de alternativas con pares de criterios. A través de estas comparaciones se establecen las relaciones de sobreclasificación de las preferencias del decisor. Este método se usa sólo en caso que la evaluación de los criterios sea cuantitativa. Después de clasificar el conjunto de alternativas iniciales el método contempla una agregación de ellas.

Los métodos PROMETEO I y II [Brans. J.P.; Vincke, Ph.; 1985] consideran seis tipos de criterio de comparación, algunos de los cuales consideran explícitamente umbrales de preferencia y de indiferencia. Estos criterios corresponden con los seudo-criterios de los ELECTRE. Para cada par de alternativas, las preferencias asociadas a dichos criterios se agregan, dando por resultado un índice de preferencia, que se evalúa para cada par de alternativas. Resulta una red de flujos en los que las alternativas estan representadas por los nodos y los índices de preferencia por los flujos en los arcos. En el PROMETEO I la correspondiente relación de sobreclasificación determina un ordenamiento parcial (se permite la no comparabilidad) mientras que en el PROMETEO II el orden que se obtiene es total.

1.5 Análisis comparativo de teoría de utilidad multiatributo y de relaciones binarias de sobreclasificación

En la teoría de utilidad multiatributo se supone que las preferencias del decisor están claramente definidas y que cumplen ciertas condiciones, denominadas de racionalidad, las cuales garantizan la existencia de una función de utilidad y con ello la posibilidad de elegir una mejor opción. Esto tiene la desventaja de exigir que las preferencias sean completas, en el sentido que el decisor debe poder comparar todas las alternativas. Los métodos de relaciones binarias de sobreclasificación, como los ELECTRE, PROMETEO, MAPPACC y el ORESTE, son del tipo no compensatorio porque evitan que una desventaja significativa en un criterio pueda ser compensada por ventajas menores en otros criterios. Utilizan distintos parámetros de evaluación de alternativas y las soluciones que proporcionan varían de un método a otro. Los ELECTRE pueden presentar dificultades prácticas, por ejemplo, al utilizar una relación borrosa de sobreclasificación, al calcular los índices de concordancia y discordancia, así como al especificar umbrales de preferencia e indiferencia. Los métodos MAPPACC y PROMETEO intentan solucionar dificultades de este tipo.

A diferencia del ORESTE y el PROMETEO II, el resto de los métodos dan ordenamientos parciales, lo que tiene la ventaja de evitar supuestos que limitan el modelado de las preferencias del decisor.

Los métodos de sobreclasificación toman en cuenta la no comparabilidad de las alternativas, situación muy frecuente en la práctica consistente en no poder establecerse una preferencia o una indiferencia entre dos acciones. Esta puede deberse a falta de información sobre las acciones o de discriminación del tipo preferencial. Otra caracteristica relevante de estos enfoques es que los aspectos cualitativos no tienen que cuantificarse para ser evaluados en la matriz de impacto

Es importante señalar que los métodos de sobreclasificación en su base conceptual permiten cierta elasticidad para procesar y resolver problemas, persiguiendo que las soluciones sean factibles, oportunas, buenas (no necesariamente óptimas) y acordes con las necesidades del decisor y la disponibilidad de información.

Ambos emboques se diferencian también en la forma en que especifican numéricamente la importancia relativa de los criterios. Las tasas de sustitución y los indices de importancia de alguna manera representan la relevancia relativa de los distintos criterios que intervienen en la evaluación de las acciones, usándose los primeros en la teoria de utilidad mutiatributo y los segundos en el enfoque de relaciones binarias de sobreclasificación.

Las tasa de sustitución del criterio g_i respecto del criterio g_j se define como el aumento en el criterio g_j que compensa la pérdida de una unidad en el criterio g_i, es decir, es el valor Δ_{ij} tal que

$$(g_1,\ldots g_n) \text{ es indiferente a } (g_1,\ldots,g_i-1,\ldots,g_j+\Delta_{ij},\ldots g_n)$$

Se puede demostrar que si la función de utilidad es diferenciable entonces dicha tasa de sustitución está dada por

$$\Delta_{ij} = \frac{\partial U(g)}{\partial g_i} \bigg/ \frac{\partial U(g)}{\partial g_j}$$

El índice de importancia k_i del criterio g_i es un número positivo tal que para cualquier coalición $C \subseteq F$ de criterios la cantidad $k[C]$ definida por

$$k[C] = \Sigma\, k_i \text{ para } i \in C$$

es una medida de la importancia de dicha coalición C. En particular, si $C(a,b) \subseteq F$ denota el conjunto de criterios i para los que $a\ S_i b$ (respecto del criterio i la alternativa a es al menos tan buena como b), entonces los índices de importancia son tales que para todo par de alternativas a, b si la alternativa a sobreclasifica a la alternativa b entonces

$$k[C(a,b)] \geq s$$

donde $s \geq 0$ se denomina umbral de concordancia.

Ambos enfoques tienen ventajas y desventajas que a grandes rasgos se resumen como sigue.

El enfoque de relaciones binarias de sobreclasificación se caracteriza por

- evitar que una desventaja significativa en un criterio pueda ser compensada por ventajas menores en otros criterios
- permitir la no comparabilidad entre las alternativas
- buscar buenas y oportunas soluciones sin exigir que sean óptimas
- no requerir cuantificar los aspectos cualitativos

Por otro lado, el enfoque de teoría de utilidad multiatributo, aunque carece de las ventajas anteriores:

- cuenta con una estructura axiomática que permite asegurar la existencia de una función de utilidad óptima
- llega a ordenamientos totales de alternativas

En los problemas reales los métodos de relaciones binarias de sobreclasificación y los de utilidad pueden complementarse en vez de competir y así mejorar el proceso de toma de decisiones. En la tabla 1.2 se resumen aspectos relevantes de los dos enfoques.

TEORIA DE UTILIDAD	RELACIONES BINARIAS DE SOBRECLASIFICACION
INICIALMENTE EL SISTEMA DE PREFERENCIAS DEL DECISOR:	
Existe: el decisor puede expresar sus preferencias entre pares de alternativas (prefiere una a la otra o es indiferente entre ellas) Es "racional": salvo eventuales desviaciones, que el decisor está dispuesto a corregir, cumple condiciones de "racionalidad", como la transitividad de la preferencia	No existe o es incompleto: el decisor no puede o tiene dificultades para expresar sus preferencias
EL PROBLEMA DE MODELAR LAS PREFERENCIAS CONSISTE EN:	
Describir el sistema de preferencias del decisor	Construir el sistema de preferencias al mismo tiempo que este se modela
LAS PREFERENCIAS SOBRE CADA CRITERIO SE MODELAN MEDIANTE:	
Una función de utilidad parcial La consecuencia sobre el criterio se representa mediante una variable que es aleatoria si hay incertidumbre	Una relación de sobreclasificación. La imprecisión, incertidumbre e indeterminación se representan a través de umbrales de discriminació (preferencia e indiferencia)
LAS PREFERENCIAS PARCIALES SE AGREGAN MEDIANTE:	
(hay independencia en utilidad) $g(s) = [\ \Pi\ (1 + kk\ g\ (s))-1](1/k)$ ó $g(s) = \sum_i k_i g_i (s)$	Una relación binaria de sobreclasificación robusta o borrosa
IMPORTANCIA RELATIVA DE LOS CRITERIOS	
factores de peso/ tasas de sustitución	índices de importancia

Tabla 1.2

Conveniencia de aprovechar ventajas de ambos métodos

Por lo anterior surge la conveniencia de examinar la posibilidad de elaborar un método de toma de decisiones que aproveche ventajas de los enfoques de teoría de utilidad multiatributo y de relaciones binarias de sobreclasificación. Idealmente este debiera reducirse al método de teoría de utilidad multiatributo cuando el decisor tiene un sistema de preferencias perfectamente claro, en el que todas las alternativas pueden diferenciarse preferencialmente, y además racional en el sentido de la teoría de utilidad. Cuando este no fuera el caso porque el decisor tiene dificultades para especificar sus preferencias, entonces debiera, como algunos métodos de relaciones binarias de sobreclasificación, dar la posibilidad de manejar explícitamente las imprecisiones asociadas. Para diseñar un método de este tipo habría que encontrar una alternativa al concepto de índice de importancia, usado por los métodos de relaciones binarias de sobreclasificación, porque son rígidos e incompatibles con los modelos de utilidad y exigen gran precisión en la jerarquización de los criterios. En el siguiente capítulo se explora dicha posibilidad y se llega a un método con las características mencionadas.

2. METODO DE SOBRECLASIFICACION PROPUESTO

Se presenta un método de toma de decisiones multicriterio en el que las preferencias del decisor se modelan usando conceptos tanto de teoría de utilidad multiatributo como de relaciones binarias de sobreclasificación. Se considera que el decisor puede suministrar cierta información de modo que sus preferencias y correspondientes imprecisiones y contradicciones se pueden representar por medio de una familia de funciones de utilidad. Al comparar dos alternativas esta familia de funciones de utilidad se particiona en tres clases según apoyen a una u a otra alternativa o no distingan preferencialmente entre ambas. Esto lleva de manera natural a una escala continua de la medida de la preferencia en la que se acepta que las preferencias en sentidos opuestos puedan tener simultáneamente medidas distintas de cero. Para resolver parte de estos conflictos se introducen umbrales de preferencia, indiferencia y veto que llevan a una relación de sobreclasificación que transforma la representación de las preferencias de una escala continua en una discreta. El método puede clasificarse como de relaciones binarias de sobreclasificación y puede hacerse interactivo alternando etapas de cálculo y diálogo.

2.1 Marco de referencia

El método que se propone está dirigido principalmente a casos en que el decisor no tiene claramente definido su sistema de preferencias, al menos al principio del proceso, en el sentido que no necesariamente puede especificar sus preferencias entre pares de alternativas. Esto ocurre en particular cuando el decisor es un comité formado por especialistas que aisladamente pueden dar preferencias para subconjuntos de criterios, no sobre la totalidad de ellos, pero que en equipo pueden acordar preferencias globales o métodos para llegar a ellas.

Un caso especifico es la elección de un contratista que realizará un proyecto al que se exige cierta cantidad de condiciones y especificaciones. En la decisión interviene un comité que tiene la reponsabilidad de ordenar las distintas alternativas de acuerdo con los objetivos e intereses de la empresa. Cada miembro del comité es por separado incapaz de juzgar globalmente las distinas alternativas, pero puede trasmitir al grupo consecuencias que se tendrían para las distintas alternativas en términos de los objetivos que todos los miembros entienden y comparten. Supóngase además que los miembros del comité están familiarizados con asignar pesos a los distintos criterios. Esto puede aprovecharse para que en vez de factores de peso los especialistas den para cada criterio un intervalo de variación de los pesos, dentro de los cuales están seguros debe estar comprendido el peso correspondiente. Estos intervalos determinan una familia de funciones de utilidad que de alguna manera contiene información sobre las preferencias de todos los especialistas del comité. Esto plantea el problema de buscar un procedimiento para pasar de esta familia de funciones de utilidad a un modelo que represente las preferncias del grupo.

En estos casos para modelar las preferencias del decisor se puede aceptar la existencia de una familia $\mathcal{U}$ de funciones de utilidad "igualmente buenas". Por ejemplo, al ajustar una función de utilidad lineal las dudas sobre las tasas de sustitución podrían llevar a fijar intervalos de variación a los coeficientes de peso de modo que toda función de utilidad cuyos coeficientes estén comprendidos dentro de los respectivos intervalos podria considerarse aceptable y por tanto formando parte del conjunto $\mathcal{U}$. En general esta familia contendrá contradicciones cuando se aplica a las alternativas disponibles, que deberán resolverse con base en las preferencias del decisor.

Lo anterior plantea dos preguntas: a) cómo construir la familia $\mathcal{U}$ y b) cómo aprovechar dicha familia para resolver el problema de toma de decisiones. Para lo primero se puede considerar una parametrización en la que cada miembro de la familia está dado por un juego de valores de parámetros cuyos respectivos dominios de variación especifican precisamente a $\mathcal{U}$. Para lo segundo es necesario resolver aunque sea parcialmente los conflictos entre las distintas funciones de utilidad que forman la familia $\mathcal{U}$, para lo cual, por permitir el manejo de situaciones conflictivas y de ambigüedad, resulta conveniente hacerlo a través de una relación binaria de sobreclasificación S sobre las alternativas, que tome en cuenta al conjunto $\mathcal{U}$ pero que contenga información adicional sobre las preferencias del decisor. Mediante interacciones con el decisor la familia $\mathcal{U}$ y la relación binaria de sobreclasificación S sobre las alternativas se pueden ir depurando para que representen mejor sus preferencias, hasta que se considera que la información disponible permite tomar la decisión.

Las preferencias del decisor se representan entonces mediante:

(a) una familia $\mathcal{U}$ de funciones de utilidad, la cual para cada par x,y de alternativas se particiona en tres clases de equivalencia

$$\mathcal{U}_{x>y} = \left\{ u \in \mathcal{U} : u(x) > u(y) \right\}$$

$$\mathcal{U}_{x=y} = \left\{ u \in \mathcal{U} : u(x) = u(y) \right\}$$

$$\mathcal{U}_{x<y} = \left\{ u \in \mathcal{U} : u(x) < u(y) \right\}$$

(b) una medida m sobre estos subconjuntos tal que $m(\mathcal{U}_{x>y})$, $m(\mathcal{U}_{x=y})$, $m(\mathcal{U}_{x<y})$ representan el grado en que el decisor prefiere la alternativa x a la alternativa y, es indiferente entre ellas y el grado en que prefiere y a x, respectivammente.

Por ser m una medida:

$$m \text{ es no negativa}$$
$$m(\emptyset) = 0$$
$$\text{si } A \cap B = \emptyset \text{ entonces } m(A \cup B) = m(A) + m(B) \qquad \forall A,B \in \mathcal{U}$$

Por la transitividad de la relación > sobre $\mathbb{R}$

$$(\mathcal{U}_{x>y}) \cap (\mathcal{U}_{y>z}) \subseteq (\mathcal{U}_{x>z}) \tag{2.1}$$

2.2 Determinación de una familia $\mathcal{U}$ de funciones de utilidad

Se supone que las funciones de utilidad de la familia $\mathcal{U}$ están dadas por una función continua $u(x; p_1,\dots,p_n)$, donde $p_1,\dots,p_n$ es el juego de parámetros cuyos valores especifican el elemento de $\mathcal{U}$ que se considera. La familia $\mathcal{U}$ tiene entonces asociada una región de parámetros en el espacio $\mathbb{R}^n$, que se supone continua, en la que cada punto corresponde con un elemento de $\mathcal{U}$. Si el dominio de cada parámetro es un intervalo cerrado, y dichos parámetros son independientes, en el sentido que el dominio de variación del vector $p_1,\dots,p_n$ es cualquier punto del producto cartesiano de los respectivos dominios, que es lo que aquí consideramos, entonces la familia $\mathcal{U}$ está dada por 2n valores $m_1,\dots,m_n$, $M_1,\dots,M_n$, con $m_i \le M_i$, de modo que

$$u(.; p_1,\dots,p_n) \in \mathcal{U} \qquad \text{si y sólo si} \qquad p_i \in [m_i, M_i]$$

Las suposiciones de continuidad mencionadas permiten asegurar que pasar de un elemento a otro en $\mathcal{U}$, próximos entre sí en alguna métrica (L_2 por ejemplo), corresponde a un "cambio pequeño en las preferencias". Recíprocamente, se supone que $\mathcal{U}$ es lo suficientemente rica[1] como para que "cambios pequeños en las

---

[1] $\mathcal{U}$ podría ser una vecindad de funciones respecto de la métrica elegida

preferencias" alrededor de un elemento en $\mathcal{U}$ están representados por elementos de $\mathcal{U}$. Esto significa que $\mathcal{U}$ contiene todas las funciones de utilidad aceptables para el problema considerado, sea directamente o por intermedio de una transformación monótona.

Familia de funciones aditivas

Considere el caso en que $\mathcal{U}$ es una familia de funciones de utilidad aditivas en n criterios. Para cada criterio i, $i=1,\dots,n$, se conoce la respectiva función de utilidad, cuyos valores por comodidad se denotan mediante un símbolo con el subíndice correspondiente. De acuerdo con lo anterior, la familia $\mathcal{U}$ de funciones de utilidad aditivas se especifica por las cotas m_i, M_i, $m_i \leq M_i$ de los factores de peso de cada criterio i:

$$u \in \mathcal{U} \qquad \text{si y sólo si} \qquad u(x) = \sum_i p_i x_i \qquad p_i \in [m_i, M_i]$$

Los factores p_i se interpretan como factores de peso imprecisos.

La familia de funciones de utilidad así definida está determinada por un paralelepípedo en el espacio de factores de peso, donde cada punto tiene por coordenadas $p_i \in [m_i, M_i]$. Dicha familia corresponde a un cono en el espacio de criterios, donde cada rayo tiene la dirección del gradiente de la función de utilidad admisible considerada. En este último caso el hiperplano ortogonal al rayo es paralelo a las superficies de indiferencia de la función. Una función de utilidad admisible se puede entonces elegir sea por los factores de peso $p_i \in [m_i, M_i]$, por la dirección del gradiente de esta función o por la respectiva superficie de indiferencia (hiperplano ortogonal a dicho gradiente). Las clases de equivalencia $\mathcal{U}_{x>y}$, $\mathcal{U}_{x=y}$ y $\mathcal{U}_{x<y}$ que particionan la familia $\mathcal{U}$ forman sendos subconos en el espacio de criterios.

2.3 Matriz de preferencias

Se propone representar las preferencias del decisor por una medida m sobre los subconjuntos $\mathcal{U}_{x>y}$, $\mathcal{U}_{x=y}$, $\mathcal{U}_{x<y}$ de modo que $m(\mathcal{U}_{x>y})$, $m(\mathcal{U}_{x=y})$, $m(\mathcal{U}_{x<y})$, significan el grado en que el decisor prefiere la alternativa x a la alternativa y, es indiferente entre ellas y el grado en que prefiere y a x, respectivamente. Esta medida es más fácil de interpretar y determinar en el espacio de parámetros que en el de alernativas porque en el primero la región factible es un paralelepípedo y en el segundo, cuando las funciones de utilidad son aditivas, un cono con un perfil que puede ser muy irregular. En el espacio de parámetros cada par de alternativas determina una superficie de indiferencia que divide a dicho espacio en dos porciones, la de las funciones de utilidad que apoyan a una alternativa frente a la otra y la de las funciones de utilidad cuyo apoyo tiene el sentido opuesto. La medida de la preferencia de una alternativa x sobre otra alternativa y se define como el volumen de la porción del paralelepípedo que queda del lado de la superficie de indiferencia que apoya a la alternativa x sobre la alternativa y. Es decir,

$$m(\mathcal{U}_{x>y}) = \int\cdots\int_{p\in C(x>y)} dp_1\ldots dp_n \qquad (2.2)$$

donde

$$C(x > y) = \left\{ (p_1,\ldots,p_n):\ p_i \in [m_i, M_i],\ u(x;\ p_1,\ldots,p_n) > u(y;\ p_1,\ldots,p_n) \right\}$$

Considerando que la utilidad es aditiva

$$C(x > y) = \left\{ (p_1,\ldots,p_n):\ p_i \in [m_i, M_i],\ p'(x - y) > 0 \right\} \qquad (2.3)$$

donde p' denota la traspuesta de $p = (p_1,\ldots p_n) \in \mathbb{R}^n$ (p'z es un producto escalar). C(x > y) es entonces la intersección del semiespacio abierto con dirección (x-y) y el paralelepípedo factible. Para calcular numéricamente el volumen de C(x > y), dado por la integral (2.2), es apropiado el método de Montecarlo.

La medida de la indiferencia es cero, excepto el caso *degenerado*, en el cual

$$p'(x - y) = 0$$

por lo que $C(x > y) = C(y > x) = \emptyset$ y por tanto

$$m(\mathcal{U}_{x>y}) = m(\mathcal{U}_{y>x}) = 0 \qquad m(\mathcal{U}_{x=y}) \neq 0$$

lo que significa que las alternativas x,y no son distinguibles preferencialmente. Este caso se obtiene cuando $x_i = y_i$ siempre que m_i, $M_i \neq 0 \ \forall\ i$.

Para simplificar la notación en vez de $m(\mathcal{U}_{x>y})$ y $m(\mathcal{U}_{x=y})$ también se usa m(xPy) y m(xIy), respectivamente:

$$m(xPy) = m(\mathcal{U}_{x>y}), \quad m(xIy) = m(\mathcal{U}_{x=y})$$

Para todo par de alternativas x,y la suma m(xPy) + m(xIy) + m(yPx) es la misma e igual al volumen de la región factible de los parámetros.

A partir de m(xPy) se define la medida normalizada m^* mediante

$$m^*(xPy) = \frac{m(xPy)}{m(xPy) + m(yPx) + m(xIy)}$$

$$m^*(xIy) = \frac{m(xIy)}{m(xPy) + m(yPx) + m(xIy)}$$

Se pueden demostrar las siguientes propiedades

a) para todo par x,y de alternativas se cumple la condición de normalización

$$m^*(xPy) + m^*(xIy) + m^*(yPx) = 1$$

b) la medida de la indiferencia es simétrica

$$m^*(xIy) = m^*(yIx)$$

c) la medida de la indiferencia es reflexiva y la de la preferencia irreflexiva

$$m^*(xIx) = 1;\ m^*(xPx) = 0$$

La *matriz de preferencia* **P** asociada a la familia $\mathcal{U}$ de funciones de utilidad se define por

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \textbf{alternativas} \\ \\ \end{array} \quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} & \textbf{alternativas} & \\ x & y & z \end{array} \\ \begin{array}{c} x \\ y \\ \vdots \\ z \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & m^*(xPy)\ldots\ldots & m^*(xPz) \\ m^*(yPx) & 0\ \ldots\ldots & m^*(yPz) \\ \vdots & & \vdots \\ m^*(zPx) & m^*(zPy)\ \ldots\ldots & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Los elementos de esta matriz toman valores entre 0 y 1; la suma de un elemento con su simétrico es uno, excepto si el par x,y es degenerado, en cuyo caso vale cero.

2.4 Transitividad de la preferencia

Se demuestra que el modelo de preferencias propuesto cumple la propiedad de transitividad

$$m^*(xPy), m^*(yPz) \geq .5 \quad \Rightarrow \quad m^*(xPz) \geq \min \left\{ m^*(xPy),\ m^*(yPz) \right\} \qquad (2.4)$$

La demostración requiere que la región factible de parámetros, designada aquí por $\mathbb{P}$, no contenga al origen de coordenadas. Esto significa que entre las posibles combinaciones de parámetros no se encuentra la que da peso cero a todos los criterios. En la demostración también se hace uso de la propiedad del paralelepípedo $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{R}^n$ de que todos los planos que lo dividen en volumenes iguales se intersecan en un solo punto, denominado centro de $\mathbb{P}$, propiedad que tienen todos los cuerpos en $\mathbb{R}^n$ con simetría radial. La demostración de 2.4 se da después de mostrar algunas de sus implicaciones, así como otras formas de expresarla en términos del concepto de concavidad.

Implicaciones

Por anularse la medida de la indiferencia

$$m^*(xPy) + m^*(yPx) = 1$$

de donde la propiedad de transitividad 2.4 equivale a

$$m^*(xPy), m^*(yPz) \le .5 \;\Rightarrow\; m^*(xPz) \le \text{máx}\left\{ m^*(xPy),\ m^*(yPz) \right\} \qquad (2.5)$$

La definición de Roubens (1989) de transitividad es similar a 2.4, sólo que sin la condición $m^*(xPy), m^*(yPz) \ge .5$.. Por la equivalencia mostrada, la definición de Roubens no es aplicable si la medida de la indiferencia es nula, como es nuestro caso. La propiedad (2.4) implica la condición de p-transitividad, de que si x es p-preferible a y, y es p-preferible a z, entonces x es p-preferible a z:

$$m^*(xPy),\ m^*(yPz) \ge p \Rightarrow m^*(xPz) \ge p$$

donde $.5 \le p \le 1$, siendo p el *umbral de preferencias* (en la práctica $.5 < p < 1$).

La propiedad de transitividad 2.4 se puede expresar en términos de propiedades geométricas del conjunto $\mathbb{P}$ sin aludir a las alternativas. Para esto a cada vector $a \in \mathbb{R}^n$ se le asocia un semiespacio S(a) y un volumen V(a) sobre $\mathbb{P}$:

$$S(a) = \left\{ u \in \mathbb{R}^n : a'u \ge 0 \right\} \qquad 0 \ne a \in \mathbb{R}^n$$

$$V(a) = \frac{1}{V} \int\cdots\int_{p \in S(a) \cap \mathbb{P}} dp_1 \ldots dp_n \qquad 0 \ne a \in \mathbb{R}^n$$

donde V es el volumen de $\mathbb{P}$. Por definición

$$V(a) = m^*(xPy) \quad \text{con } x - y = a \ne 0$$

es la medida de la preferencia xPy (fig 2.1a).

Haciendo

$$a = x - y \qquad b = y - z \tag{2.6}$$

se puede verificar directamente que la afirmación

$$V(a),\ V(b) \geq .5 \quad \Rightarrow \quad V(a + b) \geq \min\left\{ V(a),\ V(b) \right\} \tag{2.7}$$

es equivalente a la condición de transitividad 2.4 y de aquí, considerando que $V(-a) = 1 - V(a)$,

$$V(a),\ V(b) \leq .5 \quad \Rightarrow \quad V(a + b) \leq \text{máx}\left\{ V(a),\ V(b) \right\} \tag{2.8}$$

es equivalente a 2.5. Las condiciones 2.4, 2.5, 2.7 y 2.8 son entonces equivalentes entre si.

Transitividad y concavidad

En 2.7 $a, b \in \mathbb{R}^n$ y su combinación lineal $a + b$ están en el subespacio bidimensional generado por $a, b \in \mathbb{R}^n$, H,

$$H = \left\{ c \in \mathbb{R}^n :\ c = \alpha a + \beta b,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} \qquad a, b \in \mathbb{R}^n$$

Las direcciones en este subespacio se pueden especificar por el ángulo θ respecto de una dirección de referencia. Dicho ángulo y la orientación del subespacio $H \subseteq \mathbb{R}^n$ determina unívocamente una dirección en $\mathbb{R}^n$ y por tanto el correspondiente semiespacio y volumen asociados, los cuales se denotan por $S_H(\theta)$ y $V_H(\theta)$, respectivamente. En estos términos la propiedad de transitividad 2.4 se puede enunciar como sigue: Para todo subespacio bidimensional $H \subseteq \mathbb{R}^n$

$$V_H(\theta_1),\ V_H(\theta_2) \geq .5 \ \Rightarrow \ V_H(\theta) \geq \min\left\{ V_H(\theta_1),\ V_H(\theta_2) \right\} \ \forall\ \theta \in (\theta_1, \theta_2)$$

o equivalentemente

$$V_H(\theta_1),\ V_H(\theta_2) \le .5 \ \Rightarrow\ V_H(\theta) \le \text{máx}\left\{ V_H(\theta_1),\ V_H(\theta_2) \right\} \ \forall\ \theta\in(\theta_1,\theta_2)$$

Lo anterior demuestra que la propiedad de transitividad 2.4 se cumple si y sólo si para todo subespacio bidimensional $H \subseteq \mathbb{R}^n$ la función $V_H(\ )$ es cóncava en la región en que es superior a .5, o equivalentemente (porque $V_H(\theta + \pi) = 1- V_H(\theta)$), $V_H(\ )$ es convexa en la región en que es menor que .5.

En las figs 2.2a y 2.2b se ilustran estas ideas. En la parte superior se representa la proyección de $\mathbb{P}$ sobre un subespacio bidimensional H (el cual corresponde con la hoja de papel), en donde "O" representa el origen de coordenadas. Se hace la simplificación de que $\mathbb{P}$ tiene una "profundidad" constante y unitaria respecto de H, de modo que $V_H(\theta)$ coresponde numéricamente con la proporción del área que queda del lado positivo del vector $S_H(\theta)$. La fig 2.2a podría corresponder a un paralelepípedo $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{R}^3$ en el que el plano H es paralelo a una de sus caras. En la fig 2.2b la proyección de $\mathbb{P}$ es un triángulo, por lo que $\mathbb{P}$ no es un paralelepípedo, pero se incluye para mostrar una gráfica de $V_H(\theta)$ distinta a la anterior.

Demostración de la propiedad de transitividad

Considérese la intersección de todos los semiespacios S(a) tales que $V(a) \ge p$, donde $.5 \le p \le 1$:

$$N_p = \bigcap_{V(a)\ge p} S(a) \qquad .5 \le p \le 1 \tag{2.9}$$

Todos los conjuntos N_p contienen como subconjunto común el rayo que pasa por el centroide (o centro de gravedad) de $\mathbb{P}$, pues en 2.9 todos los semiespacios cumplen $V(a) \ge .5$. Si $p \le r$

$$N_p = \bigcap_{V(a)\geq p} S(a) = \left\{\bigcap_{V(a)\geq p} S(a)\right\} \cap \left\{\bigcap_{V(a)\geq r} S(a)\right\} = N_p \cap N_r$$

por lo que la familia $\{N_p\}$ está anidada:

$$p \leq r \iff N_p \subseteq N_r \qquad .5 \leq p,r \leq 1$$

Este anidamiento es propio

$$p < r \iff N_p \subset N_r \qquad .5 \leq p,r \leq 1$$

porque si las fronteras de N_p y N_r tuvieran algún punto en común entonces algún semiespacio $S(a)$ tendría asociados dos volúmenes distintos p, r. Esto implica que si $V(a) = p$ entonces $S(a)$ contiene N_p pero no contiene a N_r para $r > p$. Por tanto si $V(a) < p$ entonces $S(a)$ no contiene a N_p. Esto prueba por contradicción que

$$N_p \subseteq S(a) \Rightarrow V(a) \geq p \qquad .5 \leq p \leq 1 \qquad (2.10)$$

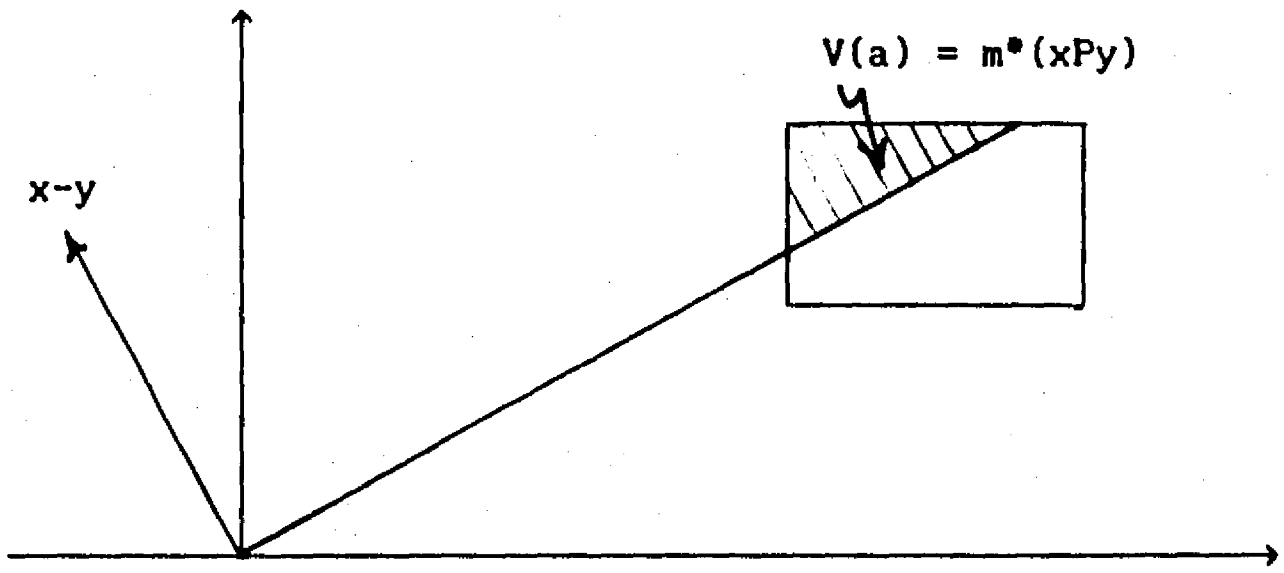
De aquí y 2.9 es inmediato que

$$V(a) \geq p \iff N_p \subseteq S(a) \qquad .5 \leq p \leq 1$$

Por lo anterior, $N_p \subseteq \mathbb{R}^n$ es un cono tal que cada semiespacio $S(a)$ tangente a su frontera contiene una proporción $p > .5$ del conjunto $\mathbb{P}$. Como casos extremos se tienen $p = .5$ y $p = 1$: $N_{.5}$ es el rayo que pasa por el centro de $\mathbb{P}$ y N_1 es el cono formado por todos los rayos que tocan algún punto de $\mathbb{P}$ (fig 2.1b).

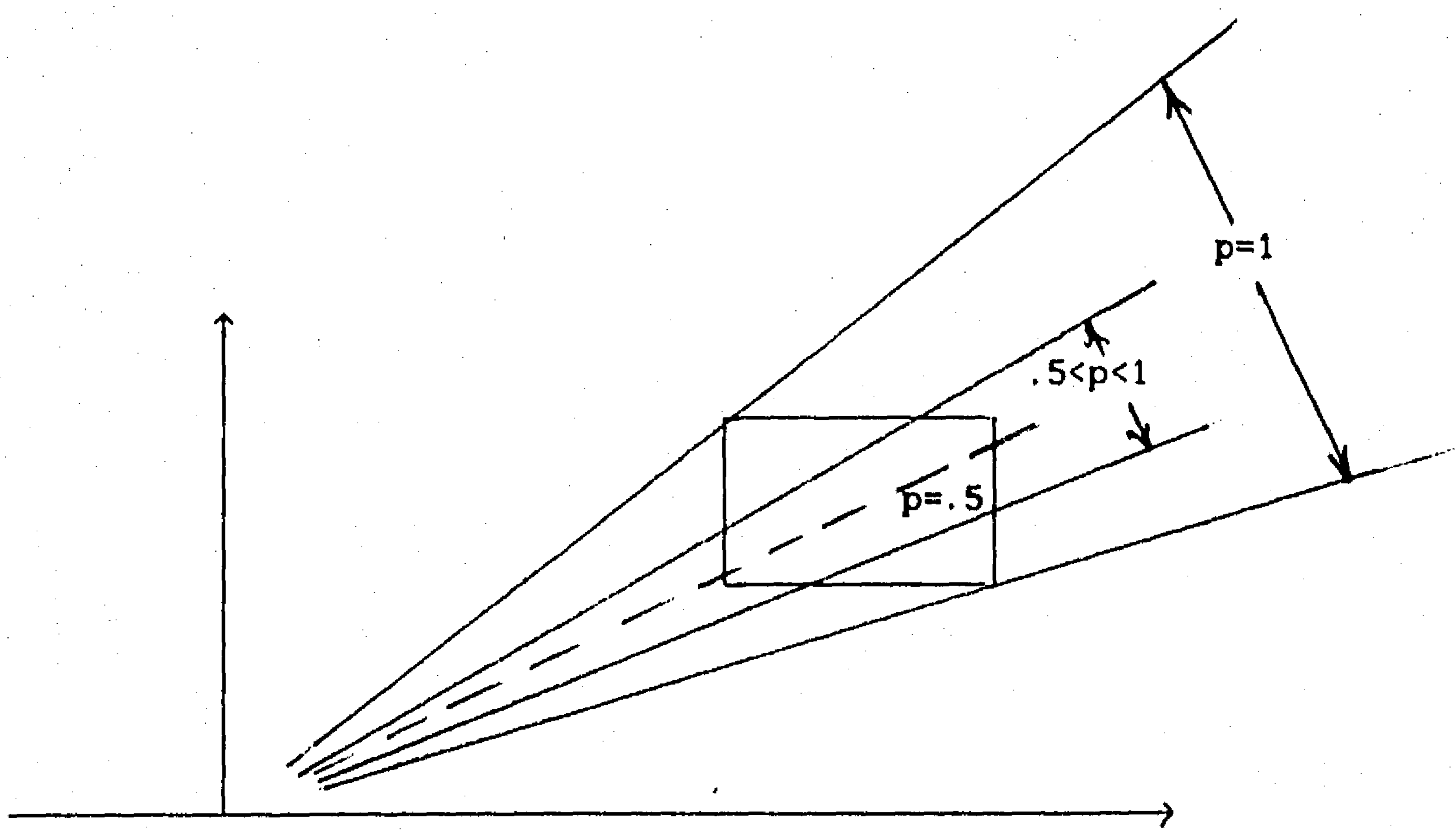
Teorema. Para todo par de direcciones a,b, $a,b \in \mathbb{R}^n$, distintas entre sí, se cumple la propiedad de transitividad 2.7.

Demostración. De la definición de semiespacio asociado a una vector $a \in \mathbb{R}^n$, $S(a) \cap S(b) \subseteq S(a + b)$, por lo que todo N_p contenido en $S(a) \cap S(b)$ está contenido en $S(a + b)$, es decir, usando 2.10, $V(a + b) \geq \min \{ V(a), V(b) \}$. ▮



Espacio de parámetros

fig 2.1a



Espacio de parámetros

fig 2.1b

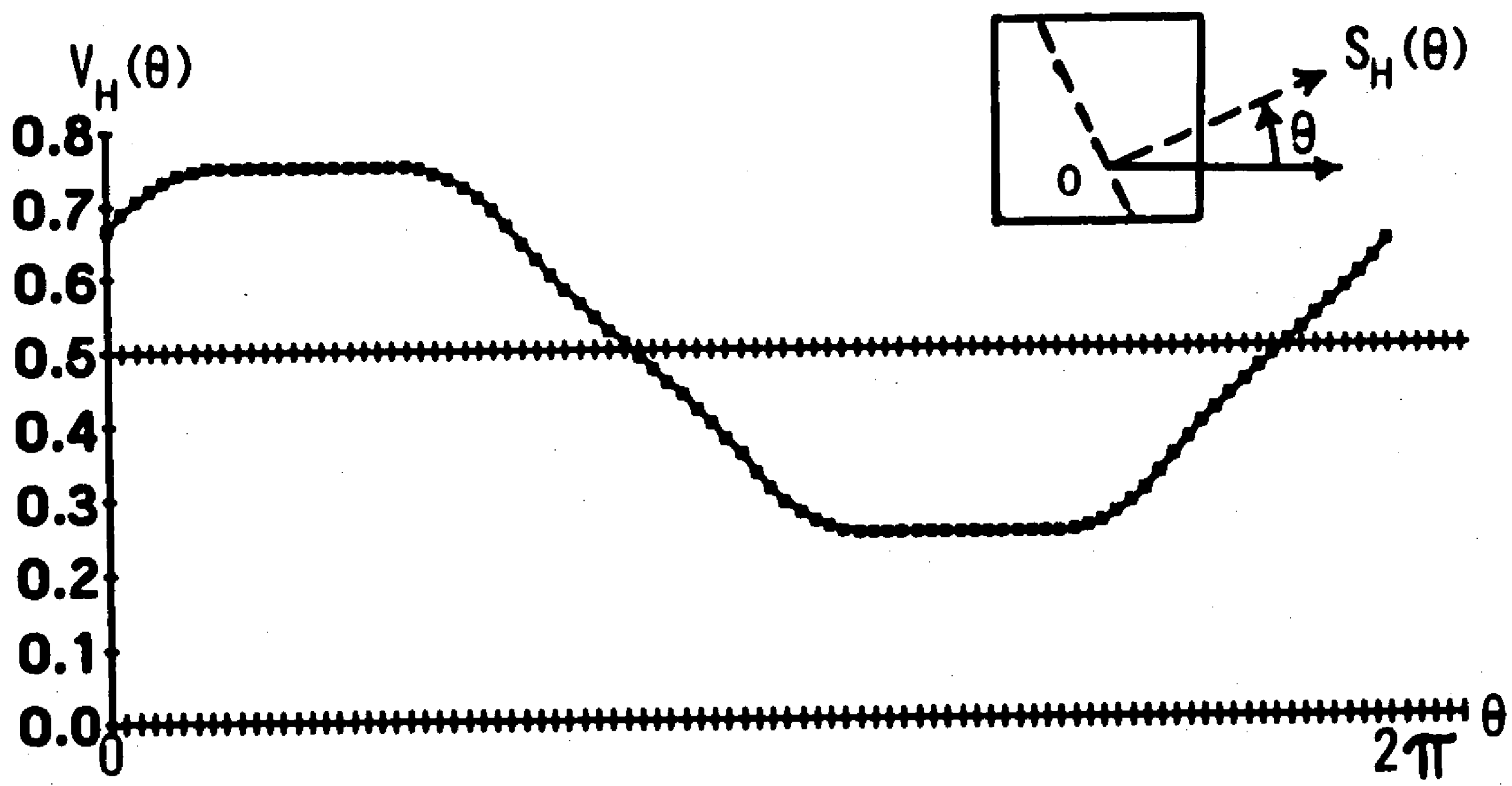


Fig 2.2a

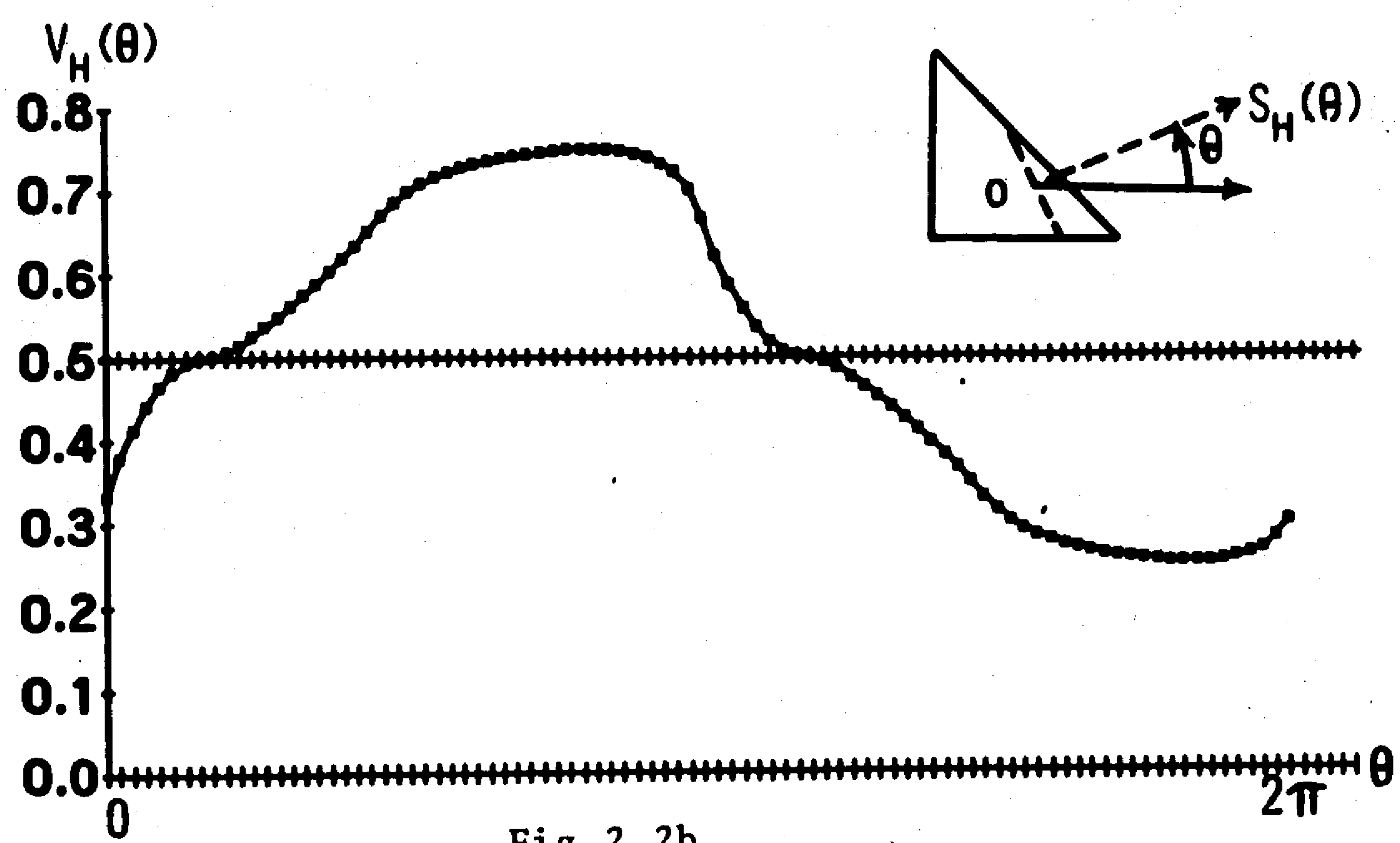


Fig 2.2b

2.5 Relación de sobreclasificación

Especificar la preferencia de una alternativa sobre otra en una escala discreta con dos[1] o más[2] valores, puede ser más apropiado en determinados problemas concretos que hacerlo sobre una escala continua como la de la matriz de preferencias. En estos casos conviene modificar dicha matriz para que su transformada corresponda lo mejor posible con la forma en que el decisor expresa sus preferencias. Se define un sistema relacional de preferencias que, por la condición de transitividad (2.4), lleva a una estructura preferencial de orden de intervalo. Se introduce el concepto de razón de comparabilidad para penalizar las alternativas cuya imprecisión en su evaluación es relativamente mayor que la de otras. Finalmente se introduce el veto a nivel de criterios individuales, con lo que se completa la definición de la relación binaria de sobreclasificación que se aplica.

En la tabla 2.1 se define un sistema relacional de preferencias, donde q, p, con $.5 < q < p \leq 1$, se denominan *umbrales de indiferencia* y *preferencia*, respectivamente. La relación Q se denomina *preferencia débil* y la relación P *preferencia fuerte*. Por la condición $.5 < q < p$ tanto P como Q resultan irreflexivas y asimétricas.

Las preferencias P y Q definidas por la tabla 2.1 son *solidariamente antisimétricas*[3], es decir,

$$xPy \quad \text{implica} \quad \text{no } yPx, \text{ no } yQx$$
$$xQy \quad \text{implica} \quad \text{no } yPx, \text{ no } yQx$$

Estas propiedades dan consistencia a la siguiente definición.

---

[1] Indiferencia y preferencia

[2] Incomparabilidad, indiferencia y distintos grados de preferencia, por ejemplo

[3] Este concepto no existe en la literatura

La matriz de *comparaciones*, correspondiente a los umbrales p, q, denotada por C_q^p o simplemente **C** si no hay lugar a confusión, es una matriz cuadrada en la que cada renglón y columna corresponde con una alternativa, y cuyos elementos son "-" para la diagonal, "I" para alternativas indiferentes, "P" si la alternativa del renglón domina a la alternativa de la columna ("-P" en su elemento simétrico), "Q" si la alternativa del renglón es preferida débilmente a la alternativa de la columna ("-Q" en su elemento simétrico) y "R" si las alternativas no son comparables.

P(x,y)	RESULTADO	DENOMINACION
$.5 \leq P(x,y) < q$	xIy yIx	Indiferencia
$q \leq P(x,y) < p$	xQy y(-Q)x	Preferencia débil
$p < P(x,y) \leq 1$	xPy y(-P)x	Preferencia fuerte

Tabla 2.1

Vetos por imprecisión y por discordancia

Puede ocurrir que para el decisor dos alternativas dadas no sean comparables porque con la información disponible hasta el momento no puede determinar si hay indiferencia entre ellas o si una es preferida a la otra. Este puede ser el caso cuando entre dos alternativas x,y resulta una preferencia débil, xQy, pero el intervalo de evaluación de la alternativa que domina es tan grande, en comparación con el otro, que convenga vetar dicha preferencia por falta de confiabilidad, mientras se cuenta con más información. Esto es posible si la alternativa x domina a la alternativa y en criterios en que la longitud del intervalo de pesos $[m_i, M_i]$ es grande, pero es dominada en criterios en que esta longitud es pequeña.

Para considerar este aspecto sean las funciones reales u_M, u_m,

$u_M, u_m : A \longrightarrow \mathbb{R}$ sobre el conjunto A de alternativas, definidas por

$$u_M(x) = \sup \{ u(x) : u \in \mathcal{U} \} \quad \text{para toda } x \in A$$
$$u_m(x) = \inf \{ u(x) : u \in \mathcal{U} \} \quad \text{para toda } x \in A$$

Desde luego que $u_M(x) \geq u_m(x)$ para todo $x \in A$.

En caso que la familia $\mathcal{U}$ esté formada por funciones de utilidad aditivas las ecuaciones anteriores toman la forma

$$u_M(x) = \sum_{i \in I} M_i(x_i) \quad \text{para todo } x \in A$$
$$u_m(x) = \sum_{i \in I} m_i(x_i) \quad \text{para todo } x \in A$$

Los valores $u_M(x)$ y $u_m(x)$ son las evaluaciones superior e inferior de la alternativa x, respectivamente. La diferencia $u_M(x)-u_m(x)$, se interpreta como una medida de la imprecisión en la evaluación de la alternativa x.

El cociente

$$\frac{u_M(x)-u_m(x)}{u_M(y)-u_m(y)} = r(x,y) \qquad x,y \in A$$

se denomina *razón de imprecisión* de la alternativa x respecto de la alternativa y. Por supuesto que $r(x,y) = 1/r(y,x)$.

El *veto por imprecisión* consiste en que si entre dos alternativas x,y resulta una preferencia débil, xQy, pero la razón de imprecisión $r(x,y)$ es superior a un determinado valor $r > 1$, denominado *umbral de veto por imprecisión*, entonces la preferencia xQy se veta, habiendo entre las alternativas x,y una relación de incomparabilidad xRy (se puede incluir un umbral que veto la preferencia fuerte, pero esto resulta innecesario si el umbral de preferencia p es suficientemente grande).

Otro tipo de veto, introducido por Roy, es el siguiente. El decisor puede considerar que para que la alternativa x "sea al menos tan buena como" y, x no debe estar muy desfavorecida con respecto de y en determinados criterios. Para esto fija umbrales de veto como se muestra a continuación.

Sea I_v el subconjunto de criterios para los cuales el decisor desea introducir un veto. Para todo criterio $i \in I_v$ se especifica un umbral de veto v_i. Entonces

$$x_i \geq y_i - v_i \qquad \text{para todo } i \in I_v$$

es condición necesaria (pero no suficiente) para que la alternativa x se considere al menos tan buena como la alternativa y. La condición anterior se denomina de *no discordancia*. Estos umbrales de veto permiten evitar que una desventaja significativa en uno de los criterios pueda ser compensada por ventajas menores en los demás criterios. Estos umbrales hacen que el modelo sea parcialmente compensatorio. El decisor puede fijar dichos umbrales en proporción inversa con la importancia de cada criterio.

Para incluir en la matriz de comparaciones C los casos en que el veto ocurre, anulando una preferencia, se conviene en anteponer la letra "V" a la "P" o "Q", según el caso[4].

Se dice que la alternativa x *sobreclasifica* a la alternativa y si xPy, xQy o xIy, se cumple la condición de no discordancia y no es activo el veto por imprecisión. Esta relación binaria, denotada por S, se denomina de *sobreclasificación*, y es suficiente para clasificar las alternativas de mejor a peor o recíprocamente. xSy significa que la alternativa x es al menos tan preferida como y. Por ser P y Q solidariamente antisimétricas resulta que si x no sobreclasifica a y, y y no sobreclasifica a x, entonces xRy (y además yRx), es decir, las alternativas x,y no son comparables. La relación R, llamada de *incomparabilidad*, es simérica e irreflexiva. Dichas relaciones binarias se representan gráficamente mediante la

---

[4] Para efectuar un analisis de robustez de los umbrales de veto en el programa de computadora se pide un intervalo y no un numero

notación

o——>o   o   o

x S y   xRy

La matriz de sobreclasificación S se obtiene de la de comparaciones **C** de acuerdo con la tabla 2.2, donde por comodidad la indiferencia I no es absorbida por la sobreclasificación.

Relacion en **C**		Relación en S	
de x a y	de y a x	de x a y	de y a x
P	-P	S	-S
Q	-Q	S	-S
VP	-P	R	R
VQ	-Q	R	R
I	I	I	I
R	R	R	R

Tabla 2.2

2.6 Análisis de Robustez

El análisis de robustez tiene por objetivo determinar los márgenes de variación de los parámetros del modelo sin que se modifique sustancialmente la solución encontrada. En nuestro caso estos parámetros son los ubrales de preferencia, indiferencia y veto (para los dos primeros umbrales el programa de computadora determina no sólo el primer cambió sino la secuencia de cambios en la matriz de preferencias cuando el umbral considerado aumenta o disminuye respecto del valor de referencia).

En la figura 2.3 se ilustran gráficamente los distintos casos que se pueden presentar en las ubicaciones de P(x,y) y P(y,x) (indicadas con sendos simbolos "X", P(x,y) > P(y,x)) respecto de los umbrales q, p, así como el correspondiente valor I, P, o Q en la relación de preferencias para las alternativas x,y. Este valor se modifica si un umbral cambia hasta igualarse con P(x,y) o P(y,x) próximo a dicho umbral. Suponiendo que P(x,y) ≥ P(y,x), en la tabla 2.3 se muestran para cada caso los valores que podrían tomar estos umbrales para que se diera un cambio en la relación de preferencias entre las alternativas x ,y (en el programa de computadora estos datos se van guardando en un archivo, el cual se ordena en el sentido creciente del umbral considerado y se despliega en la tabla de robustez correspondiente).

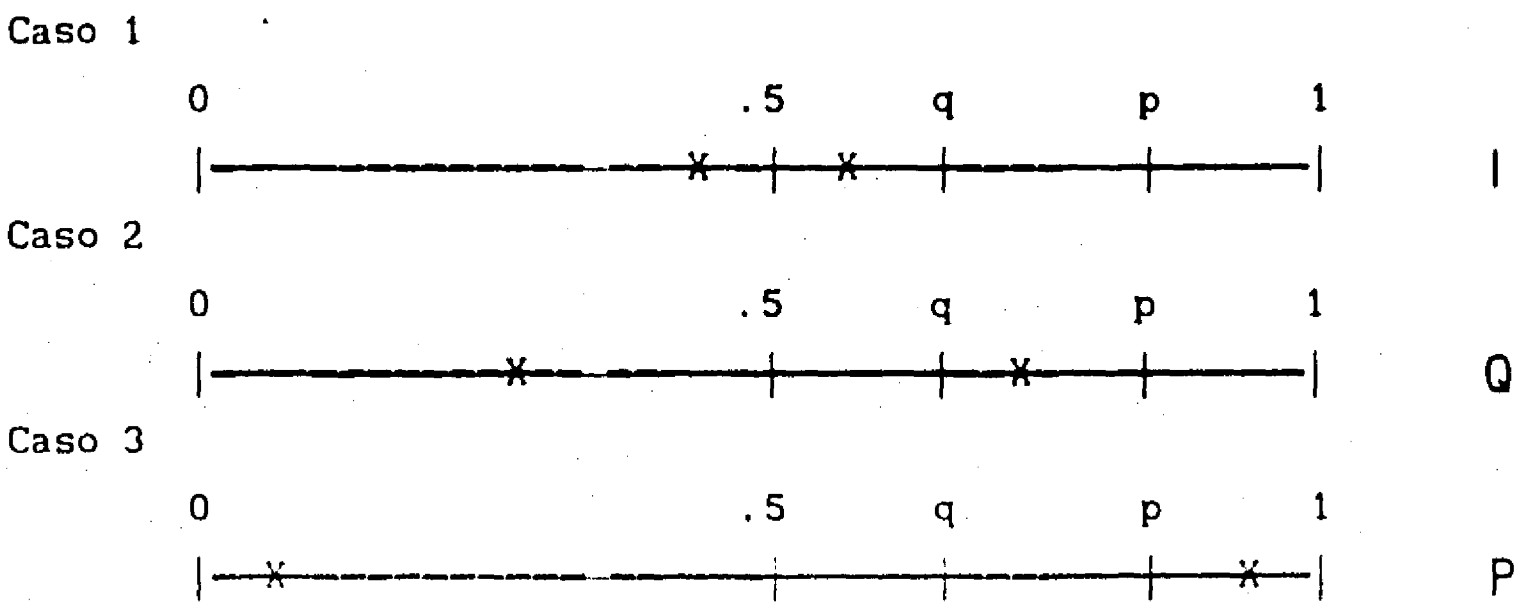


Fig 2.3

CASO	RELACION ACTUAL	CAMBIO EN	
		EL UMBRAL	LA RELACION
1	I	q = P(x,y)	Q
2	Q	q = P(x,y)	I
		p = P(x,y)	P
3	P	p = P(x,y)	Q

Tabla 2.3

En el análisis de robustez de los umbrales de veto se lista, para cada sobreclasificación de una alternativa sobre otra, vetada en el nivel 1 (V1P o V1Q en la matriz de comparaciones), el criterio o criterios para los que fue activo el veto y los valores de los criterios correspondientes; esto permite determinar los valores del umbral de veto para que este deje de ser activo o pase del nivel V1 al nivel V2.

De los análisis de robustez mencionados el decisor o el analista determinan si los ubrales fijados son apropiados o si se prueban otros valores alternativos.

2.7 Procedimiento

Ciertos pasos comunes en todos los enfoques de toma de decisiones multicriterio, como construir las funciones de utilidad de los distintos criterios y elaborar la matriz de impacto, no se mencionan en el siguiente procedimiento, el cual por comodidad se refiere al caso de funciones de utilidad aditivas.

1. El decisor fija las escalas de los criterios, las cuales no se modifican durante el proceso, y los intervalos de pesos iniciales $[m_i, M_i]$
2. Se calcula la matriz de preferencias correspondiente
3. El decisor examina dicha matriz; si considera necesario modifica intervalos $[m_i, M_i]$; si hay modificaciones se recalcula la matriz de preferencias
4. El decisor fija los umbrales de indiferencia, preferencia y veto
5. Se calcula la matriz de sobreclasificación
6. Se realiza un análisis de robustez consistente en determinar los intervalos de variación de los umbrales de indiferencia y preferencia en los que no se modifica el orden dado por la matriz de sobreclasificación; este análisis puede centrarse en

las alternativas de un cierto nivel hacia arriba (o hacia abajo si interesa detectar las peores alternativas)

7. De los resultados del análisis de robustez el decisor determina si conviene modificar intervalos y/o umbrales o si el proceso se da por terminado, en cuyo caso la matriz de sobreclasificación permite tomar la decisión o decisiones del problema.

Para fijar en el paso 1 los intervalos de variación $[m_i, M_i]$ de los factores de peso, se tienen las siguientes posibilidades: a) tomar como referencia uno de los criterios, al que se da un determinado factor de peso, por comodidad igual a uno, y respecto de él especificar los intervalos de variación de los factores de peso del resto de los criterios; b) por cualquiera de los métodos conocidos determinar los factores de peso de los criterios, considerados como promedio, y después fijar las variaciones que podrían tener estos factores respecto de sus valores medios.

2.8 Ejemplo ilustrativo

El método propuesto se ilustra con un ejemplo diseñado para mostrar el procedimiento en el aspecto numérico, sin interpetar los conceptos que aparecen en el problema.

Supóngase que se tienen cuatro alternativas *a*, *b*, *c*, *d*, las cuales se evalúan de acuerdo con seis criterios, denotados por 1, 2,...,6. En la tabla 2.4 se muestran los datos del problema, excepto los umbrales de preferencia, indiferencia y de veto por imprecisión, que se consideran más adelante. El primer paso es determinar la matriz de impacto, sobre lo cual no es necesario ningún comentario porque es común en casi todos los métodos multicriterio. El siguiente paso es fijar para cada criterio el dominio de variación del correspondiente factor de peso. Estos pares de valores aparece en la misma tabla abajo de "COTAS".

En vez de especificar el umbral de veto asociado a los criterios con un valor numérico, siguiendo a Roy se considera un intervalo de valores (dado en la tabla entre los paréntesis) con la finalidad de distinguir los casos en que el efecto del veto no tiene discusión por la gran desventaja en que se encuentra la alternativa que supuestamente domina, de los casos en que la desventaja es menos importante como para aplicar el veto de manera automática. Estos dos niveles de veto se especifican en las tablas de resultados anteponiendo "V2" (veto nivel 2) o V1 (veto nivel 1), respectivamente.

Si se va a considerar un umbral de veto por imprecisión es necesario determinar la evaluación superior e inferior de cada alternativa. Supóngase que este es el caso y que el umbral para la razón de imprecisión es de

$$r = 2.0$$

Estas evaluaciones superiores e inferiores se encuentran al final en la tabla 2.4 y se muestran en forma gráfica en la fig. 2.4.

CRITERIOS	ALTERNATIVAS – Matriz de impacto				COTAS		VETO
	a	*b*	*c*	*d*	Inf	Sup	
1	10	2	5	6	2	4	[3,4]
2	7	4	8	7	1	2	[1,4]
3	5	2	6.6	4	1	2	--
4	1	17	6	9	2	2	--
5	4	3	4	3	1	2	--
6	5	5	6	5	2	3	[1,4]
Sup:	89	75	87.2	85	Evaluaciones de las alternativas		
Inf:	48	57	52.6	54			

Tabla 2.4

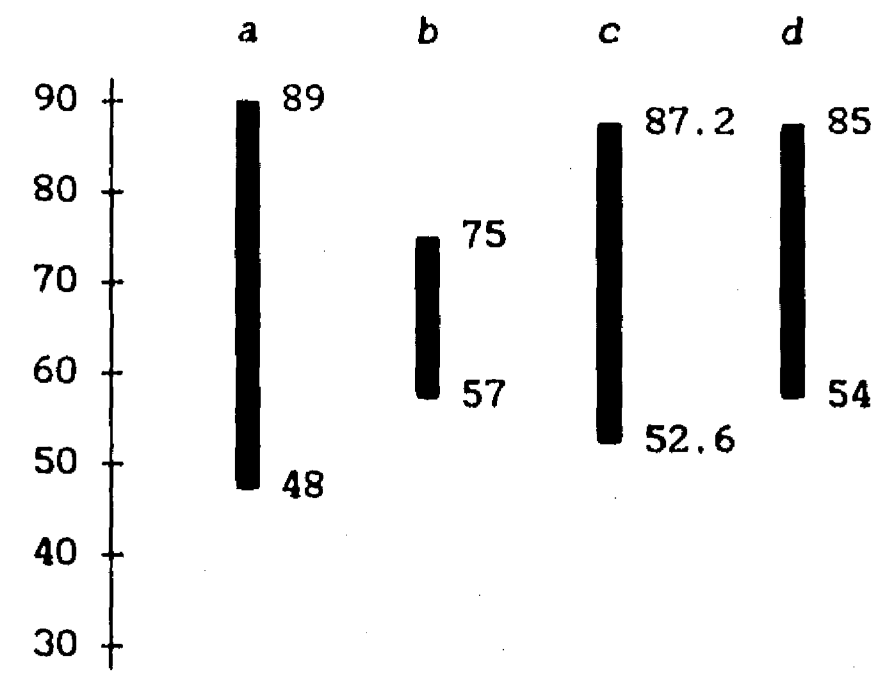


Fig. 2.4

El siguiente paso es determinar la matriz de preferencias. Usando la medida propuesta en la sección 2.3 y haciendo los cálculos correspondientes siguiendo el método de Montecarlo, se obtinen los resultados:

$m^*(aPb)= .62$ $\quad$ $m^*(bPa)= .38$

$m^*(aPc)= .35$ $\quad$ $m^*(cPa)= .65$

$m^*(aPd)= .41$ $\quad$ $m^*(dPa)= .59$

$m^*(bPc)= .07$ $\quad$ $m^*(cPb)= .93$

$m^*(bPd)= .1$ $\quad$ $m^*(dPb)= .9$

$m^*(cPd)= .61$ $\quad$ $m^*(dPc)= .39$

de donde resulta la matriz de preferencias

	a	*b*	*c*	*d*
a	-	.62	.35	.41
b	.38	-	.07	.1
c	.65	.93	-	.61
d	.59	.9	.39	-

Tabla 2.5 Matriz de preferencias

La matriz de preferencias da una evaluación numérica entre cero y uno del resultado de comparar por pares las alternativas. El resultado final de cada comparación, que puede ser indiferencia (I), preferencia fuerte (P) o preferencia débil (Q) se determina de los umbrales de preferencia e indiferencia, los cuales en este ejemplo son, respectivamente

$$p = 0.8, \quad q = 0.6$$

Estos valores permiten pasar de la matriz de preferencias a la de comparaciones, la cual se muestra en la tabla 2.6. Nótese que la preferencia débil de la alternativa *a* sobre la alternativa *b* es vetada porque la razón de imprecisión $r(a,b) = (89-48)/(75-57) = 2.3$ es superior al valor fijado al umbral de veto por imprecisión. Además, la preferencia débil de *c* sobre *a* es vetada en nivel 2 porque en el criterio 1 la primera tiene una desventaja de 10 - 5 = 5, que supera al intervalo de veto [3,4].

	a	*b*	*c*	*d*
a	-	VIQ	-Q	I
b	-Q	-	-P	-P
c	V2Q	P	-	Q
d	I	P	-Q	-

Tabla 2.6 Matriz de comparaciones

La matriz de sobreclasificación se obtiene directamente de la anterior usando las reglas mostradas en la tabla 2.2, resultando la tabla 2.7, la cual se representa gráficamente en la fig 2.5.

	a	b	c	d
a	-	R	R	I
b	R	-	-S	-S
c	R	S	-	S
d	I	S	-S	-

Tabla 2.7 Matriz de sobreclasificación

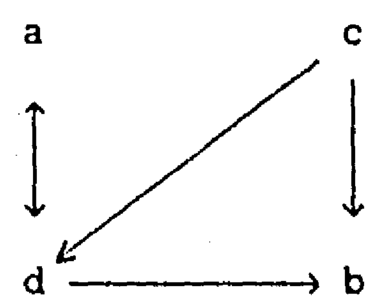


Fig. 2.5

La información contenida en la matriz de sobreclasificación resume los resultados de un ciclo de análisis de decisiones. Si se considera conveniente se pueden modificar algunos datos y reiniciar un nuevo ciclo de análisis.

3. ANALISIS Y DELIMITACION DEL METODO

El método propuesto tiene diversas ventajas, como su facilidad de uso y el manejo explícito de la imprecisión en las preferencias . Como todos los métodos, su aplicación requiere de ciertas condiciones que conviene hacer explícitas, las cuales se exponen en la primera sección. Se establecen relaciones del método propuesto con el campo actual de conocimientos y se hace un análisis comparativo con otros métodos. Se sugieren, finalmente, posibles extensiones de la investigación.

3.1 Alcance del método

El método es aplicable en casos en que:

a) *El decisor:* Hay un único decisor, quien puede ser un individuo o un equipo de especialistas que comparten objetivos y la responsabilidad de la decisión. En este último caso cada especialista, posiblemente con la aprobación del equipo, puede vetar una alternativa (en términos absolutos o en relación con otra alternativa) si ésta no cumple determinados requerimientos asociados con un criterio de su especialidad.

b) *Los criterios:* Los criterios son independientes en preferencia, y en utilidad si la decisión es bajo riesgo (para garantizar la aditividad de los criterios [Keeney y Raiffa 1976]).

c) *Las alternativas*: La frontera de la envolvente convexa del conjunto de alternativas contiene todas las alternativas eficientes (para garantizar que el método no ignora ninguna alternativa eficiente; esta condición es requerida también en el enfoque de teoría de utilidad multiatributo [Canales *et al* 1975]).

d) *Número de criterios y de alternativas*: Se podrían manejar del orden de cien criterios si el decisor es un grupo de especialistas y del orden de diez alternativas. Este último número puede aumentar dependiendo de la confianza del decisor en los valores de los parámetros por él fijados y en el modelo de evaluación resultante.

e) *Preferencias globales:* Durante el ajuste del modelo el decisor se encuentra en un proceso de aprendizaje respecto de sus preferencias y de la representación de éstas por el modelo; se le pide expresar importancias relativas entre criterios a través de intervalos de factores de peso pero no manifestar preferencias entre alternativas ("preferencias globales"). Sin embargo, de alguna manera el decisor debe percatarse cuándo sus preferencias respecto de las alternativas consideradas son suficientemente claras y están fielmente representadas por el modelo como para tomar la decisión o decisiones.

3.2 Relación con el campo actual de conocimientos

Cuando la imprecisión tiende a cero la medida de todos los intervalos $[m_i,M_i]$ tienden a cero ($m_i = M_i$ para todo criterio i), la familia $\mathcal{U}$ de funciones de utilidad tiende a un único elemento $u \in \mathcal{U}$, el cual modela las preferencias del decisor, y el método propuesto se reduce al enfoque utilitarista: la matriz de preferencias es de ceros y unos, la de comparaciones contiene sólo preferencias (P) e indiferencias (I) y la relación de sobreclasificación obtenida es compatible con el único elemento u de $\mathcal{U}$:

$$u(x) \geq u(y) \quad \text{si y sólo si} \quad xSy \qquad \forall\, x,y \in A$$

Entre lo encontrado en la literatura que se relaciona con nuestra investigación debe mencionarse a Srinivasan y Shocker [1973a y 1973b], quienes dan un procedimiento de programación lineal para ajustar una función de utilidad lineal a partir de las preferencias del decisor sobre parejas de alternativas. Siskos [1980] utiliza este procedimiento con algunas modificaciones para determinar una función de utilidad que "mejor" aproxima las preferencias expresadas por el decisor sobre un conjunto de alternativas, y de ahí, mediante un análisis de sensibilidad, determina una familia $\mathcal{U}$ de funciones de utilidad aditivas "igualmente aceptables".

En general, el concepto de una familia $\mathcal{U}$ de funciones de utilidad se ha manejado en la literatura en relación con el análisis de sensibilidad, pero no como una manera de representar un sistema de preferencias con imprecisiones. Tampoco se ha encontrado en la literatura el problema de pasar de una familia de funciones de utilidad a una relación binaria de sobreclasificación que sintetice el modelo de preferencias.

En el diagrama de la fig 3.1 las lineas punteadas representan nuevas relaciones que se establecen como resultado de la investigación realizada.

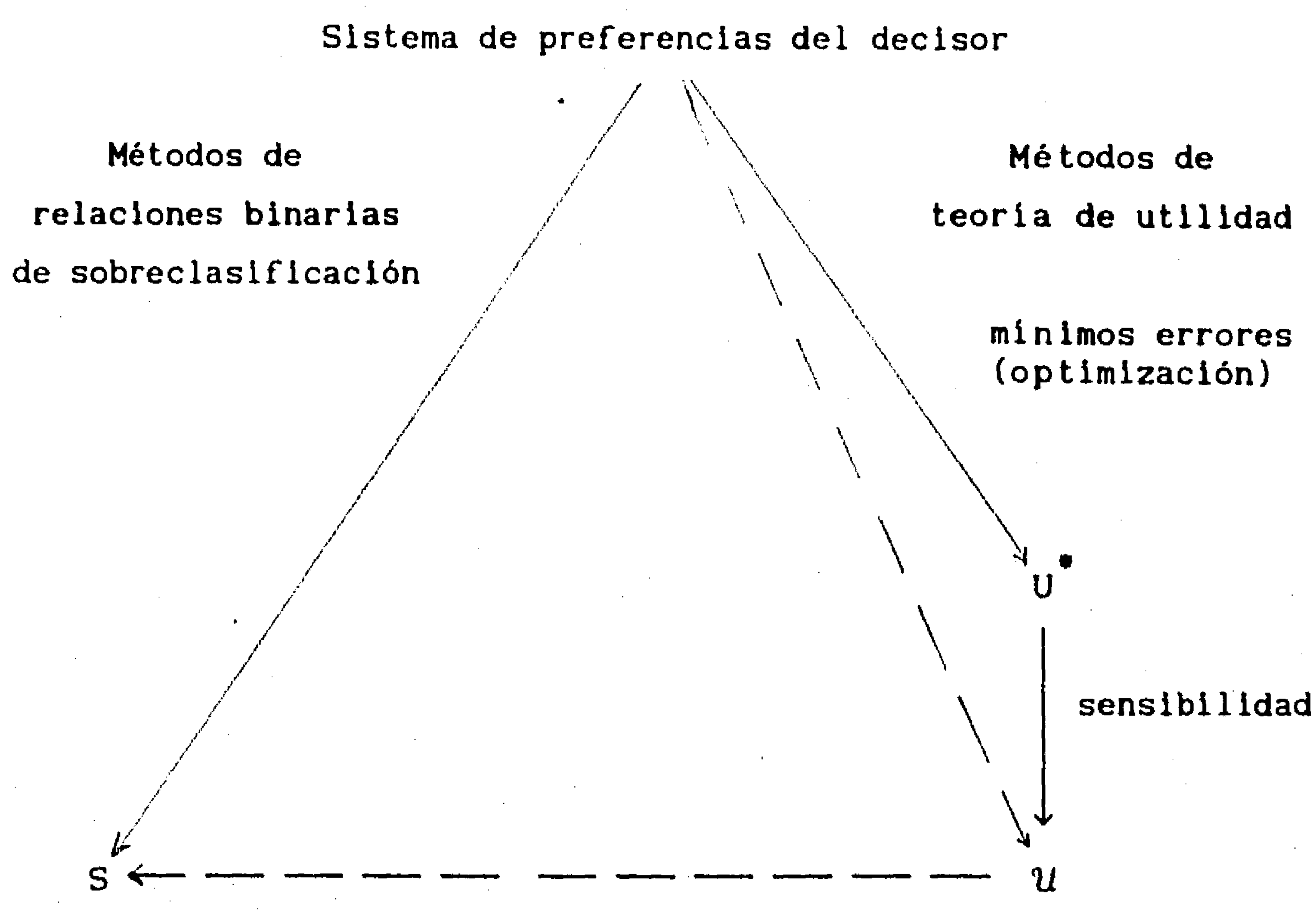


Fig 3.1

3.3 Comparación con otros métodos

La comparación de métodos multicriterio puede hacerse a distintos niveles dependiendo del propósito de la comparación. Si el objetivo es identificar el más adecuado para resolver un problema específico, entonces intervienen aspectos muy subjetivos, como la confianza y familiaridad del decisor o del analista con el método, y elementos más "objetivos", como la cantidad de criterios y de alternativas, la presencia explícita de incertidumbre en la estimación de las consecuencias de las acciones y la capacidad del decisor para comparar preferencialmente alternativas (utilidad multiatributo y el UTA de Siskos), importancia de criterios (métodos ELECTRE) o tasas de sustitución (algunos métodos utilitaristas y el propuesto).

En la tabla 3.1 se comparan diversos métodos relativamente cercanos al que se propone para mostrar diferencias y similitudes con este último en los aspectos de información de entrada, requerimientos y recomendaciones para su uso. El de utilidad multiatributo y el UTA de Siskos requieren del decisor capacidad para comparar globalmente alternativas (incluso loterías sobre alternativas para el primero), mientras que el que se propone requiere de intervalos de variación de parámetros, que en el caso aditivo se interpretan como tasas de sustitución. Además el método de Siskos, a diferencia de los otros, emplea esta información preferencial para ajustar estadísticamente un modelo de utilidad.

El ELECTRE III y el que se propone expresan los resultados de maneras similares pues en ambos las preferencias se modelan con una relación binaria de sobreclasifición y además usan en forma parecida el concepto de veto. Difieren sin embargo radicalmente en la información preferencial que se pide al decisor y en el tratamiento matemático de ésta. En el ELECTRE III la importancia relativa de los criterios se especifica por índices de importancia, los cuales tienen un significado totalmente distintos al de los intervalos de tasas de sustitución usados por el modelo propuesto.

Método	Información de entrada, requerimientos y/o recomendaciones para su uso
ELECTRE III	Umbrales de discriminación, dispersión y veto, relaciones entre los indices de importancia de los criterios y sus coalisiones. Disponer de un analista experto, no más de 15 criterios
Utilidad multi-atributo	Preferencias globales entre loterías. Maneja explicitamente incertidumbre sobre consecuencias. Disponer de un analista experto, no más de 15 criterios
UTA de Siskos	Preferencias globales sobre pares de alternativas para ajustar modelo.Disponer de analista experto, no más de 15 criterios
Propuesto	Intervalos de variación de parámetros (tasas de sustitución en el caso aditivo), umbrales de preferencia, indiferencia y veto. El decisor puede dar intervalos de variación en las tasas de sustitución; puede manejar gran número de criterios

Tabla 3.1

3.4 El manejo de la imprecisión

Ajustar un modelo de preferencias multicriterio requiere determinar valores de parámetros. Cuando la información sobre las preferencias del decisor es redundante ésta usualmente lleva a ajustes distintos según los datos que se consideren. En todos los enfoques conocidos esto se interpreta como inconsistencias entre las preferencias expresadas por el decisor y el modelo. Estas inconsistencias se manejan de distinta manera dependiendo del enfoque:

a) se eliminan a través de que el decisor reconsidere la información proporcionada, como en la toma de decisiones multiatributo del tipo de Keeney y Raiffa [1976], y en general cuando se pretenden modelar las preferencias mediante una función de utilidad;

b) ellas son toleradas por el modelo (recomendándose que no rebasen determinados límites) y en cierta forma promediadas o distribuidas, dándose simplemente un índice de consistencia, como en el método de jerarquización analítica de Saaty;

c) se consideran errores cuya medida total (en algún sentido) se minimiza, como en los métodos que usan regresión múltiple y el enfoque UTA de Siskos [1980];

d) algunas pueden ser manejadas por el modelo, como violaciones a la transitividad y la presencia de incomparabilidades, pero otras inconsistencias deben ser eliminadas, como las que se refieren a la jerarquía de los criterios y sus coaliciones, como es el caso de los métodos de relaciones binarias de sobreclasificación del tipo de los ELECTRE I y II de Roy.

La principal ventaja del método que se propone es el manejo explícito de imprecisiones, lo que requiere fijar intervalos de variación a los parámetros del modelo y no sus valores precisos. En el caso aditivo estos son intervalos de factores de peso, lo que hace al método particularmente fácil de comprender y usar por parte de todo tipo de decisores. Al aceptarse la no comparabilidad las alternativas resultan semiórdenes y no necesariamente órdenes totales como en los modelos de utilidad. Además, algunos de los métodos mencionados pueden hacerse compatibles con el propuesto y aprovecharse para encontrar parámetros iniciales del modelo. Asi por ejemplo, la matriz de impacto y los intervalos de peso iniciales pueden evaluarse con la técnica de jerarquización analítica de Saaty.

3.5 Extensiones de la investigación

Lo antes expuesto lleva a preguntas e inquietudes no cubiertas en la investigación presentada y que podrían resolverse en investigaciones futuras:

(a) extender el método al caso no aditivo, lo cual implica el manejo de funciones de utilidad no lineales;

(b) considerar que los miembros de la familia de funciones de utilidad $\mathcal{U}$ pueden tener distinta importancia o representatividad;

(c) desarrollar un modelo de estimación en el que el decisor exprese preferencias globales y de esta información inferir estadísticamente los valores de los parámetros (umbrales de preferencia indiferencia y veto) del modelo preferencial que hacen mínimo un cierto error;

(d) ampliar el método para que opere en una red de computadoras personales con el fin de que el diálogo y/o negociación entre los participantes se realice con mayor eficiencia y menor influencia de factores de tipo personal;

(e) diseñar un algoritmo que calcule en forma exacta las medidas de las preferencia para evitar las aproximaciones del método de Montecarlo.

4. ASPECTOS COMPUTACIONALES

Se dan las especificaciones generales del programa de computadora desarrollado para ejecutar el método propuesto. Este programa es interactivo en el sentido que durante su ejecución los datos se pueden modificar en cualquier momento, con la correspondiente actualización de los resultados. Dicho programa consta de seis opciones numeradas en el orden en que se requieren los datos de entrada. Inicialmente se selecciona el archivo de datos que se va amanejar y en su caso se dan los umbrales de preferencia, indiferencia y de veto por imprecisión. Las dos primeras opciones sirven para editar y mostrar en la pantalla diversos datos, como la matriz de impacto, los nombres resumidos y explicativos de los criterios y las cotas de los intervalos de variación de los factores de peso. En la opción 3 se calcula y muestra en la pantalla la matriz de preferencias. En la opción 4 se dan los umbrales de veto para los criterios que estuvieran en ese caso, y en la 5 se calcula y despliega la matriz de comparaciones. En la opción 6, que es la última, se muestran los resultados del análisis de robustez.

En la última sección se relaciona el número de pruebas (NP) con el error al estimar las medidas de preferencia con el método de Montecarlo.

4.1 Especificaciones generales del programa

Inicio: el programa despliega el menú de archivos que se encuentran en disco para que el usuario seleccione uno de ellos o para que inicie un nuevo problema. En este último caso pregunta cuántos criterios y cuántas alternativas se van a manejar, los umbrales de indiferencia ($q \geq .5$), preferencia (p, $q < p \leq 1$) y veto por imprecisión ($r > 1$), así como el número de pruebas (NP) (por defecto NP = 100) que se harán al calcular las medidas de preferencia por método de Montecarlo.

▌ Opción 1: Matriz de impacto

Despliega

```
MATRIZ DE IMPACTO:              Alternativas
Criterios 11111--22222--33333--...    --77777--88888--99999--00000
Med Sup   u_M(1),...("medidas superiores")
Med Inf   u_m(1),...("medidas inferiores")
Criterioi I(i,1) I(i,2) I(i,3),..., ETC
```

para mostrar y/o editar:

(a) el nombre abreviado (máximo 5 caracteres) de las m alternativas a considerar (máximo 10)

(b) el nombre abreviado (máximo 9 caracteres) de los n criterios a considerar (máximo 100)

(c) los elemento $I(i,x)$ ($i = 1,\ldots,n$, $x=1,\ldots,m$) de la matriz de impacto, donde i se refiere a criterios (renglones) y x a alternativas (columnas).

El usuario puede modificar libremente dichos elementos. Los nombres abreviados de las alternativas se inicializan con "11111",..., etc y el resto con blancos, los cuales para I(,) se toman como ceros. Las "medidas superiores e inferiores" se determinan en otra opción posterior, inicialmente estos lugares tienen blancos. ■

▌ Opción 2: Descripción de los criterios y sus cotas

Despliega

(dos renglones en blanco para que coincidan despliegues)

```
    DESCRIPCION DE LOS CRITERIOS     COTAS
ABREVIADA |------------ LARGA ------------| INF    SUP
Criterioi 12345678901234567890123456789012345----12345  m(i)   M(i)
```

para mostrar y/o editar:

(a) la descripción larga (máximo 55 caracteres) de los n criterios

(b) el nombre abreviado (máximo 9 caracteres) de los n criterios

(C) la cota inferior m(i) y superior M(i) de cada criterio i (6 espacios disponibles para cada cota); m(i) ≤ M(i)

Nota 1: El nombre abreviado de los criterios se puede editar indistintamente por los modos 1 y 2.

Nota 2: Al pasar del modo 1 al 2, y recíprocamente, la posición de la descripción corta no cambia para facilitar al usuario consultar la descripción larga y la matriz de impacto, como si estuvieran en el mismo cuadro.

El usuario puede modificar libremente dichos elementos. Estos se inicializan con blancos, que se toman como ceros para las cotas m(i), M(i). ■

Opción 3: Matriz de preferencias

Calcula, o en su caso actualiza, la *matriz de preferencias* P(x,y):

MATRIZ DE PREFERENCIAS   Alternativas
Med Sup
Med Inf
Alternati 11111--22222--33333--...   --77777--88888--99999--00000
  11111   P(1,1) P(1,2) P(1,3),..., ETC

así como las evaluaciones superior e inferior de cada alternativa x

$$u_M(x) = \sum_{i \in I} M_i x_i \quad \text{para todo } x \in A$$

$$u_m(x) = \sum_{i \in I} m_i x_i \quad \text{para todo } x \in A$$

La matriz de preferencias normalizada P(10,10),

$$
P = \begin{array}{c|c}
 & \text{alternativas} \\
\text{alternativas} & \begin{array}{cccc} x & y & & z \end{array} \\
\begin{array}{c} x \\ y \\ \\ \\ z \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & m^*(xPy) & \ldots\ldots & m^*(xPz) \\ m^*(yPx) & 0 & \ldots\ldots & m^*(yPz) \\ \vdots & & & \vdots \\ m^*(zPx) & m^*(zPy) & \ldots\ldots & 0 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

tiene guiones en la diagonal y sus elementos no diagonales se determina de acuerdo con lo siguiente: para cada pareja de alternativas x,y se generan NP valores

$$\underline{a} = \sum_{i \in I} (RND()\ L(i) + m(i))\ (I(i,x) - I(i,y))$$

donde $L(i) = M(i) - m(i)$ es la longitud del intervalo asociado al criterio $i \in I$, RND() una función generadora de números aleatorios y $I(i,x) - I(i,y)$ la diferencia de impactos sobre el criterio i entre las alternativas x,y. La medida $m^*(xPy)$ es la proporción de casos en que $\underline{a}$ resultó positiva; $m^*(yPx) = 1 - m^*(xPy)$.

▌Nota general: Cuando se modifica una tabla y se pide pasar a otra que sería alterada si se actualizaran dichos datos, preguntar al usuario si el paso se da con actualización de los datos o no. Poner una nota que le indique en cuál de las situaciones se encuentra.

▌ →**Opción 4 Especificar umbrales de veto para los criterios**

Despliega:

		UMBRAL DE VETO	
DESCRIPCION DE LOS CRITERIOS			
ABREVIADA	├──────── LARGA ────────┤	INF	SUP
Criterio$_i$	1234567890123456789012345678901234 5——12345	V1(i)	V2(i)

para mostrar y/o editar los valores V1(i), V2(i) de cada criterio en que hay veto, donde $0 < V1(i) \le V2(i)$; espacios en blanco en el lugar de V1(i), V2(i) indica ausencia de veto para el criterio i. El conjunto de criterios para los que se especifica veto se denota por IV. (Entonces

$$x_i \geq y_i - V2(i) \qquad \text{para todo } i \in IV$$

es condición necesaria pero no suficiente para que la alternativa x sea al menos tan buena como la alternativa y.)

Opción 5: Matriz de comparaciones

Determina la matriz de comparaciones C(10,10), la cual se despliega como sigue

```
Umbral de preferencia:__p__      Umbral de indiferencia: __q__
MATRIZ DE COMPARACIONES:         Alternativas
     Un renglón en blanco
Alternati 11111--22222--33333--...    --77777--88888--99999--00000
  11111     -      P       I,......, ETC
```

Esta matriz de comparaciones se determina según el siguiente procedimiento, el cual determina también los datos para las dos primeras tablas de la opción 6 (análisis de robustez).

Paso 1. Inicialización:

j = 1; T(1) = "-", KT(1) = q, XT(1) = "-", YT(1) = "-"

k = 1; V(1) = "-", KV(1) = p, XV(1) = "-", YV(1) = "-"

(T para umbral de indiferencia, V para el de preferencia)

Paso 2. Para todo par de alternativas x,y, se sigue el siguiente procedimiento, donde P(x,y) ≥ P(y,x):

-- si x = y entonces C(x,x) = "-"; termina;

-- si P(x,y) ≤ q entonces C(x,y) = C(y,x) = "I" (x ,y indiferentes); si P(x,y) < q entonces j = j + 1, XT(j) = x, YT(j) = y, T(j) = "Q", KT(j) = P(x,y); termina;

-- si P(x,y) ≥ p entonces C(x,y) = "P" (*), C(y,x) = "-P" (x domina a y); si p < P(x,y) entonces k = k + 1, XV(k) = x, YV(k)

= y, V(k) = "Q", KV(k) = P(x,y); termina;

-- si q < P(x,y) < p entonces C(x,y) = "Q" (*), C(y,x) = "-Q" (x domina débilmente a y); j = j + 1 XT(j) = x, YT(j) = y, T(j) = "I", KT(j) = P(x,y); k = k + 1, XV(k) = x, YV(k) = y, V(k) = "P", KV(k) = P(x,y); termina. ■

(*): pasar por la <u>rutina de no discordancia</u>:

Si $x_i < y_i - V2(i)$ para algún $i \in IV$ entonces anteponer V2 a "P" o "Q", según el caso y regresar;

si $x_i < y_i - V1(i)$ para algún $i \in IV$ entonces anteponer V1 a "P" o "Q", según el caso y regresar. ■

(Ver la tabla 4.1)

Paso 3: Se ordenan XT(.), YT(.), T(.) y KT(.) de modo que KT(.) crece y lo mismo para XV(.), YV(.), V(.) y KV(.).

Condiciones	C	Transicion; valor del umbral			
P(x,y) ≥ P(y,x)	x,y;y,x	T;q' (<q)	T;q' (>q)	V;p' (<p)	V;p' (>p)
P(x,y) ≤ q	I; I	Q;P(x,y)	-	-	-
P(x,y) > p	P; -P	-	-	-	Q;P(x,y)
q < P(x,y) < p	Q; -Q	-	I;P(x,y)	P;P(x,y)	-
x = y	-	-	-	-	-

Tabla 4.1

▌ Opción 6: Robustez

Esta opción es accesible sólo después de haber pasado por la opción anterior. Los resultados se presentan como en las tablas 4.2 y 4.3.

ANALISIS DE ROBUSTEZ
Umbral de indiferencia

Umbral	Alternativas		Relación de x a y		
	x	y	Actual	Cambio	
KT(1)	XT(1)	YT(1)	C(.,.)	T(1)	↑ Reducción
q	-	-	-	-	← Umbral actual
KT(j)	XT(j)	YT(j)	C(.,.)	T(j)	↓ Aumento

Tabla 4.2

ANALISIS DE ROBUSTEZ
Umbral de preferencia

Umbral	Alternativas		Relación de x a y		
	x	y	Actual	Cambio	
KV(1)	XV(1)	YV(1)	C(.,.)	V(1)	↑ Reducción
p	-	-	-	-	← Umbral actual
KV(k)	XV(k)	YV(k)	C(.,.)	V(k)	↓ Aumento

Tabla 4.3

Para cada par de alternativas x,y tal que C(x,y) es igual a "V1P" o "V1Q", tabular los criterios $i \in IV$ tales que $y_i - x_i >$ V1(i), como se muestra en la siguiente tabla 4.4 (la cual se omite si no existe ningún par con estas características).

ANALISIS DE ROBUSTEZ
Umbral de veto

Alternativas		Relación de x a y	Criterio	Diferencia		
x	y			actual	mínima	máxima
x	y	C(x,y)	i	$y_i - x_i$	V1(i)	V2(i)

Tabla 4.4

■

Nota: Se incluye:

(a) presentar con barras verticales los valores extremos $u_M(x)$, $u_m(x)$ (el primero arriba del segundo);

(b) modificar la secuencia de las alternativas;

(c) salvar la información con el nombre que el usuario especifique

4.2 Determinación del número de pruebas

El método de Montecarlo consiste en estimar una magnitud determinista generando números aleatorios con una distribución de probabilidad cuyo valor esperado coincide con dicha magnitud. Se puede demostrar (ver por ejemplo I M Sóbol, pág 26) que si se hacen NP observaciones independientes, $\xi_1,\dots,\xi_{NP}$, cada una teniendo la misma distribución con media m y variancia b^2, y m se estima con el promedio

$$\frac{1}{NP}\sum_{j=1}^{NP} \xi_j \tag{4.1}$$

entonces la probabilidad de que el error correspondiente sea menor que $3b/\sqrt{NP}$ es del orden de 0.997, es decir,

$$P_r\left\{ \left|\frac{1}{NP}\sum_{j=1}^{NP} \xi_j - m\right| < 3b/\sqrt{NP} \right\} \simeq 0.997 \tag{4.2}$$

La proporción de puntos

$$(p_1,\ldots,p_n):\ p_i \in [m_i, M_i]$$

en el paralelepípedo factible de parámetros que cumplen

$$\sum_{i \in I} p_i\ (I(i,x) - I(i,y)) > 0 \qquad (4.3)$$

es precisamente la medida de la preferencia m*(xPy). Esta proporción se puede estimar como sigue:

(a) se generan aleatoriamente NP puntos con una distribución uniforme dentro del paralelepípedo $[m_i, M_i]$; para esto cada punto se determina especificando independientemente cada una de sus coordenadas:

$$p_i = \mathrm{RND}()\ (M(i) - m(i)) + m(i) \qquad i = 1,\ldots,NC$$

donde RND() es un número aleatorio generado independientemente de los otros mediante una distribución uniforme sobre [0,1);

(b) a cada punto generado se le asocia una variable aleatoria ξ_i, $i = 1,\ldots,NP$, la cual vale 1 si el punto cumple la desigualdad (4.3) y 0 en caso contrario.

Todas las variables aleatorias ξ_i son independientes y tienen la misma distribución. Esta distribución, denominada de Bernoulli, tiene la densidad de probabilidad

$$f(s) = m^s(1-m)^{1-s} \qquad s \in \{0,1\}$$

donde el valor esperado m coincide con la proporción que se desea determinar y puede ser estimado mediante el promedio 4.1. La variancia de esta distribución es $b^2 = m(1-m)$ por lo que de 4.2 el error máximo es

$$\delta_{max} = 3\sqrt{\frac{m(1-m)}{NP}}$$

Por ejemplo, para m = .5 (la variancia es máxima) con NP = 225 el error máximo es de .1. En la fig 4.1a se ilustra gráficamente la aproximación al valor real conforme el número de observaciones aumenta y en la fig 4.1b se verifica algo frecuente en la práctica, que el error real es dos o tres veces menor que el error máximo δ_{max}.

MÉTODO DE MONTECARLO
Distribución de Bernoulli

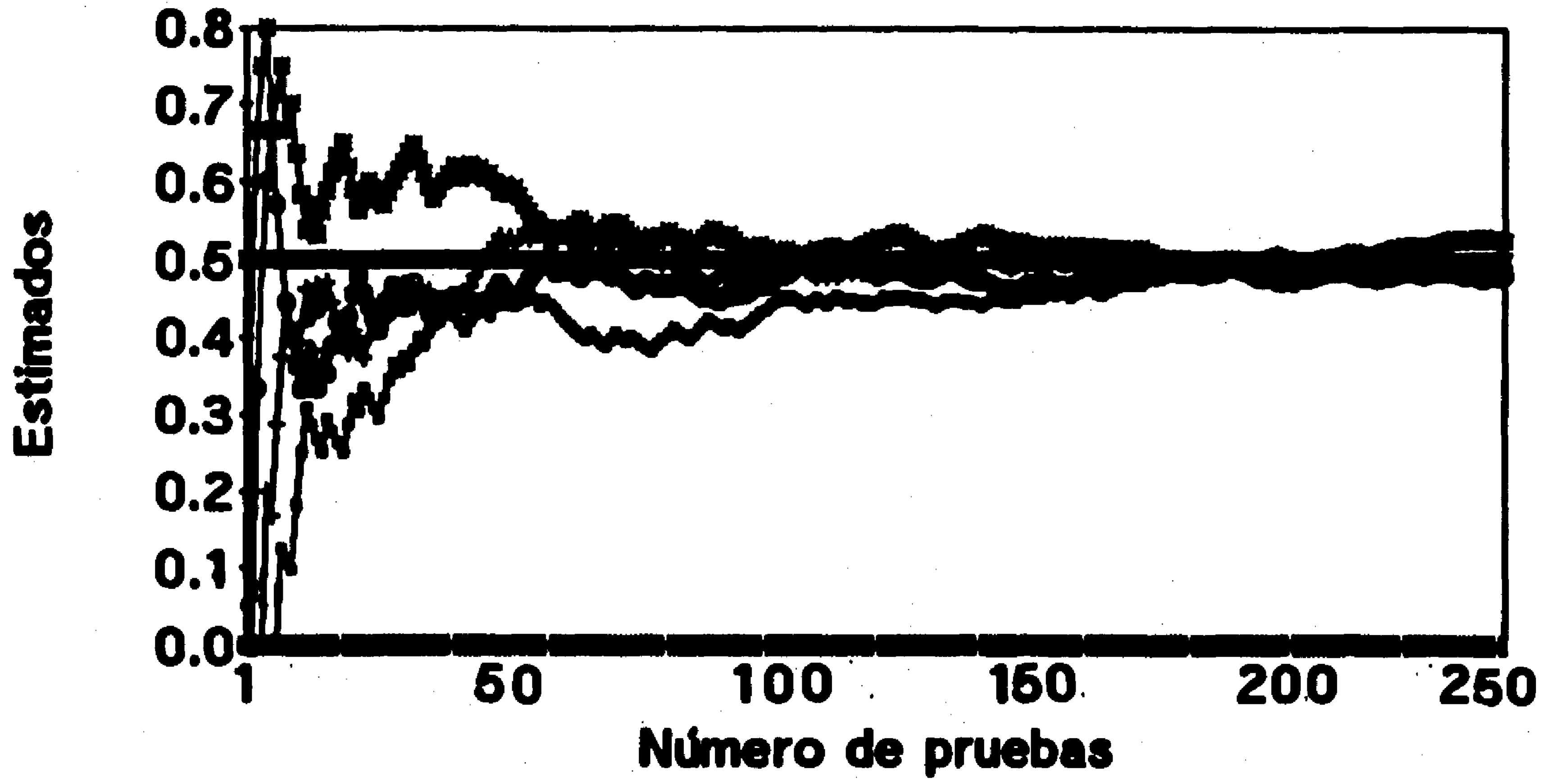


Fig 4.1a

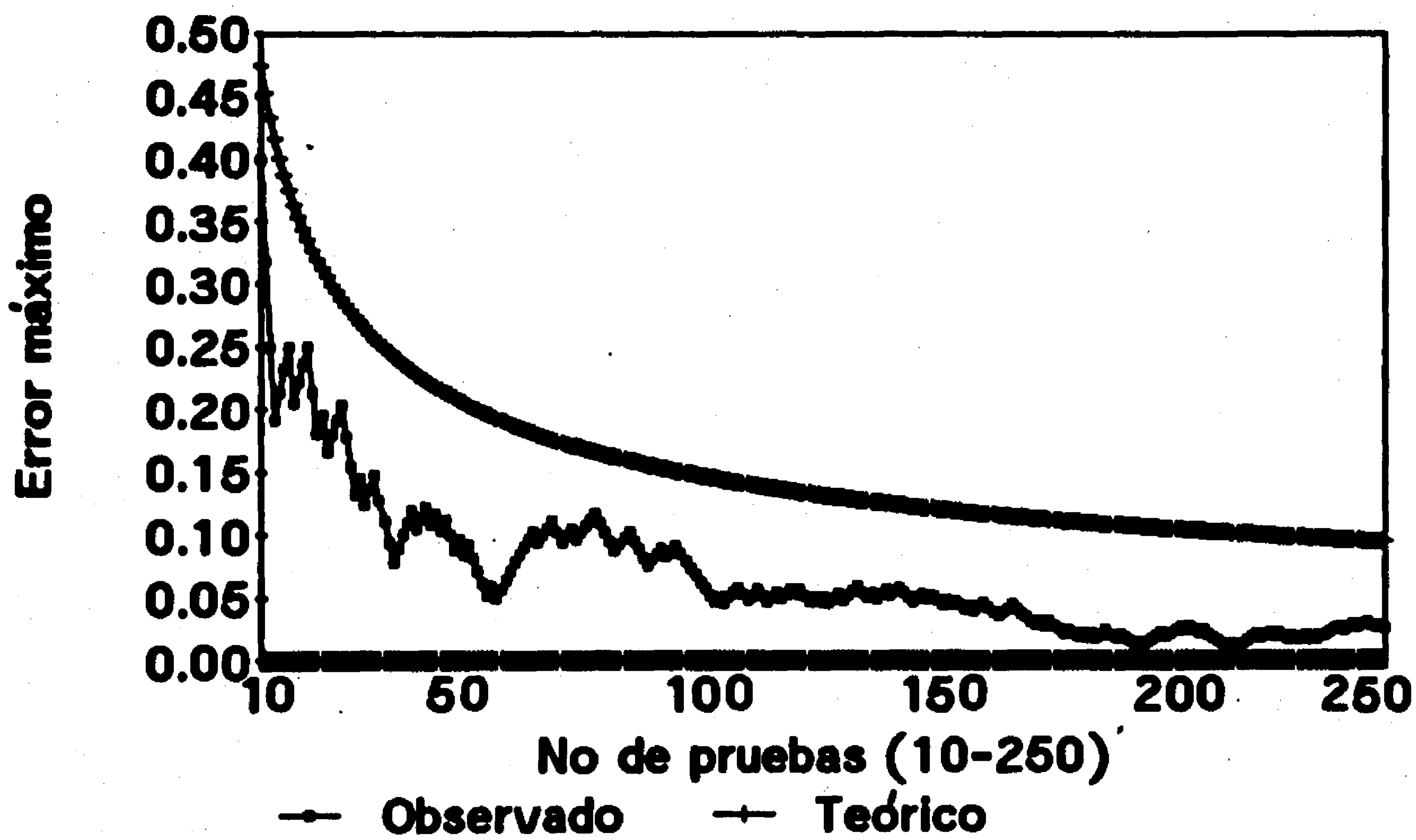


Fig 4.1b

5. EJEMPLOS Y APLICACIONES

Se da un ejemplo que ilustra el método UTA, el cual es el único método encontrado en la literatura que usa una familia de funciones de utilidad, pero que difiere del método propuesto en los datos de entrada, el procesamiento matemático de estos y en la agregación de las preferencias. El método propuesto se aplica a un problema que ha sido tratado en la literatura siguiendo el enfoque de utilidad multiatributo [Keeney, R.L.; Nair, K.; 1976], que fue con el que se resolvió el problema real, y el de relaciones binarias de sobreclasificación [Roy, B.; Bouyssou, D.; 1986]. Para facilitar el planteamiento del problema, que se refiere a la ubicación de una planta nuclear, primero se consideran las soluciones por los mencionados enfoques y después por el método que se propone. Se describe brevemente una aplicación del método propuesto a un caso real.

5.1 Ejemplos

Aplicación del método UTA

Considérese el caso de una persona que va a decidir la elección del modo de transporte casa-trabajo. Se estudian cinco alternativas:

- tren -(metro .1 $\sim$ - metro .2) - (camión $\sim$ - taxi)

Dicha persona juzga las distintas alternativas en relación a tres criterios:

- precio -tiempo del trayecto (en minutos) -comodidad

Para el criterio comodidad usa la escala:

0 : ninguna oportunidad de sentarse
+ : poca oportunidad de sentarse
++ : grandes posibilidades de viajar sentado
+++: viaja sentado con toda certeza

Matriz de impacto

Modo de Transporte	Clasificación	Precio	Tiempo	Comodidad
TREN	1	3	10	+
METRO 1	2	4	20	++
METRO 2	2	2	20	0
CAMION	3	6	40	0
TAXI	4	30	30	+++

La primera etapa del método consiste en explicitar las utilidades de las cinco acciones. Para el cálculo de las utilidades, se tienen las siguientes escalas discretas:

$[g \;\;, g^{*}] = [30, 16, 2]$

$[g \;\;, g^{*}] = [40, 30, 20, 10]$

$[g \;\;, g^{*}] = [0, +, ++, +++]$

donde, por interpolación lineal para el criterio g_1, se tendrá:

$u[g(\text{TREN})] = .07\ u_1(16) + .93\ u_1(2) + u_2(10) + u_3(+)$

$u[g(\text{METRO 1})] = .14\ u_1(16) + .86\ u_1(2) + u_2(20) + u_3(++)$

$u[g(\text{METRO 2})] = u_1(2) + u_2(20) + u_3(0) = u_1(2) + u_2(20)$

$u[g(\text{CAMION})= .29\ u_1(16) + .71\ u_1(2) + u_2(40) + u_3(+)$

$= .29\ u_1(16) + .71\ u_1(2)$

$u[g(\text{TAXI})] = u_1(30) + u_2(30) + u_3(+++) = u_2(30) + u_3(+++)$

al reemplazar $u\ (g_i^j\ )$ por los w_{ij} se tiene:

$u[g(\text{TREN})] = W_{11} + .93\ W_{12} + W_{21} + W_{22} + W_{23} + W_{31}$

$u[g(\text{METRO 1})] = W_{11} + .86\ W_{12} + W_{21} + W_{22} + W_{31} + W_{32}$

$u[g(\text{METRO 2})] = W_{11} + W_{12} + W_{21} + W_{22}$

$u[g(\text{CAMION})] = W_{11} + .71\ W_{12}$

$u[g(\text{TAXI})] = W_{21} + W_{31} + W_{32} + W_{33}$.

Finalmente se comparan las acciones por pares, y por el programa lineal del UTA mejorado:

W_{11}	W_{12}	W_{21}	W_{22}	W_{23}	W_{31}	W_{32}	W_{33}	variables σ^{+} y σ^{-}	
0	.07	0	0	1	0	-1	0	1 -1 -1 1	≥.1
0	-.14	0	0	0	1	1	0	1 -1 -1 1	= 0
0	.29	1	1	0	0	0	0	1 -1 -1 1	≥.1
1	.71	-1	0	0	-1	-1	-1	1 -1 -1 1	≥.1
1	1	1	1	1	1	1	1		= 1
								1 1 1 1 1 1 1 1 1 1	F

A partir de la solución óptima del programa lineal, se tiene: $u_1(2) = .5$, $u_1(16) = 0$, $u_1(30) = 0$, $u_2(10) = .2$, $u_2(20) = .1$, $u_2(30) = .1$, $u_2(40) = 0$, $u_3(0) = 0$, $u_3(+) = 0$, $u_3(++) = 0$, $u_3(+++) = .3$ y $F^{*} = \min F = 0$

La solución final es:

TREN → .7 METRO 1 → .6 METRO 2 → .6 CAMION → .5 TAXI → .4

Un análisis de sensibilidad dará un conjunto representativo de soluciones óptimas de las cuales se podrá elegir una.

Localización de una planta nuclear

El modelo de utilidad (modelo U) fue usado por Keeney y Nair (1976) y Robillard (1977) para elegir un lugar donde establecer una planta nuclear en la costa noreste de los Estados Unidos. Roy y Bouysson [1986] resolvieron este mismo problema utilizando relaciones binarias de sobreclasificación (modelo S).

El problema inicial envolvía un gran número de alternativas y criterios. Este conjunto se redujo a nueve alternativas y seis criterios. Conjuntamente con los datos del problema se describe la construción de la función de utilidad U y la correspondiente etapa del modelo S. Esta descripción comprende tres partes

i) el modelado de las preferencias parciales en relación con los criterios

ii) el modelo de agregación que define la preferencia global

iii) las recomendaciones

Construcción de los criterios

El modelo U consideró seis criterios relevantes para comparar los sitios

1. La salud y seguridad de la población en la región circundante
2. La pérdida de salmones en los ríos, por absorción del calor de la planta
3. Los efectos biológicos en la región circundante (excluyendo la pérdida de salmones)
4. El impacto socioeconómico de la instalación
5. El impacto antiestético de las líneas de alta tensión
6. Los costos de inversión y de operación.

La acción s corresponde a la instalación de la planta en un sitio s. La descripción de la consecuencias de una acción s en relación con los 6 criterios no es simple.

En el modelo U las consecuencias de una acción s se describen en términos de seis variables aleatorias (atributos) $X_i(s)$, $i = 1,2,\dots,6$, a las que se le asigna una distribución de probabilidad.

El primer paso consiste en determinar la información que permite definir el criterio, y explicitar la distribución de probabilidad de cada variable aleatoria. Las distintas distribuciones de probabilidad podrían ser dependientes, por lo que el caso general debía estudiarse en términos de la distribución de probabilidad conjunta de las seis variables aleatorias.

En este caso particular, y en general en los problemas de toma de decisiones, se considera que las $X_i(s)$ son probabilísticamente independientes y que el sistema de preferencias cumple la independencia preferencial y la independencia en utilidad [Keeney; Raiffa; 1976], hipótesis que no siempre se cumplen en situaciones reales.

Con estas hipótesis y los axiomas clásicos de la teoría de utilidad multiatributo, el analista:

- determina la función de utilidad parcial $u_i[x_i(s)]$, para cada $i = 1,2,\dots,6$
- hace explícita la distribución de probabilidad marginal $X_i(s)$
- calcula el valor esperado de dichas utilidades parciales para cada una de las acciones $g_i(s) = E[u_i(x_i(s))]$.

El modelo S sustituye el criterio verdadero $g_i(s)$ del modelo U por un seudocriterio [Roy; Vincke; 1984] con el fin de considerar la imprecisión, incertidumbre e indeterminación de la problemática que afecta la información que concentran las variables aleatorias X_i.

Para el criterio g_i se tiene

- "s' es indiferente a s" si y sólo si $|g_i(s') - g_i(s)| \leq q_i$
- "s' es estrictamente preferido a s" si y sólo si $g_i(s')>g_i(s)+p_i$
- "s' es débilmente preferido a s" si y sólo si $q_i \leq g_i(s')-g_i(s) \leq p_i$

donde q_i, p_i, $i = 1,2,\ldots,6$ son umbrales de indiferencia y preferencia, respectivamente.

En el modelo U los criterios g_i se definen enseguida que se determinan las utilidades parciales u_i y la distribución de probabilidad para cada atributo X_i. El procedimiento termina cuando se determina el valor esperado $g_i(s)$.

En el modelo S, el procedimiento se basa en el análisis y modelado de las consecuencias relativas a cada criterio i que puede ser un solo número correspondiendo a una evaluación puntual [Trejos,M.; 1989]. Cada uno de estos números posee (potencialmente) un índice de probabilidad que para efecto del articulo fue tomado directamente de la información obtenida del modelo U.

Criterios (1 y 5) basados en una evaluación puntual

Los valores de los atributos X_1 y X_5 fueron conocidos con certeza, el resto aleatoriamente.

$x_5(s)$ representa la longitud de las líneas de alta tensión que afecta la estética del medio ambiente en el lugar s. En los nueve sitios considerados la longitud varía de 0 a 12 millas. Para el modelo U se determinó la función de utilidad $u_5(x_5)$ usando la técnica de loterías 50-50 y resultó

$$u_5(x_5) = 1 - x_5/50$$

de aquí que

$$g_5(s) = 1 - x_5(s)/50.$$

Para el modelo S, un criterio asociado a $X_5(s)$ se definió por $g_5(s) = x_5(s)$. Como este valor no es suficientemente preciso, dos sitios tales que $x_5(s) = 10$, $x_5(s') = 9$, cuya diferencia es una milla, no pueden distinguirse preferencialmente porque esta diferencia no es significativa. Por no tener información en relación a esta medición y pensando que $x_5(s)$ no fue concebido como intervalo cuya medida crece con la distancia en cuestión, sino que en distancias de menos de una milla se mantenía constante, se eligió una razón de crecimiento de 3% (10% no cambia el resultado). Para justificar $g_5(s) = x_5(s)$, $s = 1,2,\ldots,9$, se definió el intervalo

$$[g_5(s) - \eta_5(g_5(s));g_5(s) + \eta_5(g_5(s))]$$

donde $\eta_5(s) = 1 + 0.03\ g_5(s)$. η_5 es un umbral de dispersión [Trejos, M.; 1989].

De las fórmulas generales [Roy; Bouyssou; 1983] se calculan los umbrales de indiferencia y preferencia, necesarios para definir el seudocriterio g_5, resultando

$$q_5(g_5(s)) = 1 + 0.03\ g_5(s) \quad \text{y} \quad p_5(g_5(s)) = 2.0618 + 0.0618\ g_5(s)$$

El factor de población local, $x_1(s)$, es un índice oficial y es expresado en función de la distancia entre el poblado y la planta. Es una medida de la población cuya salud y seguridad podrían ser afectadas por la construcción de la planta. Este índice varía para este problema, entre 0.011 y 0.057. Para el modelo U, considerando la técnica de loterías 50-50, y valores extremos para x_1 de 0 y 0.2, se tiene

$$u_1(x_1) = 1 - 5x_1$$

y el criterio verdadero sería

$$g_1(s) = 1 - 5x_1(s)$$

Para el modelo S, considerando la imprecisión de $x_1(s)$, que es mayor que la de $x_5(s)$, se tomó un número que es el resultado de una "operación de agregación" que representa una distribución de la población establecida a diferentes distancias de la planta (dicha distribución puede cambiar con el tiempo). Se consideró razonable adoptar un umbral de dispersión de $0.1x_1$. Los umbrales de indiferencia y preferencia que caracterizan al seudocriterio $g_1(s)$, respectivamente, son

$$q_1(g_1(s))=0.1g_1(s) \quad \text{y} \quad p_1(g_1(s)) = 2/9\ g_1(s).$$

Criterios (3 y 4) basados en evaluaciones cualitativas puntuales no-únicas

Para cada uno de los atributos en cada sitio, Keeney y Nair determinaron dos escalas cualitativas mediante descripciones precisas y concretas de 10 expertos en la materia. Dichas escalas tenían 8 y 7 intervalos adyacentes que definían los atributos X_3 y X_4, respectivamente. Estos atributos seguían distribuciones de probabilidad definidas con base en la proporción de los votos emitidos por dichos expertos sobre cada intervalo.

Se determinaron las funciones de utilidad $u_3(x_3)$ y $u_4(x_4)$ mediante técnicas conocidas [Keeney R.; Nair R.; 1976] y sus respectivas esperanzas: $g_3(s)= E\ [u_3(x_3(s))]$, $g_4(s)=E\ [u_4(x_4(s))]$.

Para el modelo S se seleccionó el intervalo más cercano al centro y, dada la naturaleza de la escala, se adoptaron umbrales de discriminación constantes. Después de examinar las distribuciones de las opiniones de los expertos se usó

$$q_3=1 \qquad p_3=2 \qquad\qquad q_4=0 \qquad p_4=1$$

Criterio (2) basado en evaluaciones cualitativas puntuales no-únicas

El segundo criterio fue necesario evaluarlo en relación con los dos siguientes aspectos:

1) El número total Y de salmones que viven en el río

2) El porcentaje Z de salmones muertos

Un estudio realizado por Keeney y Robillard (1977) llevó a considerar dos casos:

a) el río era grande, $Y > 300{,}000$

b) el río era pequeño, $Y < 100{,}000$

En el caso a), la cantidad de salmones muertos por la instalación de la planta es $Q = Y \times Z$ y el atributo X_2, se tomó en cuenta mediante la función de utilidad

$$u_2(X_2) = 0.568 + 0.432\ u_Q(Q)$$

donde $u_Q(Q)=0.7843\ \ (e^{0.00274(300-Q)}-1)$, Q en miles de salmones muertos.

En el caso b), el atributo X_2 se definió en términos de funciones de utilidad $u_Y(Y)$ y $u_Z(Z)$, mediante $u_2(X_2) = u_Y(Y) + u_Z(Z)-(u_Y(Y)\ u_Z(Z))$

En el modelo U, para encontrar la esperanza de $g_2(s)$ se consideró y(s) (valor de la variable Y en cada sitio s) con certeza; mientras que la variable Z se supuso que seguía una distribución normal con una desviación estandard igual a un medio de su valor esperado.

En el modelo S, se trató de analizar porqué dados dos ríos que contienen y y y' salmones se produce más daño al destruir q en el primero que un número ligeramente mayor q' en el segundo. Se hicieron consideraciones cualitativas tratando de relacionar q y q', y y y' de manera que el daño que se hiciera en ambos ríos fuera de la misma magnitud. Mediante la fórmula $q' = q\ (y'/y)^{\alpha}$ $(0 < \alpha < 1)$ se llegó a representar las opiniones de los expertos en caso que el daño que se ocasionara en los ríos fueran equivalentes. Se definieron dos versiones de g_2:

$$g_2'(s) = \frac{q}{\sqrt{y}} = z\sqrt{y} \qquad \text{para} \quad \alpha = \frac{1}{2}$$

$$g_2''(s) = q = zy \qquad \text{para} \quad \alpha = 0$$

El valor de la desviación estandard de Z y el valor impreciso de Y llevaron a adoptar los umbrales de dispersión $0.5g_2'(s)$ y $0.5g_2''(s)$, es decir,

$$q_2' = 0.5\ g_2'(s) \qquad p_2' = 2\ g_2'(s)$$

$$q_2'' = 0.5\ g_2''\ (s) \qquad p_2'' = 2g_2''\ (s).$$

Criterio (6) basado en evaluaciones cuantitativas puntuales no únicas

El modelo U consideró que los costos de inversión y operación de la planta podían darse en relación con el costo del sitio s_2 (el más barato). Se consideró $X_6(s)$ como un costo diferencial, asignándole una variable aleatoria que seguía una distribución normal con desviación estandard igual a un cuarto de su valor esperado. El valor esperado fue estimado por los valores $\bar{x}_6(s)$ variando entre 0 y 17.7 (en millones de dólares por año). El criterio $g_6(s)$ es la utilidad esperada de este costo diferencial aleatorio. La función de utilidad $u_6(x_6)$ fue definida, siguiendo la técnica usual de loterías, como

$$u_6(x_6) = 1 + 2.3\left(1-e^{0.009\, x_6}\right)$$

Por desconocer el detalle de los dos tipos de costos se fijó el valor esperado

$$g_6(s) = x_6(s)$$

El modelo S consideró costos iguales para dos sitios s y s' en los que la diferencia de dichos costos está en el intervalo $[\bar{x}_6(s)-1, \bar{x}_6(s)+2]$.

Los umbrales de dispersión considerados fueron

$$[\bar{x}_6(s) - 1 - 0.1\,\bar{x}_6(s)\ ,\ \bar{x}_6(s) + 2 + 0.5\bar{x}_6(s)]$$

entonces

$$q_6(g_6(s)) = 1.1 + 0.11 g_6(s)$$

$$p_6(g_6(s)) = 3.33 + 0.67 g_6(s).$$

Agregación de los criterios y preferencia global

La preferencia global en el modelo U, se representó como

$$g(s) = \frac{1}{k}\left[\prod_{i=1}^{6} (1+k\ k_i g_i(s))-1\right] \qquad (1)$$

donde $$k \neq 0,\ k \geq -1,\quad k = \prod_{i=1}^{6} (1+k\ k_i) - 1 \qquad (2)$$

En el modelo S, se usa el algoritmo ELECTRE III para comparar parejas de sitios tomando en cuenta los umbrales q_i, p_i para cada criterio i. La alternativa se acepta, rechaza o se valora la credibilidad de la proposición "el lugar s es al menos tan bueno como s'".

Esta credibilidad se sustenta en los análisis de concordancia y discordancia que permiten:

i) caracterizar el grupo de criterios concordantes con la proposición mencionada que se estudia y determinar la importancia de este grupo de criterios

ii) caracterizar los criterios no compatibles con dicha proposición para considerar el rechazo de ésta.

Para realizar estos análisis es necesario valorar numéricamente la importancia k_i del criterio i de acuerdo con las preferencias del decisor lo que ordenará los distintos criterios involucrados. A cada criterio i se le asigna un nivel mínimo, que se llama umbral de veto $(v_i(g_i(s)))$, más allá del cual se rechaza la proposición.

Modelado de la importancia de los criterios

El método usado en el modelo U para determinar los pesos de los criterios es el de loterías. $\underline{x}_i$ y $\overline{x}_i$ denotan los valores de los criterios para escalar la función de utilidad parcial entre 0 y 1.

Sean $u_i(\underline{x}_i) = 0$ y $u_i(\overline{x}_i)=1$ y considérense dos lotería L_1 y L_2. L_1 es una loteria degenerada cuyo resultado con certeza es un sitio imaginario que recibe la peor evaluación en todos los criterios excepto en el criterio j, donde su evaluación es x_j. L_2 es otra lotería que da otro sitio imaginario cuya evaluación es la mejor y la peor posible sobre todos los criterios con probabilidad p y 1-p, respectivamente.

La utilidad esperada de L_2 es p y la de L_1 es la de k_j en la representación global multiplicativa 1. Si el decisor es capaz de determinar la probabilidad p que garantiza la indiferencia entre las dos loterías se puede establecer que $k_j = p$ porque $E(u(L_2)) = p + (1-p)\times 0 = g_j(s) = u(g_j(s)) = k_j$. Iterando este procedimiento se pueden determinar los 6 coeficientes k_i y k como solución de la ecuación 2.

Esta forma de comparación de loterías es complicada y el decisor puede ser incapaz de hacer tales comparaciones y determinar la probabilidad p tal que el decisor es indiferente entre dichas loterías. Para evitar estos obstáculos los diseñadores del modelo U usaron una técnica de comparación indirecta que puede consultarse en Keeney, R.L.y Nair, (1976).

Los factores de peso en el modelo U fueron:

$k_1 = 0.358$; $k_2=0.218$; $k_3=0.013$; $k_4=0.104$; $k_5=0.059$; $k_6=0.400$.
De la ecuación 2 $k = -0.3316$.

En el modelo S se establecen índices de importancia que imponen un ordenamiento sobre los diferentes criterios o grupos de ellos. Se trató de encontrar conjuntos de índices de importancia compatibles con las consideraciones (ordinales) de los decisores.

La importancia relativa de los distintos criterios se calculó del intervalo de variación de las razones

$$R_{ij} = \frac{\partial g / \partial g_i}{\partial g / \partial g_j} \qquad i,j = 1,\ldots,6$$

R_{ij} se interpreta cualitativamente como la ganancia sobre el criterio j para compensar una pérdida sobre el criterio i. Para cubrir colectivamente el mismo sistema de valores usado por el modelo U, se requirieron ocho intervalos de variación de las razones R_{ij}.

Umbrales de veto

En el modelo S se asignan valores numéricos a los diferentes umbrales tomando en cuenta la importancia relativa de los criterios, la distribución de las evaluaciones de los sitios y el tamaño de los distintos umbrales de preferencia. Para esto se supone que las preferencias del decisor son de carácter parcialmente compensatorio pues los coeficientes de importancia $k_i>0$ son tales que para cualquier coalición $C \subseteq F$ de criterios la suma $\Sigma_i k_i, i\epsilon C$, es una medida de la importancia de la coalición C. Por la arbitrariedad inevitable en la elección de estos valores numéricos se realizó un análisis de robustez. Sin embargo, dicho análisis mostró que los valores elegidos afectaron los resultados dentro de un intervalo aceptable de variación. Los umbrales $v_j(g_j(s))$ se tomaron como múltiplos de los umbrales de preferencias $p_j(g_j(s))$ y se supuso que a menor importancia del criterio mayor valor del coeficiente α_k, esto es, $v_j(g_j(s)) = \alpha_j p_j(g_j(s))$.

Se consideraron los siguientes valores:

$v\ (g\ (s)) = 6p\ (g\ (s))$ $\qquad$ $v\ (g\ (s)) = 4p\ (g\ (s))$

$v\ (g\ (s)) = 2.5p\ (g\ (s))$ $\qquad$ $v\ (g\ (s)) = 20p\ (g\ (s))$

$v_3(g_3(s)) = 4p_3(g_3(s))$ $\qquad$ $v_6(g_6(s)) = 1.7p_6(g_6(s))$.

Por ser el modelo U compensatorio, no se pueden hacer consideraciones cualitativas para determinar los umbrales de veto.

Contenido y presentación de las recomendaciones

En el modelo U, donde $g(s) = [\prod_{i=1,6}(1 + kk_i g_i(s)) - 1](1/k)$, los sitios se clasifican sobre las siguientes bases:

$$s' P\ s \quad \text{si y sólo si} \quad g(s') > g(s)$$

$$s' I\ s \quad \text{si y sólo si} \quad g(s') = g(s)$$

En el modelo S la situación es diferente. Se establece una relación de sobreclasificación borrosa sobre el conjunto de acciones en la que se especifica la credibilidad de "s' es al menos tan buena como s". Se usa un procedimiento de destilación para clasificar las acciones.

Este procedimiento consiste en lo siguiente: sobre una sucesión de subconjuntos de alternativas se aplican sucesivas supresiones de clases de ordenamiento. Estos subconjuntos se separan eligiendo acciones con la máxima o mínima cifra de mérito (destilación descendente o ascendente, respectivamente). Dicha cifra se obtiene, para una acción *a*, de la diferencia entre el número de acciones que son estrictamente sobreclasificadas por *a* (fortaleza de *a*) y el número de acciones que sobreclasifican a *a* (debilidad de *a*) [Roy, B; 1985].

Resultan dos preórdenes totales aparentemente contradictorios. La intersección de estos dos preórdenes lleva a un preorden parcial que enfatiza las acciones que tienen una situación dudosa en la clasificación. Las recomendaciones finales requieren un análisis de robustez.

Resultados

Las soluciones de los dos modelos se dan en las siguientes gráficas.

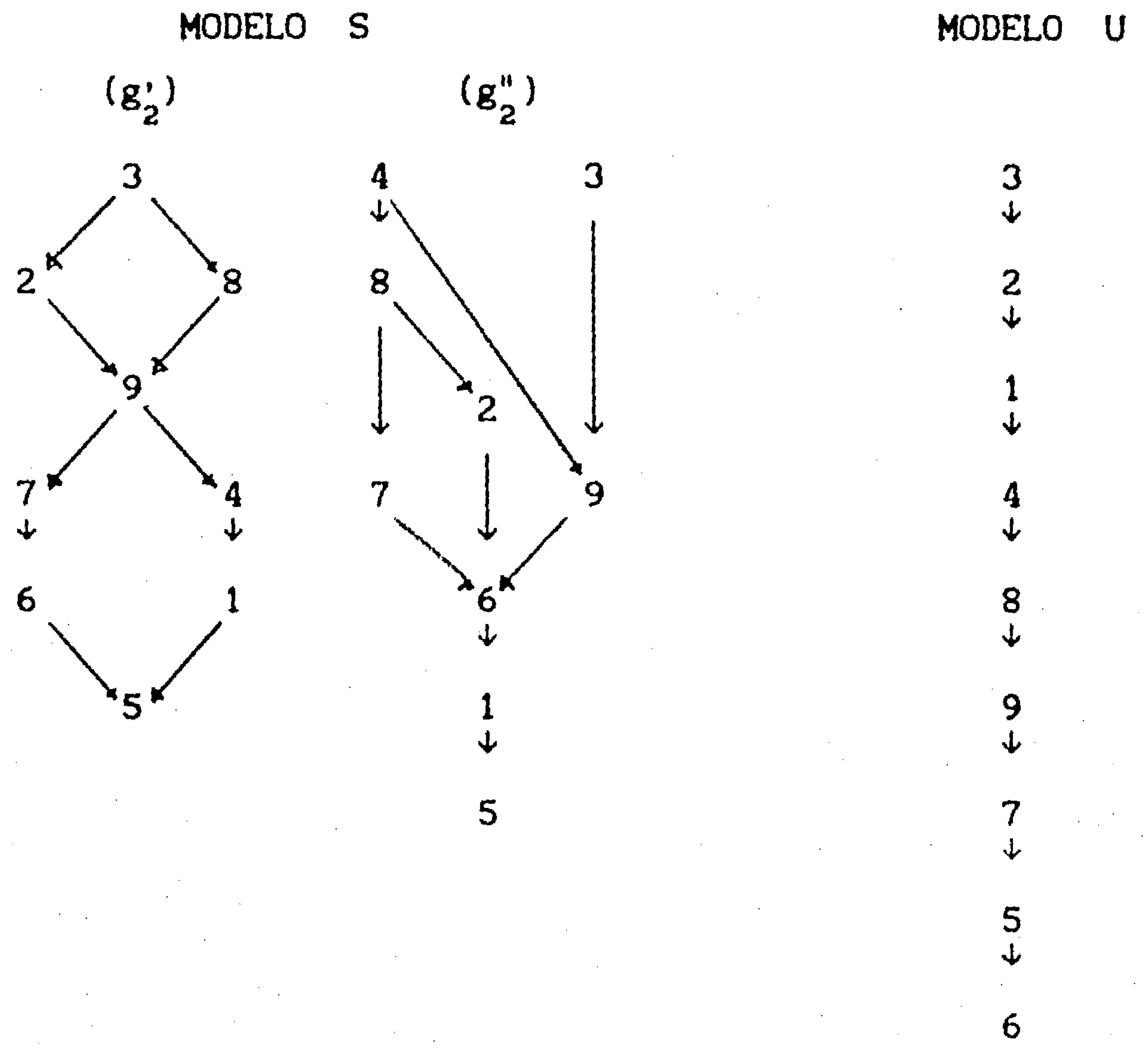


Fig 5.1

Solución por el método propuesto

El problema de localización de la planta nuclear se formuló originalmente en razón del método que se usaría (el de teoría de utilidad multiatributo). Para poder aplicar el método propuesto hubo entonces que explorar los datos preferenciales disponibles e inferir de ellos las respuestas que hubiera dado el decisor a las preguntas sobre intervalos de peso, umbrales, etc. La única información utilizable fueron respuestas del decisor sobre condiciones en que él sería indiferente y que permitieron estimar la tasa de sustitución de cada uno de los criterios respecto del criterio 6 (costos de inversión y de operación). Con esto se pudo construir una matriz de impacto sin usar cálculos de los otros dos modelos. Los resultados siguiendo el modelo propuesto son entonces independientes de los otros dos métodos, pero resultaron similares a los obtenidos por los otros dos métodos.

En Roy y Bouyssou (pág 68) se encuentra la siguiente información preferencial, la cual fue proporcionada directamente por el decisor cuando se elaboró el modelo U:

$$(0,\ 40)\ I\ (0.2,\ 5) \quad \text{sobre los criterios 1 y 6}$$

lo que significa que el decisor está dispuesto en pagar 40-5=35 M$ adicionales por la central nuclear si se pasa de una región de alta densidad a una región deshabitada. Esto implica una tasa de sustitución del atributo 1 respecto del atributo 6 de

$$p_1 = 0.2/35 = 0.0057$$

Con razonamientos similares se obtienen las tasas de sustitución del resto de los criterios respecto del criterio 6:

$$p_2 = 100/20 = 5$$

$$p_3 = 8/1 = 8$$

$$p_4 = 7/9 = 0.777$$

$$p_5 = 50/5 = 10$$

y desde luego $p_6 = 1$. Considerando estos valores como pesos promedio y dando un cierto margen de incertidumbre a todos los pesos, exepto el del criterio 6, que se toma como referencia, se obtienen los resultados que se muestran. Los umbrales de indiferencia y preferencia se consideraron q = .6, p = .8; la información preferencial disponible no permite estimar umbrales de veto. Nótese que las utilidades son decrecientes, por lo que una alternativa es mejor conforme su utilidad disminuye.

MATRIZ DE IMPACTO

Alternativas

Crit	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Intervalo
1)	.057	.04	.025	.048	.044	.023	.052	.011	.018	[.004 .006]
2)	8	8	8	15	15	15	15	1	1	[4 6]
3)	2	2	2	4	5	5	3	2	1	[7 9]
4)	3	3	3	4	3	4	4	4	3	[.7 .8]
5)	1	1	7	6	12	1	0	0	0	[9 11]
6)	2035	0	1535	1933	12347	17713	4834	10936	11423	[1 1]

Matriz de preferencias

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	1	1	.56	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	1	0	0	0	0	0	0	0
4	.44	1	1	0	0	0	0	0	0
5	1	1	1	1	0	0	1	1	1
6	1	1	1	1	1	0	1	1	1
7	1	1	1	1	0	0	0	0	0
8	1	1	1	1	0	0	1	0	0
9	1	1	1	1	0	0	1	1	0

La solución con el método propuesto se puede representar gráficamente como sigue:

$$
\begin{tikzcd}
& 2 \arrow[d] & \\
& 3 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
1 \arrow[rr, leftrightarrow] \arrow[dr] & & 4 \arrow[dl] \\
& 7 \arrow[d] & \\
& 8 \arrow[d] & \\
& 9 \arrow[d] & \\
& 5 \arrow[d] & \\
& 6 &
\end{tikzcd}
$$

Fig 5.2

5.2 Aplicación

El método desarrollado está siendo aplicado por la Gerencia de Telecomunicaciones de PEMEX para ayudar a seleccionar ofertas de sistemas de comunicación vía satélite obtenidas mediante concurso internacional. Este tipo de problemas de toma de decisiones se ha venido presentado con relativa frecuencia, resultando que parte de las especificaciones y criterios que deben cumplir las ofertas son repetitivos, lo que permite aprovechar las experiencias y las bases de datos de un problema a otro. En el programa de computadora correspondiente se ha incluido un tipo de veto, que puede denominarse absoluto, consistente en eliminar del concurso a las alternativas que no alcanzan una calificación mínima en criterios tales como confiabilidad del equipo y compatibilidad con el ya existente o con el que se tiene planeado instalar.

Este tipo de decisiones se toman en dos etapas. En la primera se hace un dictamen, denominado técnico, en el que las alternativas se evalúan contemplando dos aspectos:

(a) características técnicas del sistema ofrecido y sus partes más importantes, compatibilidad con los equipos existentes o por instalar, experiencia de la empresa, etc

(b) costo mensual permanente por operar el sistema, el cual está determinado por características puramente técnicas relativas a la eficiencia en el uso del segmento espacial (este costo es más importante que el costo inicial de adquisición del equipo).

El resultado de esta etapa, en caso que el concurso no se declare desierto, es una lista de las ofertas que pasan a la siguiente etapa, que generalmente son menos de diez, las cuales se jerarquizan por su deseabilidad según los dos aspectos mencionados. El dictamen incluye los argumentos en que se basa la jerarquización a la que se llegó.

En la siguiente y última etapa la decisión se toma considerando tanto los aspectos técnicos y económicos analizados en la primera etapa como los financieros y económicos asociados a la adquisición misma. Si resultaran conflictos entre las recomendaciones de la primera etapa y los nuevos criterios introducidos en la segunda, entonces estos se resuelven por procedimientos informales de negociación entre las dependencias de PEMEX involucradas.

El método propuesto interviene en la evaluación del aspecto (a), en el cual se consideran poco más de un centenar de criterios de tipo técnico, los cuales se clasifican en secciones. Se consideran las siguientes secciones:

1) especificaciones técnicas relativas a la calidad del equipo
2) técnicas de acceso al satélite, que comprende la flexibilidad y optimación del uso del transponder y las facilidades para ampliar y reconfigurar la red
3) sistema de supervisión y control, que incluye las facilidades

para supervisar y controlar la red desde el punto de vista del mantenimiento y la operación del sistema

4) interfases de voz y datos, que comprenden las facilidades de interconexión entre el equipo de comunicaciones via satélite y el equipo telefónico o de datos existentes o previstos en las instalaciones de PEMEX

5) soporte técnico y experiencia del proveedor, donde se toma en cuenta su capacidad técnica, experiencia en sistemas similares, la calidad de su ingeniería y el respaldo con que se contaría en México para garantizar la continuidad del sistema.

En esta aplicación las importancias relativas de los criterios se determinan de manera subjetiva y por consenso de los especialistas que intervienen. Al empezar a usar el método propuesto se revisaron los procedimientos para representar y asignar dichas importancias. Así, a cada sección se le asignaba un factor constante en forma de porcentaje (típicamente 20, 25, 20, 20, y 15 por ciento, respectivamente). Actualmente, al representar la importancia relativa de los criterios mediante intervalos, dichos especialistas tienen un mayor margen para lograr evaluaciones que puedan ser aprobadas por consenso.

6. CONCLUSIONES

El método de toma de decisiones multicriterio propuesto es apropiado principalmente en casos en que el decisor no tiene claramente definidas sus preferencias al principio del proceso. Este tipo de situaciones pueden considerarse de imprecisión, y no necesariamente de inconsistencia del decisor, como generalmente se interpreta en el enfoque de teoría de utilidad multiatributo. El método es aplicable en casos en que: a) hay un único decisor; b) Los criterios son independientes en preferencia, y en utilidad si la decisión es bajo riesgo; c) el decisor puede expresar importancias relativas entre criterios, a través de intervalos de factores de peso, pero no necesariamente sus preferencias entre alternativas arbitrariamente seleccionadas.

La familia de funciones de utilidad que representa de alguna manera las preferencias del decisor es una familia parametrizada de funciones, en la que cada elemento está dado por un juego de valores de parámetros, cuyos dominios de variación especifican precisamente a la familia. Los conflictos entre los distintos miembros de esta familia se resuelven mediante una relación de sobreclasificación determinada por umbrales de preferencia, indiferencia y veto.

El método puede entrar en diversas clasificaciones. Así, forma parte del enfoque de relaciones binarias de sobreclasificación, aunque utiliza conceptos de teoría de utilidad. Además puede considerarse un método interactivo porque el proceso está gobernado y dirigido por las respuestas del decisor y no por un algoritmo cuya convergencia puede argumentarse en términos puramente matemáticos (en un procedimiento interactivo no tiene sentido hablar de convergencia). Para que el proceso termine se requiere que de alguna manera el decisor se percate en qué momento sus preferencias sobre las alternativas consideradas son suficientemente claras y están fielmente representadas por el modelo, con lo que se da por terminado el análisis y se toman la decisión o decisiones correspondientes.

La principal ventaja del método que se propone es el manejo explícito de imprecisiones mediante intervalos de variación de los parámetros del modelo. En el caso aditivo estos parámetros son los factores de peso. Esto último hace al método particularmente fácil de comprender y usar por parte de todo tipo de decisores. Al aceptarse la no comparabilidad las alternativas resultan semiórdenes y no necesariamente órdenes totales como en los modelos de útilidad. Además, otros métodos multicriterio pueden hacerse compatibles con el propuesto y aprovecharse para encontrar parámetros iniciales del modelo. Así por ejemplo, la matriz de impacto y los intervalos de peso iniciales pueden evaluarse con la técnica de jerarquización analítica de Saaty.

En lo que toca a futuras investigaciones, es de interés el desarrollo de métodos más flexibles de toma de decisiones multicriterio que se adapten mejor a una mayor variedad de situaciones, tanto del problema en si como del estilo e inclinaciones del decisor. A este respecto los caminos que ofrecen la técnicas de inteligencia artifical [Simon, H.; 1987] y en particular los sistemas expertos [Ligeza, A.; 1988][Srinivazan, V.; Ruparel, B.; 1990][Kersten, G.; Szpakowicz, S.; 1990] son prometedores. Un problema que podría atacarse con estas técnicas es el de elegir el método de toma de decisiones a usar, el cual es a su vez multicriterio y exige un conocimiento profundo de los métodos existentes. El problema de modelar las importancias relativas de los criterios es aún el más estudiado y el más difícil de resolver en forma general.

ANEXO: DEMOSTRACIONES

El concepto de relación binaria sobre X como subconjunto de XxX se generaliza al de una función de pertenencia R: XxX $\longrightarrow$ [0,1] donde R(x,y) denota la imagen del par ordenado (x,y) por esta función. El concepto clásico de relación se obtiene como un caso particular: (x,y) están R- relacionados si R(x,y) = 1 y no están R-relacionados si R(x,y) = 0. Los conceptos de simetría, reflexividad, etc. se generalizan de manera natural como sigue [Roubens, M; 1989] ($\wedge$ y $\vee$ denotan las operaciones de ínfimo y supremo, respectivamente):

reflexiva sii $R(x,x) = 1 \quad \forall\ x \in X$
ireflexiva sii $R(x,x) = 0 \quad \forall\ x \in X$
simétrica sii $R(x,y) = R(y,x) \quad \forall\ x,y \in X$
transitiva sii $R(x,y) \geq R(y,z) \wedge R(y,z) \quad \forall\ x,y,z \in X$

De estas definiciones y la definición de medida normalizada

$$m^*(xPy) = \frac{m(xPy)}{m(xPy) + m(yPx) + m(xIy)}$$

$$m^*(xIy) = \frac{m(xIy)}{m(xPy) + m(yPx) + m(xIy)}$$

resulta:

(1) Condición de normalización:

$$m^*(xPy) + m^*(xIy) + m^*(yPx) = \frac{m(xPy)}{m(xPy) + m(yPx) + m(xIy)} +$$

$$+ \frac{m(xIy)}{m(xPy) + m(yPx) + m(xIy)} + \frac{m(yPx)}{m(xPy) + m(yPx) + m(xIy)} = 1$$

(2) La medida de la indiferencia es simétrica, es decir $m^*(xIy) = m^*(yIx)$, y reflexiva

$$m^*(xIx) = \frac{m(xIx)}{m(xPx) + m(xPx) + m(xIx)} = 1$$

ya que $m(xPx) = 0$. Por esto mismo la medida normalizada de la preferencia es irreflexiva, $m^*(xPx) = 0$.

Por la definición de las relaciones P, Q y R (sentido clásico, como subconjuntos de un producto):

(3) Las relaciones P Q y R son irreflexivas:

P y Q son irreflexivas porque $m(xPx) = 0$; R es irreflexiva porque al ser P irreflexiva la relación xPx no puede ser vetada.

REFERENCIAS

Bana eCosta, C. (1986) "A multicriteria decision aid methodology to deal with conflicting situations on the weights", European Journal of Operational Research, Vol. 26, No. 1, pp. 22-34

Bana eCosta, C. (1988) "A methodology for sensitivity analysis in three-criteria problems: a case study in municipal management", European Journal of Operational Research, Vol. 33, No. 2, pp. 159-173

Bernardo, J. M. (1979) " Reference posterior distributions for bayesian inference", J. R. Statist. Soc. B., 41, 113-147

Brans, J.P.; Vincke, Ph. (1985) "A preference ranking organisation method (the PROMETEO method for Multiple Criteria Decision-Making)", Management Science, Vol. 31, No. 6, pp., 647-656

Canales R., Guillén S.T. y Morcos J. (1976) "Toma de decisiones con objetivos múltiples, caso determinista", Instituto de Ingeniería, 368 p.

Climaco, J. *et al* (1987) "TRIMAP: an interactive trictiteria linear programming package", Foundations of Control Engineering, Vol. 12, pp. 39-54

De Groot, M. H. (1970) Optimal Statistical Decision, McGraw Hill

Eckenrode, R. (1966) "Weighting multiple criteria", Management Science, Vol. 12, pp. 180-192

Fishburn, P.C. (1970a) Utility Theory for Decision Making (eds) John Wiley & Sons, Inc

Fishburn, P.C. (1974) "Lexicographic orders, utilities and decision rules: a survey", Management Science, Vol. 20, pp. 1442-1471

Jacquet-Lagrèze, E. (1981) "Systèmes de décision et acteurs multiples: contribution à une théorie de l'action pour les sciences des organisations", Thèse d'Etat, Université Paris-Dauphine

Jacquet-Lagrèze, E. (1984) "PREFCALC: évaluation et décision multicritère", Revue de l'utilisateur de IBM-PC, No. 3, pp. 38-55

Jacquet-Lagrèze, E.; Siskos, J. (1982) "Assesing a set of additive utility function for multicriteria decision making, the UTA method", European Journal of Operational Research, Vol. 10, No. 2, pp. 151-164

Keeney, R.S.; Nair K. (1976) "Evaluating potential nuclear power plan sites en the pacific northwest using decision making ", IASSA, Professional Paper, N° 76

Keeney, R.L.; Raiffa, H. (1976) Decision with multiple objectives: preferences and value trade off, John Wiley, New York

Kersten, G.; Szpakowicz, S. (1990) "Rule-based formalism and preference representation: An extension of negoplan", European Journal of Operational Research, Vol. 45, N°2-3, pp. 309-323

Ligeza, A. (1988) "Expert systems aproach to decision support", European Journal of Operational Research, Vol. 37, N°1, pp. 100-110

Luce, R.D.; Raiffa, H. (1957) Games and Decisions: Introduction and Critical Survey, Wiley, New York

Matarazzo, B. (1984) Multicriteria Analysis: the MAPPACC Method Instituto di Matematica, Facoltá di Economia e Commercio, Universita degli Studi, Catania, 50 p.

Matarazzo, B. (1986) "Multicriterion analysis of preferences by means of pairwise actions and criterion comparisons (MAPPAC)", Applied Mathematics and Computation, Vol. 18, No. 2, pp. 119-141

Nijkamp, P.; Voogd, H. (1985) "An informal introduction to Multicriteria evaluation" Fandel, G., Spronk, J. (eds) Multiple Criteria Decision Methods and Applications, Springer-Verlag Berlin-Heidelberg, pp. 61-84

Pastijn H. *et al.* (1988) "A decision support package for material acquisition and personnel selection", Information Technology for Organisational Systems, H. Bullinger *et al* (eds), Elsevier

Roubens, M. (1982) "Preference relations on actions an criteria in multicriteria decision making", European Journal of Operational Research, Vol. 10 (1), pp. 51-55

Roubens, M. (1989) "Some properties of choise functions based on valuated binary relations", European Journal of Operational Research, Vol. 40 pp. 309-321

Roubens, M.; Vincke, Ph. (1987) "Fuzzy preferences in an optimization perspective", Optimization models using fuzzy sets and possibility theory, K. Kacprzyk et S. Orlovski (eds), D. Reidel, Drordrecht, pp. 77-90

Roy, B. (1968) "Classement en Choix en presence de points de vue multiples (la methode ELECTRE)", Revue Française d'Informqtique et Recherche Operationnelle, 2 eme année, No. 8, pp. 57-75

Roy, B. (1978) "ELECTRE III: un algorithme de classements fondé sur une representation floue des préférences en presence de critères multiples", Cachiers Centre Etudes Recherche Operationnelles, Vol. 20, No. 1, Bruxelles, pp. 3-24

Roy, B. (1985) Methodologie multicritère d'Aide a la décision, Economica, Paris, 423 p.

Roy, B. (1987) "Des criteres multiples en recherche operationnelle: pourquoi?", Cahier du Lamsade, No. 80, Université Paris-Dauphine

Roy, B. (1989) "Decision-aid and decision-making", Cahier du Lamsade, No. 51, Université Paris-Dauphine

Roy, B. (1989) "The outranking approach and the foundations of electre methods", Cahier du Lamsade; No. 53, Université Paris-Dauphine

Roy, B. (1990) "Science de la decision ou science de l'aide a la decision?", Cahier du Lamsade, No. 97, Université Paris-Dauphine

Roy, B.; Bertier, P. (1971) "La méthode ELECTRE II", Metra, Note de travail, No. 142

Roy, B.; Bouyssou, D. (1986) "Comparison, sur un cas précis, de deux modeles concurrents d'aide a la décision" Cahier de LAMSADE No. 22, Université de Paris-Dauphine, 102 p.

Roy, B.; Bouyssou, D. (1987a) "Famille de critères: problème de cohérence et de dépendance", Document du Lamsade No. 37, Université Paris-Dauphine

Roy, B.; Bouyssou, D. (1987b) "Conflicts entre critères et procédures élémentaires d'agrégation multicritère", Document du Lamsade No. 41, Université Paris-Dauphine

Roy, B.; Hungonnard, J.C. (1982) "Ranking of suburban line extension projects on the Paris metro system by a multicriteria method", Transportation Research, Part A, Vol 16 A, No. 4, pp. 301-312

Roy, B.; Slowinski, R. (1990) "Criterion of distance between tecnical programming and socio-economic priority", Cahier du Lamsade, No. 95, Université Paris-Dauphine

Saaty, T. (1980) The analytic hierarchi process, McGraw Hill, New York

Scharling A. (1985) "Décider sur plusieurs critères, Collection Diriger l'Enterprise, Presses Polytechniques Romandes

Simon, H. (1987) "Two heads are better than one: the collaboration between AI and OR", Interfaces, Vol. 17, pp. 8-15

Siskos, J. (1980) "Comment modéliser les préferences au moyen de fonctions d'utilité additives", Operations Research, Vol. 14, No. 1, pp. 53 - 82

Siskos, J.; Yannacopoulos, D. (1983) "Amelioration de la methode UTA par introduction d'une double fonction d' erreurs", Cahier du Lamsade, No. 49, Université Paris-Dauphine

Sóbol, I.; (1983) Método de Montecarlo, MIR, Moscú

Srinivasan, V.; Shocker, A. (1973a) "Linear programming techniques for multidimensional analysis of preferences", Psychometrika, Vol. 38, No. 3, pp. 337 - 369

Srinivasan, V.; Shocker, A. (1973b) "Estimating the weights for multiple attributes en a composite criterion using pairwise judgments", Psychometrika, Vol. 38, No. 4, pp. 473 -493

Srinivasan, V.; Ruparel, V. (1990) "CGX: An expert support system for credit granting", European Journal of Operational Research, Vol. 45, N°2-3, pp. 293-308

Steuer, R. (1985) Multiple criteria optimization: theory, computation and application (eds) John Wiley & Sons

Trejos, M. (1989) "Relaciones binarias de sobreclasificación en la toma de decisiones", Documento DEPFI-UNAM, 132 p.

Vansnick, J.C. (1986) "De borda et condorcet a l'agregation multicritere", <u>cahier du LAMSADE</u> No. 70, Université du Paris-Douphine

Vansnick, J.C. (1988) "Principes et aplications des méthodes multicritères", <u>Université de l'Etat</u>, Mons, Belgique

Venegas-Martinez, F. (1990) "On regularity and optimality conditions for maximum entropy priors", <u>Brazilian J. Prob. Statist</u>

Vincke, Ph. (1989) <u>L'aide multicritére à la décision,</u> éditions de l' Université de Bruxeles, Belgique, 179 p.

Von Neumann, J.; Morgenstern, O. (1943) <u>Theory of games and economic behaviour</u>, Princeton University Press, 3a edición