

54  
20



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO**

**FACULTAD DE INGENIERIA**

**SELECCION DE ESCALAS PARA LA CONSTRUCCION  
DE MODELOS FLUVIALES DE FONDO MOVIL**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL TITULO DE  
INGENIERO CIVIL**

**P R E S E N T A :**

**Javier Angel García De la Merced**

**RECIBIDO CON  
FALLA DE ORIGEN**

**MEXICO, D. F.**

**MARZO DE 1991**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



## **UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso**

### **DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# INDICE

1.	INTRODUCCION.	1
2.	LEYES DE SIMILITUD.	4
2.1	SEMEJANZA GEOMETRICA	4
2.2	SEMEJANZA CINEMATICA	7
2.3	SEMEJANZA DINAMICA	8
2.4	CONDICIONES DE SIMILITUD	12
2.4.1	Condición de Froude	12
2.4.2	Condición de Reynolds	14
2.4.3	Condición de Euler	16
2.4.4	Condiciones de Weber y Strouhal	17
2.5	SIMULTANEIDAD DE CONDICIONES	18
3.	METODOS PARA LA DETERMINACION DE ESCALAS.	21
3.1	ANTECEDENTES	21
3.1.1	Regímenes de flujo	25
3.2	PRESENTACION	27
3.3	METODO DE LA VELOCIDAD DE CAIDA	28
3.4	METODO DE LA CURVA DE SHIELDS	30
3.5	METODO DE ALTUNIN	33
3.6	METODO DE EINSTEIN-CHIEN	35
3.7	METODO DE MAZA-GARCIA	47
3.7.1	Ecuación de Garde-Ranga Raju	49
3.7.2	Ecuación de ChiEneka	51
4	COMPARACION DE RESULTADOS.	52

4.1	METODO DE LA VELOCIDAD DE CAIDA	52
4.2	METODO DE LA CURVA DE SHIELDS	53
4.3	METODO DE ALTUNIN	55
4.4	METODO DE EINSTEIN-CHIEN	55
4.5	METODO DE MAZA-GARCIA	58
4.5.1	Ecuación de Garde-Ranga Raju	59
4.5.2	Ecuación de ChiEmeka	60
4.6	DIAGRAMAS ADIMENSIONALES	62
5.	EJEMPLO NUMERICO.	70
5.1	DATOS	70
5.2	DESARROLLO	73
5.2.1	Método de la velocidad de caída	74
5.2.2	Método de la Curva de Shields	75
5.2.3	Método de Altunin.	76
5.2.4	Método de Einstein-Chien	76
5.2.5	Método de Maza-García	79
5.2.5.1	Ecuación de Garde-Ranga Raju	80
5.2.5.2	Ecuación de ChiEmeka	80
5.3	OBSERVACIONES A LOS RESULTADOS OBTENIDOS CON $L_0 = 205$	80
5.4	OBSERVACIONES Y CONCLUSIONES	82
6.	CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.	85
	BIBLIOGRAFIA.	88

## 1. INTRODUCCION

En nuestro país, como en muchos otros, existen zonas en donde la presencia de ríos representa un aspecto fundamental para el desarrollo del ser humano, es por ello que ese recurso debe ser aprovechado de manera adecuada. Así por ejemplo, cuando el río crece y sus orillas o márgenes no se encuentran protegidas, se pueden producir erosiones tan grandes que afecten asentamientos humanos o zonas de cultivo, en vez de beneficiarlos.

Así, por la importancia que tiene, surgió una rama de la hidráulica dedicada a estudiar el comportamiento de los ríos o canales naturales conocida como hidráulica fluvial.

En la actualidad, el conocimiento de los fenómenos fluviales es empírico en su mayoría, resultado de observaciones efectuadas en la naturaleza y en los laboratorios hidráulicos, lo que origina que, frecuentemente, para estudiar un tramo de río sea necesario construir una copia, de menor tamaño, denominado modelo fluvial, el cual permite estudiar y experimentar, a costos relativamente bajos y con economías substanciales de tiempo, hasta obtener condiciones óptimas que

conlleven, de manera idónea, a resolver problemas de esta naturaleza.

Los modelos fluviales permiten estudiar el comportamiento hidráulico o evolución de corrientes naturales y canales; los efectos que las estructuras que se interponen a la corriente producen sobre ella y; los efectos que la corriente ocasiona sobre dichas estructuras.

Las estructuras que se pueden estudiar en un modelo fluvial son:

- a) Estructuras de encauzamiento como son, por ejemplo, diques, muros y espigones, los cuales permiten mejorar las condiciones hidráulicas de la corriente, creando condiciones geométricas y cinemáticas favorables.
- b) Revestimiento de márgenes y obras de encauzamiento para crear condiciones de navegación favorables.
- c) Pilas de puente, ataguías y algunos tipos de obras de toma que son estructuras que no provocan cambios fuertes en el nivel del agua y fondo pero que causan corrientes secundarias y desigualdad en la distribución de velocidades y como consecuencia de ello provocan socavación local o depósito de sedimentos.
- d) Estructuras de control que inducen cambios en los niveles del río y en el transporte de sedimentos, como represas o reducciones por estribos y pilas de puente.

Por lo anterior, los modelos fluviales deben ser diseñados de manera tal que la información que de ellos se obtenga pueda ser interpretada y aplicada; y la adecuada selección de escalas es fundamental para lograrlo.

Así, el objetivo de esta tesis es describir los métodos que, por su significado histórico, o por la forma de abordar el problema, o por su valor presente, se emplean para seleccionar escalas para la construcción de modelos fluviales de fondo móvil.

Para ello, en el capítulo 2 se describen las leyes de similitud que deben cumplir los modelos hidráulicos.

En el capítulo 3 se explican cinco métodos para obtener escalas para modelos fluviales de fondo móvil, tal como fueron presentados por sus

autores.

En el capítulo 4 se desarrollan las ideas propuestas en el Instituto de Ingeniería de la UNAM, que consisten en dejar en función de la escala de líneas verticales todas las expresiones dadas por cada autor visto en el cap 3, para con ello poder comparar, de manera inmediata, los resultados que se obtengan de cada método. Además, se explica la forma de elaborar un *diagrama adimensional*, basándose en las expresiones desarrolladas.

Para observar la forma de seleccionar escalas, en el capítulo 5 se elabora un ejemplo numérico, aplicando las expresiones dadas en el cap 4 para cada métodos y se comparan los resultados obtenidos.

Por último, en el capítulo 6 se dan las conclusiones al presente trabajo, así como las recomendaciones que deben seguirse al seleccionar las escalas.

## 2. LEYES DE SIMILITUD

Se dice que existe similitud o semejanza entre dos sistemas de flujo cuando mediante una sola relación, denominada escala, cuyo valor permanece constante, se puede transformar una magnitud física del modelo a su correspondiente en el prototipo y viceversa. Además, para que un modelo hidráulico reproduzca adecuadamente un fenómeno determinado, tiene que satisfacer no sólo la semejanza geométrica con su prototipo, sino también la similitud cinemática y dinámica. Por ello en este capítulo se presentan las leyes de similitud que rigen el diseño de modelos hidráulicos.

### 2.1 SEMEJANZA GEOMETRICA

La semejanza geométrica obliga a que la relación entre dimensiones homólogas entre modelo y prototipo sean iguales, y que todos los ángulos entre planos también lo sean; es decir, un modelo y un prototipo son geoméricamente semejantes si y solo si todas las dimensiones del cuerpo, en la dirección de cada uno de los tres ejes coordenados, se relacionan mediante la misma escala de líneas o longitudes,  $L$ . Esto significa que modelo y prototipo pueden diferir en



tamaño, según convenga, pero tienen que ser de forma idéntica, fig 2.1; sin embargo, no siempre es posible cumplir con esta condición de semejanza geométrica perfecta, ya que en cierto tipo de estudios es necesaria la distorsión geométrica.

Si se define como escala el cociente que resulta de dividir una magnitud del prototipo entre su correspondiente en el modelo, entonces la escala de líneas puede expresarse como

$$L_e = \frac{L_p}{L_m} \quad (2.1)$$

donde  $L_p$  y  $L_m$  son longitudes homólogas en prototipo y modelo, respectivamente. En lo que sigue, los subíndices  $p$  y  $m$  se utilizarán para denotar magnitudes homólogas en prototipo y modelo, respectivamente

De la ec 2.1 se infiere que para construir un modelo geoméricamente semejante al prototipo, hay que dividir las longitudes del prototipo entre la escala seleccionada, o sea

$$L_m = \frac{L_p}{L_e} \quad (2.2)$$

En el caso de modelos fluviales, es común que el tramo de río por estudiar comprenda varios kilómetros, mientras que la profundidad o tirante de agua en dicho tramo alcance tan sólo pocos metros. Cuando ello ocurre, se requiere distorsionar el modelo, ya que si se conservara la misma escala de líneas para los tres ejes coordenados se tendrían tirantes demasiado pequeños en el modelo, por esta razón hay que determinar dos escalas diferentes para la construcción del modelo: una para las longitudes horizontales,  $L_e$ , y otra para las verticales,  $H_e$ , esto es

$$H_e = \frac{H_p}{H_m} \quad (2.3)$$

Por tanto, si  $L_e \neq H_e$ , se dice que el modelo es distorsionado. La distorsión del modelo,  $\delta$ , queda definida por la razón que existe entre la escala de líneas horizontales y la de líneas verticales, o sea

Sección Longitudinal de un río

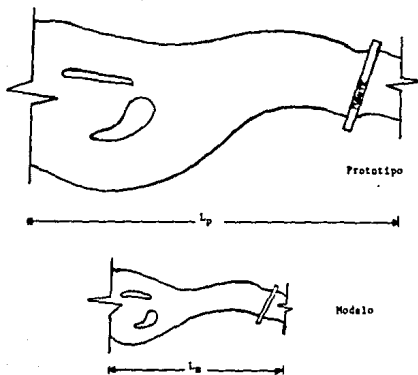


fig 2.1 Semejanza geométrica

$$\delta = \frac{L_o}{H_o} \quad ( 2.4 )$$

En el caso de modelos distorsionados es importante identificar los planos en los que se está trabajando, para evitar así errores en las transformaciones o cálculos de interés.

De acuerdo con lo anterior, la escala de áreas para planos verticales o transversales a la dirección principal del flujo es

$$A_o = L_o H_o \quad ( 2.5 )$$

mientras que para planos paralelos a una superficie horizontal, la escala de áreas, es

$$A_o = L_o L_o = L_o^2 \quad ( 2.6 )$$

En el caso de volúmenes, la escala es única y se expresa como

$$V_e = L_e^2 H_e \quad (2.7)$$

Las ecuaciones anteriores rigen también en el caso de modelos sin distorsión, siempre y cuando se considere que  $L_e = H_e$ .

## 2.2 SEMEJANZA CINEMATICA

La semejanza o similitud cinemática entre dos sistemas de flujo se interpreta como la semejanza geométrica entre las líneas de corriente de ambos flujos, sin distorsión o con ella, es decir los movimientos de ambos flujos, sin distorsión o con ella, es decir los movimientos en modelo y prototipo tienen similitud cinemática si partículas homólogas llegan a puntos homólogos, fig 2.2. Esto significa que las curvas de distribución de velocidad en secciones homólogas deben ser geoméricamente semejantes, independiente del plano de referencia escogido.

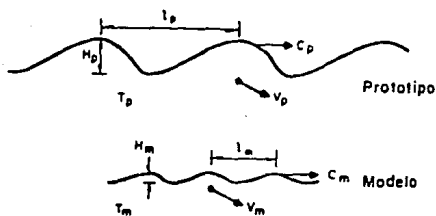


fig 2.2 Semejanza cinemática

Por tanto, la semejanza cinemática obliga a que modelo y prototipo tengan, además de escala de líneas, escala de tiempos,  $t_e$ .

$$t_e = \frac{t_p}{t_m} \quad (2.8)$$

y a partir de la definición de velocidad, en la dirección del flujo, la

escala correspondiente es

$$V_e = \frac{V_p}{V_m} = \frac{L_e}{t_e} \quad (2.9)$$

de donde

$$t_e = \frac{L_e}{V_e} \quad (2.10)$$

Ahora bien, puesto que hay escala de velocidades y de tiempos, entonces la escala de aceleraciones,  $a_e$ , es

$$a_e = \frac{a_p}{a_m} = \frac{V_e}{t_e} \quad (2.11)$$

Por lo anterior, si se conocen las escalas  $V_e$ ,  $t_e$  y  $a_e$ , en la dirección del flujo, y se miden velocidades, tiempos y aceleraciones en cualquier punto del modelo, se pueden conocer las velocidades, tiempos y aceleraciones en puntos homólogos del prototipo.

### 2.3 SEMEJANZA DINAMICA

El concepto básico de similitud dinámica puede establecerse como un requisito para que dos sistemas, con fronteras geoméricamente semejantes, tengan configuraciones de flujo geoméricamente semejantes, en tiempos correspondientes. Así, la semejanza dinámica consiste en que las fuerzas ejercidas por el fluido en puntos homólogos del modelo y del prototipo estén relacionadas entre sí mediante un valor fijo,  $F_e$ , denominado escala de fuerzas, fig 2.3 .

$$F_e = \frac{F_p}{F_m} \quad (2.12)$$

Las fuerzas que actúan sobre una partícula de fluido pueden deberse a la :

gravedad	$F_g = mg = \rho L^3 g$	( 2.13 )
----------	-------------------------	----------

presión	$F_p = \Delta p A = \Delta p L^2$	( 2.14 )
---------	-----------------------------------	----------

viscosidad	$F_v = \mu \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) A = \mu v L$	( 2.15 )
------------	--	----------

Tensión superficial  $F_{\sigma} = \sigma L$  ( 2.16 )

Inercia  $F_I = m a = \rho \frac{L^3}{t^2} = \rho V^2 L^2$  ( 2.17 )

donde:

- m masa de la partícula (  $m = \rho V$  )
- g aceleración de la gravedad
- $\rho$  densidad del fluido
- L longitud característica
- $\Delta p$  diferencia de presión
- A área de la partícula
- V volumen de la partícula
- $\mu$  viscosidad dinámica del fluido, tabla 2.1
- $\sigma$  tensión superficial del fluido, tabla 2.1
- a aceleración de la partícula
- $\frac{\partial V}{\partial y}$  gradiente transversal de velocidades
- V velocidad característica del flujo

Cabe mencionar que en el caso de modelos hidráulicos el fluido que se emplea, generalmente, es líquido.

Luego, de acuerdo con la segunda Ley de Newton, la resultante del sistema de fuerzas consideradas que actúan sobre la partícula de que se trata, es

$$F = m \bar{a} = F_g + F_p + F_v + F_{\sigma} \quad ( 2.18 )$$

De la ec 2.18 se observa que si  $F$  es diferente de cero, la partícula experimenta aceleración; por el contrario, si  $F$  es cero, la partícula no sufre aceleración o ésta es cero. De acuerdo con la ec 2.18, se concluye que la escala de fuerzas tiene que ser única. Por lo tanto, se puede escribir que :

$$F_* = \frac{\left[ \begin{matrix} F_g \\ F_p \end{matrix} \right]_p}{\left[ \begin{matrix} F_g \\ F_p \end{matrix} \right]_*} = \frac{\left[ \begin{matrix} F_p \\ F_v \end{matrix} \right]_p}{\left[ \begin{matrix} F_p \\ F_v \end{matrix} \right]_*} = \frac{\left[ \begin{matrix} F_v \\ F_{\sigma} \end{matrix} \right]_p}{\left[ \begin{matrix} F_v \\ F_{\sigma} \end{matrix} \right]_*} \quad ( 2.19 )$$

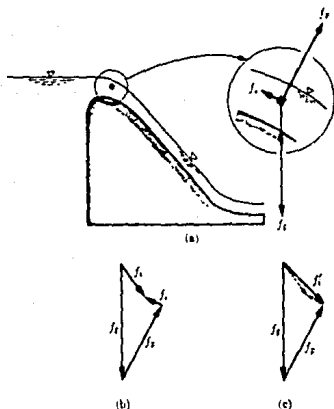


Fig 2.3 Polígonos de las relaciones fuerza/masa para sistemas dinámicamente semejantes : (a) análisis de las fuerzas que actúan sobre una partícula de fluido; (b) polígono de fuerzas unitarias para la similitud dinámica; (c) polígono de fuerzas unitarias despreciando el esfuerzo tangencial.

Por lo anterior, para el diseño de modelos es necesario identificar las fuerzas principales que están involucradas en el fenómeno por estudiar ya que los polígonos de fuerza, con distorsión o sin ella, tienen que ser semejantes en modelo y prototipo.

Finalmente, conviene recordar que el peso específico,  $\gamma$ , y la densidad se relacionan mediante la segunda ley de Newton, o sea

$$\gamma = \rho g \quad (2.20)$$

de donde

$$\rho = \frac{\gamma}{g} \quad (2.21)$$

En el caso de modelos fluviales, por las dimensiones tan grandes que suelen tener, generalmente se emplea agua; sin embargo en modelos relativamente pequeños puede emplearse otro fluido. En la tabla 2.1 se

presenta los valores de algunas propiedades del agua, en sistema internacional, que son de utilidad en el diseño de modelos hidráulicos.

TABLA 2.1 VALORES DE ALGUNAS PROPIEDADES DEL AGUA, EN S. I.

Temperatura		Densidad <sup>1)</sup>	Peso específico (1)	Viscosidad cinemática	Viscosidad dinámica	Tensión superficial (agua-aire)	Módulo de elasticidad
	$\theta$	$\rho$	$\gamma$	$\nu \times 10^{-6}$	$\mu \times 10^3$	$\sigma \times 10^2$	$E \times 10^{-4}$
°C	K	kg/m <sup>3</sup> N·s <sup>2</sup> /m <sup>4</sup>	kg/m <sup>3</sup> ·s <sup>2</sup> N/m <sup>3</sup>	m <sup>2</sup> /s	kg/m·s N·s/m <sup>2</sup>	kg/s <sup>2</sup> N/m	kg/m·s <sup>2</sup> N/m <sup>2</sup>
0	273.16	999.8	9 808.04	1.7925	1.7921	7.564	1.9934
1	274.16	999.9	9 809.02	1.7312	1.7311	7.550	
2	275.16	999.9	9 809.02	1.6738	1.6736	7.536	
3	276.16	999.9	9 809.02	1.6194	1.6192	7.521	
4	277.16	1 000.0	9 810.00	1.5677	1.5677	7.507	
5	278.16	1 000.0	9 810.00	1.5188	1.5188	7.493	2.0464
6	279.16	999.9	9 809.02	1.4725	1.4723	7.479	
7	280.16	999.9	9 809.02	1.4283	1.4281	7.465	
8	281.16	999.8	9 808.04	1.3863	1.3860	7.450	
9	282.16	999.8	9 808.04	1.3462	1.3459	7.436	
10	283.16	999.73	9 807.35	1.3077	1.3077	7.422	2.1042
11	284.16	999.64	9 806.47	1.2716	1.2712	7.407	
12	285.16	999.53	9 805.39	1.2368	1.2362	7.393	
13	286.16	999.40	9 804.11	1.2036	1.2029	7.377	
14	287.16	999.27	9 802.84	1.1718	1.1709	7.363	
15	288.16	999.13	9 801.47	1.1413	1.1403	7.349	2.1474
16	289.16	999.07	9 800.89	1.1119	1.1109	7.334	
17	290.16	998.80	9 798.23	1.0841	1.0828	7.320	
18	291.16	998.62	9 796.46	1.0572	1.0558	7.304	
19	292.16	998.44	9 794.70	1.0314	1.0298	7.290	
20	293.16	998.23	9 792.64	1.0066	1.0049	7.275	2.1896
21	294.16	998.04	9 790.77	0.9823	0.9809	7.260	
22	295.16	997.80	9 788.42	0.9599	0.9578	7.245	
23	296.16	997.57	9 786.16	0.9378	0.9353	7.228	
24	297.16	997.32	9 783.71	0.9166	0.9142	7.212	
25	298.16	997.08	9 781.35	0.8961	0.8935	7.197	2.2288
26	299.16	996.81	9 778.71	0.8764	0.8736	7.182	
27	300.16	996.54	9 776.06	0.8574	0.8544	7.167	
28	301.16	996.26	9 773.31	0.8390	0.8359	7.150	
29	302.16	995.94	9 770.17	0.8213	0.8180	7.135	
30	303.16	995.62	9 767.03	0.8043	0.8007	7.118	2.2583
35	308.16	994.04	9 751.53	0.7269	0.7225	7.037	2.2759
40	313.16	992.16	9 733.090	0.6611	0.6560	6.956	2.2377
45	318.16	990.20	9 713.862	0.6047	0.5982	6.873	2.2936
50	323.16	988.14	9 693.653	0.5560	0.5494	6.791	2.2965
55	328.16	985.22	9 665.008	0.5140	0.5064	6.704	2.2906
60	333.16	983.28	9 645.977	0.4766	0.4687	6.618	2.2789
65	338.16	980.39	9 617.626	0.4442	0.4355	6.529	2.2622
70	343.16	977.52	9 589.471	0.4154	0.4060	6.440	2.2426
75	348.16	974.66	9 561.415	0.3897	0.3799	6.350	2.2229
80	353.16	971.82	9 533.554	0.3668	0.3564	6.260	2.2004
85	358.16	968.99	9 505.752	0.3462	0.3354	6.167	2.1945
90	363.16	965.25	9 469.103	0.3279	0.3165	6.075	2.1424
95	368.16	961.54	9 432.707	0.3114	0.2994	5.982	2.1190
100	373.16	957.85	9 396.509	0.2963	0.2828	5.890	2.0895

(1) Considerando  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$

## 2.4 CONDICIONES DE SIMILITUD.

Las leyes o condiciones que se describen a continuación, se obtienen a partir de la ecuación diferencial de Navier Stokes, la cual es la más general, pues describe, en el espacio y tiempo, el movimiento de un fluido viscoso; o sea, expresa el balance entre las fuerzas de inercia, máscas (generalmente gravitacionales), de presión y viscosas, por lo que se puede escribir una ecuación para el modelo y otra para el prototipo. A partir de esas ecuaciones se obtienen los números de Reynolds, Froude y Euler, además de los de Cauchy, Mach, Weber y Strouhal. Sin embargo, estos números adimensionales o condiciones de semejanza pueden obtenerse directamente, partiendo de la definición de cada uno de ellos, lo cual es más sencillo.

### 2.4.1 Condición de Froude

Cuando en el problema que se estudia la fuerza más importante es la de gravedad, como es el caso de los modelos fluviales, tiene que cumplirse la condición de Froude, la cual relaciona fuerzas de inercia entre fuerzas de gravedad, es decir, si se divide la ec 2.17 entre la ec 2.13, se obtiene que

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{\rho L^2 V^2}{\rho L^3 g} \quad ( 2.22 )$$

simplificando

$$F^2 = \frac{V^2}{g L} \quad ( 2.23 )$$

A la raíz cuadrada de la ec 2.23 se le conoce como condición de Froude y se expresa comúnmente como

$$F = \frac{V}{\sqrt{g L}} \quad ( 2.24 )$$

donde  $F$  es el número de Froude.

De la ec 2.24 se observa que cuanto menor es el número de Froude mayor es la importancia de la gravedad y viceversa.

En los escurrimientos a superficie libre, o sea en los escurrimientos debidos a la acción de la gravedad, debe cumplirse que los números de froude en prototipo y modelo sean iguales, esto es



o sea

$$F_p = F_m \quad (2.25)$$

$$\frac{V_p}{\sqrt{g_p L_p}} = \frac{V_m}{\sqrt{g_m L_m}} \quad (2.26)$$

De manera que el número de Froude de escala es

$$F_e = \frac{V_e}{\sqrt{g_e L_e}} = 1 \quad (2.27)$$

De la ec 2.27, la velocidad se calcula como

$$V_e = (g_e L_e)^{1/2} \quad (2.28)$$

Para modelos a superficie libre y distorsionados, la longitud característica es la correspondiente a la profundidad, ya que la celeridad con la que viaja la onda en el flujo, para el caso de aguas poco profundas, está en función del tirante, o sea

$$C = \sqrt{g y} \quad (2.29)$$

por lo que la ec 2.28 queda expresada como

$$V_e = (g_e H_e)^{1/2} \quad (2.30)$$

Luego, si en la ec 2.10 se sustituye el valor de  $V_e$  indicado en la ec 2.30, se obtiene la escala de tiempos, es decir

$$t_e = \frac{L_e}{(g_e H_e)^{1/2}} \quad (2.31)$$

La escala de gastos correspondiente es por definición

$$Q_e = A_e V_e \quad (2.32)$$

Luego, teniendo en cuenta las ecs 2.5 y 2.30, la ec 2.32 se puede escribir como

$$Q_e = L_e H_e (g_e H_e)^{1/2} \quad (2.33)$$

simplificando, resulta que

$$Q_e = L_e H_e^{3/2} g_e^{1/2} \quad ( 2.34 )$$

Análogamente, partiendo de la ec 2.18, la escala de fuerzas es

$$F_e = m_e g_e = \rho_e g_e L_e H_e^2 = \tau_e L_e H_e^2 \quad ( 2.35 )$$

Las ecs 2.30, 2.31, 2.34, 2.35 sirve también para el caso de modelos sin distorsión siempre y cuando se considere que  $L_e = H_e$ .

En la tabla 2.2 se presentan las escalas de otras magnitudes, y en la tabla 2.3 se muestran ejemplos de valores de las escalas de modelos hidráulicos.

#### 2.4.2 Condición de Reynolds

Si en un escurrimiento, la viscosidad del líquido interviene en forma preponderante en el fenómeno que se estudia, el modelo y el prototipo deben de cumplir la relación entre escalas conocida como condición de Reynolds. Esta condición relaciona fuerzas de inercia con fuerzas viscosas, expresándose como

$$R = \frac{F_i}{F_v} = \frac{\rho L^2 V^2}{\mu V L} \quad ( 2.36 )$$

simplificando

$$R = \frac{L V}{\nu} \quad ( 2.37 )$$

Donde R es el número de Reynolds.

De la ec 2.37 se observa que cuanto mayor es el número de Reynolds menos importancia tiene la fuerza de viscosidad en el fenómeno y viceversa.

Ahora bien, como debe cumplirse que el número de Reynolds sea idéntico en modelo y prototipo, esto es que :

$$R_p = R_m \quad ( 2.38 )$$

el número de Reynolds de escala, siguiendo el procedimiento utilizado con el número de Froude, es

$$R_e = \frac{V_e L_e}{\nu_e} = 1 \quad ( 2.39 )$$

Tabla 2.2 Escalas para las condiciones de Froude y Reynolds.

Característica	Ecuación	Condición de Froude		Condición de Reynolds
		no distorsionado	distorsionado	
<b>Geométrica</b>				
Longitud horizontal	L	$L_0$	$L_0$	$L_0$
Longitud vertical	H	$L_0$	$H_0$	$L_0$
Área	$A = L^2$	$L_0^2$	$L_0 H_0$	$L_0^2$
Volumen	$V = L^3$	$L_0^3$	$L_0^2 H_0$	$L_0^3$
<b>Cinématica</b>				
Tiempo	$t = L/V$	$(L_0/g)^{1/2}$	$L_0 / (g_0 H_0)^{1/2}$	$L_0^2 / \nu_0$
Velocidad	$V = L/t$	$(g_0 L_0)^{1/2}$	$(g_0 H_0)^{1/2}$	$\nu_0 / L_0$
Aceleración	$a = V/t$	$g_0$	$g_0 H_0 / L_0$	$\nu_0^2 / L_0^3$
Gasto	$Q = A V$	$[g_0 L_0^3]^{1/2}$	$L_0 H_0 [g_0 H_0]^{1/2}$	$\nu_0 L_0$
<b>Dinámica</b>				
Masa	$m = \rho V$	$\rho_0 L_0^3$	$\rho_0 L_0^2 H_0$	$\rho_0 L_0^3$
Fuerza	$F = m a$	$\gamma_0 L_0^3$	$\gamma_0 L_0 H_0^2$	$\rho_0 \nu_0^2$
Presión	$p = F/a$	$\gamma_0 L_0$	$\gamma_0 H_0$	$\rho_0 \nu_0^2 / L_0^2$
Trabajo	$W = F L$	$\gamma_0 L_0^4$	$\gamma_0 L_0^2 H_0$	$\rho_0 \nu_0^2 L_0^2$
Potencia	$P = W/t$	$[\gamma_0^3 L_0^7 / \rho_0]^{1/2}$	$\gamma_0 L_0 [g_0 H_0^3]^{1/2}$	$\rho_0 \nu_0^3 / L_0$
<b>Hidráulica</b>				
Pendiente	$S = H/L$	1	$H_0 / L_0$	1
Perímetro mojado	$F_m$	$L_0$		$L_0$
Radio hidráulico	$R = A/F_m$	$L_0$	$L_0 H_0 / (F_m)_0$	$L_0$
Coef. de rugosidad (Manning)	$n = \frac{R^{2/3} S^{1/2}}{V}$	$L_0^{5/3} g_0^{1/2}$	$\frac{(F_m)_0^{2/3} (g_0 L_0)^{1/2}}{(F_m)_0^{2/3} (g_0 L_0)^{1/2}}$	$\nu_0$

- En este tipo de condición se utiliza una sola escala de longitudes, es decir, son no distorsionados.
- Su valor depende del tipo de sección transversal y su dimensión es de longitud.
- Se utilizan otros criterios para calcular el coeficiente de rugosidad.

La ecuación anterior garantiza la similitud dinámica cuando las fuerzas de interés se deben únicamente a la inercia y a la viscosidad del fluido ( por ejemplo, el empuje y sustentación de cuerpos y flujos laminares y de transición en tuberías ).

De la ec 2.39, pueden seleccionarse independientemente dos escalas, generalmente la de viscosidades y la de longitud, expresando la escala de velocidades como

$$V_e = \frac{V_e}{L_e} \quad ( 2.40 )$$

A partir de esta última ecuación se obtienen las demás escalas de un modelo que cumplen la condición de Reynolds de la misma manera que se obtuvieron para la condición de Froude. Dichos valores se resumen en la tabla 2.2.

Tabla 2.3 Ejemplo de valores de las escalas de modelos hidráulicos.

Relación de escalas Material de las fronteras	No distorsionado		Distorsionado		
	Estudio	valores más usuales de la escala de líneas	Estudio	valores más usuales de la escala de líneas Horizontal    Vertical	
Fondo fijo	Compuertas y agujas	5-40	Flujo en ríos y canales	250-1000	50-100
	Vertederos, tanques ampu- liguadores, rápidas, túneles	20-70			
	Agitación en puertos	80-200	Corrientes litorales	100- 100	50-100
	Conductos cerrados con escu- rrimiento a superficie libre	10-25			
	Flujo alrededor de estructuras	20-60			
Fondo móvil	Óleseje contra estructuras. Pérdidas en estructuras	20-60	Éstuarios	200-2500	50-150
	Máquinas hidráulicas* o rotor modelo: 0.3-0.4 m				
Fondo móvil	Erosión local por corrientes	20-60	Erosión en ríos y arras- tre de sedimentos	100- 500	50-100
	Erosión local por oleaje	40-80			

\* diámetro del rotor = 144-1501

### 2.4.3 Condición de Euler

Si las fuerzas de presión son las más importantes en un escurrimiento, y tales fuerzas gobiernan al escurrimiento o fenómeno por representar en un modelo, se deberá de cumplir la condición conocida como de Euler. Este número puede considerarse como el cociente entre una fuerza de inercia característica y una fuerza debida al gradiente de presiones

$$E = \frac{\rho V^2}{\Delta P} \quad ( 2.41 )$$

siguiendo el procedimiento descrito anteriormente, el número de Euler

de escala es

$$E_e = \frac{\rho_e V_e^2}{\Delta p_e} = 1 \quad ( 2.42 )$$

A partir de la ec 2.42 y sustituyendo en ella la escala de presiones por la escala de fuerzas entre la de áreas y obteniendo su recíproco, se tiene que :

$$\frac{F_e}{\rho_e V_e^2 L_e^2} = 1 \quad ( 2.43 )$$

Importante es destacar que cuando un modelo cumple con la condición de Froude o Reynolds, cumple también con la condición de Euler.

Además, si en lugar de la diferencia de presiones se utiliza el módulo de elasticidad volumétrico ( $E_v$ ), la ec 2.42 queda como

$$C_e = \frac{\rho_e V_e^2}{E_v} \quad ( 2.44 )$$

La ec 2.44 se conoce como condición de Cauchy. Este número se utiliza en estudios en los cuales la compresibilidad es importante, sin embargo, es poco utilizado.

Si se utiliza la velocidad o celeridad con que se transmiten las ondas sonoras dentro del fluido ( $C$ ), y se considera que  $E_v = \rho C^2$  la ec 2.44 se expresa como

$$M = \frac{V}{C} = \frac{V_m}{C_m} \quad ( 2.45 )$$

esta última ecuación, se conoce como número de Mach y relaciona fuerzas de inercia y fuerzas de elasticidad, sirve para estudiar fenómenos relacionados con la compresibilidad. La semejanza basada en este parámetro tiene pocas aplicaciones en ensayos de modelos hidráulicos, no así en ensayos de modelos aerodinámicos, sobre todo con velocidades sónicas o supersónicas.

#### 2.4.4 Condiciones de Weber y Strouhal

La condición de Weber relaciona las fuerzas de inercia y tensión superficial, expresándose como :

$$W_e = \frac{V_e \rho_e^{1/2} L_e^{1/2}}{\sigma_e^{1/2}} = 1 \quad (2.46)$$

donde  $\sigma$  es la tensión superficial. Además, de acuerdo a la ec 2.46 y si se acepta que el fluido en modelo y prototipo es el mismo, o sea,

$$\rho_e = \sigma_e = 1 \quad (2.47)$$

se establece que

$$V_e = \frac{1}{L_e^{1/2}} \quad (2.48)$$

La condición de Weber se utiliza con poca frecuencia y es requerida cuando se estudian problemas en los que las fuerzas de tensión superficial gobiernan el movimiento como es, por ejemplo, el escurrimiento de una lámina delgada de líquido sobre una superficie ó fenómenos en que intervienen ondas capilares.

La otra condición es la de Strouhal. Tal condición se requiere cumplir cuando se estudian modelos donde el escurrimiento es transitorio ( no permanente ) y la frecuencia o periodicidad del fenómeno es de importancia, por ejemplo, en estudios donde hay formación intermitente de vórtices o efectos de vibración provocados por el flujo sobre un cuerpo interpuesto a él. Se calcula a partir de relacionar una fuerza hidroaerodinámica ( que actúa para restaurar el equilibrio en la configuración del flujo ) y la fuerza de inercia de la masa oscilante del fluido, expresándose como :

$$S_e = \frac{f_e L_e}{V_e} = 1 \quad (2.49)$$

donde  $f$  es la frecuencia del fenómeno y  $L$  una dimensión típica del cuerpo que obstruye al flujo.

## 2.5 SIMULTANEIDAD DE CONDICIONES

Como se observa de las condiciones expuestas en el inciso anterior, para diseñar un modelo hidráulico es importante, antetodo, identificar las fuerzas principales que actúan en el fenómeno por representar para

que, con base en ello, se cumplan las condiciones correspondientes. Así, cuando debe cumplirse más de una condición se habla de *simultaneidad de condiciones*. En el caso de los modelos fluviales, la fuerza más importante es la de la gravedad, por lo que debe cumplirse la condición de Froude además de garantizar el mismo tipo de flujo que se tenga en el prototipo.

a ) FROUDE-REYNOLDS

Si en el fenómeno por estudiar intervienen fuerzas gravitacionales y viscosas, debe construirse un modelo que cumpla tanto la condición de Froude como la de Reynolds.

Al cumplir la simultaneidad de las dos condiciones, expresadas por las ecs 2.27 y 2.39, se llega a la siguiente expresión :

$$v_e \approx L_e^{3/2} \quad ( 2.50 )$$

La ecuación anterior indica que el fluido del modelo y el tamaño de este deben estar relacionados entre sí y no pueden escogerse libremente. Ello obliga a seleccionar en el modelo un fluido diferente al del prototipo, ya que de otra manera  $L_e$  es igual a 1, lo que significa que el tamaño del modelo deba ser igual al prototipo, lo cual es impráctico. Por ello, pocos modelos llegan a cumplir, simultáneamente, las condiciones de Froude y de Reynolds.

Cabe destacar que en la mayoría de escurrimientos a superficie libre los efectos viscosos son despreciables y solo debe cuidarse que el número de Reynolds se encuentre dentro del rango necesario para que se cumpla con el tipo de flujo que se tenga en el prototipo, como es el caso de los modelos fluviales.

b ) FROUDE-EULER

Las condiciones de Froude y Euler se cumplen simultáneamente ya que, al combinar las ecs 2.27 y 2.42, se establece que :

$$F_e = \gamma_e L_e^3 \quad ( 2.51 )$$

Lo cual es cierto, ya que el término de la derecha indica la relación entre pesos de un volumen homólogo del modelo, y el peso es una fuerza.

Por tanto, existe semejanza en la representación de presiones y fuerzas debidas al movimiento del líquido.

c ) REYNOLDS-EULER

La simultaneidad de las condiciones de Reynolds y Euler se obtiene al combinar las ecs 2.39 y 2.42, con lo que se llega a que

$$F_e = \rho_e v_e^2 \quad ( 2 52 )$$

La ecuación anterior indica que la escala de fuerzas depende únicamente del fluido que se utilice en el modelo y no de su tamaño. Además, si el fluido es el mismo en modelo y prototipo y ambos a la misma temperatura, se tiene que  $F_e = 1$ .

De lo expuesto a los largo de este capítulo se destaca, para el interés del presente trabajo, que los modelos fluviales deben cumplir con la condición de Froude ( ec 2.27 ), es decir, es una condición necesaria pero no suficiente. Para complementar ello, debe garantizarse que el modelo tenga el mismo tipo de flujo que tiene el prototipo en estudio, es decir, si el prototipo tiene flujo turbulento, por ejemplo, el modelo debe tener también flujo turbulento.

Después de exponer en este capítulo las condiciones que debe cumplir un modelo hidráulico, a continuación se presentan los principales métodos propuestos por diversos autores, para calcular las escalas con las que se debe de construir un modelo fluvial de fondo móvil.



### 3. METODOS PARA LA DETERMINACION DE ESCALAS.

#### 3.1 ANTECEDENTES.

De acuerdo con el material de construcción, los modelos fluviales pueden ser de fondo fijo o móvil. Los de fondo fijo o rígido son aquellos en los que todas las superficies en contacto con el líquido están conformadas por material que no es alterado por el paso del agua. Por el contrario, los modelos de fondo móvil son aquellos en que la frontera en contacto con el líquido está reproducida por un material capaz de ser movido, arrastrado y depositado por el agua. En ambos casos, la determinación de las escalas se basa en cumplir con la condición de Froude.

Cuando el modelo por construir sea de fondo rígido, la única dificultad existente al seleccionar las escalas para su diseño, es el de representar adecuadamente la rugosidad requerida. Por esta razón, a continuación se presenta el desarrollo para encontrar una expresión que calcule la escala de rugosidades a partir de la ecuación de Manning. Sea la escala de velocidades de acuerdo a la ecuación de Manning :

$$V_e = \frac{1}{n_e} R_e^{2/3} S_e^{1/2} \quad (3.1)$$

la escala de coeficiente de rugosidad correspondiente es

$$n_e = \frac{R_e^{2/3} S_e^{1/2}}{V_e} \quad (3.2)$$

En la ec 3.2, se desconoce el valor de la escala de radios hidráulicos; ésta depende de la geometría de la sección. Sin embargo, en un cauce natural es posible ajustar cualquier sección transversal representativa en una sección trapezoidal, como se muestra en la fig 3.1



Fig 3.1

por lo que el valor de la escala de radios hidráulicos, para un canal de sección transversal trapezoidal ( fig 3.2), es:

$$R_e = \frac{(B_p + Z_p H_p) H_p \left[ B_m + 2 H_m \sqrt{1 + Z_m^2} \right]}{(B_m + Z_m H_m) H_m \left[ B_p + 2 H_p \sqrt{1 + Z_p^2} \right]} \quad (3.3)$$

Si se considera que  $H_e = \frac{H_p}{H_m}$ , entonces

$$R_e = H_e \left[ \frac{(B_p + Z_p H_p) \left[ B_m + 2 H_m \sqrt{1 + Z_m^2} \right]}{(B_m + Z_m H_m) \left[ B_p + 2 H_p \sqrt{1 + Z_p^2} \right]} \right] \quad (3.4)$$

multiplicando el numerador y el denominador de la ec 3.4 por  $L_e = \frac{B_p}{B_m}$

$$R_e = H_e \left[ \frac{(B_p + Z_p H_p) \left[ B_p + 2 H_m \left( \frac{B_p}{B_m} \right) \sqrt{1 + Z_m^2} \right]}{(B_p + Z_m H_m \left( \frac{B_p}{B_m} \right)) \left[ B_p + 2 H_p \sqrt{1 + Z_p^2} \right]} \right] \quad (3.5)$$

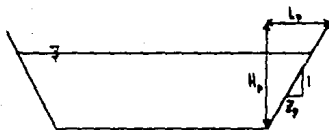


Fig 3.2

Como  $Z_m = \frac{Z_p}{\delta} = \frac{L_e}{H_e} = \delta$ , entonces,  $Z_m = \frac{Z_p}{\delta}$ ; además,  $B_m = \frac{B_p}{L_e}$ . Así, sustituyendo el valor de  $Z_m$  y de  $B_m$ , la ec 3.5 se reduce

$$R_e = H_e \left[ \frac{(B_p + Z_p H_p) \left[ B_p + 2 \frac{H_p}{H_e} \frac{B_p L_e}{B_p} \sqrt{1 + \left( \frac{Z_p}{\delta} \right)^2} \right]}{\left[ B_p + \frac{Z_p}{\delta} \frac{H_p}{H_e} \frac{B_p L_e}{B_p} \right] \left[ B_p + 2 H_p \sqrt{1 + Z_p^2} \right]} \right] \quad (3.6)$$

simplificando

$$R_e = H_e \left[ \frac{(B_p + Z_p H_p) \left[ B_p + 2 H_p \delta \sqrt{1 + \left( \frac{Z_p}{\delta} \right)^2} \right]}{\left[ B_p + \frac{Z_p}{\delta} H_p \delta \right] \left[ B_p + 2 H_p \sqrt{1 + Z_p^2} \right]} \right] \quad (3.7)$$

$$R_e = H_e \left[ \frac{B_p + 2 H_p \delta \sqrt{1 + (Z_p/\delta)^2}}{B_p + 2 H_p \sqrt{1 + Z_p^2}} \right] \quad (3.8)$$

$$R_e = H_e \left[ \frac{B_p + 2 H_p \sqrt{\delta^2 + Z_p^2}}{B_p + 2 H_p \sqrt{1 + Z_p^2}} \right] \quad (3.9)$$

Finalmente, dividiendo el numerador y el denominador entre  $B_p$

$$R_e = H_e \left[ \frac{1 + 2 (H_p/B_p) \sqrt{\delta^2 + Z_p^2}}{1 + 2 (H_p/B_p) \sqrt{1 + Z_p^2}} \right] \quad (3.10)$$

entonces

$$R_e = k H_e \quad (3.11)$$

donde

$$k = \frac{1 + 2 (H_p/B_p) \sqrt{\delta^2 + Z_p^2}}{1 + 2 (H_p/B_p) \sqrt{1 + Z_p^2}} \quad (3.12)$$

Por lo que, si se tiene distorsión, la escala de rugosidad (ec 3.2) es

$$n_e = \frac{H_e^{2/3}}{L_e^{1/2}} \quad (3.13)$$

De la misma forma, si el modelo no tiene distorsión ( $\delta = 1$ )  $R_e = H_e$ , o sea,  $H_e = L_e$ , entonces la ec 3.2 queda

$$n_e = L_e^{1/2} \quad (2.14)$$

la ec 3.14 es también para el caso de tener un canal muy ancho, es decir que  $R_e = H_e$ .

Cabe destacar que la ec 3.12 sirve también para el caso de tener una sección rectangular, o sea  $Z_p = 0$

$$k = \frac{1 + 2 (H_p/B_p) \delta}{1 + 2 (H_p/B_p)} \quad (3.15)$$

Así, calculada la escala de rugosidades, el problema de la selección de escalas para diseñar un modelo de fondo fijo queda resuelto.

Sin embargo, el diseño y operación de un modelo de fondo móvil es mucho más difícil y trae consigo más incertidumbre que el diseño y operación de un modelo de fondo fijo, en el cual la única complicación real es creada por la necesidad de ajustar la rugosidad calculada en el modelo.

Dos son las dificultades principales que se presentan al construir y operar un modelo de fondo móvil. La primera de esas dificultades es reproducir, en el modelo, el movimiento del material de fondo así como el movimiento del agua en el prototipo; la segunda es la rugosidad del fondo, ya que no puede ser controlada o colocada de antemano por el operador del modelo, sino que dependerá del estado de movimiento y de las dimensiones de las partículas del fondo.

Otro problema que se presenta es que, al aumentar la distorsión en un modelo de fondo móvil, la pendiente de las orillas se incrementa más allá del ángulo estable del material, de manera tal que no puede sostenerse. Una solución viable en este caso, es hacer las orillas del cauce de un material rígido, pero esto solo puede realizarse si las márgenes del prototipo son estables y no se desea estudiar el efecto de la corriente contra ella.

Además, otro efecto en los modelos fluviales distorsionados es el incremento de la pendiente del modelo. Al aumentar la pendiente, la rugosidad exige se incremente; pero como no es posible controlarla, las distorsiones aceptadas en este tipo de modelos deben ser bajas.

Finalmente, cabe destacar la importancia de conocer las clasificaciones que se hacen de las diferentes formas que adquiere el fondo de un río, denominadas como *regímenes de flujo*, por las razones que a continuación se exponen.

### 3.1.1 Regímenes de flujo

En canales con lechos arenosos o erosionables, cuando la capacidad de arrastre de la corriente ( $\tau_0$ ) rebasa un cierto valor límite ( $\tau_c$ ) que pueden resistir las partículas que constituyen el cauce, se inicia el movimiento de éstas. Si esto ocurre, la superficie del fondo del canal

asi como la superficie libre del agua pueden asumir diversas formas, dependiendo de las características hidraulicas de la corriente y de las del material del cauce. Las diferentes configuraciones u ondulaciones que se llegan a formar en un fondo móvil, se pueden clasificar según sus características y las del flujo que las origina. A tales clasificaciones o descripciones se les denomina *regimenes del flujo*. De acuerdo a la descripción completa dada por Simons y Richardson (1962) de los diferentes regimenes que observaron en cauces arenosos, la clasificación es la siguiente:

REGIMEN INFERIOR O LENTO (  $F < 1$  )

- 1.- Fondo plano sin arrastre
- 2.- Rizos
- 3.- Dunas con rizos sobreimpuestos
- 4.- Dunas
- 5.- Transición de dunas a fondo plano

REGIMEN SUPERIOR O RAPIDO (  $F > 1$  )

- 1.- Fondo plano con arrastre
- 2.- Ondas estacionarias simétricas
- 3.- Antidunas

Estas configuraciones o formas de fondo estan listadas en su orden de ocurrencia conforme se incrementa el número de Froude (  $F$  ) o la potencia de la corriente (  $\tau_0 V$  ). En la fig 3.3 se presentan esquemas idealizados de estas configuraciones, los cuales muestran también la forma que adquiere la superficie libre del agua en cada tipo de régimen.

De experimentos realizados por Simons y Richardson (1961) se observó que en el régimen inferior la rugosidad aumenta a medida que se avanza de fondo plano a dunas. En situaciones de régimen superior, las rugosidades máximas que se pueden alcanzar son menores que las máximas que pueden ocurrir en régimen inferior.

Así, experimentos similares realizados también por Simons y Richardson y por otros investigadores han confirmado que los cambios en las configuraciones del fondo, que resultan de la interacción del flujo y del material del cauce, afectan la resistencia al flujo. Por otro

lado, Vanoni y Brooks encontraron que la concentración del material que es transportado en suspensión afecta notablemente la resistencia al flujo. Por todo ello, el conocimiento de los regímenes del flujo es fundamental en la práctica.

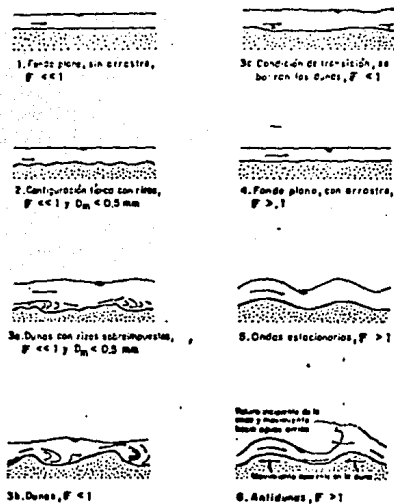


fig 3.3 Configuraciones o formas de fondo.

### 3.2 PRESENTACION.

Dentro de la hidráulica fluvial existen muchas teorías y métodos para describir un mismo fenómeno. Por ello, no es raro encontrar diferentes métodos propuestos por muy diversos autores, con los que se obtienen las relaciones de escala que se deben de cumplir en un modelo fluvial de fondo móvil.

Así, todos los métodos que se han propuesto para encontrar las relaciones entre las escalas de los modelos fluviales de fondo móvil, se pueden agrupar dentro de uno de los tres grandes grupos siguientes :

- a ) Los métodos que toman en cuenta el comportamiento individual de una partícula del fondo.
- b ) Los que toman en cuenta el comportamiento del conjunto de las partículas del fondo.
- c ) Aquellos que consideran al cauce del río en conjunto, su evolución y características actuales.

En este capítulo, se presentan los métodos que por su significado histórico, o por la forma de abordar el problema, o por su valor presente, se emplean para seleccionar escalas para la construcción de modelos fluviales de fondo móvil.

### 3.3 METODO DE LA VELOCIDAD DE CAIDA.

Este método estudia el comportamiento de una sola partícula, la cual cae dentro de la masa del líquido. La base del método consiste en relacionar los triángulos de los recorridos de una partícula al caer y ser arrastrada por la corriente ( fig 3.4 ) Al multiplicar las velocidades del modelo por su respectivas escalas, los dos triángulos de modelo y prototipo son semejantes.

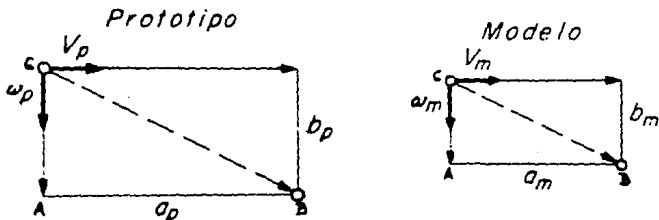


fig 3.4 Método de la velocidad de caída



$\omega$  y  $V$  son las velocidades de caída de una partícula natural y de corriente, respectivamente.

Los triángulos ABC deben ser semejantes en modelo y prototipo cuando las velocidades del modelo se multiplican por sus respectivas escalas. En el prototipo y en el instante  $\Delta t$

$$AB = V_p \Delta t = a_p \quad (3.16)$$

$$BC = \omega_p \Delta t = b_p \quad (3.17)$$

Dividiendo miembro a miembro

$$\frac{a_p}{b_p} = \frac{V_p}{\omega_p} \quad (3.18)$$

$$a_p = \frac{b_p V_p}{\omega_p} \quad (3.19)$$

En forma análoga para el modelo

$$a_m = \frac{b_m V_m}{\omega_m} \quad (3.20)$$

Ahora, dividiendo la ec 3.17 entre la ec 3.18 y tomando en cuenta que

$$\frac{b_p}{b_m} = H_e \quad (3.21)$$

y

$$\frac{a_p}{a_m} = L_e \quad (3.22)$$

$$\frac{a_p}{a_m} = \frac{b_p V_p}{b_m V_m} \quad (3.23)$$

o sea

$$L_e = H_e V_e \omega_e^{-1} \quad (3.24)$$

Por ser el escurrimiento a superficie libre, debe cumplirse la condición de Froude para modelos distorsionados

$$V_e = g_e^{1/2} H_e^{1/2} \quad (2.23)$$

Luego, sustituyendo la ec 2.23 en la ec 3.24 y reduciendo se obtiene que

$$L_0 = H_0 (g_0^{1/2} H_0^{1/2}) \omega_0^{-1} \quad (3.25)$$

$$L_0 = \frac{H_0^{3/2} g_0^{1/2}}{\omega_0} \quad (3.26)$$

finalmente despejando  $\omega_0$ , se llega a

$$\omega_0 = \frac{H_0^{3/2} g_0^{1/2}}{L_0} \quad (3.27)$$

### 3.4 METODO DE LA CURVA DE SHIELDS.

Este método, al igual que el anterior, considera el comportamiento del conjunto de las partículas del fondo, y está basado en la curva de Shields ( fig 3.5 ), en la cual aparecen los dos parámetros dimensionales siguientes :

El primero es

$$\tau_0 = \frac{\tau_0}{(\gamma_0 - \gamma) D} \quad (3.28)$$

donde

$\tau_0$  parámetro de Shields, dimensional.

D diámetro representativo de las partículas, en m

$\tau_0$  esfuerzo cortante producido por la corriente, en  $\text{kgf/m}^2$ .

$\gamma$  peso específico del agua, en  $\text{kgf/m}^3$ .

$\gamma_0$  peso específico de las partículas del material sólido, en  $\text{kgf/m}^3$ .

El segundo parámetro es

$$R_0 = \frac{V_0 D}{\nu} = \frac{\sqrt{\tau_0}}{\sqrt{\rho}} \frac{D}{\nu} = \frac{\sqrt{g H S}}{\nu} D \quad (3.29)$$

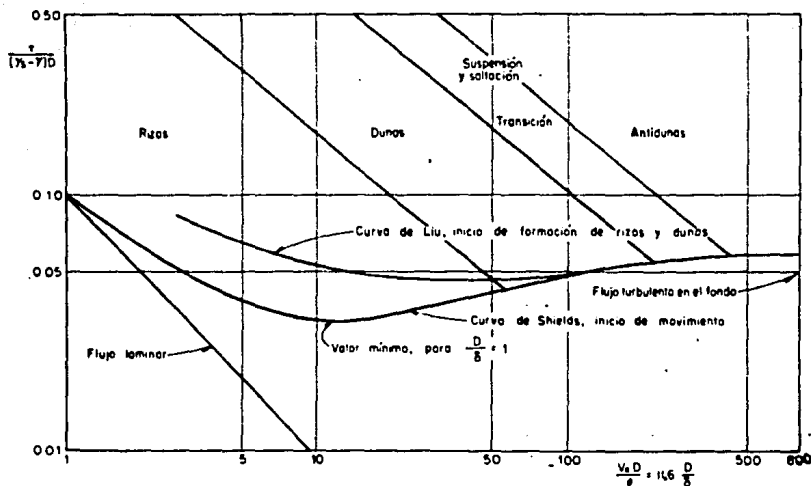


fig 3.5 Curva de Shields que indica el inicio de movimiento

donde

$R_0$ , número de Reynolds referido al diámetro de las partículas y a la velocidad al esfuerzo cortante cerca del fondo, adimensional.

Como se ha supuesto que el estado de movimiento del fondo y la forma de las ondulaciones están definidas por la colocación del punto en el plano  $\tau_0 - R_0$ , entonces, la base del método es hacer  $\tau_0$  y  $R_0$  iguales en el modelo y el prototipo; sin embargo, se ha comprobado que el punto del modelo en la curva de Shields no necesita corresponder exactamente con el del prototipo, sino caer en la zona que produzca igual tipo de ondulación en el fondo.

De la fórmula de Manning, considerando que debe cumplirse la condición de Froude ( ec 2.23 ) y que

$$S_0 = \frac{H}{L} \quad ( 3.30 )$$

la relación de escalas de rugosidad es igual a

$$v_s = \frac{1}{n_s} R_s^{2/3} S_s^{1/2} \quad (3.31)$$

$$g_s^{1/2} H_s^{1/2} = \frac{R_s^{2/3} H_s^{1/2}}{n_s L_s^{1/2}} \quad (3.32)$$

$$n_s = \frac{R_s^{2/3}}{g_s^{1/2} L_s^{1/2}} \quad (3.33)$$

Si la rugosidad producida por las partículas de fondo se obtiene mediante la expresión

$$n_b' = \frac{D_{90}^{1/6}}{26} \quad (3.34)$$

De las ecs 3.33 y 3.34

$$D_s^{1/6} = \frac{R_s^{2/3}}{g_s^{1/2} L_s^{1/2}} \quad (3.35)$$

Por otro lado, de la ec 3.28, si  $\tau_s = 1$ , entonces

$$\left( \frac{\tau_s}{\gamma_s - \gamma} \right)_s D_s = 1 \quad (3.36)$$

como

$$\tau_s = \gamma_s R_s S_s \quad (3.37)$$

y sustituyendo la ec 3.30, se tiene

$$\left( \frac{\gamma_s - \gamma}{\gamma_s - \gamma} \right)_s \frac{R_s H_s}{D_s L_s} = 1 \quad (3.38)$$

Si se considera que  $\left( \frac{\gamma_s - \gamma}{\gamma_s - \gamma} \right)_s = \alpha_s$ , se llega a

$$\frac{R_s H_s}{D_s L_s \alpha_s} = 1 \quad (3.39)$$

Por último, de la ec 3.29 se debe de cumplir que  $R_s = 1$ , por lo que efectuando operaciones y suponiendo que  $v_s = 1$

$$\frac{D_o^2 R_o g_o}{L_o} = 1 \quad (3.40)$$

Así, las ecuaciones básicas en este método son las ecs 3.35, 3.39 y 3.40.

### 3.5 METODO DE ALTUNIN.

Entre los métodos que consideran todas las características del cauce natural se encuentra el método de Altunin. Este método se basa en las siguientes condiciones:

1.- Toma en cuenta la fórmula fundamental de Gluschkov, que considera que el ancho del río está relacionado con el tirante, según la expresión

$$K H = B \quad (3.41)$$

siendo  $\beta$ , según Orlov, igual a

$$\beta = 0.72 \left[ \frac{D (Ss-1)}{H S} \right] \quad (3.42)$$

De las ecuaciones anteriores

- B ancho del río, en m
- H tirante medio del río, en m
- D diámetro medio del material del fondo, en m
- S pendiente hidráulica media
- Ss densidad relativa, e igual a  $\frac{\gamma_s}{\gamma}$
- K coeficiente que depende de la resistencia de las orillas y el fondo a la erosión. Para cauces estables que corren sobre material aluvial, varía entre 8 y 12. En la mayoría de los problemas de ingeniería se considera el valor promedio de 10 para los primeros cálculos. Para cauces con orillas difícilmente erosionables alcanza valores de 16 a 20.

La base del método es suponer que  $\beta$  y K son igual en modelo y prototipo.

De la ec 3.41 se obtiene la siguiente relación

$$H_e = L_e \beta_e \quad (3.43)$$

Esto es posible, como ya se indicó, si  $\beta$  es común en modelo y prototipo. De la ec 3.42 se observa que  $\beta$  es función de la densidad, pendiente, tirante y del diámetro del material; su valor varía entre 0.5 a 1.0, siendo el más frecuente 2/3.

2.- De la ec 3.42 se obtiene la siguiente relación entre escalas

$$D_e (S_e - 1) H_e^{-1} S_e^{-1} = 1 \quad (3.44)$$

3.- La tercer condición es satisfacer la ley de Froude, o sea, la ec 2.23

4.- Se toma en cuenta la fórmula de Chezy, en la forma

$$V = C \sqrt{H S} \quad (3.45)$$

cuya relación entre escalas se expresa

$$C_e H_e^{1/2} S_e^{1/2} V_e^{-1} = 1 \quad (3.46)$$

Además de las cuatro condiciones se pueden establecer escalas complementarias, por ejemplo

$$S_e = \frac{H_e}{L_e} \quad (3.30)$$

$$Q_e = L_e H_e V_e \quad (3.47)$$

$$t_e = L_e V_e^{-1} \quad (3.48)$$

Sustituyendo la ec 2.23 en las ecs 3.47 y 3.48 y considerando que  $g_e = 1$ , se obtienen las siguientes expresiones

$$Q_e = L_e H_e^{3/2} \quad (3.49)$$

$$t_e = L_e H_e^{-1/2} \quad (3.50)$$

De lo anterior se concluye que se tienen diez escalas y ocho relaciones

por satisfacer, o sea que se pueden suponer independientemente dos escalas y deducir las restantes, por lo que este método permite dos grados de libertad. A continuación se harán algunas operaciones a partir de las ecuaciones fundamentales, suponiendo como escalas independientes a  $L_e$  y  $(Ss-1)_e$ . De la ec 3.43 se obtiene el valor de la escala de líneas verticales; por lo tanto la distorsión sería

$$\delta = \frac{L_e}{H_e} = \frac{L_e}{(L_e)^\beta} = L_e^{1-\beta} \quad (3.51)$$

Si el tramo en estudio corresponde a una zona de montaña,  $\beta$  podrá tener un valor igual a uno y por lo tanto no será necesario distorsionar el modelo. De la ec 3.44 se obtiene el valor de la escala de diámetros

$$D_e = \frac{H_e S_e}{(Ss-1)_e} \quad (3.52)$$

sustituyendo la ec 3.30

$$D_e = \frac{L_e^{1-\beta} L_e}{(Ss-1)_e L_e^\beta} \quad (3.53)$$

finalmente

$$D_e = \frac{L_e^{2(1-\beta)}}{(Ss-1)_e} \quad (3.54)$$

De lo anterior se observa que, si la densidad del material es la misma en modelo y prototipo  $D_e = L_e^{2(1-\beta)}$  es decir, siempre el material del modelo será más fino. Si además de usar material de igual densidad el tramo en estudio esta en una zona de montaña  $D_e = 1$ , será necesario usar el mismo material del prototipo, lo cual no siempre es posible. Cuando  $\beta = 1$ , o sea, que se estudia un tramo del río en zona de montaña, el modelo puede ser no distorsionado. Por otra parte, el método impone mayores distorsiones cuanto más haya desarrollado el río la zona deltica y sea esta la zona por estudiar. Por último, este método permite usar material con igual densidad que el del prototipo.

### 3.8 METODO DE EINSTEIN-CHIEN.

Este método se base en las ecuaciones propuestas por Einstein para obtener las características hidráulicas de una corriente y el arrastre de sólidos que produce. Dicho método toma en cuenta el comportamiento

del conjunto de las partículas del fondo.

A continuación se expone el método de manera semejante a como sus autores lo presentaron.

Se sabe que cuando existe más de un valor de una escala para definir magnitudes semejantes, existe distorsión. De ahí que puedan observarse las siguientes siete posibles distorsiones entre el prototipo y su modelo.

- 1.- Si la escala de longitudes horizontales  $L_e$  es independiente de la de longitudes verticales  $H_e$ , el modelo es distorsionado verticalmente.
- 2.- Si la escala del tamaño de granos  $D_e$  es diferente de  $L_e$  y  $H_e$ , se introduce una tercera escala de longitudes, y con esto una segunda distorsión.
- 3.- Si la escala de pendientes se escoge independiente del valor  $\frac{H_e}{L_e}$ , se tendrá otra distorsión.
- 4.- Si la relación de densidades efectivas del sedimento ( $S_e - 1$ ), es diferente de la escala de densidad del fluido  $\gamma$ , la cual es igual a uno, habrá una cuarta distorsión.
- 5.- Una quinta distorsión se introduce si la relación tiempo hidráulico  $t_1$ , para valores de tiempo involucrados en la determinación de velocidades y cantidades de sedimento, es diferente de la escala de tiempo de sedimentación  $t_2$ .
- 6.- Una sexta distorsión se produce ante la imposibilidad de obtener cantidades de arrastre en suspensión en un modelo, en la misma escala en que las cantidades de arrastre de fondo son reproducidas.
- 7.- Una séptima y última distorsión se presenta cuando la escala de velocidades de sedimentación  $\omega_e$  correspondiente a los granos, es diferente de la escala correspondiente a las velocidades del flujo.



Considerando lo anterior, Einstein-Chien indican que son nueve las relaciones que se deben cumplir entre las diferentes escalas.

a) La primera se obtiene a partir de la ecuación de Manning generalizada

$$V = \frac{C \sqrt{g}}{D^m} S^{1/2} H^{1/2+m} \quad (3.55)$$

en la que

- V velocidad del flujo
- C constante
- g aceleración de la gravedad
- H tirante medio, equivalente al radio hidráulico
- m exponente

La ec 3.55 resulta idéntica a la ecuación de Manning cuando  $m = \frac{1}{8}$  y se usa la relación  $n \sim D^{1/8}$ , en donde, n es el coeficiente de rugosidad. Si se considera que el exponente m es el mismo en el modelo y el prototipo, al menos para el rango de gastos más importantes, la ecuación entre escalas es

$$V_e^2 S_e^{-1} H_e^{-1-2m} D_e^{2m} C_e^{-2} = \Delta v \quad (3.56)$$

El valor de  $\Delta v$  es igual a uno si la similitud entre prototipo y modelo está completamente satisfecha; si no lo es, indica una pequeña desviación de la similitud exacta, si tal desviación es necesaria por cualquier razón práctica, m y  $C_e$  son el exponente y la escala de constantes, respectivamente, en la ec 3.55, la cual puede expresarse también como

$$\frac{V}{\sqrt{r_t S g}} = C \left[ \frac{r_t}{k_s} \right]^m \quad (3.57)$$

en donde

- $r_t$  radio hidráulico de la sección total considerando al ancho del fondo como el perímetro mojado.
- $k_s$  representa el tamaño del grano del fondo, el cual es representativo de su rugosidad granular si tomo el valor de  $D_{65}$ .

Si se considera que la mezcla de granos en el modelo es igual a la del

prototipo, la escala de valores de  $k_n$  será la misma que la de los tamaños de los granos,  $D_n$ . Los valores de  $C$  se determinarán, por separado, para modelo y prototipo, y la escala se encontrará para una sección promedio, representativa del cauce. El radio hidráulico  $r_T$  se define como

$$r_T = \frac{A_T}{P_b} = \frac{A_b' + A_b'' + A_w}{P_b} = \frac{r_b' P_b + r_b'' P_b + r_w P_w}{P_b} \quad ( 3.58 )$$

en donde

$A_T$  área de la sección transversal

$P_b$  perímetro mojado del fondo

$A_b'$  área de la sección transversal relacionada con los granos

$A_b''$  área de la sección transversal relacionada con las ondulaciones

$A_w$  parte de la sección transversal relacionada a los bancos

$r_b'$  y  $r_b''$  son obtenidos de la fórmula de Manning después de conocer el valor correspondiente de la rugosidad asociada y tomando en cuenta que la velocidad media y la pendiente son constantes para cada zona en estudio.

$r_w$  radio hidráulico relacionado a los bancos o las orillas.

Los valores de  $C$  y  $m$  para el modelo, sólo pueden determinarse por tanteos, ya que dependen de la elección de las relaciones de escala restantes.

#### b ) Criterio de Froude

Aunque en los ríos la pendiente de la superficie del agua sea pequeña, hay que recordar que la gravedad es la que mantiene el flujo.

De la ecuación de Froude  $\frac{V}{\sqrt{gH}}$  se deriva la relación de escalas

( ec 2.23 )

$$V_e H_e^{-1/2} g_e^{-1/2} = \Delta F \quad ( 3.59 )$$

Cuando la similitud sea exacta,  $\Delta F = 1$ ; cualquier otro valor significará una posible desviación necesaria.

#### Condiciones de arrastre.

El método de Einstein para valuar el arrastre de sedimentos se basa en relacionar una función  $\phi_s$ , denominada intensidad de transporte, con otra  $\psi_s$ , llamada intensidad de cortante. Los valores de estas funciones

son :

$$\phi_s = \frac{i_B}{i_b} \frac{q_B}{g(\rho_s - \rho)} \left[ \frac{\rho}{\rho_s - \rho} \right]^{1/2} \left[ \frac{1}{D^3} \right]^{1/2} \quad (3.60)$$

$$\psi_s = \frac{\rho_s - \rho}{\rho} \frac{D}{r_b S} \xi Y \left[ \frac{\log 10.6}{\log 10.6 \frac{\kappa}{\Delta}} \right]^2 \quad (3.61)$$

donde

$i_B$  peso de partículas de diámetro  $D_i$  dentro del conjunto arrastrado, en porcentaje

$i_b$  peso de partículas de diámetro  $D_i$  dentro de la mezcla del fondo, en porcentaje

$D$  diámetro medio de una fracción de la curva granulométrica

$r_T$  radio hidráulico total, asociado a las partículas del fondo y las ondulaciones

$Y$  factor de corrección en la transición entre pared lisa y rugosa. Su valor se encuentra en la fig 3.7 en función de  $\frac{k_s}{\delta}$

$\xi$  factor de encubrimiento de los granos de la mezcla, ya que los de mayor diámetro resguardan a los de menor diámetro. Su valor se encuentra en la fig 3.8, en función de  $\frac{D}{X}$

$\Delta$  es igual a  $\frac{k_s}{\kappa}$ , donde  $k_s$  es el  $D_{95}$  de la mezcla

$\delta$  espesor de la capa límite, se calcula como

$$\delta = \frac{11.6 \nu}{\sqrt{g r_b S}} \quad (3.62)$$

$X$  distancia cuyo valor es

$$X = 0.77 \Delta \quad \text{si} \quad \frac{\Delta}{\delta} > 1.80$$

$$X = 1.39 \delta \quad \text{si} \quad \frac{\Delta}{\delta} < 1.80$$

$\kappa$  función de  $\frac{k_s}{\delta}$ . Se encuentra en la fig 3.9

$\rho_s$  masa específica del material en estudio

$\rho$  masa específica del agua

$S$  pendiente hidráulica

Como puede observarse, el valor de  $\psi_0$  se calcula en función de todos los datos hidráulicos de la corriente y de las características del material del fondo. Conocido  $\psi_0$  de la fig 3.6 se obtiene el valor de  $\phi_0$ , de donde se despeja  $q_B$ , que es el arrastre del material sólido de diámetro  $D_1$ , dado en peso.  $q_B$  es la única incógnita de la ec 3.60. Las figs 3.6 a 3.9 no son necesarias para calcular las escalas de un modelo fluvial de fondo móvil, pero pueden ser de utilidad si se desea calcular teóricamente el gasto sólido, tanto del modelo como del prototipo.

c ) Criterio de la intensidad del transporte

Para lograr condiciones similares de transporte de sedimentos cerca del fondo, es necesario que la intensidad del transporte  $\phi_0$  y la intensidad del cortante  $\psi_0$ , para los tamaños de granos individuales, sean iguales en el modelo y el prototipo.

Tomando en cuenta la ec 3.60, la igualdad solo es posible, para todas las fracciones de una mezcla, si las dos mezclas son iguales; es decir, si la escala de los valores de  $i_b$  es igual a uno.

Tal condición se cumple, si las curvas granulométricas son paralelas aunque desplazadas en la dirección del eje de los diámetros. Si  $\rho$  es igual en el modelo y en el prototipo, la ecuación de iguales valores de  $\phi_0$  puede expresarse como

$$(q_B)_0 (\rho_s - \rho)_0^{-3/2} D_0^{-3/2} = 1 \quad (3.63)$$

d ) Criterio de igual intensidad de cortante (arrastre nulo de sedimento).

La igualdad de los valores de  $\psi_0$  en el modelo y prototipo es, con frecuencia, interpretada como la condición de similitud de flujo para el principio de movimiento de sedimentos.

De la ec 3.61 se observa que la similitud puede ser posible si  $\delta_0 = D_0$ . Con lo anterior  $\kappa_0 = 1$ ,  $\Delta_0 = D_0 = \delta_0 = X_0$  y, por lo tanto,  $Y_0 = 1$ . Entonces la relación de escalas obtenida de  $\psi_0$  se expresa como :

$$(\rho_s - \rho) \cdot D_s \cdot \eta_s^{-1} \cdot H_s^{-1} \cdot S_s^{-1} = 1 \quad (3.64)$$

$\eta_s$  es la relación de los radios hidráulicos  $r'_b$  referidos a la superficie de arrastre entre el radio total  $r_T$ . Esta corrección se introduce ya que  $(r_T)_s$  es igual a  $H_s$  y no así  $(r'_b)_s$ . Para cauces muy anchos  $r'_b = (r_b)_s$ .

e ) Criterio de la subcapa laminar

Debido a que  $\delta_s$  debe ser igual a  $D_s$ , a partir del valor del espesor de la capa límite ( ec 3.62 ), se llega a la siguiente relación de escalas

$$D_s \cdot \eta_s^{1/2} \cdot S_s^{1/2} \cdot H_s^{1/2} = \Delta \delta \quad (3.65)$$

Las desviaciones de  $\Delta \delta$  con respecto a uno se puede permitir, especialmente en casos en los cuales las asperezas del fondo sean considerablemente más grandes que  $\delta$  y, por lo tanto, no se afecte directamente por este valor.

f ) Relación entre escalas de gasto sólido

Al calcular algunas características del flujo en el modelo y el prototipo, se determina la relación entre la escala de arrastre total  $(q_T)_s$ , o sea, la suma de arrastre de fondo y en suspensión, y la escala de arrastre en el fondo  $(q_B)_s$ , en términos del coeficiente B. Este valor puede usarse para obtener la relación general entre las dos escalas de arrastre

$$(q_B)_s \cdot (q_T)_s \cdot B = 1 \quad (3.66)$$

g ) Escala de tiempos hidráulicos

El tiempo hidráulico  $t_1$  se define como el tiempo en el cual una partícula de agua recorre una distancia L a una velocidad V. De la definición de velocidad, se llega a la relación de escalas

$$V_s \cdot (t_1)_s \cdot L_s^{-1} = 1 \quad (3.67)$$

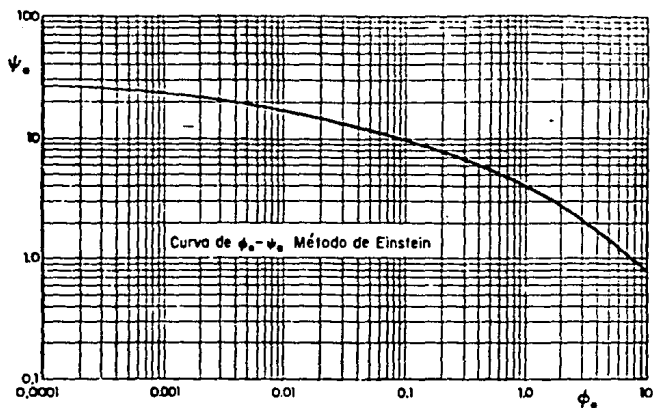


fig 3.6 Curva de  $\phi_0 - \psi_0$ . Método de Einstein.

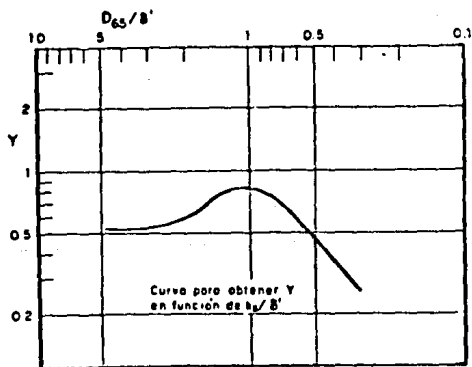


fig 3.7 Curva para obtener Y.

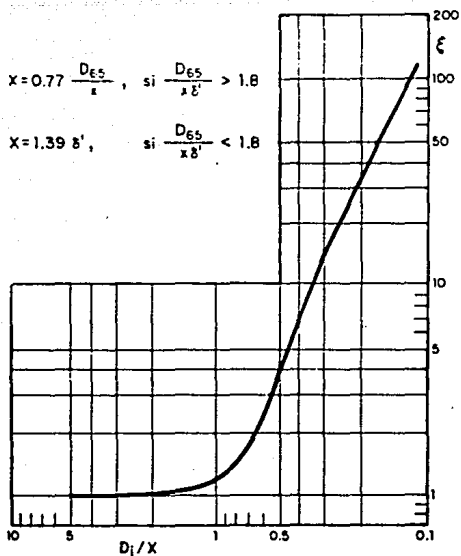


fig 3.8 Curva para obtener el factor de encubrimiento,  $\xi$ .

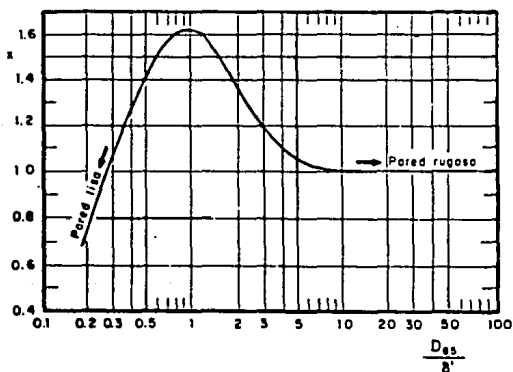


fig 3.9 factor de corrección  $x$ .

#### h) Tiempos de sedimentación

El tiempo  $t_2$  indica la duración para arrastrar un volumen dado de sólidos. La escala de este tiempo corresponderá al intervalo de tiempo en el cual el arrastre de sedimento  $q_T$  llena un volumen dado. En el instante  $t_2$  se arrastra un peso de sólidos igual  $t_2 q_T$ , cuyo volumen es

$$\frac{t_2 q_T}{\rho_s - \rho} \quad (3.68)$$

Este volumen ocupará un espacio de ancho unitario igual a  $L \times H$ , en donde  $H$  es una profundidad y  $L$  una longitud en la dirección del escurrimiento. Si se igualan los dos volúmenes, se obtiene

$$\frac{t_2 q_T}{\rho_s - \rho} = L H \quad (3.69)$$

y la relación de escalas correspondientes será

$$(q_T)_* (t_2)_* L_*^{-1} H_*^{-1} (\rho_s - \rho)_*^{-1} = 1 \quad (3.70)$$

Si se considera que la porosidad de los depósitos son iguales en el modelo y en el prototipo, la cantidad de sedimento  $q_T$  se puede medir en peso sumergido.  $(t_2)_*$  es la escala de tiempos en la cual hidrógrafos del prototipo pueden repetirse en el modelo.

#### 1) Escala de pendientes

Por último, se pueden introducir escalas independientes para la longitud, altura y pendiente, lo que implica que  $S$  sea diferente a la relación  $\frac{H}{L}$ , y así

$$S_* L_* H_*^{-1} = \Delta \eta \quad (3.71)$$

$\Delta \eta < 1$  indica que el modelo se inclina más de lo que piden sus escalas de líneas.

A continuación se resumen las nueve ecuaciones propuestas por Elstein-Chien

$$v_*^2 S_*^{-1} H_*^{-1-2a} D_*^{2a} C_*^{-2} = \Delta v \quad (3.56) \text{ De la ecuación generalizada de Manning}$$



$$V_o H_o^{-1/2} g_o^{-1/2} = \Delta F \quad (3.59) \text{ De la condición de Froude}$$

$$(q_B)_o (\rho_s - \rho)_o^{-3/2} D_o^{-3/2} = 1 \quad (3.63) \text{ De } \psi_o = 1$$

$$(\rho_s - \rho)_o D_o \eta_o^{-1} H_o^{-1} S_o^{-1} = 1 \quad (3.64) \text{ De } \phi_o = 1$$

$$D_o \eta_o^{1/2} S_o^{1/2} H_o^{1/2} = \Delta \delta \quad (3.65) \text{ Del valor de la capa límite}$$

$$(q_B)_o (q_T)_o B = 1 \quad (3.66) \text{ Relación entre gasto sólidos}$$

$$V_o (t_1)_o L_o^{-1} = 1 \quad (3.67) \text{ Relación entre tiempos hidráulicos}$$

$$(q_T)_o (t_2)_o L_o^{-1} H_o^{-1} (\rho_s - \rho)_o^{-1} = 1 \quad (3.70) \text{ Relación entre tiempos de sedimentación}$$

$$S_o L_o H_o^{-1} = \Delta \eta \quad (3.71) \text{ Relación de pendientes}$$

Los valores de  $m$ ,  $C$  y  $\eta$  se determinan con cálculos auxiliares;  $\Delta v$ ,  $\Delta F$ ,  $\Delta \delta$  y  $\Delta \eta$  son iguales a uno, aunque se permiten ligeras desviaciones en ese valor. Si se aceptan para las  $\Delta$  valores diferentes a uno, es posible seleccionar, arbitrariamente, más de una escala. Así, se tiene nueve ecuaciones y diez incógnitas, aunque si se considera a  $B$ , son once las incógnitas. Por lo anterior se escoge una escala en forma independiente, y el valor de  $B$  se calcula conocidas  $q_B$  y  $q_T$ .

El procedimiento propuesto por Einstein-Chien es

1.- Si la ec 3.57 se transforma en una ecuación logarítmica, se tendrá la ecuación de una recta, la cual se representa en un papel logarítmico  $\frac{v^2}{r_T g S}$  contra  $\frac{r_T}{k_s}$ . De esta manera se conocen  $C$  (ordenada al origen) y  $m$  (pendiente de la recta). Con los datos del prototipo se podrá hacer lo anterior, y así se obtendrá el valor correspondiente de  $C_p$  y  $m$ .

2.- En base a la gráfica trazada se lleva una recta paralela, como primer tanteo, para tratar de representar en el modelo las condiciones de fricción. Así se conoce el valor de  $C_m$  ( $m$  es igual para el modelo y el prototipo).

3.- Conocidos  $C_p$  y  $C_m$ , se calcula  $C_e$ .

4.- A continuación se escoge una escala, por ejemplo  $L_e$ . Los valores de  $\Delta$  y de  $\eta_e$  se pueden considerar iguales a uno en un primer tanteo.

5.- En seguida se determinan  $H_e$ ,  $S_e$ ,  $D_e$ ,  $V_e$  y  $(\rho_s - \rho)$  de las ecs 3.56, 3.59, 3.64, 3.65 y 3.71.

6.- Con los datos anteriores se obtienen  $S_m$ ,  $(\rho_s)_m$ ,  $(D_{35})_m$ ,  $(k_s)_m$  y  $H_m$ , para el modelo.

7.- Una vez conocidos esos datos, se calcularán para el modelo, los valores  $\frac{V^2}{r_T g S}$  y  $\frac{r_T}{k_s}$ . Estos valores se llevan a la gráfica, y se ve si la recta trazada coincide con la supuesta; si no es así, se obtiene un nuevo valor de  $C_e$  y  $m$ .

8.- Se repiten los pasos (2) a (7) hasta lograr los valores correctos de  $C$  y  $m$ . Con esto, se tendrá semejanza con respecto a la fricción entre modelo y prototipo.

9.- Definidas las escalas citadas en el paso 5, se podrá conocer la escala  $(t_1)_e$  de la ec 3.67 y la escala  $(q_B)_e$  de la ec 3.63.

10.- Para determinar las escalas restantes se necesita el valor de  $B$ . Con los datos que hasta ahora se conocen, se aplica el método de Einstein, para obtener el arrastre de material sólido en el fondo y en suspensión, en modelo y prototipo, con lo que se obtendrá la escala del arrastre total  $(q_T)_e$ . Sustituyendo este valor y el de  $(q_B)_e$  en la ec 3.66, se conoce el valor de  $B$ .

11.- De la ec 3.70 se calcula la escala  $(t_2)_e$ .

Como puede observarse, hasta el paso 6 se han necesitado solo las ecs 3.56, 3.59, 3.64, 3.65, 3.71, con seis incógnitas en total. Las ecuaciones restantes no se requieren para la construcción del modelo y debido a la inexactitud del cálculo del arrastre sólido se puede asegurar que son innecesarias las ecs 3.63, 3.66 y 3.70. La ec 3.67 permite conocer el valor de la escala de tiempos para las partículas

líquidas. Además, la ec 3.66 nos lleva al conocimiento de un coeficiente B prácticamente inútil.

Si se acepta que  $m = \frac{1}{6}$ ,  $C = 1$ ,  $\eta_0 = 1$  y que todos los valores de  $\Delta$  son iguales a uno, las ecs 3.56, 3.59, 3.64, 3.65 y 3.71 quedan reducidas a

$$V_0^2 S_0^{-1} H_0^{-4/3} D_0^{1/3} = 1 \quad (3.72)$$

$$V_0 H_0^{-1/2} g_0^{-1/2} = 1 \quad (3.73)$$

$$(\rho_0 - \rho) D_0 H_0^{-1} S_0^{-1} = 1 \quad (3.74)$$

$$D_0 S_0^{1/2} H_0^{1/2} = 1 \quad (3.75)$$

$$S_0 L_0 H_0^{-1} = 1 \quad (3.76)$$

Por todo lo anterior, este método permite un solo grado de libertad, pues como ya se mencionó, se tiene cinco ecuaciones con seis incógnitas, es decir, solo es posible escoger una escala en forma independiente. Según este método no es posible usar en el modelo el mismo material arenoso del prototipo sino uno con una densidad menor y diámetro mayor; además exige que el modelo sea distorsionado. Finalmente, si los valores de  $\eta_0$  y todas las  $\Delta$  tiene un valor igual a uno, los valores de las escalas son idénticos a los dados por el criterio de Shields.

### 3.7 METODO DE MAZA-GARCIA.

En este método, se toma en cuenta el comportamiento del conjunto de las partículas del fondo, y en donde, para garantizar que la rugosidad del modelo esté a escala con respecto a la del prototipo y por lo tanto las pérdidas a lo largo del cauce principal y las elevaciones del agua en el mismo sean similares a las que se encuentran en la naturaleza, se escogen las escalas de tal forma que haya arrastre en todas las secciones en donde exista arrastre en el prototipo.

La ecuación de partida para este método fue desarrollada por Cruickshank y Maza y establece que la velocidad media del flujo es igual a

$$V = 7.58 \omega_{50} \left[ \frac{H}{D_{84}} \right]^{0.634} S^{0.458} \left[ \frac{\gamma}{\gamma_s - \gamma} \right]^{0.458} \quad (3.77)$$

la ec 3.77 es para régimen inferior, la cual se cumple si

$$\frac{1}{S} \geq 83.5 \left[ \frac{\gamma H}{(\gamma_s - \gamma) D_{84}} \right]^{0.35} \quad (3.78)$$

y

$$V = 6.50 \omega_{50} \left[ \frac{H}{D_{84}} \right]^{0.644} S^{0.352} \left[ \frac{\gamma}{\gamma_s - \gamma} \right]^{0.352} \quad (3.79)$$

la ec 3.79 es para régimen superior, y se cumple si

$$\frac{1}{S} \leq 66.5 \left[ \frac{\gamma H}{(\gamma_s - \gamma) D_{84}} \right]^{0.382} \quad (3.80)$$

Las fórmulas anteriores fueron obtenidas para cauces con arena cuyo diámetro era menor de 2 mm. Cuando  $\frac{1}{S}$  se encuentra entre los dos límites indicados se debe de escoger la fórmula que dé la menor velocidad.

En las planicies la mayoría de los ríos tienen escurrimiento con régimen inferior por lo que la determinación de las escalas se hará a partir de la ec 3.77. Dentro de dicho régimen las condiciones que se pueden presentar en el fondo son: fondo plano, rizo, rizo con dunas, dunas y nuevamente fondo plano pero esta vez con una gran cantidad de arrastre.

Si se relacionan las velocidades medias entre prototipo y modelo, dados por la fórmula 3.77 se obtiene la siguiente relación de escala

$$V_p = V_m \frac{H_p^{0.634}}{(D_{84})_p^{0.634}} \frac{S_m^{0.458}}{(\gamma_p - \gamma)_m^{0.458}} \quad (3.81)$$

En la expresión anterior se pueden valuar algunas de las escalas en la forma siguiente

- a) Por ser la gravedad la fuerza principal que condiciona el escurrimiento se debe cumplir la condición de Froude (ec 3.10)

- b) Una partícula dentro del seno del líquido, tanto en prototipo como modelo debe de recorrer distancias homólogas tanto vertical como horizontalmente al caer libremente dentro de él y por ello se puede demostrar que la escala de velocidades de caída de las partículas tiene que cumplir con la expresión 3.27.
- c) Como es indispensable distorsionar este tipo de modelos la escala de pendientes es igual a

$$S_0 = \frac{H_0}{L_0} \quad (3.30)$$

- d) Si se escoge el mismo peso específico para el material del fondo en modelo y prototipo y en ambos se tiene agua a temperatura similar se puede establecer que

$$(\gamma_s - \gamma)_0 \approx 1 \quad (3.82)$$

Al sustituir los valores dados por las expresiones 2.23, 3.27, 3.30 y 3.82 en la ec 3.77, obtiene que

$$(D_{0s})_0 = H_0^{3.3} L_0^{-2.3} \quad (3.83)$$

Por lo anterior, si se cumple la expresión 3.83 y la expresión 3.27 para  $\omega_{90}$ , teóricamente la rugosidad del prototipo está representada a escala en el modelo y por lo tanto las pérdidas de fricción son similares. Así, al cumplirse tales ecuaciones, se observa que la escala de velocidades de caída debe ser la misma para cualquier diámetro, pero como dentro del rango de las arenas las velocidades de caída pasan a depender de la raíz cuadrada del diámetro si éste es mayor que 10 mm, para depender del cuadrado del diámetro si éste es menor que 0.1 mm, se obtiene una escala de diámetros diferentes para cada diámetro. En la mayoría de los métodos existentes para determinar las escalas de un modelo de fondo móvil, se obtiene una única escala de diámetros.

### 3.7.1 Ecuación de Garde-Ranga Raju.

De acuerdo al método de Maza-García, es válido utilizar la expresión propuesta por Garde-Ranga Raju (1966 y 1970), en lugar de la ecuación desarrollada por Cruickshank-Maza.

La expresión desarrollada por Garde-Ranga Raju es

$$V = \alpha \Delta^{1/2} g^{1/2} D_{50}^{1/2} \left[ \frac{R}{D_{50}} \right]^{2/3} \left[ \frac{S}{\Delta} \right]^{1/2} \quad (3.84)$$

en donde

$\alpha = 7.66$  para fondo plano sin movimiento

$\alpha = 3.2$  para régimen inferior, o sea para rizos y dunas

$\alpha = 6.0$  para régimen de transición (barrido o lavado de dunas, fondo plano con transporte de sedimento, ondas estacionarias) y también para antidunas.

$\Delta$  es igual a  $\frac{\gamma_s - \gamma}{\gamma}$

$D_{50}$  tamaño característico del material del cauce.

A fin de poder determinar el tipo de régimen, Garde y Ranga Raju dieron el diagrama que se presenta en la fig 3.10. Con arreglo a lo que se indica en esta figura, basta con calcular los valores de los parámetros adimensionales  $R/D$  y  $S/\Delta$  para conocer el tipo de régimen y, por consiguiente, el valor correspondiente de  $\alpha$  que debe usarse en la ec 3.84.

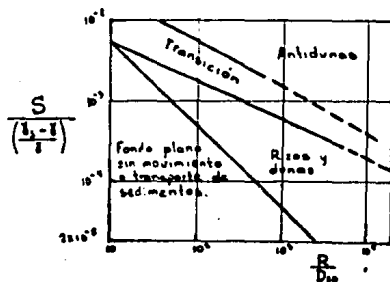


fig 3.10 Criterio para predecir el tipo de régimen según Garde-Ranga Raju

### 3.7.2 Ecuación de ChiEmeke.

De la misma forma que la ecuación de Garde-Ranga Raju, la ecuación de ChiEmeke puede ser empleada en vez de utilizar las ecuaciones propuestas por Cruickshank-Maza.

Si se conocen las características del material del cauce ( $\gamma_s$  y  $D_{50}$ ), la pendiente  $S$  y la viscosidad cinemática del agua,  $\nu$ , el procedimiento propuesto por ChiEmeke para determinar la velocidad media es

- 1) Calcular

$$\tau_o = \gamma RS \quad (3.85)$$

$$V_* = \sqrt{gRS} \quad (3.86)$$

$$R_* = \frac{V_* D_{50}}{\nu} \quad (3.87)$$

- 2) Encontrar el valor de  $\tau_c$  con el diagrama de Shields (fig 3.5)

- 3) Evaluar

$$\tau_o'' = 0.0246 (\gamma_s - \gamma) D_{50} \left( \frac{\tau_o}{\tau_c} \right) \quad (3.88)$$

- 4) Determinar el valor de  $V$  con la ecuación

$$V = 21.75 V_* \exp \left[ -0.2 \frac{\tau_o''}{\tau_o - \tau_o''} \right] \quad (3.89)$$

Esta última expresión fue obtenida por ChiEmeke como resultado de pruebas de campo y de laboratorio.

#### 4 COMPARACION DE RESULTADOS.

En el capítulo anterior se presentaron los métodos para obtener escalas para modelos fluviales de fondo móvil, tal como fueron presentados por sus autores. En este capítulo se desarrollan las ideas propuestas por el M.I. Manuel García Flores, investigador del Instituto de Ingeniería de la UNAM, que consisten en dejar en función de  $H_e$  todas las expresiones dadas por cada autor antes visto, y de esa manera poder comparar, de manera inmediata, los resultados que se obtengan de cada método.

##### 4.1 METODO DE LA VELOCIDAD DE CAIDA

De acuerdo a las ideas propuesta por García Flores, la mejor forma de poder observar los resultados es despejando  $H_e$  de la ec 3.27, en vez de despejar  $\omega_e$ , es decir

$$H_e = \left[ \frac{L_e \omega_e}{g_e^{1/2}} \right]^{2/3} \quad (4.1)$$



donde

$$\omega_p = \frac{\omega_p}{\omega_p} \quad (4.2)$$

$\omega_p$  y  $\omega_p$  se calculan ya sea con la fórmula de Stokes, con la desventaja de que ésta supone partículas esféricas de cuarzo aplicable sólo cuando el número de Reynolds es menor de 0.1; ó con la ecuación propuesta por Rubey, la cual calcula la velocidad de caída de partículas naturales entre limos y gravas y que se expresa como

$$\omega = \sqrt{\frac{2}{3} (S_s - 1) g D + \frac{36 \nu^2}{D^2}} - \frac{6 \nu}{D} \quad (4.3)$$

donde

- $\nu$  viscosidad cinemática, en  $m^2/s$
- $S_s$  densidad relativa, e igual a  $\frac{\gamma_s}{\gamma}$
- $\gamma_s$  peso específico del material en estudio, en  $kgf/m^3$
- $\gamma$  peso específico del agua, en  $kgf/m^3$
- $D$  diámetro de la partícula en estudio, en  $m$
- $g$  aceleración de la gravedad, en  $m/s^2$

Por lo que, la escala de líneas verticales se obtiene de acuerdo al método de la velocidad de caída con la ec 4.1, recordando que la distorsión que se obtenga no deba ser mayor a 5.

De lo anterior, se observa que este método permite construir modelos con distorsión o sin ella, utilizar el mismo material u otro de diferente densidad y, por último, que el tamaño de las partículas en el modelo sean de un diámetro menor o mayor a las del prototipo.

#### 4.2 METODO DE LA CURVA DE SHIELDS.

A continuación resumen las tres ecuaciones básicas propuestas originalmente por el autor, en una sola ecuación, o sea, si se sustituye la ec 3.35 en la ec 3.39 y ésta a su vez en la ec 3.40, considerando que  $R_p = H_p$ , se llega a que

$$H_e = \frac{L_e^{5/8}}{D_e^{3/4} \left[ \frac{\gamma_w - \gamma}{\gamma} \right]^{1/8}} \quad (4.4)$$

Esta última expresión calcula la escala de líneas verticales, siempre y cuando se garantice el movimiento de las partículas, de acuerdo a la fig 3.5.

Cabe destacar que, debido a que la regionalización de las configuraciones de fondo que se presentan en la fig 3.5 no suceden de esa manera en la realidad, García Flores estableció que, debido a que el objetivo es verificar que haya arrastre de partículas, el esfuerzo cortante crítico se calcule con las ecuaciones que ajustó para describir la curva de Shields

si  $R_{*c} \leq 3$

$$\tau_c = 0.1643 \rho^{1/4} \nu^{1/2} (\gamma_w - \gamma)^{3/4} D^{1/4} \quad (4.5)$$

si  $3 < R_{*c} \leq 10$

$$\tau_c = 0.07607 \rho^{1/9} \nu^{2/9} (\gamma_w - \gamma)^{8/9} D^{2/3} \quad (4.6)$$

si  $10 < R_{*c} \leq 500$

$$\tau_c = 0.01498 \rho^{-1/11} \nu^{-2/11} (\gamma_w - \gamma)^{12/11} D^{14/11} \quad (4.7)$$

si  $R_{*c} > 500$

$$\tau_c = 0.06 (\gamma_w - \gamma) D \quad (4.8)$$

De esta manera, calculado el esfuerzo cortante crítico correspondiente ( $\tau_c$ ), se compara con el esfuerzo cortante del agua ( $\tau_o = \gamma R S_o$ ) y puede así saberse si se presenta movimiento o no.

$$D_* = \left[ \frac{1}{q_{B_*} (\rho_* - \rho_*)^{-3/2}} \right]^{-2/3} \quad (4.14)$$

simplificando

$$D_* = \frac{q_{B_*}^{2/3}}{(\rho_* - \rho_*)} \quad (4.15)$$

sustituyendo la ecuación anterior en la ec 3.64

$$(\rho_* - \rho_*) \frac{q_{B_*}^{2/3}}{(\rho_* - \rho_*)} \eta_*^{-1} H_*^{-1} S_*^{-1} = 1 \quad (4.16)$$

o sea

$$q_{B_*}^{2/3} \eta_*^{-1} H_*^{-1} S_*^{-1} = 1 \quad (4.17)$$

Considerando el valor de la capa límite ( ec 3.65 ) :

$$D_* \eta_*^{1/2} S_*^{1/2} H_*^{1/2} = \Delta \delta \quad (3.65) \quad \text{Del valor de la capa límite}$$

y despejando  $\eta_*$  :

$$\eta_* = \left[ \frac{1}{H_* H_*^{1/2} S_*^{1/2}} \right]^2 \quad (4.18)$$

Sustituyendo la expresión 4.18 en la ec 4.17 se obtiene :

$$q_{B_*}^{2/3} \left[ \frac{1}{D_* H_*^{1/2} S_*^{1/2}} \right]^{-2} H_*^{-1} S_*^{-1} = 1 \quad (4.19)$$

reduciendo términos :

$$q_{B_*}^{2/3} D_*^2 = 1 \quad (4.20)$$

es decir que :

$$D_* = q_{B_*}^{-1/3} \quad (4.21)$$

Luego, sustituyendo la ec 4.21 en la ec 3.56 se tiene :

$$V_*^2 S_*^{-1} H_*^{-1-2m} \left[ q_B^{-1/3} \right]^{2m} C_*^{-2} = 1 \quad (4.22)$$

Ahora, despejando  $V_*$  de la ec 4.22

$$V_*^2 = S_* H_*^{1+2m} \left[ q_B^{-1/3} \right]^{-2m} C_*^2 \quad (4.23)$$

$$V_* = S_*^{1/2} H_*^{(1/2 + m)} q_B^{m/3} C_* \quad (4.24)$$

De la condición de Froude ( ec 3.59 ) se despeja  $V_*$  :

$$V_* = g_*^{1/2} H_*^{1/2} \quad (4.25)$$

Igualando la ec 4.24 con la ec 4.25

$$g_*^{1/2} H_*^{1/2} = S_*^{1/2} H_*^{(1/2 + m)} q_B^{m/3} C_* \quad (4.26)$$

De la ec 3.71, la pendiente es :

$$S_* = \frac{H_*}{L_*} \quad (4.27)$$

Finalmente, sustituyendo la ec 4.27 en la ec 4.26 y despejando  $H_*$ , se llega a :

$$g_*^{1/2} H_*^{1/2} = \frac{H_*^{1/2}}{L_*^{1/2}} H_*^{(1/2 + m)} q_B^{m/3} C_* \quad (4.28)$$

$$H_* = \left[ g_*^{1/2} L_*^{1/2} q_B^{-m/3} C_*^{-1} \right]^{(0.5+m)^{-1}} \quad (4.29)$$

Como se observa, la ecuación 4.29 se encuentra en función del *gasto sólido total*  $q_B$ , lo cual implica que  $H_*$  se calcula por iteraciones sucesivas.

#### 4.5 METODO DE MAZA-GARCIA.

De la presentación hecha por los autores, se observa inconsistencia en la aplicación de la expresión de velocidad de caída, pues al utilizar la ec 3.27 se duplica la condición de Froude, es decir, se aplica dos veces la misma condición, lo cual es incorrecto. Además, como se explicó antes, la manera más adecuada de observar los resultados del método es despejar la escala de líneas verticales ( $H_e$ ) de las expresiones correspondientes.

A continuación se hace el desarrollo para obtener la expresión que calcula la escala de líneas verticales, a partir de la ec 3.77

$$\frac{V_p}{V_m} = V_e = (\omega_{50})_e \left( \frac{H_e}{(D_{84})_e} \right)^{0.834} S_e^{0.456} \left( \frac{\gamma}{\gamma_s - \gamma} \right)_e^{0.456} \quad (4.30)$$

como debe cumplirse la condición de Froude, se sustituye la ec 2.23 en la ec 4.30 y tomando en cuenta la ec 3.30, entonces

$$g_e^{1/2} H_e^{1/2} = (\omega_{50})_e H_e^{0.834} (D_{84})_e^{-0.834} H_e^{0.456} L_e^{-0.456} \left( \frac{\gamma}{\gamma_s - \gamma} \right)_e^{0.456} \quad (4.31)$$

$$H_e^{-0.59} = \frac{1}{g_e^{1/2}} (\omega_{50})_e (D_{84})_e^{-0.834} L_e^{-0.456} \left( \frac{\gamma}{\gamma_s - \gamma} \right)_e^{0.456} \quad (4.32)$$

$$H_e = \left[ g_e^{-1/2} (\omega_{50})_e (D_{84})_e^{-0.834} L_e^{-0.456} \left( \frac{\gamma}{\gamma_s - \gamma} \right)_e^{0.456} \right]^{-\frac{1}{0.59}} \quad (4.33)$$

por lo que, finalmente

$$H_e = \left( \frac{\gamma_s - \gamma}{\gamma} \right)_e^{0.7729} g_e^{0.8475} (D_{84})_e^{1.0746} \frac{L_e^{0.7729}}{(\omega_{50})_e^{1.8946}} \quad (4.34)$$

donde, de acuerdo a la ec 4.2

$$\omega_e = \frac{\omega_p}{\omega_m}$$

$\omega_p$  y  $\omega_m$  se calculan con la ec 4.3

La ec 4.34 permite calcular la escala de líneas verticales cuando el flujo en el prototipo está en régimen inferior. Para régimen superior, la expresión correspondiente es

$$H_e = \left[ \frac{\gamma_s - \gamma}{\gamma} \right]^{0.1748} g_e^{0.248} (D_{B4})_e^{0.3194} \frac{L_e^{0.1748}}{(\omega_{50})_e^{0.488}} \quad (4.35)$$

#### 4.5.1 Ecuación de Garde-Ranga Raju.

A partir de la ec 3.84 se puede obtener la ecuación para calcular la escala de líneas verticales, considerando que  $R_e = k H_e$  y sustituyendo la ec 3.30

$$V_e = \sqrt{\Delta_e g_e (D_{50})_e} \left[ \frac{k H_e}{(D_{50})_e} \right]^{2/3} \left[ \frac{H_e}{L_e \Delta_e} \right]^{1/2} \quad (4.36)$$

$$V_e = \Delta_e^{1/2} g_e^{1/2} (D_{50})_e^{-1/6} k^{2/3} H_e^{2/3} H_e^{1/2} L_e^{-1/2} \Delta_e^{-1/2} \quad (4.37)$$

y de acuerdo a la condición de Froude ( ec 2.23 )

$$g_e^{1/2} H_e^{1/2} = g_e^{1/2} (D_{50})_e^{-1/6} k^{2/3} H_e^{2/3} H_e^{1/2} L_e^{-1/2} \quad (4.38)$$

simplificando

$$H_e = \left[ \frac{L_e^{1/2} (D_{50})_e^{1/6}}{k^{2/3}} \right]^{3/2} \quad (4.39)$$

por lo que

$$H_e = \frac{1}{k} (D_{50})_e^{1/4} L_e^{3/4} \quad (4.40)$$

donde

$k$  Se puede evaluar con la ec 3.12 si se supone sección trapezoidal o rectangular. Para cálculos preliminares puede asignarse el valor de 1.

#### 4.5.2 Método de ChiEmeka.

De acuerdo al método de ChiEmeka, a partir de la expresión 3.89 se obtiene la escala de líneas verticales ( $H_e$ ). El desarrollo de dicha ecuación, se presenta a continuación.

Sustituyendo las ecs 3.86 y 3.88 en la ec 3.89

$$V = 21.76 g^{1/2} R^{1/3} S^{1/2} \exp \left[ \frac{-0.2}{\frac{\tau_c}{(\bar{\gamma}_s - \gamma) D_{50}} - 1} \right] \quad (4.41)$$

Luego, considerando prototipo y modelo y sustituyendo las ecs 2.3, 3.30 y considerando que  $R_m = k H_e$ , la ec 4.41 queda expresada como

$$g_s^{1/2} H_e^{1/2} = g_p^{1/2} H_p^{1/2} k^{1/2} H_p^{1/2} L_e^{1/2} \exp \{ \phi \} \quad (4.42)$$

donde

$$\phi = \left[ \frac{-0.2}{\frac{\tau_c}{(\bar{\gamma}_s - \gamma) D_{50}} - 1} \right]_p - \left[ \frac{-0.2}{\frac{\tau_c}{(\bar{\gamma}_s - \gamma) D_{50}} - 1} \right]_m \quad (4.43)$$

finalmente, se despeja  $H_e$  y se llega a que

$$H_e = \frac{L_e}{k} \exp \left[ \frac{0.4}{\frac{\tau_c}{(\bar{\gamma}_s - \gamma) D_{50}} - 1} \right]_p - \left[ \frac{0.4}{\frac{\tau_c}{(\bar{\gamma}_s - \gamma) D_{50}} - 1} \right]_m \quad (4.44)$$

La expresión 4.44 permite calcular la escala de líneas verticales de acuerdo al criterio de ChiEmeka.

En la tabla 4.1 se presenta un resumen de las expresiones, desarrolladas en este capítulo, que calculan la escala de líneas verticales ( $H_e$ ) de acuerdo a cada autor.

Tabla 4.1 Ecuaciones para obtener la escala de líneas verticales

METODO DE LA VELOCIDAD DE CAIDA.

$$H_e = \left[ \frac{L_e \omega_e}{g_e^{1/2}} \right]^{2/3} \quad (4.1)$$

donde

$$\omega = \sqrt{\frac{2}{3} (S_s - 1) g D + \frac{36 \nu^2}{D^2}} - \frac{6 \nu}{D} \quad (4.3)$$

METODO DE LA CURVA DE SHIELDS.

$$H_e = \frac{L_e^{5/8}}{D_e^{3/4} \left[ \frac{\tau_w - \tau}{\tau} \right]^{1/8}} \quad (4.4)$$

METODO DE ALTUNIN.

$$H_e = L_e H_e^{-2} L_e D_e (S_s - 1) \quad (4.13)$$

METODO DE EINSTEIN-CHIEN.

$$H_e = \left[ g_e^{1/2} L_e^{1/2} q_e^{-m/3} C_e^{-1} \right]^{(0.5+m)^{-1}} \quad (4.29)$$

METODO DE MAZA-GARCIA.

Para régimen inferior

$$H_e = \left[ \frac{\tau_w - \tau}{\tau} \right]_e^{0.7729} g_e^{0.8475} (D_{84})_e^{1.0748} \frac{L_e^{0.7729}}{(\omega_{50})_e^{1.8948}} \quad (4.34)$$

Para régimen superior

$$H_e = \left[ \frac{\tau_w - \tau}{\tau} \right]_e^{0.1748} g_e^{0.248} (D_{84})_e^{0.3184} \frac{L_e^{0.1748}}{(\omega_{50})_e^{0.498}} \quad (4.35)$$



A.- Ecuación de Garde-Ranga Raju.

$$H_e = \frac{1}{k} (D_{50})_e^{1/4} L_e^{3/4} \quad (4.40)$$

B.- Ecuación de ChiEmska.

$$H_e = \frac{L_e}{k} \exp \left[ \frac{0.4}{\frac{\tau_c}{(\bar{\gamma}_e - \gamma) D_{50}} - 1} \right] - \left[ \frac{0.4}{\frac{\tau_c}{(\bar{\gamma}_e - \gamma) D_{50}} - 1} \right] \quad (4.44)$$

4.6 DIAGRAMAS ADIMENSIONALES.

Una forma rápida de conocer la escala de líneas verticales ( $H_e$ ) y obtener la escala de gastos ( $Q_e$ ), es por medio de *diagramas dimensionales*.

Tales diagramas se elaboran a partir de las expresiones que se resumen en la tabla 4.1. A manera de ejemplo se explica, a continuación, el procedimiento para construir el diagrama adimensional correspondiente al método de la velocidad de caída, empleando la ecuación de Rubey.

Procedimiento.

a) Para obtener la curva correspondiente a una  $L_e$  que se proponga.

1<sup>o</sup> Se propone una escala de líneas horizontales ( $L_e$ ).

2<sup>o</sup> Se proponen los siguiente datos :  $D_e$ ,  $D_p$ ,  $(S_e - 1)_e$ ,  $(S_p - 1)_p$ ,  $v_e$ ,  $v_p$ ,  $g_e$ ,  $g_p$ . Se recomienda que  $(S_e - 1)_e$ ,  $g_e$  y  $v_e$  sean igual a uno, ello por facilitar los cálculos subsiguientes; además, los valores de  $D_e$  deben proponerse dentro de un rango razonable, por ejemplo  $10^{-2} \leq D_e \leq 10^2$ .

3<sup>o</sup> Con los datos anteriores se calcula  $D_{50}$ ,  $\omega_p$ ,  $\omega_e$  y  $\omega_e$  ( la velocidad de caída,  $\omega$ , se calcula con la ec 4.3 ).

4<sup>o</sup> Se calcula la escala de líneas verticales,  $H_e$ , con la ec 4.1. Con este valor se calcula el gasto de escala ( $Q_e$ ).

- 5<sup>o</sup> Finalmente, se dibuja la curva correspondiente a la escala de líneas verticales (  $L_e$  ) propuesta, considerando que :

$$x = D_e ( S_e - 1 )$$

$$y = Q_e$$

- b ) Para obtener la curva correspondiente a una  $H_e$  propuesta.

- 1<sup>o</sup> Se propone una escala de líneas verticales (  $H_e$  ).

- 2<sup>o</sup> Se proponen los siguiente datos :  $D_e, D_p, (S_e-1)_e, (S_e-1)_p, v_e, v_p, g_e, g_p$ . Se recomienda que  $(S_e-1)_e, g_e$  y  $v_e$  sean igual a uno, ello por facilitar los cálculos subsecuentes; además, los valores de  $D_e$  deben proponerse dentro de un rango razonable, por ejemplo  $10^{-2} \leq D_e \leq 10^2$ .

- 3<sup>o</sup> Se calcula el gasto de escala,  $Q_e$ , para cada escala de líneas horizontales (  $L_e$  ) propuesta en el inciso a.

- 4<sup>o</sup> Se calcula  $\omega_e$  despejándola de la ec 4.1.

- 5<sup>o</sup> Se propone un diámetro de modelo,  $D_m$ , y se calcula una  $\omega_e$  de acuerdo a la ec 4.3.

- 6<sup>o</sup> Se comparan las  $\omega_e$  calculadas en los pasos 3 y 4. Si éstas no son iguales se repite el paso 4 hasta que lo sean.

- 7<sup>o</sup> Se calcula  $D_e ( S_e - 1 )_e$ .

- 8<sup>o</sup> Finalmente las coordenadas para la  $H_e$  propuesta son :

$$x = D_e ( S_e - 1 )_e$$

$$y = Q_e$$

En la fig 4.1 se muestra el diagrama realizado de acuerdo a lo arriba señalado. Siguiendo el mismo procedimiento se elaboraron los diagramas que se presentan en las figs 4.2 a 4.5, correspondientes a los métodos de Shields, Altunin y Maza-García (ecs de Cruichshank-Maza y Garde-Ranga Raju), respectivamente.

Como se observa, el diagrama adimensional permite al usuario, conociendo la escala de diámetros ( $D_0$ ) y la escala de densidades relativas ( $S_a - 1$ ), calcular la escala de líneas verticales ( $H_0$ ) y la escala de gastos ( $Q_0$ ). También es posible realizar el proceso inverso, es decir, dado un gasto de escala, encontrar una escala de líneas verticales adecuado y ver el diámetro de escala que correspondería a tal gasto de escala requerido.

En el siguiente capítulo se presenta la aplicación de las fórmulas descritas anteriormente, en un ejemplo que tiene datos reales, correspondientes al estudio realizado en el Instituto de Ingeniería en el proyecto denominado "Modelo hidráulico del Río Colorado".

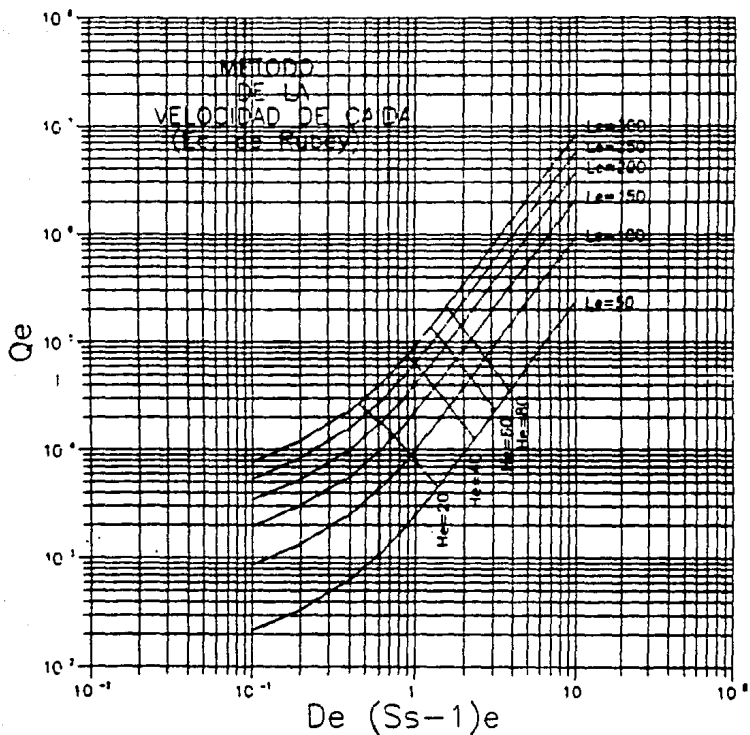


Fig 4.1 Diagrama adimensional. Método de la velocidad de caída.

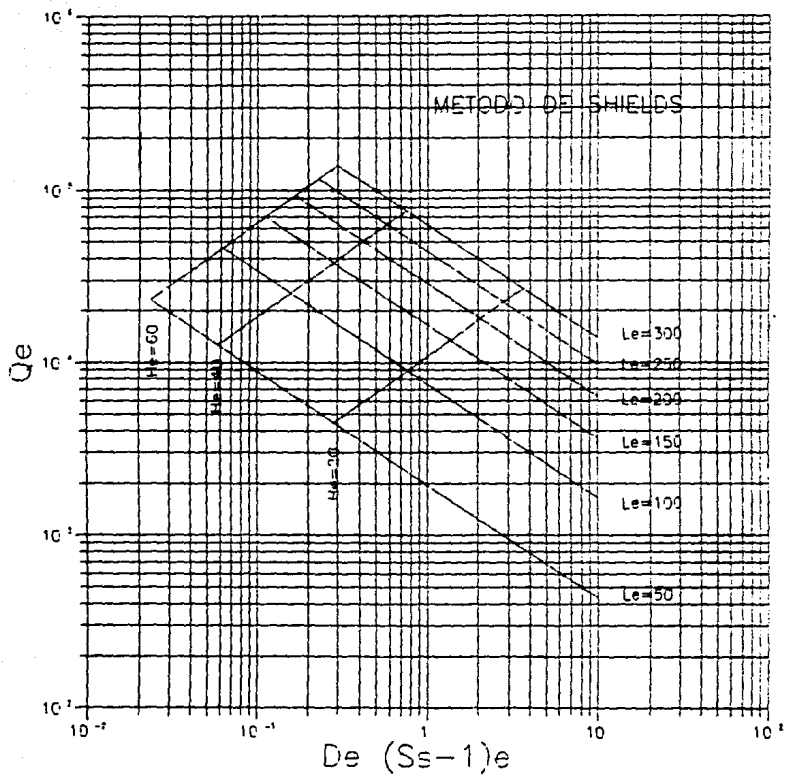


Fig 4.2 Diagrama adimensional. Método de Shields.

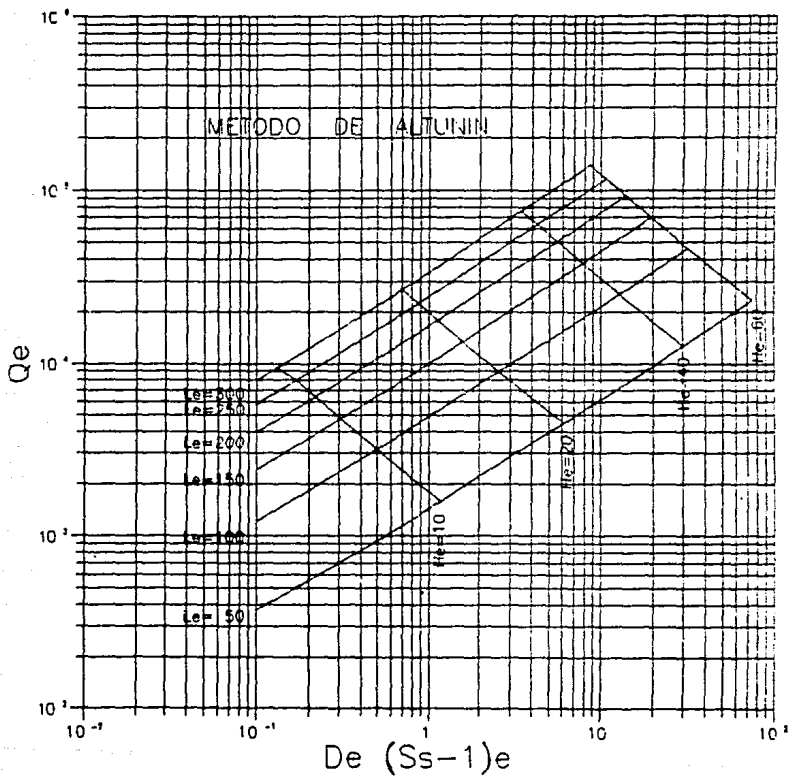
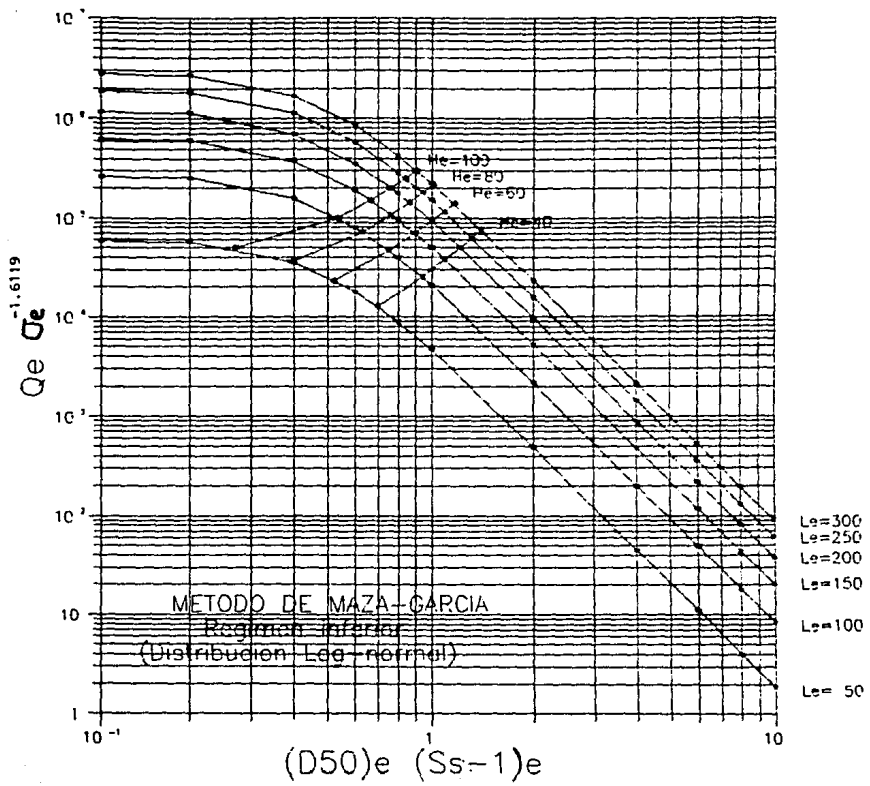


Fig 4.3 Diagrama adimensional. Método de Altunin.

Fig. 4.4 Diagrama adimensional. Método de la Maza-García.  
 $Ec$  de Crulichank-Maza



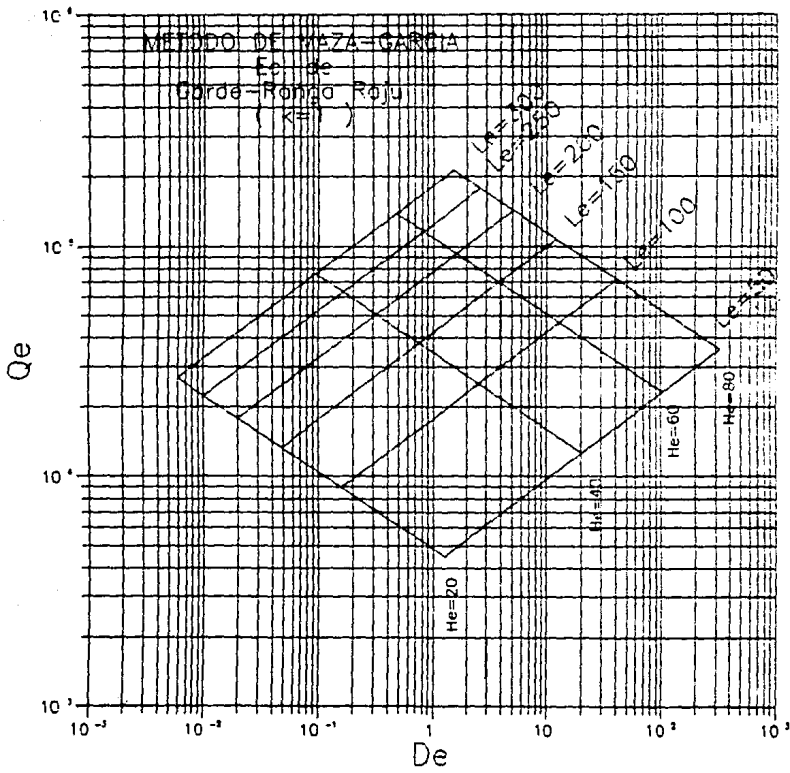


Fig 4.5 Diagrama adimensional. Método de la Maza-García.  
 Ec de Garde-Ranga Raju



## 5. EJEMPLO NUMERICO

A continuación se presenta un ejemplo numérico de como seleccionar escalas para diseñar un modelo fluvial de fondo móvil distorsionado, en el que se requiere estudiar los efectos que producen las estructuras de protección, ya existentes, sobre la margen derecha; además de proponer estructuras de protección para dicha margen en donde se requiera, empleando para ello los métodos expuestos anteriormente.

Cabe destacar que los datos con los que se realizará el ejemplo numérico son reales y corresponden al Tramo Internacional del Río Colorado, ubicado en la frontera norte de nuestro país. El el modelo correspondiente se diseñará en el D. F.

### 5.1 DATOS

Características del agua en prototipo y modelo.

	Prototipo	Modelo
Temperatura promedio del agua	20° C	20° C

Aceleración debida al campo gravitatorio ( $g$ )	9.79573 $\frac{m}{s^2}$	9.77958 $\frac{m}{s^2}$
Peso específico ( $\gamma$ )	998.23 $\frac{kgf}{m^3}$	998.23 $\frac{kgf}{m^3}$
Viscosidad cinemática ( $\nu$ )	1.0066E-6 $\frac{m^2}{s}$	1.0066E-6 $\frac{m^2}{s}$

**Características del tramo de río en estudio.**

Longitud del tramo de interés	10 250 m
Ancho máximo por representar	3 150 m
Pendiente media del río	0.000248
Gasto por representar	1 000.00 $\frac{m^3}{s}$

**Características del laboratorio donde se desea construir el modelo correspondiente.**

Longitud máxima disponible	50.00 m
Ancho disponible	10.00 m
Ancho máximo disponible	15.00 m

**Datos obtenidos del análisis granulométrico realizado al material de prototipo y de modelo.**

	Prototipo	modelo
Peso específico ( $\gamma_s$ )	2 702.6176 $\frac{kgf}{m^3}$	2 674.825 $\frac{kgf}{m^3}$
Esfuerzos cortantes críticos ( $\tau_c$ ) ( criterio de Garcia Flores )	0.02880 $\frac{kg}{m^2}$	0.02628 $\frac{kg}{m^2}$

Los datos anteriores se resumen en la tabla 5.1.

Además de los datos anteriores se cuenta con la granulometría real, generada de acuerdo a una distribución log-normal y las velocidades de caída asociadas a cada diámetro de acuerdo a la fórmula propuesta por Rubey ( 4.3 ), y que se presentan en la tabla 5.2.

Los diámetros medios correspondientes al prototipo y al modelo son

$$\begin{aligned} ( D_m )_p &= 0.19613 \text{ mm} \\ ( D_m )_m &= 0.24355 \text{ mm} \\ ( D_m )_o &= 0.80530 \text{ mm} \end{aligned}$$

Tabla 5.1

temperatura = 20°C	$B_p = 3\ 150.00\ m$
$g_p = 9.79573\ \frac{m}{s^2}$	$B_m = 15.00\ m$
$g_m = 9.77958\ \frac{m}{s^2}$	$L_p = 10\ 250.00\ m$
$g_e = 1.00165$	$L_m = 50.00\ m$
$\gamma_p = \gamma_m = 998.23\ \frac{kgf}{m^3}$	$L_e = 210.00$
$\gamma_e = 1.00$	$S_p = 0.000248$
$\nu_p = \nu_m = 1.0066E-6\ \frac{m^2}{s}$	$\gamma_{s_p} = 2\ 702.6176\ \frac{kgf}{m^3}$
$(Ss-1)_p = 1.70741$	$\gamma_{s_m} = 2\ 674.8250\ \frac{kgf}{m^3}$
$(Ss-1)_m = 1.67957$	$(Ss-1)_e = 1.01658$

y sus velocidades de calda correspondientes, calculados con la ecuación propuesta por Rubey (ec 4.3), son

$$\begin{aligned}(\omega_{n_p}) &= 0.02520\ m/s \\(\omega_{n_m}) &= 0.03249\ m/s \\(\omega_{n_e}) &= 0.77559\ m/s\end{aligned}$$

Los datos que aquí se presentan son los que, generalmente, se tiene ó se pueden obtener de manera precisa para llevar a cabo un estudio es escalas adecuado.

Cabe destacar además que los datos que se utilicen para la aplicación de los diversos métodos para calcular escalas deben ser adecuadamente obtenidos, ya que de ellos dependerán los resultados, tanto en la selección de escalas como en el funcionamiento ad hoc del modelo que se diseñe.

Como se observa en la tabla 5.1, algunos datos de escala ya fueron calculados, dividiendo el valor de prototipo entre el de modelo correspondiente.

**Nota :**

Se empleará el método de Einstein-Chein tal como se presentó en el cap

3 considerando que la ecuación de la recta de prototipo que se requiere es

$$y = - 0.000483x + 19.092$$

Tabla 5.2 Análisis granulométrico

GRANULOMETRIA ( Distribución log-normal )				VELOCIDAD DE CAIDA ( ec. de Rubey )		
D <sub>n</sub>	D <sub>p</sub>	D <sub>n</sub>	D <sub>e</sub>	ω <sub>p</sub>	ω <sub>n</sub>	ω <sub>e</sub>
	real (en mm)	real (en mm)		(m/s)	(m/s)	
D <sub>5</sub>	0.07000	0.09262	0.75579	0.00441	0.00736	0.59914
D <sub>10</sub>	0.08176	0.11294	0.72390	0.00593	0.01053	0.56353
D <sub>15</sub>	0.09414	0.12747	0.73851	0.00772	0.01296	0.59551
D <sub>15.87</sub>	0.09848	0.13019	0.74109	0.00807	0.01342	0.60135
D <sub>20</sub>	0.10832	0.14387	0.75289	0.00994	0.01579	0.62964
D <sub>25</sub>	0.12432	0.15275	0.81386	0.01263	0.01735	0.72786
D <sub>30</sub>	0.14268	0.15820	0.90191	0.01583	0.01830	0.86503
D <sub>35</sub>	0.15775	0.16383	0.96286	0.01850	0.01929	0.95926
D <sub>40</sub>	0.17145	0.16967	1.01048	0.02092	0.02031	1.03033
D <sub>45</sub>	0.18634	0.17572	1.06045	0.02352	0.02136	1.10125
D <sub>50</sub>	0.20252	0.19830	1.02131	0.02628	0.02521	1.04236
D <sub>55</sub>	0.21352	0.21414	0.99709	0.02811	0.02784	1.01000
D <sub>60</sub>	0.21990	0.23528	0.93465	0.02916	0.03121	0.93427
D <sub>65</sub>	0.22647	0.25235	0.89744	0.03022	0.03383	0.89343
D <sub>70</sub>	0.23323	0.26911	0.86667	0.03130	0.03630	0.86228
D <sub>75</sub>	0.24020	0.29206	0.82245	0.03239	0.03953	0.81935
D <sub>80</sub>	0.24737	0.31100	0.79539	0.03350	0.04208	0.79607
D <sub>84.13</sub>	0.26390	0.33745	0.78205	0.03599	0.04547	0.79149
D <sub>85</sub>	0.26928	0.34330	0.78440	0.03678	0.04619	0.79619
D <sub>90</sub>	0.30690	0.37894	0.80989	0.04204	0.05042	0.83378
D <sub>95</sub>	0.37932	0.49631	0.76428	0.05103	0.06255	0.81589

## 5.2 DESARROLLO.

El primer tanteo se realizará de acuerdo a la relación

$$L_e = \frac{L_p}{L_n}$$

o sea

$$L_e = \frac{10 \cdot 250}{50} = 205$$

### 5.2.1 Método de la velocidad de caída

El primer método que se utilizará será el de *velocidad de caída* por ser el más simple de todos los métodos expuestos. Las velocidades de caída que se utilizarán serán las correspondientes al diámetro 50 de escala ( $D_{50}$ )<sub>e</sub> y al diámetro medio de escala ( $D_m$ )<sub>e</sub>, debido a que pueden considerarse como diámetros representativos de la granulometría en estudio. Así, usando la ec 4.1, se tiene :

- Para  $\omega_{50}$

$$H_e = \left[ \frac{205 (1.04236)}{1.00165^{1/2}} \right]^{2/3} = 35.72$$

y la distorsión correspondiente ( ec 2.4 ) es :

$$\delta = \frac{200}{35.72} = 5.60$$

- Para  $\omega_m$

$$H_e = \left[ \frac{205 (0.77559)}{1.00165^{1/2}} \right]^{2/3} = 29.33$$

y la distorsión ( ec 2.4 ) es

$$\delta = \frac{205}{29.33} = 7.00$$

De las dos escalas anteriores, la correspondiente al diámetro 50 es la más adecuada, pues permite una distorsión baja, aunque mayor a la que se recomienda para modelos de fondo móvil que es de 5.

Así, a partir de  $H_e = 35.72$  y  $L_e = 205$ , se obtienen los demás datos necesarios para la construcción del modelo

$$\text{Para } Q_p = 1000 \frac{m^3}{s}$$

$$Q_m = 22.83 \frac{l}{s}$$

$$L_m = 50.00 \text{ m}$$

De las mediciones realizadas en campo, se observó que el tirante máximo registrado fue de  $H_p = 5$  m, por lo que para tres diferentes tirantes se

tiene:

$$\begin{array}{ll} \text{Si } H_p = 1.0 \text{ m} & H_m = 2.80 \text{ cm} \\ H_p = 3.0 \text{ m} & H_m = 8.40 \text{ cm} \\ H_p = 5.0 \text{ m} & H_m = 14.00 \text{ cm} \end{array}$$

finalmente, como  $S_p = 0.000248$ , entonces  $S_m = 0.00142$

### 5.2.2 Método de la Curva de Shields.

Sustituyendo valores en la ec 4.4, se tiene que la escala de líneas, para  $D_{50}$ , es

$$H_e = \frac{205^{5/8}}{(1.02128)^{3/4} (1.01658)^{1/8}} = 27.36$$

y la distorsión es

$$\delta = \frac{205}{27.36} = 7.49$$

Ahora, si se utiliza  $D_m$  en la ec 4.4, la escala de líneas verticales es

$$H_e = \frac{205^{5/8}}{(0.80530)^{3/4} (1.01658)^{1/8}} = 32.70$$

y su distorsión ( ec 2.4 ) es

$$\delta = \frac{205}{32.70} = 6.27$$

En este caso, la distorsión más baja se obtiene utilizando el diámetro medio de escala de las granulometrías en estudio, y como el criterio de Shields únicamente señala que debe usarse el diámetro representativo de la granulometría, sin indicar cual en especial, se usará el  $D_m$ .

Los demás datos útiles, a partir de  $D_m$ , son :

$$\text{Para } Q_p = 1\,000 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

$$\begin{array}{l} Q_m = 26.07 \frac{\text{l}}{\text{s}} \\ L_m = 50.00 \text{ m} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Para } H_p = 1.0 \text{ m} \\ H_p = 3.0 \text{ m} \\ H_p = 5.0 \text{ m} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} H_m = 3.06 \text{ cm} \\ H_m = 9.17 \text{ cm} \\ H_m = 15.29 \text{ cm} \end{array}$$

### 5.2.3 Método de Altunin.

De acuerdo al método de Altunin,  $H_e$  se calcula con la expresión 4.9

$$H_e = 205 [H_e^{-2} (205) (1.02131) (1.01658)]$$

mediante tanteos, se obtiene que :

$$H_e = 19.525$$

cuya distorsión es :

$$\delta = 10.50$$

Los demás datos son :

$$\text{Para } Q_p = 1\,000 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

$$Q_m = 56.49 \frac{1}{\text{s}}$$

$$L_m = 50.00 \text{ m}$$

$$\text{Si } H_p = 1.00 \text{ m}$$

$$H_m = 5.12 \text{ cm}$$

$$H_p = 3.00 \text{ m}$$

$$H_m = 15.36 \text{ cm}$$

$$H_p = 5.00 \text{ m}$$

$$H_m = 25.61 \text{ cm}$$

$$\text{como } S_p = 0.000248$$

$$S_m = 0.00260$$

### 5.2.4 Método de Einstein-Chien.

De la ecuación dada al principio de éste capítulo se tiene que la ordenada al origen correspondiente a los datos del prototipo es

$$C_p = 19.092$$

a continuación se propone una ordenada al origen para modelo, en este caso se supondrá que  $C_m = 18$ ; así, la ordenada al origen de escala es

$$C_e = \frac{19.092}{18} = 1.061$$

Además se sabe que la pendiente, para ambas rectas es

$$m = -0.000483$$

Ahora, considerando que  $\Delta$  y  $\eta_e$  son iguales a 1, se despeja  $V_e^2$  de la ec 3.56, lo que resulta

$$V_e^2 = S_e H_e^{1+2m} D_e^{-2m} C_e^2 \quad (5.1)$$

de manera similar, se despeja  $V_e^2$  de la ec 3.59, o sea

$$V_e^2 = H_e g_e \quad (5.2)$$

Así, sustituyendo la ec 5.2 en la ec 5.1, se obtiene

$$H_e g_e = S_e H_e^{1+2m} D_e^{-2m} C_e^2 \quad (5.3)$$

y como

$$S_e = \frac{H_e}{L_e} \quad (3.71)$$

entonces, al sustituir la ec 5.71 en la ec 5.3 y despejando  $H_e$  sea llega la que

$$H_e = \left[ g_e L_e D_e^{2m} C_e^{-2} \right]^{1/(1+2m)} \quad (5.4)$$

al sustituir valores en ésta última expresión se obtiene  $H_e$

$$H_e = \left[ 1.00165 (250)(1.02131)^{-2(0.000483)} (1.061)^{-2} \right]^{1/0.999}$$

$$H_e = 183.44$$

Calculada  $H_e$  se calcula la velocidad de escala,  $V_e$  ( ec 2.30 )

$$V_e = (183.44)^{1/2} (1.00165)^{1/2}$$

$$V_e = 13.55$$

por lo que la velocidad en modelo es

$$V_m = \frac{0.850303}{13.72}$$

$$V_m = 0.063 \text{ m/s}$$

En forma similar se obtiene la pendiente de modelo :



$$S_m = \frac{0.000248}{0.5348} = 0.00028$$

así, el radio hidráulico total en modelo,  $(r_T)_m$ , es

$$(r_T)_m = H_m = \frac{H_p}{H_m}$$

es decir

$$(r_T)_m = \frac{2.48}{183.44}$$

$$(r_T)_m = 0.0135 \text{ m}$$

por lo que

$$x = \frac{(r_T)_m}{(D_{85})_m}$$

$$x = \frac{0.0135}{0.00025235}$$

$$x = 53.57$$

y

$$y = \frac{V_m}{\sqrt{(r_T)_m g_m S_m}}$$

$$y = \frac{0.063}{\sqrt{0.0135 (9.77958) (0.00028)}}$$

$$y = 10.363$$

con las coordenadas calculadas  $(x, y)$  se obtiene la ordenada al origen correspondiente

$$C_m = y - mx$$

$$C_m = 10.363 - [0.000483 (53.57)]$$

$$C_m = 10.39$$

Como el valor de  $C_m$  calculado (10.39) es diferente al  $C_m$  propuesto (18), se repite el procedimiento, empleando ahora  $C_m = 10.39$  para iniciar nuevamente el cálculo. En este caso, las demás iteraciones no se muestran aquí, pues el procedimiento es el mismo, por lo que en este trabajo sólo se indica la primer iteración.

El resultado final después de las iteraciones correspondientes es :

$$H_e = 4.13$$

la distorsión es

$$\delta = 49.64$$

$$\text{Para } Q_p = 1000 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

→

$$Q_n = 580.71 \text{ l/s}$$

$$L_n = 50.00 \text{ m}$$

$$\text{Si } H_p = 1.00 \text{ m} \rightarrow H_n = 24.21 \text{ cm}$$

$$H_p = 3.00 \text{ m} \rightarrow H_n = 72.64 \text{ cm}$$

$$H_p = 5.00 \text{ m} \rightarrow H_n = 121.06 \text{ cm}$$

como

$$S_p = 0.000248$$

→

$$S_n = 0.00028$$

### 5.2.8 Método de Maza-García.

Para verificar el tipo de régimen, y por consecuencia la ecuación a utilizar, se sustituyen valores en la ec 3.78

$$\frac{1}{S_p} = \frac{1}{0.000248} = 4032.26$$

y para el tirante máximo registrado ( $H_p = 5.00 \text{ m}$ ), se tiene

$$83.5 \left[ \frac{998.23 (5)}{(2702.6176 - 998.23)(0.0002639)} \right]^{0.35} = 2175.224$$

como  $\frac{1}{S} = 4032.26 > 2175.224$ , se tiene régimen inferior, por lo que se utilizará la ec 4.34.

$$H_e = (1.01658)^{0.7729} (1.00165)^{0.8475} (0.78204)^{1.0748} \frac{(205)^{0.7729}}{(1.04236)^{1.8949}}$$

o sea

$$H_e = 44.42$$

con una distorsión ( ec 2.4 ) de :

$$\delta = \frac{205}{44.42} = 4.61$$

por lo que

$$\text{Para } Q_p = 1000 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

$$Q_m = 16.42 \frac{1}{\text{s}} \\ L_m = 50.00 \text{ m}$$

Además

$$\text{Si } H_p = 1.0 \text{ m} \\ H_p = 3.0 \text{ m} \\ H_p = 5.0 \text{ m}$$

$$H_m = 2.25 \text{ cm} \\ H_m = 6.75 \text{ cm} \\ H_m = 11.26 \text{ cm}$$

y como

$$S_p = 0.00248$$

$$S_m = 0.00114$$

### 5.2.5.1 Ecuación de Garde-Ranga Raju.

Ahora, utilizando la ec 4.40 para la obtención de la escala de líneas verticales :

$$H_m = (1.02128)^{1/4} (205)^{3/4} = 54.46$$

a correspondiente distorsión ( ec 2.4 ) es :

$$\delta = \frac{205}{54.46} = 3.76$$

De tal manera que

$$\text{Para } Q_p = 1000 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

$$Q_m = 12.13 \frac{1}{\text{s}}$$

para los tirantes

$$\text{Si } H_p = 1.0 \text{ m} \\ H_p = 3.0 \text{ m} \\ H_p = 5.0 \text{ m}$$

$$H_m = 1.84 \text{ cm} \\ H_m = 5.51 \text{ cm} \\ H_m = 9.81 \text{ cm}$$

$$\text{Para } S_p = 0.00248$$

$$S_m = 0.00093$$

### 2.5.5.2. Método de ChiEmeke.

Utilizando la expresión 4.44 se obtiene la escala de líneas verticales de acuerdo al criterio de ChiEmeke :

$$H_e = \frac{205}{1} \exp \left( \left[ \frac{\frac{0.4}{0.0288}}{0.0246 (1704.3876) (0.00020252)^{-1}} - 1 \right] - \left[ \frac{\frac{0.4}{0.0288}}{0.0246 (1704.3876) (0.00020252)^{-1}} - 1 \right] \right)$$

o sea :

$$H_e = 202.25$$

y la distorsión ( ec 2.4 ) es :

$$\delta = 1.01$$

Los demás resultados se presentan a continuación

$$\text{Para } Q_p = 1\,000 \frac{m^3}{s}$$

$$Q_n = 1.69 \frac{l}{s}$$

$$L_n = 50.00 \text{ m}$$

$$\text{Si } H_p = 1.0 \text{ m}$$

$$H_n = 0.49 \text{ cm}$$

$$H_p = 3.0 \text{ m}$$

$$H_n = 1.48 \text{ cm}$$

$$H_p = 5.0 \text{ m}$$

$$H_n = 2.47 \text{ cm}$$

$$\text{como } S_p = 0.000248$$

$$S_n = 0.00025$$

### 5.3 OBSERVACIONES A LOS RESULTADOS OBTENIDOS CON $L_e = 205$ .

De los cálculos realizados con los diversos métodos presentados, se observa que :

1.- El método de ChiEmeke no es adecuado para seleccionar escalas en modelos fluviales que se requiera que sean distorsionados, debido a que proporciona escalas de líneas verticales muy altas, lo que origina que la distorsión correspondiente sea muy baja. El caso contrario es el que se presenta empleando el método de Einstein-Chien,

pues se obtiene una escala de líneas verticales muy pequeño, lo que en consecuencia origina distorsiones altas.

2.- Para este primer tanteo, los resultados más adecuados los proporciona el método de Maza-García, en su forma original y empleando la ecuación de Garde-Ranga Raju, pues obtienen escalas que permiten utilizar de manera óptima el espacio del que se dispone, además de obtener distorsiones dentro del rango permitido. Sin embargo, una de las curvas del tramo de río en estudio, no podría representarse totalmente, debido a que tiene un ancho de 3 150 m; lo más que se podría representar, usando el ancho máximo del laboratorio ( 15 m ), es de

$$B_p = 205 (15) = 3\ 075\text{m}$$

Por ese motivo, se hicieron tres tanteos más, para igual número de escalas de líneas horizontales ( $L_e = 200$ ,  $L_e = 210$  y  $L_e = 215$ ). Estos tanteos se realizaron con ayuda de una hoja de cálculo de Lotus, y los resultados se resumen en la tabla 5.3.

#### 5.4 OBSERVACIONES Y CONCLUSIONES.

---

##### OBSERVACIONES

---

De los cálculos realizados se observa lo siguiente :

a ) La escala de líneas horizontales más conveniente es la correspondiente a  $L_e = 210$ , pues permite, en el ancho máximo del laboratorio (15.0 m), representar totalmente la curva de río que se desea estudiar ( $B_p = 3\ 150$  m).

b ) El criterio que permite tener las escalas de líneas verticales más adecuadas a las características del laboratorio, empleando  $L_e = 210$ , es el de Maza-García en dos de sus tres modalidades (Cruickshank-Maza y Garde-Ranga Raju ).

Ahora bien, de las dos escalas de líneas verticales indicadas, la más adecuada es la que se obtiene con las ecuaciones propuestas por Garde-Ranga Raju, debido a los tirantes más bajos que se deben de presentar en el modelo, lo cual trae como consecuencia que el volumen de arena que se utilice sea menor, al que se obtendría con las otras

Tabla 5.3 Comparación de resultados.

L.		H.						
		Vel. de Caída	Shields	Altunin	Einstein Chien	Maza-García		
						C-M *	C-R R **	C ***
200	H.	35.14	26.94	19.29	4.09	43.58	53.46	197.32
	$\delta$	5.69	7.42	10.37	48.90	4.59	3.74	1.01
	V.	5.93	5.19	4.40	2.02	6.61	7.32	14.06
	B.	15.75	15.75	15.75	15.75	15.75	15.75	15.75
	Q.	23.98	35.73	58.97	603.99	17.36	12.78	1.80
	S.	0.00141	0.00184	0.00257	0.01213	0.00114	0.00093	0.00025
205	H.	35.72	27.36	19.53	4.13	44.42	54.46	202.25
	$\delta$	5.60	7.49	10.50	49.64	4.61	3.76	1.01
	V.	5.98	5.23	4.42	2.03	6.67	7.39	14.23
	B.	15.37	15.37	15.37	15.37	15.37	15.37	15.37
	Q.	22.83	34.06	56.49	580.71	16.42	12.13	1.80
	S.	0.00142	0.00186	0.00260	0.00028	0.00114	0.00093	0.00025
210	H.	36.30	27.77	19.77	4.16	45.26	55.46	207.19
	$\delta$	5.78	7.56	10.62	50.48	4.64	3.79	1.01
	V.	6.03	5.27	4.45	2.04	6.73	7.45	14.41
	B.	15.00	15.00	15.00	15.00	15.00	15.00	15.00
	Q.	21.75	32.51	54.13	560.77	15.63	11.52	1.60
	S.	0.00144	0.00188	0.00263	0.01252	0.00115	0.00094	0.00025
215	H.	36.88	28.19	20.00	4.19	46.09	56.44	212.12
	$\delta$	5.83	7.63	10.75	51.31	4.66	3.81	1.01
	V.	6.08	5.10	4.48	2.05	6.79	7.52	14.58
	B.	14.65	14.65	14.65	14.65	14.65	14.65	14.65
	Q.	20.75	31.06	51.96	541.85	14.85	10.96	1.50
	S.	0.00145	0.00189	0.00267	0.01273	0.00116	0.00094	0.00025

NOTAS : B es el ancho máximo por representar en modelo, en m.

Q es el gasto en modelo, en l/s, considerando que  
 $Q_p = 1000 \text{ m}^3/\text{s}$ .

S es la pendiente del modelo.

\* Ec de Cruickshank-Maza.

\*\* Ec de Garde-Ranga Raju.

\*\*\* Ec de ChiEneka.

Sin embargo la  $H_e = 55.46$  se recomienda sea un número cerrado, por lo que, de acuerdo a las características del laboratorio,  $H_e$  puede reducirse o aumentarse, dentro de un rango pequeño, de acuerdo al criterio y experiencia de la persona encargada de la selección de escalas.

De tal manera que puede optarse por 53, y a partir de allí, obtener los demás datos necesarios para la construcción del modelo correspondiente.

---

**CONCLUSION**

---

Del análisis realizado con los diferentes métodos expuesto en este trabajo, las escalas definitivas con las que se debe diseñar el modelo fluvial correspondiente son :

$$L_e = 210$$
$$H_e = 53$$

y las demás dimensiones necesarias por conocer, a partir de  $L_e$  y  $H_e$ , son:

Distorsión	$\delta = 3.96$
Longitud del modelo	$L_m = 48.81 \text{ m}$
Costo de modelo (para $Q_m = 1000 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$ )	$Q_m = 12.33 \text{ l/s}$
Tirante máximo en el modelo ( considerando que $H_p = 5\text{m}$ )	$H_m = 9.43\text{cm}$
Ancho máximo del modelo	$B_m = 15.00 \text{ m}$
Pendiente de modelo	$S_m = 0.00098$

## **8. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.**

La selección de escalas para construir un modelo fluvial de fondo móvil implica una metodología en la que, debido a los muchos factores que influyen sobre el escurrimiento de las aguas sobre cauces aluviales, todavía no ha sido posible establecer una ley única que relacione la fricción con la velocidad media del flujo y con el transporte de sedimentos; es decir, la interdependencia entre el gran número de variables involucradas hace extremadamente complejo el análisis de flujos sobre lechos arenosos.

Por este motivo, existe una gran diversidad de técnicas o métodos que se han formulado para este fin y que no tienen aún aceptación universal. Ello se debe principalmente a que algunos de sus resultados no concuerdan con los hechos; por lo que, cuando se está ante un problema real, resulta difícil decidir que técnica o método conviene utilizar, de ahí que la determinación de escalas sea más un arte que una ciencia, pues requiere de experiencia, habilidad y destreza para realizar adecuadamente tales predicciones.

Así por ejemplo, de las expresiones desarrolladas en el capítulo 4 para



calcular la escala de líneas verticales ( $H_v$ ), de acuerdo a cada método presentado en el capítulo 3, se observa que todas las expresiones son fáciles de evaluar, excepto las ecs 4.13 y 4.29 correspondiente al método de Altunin y al método de Einstein-Chien respectivamente, debido a que la primera se resuelve por iteraciones sucesivas, mientras que la segunda requiere calcular primero el gasto sólido total de escala ( $q_s$ ), el cual lleva implícita la escala de líneas verticales ( $H_v$ ); y la ordenada al origen de escala ( $C_s$ ), lo que hace complicado el cálculo.

Ahora bien, el método que debe emplearse no será el de la ecuación más sencilla, sino el que las características del modelo requiera. Así, cuando el modelo por construir es pequeño ( en escala, espacio disponible, capacidad de bombeo, etc. ), el material puede hacerse especialmente en forma, tamaño y material, de acuerdo al método que se requiera o se desee emplear; pero cuando el modelo por construir tiene dimensiones grandes, por ejemplo, el modelo que se presenta en el capítulo 5, cuyo tamaño ocupa una área aproximada de  $750 \text{ m}^2$  y en donde el material que se usará no puede ser fabricado especialmente, pues eso haría incoachable su construcción; entonces se hace necesario emplear material disponible cercano al laboratorio donde se ubicará el modelo. Cuando éste es el caso, se pueden hacer las siguientes observaciones :

- a ) Los métodos de la velocidad de caída, de la curva de Shields y de Altunin, obtienen escalas de líneas verticales relativamente bajas, lo que origina distorsiones un poco mayores a la recomendada ( $\delta \approx 5$ ).
- b ) Por el contrario, la ecuación de Chiemeka (Método de Maza-García) obtiene escalas de líneas verticales ( $H_v$ ) muy altas, lo que conduce a tener modelos con baja distorsión, o sea, modelos muy grandes que resultan caros o incoachables.
- c ) En el caso del método de Einstein-Chien, los resultados de  $H_v$  son muy bajos, por lo que se tienen distorsiones altas, fuera de toda proporción lógica. Debe recordarse que éste método no permite usar en el modelo, el mismo material arenoso del prototipo, sino uno con una densidad menor y un diámetro mayor.
- d ) Finalmente, el método de Maza-García, como originalmente fue propuesto - ecuaciones de Cruickshank-Maza - y después empleando

la ecuación de Garde-Ranga Raju, es el que proporciona los resultados más adecuados, pues las distorsiones que se presentan son menores a 5, permitiendo con ello una mejor interpretación de resultados. Además, éste método permite no sólo emplear el mismo material en modelo y prototipo, sino que también puede emplearse material de mayor o menor tamaño, así como de mayor o menor densidad.

De lo anterior se concluye que el método de Maza-García ( ecuaciones de Cruickshank-Maza y Garde-Ranga Raju ) es el que obtiene mejores resultados bajo diferentes características de material para la construcción de modelos. Sin embargo es necesario emplear varios métodos para con ello comparar resultados y así poder justificar la selección de escalas más adecuado, de acuerdo no sólo al fenómeno por estudiar, sino también al espacio disponible en donde se quiera construir el modelo y a la capacidad de bombeo que tenga el equipo a nuestra disposición.

Por lo anterior, se recomienda que la escala de líneas verticales se escoga procurando que la distorsión (  $\delta = L_p/H_p$  ) no sea mayor de 10 en modelos de fondo fijo y 5 en modelos de fondo móvii; que el gasto en el modelo pueda ser dado por el equipo del laboratorio y que se tenga el espacio disponible para su construcción. Casi siempre conviene hacer el estudio para tres o cuatro combinaciones de escalas y escoger la que cumpla más favorablemente con lo arriba mencionado.

Se recomienda además, el uso de los diagramas adimensionales, presentados en el cap 4 y que se basan en las expresiones desarrolladas en ese mismo capítulo, pues permiten, de manera práctica, conocer la escala de líneas verticales,  $H_p$ , así como la escala de gastos,  $Q_p$ , logrando con ello estudiar un mayor número de opciones para la selección adecuada de las escalas con las que se debe construir el modelo fluvial correspondiente.

## BIBLIOGRAFIA

- 1.- Manual de Diseño de Obras Civiles.  
A.2.15 "Técnicas experimentales"  
Comisión Federal de Electricidad  
México, 1983.
- 2.- Dinámica de los fluidos con aplicaciones en ingeniería.  
Dally, J. y Harleman D.  
Ed. Trillas. 2a. ed.  
México, 1981
- 3.- Hidrodinámica. Bases para hidráulica fluvial ( D-20 ).  
Maza Alvarez, J. y Garcia Flores, M.  
Instituto de Ingeniería, UNAM.  
México, 1984.
- 4.- Modelo Fluviales ( Serie azul No. 216 )  
Maza Alvarez, J. A.  
Instituto de Ingeniería, UNAM.  
México, 1969.
- 5.- Transport of sediment mixtures with large ranges of grain sizes.  
H. A. Einstein y Ning Chien.  
University of California.  
California 1953.
- 6.- Memorias del IV Congreso Nacional de Hidráulica.  
Obra de Encauzamiento del Rio Verde.  
Maza Alvarez J. A. y Garcia Flores, M.  
Acapulco.Gro., 1976.
- 7.- Modelo hidráulico del Rio Colorado, Informe ( Proyecto 9337 ).  
Garcia Flores, Manuel.  
Instituto de Ingeniería, UNAM.  
México, 1991.

8.- Fricción de cauces arenosos : estado del arte.

García Flores, Manuel.

Tesis ( Maestro de Ingeniería hidráulica ), UNAM.

México, 1982.