

00384

1  
24

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO  
FACULTAD DE CIENCIAS  
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

TESIS CON  
FALLA DE CRIGEN

Radmila Eugenia Liliana Bulajich Manfrino  
Doctorado en Ciencias (Matemáticas)  
Titulo: ESTRUCTURA FRACTAL DE LAS CUENCAS DE ATRACCION  
EN SISTEMAS BIESTABLES.  
1991



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## INDICE

1. Introducción	1
2. Dimensiones Fractales y la Función $f(\alpha)$	5
3. Estudio de un Sistema Disipativo y un Sistema "Hamiltoniano"	6
4. Cuencas de Atracción de Sistemas Biestables	51
Apéndice del Capítulo 4	64
5. Conclusiones	73

## RESUMEN DE LA TESIS TITULADA:

### FRactal Structure of Basins of Attraction in Bistable Systems.

RADMILA EUGENIA LILIANA BULAJICH MANFRINO

The study of nonlinear dynamical systems may be complicated by the fact that different initial conditions in phase space may generate orbits with different asymptotic states; that is, there are dynamical systems that may have more than one attractor.

The basin of an attractor is the set of initial conditions whose trajectories approach that attractor as time increases. In systems that present more than one attractor, there are points that do not reach any of the attractors and that separate the basin of one of the attractors from the basin of the others; those points are called boundary points, and they may form a smooth curve or a nondifferentiable curve, i.e. a fractal.

In many physical systems the presence of more than one steady state has been observed. In these systems, the study of the boundary, between the initial states that converge to one steady state and the ones that converge to others steady states, may provide some insight into their behavior. In order to exploit this possibility, it is necessary to develop ways to characterize and compare the fractal structures of those boundaries.

*Ref. 1, 2*

In chapter 2 we introduce an extensively used technique to characterize complex objects is the study of the so called  $f(\alpha)$  curve<sup>1</sup>. The  $f(\alpha)$  function contains the same information as the set of generalized dimensions  $D_q$  defined by H.G.E. Hentschel and I. Procaccia<sup>2</sup>. In chapter 3, we introduce the systems that we shall analyse: the sine circle map and the Sinai billiard. In chapter 4 we give a brief introduction of the study of the boundary between basins of attraction of the sine circle map and of a Modified Sinai billiard which has bistability. Then we calculate the  $f(\alpha)$  function of the fractal boundaries. Finally we state our conclusions.

#### REFERENCES.

- [1] T. Hasley, M.H. Jensen, L.P. Kadanoff, I. Procaccia and B.I. Shraiman, Phys. Rev. A33 (1986) 1141.  
[2] H.G.E. Hentschel and I. Procaccia, Physica 8D (1983) 435.

## 1. INTRODUCCION

¿Por qué causa en primavera vemos nacer la rosa, en estío los frutos sazonados, y las viñas en los días hermoso del otoño? ... sentemos nada que sin principios puede existir.

De la Naturaleza

Lucrecio.

En los últimos años la resolución numérica de sistemas de ecuaciones no lineales ha mostrado que la dependencia sensitiva de condiciones iniciales no es una propiedad excepcional, sino por el contrario, es una propiedad común a estos sistemas. Esta dependencia respecto de las condiciones iniciales es una característica de un comportamiento "caótico" del sistema. Este comportamiento ha surgido en una gran variedad de fenómenos naturales, físicos y químicos, tales como circuitos electrónicos, el paso a la turbulencia de fluidos y gases, las reacciones químicas y células cardíacas donde se aplica un estímulo periódico.

La palabra caos - utilizada para englobar las características propias de estos sistemas - por si misma puede ser conflictiva, tomando significados no del todo coincidentes. Gleick<sup>[1]</sup>, en su libro, mezcla anécdotas con explicaciones acerca de los temas que abarca la palabra caos en nuestro contexto, y nos da algunos intentos de demarcación del objeto de estudio de esta disciplina:

"Las órbitas atractoras, complicadas y aperiódicas (en general de dimensión baja) de ciertos sistemas dinámicos". Phillip Holmes.

"Un tipo de orden sin periodicidad ... Una nueva y ubicuita clase de fenómenos naturales". Hao Bai-Lin.

"Comportamiento aparentemente azoroso en un sistema determinista (en el sentido de lo que cabe esperar en un reloj) sencillo". H. Bruce Stewart.

"El comportamiento irregular y no predecible de sistemas dinámicos deterministas y no lineales". R.V. Jensen.

"Dinámica con entropía métrica positiva y finita. Matemáticas que traducidas significan: comportamiento que produce información (amplifica pequeñas incertidumbres), pero que no es completamente impredecible". J. Crutchfield.

"Dinámica liberada de las cadenas del orden y la predictibilidad ... sistemas habilitados para explorar azarosamente todas sus posibilidades dinámicas". J. Ford.

Para otros, como John Hubbard, la palabra caos daba una visión engañosa si con ella se aludía al estudio de sistemas

complejos, debido sobre todo a que el vocablo sugiere la presencia del azar. Su opinión la ilustra apelando a la infinita variedad en el detalle que posee el conjunto de Mandelbrot, el cual ciertamente es muy complicado, pero que se genera sin que haya elementos azarosos involucrados. La lección se resume señalando que la naturaleza es capaz de generar estructuras de gran complejidad sin que en el proceso participe el azar. La no linealidad y la retroalimentación bastan para codificar y desarrollar estructuras tan ricas como el cerebro humano.

La experiencia de estos años ha ido delineando lo que resulta relevante, y se puede decir que actualmente hay consenso en cuanto a llamar caótico al movimiento característico de sistemas deterministas que se comportan azarosamente. La aparente contradicción de términos se desvanece si consideramos que determinismo en este contexto significa que las órbitas de un sistema clásico existen y son únicas, lo cual queda establecido mediante los teoremas de existencia y unicidad adecuados. Sin embargo estos teoremas en general no "construyen" las soluciones y por lo tanto no afirman nada acerca de las órbitas que definen. En particular no impiden que las órbitas pasen cualquier prueba a que se someta para calificarlas de azarosas, lo cual hace que éstas sean completamente indistinguibles de las asociadas a un proceso que verdaderamente lo sea. Es en este sentido que se debe entender el concepto de determinismo azaroso, con lo cual resulta que una órbita estrictamente determinista puede a su vez ser "completamente impredecible".

No se puede agotar una presentación general de algunos de los elementos involucrados en el estudio de los sistemas complejos si no se menciona esa fuente de formas extrañas que es lo fractal. En el contexto de los sistemas dinámicos esta noción surge al intentar clasificar y entender las representaciones gráficas de la dinámica de un sistema.

El estudio de los conjuntos fractales ha seguido directrices sugeridas por muchas otras disciplinas, pero no hay que olvidar que en el nuevo mundo que surgió de las exploraciones por computadora del espacio fase, la calidad fractal de los atractores extraños mostró una naturaleza en cierta forma constreñida en sus posibilidades. El desorden se canalizaba no en cualquier dirección, sino siguiendo patrones sujetos a reglas bien establecidas. Esto proveyó a los exploradores del caos de un programa por desarrollar: i) la búsqueda de atractores extraños dondequiera que la naturaleza pareciera que se comporta azarosamente. ii) la clasificación de estos atractores en términos de su dimensión fractal.

Una vez hecha esta presentación general procede ahora enfocar aspectos más concretos que sirvieron de guía para el trabajo contenido en esta tesis y señalar el contenido de la misma.

El estudio de las propiedades dinámicas de modelos matemáticos generalmente ha consistido en encontrar soluciones de equilibrio y luego hacer un análisis lineal para determinar

su estabilidad respecto a pequeñas perturbaciones: su dinámica no lineal no había sido considerada de manera explícita.

Estudios recientes muestran, sin embargo, que la más simple ecuación diferencial no lineal puede poseer un comportamiento dinámico extraordinariamente rico, mostrando desde puntos estables hasta un régimen en el cual el comportamiento (aunque determinista) es "caótico".

En el régimen caótico se han observado comportamientos transitorios seguidos de órbitas asintóticas que van a uno o más atractores en el espacio fase, es decir, subconjuntos del espacio a los cuales las órbitas convergen. Se puede dar una clasificación de los distintos grados de complejidad observando la estructura geométrica del atractor. Por ejemplo, se pueden ver puntos fijos, ciclos límite (atractores periódicos), atractores cuasiperiódicos o atractores extraños. Para los sistemas que poseen más de un atractor el estudio de la frontera entre los estados iniciales que convergen a un atractor y los que convergen a otros puede ayudarnos a entender su comportamiento. Los puntos frontera entre los atractores pueden formar una curva suave o curvas con estructura fina, en algunos casos fractales. Para estudiar conjuntos fractales ha sido necesario desarrollar técnicas para caracterizarlos; por su propia naturaleza, muchas de estas técnicas provienen de consideraciones estadísticas. El estudio de las estructuras de las fronteras entre los atractores puede resultar importante al hacer un análisis comparativo entre distintas situaciones experimentales o entre experimentos de sistemas físicos multi-estables y modelos matemáticos, intentando con ello ir más allá de la mera predicción de la multi-estabilidad.

En los últimos años una técnica ampliamente utilizada para caracterizar objetos complejos es el estudio de la función  $f(\alpha)$ <sup>(2)</sup>. La función  $f(\alpha)$  contiene la misma información que el conjunto de dimensiones generalizadas  $D_q$  definidas por A. Renyi<sup>(3)</sup> y utilizadas por primera vez, en el contexto de los sistemas dinámicos, por H.G.E. Hentschel e I. Procaccia<sup>(4)</sup>. A los objetos que poseen una curva  $f(\alpha)$  no trivial se les conoce como multifractales.

En este trabajo calculamos la función  $f(\alpha)$  para la frontera de las cuencas de atracción de dos sistemas biestables - que físicamente tienen comportamientos distintos - con el objeto de estimar si puede ser utilizada para hacer comparaciones entre distintos procesos dinámicos.

Las primeras siete secciones del capítulo 2, son una introducción a la teoría de la medida y el concepto de dimensión que se ha utilizado para caracterizar conjuntos fractales. Posteriormente presentamos el formalismo propuesto por T. Hasley et al.<sup>(2)</sup> para caracterizar estructuras fractales de objetos complejos, a saber la función  $f(\alpha)$ . En este capítulo proponemos también un nuevo método para el cálculo de la función  $f(\alpha)$  y probamos la validez de este nuevo método en un conjunto de Cantor de dos escalas. En el capítulo 3, se introducen los sistemas con los que trabajaremos: el mapeo del

circulo y el billar de Sinai. Como es bien sabido, el mapeo del circulo ha servido como un modelo para estudiar sistemas que poseen un dinámica disipativa; el billar de Sinai, en cambio, es un sistema Hamiltoniano. En el capítulo 4 se hace una breve introducción al estudio de la frontera entre las cuencas de atracción del mapeo del circulo y de una modificación del billar de Sinai que presenta biestabilidad. Posteriormente se calcula la función  $f(x)$  para la frontera de las cuencas de atracción de ambos sistemas. Finalmente damos nuestras conclusiones.

#### REFERENCIAS

- [1] J. Gleick, Chaos, Viking Press (1987).
- [2] T. Hasley, M.H. Jensen, L.P. Kadanoff, I. Procaccia and B.I. Shraiman, Phys. Rev. A 33, 1141 (1986).
- [3] A. Renyi, Probability Theory, North Holland, Amsterdam (1970).
- [4] H.G.E. Hentschel and I. Procaccia, Physica 8 D, 435 (1983).



## 2. DIMENSIONES FRACTALES Y LA FUNCION $f(x)$

En este capítulo hablaremos primero del concepto de dimensión que es uno de los conceptos utilizados para caracterizar regímenes caóticos. Posteriormente definiremos la función  $f(x)$  que está íntimamente relacionada con este concepto y por último veremos un ejemplo donde se aplica una técnica nueva para el cálculo de la función  $f(x)$ . Una técnica similar fue publicada posteriormente por A. Chhabra y R.V. Jensen<sup>[1]</sup>.

La dimensión es un concepto importante ya que nos provee de un método preciso para hablar del número de variables independientes inherentes al sistema. Este concepto se ha ido desarrollando lentamente desde el siglo pasado cuando

Poincaré<sup>[2]</sup> dió sus primeras definiciones. Sin embargo aplicaciones prácticas de estas nociones se han dado con la evolución de las computadoras que han permitido generar técnicas para calcular la dimensión de objetos complejos.

Las distintas definiciones de dimensión pueden clasificarse en dos grupos, el primero se deriva de aspectos únicamente geométricos mientras que el segundo relacionado con la teoría de la información. En las primeras secciones damos algunas nociones básicas de teoría de la medida<sup>[3,4]</sup> que nos permitirán dar una descripción del primer grupo pero antes daremos algunas definiciones preliminares.

### 2.1 Definiciones

La idea fundamental de la teoría de sistemas dinámicos es entender el comportamiento de un proceso iterativo o de un proceso que varía con el tiempo. Si el proceso es una ecuación diferencial cuya variable independiente es el tiempo, entonces la teoría de sistemas dinámicos pretende predecir el comportamiento de las soluciones de la ecuación diferencial en un futuro lejano ( $t \rightarrow \infty$ ) o en un pasado distante ( $t \rightarrow -\infty$ ). Si el proceso es discreto como las iteradas de una función  $\phi$ , entonces la teoría pretende entender el comportamiento de los puntos  $x, \phi(x), \phi^2(x), \dots, \phi^n(x)$  para  $n$  suficientemente grande o pequeña ( $n \rightarrow \pm\infty$ ). Definiremos estos conceptos con más precisión.

Consideremos una ecuación diferencial como un sistema

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = f(x) \quad (2.1)$$

donde  $x = x(t) \in X$  es una función definida en  $\mathbb{R}$  y con valores en  $X$  un espacio métrico de dimensión  $n$  (la variable independiente es generalmente el tiempo). La función  $f: U \rightarrow X$  es una función suave definida en un abierto  $U \subseteq X$ . Decimos que el campo vectorial  $f$  genera un flujo  $\psi_t: U \rightarrow X$ , donde

$\psi_t(x) = \psi(x, t)$  es una función suave para toda  $x \in U$  y  $t$  en algún intervalo  $I = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ , y  $w$  satisface la ecuación (2.1) en el sentido que

$$\frac{d}{dt} (\psi(x, t)) \Big|_{t=\tau} = f(\psi(x, \tau))$$

para toda  $x \in U$  y  $\tau \in I$ . Es fácil ver que  $\psi$  satisface las siguientes propiedades:

- i)  $\psi = id$
- ii)  $\psi_{s+t} = \psi_s \circ \psi_t$ .

En general, si tenemos como condición inicial  $x(0) = x_0 \in U$ , buscamos una solución

$$\psi(x_0, 0) = x_0.$$

En este caso  $\psi(x_0, \cdot): I \rightarrow X$  define una *curva solución* o una *órbita* de la ecuación diferencial basada en  $x_0$ . El teorema de existencia y unicidad nos asegura que la solución existe y es única<sup>[5]</sup> para el caso de sistemas de ecuaciones lineales, en el caso de sistemas no lineales nos asegura que existe un flujo local, es decir, para  $t$  en una pequeña vecindad.

**Definición 2.1** Un sistema dinámico sobre  $X$  es una tripleta  $(X, \mathbb{R}, \psi)$  donde  $\psi$  satisface las propiedades anteriores.

Dado un sistema dinámico sobre  $X$ , al espacio  $X$  y al flujo  $\psi$  se les conoce como el "espacio fase" y "el mapeo fase" (del sistema dinámico) respectivamente.

Si en la ecuación (2.1), consideramos que la función  $f$  está dada en términos de una matriz  $A$  de  $(n \times n)$  con coeficientes constantes, es decir, tenemos

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = Ax \quad \text{con } x \in X. \quad (2.2)$$

Por una solución de (2.2) entendemos una función vectorial  $x(x_0, t)$  que depende de  $t$  y con condición inicial  $x(0) = x_0$ . En términos del flujo  $\psi_t$ , tenemos que  $x(x_0, t) = \psi_t(x_0)$ . La solución de la ecuación (2.2) está dada por

$$x(x_0, t) = e^{tA} x_0,$$

donde  $e^{tA}$  es una matriz  $(n \times n)$  obtenida tomando la exponencial de  $A^{[5]}$ . Si fijamos  $t = \tau$  y hacemos  $e^{\tau A} = B$ , entonces  $B$  es una matriz con coeficientes constantes y la ecuación en diferencias

$$x_{n+1} = B x$$

es un sistema dinámico discreto obtenido del flujo de (2.2). Similarmente un sistema no lineal y su flujo dan lugar a un mapeo no lineal

$$x_{n+1} = G(x_n)$$

donde  $G = \psi_t$  es una función vectorial no lineal (5).

## 2.2 Teoría de la Medida.

Consideremos un conjunto  $X$ . Una colección no vacía  $S$  de subconjuntos de  $X$  se denomina una  $\sigma$ -álgebra si  $X \in S$ ,  $S$  es cerrado bajo complementación y bajo la unión numerable, es decir, si  $E \in S$  entonces  $X \setminus E \in S$  y si  $E_1, E_2, \dots \in S$  entonces  $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in S$ . Las siguientes propiedades se derivan directamente de la definición.

**Teorema 2.2** La intersección numerable de subconjuntos de  $S$  está en  $S$ . El conjunto vacío,  $\emptyset$ , está en  $S$ .

Una medida  $\mu$  es una función definida en una  $\sigma$ -álgebra  $S$  de subconjuntos de  $X$  con valores en el intervalo  $[0, \infty]$  tal que

$$\mu(\emptyset) = 0 \tag{2.3}$$

y

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) \tag{2.4}$$

para toda sucesión numerable de conjuntos ajenos ( $E_i$ ) en  $S$ .

Se deriva de la ecuación (2.4) que  $\mu$  es una función creciente, es decir, si  $E \subset E'$  y  $E, E' \in S$  entonces  $\mu(E) \leq \mu(E')$ .

Ahora introducimos medidas exteriores que son esencialmente una medida con la propiedad (2.4) relajada. Formalmente, una medida exterior  $\nu$  en un conjunto  $X$  es una función definida en todos los subconjuntos de  $X$  con valores en  $[0, \infty]$  tal que

$$\nu(\emptyset) = 0 \tag{2.5}$$

$$\nu(A) \leq \nu(A') \quad \text{si } A \subset A' \tag{2.6}$$

$$\nu \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i) \quad (2.7)$$

para cualesquiera subconjuntos  $(A_i)$  de  $X$ .

Una propiedad importante de la medida exterior es que, dada una medida exterior siempre existe una  $\sigma$ -álgebra de subconjuntos de  $X$  tal que restringida a este es una medida.

Un subconjunto  $E$  de  $X$  se dice que es  $\nu$ -medible o medible con respecto a  $\nu$  si descompone cualquier subconjunto de  $X$  aditivamente, esto es, si

$$\nu(A) = \nu(A \cap E) + \nu(A \setminus E) \quad (2.8)$$

para todo  $A \subset X$ . Es fácil ver que si  $\nu(E) = 0$  entonces  $E$  es  $\nu$ -medible.

**Teorema 2.3** Tomemos una medida exterior  $\nu$ . La colección  $\mathcal{M}$  de subconjuntos  $\nu$ -medibles forman un  $\sigma$ -álgebra y  $\nu$  restringida a  $\mathcal{M}$  es una medida.

Consideremos  $(X, d)$  un espacio métrico. Los conjuntos de Borel son aquellos que pertenecen a la más pequeña  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{B}$  en  $X$  tal que todo conjunto abierto en  $X$  pertenece a  $\mathcal{B}$ . Se puede demostrar que esta  $\sigma$ -álgebra existe. En particular, los conjuntos cerrados son conjuntos de Borel (ya que por definición son el complemento de los conjuntos abiertos), y también son conjuntos de Borel las uniones numerables de conjuntos cerrados ( $F_\sigma$ -conjuntos) y las intersecciones numerables de conjuntos abiertos ( $G_\delta$ -conjuntos).

Una medida exterior  $\nu$  en  $X$  se denomina una medida métrica exterior si

$$\nu(E \cup F) = \nu(E) + \nu(F) \quad (2.9)$$

si  $E$  y  $F$  están positivamente separados, es decir, si

$$d(E, F) = \inf \{d(x, y) : x \in E, y \in F\} > 0.$$

**Teorema 2.4** Si  $\nu$  es una medida métrica exterior en  $(X, d)$ , entonces todos los subconjuntos de Borel de  $X$  son  $\nu$ -medibles. (Para la demostración véase [3]).

### 2.3 Medida de Lebesgue.

Daremos ahora la definición de la medida de Lebesgue y de aquí en adelante consideraremos que el espacio  $X = \mathbb{R}^n$  y  $d$  es la métrica Euclídeana.

Obtenemos la definición de la medida  $n$ -dimensional de

Lebesgue como una extensión de la definición usual de volumen en  $\mathbb{R}^n$  (en  $\mathbb{R}$  el volumen querrá decir longitud y en  $\mathbb{R}^2$  área).

Sea  $C$  una celda en  $\mathbb{R}^n$  definida por

$$C = [a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times \dots \times [a_n, b_n),$$

donde  $a_i < b_i$  para toda  $i$ . Definimos, en forma usual, el volumen de  $C$  como

$$V(C) = (b_1 - a_1) (b_2 - a_2) \dots (b_n - a_n).$$

Si  $E \subset \mathbb{R}^n$ , sea

$$L^n(E) = \inf \sum_1 V(C_i), \quad (2.10)$$

donde el infimo lo tomamos sobre todas las posibles cubiertas de  $E$  formadas por una sucesión  $\{C_i\}$  de celdas, es fácil demostrar que  $L^n$  es una medida exterior en  $\mathbb{R}^n$ . A esta medida le llamamos la medida exterior  $n$ -dimensional de Lebesgue. Se puede ver que  $L^n(E)$  es una medida métrica exterior, basta considerar a  $E$  como una  $n$ -celda. La restricción de  $L^n$  a conjuntos  $L^n$ -medibles es llamada la medida de Lebesgue  $n$ -dimensional.

Para conjuntos convexos en  $\mathbb{R}$  la medida de Lebesgue y la medida de Hausdorff, que definiremos en la próxima sección, coinciden. En  $\mathbb{R}^n$  estas medidas difieren únicamente por una constante<sup>[3]</sup>. Sin embargo este no es el caso para conjuntos cuya geometría es más compleja. En este trabajo estamos interesados en estudiar los conjuntos que tienen geometrías complejas, a algunos de estos conjuntos actualmente se les conoce como fractales. Estos conjuntos se caracterizan por tener la propiedad de autosimilaridad o escalamiento. Es decir, dado un conjunto fractal  $E$ , construimos una cubierta del conjunto. Si nos fijamos en uno de los elementos de la cubierta y la amplificamos veremos que construyendo una cubierta igual a la anterior pero con otra escala podremos cubrir a todos los puntos que están en este elemento de la cubierta y que pertenecen al fractal.

B. Mandelbrot<sup>[6]</sup> define un fractal como un objeto cuya dimensión fractal (sección 2.6) es mayor que su dimensión topológica. Definiremos ahora lo que entendemos por dimensión topológica.

Sea  $A$  un conjunto compacto. La dimensión topológica de  $A$  es el mínimo entero  $n$  para el cual la siguiente afirmación es verdadera: Para toda cubierta abierta y finita,  $\sigma_1, \dots, \sigma_N$ , de  $A$  podemos encontrar otra cubierta  $\sigma'_1, \dots, \sigma'_M$  tal que  $\sigma'_i \subset \sigma_i$

para  $i = 1, \dots, N$  y cualesquiera  $n + 2$  conjuntos  $\sigma_i'$  tiene intersección vacía, es decir:

$$\sigma_1' \cap \sigma_2' \cap \dots \cap \sigma_{n+2}' = \emptyset$$

En la sección 2.5, damos algunos ejemplos donde la medida de Hausdorff y la medida de Lebesgue son distintas.

#### 2.4 Medida de Hausdorff.

Definiremos ahora la medida de Hausdorff<sup>(8)</sup>. Si  $U$  es un subconjunto no vacío de  $\mathbb{R}^n$  definimos el diámetro de  $U$ , que denotamos por  $|U|$ , como

$$|U| = \sup \{ |x-y| : x, y \in U \}.$$

Si  $E \subset \bigcup_i U_i$  y  $0 < |U_i| < \delta$  para cada  $i$ , decimos que  $\{U_i\}$  es una  $\delta$ -cubierta de  $E$ .

Consideremos un subconjunto acotado,  $E$ , de  $\mathbb{R}^n$  y  $s$  un entero no-negativo. Para  $\delta > 0$  definimos

$$H_\delta^s(E) = \inf \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s, \quad (2.11)$$

donde el infimo lo tomamos sobre todas las  $\delta$ -cubiertas,  $\{U_i\}$ , numerables de  $E$ . Se puede ver fácilmente que  $H_\delta^s(E)$  es una medida exterior en  $\mathbb{R}^n$ .

La medida exterior  $s$ -dimensional de Hausdorff de un conjunto  $E \subset \mathbb{R}^n$  está dada por

$$H^s(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0} H_\delta^s(E) = \sup_{\delta > 0} H_\delta^s(E). \quad (2.12)$$

Este límite existe, pero puede ser infinito, ya que  $H_\delta^s(E)$  crece a medida que  $\delta$  decrece. Es fácil ver que  $H^s(E)$  es una medida exterior, más aún es métrica; ya que si  $\delta$  es menor que la distancia entre los conjuntos  $E$  y  $F$  separados positivamente, ningún conjunto en la  $\delta$ -cubierta de  $E \cup F$  puede intersectar a ambos conjuntos, por tanto

$$H_\delta^s(E \cup F) = H_\delta^s(E) + H_\delta^s(F),$$

de aquí se sigue la misma igualdad para  $H^s$ . La restricción de  $H^s$  a una  $\sigma$ -álgebra de conjuntos  $H^s$ -medibles es la medida  $s$ -dimensional de Hausdorff.

Para cualquier subconjunto  $E$  es claro que  $H^s(E)$  es no

creciente a medida que  $s$  se incrementa de 0 a  $\infty$ , ya que si  $\delta < 1$ ,  $|U_i| < \delta$ , para cada  $i$ , entonces el  $\inf \sum |U_i|^s$  no crece. Si además  $s < t$  tenemos

$$|U_i|^s = |U_i|^t |U_i|^{s-t} \geq |U_i|^t \delta^{s-t}$$

de donde

$$\inf \sum |U_i|^s \geq \inf \sum |U_i|^t \delta^{s-t},$$

por tanto

$$H_\delta^s(E) \geq \delta^{s-t} H_\delta^t(E).$$

De esta última desigualdad tenemos que si  $H^t(E)$  es positiva entonces  $H^s(E)$  es infinita. Luego existe un único valor,  $\dim E$ , al que llamamos la dimensión de Hausdorff de  $E$  y la denotamos por  $D_H$ , tal que

$$H^s(E) = \infty \quad \text{si } 0 \leq s < D_H,$$

(2.13)

$$H^s(E) = 0 \quad \text{si } D_H < s < \infty.$$

Si  $H^s(E) = 0$  para toda  $s$  entonces  $D_H = 0$ .

Si  $C$  es un cubo unitario contenido en  $\mathbb{R}^n$  y dividimos  $C$  en  $k^n$  sub-cubos de lado  $1/k$ . Tenemos que si  $\delta \geq (1/k)n^{1/2}$  entonces  $H^n(C) \leq k^n (k^{-1}n^{1/2})^n = (n^{1/2})^n$ , por lo tanto  $H^n(C) < \infty$ . Luego si  $s > n$ , entonces  $H^s(C) = 0$  y  $H^s(\mathbb{R}^n) = 0$ , ya que  $\mathbb{R}^n$  lo podemos expresar como una unión numerable de estos cubos. De aquí se sigue que  $0 \leq \dim E \leq n$  para cualquier  $E \subseteq \mathbb{R}^n$ . Es también claro que si  $E \subset E'$  entonces  $\dim E \leq \dim E'$ .

## 2.5 Ejemplos.

Es a veces muy difícil determinar la dimensión de Hausdorff de un conjunto y más difícil aún determinar la medida de Hausdorff. En esta sección haremos un cálculo aproximado de la medida y dimensión de Hausdorff para algunos conjuntos conocidos. Además, para algunos de los ejemplos calcularemos la medida de Lebesgue y veremos que difiere de la medida de Hausdorff.

Consideremos el conjunto de Cantor usual,  $E$  definido como sigue. Sea  $E_0 = [0, 1]$ ,  $E_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$ ,  $E_2 = [0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1]$ , etc., donde  $E_{j+1}$  se obtiene eliminando el tercio central de cada intervalo en

$E_j$ . Definimos  $E = \bigcap_{j=1}^{\infty} E_j$ . La medida de Lebesgue de este conjunto es cero. Calculemos ahora la medida de Hausdorff. En el primer paso tenemos dos intervalos de longitud  $l = 1/3$ , en el segundo paso hay  $2^2$  intervalos de longitud  $l = 1/3^2$  y en el paso  $n$  tenemos  $2^n$  intervalos de longitud  $l = 1/3^n$ . Entonces la medida de Hausdorff esta dada por

$$\begin{aligned}
 H^s(E) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{2^n} (1/3^n)^s = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n (1/3^n)^s = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} (2/3^s)^n = \begin{cases} 0 & \text{si } 2/3^s < 1 \\ 1 & \text{si } 2/3^s = 1 \\ \infty & \text{si } 2/3^s > 1. \end{cases}
 \end{aligned}$$

La dimensión de Hausdorff es entonces el valor de  $s$  tal que  $2/3^s = 1$ . Es decir,  $s = \ln 2 / \ln 3 = 0.6309\dots$ . Donde  $\ln$  denota el logaritmo en base  $e$ .

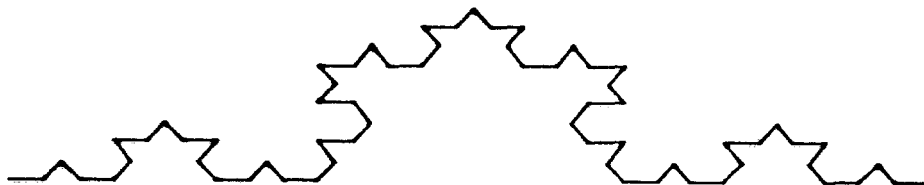


Figura 1.- Una aproximación a la Curva de Koch.

Un ejemplo, donde la medida de Lebesgue es infinita y la medida de Hausdorff es uno, es la curva de Koch, que denotaremos por  $K$ . Consideremos el intervalo unitario  $[0,1]$ .



En el primer paso, dividimos el intervalo en tres partes iguales. El tercio central lo sustituimos por dos segmentos de longitud un tercio (vease la figura 1). Nuevamente dividimos cada segmento de recta en tres partes iguales, el tercio central de cada segmento lo sustituimos por dos segmentos de longitud  $1/3^2$ . Tendremos entonces  $4^2$  segmentos de longitud  $1/3^2$ . Continuando este proceso, tendremos en el n-ésimo paso  $4^n$  segmentos de longitud  $1/3^n$ . De donde, la dimensión de Hausdorff esta dada por

$$H^s(K) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{4^n} \left( \frac{1}{3^n} \right)^s =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{4}{3^s} \right)^n = \begin{cases} 0 & \text{si } 4/3^s < 1 \\ 1 & \text{si } 4/3^s = 1 \\ \infty & \text{si } 4/3^s > 1 \end{cases}$$

La dimensión de Hausdorff es el valor de  $s$  para el cual  $4/3^s = 1$ , es decir,  $s = \ln 4 / \ln 3 = 1.26185\dots$

La longitud de la curva es infinita, es decir, la medida de Lebesgue del conjunto es infinita.

## 2.6 Dimensión Fractal o de Capacidad.

Empezaremos definiendo la dimensión fractal o de capacidad. Consideremos un conjunto compacto  $E$  contenido en  $\mathbb{R}^n$ . Sea  $\epsilon > 0$ . Denotamos por  $B(x, \epsilon)$  la bola cerrada de radio  $\epsilon$  y centro en  $x \in \mathbb{R}^n$ . Definimos el entero,  $N(E, \epsilon)$  como el menor número de bolas cerrada de radio  $\epsilon$  necesarias para cubrir el conjunto  $E$ . Es decir,

$$N(E, \epsilon) = \text{mínimo entero positivo } M \text{ tal que } E \subset \bigcup_{n=1}^M B(x_n, \epsilon)$$

para algún conjunto de puntos distintos  $\{x_n : n = 1, 2, \dots, M\} \subset X$ .

$N(E, \epsilon)$  existe ya que para cada punto  $x \in E$  construimos una bola abierta de radio  $\epsilon > 0$ . Esto define una cubierta abierta de  $E$ . Como  $E$  es compacto, podemos extraer una subcubierta abierta finita que consista en digamos  $M$  bolas abiertas. Tomando la cerradura de cada bola tenemos una cubierta formada por  $M$  bolas cerradas. Sea  $C$  el conjunto de cubiertas de  $E$  que tienen a lo más  $M$  bolas de radio  $\epsilon$ . Entonces  $C$  tiene al menos un elemento. Definimos  $f: C \rightarrow \{1, 2, \dots, M\}$  como  $f(c) =$  número de bolas en la cubierta  $c \in C$ . Entonces  $\{f(c) : c \in C\}$  es un conjunto finito

de enteros positivos. Por tanto contiene el menor entero,  $N(E, \epsilon)$ .

La idea intuitiva que hay detrás de la dimensión fractal es que un conjunto  $E$  tiene dimensión fractal  $D_0$  si

$$N(E, \epsilon) \approx \epsilon^{-D_0}.$$

Despejando  $D_0$  tenemos que

$$D_0 \approx \frac{\ln N(E, \epsilon)}{\ln(1/\epsilon)}. \quad (2.14)$$

Esto nos lleva a la siguiente definición.

Sea  $E$  compacto contenido en  $\mathbb{R}^n$ . Para toda  $\epsilon > 0$ , sea  $N(E, \epsilon)$  el mínimo número de bolas cerradas de radio  $\epsilon$  necesarias para cubrir  $E$ . Si

$$D = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(N(E, \epsilon))}{\ln(1/\epsilon)} \right\} \quad (2.15)$$

existe, lo llamamos la dimensión fractal de  $E$  y lo denotamos como  $D = D_0$ .

Podemos extender esta definición a subconjuntos acotados  $A$  contenidos en  $\mathbb{R}^n$  como sigue:

Denotamos por  $N(\epsilon)$  el mínimo número de bolas de radio  $\epsilon > 0$  necesarias para cubrir a  $A$ . Si

$$D = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \sup \left\{ \frac{\ln N(\epsilon')}{\ln(1/\epsilon')} \right\} : \epsilon' \in (0, \epsilon) \right\} \quad (2.16)$$

existe, entonces lo llamamos la dimensión fractal y lo denotamos como  $D = D_0$ .

No es difícil probar que estas dos definiciones son equivalentes para conjuntos compactos.

Hay algunas variaciones de la definición que son prácticamente equivalentes a ella, sin embargo para calcular la dimensión fractal de conjuntos generados experimentalmente es conveniente en general utilizar celdas  $n$ -dimensionales de lado  $l$  para cubrir al conjunto. Tenemos el siguiente teorema.

**Teorema 2.5** Consideremos un conjunto acotado,  $A$ , contenido en  $\mathbb{R}^n$ . Cubrimos  $\mathbb{R}^n$  por celdas de lado  $l$ , tal que la intersección entre dos celdas sea únicamente sus lados. Denotamos por  $N_l(A)$  el número de celdas necesarias para cubrir a  $A$ . Si

$$D = - \lim_{l \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln N_1(A)}{\ln(l)} \right\} \quad (2.17)$$

existe entonces es igual a la dimensión fractal  $D = D_0$ . (Para la demostración véase [3]).

Aún cuando es posible construir ejemplos matemáticos que muestran que  $D_H < D_0$ , no es claro que en sistemas que provienen de fenómenos físicos haya alguna diferencia. De hecho para una gran cantidad de objetos fractales coinciden. Por ejemplo si tomamos bolas de radio  $\delta = \sqrt{n} \cdot l$ , cada cubo estará contenido en una bola. La medida  $s$ -dimensional de Hausdorff (si la cubierta formada por los cubos alcanza el infimo) esta dada por

$$H_\delta^s(A) = n^{s/2} l^s N_1(A) = n^{s/2} \left( \frac{l^s}{l^{D_0}} \right) \approx n^{s/2} l^{s-D_0}$$

(ecuación (2.14)). Y tomando el limite cuando  $l \rightarrow 0$ , tenemos que la dimensión de Hausdorff, será distinta de cero o infinito si y solo si  $s = D_0$ .

Veamos un ejemplo. Consideremos el triángulo de Sierpinski en  $\mathbb{R}^2$ ,  $S$ , con vértices en  $(0,0)$ ,  $(1,0)$  y  $(0,1)$  (figura 2). Consideremos  $\delta = \sqrt{2} \cdot (1/2)^n$  para  $n = 0, 1, \dots$ . Entonces una posible cubierta para el triángulo de Sierpinski se puede construir con  $3^n$  discos de diámetro  $\sqrt{2} \cdot (1/2)^n$ . Suponemos que con esta cubierta se alcanza el infimo. Entonces

$$H_\delta^s(S) = 3^n (\sqrt{2})^s (1/2)^{ns} \quad \text{para } n = 1, 2, \dots$$

Luego

$$H^s(S) = \lim_{n \rightarrow \infty} (3^n (\sqrt{2})^s (1/2)^{ns}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left( \frac{3}{2^s} \right)^n (\sqrt{2})^s \right\} =$$

$$= \begin{cases} \infty & \text{si } 3/2^s > 1 \\ (\sqrt{2})^s \ln(3)/\ln(2) & \text{si } 3/2^s = 1 \\ 0 & \text{si } 3/2^s < 1. \end{cases}$$

Por tanto la dimensión de Hausdorff es  $s = \ln(3)/\ln(2)$ .

Para calcular la dimensión fractal basta observar que en

el primer paso ,  $n = 1$ , si tomamos celdas de lado  $l = 1/2$ , necesitamos 3 celdas para cubrir el triángulo. En la segunda generación, eliminamos el triángulo central (como se muestra en la figura 2) entonces  $l = 1/2^2$  y necesitamos  $3^2$  celdas para cubrir el conjunto. Continuando así en el paso  $n$ ,  $3^n$  celdas de longitud  $l = 1/2^n$  cubrirán el conjunto. Por tanto  $N_1(S) = 3$ ,  $N_2(S) = 9$ , ...,  $N_n(S) = 3^n$  para  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Por tanto

$$D_0(S) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln N_n(S)}{\ln(2^n)} = \frac{\ln(3)}{\ln(2)}$$

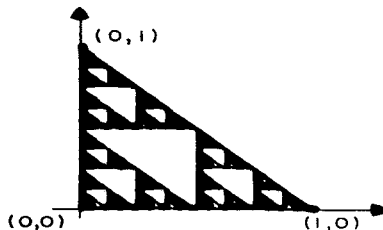


Figura 2.- Una aproximación al Triángulo de Sierpinski.

Al inicio del capítulo hablamos de dos grupos de definiciones de dimensión, pasaremos ahora a discutir el segundo grupo que ha diferencia de éste nos da una noción probabilística del concepto de dimensión.

## 2.7 Dimensión de Información

La dimensión de información, a diferencia de la dimensión fractal  $D_0$  que no refleja la inhomogeneidad de los conjuntos fractales  $E$  que se están midiendo, nos permite estimar la cantidad de información adquirida cuando se hace una medición

en un nivel de resolución dado.

Antes de dar la definición de dimensión de información haremos una breve revisión de como surgió el concepto a fin de entender posteriormente las dimensiones generalizadas  $D_q$  definidas por A. Renyi<sup>[9]</sup> en teoría de probabilidad y utilizadas más tarde por H.G.E. Hentschel e I. Procaccia<sup>[10]</sup> en el contexto de sistemas dinámicos.

Si sabemos que algunos objetos están en cierto conjunto E, dar una información completa de uno de los objetos significa especificar cual de los elementos del conjunto E es el que estamos considerando. La cantidad de información que recibamos depende, evidentemente, del número de elementos de E. Si E contiene exactamente  $N = 2^n$  elementos, estos pueden etiquetarse mediante números binarios que contienen exactamente n dígitos; entonces cada elemento estará determinado de manera única por una sucesión de longitud n que consiste de ceros y unos, por tanto por n unidades de información. De  $N = 2^n$  obtenemos que  $n = \log_2 N$ . Esto le dió la idea a R.V. Hartley en 1928<sup>[11]</sup> de introducir la noción de la medida logarítmica de la información que se obtiene al escoger un elemento de un conjunto de N elementos, donde todos los elementos son equiprobables, definiendo

$$I = \log_2 N = \log_2 \frac{1}{p} \quad \text{con} \quad p = \frac{1}{N} . \quad (2.18)$$

Es decir, p representa la probabilidad de escoger un determinado elemento de un conjunto de N elementos equiprobables.

Veinte años más tarde C.E. Shannon<sup>[12]</sup> consideró un conjunto E que consistía de N elementos, donde la probabilidad de escoger cada uno de los elementos no es la misma. De la ecuación (2.18) tenemos que

$$I = \log_2 N = \sum_{i=1}^N \frac{1}{N} \log_2 \left( \frac{1}{\frac{1}{N}} \right) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{N} \log_2 \left( \frac{1}{p} \right) .$$

Suponiendo que la probabilidad de escoger cada elemento no es la misma, obtenemos

$$I = \sum_{i=1}^N p_i \log_2 (1/p_i) . \quad (2.19)$$

donde  $p_i$  es la probabilidad de escoger el i-ésimo elemento. A esta cantidad se le conoce como la entropía de la información y de aquí en adelante la denotaremos únicamente por I.

Consideremos ahora un conjunto fractal  $E$  y lo cubrimos con celdas de longitud  $l$ . Definimos como  $p_i(l)$  la probabilidad en la  $i$ -celda. La dimensión de información se define como

$$D_i = - \lim_{l \rightarrow 0} \frac{I(l)}{\ln l}, \quad (2.20)$$

donde  $I(l)$  es la entropía de información (2.19), pero le aumentamos la  $l$  para recalcar su dependencia en la escala  $l$ . En esta definición sustituimos el  $\log_2$  por el  $\ln$ , que denota el logaritmo natural, para ser congruentes con las definiciones que siguen. Notemos también que ahora la sumatoria será sobre todas las celdas,  $N(l)$ , que contienen puntos de  $E$ .

Si la probabilidad de todas las celdas es la misma, es decir,  $p_i = 1/N(l)$ , entonces  $I(l) = \ln N(l)$  y la dimensión de información se reduce a la dimensión fractal. Como  $\ln N(l) \approx I(l) \approx D_0 \approx D_i$ .

Una variedad de otras definiciones de dimensión se describieron en [6] con la conclusión de que todas estas son equivalentes a  $D_0$  ó  $D_i$ . De hecho la diferencia entre  $D_0$  y  $D_i$  radica en una medida de no uniformidad del conjunto. Más tarde Hentschel y Procaccia<sup>[10]</sup> mostraron que hay un número infinito de dimensiones  $D_q$  ( $q$  varía de  $-\infty$  a  $\infty$ ) todas distintas y relevantes para describir un conjunto fractal. Estas dimensiones son las definidas por A. Renyi<sup>[9]</sup>.

## 2.8 Dimensiones $D_q$ .

Renyi dió un paso más y aplicó lo que llama el promedio general a través de una función a la ecuación (2.19). Tomamos un conjunto  $E$  formado por  $n$  conjuntos disjuntos por parejas  $E_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Consideremos la función  $h_q$  definida por  $h_q(x) = e^{(1-q)x}$ , con  $q \neq 1$ . El promedio general se define como

$$\begin{aligned} I &= h_q^{-1} \left( \sum_{j=1}^n p_j h_q(\ln(1/p_j)) \right) \\ &= \frac{1}{1-q} \ln \sum_{j=1}^n p_j^q \end{aligned} \quad (2.21)$$

Para aplicar (2.21) al conteo de las celdas sustituimos  $I$  por  $I(l)$  y cambiamos  $n$  por  $N(l)$  que es el número de celdas que contienen puntos del conjunto fractal. Entonces la  $D_q$  dimensión estará definida como

$$D_q = - \lim_{l \rightarrow 0} \frac{I(l)}{\ln l} \quad (2.22)$$

De la definición se puede ver que  $D_q$  es una función no decreciente en  $q$ , es decir,  $D_q < D_{q'}$  para toda  $q > q'$ .  $D_0$  es la dimensión fractal. Si tomamos el  $\lim_{q \rightarrow 1} D_q$  tenemos la dimensión de información. Para ver esto reescribimos la ecuación (2.22) como

$$D_q = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{1}{q-1} \frac{\ln \sum p_j \exp [(q-1) \ln p_j]}{\ln l}$$

expandiendo en serie de Taylor la función exponencial obtenemos

$$D_q = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{1}{q-1} \frac{\ln [1 + (q-1) \sum p_j \ln p_j]}{\ln l}$$

Expandiendo nuevamente en serie de Taylor el logaritmo obtenemos la dimensión de información en el límite cuando  $q \rightarrow 1$ .

Vamos ahora a dar otra definición de las dimensiones  $D_q$  y demostraremos que son equivalentes.

Nuevamente consideremos a  $E$  un conjunto fractal formado por  $n$  conjuntos disjuntos por pares  $E_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Supongamos que cada  $E_j$  tiene longitud  $l_j$  y probabilidad  $p_j$ , donde  $\sum l_j = 1$  y  $\sum p_j = 1$ . Entonces

$$\sum_{j=1}^n \frac{p_j^q}{l_j^{\tau(q)}} = 1, \quad \tau(q) = (q-1)D_q. \quad (2.23)$$

Vamos primero a considerar el caso particular en que  $q = 0$

$$\sum_{j=1}^n l_j^{D_0} = 1 \quad (2.24)$$

Considerando que  $E$  está formado por  $n$  subconjuntos disjuntos por pares  $E_j$ , cada uno de longitud  $l_j$ . Tomamos celdas de longitud  $l$  para cubrir a  $E$  de tal forma que  $l = \min_{i=j} d(E_i, E_j)$ .

El número  $N(l)$  es ahora la suma de  $N_j(l)$ , donde  $N_j(l)$  es el

número de celdas que cubre a  $E_j$ , es decir,

$$N(l) = \sum_{j=1}^n N_j(l) \quad (2.25)$$

Si nos fijamos unicamente en  $E_j$  y la cubrimos por celdas más pequeñas de tamaño  $l_j \cdot l$ , tendremos el mismo número  $N(l)$  de celdas que intersectan al conjunto, dada la autosimilaridad del conjunto  $E$ , entonces

$$N_j(l_j \cdot l) = N(l) \quad (2.26)$$

De la definición de dimensión fractal (2.14)

$$N(l) = l^{-D_0}$$

por lo tanto

$$N_j(l) = \left( \frac{l}{l_j} \right)^{-D_0}$$

sustituyendo estas dos últimas relaciones en la ecuación (2.25) obtenemos (2.24).

Ahora estudiaremos el caso general, es decir, deduciremos la fórmula (2.23).

Consideremos nuevamente el conjunto  $E = \cup E_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Cada  $E_j$  está caracterizado por  $(l_j, p_j)$  donde  $l_j$  es el factor de escalamiento y  $p_j$  la probabilidad de estar en  $E_j$ . Para medir este conjunto dada una cierta resolución por conteo en el número de celdas que cubren a  $E$ , obtenemos de la ecuación (2.21)

$$I(l) = \frac{1}{1-q} \ln \sum_{i=1}^n t_i^q \quad (2.27)$$

donde, para evitar confusiones,  $t_i$  es la probabilidad en la  $i$ -celda y  $\sum t_i = 1$ .

Tomamos celdas más pequeñas de tamaño  $l_j \cdot l$  y nos fijamos unicamente en  $E_j$ . La probabilidad de estar en la  $i$ -celda de  $E_j$  es  $s_i = p_j t_i$  y las  $s_i$  están normalizadas a  $p_j$ , es decir,  $\sum s_i = p_j$  con  $j = 1, \dots, n$ . Por tanto, utilizando nuevamente la función de Renyi (2.20),



$$\begin{aligned}
I_j(l, j, l) &= \frac{1}{1-q} \ln \sum_{i=1}^{N(l)} t_i e^{(q-1) \ln p_j t_i} = \\
&= \frac{1}{1-q} \ln \sum_{i=1}^{N(l)} \frac{(p_j t_i)^q}{p_j} = \\
&= -\ln p_j + \frac{1}{1-q} \ln \sum_{i=1}^{N(l)} t_i^q \\
&= -\ln p_j + I(l)
\end{aligned}$$

Esta última igualdad viene de (2.27). Sustituyendo  $l$  por  $l/l_j$ ,

$$I_j(l) = -\ln p_j + I(l/l_j) \quad (2.28)$$

Aplicando la función de Renyi (2.20) sobre los conjuntos con probabilidad  $p_j$ ,

$$I(l) = \frac{1}{1-q} \ln \sum_{j=1}^n p_j e^{(1-q)I_j(l)} \quad (2.29)$$

Sustituyendo (2.28) en (2.29)

$$I(l) = \frac{1}{1-q} \ln \sum_{j=1}^n p_j^q e^{(1-q)I(l/l_j)} \quad (2.30)$$

y utilizando (2.22) tenemos  $I(l) = -D(q, l) \ln l$ . Suponiendo

$$D_q = \lim_{l \rightarrow 0} D(q, l)$$

Sustituyendo en (2.30) y eliminando los términos iguales

$$\ln \sum_{j=1}^n p_j^q l_j^{(1-q)D_q} = 0$$

de donde tenemos directamente la ecuación (2.23).

Pasaremos ahora a definir la función  $f(\alpha)$  que está íntimamente relacionada con las dimensiones  $D_q$ .

## 2.9 La Función $f(\alpha)$ .

Recientemente T. Hasley et al.<sup>[13]</sup> construyeron una función que denominaron la función  $f(\alpha)$ . Este nuevo punto de vista es lo que se conoce como el formalismo termodinámico de

los objetos fractales.

Consideremos un conjunto fractal  $E$  en un espacio fase de dimension  $n$ . Cubrimos a  $E$  con celdas disjuntas por pares  $E_i$  y consideramos  $p_i$  la probabilidad en la  $i$ -ésima celda. Esta probabilidad genera una medida  $\mu(x)$ , dada por

$$p_i = \int_{i-\text{celda}} d\mu(x) = \mu(E_i)$$

Para describir la medida fractal de manera más cuantitativa vamos a suponer que todas las  $i$ -celdas, a diferencia de la sección anterior, tienen la misma longitud  $l \ll 1$ . Definimos un exponente de escalamiento  $\alpha$  como aquel para el cual

$$p_i \approx l^{\alpha_i} \quad (2.31)$$

Se dice que la probabilidad en la  $i$ -celda escala con  $l$ . Las  $\alpha_i$  toma un rango de valores que corresponden a regiones con distinta medida. El exponente  $\alpha_i$  se conoce como el exponente de Lipshitz-Hölder. Puede haber varias celdas con el mismo exponente  $\alpha_i$  y el número de celdas escala con  $l$  como

$$N(\alpha, l) \approx l^{-f(\alpha)} \quad (2.32)$$

donde, por (2.14),  $f(\alpha)$  es la dimensión fractal del conjunto de celdas caracterizadas por el mismo exponente  $\alpha$ .

Para determinar la función  $f(\alpha)$  de un conjunto dado, T. Hasley et al.<sup>[13]</sup> la relacionan a propiedades observables de la medida. Esto es, relacionan  $f(\alpha)$  al conjunto de dimensiones  $D_q$  definidas en la sección anterior (ecuación (2.22)).

Definimos

$$X(q) = \sum p_i^q = \sum l^{q\alpha_i} \quad (2.33)$$

para  $-\infty < q < \infty$ . Para  $q = 0$  (2.33) nos da  $N(l)$ , el número de celdas de longitud  $l$  necesarias para cubrir el conjunto fractal  $E$  (en la región donde  $p_i \neq 0$ ). Por tanto

$$X(0) = N(l) = l^{-D_0}$$

Donde  $D_0$  es la dimensión fractal.

Como el número de celdas que escalan con la misma  $\alpha$  es proporcional a  $l^{-f(\alpha)}$  tenemos de (2.33)

$$X(q) \approx \int l^{q\alpha} l^{-f(\alpha)} d\alpha \quad (2.34)$$

Como  $l$  es muy pequeña, aplicando el método de punto silla<sup>[13]</sup>,

vemos que la ecuación (2.34) estará dominada por el valor de  $\alpha$  que haga  $\alpha q - f(\alpha)$  sea mínima. Si llamamos  $\alpha(q)$  al mínimo valor de  $\alpha$  tenemos que

$$X(q) = I^{q\alpha(q) - f(\alpha(q))} \left( \frac{\pi}{(d^2 f / d\alpha^2) \ln l} \right) . \quad (2.35)$$

Para calcular la mínima  $\alpha$  tenemos que suponer que la función  $f(\alpha)$  es de clase  $C^2$  y utilizar los métodos del cálculo, esto es

$$\frac{d}{d\alpha} \left( \alpha q - f(\alpha) \right)_{\alpha=\alpha(q)} = 0$$

$$Y \quad \frac{d^2}{d\alpha^2} \left( \alpha q - f(\alpha) \right)_{\alpha=\alpha(q)} > 0$$

de donde

$$f'(\alpha(q)) = q \quad , \quad f''(\alpha(q)) < 0 .$$

De las ecuaciones (2.22) y (2.35) tenemos que

$$D_q = \frac{1}{q-1} \lim_{l \rightarrow 0} \frac{X(q)}{\ln l} .$$

Por tanto

$$D_q = \frac{1}{q-1} \left( q\alpha(q) - f(\alpha(q)) \right) \quad (2.36)$$

De aquí podemos ver que si conocemos  $f(\alpha)$  y el espectro de valores de  $\alpha$  obtenemos  $D_q$ . Recíprocamente, dada  $D_q$  obtenemos derivando respecto a  $q$

$$\alpha(q) = \frac{d}{dq} \left( (q-1) D_q \right) = \frac{d}{dq} \tau(q) \quad (2.37)$$

y por tanto sustituyendo en (2.36) tenemos

$$f(\alpha(q)) = q \alpha(q) - (q-1) D_q \quad (2.38)$$

es decir, que la función  $f(\alpha)$  es la transformada de Legendre de  $\tau(q)$ .

Una propiedad interesante de la derivada de  $\tau(q)$  se puede ver en las siguientes ecuaciones. De la ecuación (2.22) vemos que

$$\begin{aligned} \frac{d \tau(q)}{dq} &= \frac{d}{dq} \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\log \sum p_i^q}{\log l} = \\ &= \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\sum p_i^q \log p_i}{l^q l \sum p_i^q} \end{aligned}$$

Definimos a  $p_-$  el mínimo valor que toman las  $p_i$ . Entonces

$$\frac{d \tau(q)}{dq} \Big|_{q \rightarrow -\infty} = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\sum' p_i^q \log p_i}{\log l \sum' p_i^q} = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\log p_-}{\log l} = \alpha_-$$

donde  $\sum'$  indica una suma sobre las celdas donde  $p_i = p_-$ , es decir, el número de  $i$ 's tal que  $p_i = p_-$ . La última igualdad se debe a (2.31). De manera similar

$$\frac{d \tau(q)}{dq} \Big|_{q \rightarrow \infty} = \alpha_+.$$

Dado que  $p_- < p_i < p_+$  tenemos  $\alpha_- \log l < \alpha_i \log l < \alpha_+ \log l$  y como  $\log l$  es negativo  $\alpha_- < \alpha_i < \alpha_+$  para toda  $i$ . Es decir que el máximo valor de  $\alpha$ ,  $\alpha_{max} = \alpha_+$  y el mínimo valor de  $\alpha$  está dado por  $\alpha_{min} = \alpha_-$ .

Analizando la función  $f(\alpha)$  vemos que es una función diferenciable, convexa, con un máximo en  $q = 0$  y con pendientes infinitas en  $q = \pm \infty$ . Más aún, para  $q = 1$  tenemos  $f(\alpha(1)) = \alpha(1)$  y  $f'(\alpha(1)) = 1$ , es decir que la función  $f(\alpha)$  es siempre tangente a la función identidad.

El problema que se nos plantea es encontrar una forma de calcular la función  $f(\alpha)$ .

## 2.10 Cálculo de la función $f(\alpha)$ .

El método que propone T. Hasley et al.<sup>(14)</sup> para calcular la función  $f(\alpha)$  es considerar la ecuación (2.23) pero tomando un escalamiento uniforme, es decir, la misma  $l$ . El segundo método es únicamente una adaptación del primero para conjuntos fractales cuya distribución en el espacio fase es muy irregular.

El primer método ha sido utilizado con bastante éxito en los casos en los cuales la distribución de puntos en el conjunto es más o menos uniforme. Sin embargo cuando esto no sucede se obtienen errores. Como en los casos que se analizarán en este trabajo, el conjunto de puntos no está uniformemente distribuido, proponemos otra forma de calcular la función  $f(\alpha)$ . Posteriormente a la realización de este trabajo

fue publicado un método similar al que usamos aquí.

Consideremos una función de partición dada por la ecuación (2.23), pero escogeremos todas las celdas que cubren al objeto fractal con la misma longitud  $l$ . Tenemos utilizando (2.22)

$$\frac{1}{l^\tau} \sum_{i=1}^N p_i^q = 1$$

sacando logaritmos y despejando  $\tau$  tenemos

$$\tau = \frac{\ln \sum p_i^q}{\ln l} \quad (2.39)$$

Derivando  $\tau$  respecto a  $q$  obtenemos  $\alpha$  (2.37). Sustituyendo  $\alpha$  en la ecuación (2.38) obtenemos una función implícita de  $q$  que llamamos

$$g(q) = \frac{1}{\ln l} \left( \frac{q \sum p_i^q \ln p_i}{\sum p_i^q} - \ln \sum p_i^q \right) \quad (2.40)$$

La relación que hay entre esta función y la función  $f(\alpha)$  es obvia de hecho tenemos que  $f(\alpha(q)) = g(q)$ .

Uno de los problemas que se presentan para calcular la función  $f(\alpha)$  numéricamente, es la relación que existe entre la cantidad de puntos que tenemos del conjunto fractal y la longitud de las celdas,  $l$ . Si  $l$  es demasiado grande o bien demasiado pequeña obtenemos errores muy grandes en la rama derecha de la función  $f(\alpha)$ . Para determinar el rango de valores de  $l$  apropiados para hacer el cálculo numérico, graficamos el logaritmo de  $l$  contra el logaritmo del número de celdas distintas del vacío y los puntos donde tenemos la mejor aproximación a una recta, son los puntos donde debemos escoger  $l$ . Este criterio se probó en varios ejemplos donde la función  $f(\alpha)$  se puede también calcular analíticamente y se observó que las aproximaciones obtenidas eran muy buenas. Mas aún, la pendiente de la recta es el negativo de la dimensión fractal  $D_0$ .

Uno de los ejemplos donde se utilizó el criterio antes mencionado es el conjunto de Cantor de dos escalas como el que describimos a continuación.

## 2.11 Conjunto de Cantor de dos escalas.

En esta sección analizaremos un conjunto de Cantor de dos escalas como el que se muestra en la figura 3. La razón principal de utilizar este ejemplo es que el conjunto fractal que resulta no está uniformemente distribuido en el espacio.

La ventaja de estudiar este modelo radica en que la función  $f(\alpha)$  puede ser calculada "analítica" y numéricamente. Describiremos primero los cálculos numéricos y posteriormente

la construcción "analítica".

Para hacer el análisis numérico tenemos primero que generar el conjunto de Cantor. Hay varias formas de hacerlo y en este texto describiremos dos de ellas. Mediante la primera generamos paso a paso el conjunto de Cantor, en tanto que con la segunda generamos los puntos del conjunto de Cantor que corresponden a los pasos que son potencia de dos, razón por la cual la segunda forma es más eficiente.

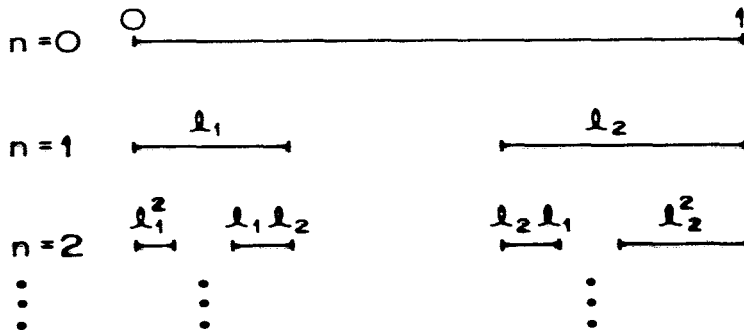


Figura 3.- Una aproximación al Conjunto de Cantor de dos escalas,  $l_1 = 1/4$ ,  $l_2 = 2/5$ ,  $p_1 = p_2 = 1/2$ .

Empezaremos describiendo la primera forma. Queremos construir un conjunto de Cantor como el que se muestra en la figura 3. Es decir, consideramos dos escalas  $l_1 = 1/4$  y  $l_2 = 2/5$ . Para generar este conjunto podemos ver que a  $l_1$  y  $l_2$  los podemos reescribir como  $l_1 = 5/20$  y  $l_2 = 8/20$  respectivamente. El intervalo que eliminamos en el primer paso mide  $7/20$ . En el segundo paso tendremos cuatro intervalos de longitudes  $l_1^2 = (5/20)^2$ ,  $l_1 l_2 = (5/20)(8/20)$ ,  $l_2 l_1 = (8/20)(5/20)$  y  $l_2^2 = (8/20)^2$ . En este paso eliminamos dos nuevos intervalos de longitudes  $(5/20)(7/20)$  y  $(8/20)(7/20)$ . Continuando este proceso tenemos en el tercer paso ocho intervalos de longitudes  $l_1^3 = (5/20)^3$ ,  $l_1^2 l_2 = (5/20)^2(8/20)$ ,  $l_1 l_2 l_1 = (5/20)(8/20)(5/20)$ ,  $l_1 l_2^2 =$

$(5/20)(8/20)^2, \quad I_2 I_1^2 = (8/20)(5/20)^2, \quad I_2 I_1 I_2 =$   
 $(8/20)(5/20)(8/20), \quad I_2^2 I_1 = (8/20)^2(5/20), \quad I_2^3 = (8/20)^3.$  En  
 este paso eliminamos cuatro nuevos intervalos de longitudes  
 $(5/20)^2(7/20), \quad (5/20)(8/20)(7/20), \quad (8/20)(5/20)(7/20)$  y  
 $(8/20)^2(7/20).$  Los extremos de los intervalos con los que nos  
 quedamos son puntos que pertenecen al conjunto de Cantor, es  
 decir, los puntos del Cantor estan dados por la sucesión  $a_0 = 0,$   
 $a_1 = a_0 + (5/20)^3, \quad a_2 = a_1 + (5/20)^2(7/20), \quad a_3 = a_2 + (5/20)^2(8/20),$   
 $a_4 = a_3 + (5/20)(7/20),$  etc. Continuando este proceso podemos  
 generar tantos puntos como se deseen. Sin embargo este no es  
 un algoritmo apropiado para ser usado en la computadora. Una  
 forma de simplificar este proceso consiste en fijarnos  
 únicamente en los numeradores de estos números, con los cuales  
 formamos las siguientes cadenas de números:

Primer paso	5	7	8	
Segundo paso	55 57 58	7	85 87 88	
Tercer paso	555 557 558	57	585 587 588	7
	855 857 858	87	885 887 888	

Es decir, cada vez que en la cadena del paso anterior aparezca  
 como último número, un 5 o un 8, generamos tres nuevos números  
 cuya última cifra será 5, 7, 8. Si la cadena del paso anterior  
 terminó con un 7, ya no tenemos que hacer nada, pues ésta  
 representa el intervalo que eliminamos; sin embargo, para hacer  
 los cálculos eficientemente en la computadora nos conviene  
 completar estas cadenas con el número 20. Esto equivale a  
 multiplicar la longitud de los intervalos que eliminamos por  
 $20/20$  - es decir, por la unidad - tantas veces como sea  
 necesario hasta tener cadenas con la longitud del paso que  
 estamos considerando. Por ejemplo, en el paso dos tenemos  
 cadenas con dos números. Por ello la cadena que corresponde al  
 intervalo que eliminamos será  $7(20)$  en vez de 7 únicamente.

Ahora bien, para generar todos los intervalos relevantes  
 para la construcción del conjunto de Cantor, tanto los que se  
 quedan como los que quitamos en cada paso, multiplicamos y  
 dividimos todos los números del numerador por  $20^n$ , donde  $n$  es  
 el paso. Los puntos que pertenecen al conjunto de Cantor  
 estarán dados por la misma sucesión que tenemos líneas más  
 arriba. Esta construcción de los intervalos del conjunto de  
 Cantor supone conocer el paso  $n$  para generar el paso  $n+1$ . Sin  
 embargo, habiendo entendido el mecanismo podemos generar  
 directamente el  $n$ -ésimo paso.

En el  $n$ -ésimo paso tendremos como primer arreglo una  
 cadena de  $n$ -cincos. Damos entonces inicio al proceso de  
 cambiar los cincos de derecha a izquierda de la siguiente

forma: tomamos el  $n$ -ésimo 5 y lo cambiamos primero por un siete y luego por un ocho; obtenemos entonces los arreglos 5...57 y 5...58 respectivamente. Continuamos con el  $(n-1)$ -ésimo 5 y hacemos lo mismo, es decir, lo cambiamos por un 7 y un 8. Sin embargo, esto provocará que tengamos que cambiar los últimos números por el número 20 si el  $(n-1)$ -ésimo es el número 7, y con un 5 si el  $(n-1)$ -ésimo es un 8. Obtenemos pues los arreglos 55...57(20) y 55...585. Ahora bien, como generamos un nuevo 5 en el  $n$ -ésimo lugar, éste lo tenemos que cambiar por un 7 y un 8, obteniendo así dos nuevos arreglos, a saber el 55...587 y 55...588. Ahora vamos a mover el número 5 que tenemos en el lugar  $(n-2)$ , y repetimos el proceso obteniendo entonces el 55...57(20)(20) y el 55...5855. Tomamos del último arreglo generado el  $n$ -ésimo 5 y lo cambiamos por 7 y 8, esto es, obtenemos el 55...5857 y el 55...5858. Luego cambiamos el 5 que está en el  $(n-1)$ -ésimo lugar por un 7 y un 8, rellenando el  $n$ -ésimo lugar con el número 20 si el  $(n-1)$ -ésimo es un 7, y con un 5 si el  $(n-1)$ -ésimo lugar es un 8. En este último paso obtenemos pues el 55...587(20) y el 55...5885. Continuamos este proceso hasta que hayamos cambiado el primer 5 de la cadena.

En resumen diremos que debemos cambiar los números 5 con 7 y 8 empezando de derecha a izquierda, pero una vez que aparezca un 7 el resto de lugares se llena con el número (20) y cada vez que aparezca un 8 el resto de lugares se llena con cinco. El proceso vuelve empezar cambiando el primer 5 - de los últimos números generados - que se encuentre en la cadena, pero iniciando siempre en el lado derecho. Como ejercicio es muy bueno hacer esto varias veces para entender bien el procedimiento.

Estas cadenas representan todos los intervalos en la construcción del conjunto de Cantor, tanto los que se quedan como los que quitamos. Para obtener los puntos del conjunto de Cantor construimos la serie como lo hicimos anteriormente. Esto es, los puntos del conjunto de Cantor son  $a_0 = 0$ ,  $a_1 =$

$$a_0 + (5/20)^n, \quad a_2 = a_1 + (5/20)^{n-1}(7/20), \quad a_3 = a_2 + (5/20)^{n-1}(8/20),$$

$a_4 = a_3 + (5/20)^{n-2}(7/20)(20/20), \dots$  Por tanto en el  $n$ -ésimo paso generamos  $2^{n+1}$  puntos pertenecientes al conjunto de Cantor.

Otra forma aún más eficiente de generar un conjunto de Cantor la describimos a continuación.

Si calculamos únicamente el primer paso del conjunto de Cantor del ejemplo anterior, tenemos dos intervalos de longitud  $1/4$  y  $2/5$  respectivamente. Con estos dos intervalos obtenemos los primeros cuatro puntos del Cantor que son los extremos de los intervalos, a saber, el 0, 0.25, 0.6 y el 1. Tomamos la longitud del primer intervalo y la multiplicamos por los primeros cuatro puntos del Cantor que obtuvimos en el primer paso, obteniendo así los primeros cuatro puntos del siguiente paso; haciendo lo mismo con la longitud del segundo intervalo



obtendremos los siguientes cuatro puntos. Es decir, en el segundo paso hay  $2^3$  puntos del Cantor y  $2^2$  intervalos. Para generar los puntos del siguiente paso siguiendo esta construcción, tomamos la longitud de los cuatro intervalos generados en el paso anterior y las multiplicamos por los puntos que obtuvimos en el mismo paso. Obtendremos pues  $2^3 \times 2^2$  puntos del Cantor y tendremos  $2^4$  intervalos. Repitiendo

nuevamente el procedimiento pasamos a tener  $\left(2^4\right)^2$  intervalos

y  $2^{3+1}$  puntos del Cantor (vease la figura 3). Esta es una forma muy eficiente y rápida de generar un conjunto de Cantor, ya que en cada paso generamos el cuadrado del número de intervalos que ya teníamos y la cardinalidad del conjunto de puntos es la siguiente potencia de dos respecto al número de intervalos. Sin embargo con este método no podemos generar más que los puntos de los pasos que son potencia de dos. Es fácil ver que lo único que estamos haciendo es reescalar las longitudes y aplicar cada vez el primer paso de la construcción a cada una de las longitudes reescaladas.

Teniendo los puntos del conjunto de Cantor procedemos a calcular la función  $f(x)$  como se describió en este capítulo. Es decir, lo primero que tenemos que hacer es escoger la longitud adecuada de las celdas que utilizaremos para calcular la función  $f(x)$ . Para esto cubrimos nuestro conjunto con celdas de longitud  $l'$  y vemos cuántas de estas celdas contienen puntos que pertenecen al conjunto. Variamos la longitud y volvemos a contar el número de celdas que contienen puntos del conjunto. Hacemos este cálculo varias veces para distintas longitudes. Con estos datos graficamos el logaritmo de  $l$  contra el logaritmo del número de celdas que contienen puntos del conjunto, para cada  $l$ . Hay cierto rango de valores de  $l$  donde podemos aproximar la gráfica a una recta y la pendiente de esta recta es el negativo de la dimensión fractal. Este es el rango de valores de la longitud apropiada para hacer el cálculo de la función  $f(x)$ . Conociendo  $l$ , cubrimos nuestro conjunto fractal con celdas de tamaño  $l$  y calculamos la probabilidad en cada una de las celdas. Conociendo la longitud apropiada y las probabilidades en cada celda tenemos que la función de partición está dada por

$$\Gamma(q, \tau, l) = \frac{1}{l^\tau} \sum p_i^q .$$

Teniendo esto, el cálculo de la función  $f(x)$  se remite únicamente a aplicar las fórmula (2.25), (2.26) y (2.27).

Haremos ahora el cálculo analítico de la función  $f(x)$  para este conjunto de Cantor de dos escalas. La función de partición  $\Gamma$  para cualquier conjunto de Cantor de dos escalas esta dada por

$$\Gamma(q, \tau, l_2^{-n}) = \left( \frac{p_1^q}{l_1^\tau} + \frac{p_2^q}{l_2^\tau} \right)^n$$

donde  $l_1 < l_2$ .

En el ejemplo particular que estamos considerando, tenemos  $p_1 = p_2 = 1/2$ ,  $l_1 = 1/4$  y  $l_2 = 2/5$ . Igualando la función de partición a uno y sacando logaritmos tenemos que

$$q \ln (1/2) + \ln [ 4^\tau + (5/2)^\tau ] = 0.$$

Derivando  $\tau$  respecto de  $q$  y despejando  $d\tau/dq$

$$\alpha = \frac{d\tau}{dq} = \frac{(8^\tau + 5^\tau) \ln 2}{8^\tau \ln 4 + 5^\tau \ln (5/2)}.$$

Si damos los valores de  $\tau$  obtenemos  $\alpha$  y sustituyendo en (2.22) obtenemos  $f(\alpha)$ .

Por ambos procedimientos la curva  $f(\alpha)$  que se obtiene es la misma. Es decir, el resultado analítico y el cálculo numérico coinciden.

#### REFERENCIAS

- [1] A. Chhabra and R.V. Jensen, Phys. Rev. Lett. 62, (1989) 1327.
- [2] H. Poincaré, Science et Méthode, Bibliothèque Scientifique (1908) (Traducción al inglés por Francis Maitland, Science and Method, Dover (1952); W. Hurewicz and H. Wallman, Dimension Theory, Princeton (1948).
- [3] K.J. Falconer, The Geometry of Fractal Sets, Cambridge University Press (1985).
- [4] Michael Barnsley, Fractals Everywhere, Academic Press Inc., London, (1988).
- [5] M.W. Hirsh and S. Smale, Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra, Academic Press, New York, (1974).
- [6] B. Mandelbrot, Fractals: Form, Chance and Dimension, Freeman, San Francisco, (1977); H.Haken, Evolution of Order and Chaos, Ed. Springer-Verlag, Berlin (1982)228.
- [7] J.D. Farmer, E. Ott and J.A. Yorke, Physica 7D, (1983)153; R. Badii and A. Politi, J. Stat. Phys., Vol. 40, (1985)725.
- [8] J.P. Eckmann and D. Ruelle, Rev. Mod. Phys. 57 (1985) 617.
- [8] F. Hausdorff, Math. Ann. 79, (1919)157.
- [9] A. Renyi, Probability Theory, North Holland, Amsterdam (1970).
- [10] H.G.E. Hentshel and I. Procaccia, Physica 8D, (1983)435.
- [11] R.V. Hartley, Bell System Technical J. 7, (1928)535.
- [12] C.E. Shannon, Bell System Technical J. 27, (1948)379,623.

- [13] R.H. Fowler, Statistical Mechanics, Cambridge University Press, 1929, 1966.
- [14] T. Hasley, M.H. Jensen, L.P. Kadanoff, I. Procaccia and B.I. Shraiman, Phys. Rev. A33, 1141 (1986).

### 3. ESTUDIO DE UN SISTEMA DISIPATIVO Y UN SISTEMA "HAMILTONIANO"

En este capítulo hacemos una revisión de dos sistemas que han sido ampliamente estudiados: el mapeo del círculo y el billar de Sinai. El primero es un modelo de un sistema disipativo que para ciertos valores de sus parámetros presenta regiones biestables, caóticas y regiones donde encontramos doblamientos de periodo. El segundo es un sistema Hamiltoniano que bajo ciertas condiciones es caótico. Por caos determinista entenderemos, al movimiento irregular o caótico generado por un sistema no lineal cuyas leyes dinámicas determinan la evolución en el tiempo de un estado del sistema sabiendo su comportamiento anterior. En los últimos años, gracias al desarrollo de las computadoras y el refinamiento de técnicas experimentales, se ha visto que este fenómeno es abundante en la naturaleza<sup>[1-3]</sup>.

#### 3.1 El Mapeo del Círculo.

Hace más de cincuenta años, en un estudio hecho con circuitos eléctricos que modelaban marca-pasos cardíacos acoplados, se observó que, cambiando la frecuencia de los estímulos periódicos que actuaban sobre un oscilador no lineal, se obtenían muchos tipos de ritmos y amarramientos de fase, imitando ritmos normales y patológicos del corazón<sup>[2-5]</sup>.

El amarramiento de fase es una respuesta resonante que ocurre en sistemas de osciladores acoplados u osciladores no lineales acoplados a una fuerza periódica externa. En el primer caso la resonancia ocurre cuando la frecuencia de un oscilador se aproxima a la frecuencia de otro oscilador y en la región resonante la razón de las frecuencias se amarra exactamente en un número racional. En el segundo caso, si perturbamos la frecuencia,  $w_{int}$ , de un oscilador mediante una señal periódica externa de frecuencia,  $w_{ext}$ , decimos que estamos en un estado resonante cuando la razón entre las frecuencias se amarra en un número racional. La fase es fija e independiente de las condiciones iniciales. En general, los estados de amarre o amarramientos de fase tienen la siguiente propiedad: si se cambia la frecuencia o amplitud de uno de los osciladores, o de la señal periódica externa, en un rango de variación dado, el segundo oscilador reajusta sus parámetros de tal forma que la razón entre las frecuencias permanece invariante. Este rango de variación se incrementa a medida que se incrementa la amplitud del acoplamiento. Cuando la amplitud del acoplamiento no lineal es pequeña el sistema tiene únicamente dos posibles estados: los osciladores presentan

amarramiento de fase o el acoplamiento es cuasiperiódico, es decir, la razón entre sus frecuencias es un irracional.

Estudios posteriores mostraron que un forzamiento periódico aplicado a un oscilador no lineal puede presentar biestabilidades (cuando se observa uno de los dos distintos amarramientos de fase, dependiendo de las condiciones iniciales), doblamientos de periodo<sup>(2,3,5-7)</sup> y dinámicas caóticas<sup>(8,9)</sup> o aperiódicas. La transición de la dinámica periódica a la aperiódica tiene algunas propiedades universales que se pueden predecir teóricamente<sup>(10)</sup>. Se ha visto que la dinámica de estos osciladores se puede representar por medio de una función de Poincaré unidimensional,  $f$ , donde  $f: S^1 \rightarrow S^1$ . Por ejemplo esta reducción ha sido posible en el sistema de Rayleigh-Bénard<sup>(11)</sup>, en modelos de estimulación periódica a oscilaciones cardíacas<sup>(3)</sup>. Mediante la función de Poincaré reducimos una dimensión en el problema sin perder información de la dinámica<sup>(1,2)</sup>. La idea es ver una sección transversal (sección transversal de Poincaré), es decir, que no sea tangente a la órbita. En nuestro caso la intersección de las órbitas y la sección de Poincaré es una curva que es topológicamente equivalente a un círculo. Si la órbita en el toro corresponde a un número racional  $p/q$ , en la sección de Poincaré consistirá en un conjunto discreto con  $q$  puntos. Si la órbita en cambio es cuasiperiódica, es decir, el número de rotación es un irracional, el círculo va a estar densamente cubierto. Con esto tenemos que la dinámica del sistema físico se reduce en este caso a estudiar mapeos del círculo.

Por simplicidad, consideraremos el caso en que  $f: S^1 \rightarrow S^1$  es un difeomorfismo, es decir, una función de clase  $C^\infty$  y con inversa  $C^\infty$  del círculo en sí mismo que preserve la orientación (si  $f$  no preserve orientación únicamente hay que tener un poco más de cuidado en las demostraciones pero los resultados en general son los mismos). Para estudiar la dinámica de las transformaciones del círculo se consideran las iteraciones de la función  $x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f(f(x_0)) = f(x_1), \dots$ . Los puntos  $x_0, x_1, x_2, \dots$  se denominan la órbita de  $f$  con condición inicial  $x_0$ .

Decimos que  $x_0$  es un punto fijo de  $f$  si  $f(x_0) = x_0$ . Un punto  $x_0$  es un punto periódico, de periodo  $N$ , si  $x_0 = x_N$  y  $x_i \neq x_0$  para  $i = 0, 1, 2, \dots, N-1$ . Si hay un punto fijo de periodo  $N$  entonces decimos que tenemos un ciclo de periodo  $N$  que denotaremos por  $x_0^*, x_1^*, \dots, x_{N-1}^*$  donde  $x_0^* \pmod{1} = x_{N-1}^* \pmod{1}$ . Un ciclo es estable si

$$\left[ \frac{\partial f^n(x)}{\partial x_i} \right]_{x_i=x_0} = \prod_{i=1}^{n-1} \left[ \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \right]_{x_i=x_1} < 1.$$

Si el ciclo posee un punto crítico de  $f$ , es decir, un punto donde la derivada es cero, decimos que  $f$  es superestable. Los ciclos estables están asociados a una dinámica donde el amarramiento que se observa es estable<sup>(3,6,7)</sup>.

Muchas veces es más fácil analizar los mapeos del círculo considerando un levantamiento del mapeo a  $\mathbb{R}$ . Es decir, definimos una función  $\pi: \mathbb{R} \rightarrow S^1$  dada por

$$\pi(x) = \exp(2\pi ix) = \cos(2\pi x) + i \sin(2\pi x).$$

La función  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es un levantamiento de  $f: S^1 \rightarrow S^1$  si

$$\pi \circ F = f \circ \pi.$$

Por ejemplo si tenemos una rotación, con ángulo  $2\pi\omega$ ,  $\rho_\omega(\theta) = \theta + 2\pi\omega$ . Para cada  $k \in \mathbb{Z}$ , la función  $T_{\omega,k}(x) = x + \omega + k$  es un levantamiento de  $\rho_\omega$ . Similarmente, si

$$f(\theta) = \theta + 2\pi b \sin(\theta) \text{ con } b < 1/2\pi$$

entonces  $F_{b,k}(x) = x + b \sin(2\pi x) + k$  es un levantamiento de  $f$ .

### Observaciones 3.1

1. Dada una función  $f: S^1 \rightarrow S^1$  existen un número infinito de levantamientos distintos. Se puede probar que cualesquiera dos levantamientos de  $f$  difieren por un entero.
2. Si  $F$  es un levantamiento de  $f$  un difeomorfismo del círculo entonces  $F'(x) > 0$ , es decir, que  $F$  es creciente. Más aún, tenemos que  $F(x+1) = F(x) + 1$  y  $F^n(x+1) = F^n(x) + n$  para cualquier  $n \in \mathbb{Z}$ . Esta igualdad es cierta ya que  $f$  preserva orientación. Luego tenemos que

$$F(x+1) - (x+1) = F(x) - x$$

por tanto  $F - \text{id}$  es una función periódica de periodo uno, donde  $\text{id}(x) = x$  es la función identidad. Similarmente,  $F^n - \text{id}$  es periódica de periodo 1, ya que  $F^n$  es un levantamiento de  $f^n$ . Usando esto, se puede fácilmente demostrar que, si  $|x-y| < 1$  entonces  $|F^n(x) - F^n(y)| < 1$ .

Una propiedad invariante de los mapeos del círculo es su número de rotación. Este número, que está entre 0 y 1, esencialmente mide el promedio de rotación por cada iteración

de la función. Antes de definir el número de rotación, introducimos un concepto preliminar.

Sea  $f: S^1 \rightarrow S^1$  un difeomorfismo que preserva orientación y consideremos un levantamiento  $F$  de  $f$ . Definimos

$$W_0(F) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(x)}{n}.$$

Notese que este límite, si existe, no depende de  $x$ . En efecto, como  $F^n - id$  es periódica, tenemos

$$\begin{aligned} |F^n(x) - F^n(y)| &\leq |(F^n(x) - x) - (F^n(y) - y)| + |x - y| \\ &\leq 1 + |x - y| \end{aligned}$$

donde la última desigualdad es consecuencia de la observación 3.1 (2). Por tanto

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|F^n(x) - F^n(y)|}{n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|F^n(x)|}{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|F^n(y)|}{n}$$

luego  $W_0$  es independiente de  $x$ . Sin embargo  $W_0$  sí depende del levantamiento.

**Ejemplo 3.2.** Consideremos la función  $\rho_\omega(\theta) = \theta + 2\pi\omega$  que es una rotación y el levantamiento dado por  $T_k(x) = x + \omega + k$ . Tenemos

$$W_0(T_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x + n\omega + nk}{n} = \omega + k$$

por tanto distintos levantamientos producen distintos valores de  $W_0$ . Sin embargo, difieren únicamente por un entero.

Esto último sucede en general. Si  $F_1$  y  $F_2$  son dos levantamientos de  $f$ . Se puede demostrar que estos difieren únicamente por un entero, es decir,  $F_2 = F_1 + k$ . Esto implica que  $F_2^n(x) = F_1^n(x) + nk$ , de tal forma que  $W_0(F_2) = W_0(F_1) + k$ . Por tanto la dependencia del número de rotación,  $W_0$ , en el levantamiento es únicamente la parte entera del número.

**Definición 3.3.** Definimos el número de rotación de  $f$ ,  $W(f)$ , como la parte fraccional de  $W_0(F)$  para cualquier levantamiento  $F$  de  $f$ . Por tanto  $W(f)$  es el único número en  $[0, 1)$  tal que  $W_0(F) - W(f)$  es un entero.

El número de rotación se define de la misma forma para funciones que no son difeomorfismos, sin embargo la independencia respecto a  $x$  sigue siendo válida únicamente si  $f$  es un homeomorfismo.

No hemos demostrado aún que el límite  $W_0(F)$  existe. Consideremos primero que  $f$  tiene un punto periódico. Es decir,  $f^m(\theta) = \theta$  y  $\pi(x) = \theta$ . Entonces,  $F^m(x) = x + k$  para algún entero  $k$ . Por tanto  $F^{jm}(x) = x + jk$ , y tenemos

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{F^{jm}(x)}{jm} = \lim_{j \rightarrow \infty} \left( \frac{x}{jm} + \frac{k}{m} \right) = \frac{k}{m}.$$

Más generalmente, podemos escribir cualquier entero  $n$  de la forma  $n = jm + r$  donde  $0 \leq r < m$ . Notese que hay una constante  $M$  tal que

$$|F^r(y) - y| \leq M$$

para toda  $y \in \mathbb{R}$  y  $0 \leq r < m$ . Entonces

$$\frac{|F^n(x) - F^{jm}(x)|}{n} = \frac{|F^r(F^{jm}(x)) - F^{jm}(x)|}{n} \leq \frac{M}{n}$$

Por tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(x)}{n} = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{F^{jm}(x)}{n} = \frac{k}{m}.$$

Esto muestra que el número de rotación  $W(f)$  existe cuando  $f$  es periódica. Más aún,  $W(f)$  es un número racional en este caso.

Si  $f$  no tiene puntos periódicos, necesitamos usar argumentos un poco más complicados. Si  $n \neq 0$ ,  $F^n(x) - x$  no es un número entero, entonces existe un entero  $k_n$  tal que

$$k_n < F^n(x) - x < k_n + 1$$

para toda  $x \in \mathbb{R}$ . Aplicando esta desigualdad a  $x = 0$ ,  $F^n(0)$ ,  $F^{2n}(0)$  tenemos

$$k_n < F^n(0) < k_n + 1$$

$$k_n < F^{2n}(0) - F^n(0) < k_n + 1$$



$$k_n < F^{mn}(0) - F^{(m-1)n}(0) < k_n + 1.$$

Sumando cada una de estas desigualdades, tenemos

$$mk_n < F^{mn}(0) < m(k_n + 1)$$

por tanto

$$\frac{k_n}{n} < \frac{F^{mn}(0)}{mn} < \frac{(k_n+1)}{n}.$$

Usando la primera desigualdad tenemos inmediatamente

$$\frac{k_n}{n} < \frac{F^n(0)}{n} < \frac{(k_n+1)}{n}$$

y combinando estas dos ultimas expresiones

$$\left| \frac{F^{mn}(0)}{mn} - \frac{F^n(0)}{n} \right| < \frac{1}{n}.$$

Podemos repetir el argumento intercambiando n por m y tenemos

$$\left| \frac{F^{mn}(0)}{mn} - \frac{F^m(0)}{m} \right| < \frac{1}{m}.$$

Por tanto

$$\left| \frac{F^n(0)}{n} - \frac{F^m(0)}{m} \right| < \frac{1}{n} + \frac{1}{m}.$$

Es decir que la sucesión  $\{F^n(0)/n\}$  es una sucesión de Cauchy. Por tanto converge. Con esto probamos

**Teorema 3.4.** Consideremos  $f: S^1 \rightarrow S^1$  un difeomorfismo del circulo que preserva orientación y con levantamiento  $F$ . Entonces

$$W_0(F) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(x)}{n} \quad (3.1)$$

existe y es independiente de  $x$  y del levantamiento  $F$ . Por tanto  $W(f)$  bien definido. ●

El resultado de este teorema nos permite también concluir que  $W(f)$  depende continuamente de  $f$ . Es decir,

**Corolario 3.5** Supongamos que  $f: S^1 \rightarrow S^1$  un difeomorfismo del

círculo que preserva orientación. Sea  $\varepsilon > 0$ . Existe  $\delta > 0$  tal que si  $|f(\theta) - g(\theta)| < \delta$ , donde  $g: S^1 \rightarrow S^1$  preserva orientación, entonces  $|W(f) - W(g)| < \varepsilon$ .

Una propiedad importante de  $W(f)$  es su invariancia bajo conjugación. Si  $f$  y  $g$  son difeomorfismos de clase  $C^\infty$  que preservan orientación entonces es fácil ver que  $W(f) = W(h^{-1} \circ g \circ h)$ , donde  $h$  es un homeomorfismo.

Mostramos pues que si  $f$  tiene un punto periódico entonces  $W(f)$  es un número racional. Tenemos también que si  $f$  no tiene puntos periódicos entonces  $W(f)$  es irracional. Es decir que tenemos

**Proposición 3.6**  $W(f)$  es irracional si y solo si  $f$  no tiene puntos periódicos.

**Demostración.** Dado el resultado anterior, solo resta probar que si  $f$  no tiene puntos periódicos entonces  $W(f)$  es irracional. Supondremos que  $W(f)$  es racional para llegar a una contradicción. Es fácil checar que  $W_0(F^m) = m W_0(F)$  para cualquier levantamiento  $F$ . Sin pérdida de generalidad podemos entonces suponer que  $W(f) = 0$  pero que  $f$  no tiene puntos fijos. Por tanto el levantamiento,  $F$ , tampoco tiene puntos fijos. Podemos suponer que  $F(x) > x$  para toda  $x \in \mathbb{R}$  (el otro caso se demuestra de manera similar). Entonces  $F^n(0) < 1$  para toda  $n$  o bien existe  $k > 0$  tal que  $F^k(0) > 1$ . En el segundo caso tenemos que  $F^{mk}(0) > m$ , luego  $W_0(F) > 1/k$  que es una contradicción.

En el primer caso, la sucesión  $F^n(0)$  es monótona creciente en  $[0,1]$  y por tanto converge. Si  $p$  es el límite de esta sucesión, tenemos que

$$F(p) = F\left(\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(0)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} F^{n+1}(0) = p$$

por tanto  $p$  es un punto fijo. Esto contradice la hipótesis y tenemos el resultado. ●

Basándonos en esta discusión analizaremos ahora la familia a dos parámetros conocida como la familia standard del círculo. Consideremos la familia de funciones de dos parámetros definida en  $S^1$  por

$$g_{a,b}(\theta) = \theta + 2\pi (a + b \operatorname{sen} 2\pi\theta). \quad (3.2)$$

**Observación.** Como  $S^1 = [0,1]/0=1$ , podemos ver este mapeo como

$$x_{n+1} = g_{a,b}(x_n) = x_n + a + b \operatorname{sen} 2\pi x_n \pmod{1} \quad (3.3)$$

con  $a, b$  en  $\mathbb{R}^+$  y  $x_{n+1}$  representa la  $(n+1)$ -ésima iteración. Este mapeo ha sido propuesto como un modelo matemático de un oscilador no lineal forzado por estímulos periódicos<sup>[7]</sup>.

Un levantamiento de esta función está dado por

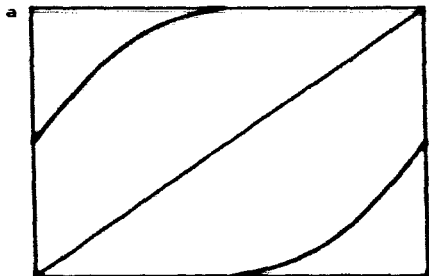
$$G_{a,b}(x) = x + a + b \operatorname{sen} 2\pi x.$$

Si  $0 \leq b < 1/2\pi$ ,  $G_{a,b}$  es un difeomorfismo. Para  $b = 1/2\pi$  la función presenta un punto de inflexión en  $x = 0$ , es decir que la inversa existe pero ésta tiene una singularidad. Nos encontramos en la transición al caos. Si  $b > 1/2\pi$ ,  $G_{a,b}$  desarrolla un máximo y mínimo (figura 1). Ahora analizaremos cada uno de estos casos.

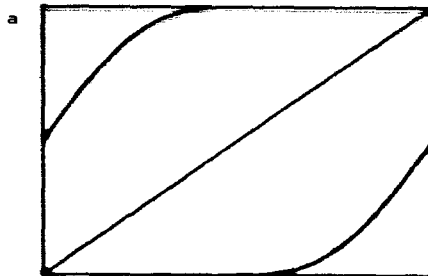
1. Primero consideraremos el caso en que  $0 \leq b < 1/2\pi$ . Fijamos  $b \neq 0$  y consideramos la función  $G_a = G_{a,b}$  y  $g_a = g_{a,b}$ . Supongamos primero que  $W(g_a)$  es un racional de la forma  $p/q$  con  $p$  y  $q$  primos relativos, es decir,  $g_a$  tiene un punto periódico de periodo  $q$ . Por tanto existe  $x_0 \in [0, 1)$  tal que

$$G_a^q(x_0) = x_0 + p.$$

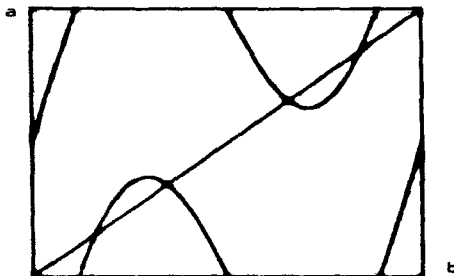
Afirmamos que existe un intervalo finito de valores de  $a$  para los cuales el número de rotación de  $g_a$  es  $p/q$ . Para ver esto consideremos la gráfica de la función  $G_a^q$ . Esta gráfica interseca la recta  $y = x + p$  en el punto  $(x_0, x_0 + p)$ . Si  $(G_a^q)'(x_0) \neq 1$  entonces por el teorema de la función implícita existe un intervalo abierto alrededor de  $a'$  donde la gráfica de cada función  $G_a^q$  atraviesa la recta  $y = x + p$ . Por tanto  $W(g_a) = p/q$  para todos estos valores de  $a$ . Resta ver que sucede cuando  $(G_a^q)'(x_0) = 1$ . Como  $G_a$  es analítica entonces existe un natural,  $j$ , tal que la  $j$ -ésima derivada es distinta de cero, es decir,  $(G_a^q)^{(j)}(x_0) \neq 0$ . Ya que si esto no fuera así,  $G_a^q(x)$  sería idéntica a  $x + p$ . Si  $j$  es impar, entonces tenemos que existe una vecindad  $V$  de  $a'$  tal que  $G_a^q(V)$  interseca la recta  $y = x + p$ . Por otro lado tenemos que si  $j$  es par entonces la función  $G_a^q$  es cóncava hacia arriba o cóncava hacia



(a)



(b)



(c)

Figura 1.- Mapeo del Circulo.

(a)  $a = 0.52$ ,  $b = 0.12$ ; (b)  $a = 0.52$ ,  $b = 1/2\pi$ ;  
 (c)  $a = 0.52$ ,  $b = 0.6$ .

abajo en  $x_0$ . En ambos casos las gráficas de  $G_a^q$ , para  $a < a'$  ó  $a > a'$ , deben cruzar la recta  $y = x + p$ . Por tanto hay un intervalo de valores de  $a$  para los cuales  $W(g_a) = p/q$ . Estos intervalos corresponden a los intervalos donde los osciladores forzados no lineales presentan un amarramiento de fase.

Cuando el número de rotación  $W(g_a)$  es un irracional entonces el valor de  $a$  que le corresponde es único<sup>[13,14]</sup>. Más aún, el teorema de Denjoy<sup>[14]</sup> dice que  $G_a$  es topológicamente equivalente a una simple rotación con el mismo número de rotación, es decir que existe una función continua e invertible  $h$  tal que

$$h^{-1} \circ G_a \circ h = R$$

y 
$$h(x) = h(x) + 1, \quad h(0) = 0,$$

donde 
$$R(x) = x + W_0(G_a).$$

Herman<sup>[14]</sup> demostró que para casi todo número de rotación irracional la función  $h$  es analítica.

La gráfica de la función  $W(f_a)$  es un ejemplo de lo que se conoce como una *Función de Cantor*; es una función escalonada que es constante en los intervalos que corresponden a números de rotación racionales. A la gráfica de esta función se le conoce también como la "Escalera del Diablo" (figura 2).

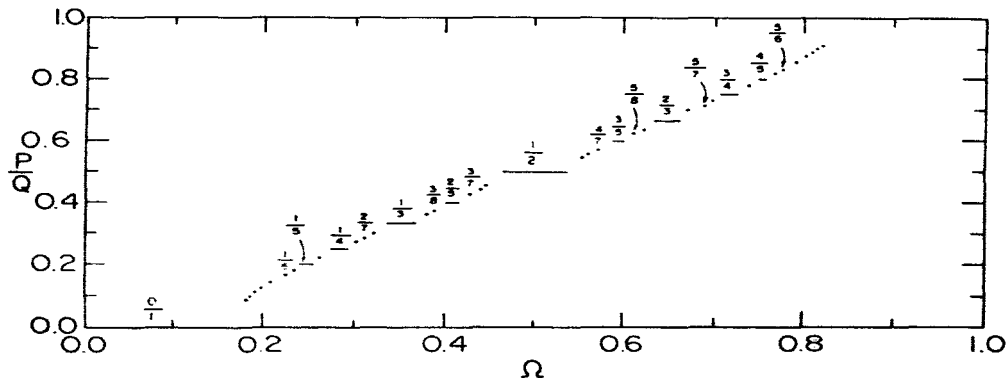


Figura 2.- La Escalera del Diablo para el mapeo del círculo en  $b = 1/2\pi$ .

El diagrama de bifurcaciones para este mapeo es lo que conocemos como las lenguas de Arnold<sup>[13, 15]</sup>. Graficamos en el plano  $(a, b)$  las regiones donde  $W(g_{a,b})$  es un número racional fijo. Estas regiones son lenguas que se inician en cada punto de la forma  $a = p/q$ ,  $b = 0$ . A medida que  $b$  se incrementa, la longitud del intervalo de valores de  $a$  donde el número de rotación es  $p/q$  se incrementa. De hecho para  $b = 0$  los valores de  $a$  donde el número de rotación es racional es un conjunto de medida de Lebesgue 0 y el conjunto de puntos donde  $W(g_{a,b})$  es un número irracional tiene medida de Lebesgue 1. Sin embargo para  $b < 1/2\pi$  ninguna de estas lenguas se intersecta y todas ellas tienen interior no vacío (figura 3). Entre las lenguas de Arnold están los valores de los parámetros para los cuales el número de rotación es un irracional.

2. Veamos que sucede cuando el parámetro  $b = 1/2\pi$ . Como vimos antes, para  $b = 1/2\pi$ , la función presenta un punto de inflexión en  $x = 0$ . Aquí las lenguas de Arnold se intersectan únicamente en sus puntos extremos y la medida de Lebesgue de los valores de  $a$  donde el número de rotación,  $W(g_{a,b})$ , es racional es un conjunto de medida de Lebesgue 1 mientras que el conjunto de valores de  $a$  donde  $W(g_{a,b})$  es un número irracional tiene medida de Lebesgue 0.

Si nos fijamos en la escalera del diablo para  $b = 1/2\pi$ , la longitud del primer escalón se puede obtener analíticamente. La solución corresponde a un punto fijo de la ecuación (3.3), esto es  $g_{a,b}(x^*) = x^*$ . Si el valor de  $a$  crece el punto fijo se torna inestable cuando  $(g_{a,b})'(x^*) = 1$ . Este valor de  $a$  es  $1/2\pi$ , por tanto la longitud del intervalo  $V_a(0/1) = [-1/2\pi, 1/2\pi]$ . Para otros ciclos de orden  $q$  el intervalo de estabilidad queda definido por los valores de  $q$  para los cuales

$$T = \prod_{i=1}^q (g_{a,b})'(x_i) = \prod_{i=1}^q (1 + \cos 2\pi x_i) < 1. \quad (3.4)$$

Esta ecuación es útil para obtener los puntos extremos del intervalo de estabilidad, que son los puntos donde  $T = 1$ <sup>[17]</sup>. Se han encontrado las longitudes  $(\Delta a(p/q))$  de los intervalos con precisión hasta de  $10^{-6}$ , para todos los valores racionales en  $[0, 1]$  y con  $q \leq 50$ . El conjunto de puntos complementarios en el eje  $a$ , para  $b = 1/2\pi$  forma un conjunto de Cantor con dimensión fractal  $D_0 \approx 0.87$ ; este número caracteriza la transición al caos del mapeo. Esta transición ha sido ampliamente estudiada<sup>[18]</sup> y se ha visto que esta dimensión fractal es la misma para cualquier mapeo que presenta un punto

de inflexión cúbico. T. Hasley et al.<sup>[19]</sup> calcularon la función  $f(\alpha)$  para este mapeo. Si  $b < 1/2\pi$  la escalera del diablo ya no está completa y hay huecos que corresponden a órbitas cuasiperiódicas.

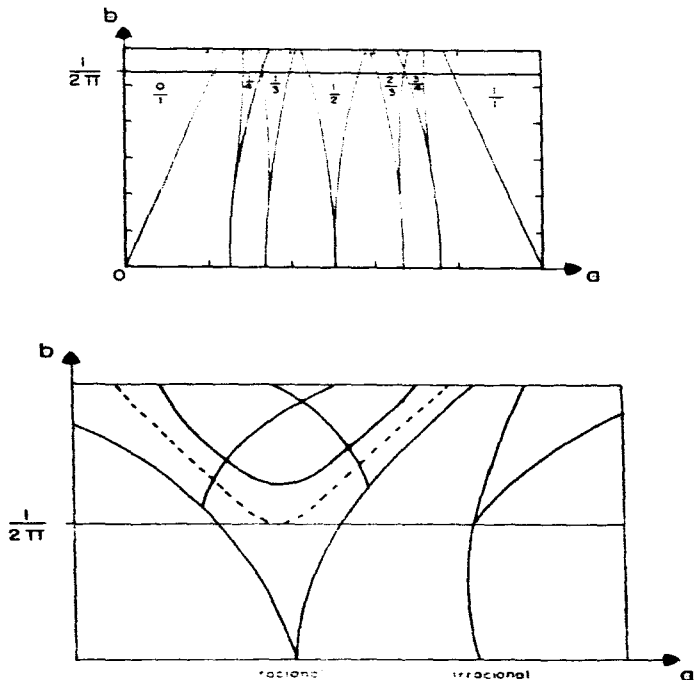


Figura 3.- Esquema de las Lenguas de Arnold en el espacio de parámetros del mapeo del círculo. (a)  $b < 1/2\pi$ . (b) Lenguas de Arnold para números de rotación racional e irracional.

3. Analizaremos ahora el caso en que  $b > 1/2\pi$ . Claramente como las longitudes de los intervalos donde  $W(g_{a,b})$  es racional crecen conforme  $b$  crece, para  $b > 1/2\pi$ , la intersección de estos intervalos es distinta del vacío. Es decir, las lenguas de Arnold se intersectan, además el conjunto de valores de los parámetros donde la función  $g_{a,b}$  tenía un número de rotación irracional, que para  $b = 1/2\pi$  era un arco, se extiende formando así nuevas lenguas<sup>[20]</sup> (figura 3). Esto es, la estructura del espacio de parámetros para  $b > 1/2\pi$  es sumamente compleja y es lo que conocemos como la región caótica. De hecho como la función (3.2) presenta un máximo y un mínimo, el número de rotación  $W(g_{a,b})$  depende el punto.

En el próximo capítulo estudiaremos algunas de las propiedades que se presentan en la región caótica. Sin embargo, como ya mencionamos antes, la dinámica en esta región es muy complicada ya que encontramos órbitas caóticas, sucesiones de doblamientos de periodo y biestabilidad.

Ahora pasaremos a estudiar el segundo sistema que como digimos antes se refiere a un sistema Hamiltoniano, el billar de Sinai. En la siguiente sección daremos, al igual que como lo hicimos para el mapeo del círculo, una pequeña revisión sobre las propiedades más importantes que se han estudiado del sistema<sup>[21, 22]</sup>.

### 3.2 El Billar de Sinai.

El problema del billar de Sinai es el estudio del movimiento de una partícula que se mueve libremente excepto cuando rebota con la frontera, donde permitimos un choque elástico. El espacio en el cual la partícula se mueve es, en general, una variedad compacta de dimensión  $n$  con frontera. Sin embargo nosotros estamos interesados en una variedad con frontera de dimensión dos. De hecho, nos limitaremos a un rectángulo del plano Euclideo. Para tiempos cortos el comportamiento del sistema es simple, la única regla que tenemos es cuando la partícula choca con la frontera donde imponemos la condición: ángulo de incidencia es igual a ángulo de reflexión, el resto del movimiento es una traslación uniforme. El problema difícil de contestar es que pasa para tiempos largos, es decir, cuando dejamos que el tiempo tienda a infinito.

Vamos porque este problema es interesante. Un sistema en mecánica clásica que se mueve sin fricción obedece las condiciones de un movimiento de un sistema Hamiltoniano. El billar de Sinai es un sistema Hamiltoniano, con condiciones en la frontera. Al igual que como sucede para el billar el comportamiento de un sistema Hamiltoniano está bien entendido para tiempos cortos. La pregunta interesante es que sucede cuando el tiempo tiende a infinito. Informalmente podemos



clasificar este problema en tres categorías: problemas de estabilidad, inestabilidad y como pasamos de un sistema estable a uno inestable.

Una respuesta parcial al problema de estabilidad fue dada por Kolmogorov, Arnold y Moser (Teorema de KAM) <sup>[23]</sup>. Para un sistema Hamiltoniano integrable en un espacio fase de dimensión  $2N$ , las trayectorias se mueven en una superficie de dimensión  $N$  (un toro de dimensión  $N$ ) en el cual el movimiento es cuasiperiódico. El teorema de KAM garantiza que si aplicamos una pequeña perturbación a un sistema integrable, un conjunto de medida distinta de cero produce trayectorias que se quedan en la superficie de dimensión  $N$  y el movimiento en esta superficie continua siendo cuasiperiódico. En sistemas Hamiltonianos con dos grados de libertad (un espacio fase de dimensión cuatro) el teorema de KAM es una solución al problema de estabilidad, sin embargo para sistemas con más grados de libertad el teorema de KAM es solamente una solución parcial al problema.

El problema de inestabilidad y la transición de un sistema estable a uno inestable a medida que cambiamos los parámetros del sistema, están siendo estudiados viendo propiedades estadísticas del sistema. El marco general en el cual se estudian propiedades estadísticas de un sistema determinista es el que se conoce como teoría ergódica <sup>[24, 25]</sup>.

Consideremos un espacio  $X$  con una  $\sigma$ -álgebra de conjuntos medibles  $S$  (eventos probables) y una medida de probabilidad  $\mu$  ( $\mu(X) = 1$ ). Nosotros trasladaremos este marco al estudio del billar de Sinai. El espacio fase donde se mueven las trayectorias es un espacio de dimensión tres cuyas coordenadas son la posición de la partícula y el ángulo  $\theta$ , que es el ángulo que forma el vector velocidad con el eje  $x$ . La magnitud del vector velocidad es invariante. La  $\sigma$ -álgebra esta formada por los conjuntos de Borel y la medida es la medida de Lebesgue normalizada; es decir, para un evento probable  $A$

$$\mu(A) = \frac{1}{N} \int_A d\theta \, dx \, dy$$

donde  $N$  es el factor de normalización. El flujo asociado al movimiento de la partícula en el billar,  $T^t$ , esta dado por

$$T^t \begin{pmatrix} x \\ y \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ \theta(t) \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ \theta(t) \end{pmatrix}$$

es la posición del billar en el espacio fase al tiempo  $t$ , dadas las condiciones iniciales  $(x, y, \theta)$  al tiempo  $t = 0$ .  $T^t$  preserva la medida  $\mu$ . Una de las principales manifestaciones de un comportamiento estadístico es la ergodicidad; dada una función  $f \in L^1(\mu)$ , definimos el promedio temporal de  $f$  como

$$f^*(x) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \int_0^s f(T^t(x)) dt \quad x \in X, t \in \mathbb{R}.$$

(la existencia de este límite en casi todos lados, respecto a la medida  $\mu$ , esta garantizada por el teorema ergódico de Birkhoff-Khinchin<sup>[25]</sup>).

Definimos el promedio espacial, para casi toda  $x \in X$ , como

$$\bar{f} = \int_X f d\mu$$

El teorema de Birkhoff-Khinchin también asegura que

$$\int_X f^* d\mu = \int_X f d\mu$$

y  $f^*$  es una función invariante, es decir,  $f^*(x) = f^*(T^t(x))$ . (Para la demostración del teorema de Birkhoff-Khinchin véase [25]). En particular, esto significa que el promedio temporal que una trayectoria está en un conjunto  $A \in X$  es proporcional a la medida de  $A$ . El contenido intuitivo de este teorema es el siguiente: a) el promedio temporal existe y b) si una trayectoria está arbitrariamente cerca de todos los puntos del espacio  $X$  entonces la trayectoria se queda en un conjunto arbitrario  $A$  una cantidad de tiempo igual a la medida de  $A$ .

**Definición 3.7** Decimos que un sistema es ergódico si el promedio temporal es igual al promedio espacial en casi todos lados.

Por el teorema de Birkhoff-Khinchin tenemos que una definición equivalente de ergodicidad es que un sistema es ergódico si y solo si los únicos conjuntos invariantes tienen medida cero o uno.

Otra propiedad importante que se estudia en estos sistemas es la que se conoce como la propiedad mezclante. Burdamente hablando, la ergodicidad no mezcla el espacio.

**Definición 3.8** Decimos que un sistema es mezclante si dados dos conjuntos medibles  $A, B \in \mathcal{S}$  tenemos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu(T^t A \cap B) = \mu(A) \mu(B).$$

En términos de dos funciones arbitrarias  $f, g \in L^2(\mu)$ , el mezclado se traduce en la condición

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_X f(T^t(x)) g(x) d\mu = \int_X f d\mu \int_X g d\mu.$$

En términos de esta definición podemos ver en que sentido los sistemas mezclantes tienen un comportamiento de relajación. Sea  $\rho(x)$  la densidad inicial,  $\rho(x) \geq 0$  tal que  $\int \rho(x) d\mu = 1$  y  $f$  una observable, entonces el comportamiento para tiempos largos de  $f$ , sujeto a la densidad inicial  $\rho(x)$ , es

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_X f(x) \rho(T^{-t}(x)) d\mu = \int_X f(x) d\mu \int_X \rho(x) d\mu = \int_X f(x) d\mu,$$

esto es, independiente de  $\rho$  y dependiente solamente del promedio def sobre la medida invariante  $\mu$ .

Un concepto aún más fuerte para describir un comportamiento estadístico es lo que se conoce como la propiedad  $K$  o un  $K$ -sistema<sup>[25]</sup> (la  $K$  es en honor a Kolmogorov). Intuitivamente hablando, cualquier experimento con resolución finita no nos da suficiente información para determinar el comportamiento de un  $K$  sistema. Imaginemos una partición de  $X$  en cuatro subconjuntos medibles  $A_1, A_2, A_3, A_4$ . Nos fijamos en la trayectoria de un solo punto en  $X$ . Supongamos que nuestro experimento solamente nos puede decir en cual de los cuatro conjuntos  $A_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) se encuentra el punto y lo único que conocemos además es la condición inicial. Digamos que tomamos esta medición  $n$ -veces. No importa que tan larga es  $n$  no podemos predecir en cual región estará el punto la  $(n+1)$ -vez. Daremos una definición más precisa de un  $K$  sistema.

**Definición 3.9** Decimos que un sistema es un  $K$ -sistema si existe una sub-álgebra,  $\mathcal{A}$ , del álgebra de conjuntos medibles que satisface

- i)  $A \subset T^t A$  para cualquier  $t \geq 0$
- ii)  $\bigcup_{t=-\infty}^{\infty} T^t A = \hat{0}$

donde  $\hat{0}$  denota el algebra de conjuntos de medida 0 o 1

iii)  $\overline{\bigvee_{t=-\infty}^{\infty} T^t A} = \hat{1}$

donde  $\bigvee_{t=-\infty}^{\infty} T^t A$  denota la suma de  $T^t A$ , que es la mínima sub-algebra de  $\hat{1}$  que contiene a cada  $T^t A$  y  $\hat{1}$  el algebra de todos los subconjuntos medibles.

De la definición se ve directamente que la imagen isomórfica de un K-sistema es un K-sistema.

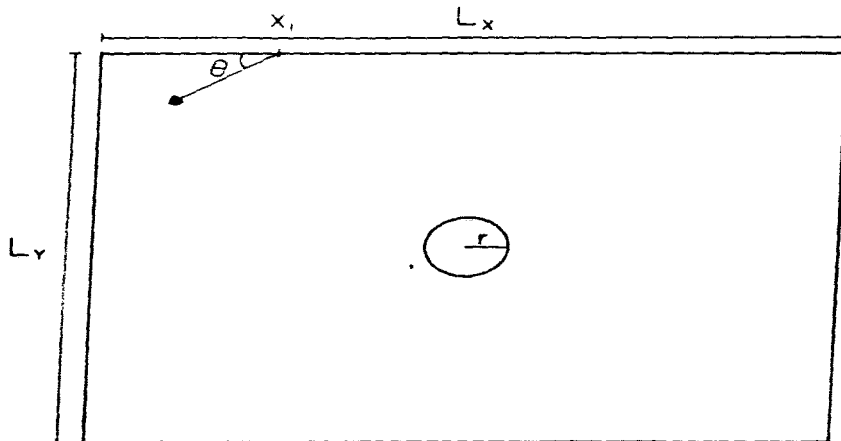


Figura 4.- El Billar de Sinai.

Veremos ahora que propiedades ergódicas posee el billar de Sinai. La pregunta que nos gustaría contestar es: ¿hasta que punto el billar de Sinai posee las propiedades estadísticas

discutidas recientemente? Un teorema de Lazutkin<sup>[26]</sup> nos dice que los billares de dos dimensiones no son ergódicos si: la frontera es convexa y de clase  $C^6$  (es decir si tiene derivadas continuas de orden 6) y la curvatura está acotada por arriba y por abajo por constantes positivas. (La demostración se basa en el teorema de Moser<sup>[27]</sup> sobre mapeos torcidos).

Bunimovitch<sup>[28]</sup> demostró que los billares que no poseen las restricciones anteriores son un K-sistema.

Nos interesa ahora estudiar un billar particular que aparece en problemas físicos de manera natural. Consideremos un gas formado por partículas que representamos por discos duros. Suponemos que estos discos están encerrados en una caja con condiciones periódicas a la frontera y que chocan elásticamente unos con otros. El modelo más sencillo que describe la situación anterior es el billar de Sinai que consiste de una mesa cuadrada o rectangular con condiciones periódicas a la frontera y un obstáculo circular en el centro (figura 4).

Sinai<sup>[28, 29]</sup> demostró que este sistema tiene propiedades estadísticas muy fuertes: es ergódico, mezclante y es un K-sistema. Como el problema de un sistema con un disco tiene propiedades estadísticas tan fuertes uno esperaría que el problema de un gas con n-partículas fuera por lo menos ergódico. Intuitivamente, uno pensaría que el sistema es más "estocástico" a medida que el número de partículas aumenta. Sinai conjetura que el método que utilizó para probar que el billar de dos dimensiones es ergódico también debe servir para el caso en que tenemos n-discos. Sin embargo, hasta la fecha no se ha podido demostrar esta conjetura.

#### REFERENCIAS

- [1] D. D' Humières, M.R. Beasley, B.A. Humberman and A. Libchaber, Phys. Rev. 26 A (1982) 3483; H.L. Swinney and J.P. Gollub, Hydrodynamic Instabilities and the Transition to Turbulence, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo (1981); H. Haken, Phys. Lett. 53 A (1975) 77; F.A. Hopf, D.L. Kaplan, H.M. Gibbs and R. L. Shoemaker, Phys. Rev. 25 A (1982) 2172; R. H. Simoyi, A. Wolf and H. L. Swinney, Phys. Rev. Lett. 49 (1982) 245.
- [2] M.R. Guevara, L. Glass and A. Shrier, Science 214, 1350 (1981).
- [3] M.R. Guevara and L. Glass, J. Math. Biol. 14, 1 (1982).
- [4] B. Van der Pol and J. Van der Mark, Philos. Mag. 6, (1928) 763.
- [5] L. Glass and R. Pérez, Phys. Rev. Lett. 48 (1982) 1772 y la bibliografía contenida en este artículo; L. Glass, M.R. Guevara, A. Shrier and R. Pérez, Physica 7D (1983), 89-101.
- [6] J. Testa, J. Pérez and C. Jeffries, Phys. Rev. Lett.

- 48,714 (1982). K. Tomita and T. Kai, J. Stat. Phys. 21, 65 (1979).
- [7] G.M. Zaslavsky, Phys. Lett. 69 A, 145 (1978); P. Couillet, C. Tresser and A. Arneodo, Phys. Lett. 77 A, 669 (1979).
- [8] M.L. Cartwright, J.E. Littlewood and J. Landon, Math. Soc. 20, 180 (1945); N. Levinson, Ann. Math. 50, 127 (1949); C. Hayashi, Non Linear Oscillations in Physical Systems (Mc. Graw-Hill, N.Y. 1964).
- [9] M. Levi, Mem. Am. Math. Soc. 32, 244 (1981).
- [10] M. J. Feigenbaum, J. Stat. Phys. 19, 25 (1978); J. Stat. Phys. 21, 669 (1979). P. Collet and J. P. Eckman, Iterated Maps on the Interval as Dynamical Systems (Birkhauser, Basel, (1980)).
- [11] J. Stavans, F. Heslot and A. Libchaber, Phys. Rev. Lett. 55, 596 (1985).
- [12] J. Guckenheimer and P. Holmes, Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields, Springer-Verlag, Berlin, (1983).
- [13] V.I. Arnold, Am. Math. Soc. Trans., 2nd Ser. 46, 213 (1965).
- [14] A. Denjoy, C.R. Acad. Sci. 195, 478 (1932); M.R. Herman, Lecture Notes in Mathematics, vol. 597 (Springer-Verlag, Berlin 1977).
- [15] E.D. Siggia and A. Zippelius, Phys. Rev. Lett. 47, 835 (1981).
- [16] P. Cvitanovi, B. Shairman and B. Soderberg, Phys Scr. 32, 263 (1985).
- [17] M.H. Jensen, P. Bak, T. Bohr, Phys. Rev. Lett. 50, 1637 (1983).
- [18] M.H. Jensen, P. Bak and T. Bohr, Phys. Rev. A 30, 1960 (1984); S.J. Shenker and L.P. Kadanoff, J. Stat. Phys. 27, 631 (1982); S.J. Shenker, Physica 5 D, 405 (1982).
- [19] T. Hasley, M.H. Jensen, L.P. Kadnoff, I. Procaccia and B.I. Shraiman, Phys. Rev. A 33, 1141 (1986).
- [20] P.L. Boyland, Commun. in Math. Phys. 106, 353 (1986).
- [21] B.A. Friedman, Ph. D. Thesis, (1985).
- [22] M.V. Berry, European J. Phys. 2, (1981) 91.
- [23] A. Kolmogorov DAN SSSR, 98, 4 (1954) 527; J. Moser, Stable and Random Motions in Dynamical Systems, Princeton University Press, N.J. (1973).
- [24] P. Walters, An Introduction to Ergodic Theory, Springer-Verlag, New York (1982).
- [25] I.P. Cornfeld, S.V. Fomin and Ya.G. Sinai, Ergodic Theory, Springer-Verlag, New York (1982).
- [26] V.F. Lazutkin, Math. USSR Izvestija 7, (1973) 185.
- [27] J. Moser, Math. Phys. Kl, 1.
- [28] L.A. Bunimovitch, Comm. Math. Phys. 65, (1979) 295.
- [29] Ya. G. Sinai, Russ. Math. Surv. 25, (1970) 137; Ya. G. Sinai, Introduction to Ergodic Theory, Princeton University Press, N.J. (1977).

#### 4. CUENCAS DE ATRACCION EN SISTEMAS BIESTABLES

El estudio de los sistemas dinámicos no lineales se puede complicar por el hecho de que condiciones iniciales en el espacio fase generan órbitas con distintos estados asintóticos; esto es existen sistemas dinámicos que tienen más de un atractor. La cuenca de atracción es el conjunto de condiciones iniciales cuyas trayectorias, a medida que el tiempo pasa, se acercan al atractor. En los sistemas que presentan más de un atractor, tenemos puntos que no son atraídos por alguno de ellos y separan las cuencas de los distintos atractores, a este conjunto de puntos le llamamos el conjunto de puntos frontera.

Antes de dar un ejemplo donde se presenta la coexistencia de atractores daremos una definición más precisa de lo que entendemos por un atractor extraño. Para esto daremos antes algunas definiciones.

Dado un flujo (continuo o discreto)  $\phi_t: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  (sección 2.1) definimos un conjunto invariante  $S$  del flujo, como un conjunto  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  tal que

$$\phi_t(x) \in S \text{ para } x \in S \text{ y para toda } t.$$

**Definición 4.1.** i) Un punto  $p$  es llamado no errante para el flujo  $\phi_t$ , si para toda vecindad  $U$  de  $p$  existe una  $t$  tal que  $\phi_t(U) \cap U \neq \emptyset$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . El conjunto no errante que denotamos por  $\Omega$  es el conjunto de todos estos puntos.

ii) Un punto  $q$  es llamado errante para el flujo  $\phi_t$ , si para toda vecindad  $V$  de  $q$  existe una  $t$  tal que  $\phi_t(V) \cap V = \emptyset$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . El conjunto errante que denotamos por  $A$  es el conjunto de todos estos puntos.

**Definición 4.2.** El conjunto  $\omega$ -límite de  $x$  para el flujo  $\phi_t$  es el conjunto de puntos de acumulación de  $\phi_t(x)$ ,  $t \rightarrow \infty$ . El conjunto  $\alpha$ -límite de  $x$  para el flujo  $\phi_t$  es el conjunto de puntos de acumulación de  $\phi_t$ ,  $t \rightarrow -\infty$ .

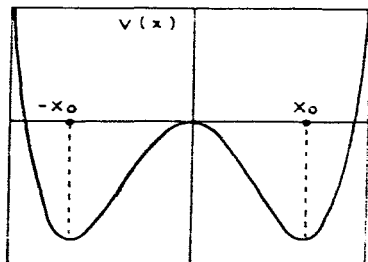
**Definición 4.3.** Decimos que un conjunto cerrado invariante,  $A$ , es indescomponible si para todo par de puntos  $x, y$  en  $A$  y  $\epsilon > 0$ , existen  $x = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = y$  y  $t_1, \dots, t_n \neq 1$  tal que la distancia de  $\phi_{t_1}(x_{1-1})$  a  $x_1$  es menor que  $\epsilon$ .

**Definición 4.4.** Un atractor es un conjunto cerrado, invariante e indescomponible  $A$  con la propiedad de que dada  $\epsilon > 0$ , existe

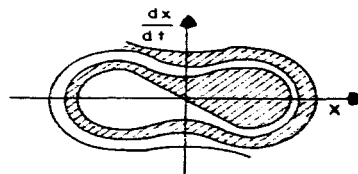
un conjunto  $U$  con medida de Lebesgue positiva en una  $\epsilon$ -vecindad de  $A$  tal que si  $x \in U$  entonces el conjunto  $\omega$ -límite de  $x$  está contenido en  $A$ , y la órbita futura de  $x$  está contenida en  $U$ .

Sin mucha precisión podemos decir que un atractor es una región acotada del espacio fase a la cual todas las órbitas suficientemente cercanas a él son atraídas después de cierto tiempo.

Decimos que un atractor es extraño si es sensible a condiciones iniciales, es decir, si puntos iniciales arbitrariamente cercanos se separan macroscopicamente en el atractor para tiempos suficientemente largos.



( a )



( b )

Figura 1.- (a) Función potencial  $V(x)$  para un punto que se mueve en una dimensión. Con fricción, casi cualquier condición inicial eventualmente cae en los puntos de equilibrio  $x_0$ ,  $-x_0$ . (b) Espacio Fase (posición-velocidad) para el sistema en (a). La cuenca de atracción para  $x_0$  (región hashurada) está separada de la cuenca de atracción  $-x_0$  (región blanca) por una frontera que es una curva suave.

Para ilustrar los conceptos de coexistencia de atractores, cuencas de atracción y frontera entre las cuencas, consideremos el caso de una partícula moviéndose con fricción en un potencial  $V(x)$  como el que se muestra en la figura 1a. Para casi cualquier condición inicial, la órbita eventualmente caerá



en reposo en uno de los dos puntos estables  $x = \pm x_0$ . La figura 1b esquemáticamente muestra el espacio fase del sistema y las cuencas de los dos puntos atractores. Si escogemos una condición inicial en la región blanca tiende a  $x = -x_0$ , mientras que una condición inicial en la región sombreada va a  $x = x_0$ . La frontera que separa estas dos regiones es una curva suave que pasa por el origen. La dinámica manda puntos frontera en puntos frontera, es decir, que la frontera entre las cuencas en este caso es un invariante bajo la acción del sistema.

En este ejemplo tenemos que la frontera es una curva suave<sup>[1]</sup>, sin embargo existen una gran cantidad de ejemplos donde esto no sucede. Es decir, existen sistemas donde la frontera es un fractal<sup>[2]</sup>. Entre ellos tenemos el oscilador de Van der Pol forzado<sup>[3]</sup> y el mapeo del círculo<sup>[4]</sup> que estudiaremos en este capítulo.

En muchos de los fenómenos estudiados hasta ahora, la descripción detallada de la dinámica del sistema no se conoce, ni se tienen hasta ahora herramientas suficientes para entenderla. En las regiones del espacio fase donde más de dos atractores coexisten se ha visto que estudiar la frontera entre las cuencas de atracción puede ayudarnos a entender algunos aspectos de la dinámica del sistema. Esto se debe básicamente a que el conjunto de órbitas caóticas forman parte de la cerradura del conjunto de órbitas inestables<sup>[8]</sup>. En otras palabras, "las órbitas inestables revelan el esqueleto de las órbitas caóticas y son cruciales para entender los atractores extraños"<sup>[9]</sup>. Uno de los métodos utilizados para estudiar la estructura de la frontera entre las cuencas se conoce como el método de sensibilidad de estados finales<sup>[1,5,6]</sup>. Básicamente lo que se pretende es determinar la probabilidad promedio de cometer un error en la predicción, sobre cuáles son las condiciones iniciales que van a un atractor y cuáles al otro. El procedimiento es el siguiente: Dada una región se escogen  $N$  condiciones iniciales al azar y se iteran para ver a cual de los atractores se aproxima. Luego se aplica una perturbación del orden de  $\epsilon$  (i.e.  $x \rightarrow x + \delta x$ ,  $|\delta x| = \epsilon$ ). La probabilidad de predecir erróneamente hacia que atractor tienden los puntos se estima como una fracción  $g(\epsilon) = N'/N$ , donde  $N$  es el número total de condiciones iniciales consideradas y  $N'$  es el número de condiciones iniciales cuyo estado final es distinto después de la perturbación. Se ha visto que  $g(\epsilon) = \epsilon^\beta$ . Cuando la frontera no es un conjunto fractal tenemos que  $\beta = 1$ ; cuando la frontera es fractal  $\beta$  es menor que uno. A  $\beta$  se le conoce como el exponente de incertidumbre. Más aún  $\beta = D - d$ , donde  $D$  es

la dimensión del espacio fase y  $d$  es la dimensión fractal de la frontera entre las cuencas.

Nuestro objetivo ahora es analizar, mediante la función  $f(\alpha)$ , la estructura de la frontera entre las cuencas de atracción en algunas regiones donde encontramos biestabilidad en el mapeo del círculo.

#### 4.1 Frontera entre las Cuencas para el Mapeo del Círculo

Trabajaremos ahora con el mapeo del círculo (ecuación 3.3). En el capítulo anterior vimos algunas propiedades del mapeo en el caso en que el parámetro  $b < 1/2\pi$ . Mencionamos que para  $b = 1/2\pi$  tenemos la transición al caos.

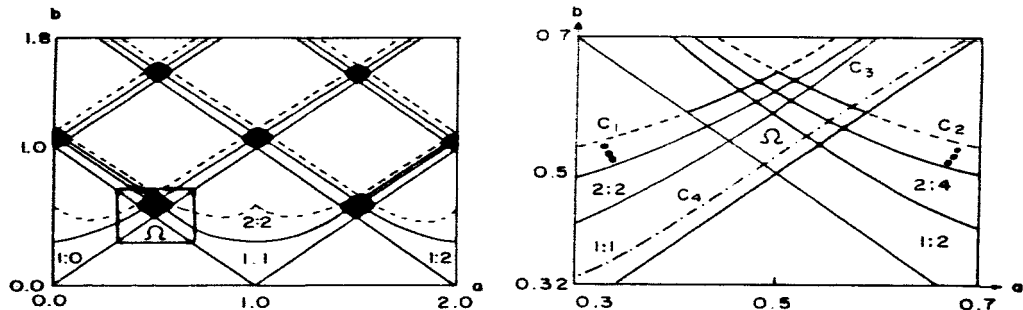


Figura 2.- (a) Esquema de algunas de las fronteras de regiones con cerramientos de fase localmente estables para el mapeo del círculo en el espacio de parámetros  $(a,b)$ ; (b) Amplificación de la región  $\Omega$  donde analizamos la curva  $f(\alpha)$  para la frontera entre las cuencas.

Nos interesa estudiar el caso en que  $b > 1/2\pi$ . En esta región dos "franjas" con distintos periodos pueden cruzarse<sup>[9]</sup> dando lugar a zonas para las cuales dos órbitas estables de cualquier periodo pueden coexistir. En la figura 2a) tenemos el espacio de parámetros  $(a,b)$  donde se pueden ver estas zonas de cruce. Las líneas en la figura 2a) son las fronteras, en el espacio de parámetros  $(a,b)$ , de algunas de las regiones donde se presenta el amarramiento de fase. G. Martínez-Mekler et

al<sup>(4)</sup> estudiaron la región  $\Omega$  que se muestra en la figura 2b). Calcularon las curvas, denotadas en la figura 2b) por  $C_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , que delimitan esta región y mostraron que en esta región se encuentra toda la cascada de bifurcaciones que tiene el mapeo logístico. Mostraron también que la estructura de las cuencas de atracción es invariante bajo bifurcaciones. Esta invariancia implica que existe un homeomorfismo del círculo sobre sí mismo que manda el conjunto frontera de Cantor para una pareja de parámetros  $(a_1, b_1)$ , en el conjunto frontera de Cantor para otra pareja  $(a_2, b_2)$  cualquiera. Asimismo vieron que la invariancia se pierde en el punto de crisis, es decir, en el punto donde el sistema deja de ser biestable. En este punto únicamente queda un atractor y la frontera desaparece.

El análisis de las cuencas de atracción que nosotros estudiamos se hizo en la región  $\Omega$ , donde coexisten dos atractores de distintos periodos. En la figura 3 graficamos el mapeo del círculo (3.3) para valores de los parámetros  $(a, b)$  en  $\Omega$ . El intervalo A en la figura 3 pertenece a la cuenca de atracción de una de las órbitas estables (con excepción de un conjunto de medida cero que corresponde a órbitas inestables) y el intervalo B pertenece (excepto el conjunto de medida cero) a la cuenca de atracción de la órbita estable que coexiste.

Nótese que mientras el máximo D está dentro del cuadrado  $A^2$  delimitado por los puntos  $w_1, w_2, w_3, w_4$ , la función manda el intervalo A en sí mismo. Si en cambio el máximo de la función, D, está por debajo de la recta identidad, es decir, por debajo de la recta a 45°, entonces la biestabilidad se pierde. Si el máximo rebasa la línea  $w_3 w_4$ , la biestabilidad se pierde nuevamente, pero de manera distinta a la anterior ya que llegamos al punto de crisis mencionado anteriormente<sup>(8)</sup>. En ambos casos estamos afuera de la región  $\Omega$ . El intervalo A depende de los valores de los parámetros  $(a, b)$  y de aquí se ve claramente que la función restringida a A es el mapeo logístico. Mientras estemos dentro de  $\Omega$  el intervalo A es un invariante de la función<sup>(4)</sup>. Una situación similar se tiene para el intervalo B, únicamente que en este caso nos tenemos que fijar en el mínimo de la función dentro del cuadrado  $B^2$  (el cuadrado construido, de la misma forma que  $A^2$ , utilizando el intervalo invariante B).

Dados los intervalos invariantes A, B tenemos que sus respectivas preimágenes son intervalos que pertenecen a las respectivas cuencas (excepto un conjunto de medida cero formado por las órbitas inestables). Los extremos de los intervalos A, B son puntos que pertenecen a la frontera entre las cuencas. Si calculamos la preimagen de estos puntos extremos obtenemos nuevos puntos frontera y continuando este proceso, esto es, cada vez calculamos la preimagen de los nuevos puntos frontera,

obtenemos tantos puntos frontera como queramos (este algoritmo esta descrito detalladamente en el programa 1 al final del capitulo).

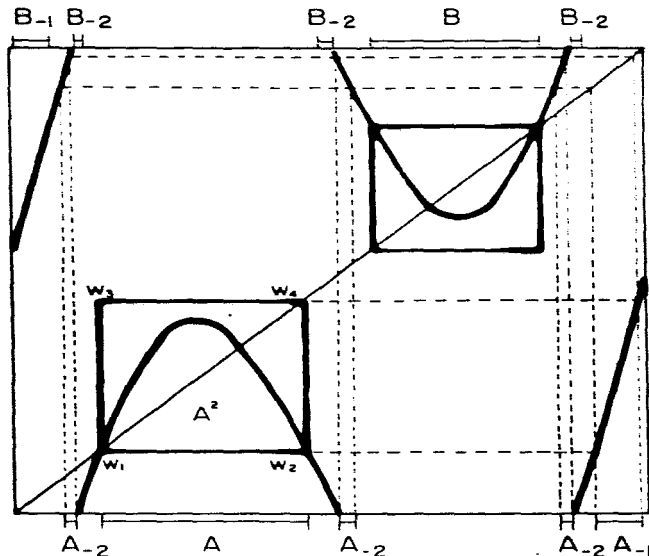


Figura 3.- Grafica del mapeo del círculo para parámetros  $(a, b)$  en la región  $\Omega$ .  $A$  y  $B$  denotan los intervalos invariantes que corresponden a los dos atractores.  $(A_{-1})$  y  $(B_{-1})$  denotan los intervalos que después de una iteración van a  $A$  y  $B$  respectivamente.  $(A_{-2})$  y  $(B_{-2})$  denotan los intervalos que después de dos iteraciones van a  $A$  y  $B$  respectivamente.

Otra forma de obtener de obtener puntos frontera es dando una partición,  $(x_i; i = 1, 2, \dots)$ , suficientemente fina del dominio de la función, es decir, el intervalo  $[0, 1]$ . Aplicando

la función a cada uno de los puntos de la partición e iteranto, tenemos que ver a cual de los dos intervalos invariantes van a caer las iteradas. Si las iteradas de  $x_1$  van a un intervalo invariante y las iteradas de  $x_{1,1}$  al otro intervalo invariante, tomamos el punto medio como un punto frontera.

Dentro de la región  $\Omega$  (figura 2b) se escogieron distintos valores de los parámetros  $(a,b)$  de tal forma que las orbitas estables que coexisten tuvieran distintos periodos. Las funciones  $f(\alpha)$  calculadas para la frontera de las cuencas de atracción de distintas órbitas biestables dentro de la región  $\Omega$  resultaron ser las mismas. Se calculó la función  $f(\alpha)$  para cada uno de estos conjuntos frontera obtenidos. El promedio de puntos en cada uno de estos conjuntos era trescientos mil y donde los puntos frontera se obtuvieron utilizando los dos procedimientos descritos anteriormente. También calculamos la curva  $f(\alpha)$  con alrededor de cien mil puntos en el conjunto de puntos frontera con el fin de ver como variaba la curva y no se observaron diferencias apreciables entre estas curvas. Todos estos cálculos se repitieron para las otras regiones de biestabilidad que se ven en la gráfica de la figura 2a), y para aquellas que están a la misma altura que  $\Omega$  no se observó ninguna diferencia.

Para obtener la curva  $f(\alpha)$  seguimos los mismos lineamientos expuestos en la sección 2.10 del segundo capítulo. Es decir, una vez que tenemos los puntos que pertenecen a la frontera, cubrimos el conjunto de puntos frontera con celdas de longitud  $l$ , con  $l$  variando de  $10^{-6}$  a  $10^{-7}$  aproximadamente. Graficamos el logaritmo de  $l$  contra el logaritmo del número de celdas distintas del vacío para cada  $l$  y escogimos  $l$  en el intervalo donde teníamos una buena aproximación a una recta. La pendiente de esta recta es la dimensión fractal. Dada la longitud de las celdas de la cubierta calculamos la probabilidad en cada una de las celdas y utilizamos la función de partición (2.27). Despejamos  $\tau(q)$  y utilizando la ecuación (2.40) calculamos  $\alpha(q)$  y teniendo las  $\alpha(q)$  por (2.41) obtuvimos  $f(\alpha)$ . En la figura 4 se puede ver la gráfica de la curva  $f(\alpha)$ , en la figura 5 graficamos  $q$  contra  $D_q$  para los mismos valores de los parámetros  $(a,b) = (0.45, 0.6)$ .

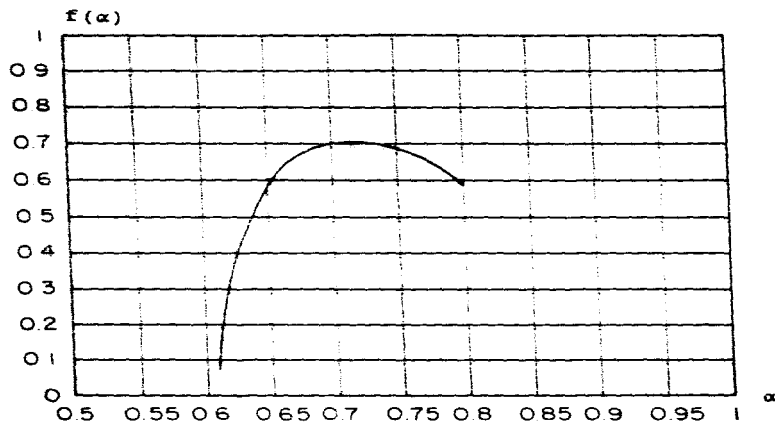


Figura 4.- La función  $f(\alpha)$  para la frontera entre las cuencas del mapeo del círculo con parámetros  $a = 0.45$  y  $b = 0.6$ .

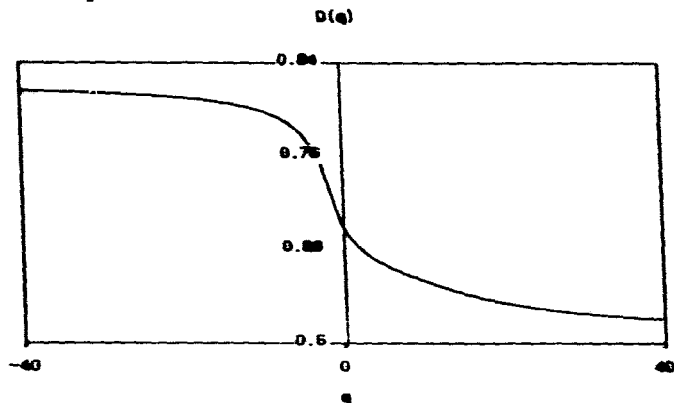


Figura 5.- La función  $D_q$  para la frontera entre las cuencas del mapeo del círculo con parámetros  $a = 0.45$  y  $b = 0.6$ .

#### 4.2 El billar de Sinai Modificado.

En esta sección estudiaremos el billar de Sinai<sup>(7)</sup> modificado como se muestra en la figura 6. Lanzamos una pelota en una caja de dimensión dos en cuyo centro tenemos una barrera circular y dos hoyos que etiquetamos como A y B. Los choques en las paredes y en la barrera central son elásticos, es decir, el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión. Si consideramos la pelota como una partícula y el punto de donde la lanzamos la condición inicial, no importa de donde empezemos todas las condiciones iniciales excepto un conjunto de medida de Lebesgue cero<sup>(7)</sup>, generan órbitas que eventualmente se salen. Estamos interesados en las condiciones iniciales que generan las órbitas que no se salen, es decir, estamos interesados en los puntos que separan las órbitas que se salen por A de las órbitas que se salen por B. Estos puntos forman el conjunto de puntos frontera entre A y B. Este es un modelo de un proceso biestable, ya que los dos hoyos pueden pensarse como atractores.

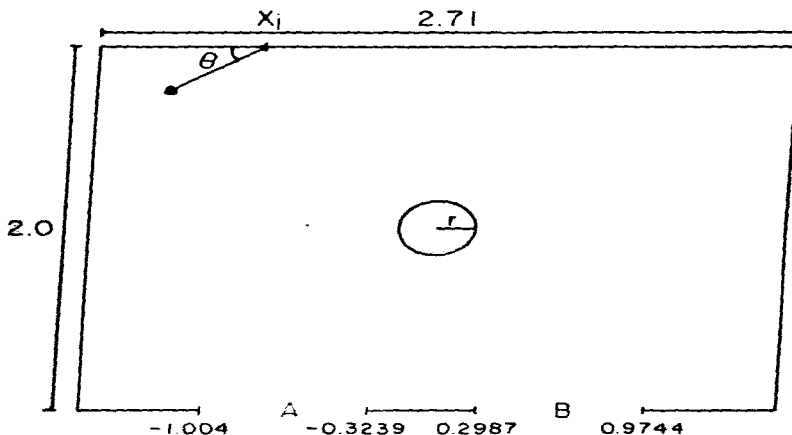


Figura 6.- Billar de Sinai Modificado.

Dejando el radio de la barrera circular fijo, como la energía de la partícula se conserva, el espacio fase de este

sistema es un espacio de dimensión tres que consiste de la posición de la partícula y el ángulo con que ésta es lanzada (la magnitud del vector velocidad es irrelevante). S. Bleher et al.<sup>[7]</sup> analizaron una sección transversal de dimensión dos en el espacio tridimensional. Es decir, dejaron una coordenada fija y calcularon el exponente de incertidumbre  $\beta$ . Para todas las regiones que consideraron encontraron que  $\beta = 0.2$ , considerando claro está el error estadístico.

Para comparar la frontera de este modelo con la frontera del mapeo del círculo, estudiaremos una sección transversal unidimensional que escogemos como sigue: cuando el tiempo es cero, fijamos  $y = 1$  y el ángulo  $\theta$  del vector velocidad (figura 6). Tomamos en la línea superior del billar puntos, que denotamos por  $x_i$ , igualmente espaciados uno del otro. Cada uno de estos puntos lo usamos como una condición inicial. Si la órbita de  $x_i$  se sale por alguno de los hoyos y la órbita de  $x_{i+1}$  se sale por el otro hoyo, tomaremos el punto medio entre  $x_i$  y  $x_{i+1}$  como un punto de la frontera.

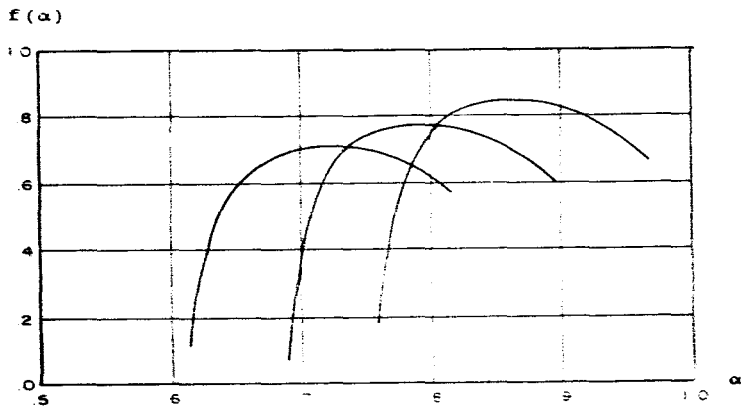


Figura 7.- La función  $f(\alpha)$  para la frontera entre las cuencas en el billar de Sinai modificado con las mismas ventanas que se muestran en la figura 6 y radios del obstáculo (de izquierda a derecha)  $r = 0.06$ ,  $r = 0.12$  y  $r = 0.35$  respectivamente.



Dados los puntos de la frontera, obtuvimos el rango de valores adecuado de  $l$  graficando el logaritmo de  $l$  contra el logaritmo del número de celdas distintas del vacío, sin embargo en este caso resulto que el rango de valores de  $l$  adecuado es del orden de  $10^{-5}$ . Calculamos la función  $f(\alpha)$ , con aproximadamente cien mil puntos pertenecientes a la frontera (para obtener esta cantidad de puntos frontera probamos alrededor de tres millones de condiciones iniciales). Variando el radio de la barrera circular de chico a grande, dejando todos los otros parámetros fijos, el máximo de la función  $f(\alpha)$  se incrementa y como en el capítulo 2 vimos que para  $q = 1$ ,  $\alpha$  y  $f(\alpha)$  coinciden la curva se tiene que mover hacia la derecha (figura 7). Sin embargo la forma de la curva es invariante.

En la figura 8 se muestra la gráfica de la función  $f(\alpha)$  para la frontera entre las cuencas en la región de biestabilidad  $\Omega$  del mapeo del círculo (3.3), con parámetros  $a = 0.45$  y  $b = 0.6$ , y para la frontera en el billar de Sinai modificado, con la barrera circular de radio  $r = 0.06$  y ángulo  $\theta = 42$  grados. En la figura 9 se muestra la gráfica de la función  $D_q$  para la frontera del billar de Sinai con estos mismos parámetros.

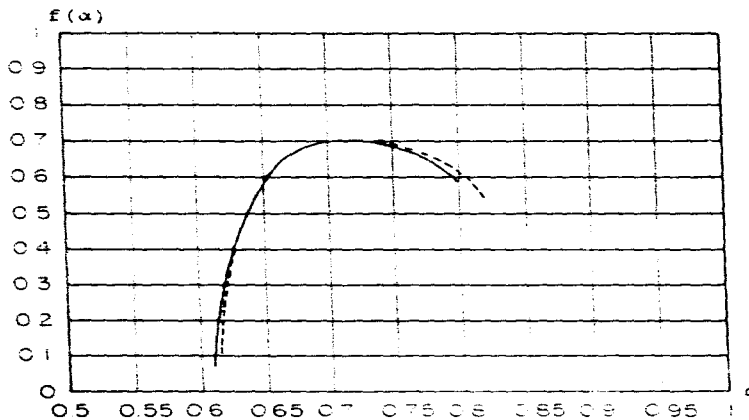


Figura 8.- La curva discontinua representa la función  $f(\alpha)$  para el billar de Sinai que se muestra en la figura 6 y con obstáculo de radio  $r = 0.06$ . La curva continua representa la función  $f(\alpha)$  para el mapeo del círculo con parámetros  $a = 0.45$  y  $b = 0.6$ .

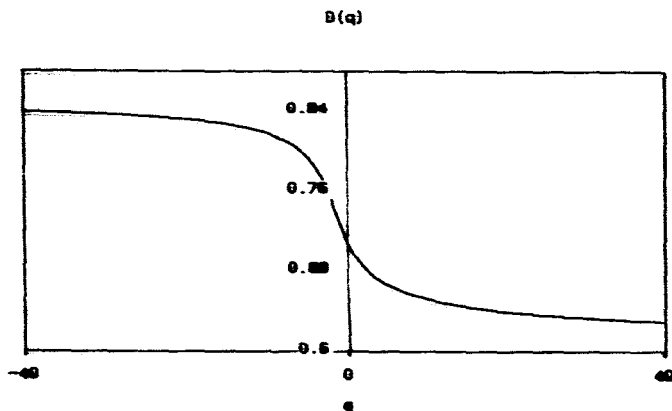


Figura 9.- La función  $D$  para la frontera entre las cuencas en el billar de Sinai que aparece en la figura 6 con obstáculo de radio  $r = 0.06$ .

En este segundo ejemplo al considerar los condiciones iniciales que no tocan las regiones A y B, tenemos un conjunto invariante, o la intersección de la recta  $y = 1$  con un conjunto invariante. Este conjunto invariante es un subconjunto de las órbitas periódicas en el billar de Sinai sin modificaciones que es un sistema conservativo.

Aun siendo sistemas físicamente distintos, es decir, en el primer modelo estudiamos el conjunto invariante de un sistema disipativo y en el segundo un subconjunto de un conjunto invariante de un sistema conservativo podemos ver que la frontera de los dos sistemas produce, dentro de los límites del cálculo numérico, curvas  $f(\alpha)$  prácticamente indistinguibles.

#### REFERENCIAS

- [1] S. McDonald, C. Grebogi, E. Ott and J.A. Yorke, *Physica* 17 D, 125 (1985).
- [2] C. Grebogi, E. Ott and J.A. Yorke, *Phys. Rev. Lett.* 48, 1507 (1982); *Physica* 7 D, 181(1983).
- [3] M. Levi, *Mem. Amer. Math. Soc.* 32, 244 (1981). N. Levinson, *Ann. Math.* 50, 127 (1949).
- [4] G.C. Martínez-Mekler, R. Mondragón and R. Pérez, *Phys. Rev. A* 33, 2143 (1986).
- [5] C. Grebogi, S. McDonald, E. Ott and J.A. Yorke, *Phys.*

- Lett. 99 A, 415(1983).
- [6] S. Bleher, C. Grebogi, E. Ott and R. Brown, Phys Rev A 38, 930(1988).
  - [7] R. Pérez and L. Glass, Phys. Lett. 90 A, 441(1982).
  - [8] J.P. Eckmann & I. Procaccia, Rev. Mod. Phys. 57, 617 (1985).
  - [9] D. Auerbach, P. Cvitanovi, J.P. Eckmann, G. Gunaratne & I. Procaccia, Phys. Rev. Lett. 58, 2387 (1987); O. Biham & W. Wenzel, Phys. Rev. Lett. 63, 819 (1989).

#### APENDICE DEL CAPITULO 4

```

C  PROGRAMA PARA CALCULAR LA FRONTERA DE LAS CUENCAS DE
C  ATRACCION EN C EL MAPEO DEL CIRCULO.
C  ESTE PROGRAMA CALCULA LOS PUNTOS DE LAS FRONTERAS DE LAS
C  CUENCAS C UTILIZANDO EL METODO DE AISLAR RAICES DE UNA
C  ECUACION. (0 < A < 1 C Y B > 0)

C  X ES UN ARREGLO DONDE SE GUARDAN LOS PUNTOS FRONTERA

DOSPI=6.283185307179588600
ALFA=1.0000000000000000

C  Z0 Y Z1 SON EL MINIMO Y MAXIMO DE LA FUNCION
C  RESPECTIVAMENTE.

Z0 = 0.500 + ALFA * DACOS (ALFA/B)
Z1 = 1.000-Z0

C  Z00 Y Z11 SON EL VALOR DE LA FUNCION EN EL MINIMO Y MAXIMO
C  RESPECTIVAMENTE .

Z00 = Z0 + A + B * DSIN(DOSPI*Z0)
Z11 = Z1 + A + B * DSIN(DOSPI*Z1)

C  CALCULO DE LOS PUNTOS FIJOS DE LA FUNCION CON EL FIN DE
C  DETERMINAR LAS DOS CUENCAS DE ATRACCION (A Y B).

IF ((Z11.GT.(2.000+Z1)).AND.(Z11.LE.(3.000+Z1))) THEN
  X(1) = 0.2500 - ALFA * DACOS((2.000-A)/B)
ELSEIF ((Z11.LE.(2.000+Z1)).AND.(Z11.GT.(1.000+Z1))) THEN
  X(1) = 0.2500 - ALFA * DACOS((1.000-A)/B)
ELSEIF ((Z11.LE.(1.000+Z1)).AND.(Z11.GT.Z1)) THEN
  X(1) = 0.7500 - ALFA * DACOS(A/B)
ELSE
  WRITE(6,*)"ME SALI DEL RANGO"
END IF

IF ((Z00.LT.(Z0-1.000)).AND.(Z00.GE.Z0)) THEN
  X(4) = 0.2500 + ALFA * DACOS((1.000-A)/B)
ELSEIF ((Z00.LT.Z0).AND.(Z00.GE.(Z0 - 1.000))) THEN
  X(4) = 0.7500 + ALFA * DACOS(A/B)
ELSEIF ((Z00.LT.(Z0 - 1.000)).AND.(Z00.GE.(Z0-2.000))) THEN
  X(4) = 0.7500 + ALFA * DACOS((A-1.000)/B)
ELSE
  WRITE(6,*)"ME SALI DEL RANGO"
ENDIF

X1 = X(1) + A + B * DSIN(DOSPI*X(1))
H = 0.0000000000000001

C  LLAMAMOS LA SUBROUTINA F(...) DONDE SE CALCULAN LOS PUNTOS
C  FRONTERA DE LOS MAPEOS INVERSOS Y SE VA LLEVANDO EL CONTEO

```

C DE LOS PUNTOS.

```
DO CALL F(A,B,X1,Z0,Z1,H,Z)
  X(2) = Z
  X1= X(4)+ A + B * DSIN(DOSPI*X(4))
  Z0 = 0.5DO + ALFA * DACOS(ALFA/B)
  Z1 = 1.0DO - Z0
  H = 0.0000000000001
DO CALL F(A,B,X1,Z0,Z1,H,Z)
  X(3) = Z
  K2 = 1
  K = 4
20 K1 = 0
  DO I= K2,K
    DO J = 0,2
      H = 0.00000001DO
      X1 = X(I) + J
      Z0 = 0.000000001DO
      Z1 = X(1)
      CALL F(A,B,X1,Z0,Z1,H,Z)
      IF ((Z.GT.0).AND.(Z.NE.X(1)).AND.(Z.NE.X(2))
        .AND.(Z.NE.X(3)).AND.(Z.NE.X(4))) THEN
        K1 = K1 + 1
        X(K+K1) = Z
      ENDIF
50 Z0 = X(4)
      Z1 = 1.0DO
      CALL F(A,B,X1,Z0,Z1,H,Z)
      IF ((Z.GT.0).AND.(Z.NE.X(2)).AND.(Z.NE.X(3))
        .AND.(Z.NE.X(1)).AND.(Z.NE.X(4))) THEN
        K1 = K1 + 1
        X(K+K1) = Z
      ENDIF
      Z0 = X(2)
      Z1 = X(3)
      CALL F(A,B,X1,Z0,Z1,H,Z)
      IF ((Z.GT.0).AND.(Z.NE.X(2)).and.(Z.NE.X(3))
        .AND.(Z.NE.X(1)).AND.(Z.NE.X(4))) THEN
        K1 = K1 + 1
        X(K+K1) = Z
      ENDIF
    END DO
  END DO
  K2 = K + 1
  K = K1 + K
  IF (K.LE.N) THEN
    GO TO 20
  ELSE
```

```

      DO I= 1,K
        WRITE(6,*)X(I)
      END DO
    ENDIF
  END

```

```

SUBROUTINE F(A,B,X1,Z0,Z1,H,Z)
C  EN ESTA SUBROUTINA SE CALCULAN PUNTOS FRONTERA UTILIZANDO LA
C  IMAGEN INVERSA DE CADA ITERADA.
  YO= Z0 + A + B * DSIN(DOSPI*Z0) - X1
  Y1= Z1 + A + B * DSIN(DOSPI*Z1) - X1
  IF DABS(Y0) .LT. H) THEN
    Z = Z0
    GO TO 10
  ENDIF

  IF (DABS(Y1) .LT.H) THEN
    Z=Z1
    GO TO 10
  ENDIF

  IF (YO/Y1.GT.0.0DO) THEN
    GO TO 10
  ENDIF

  Y = YO/Y1
20 DO WHILE(J.LE.10000)
    Z3 = (Z0+Z1)/2.0DO
    Y3 = Z3 + A + B * DSIN(DOSPI*Z3) - X1
    IF (DABS(Y3) .LT.H) THEN
      Z = Z3
      J = 10001
    ELSE IF (YO/Y3.LT.0.0DO) THEN
      Z1 = Z3
      J = J + 1
    ELSE
      Z0 = Z3
      J = J + 1
    ENDIF
  ENDIF
  END DO
10 RETURN
END

```

---

**C PROGRAMA FRONTERA ENTRE LAS CUENCAS EN EL BILLAR DE SINAI.**  
**C EN ESTE PROGRAMA SE CALCULA LA FRONTERA ENTRE LAS CUENCAS**  
**C PARA EL BILLAR DE SINAI. FRON(..) ES EL ARREGLO DONDE SE**  
**C GUARDAN LOS PUNTOS ENCONTRADOS.**

```

DIMENSION T(10), IND(10)
DIMENSION FRON(70000)
C  DIMENSIONES DEL BILLAR Y RADIO DEL OBSTACULO.
    TTOT = 0
    HY = 1.0D00
    HX = 5.4D00
    R = 0.2D00
    RCUA = R**2
    K = 1

C  VENTANAS
    V11 = -1.25D00
    V12 = -0.37D00
    V21 = 0.48D00
    V22 = 1.05D00

C  X01 ES EL VALOR INICIAL. SE CALCULA EL TAMAÑO DEL OBSTACULO.
    IANTER = 1
    X01 = -5.4D00
    DO II = 1,160
        X = -0.4D00 + (0.005D00*II)
        Y = DSQRT(R ** 2 - X ** 2)
    END DO

C  SE VARIA LA CONDICION INICIAL Y SE DA EL ANGULO DE
C  LANZAMIENTO DE LA PARTICULA.
    DO 60 IK = 1,100000
        X01 = X01 + 0.000108D00
        X0 = X01
        Y0 = 1.0D00
        SIG = -0.8D00
        V = -2.7D00
        IFLAG = 0
        XOV = X0
        YOV = Y0
        JJJ = 0
        IA = 0

C  DETERMINAMOS EL NUMERO DE VECES QUE PERMITIREMOS QUE LA
C  PARTICULA REBOTE.
10  IF (IA.EQ.1) GOTO 70
    IF (JJJ.EQ.20) THEN IA = 1
        DO I = 1,10
            T(I) = 0D00
            IND(I) = 0
        END DO

C  VEMOS SI LA PARTICULA PEGA CON EL CIRCULO Y CON CADA UNA DE
C  LAS PAREDES DEL BILLAR.

```

```

IF (IFLAG.EQ.1) GOTO 20
VYSX = V * YO + SIG * XO
AUX = VYSX ** 2 - (V ** 2 + SIG ** 2) *
      (XO ** 2 + YO ** 2 - R ** 2)

IF (AUX.LE.0) THEN
  GOTO 20
ELSE
  AUX = DSQRT(AUX)
END IF

T(5) = (-VYSX + AUX) / (V ** 2 + SIG ** 2)
IF (T(5).LE.0) GOTO 20

T(6) = (-VYSX - AUX) / (V ** 2 + SIG ** 2)

IF (T(6).LE. 0) THEN
  XOV = XO
  YOY = YO
  XO = SIG * T(5) + XOV
  YO = V * T(5) + YOY
ELSE
  XOV = XO
  YOY = YO
  XO = SIG * T(6) + XOV
  YO = V * T(6) + YOY
END IF

IFLAG = 1
YOXO = YO ** 2 - XO ** 2
SSIG = (SIG * YOXO - 2 * V * XO * YO) / RCUA
V = -(2 * SIG * XO * YO + V * YOXO) / RCUA
SIG = SSIG
JJJ = JJJ + 1
IFLAG = 0
20 IF (SIG.EQ. 0D00) THEN
  IND(1) = 9
  T(9) = 10000000000D00
  GOTO 30
ELSE
  IND(1) = 1
  T(1) = (HX - XO) / SIG
  IF (T(1).GT.0.00000001D00) THEN
    GOTO 30
  ELSE
    IND(1) = 2
  END IF
  T(2) = -(HX + XO) / SIG
END IF
30 IF (V.EQ.0D00) THEN
  IND(2) = 9

```



ESTA TESIS NO DEBE  
SALIR DE LA BIBLIOTECA

```
T(9) = 10000000000D00
GOTO 40
ELSE
  IND(2) = 3
  T(3) = (HY - YO) / V
  IF (T(3).GT.0.00000001D00) THEN
    GOTO 40
  ELSE
    IND(2) = 4
  END IF
  T(4) = -(HY + YO) / V
END IF
40 IF (T(IND(1)).LT.T(IND(2))) THEN
  TIEMPO = T(IND(1))
  AIND = IND(1)
ELSE
  TIEMPO = T(IND(2))
  AIND = IND(2)
END IF

C REDIRECCIONAMOS LA PARTICULA DESPUES DE QUE PEGO CON ALGUNA
C DE LAS PAREDES O DEL OBSTACULO

XOV = XO
YOV = YO
XO = SIG * TIEMPO + XO
YO = V * TIEMPO + YO
IF (AIND.LT. 2.5D00) THEN
  SIG = -SIG
ELSE
  V = -V
END IF

TTOT = TTOT + TIEMPO

C EN CASO DE QUE HAYA PEGADO EN LA PARED DONDE TENEMOS LAS
C VENTANAS VEMOS SI LA PARTICULA SE QUEDO O NO DENTRO DEL
C BILLAR

IF (ABS(YO + 1.0D00) .LT. 0.00000001D00) THEN
  GOTO 50
ELSE
  GOTO 10
END IF

50 IF ((V11.LT. XO).AND.
(XO.LT.V12)) THEN
  IAUX = 1
ELSEIF ((V21 .LT.XO).AND.
(XO.LT.V22)) THEN
  IAUX = 2
ELSE
  GOTO 10
END IF
```

```

C SE GUARDAN LOS PUNTOS FRONTERA
      IF (IAUX.EQ.IANTER) GOTO 60
      IANTER = IAUX
      FRON(K) = X01 - 0.000054D00
      K = K + 1
60 CONTINUE
70 END

```

---

C PROGRAMA PARA EL CALCULO DE LA FUNCION  $f(\alpha)$ .

```

C ESTE PROGRAMA CALCULA LA FUNCION  $f(\alpha)$ , TOMANDO UNA CUBIERTA
C DONDE TODOS LOS ELEMENTOS DE LA CUBIERTA TIENEN LA MISMA
C LONGITUD. UNA VEZ QUE TENEMOS ORDENADOS TODOS LOS PUNTOS,
C CALCULAMOS CUALES Y CUANTOS SON LOS INTERVALOS QUE CONTIENEN
C PUNTOS DEL CONJUNTO.
C ASIMISMO CALCULAMOS CUANTOS PUNTOS HAY EN CADA INTERVALO.
C SE DA  $q$  Y SE CALCULA  $t(q)$ . POSTERIORMENTE UTILIZANDO LAS
C FORMULAS (2.40) (2.41) EXPUESTAS EN EL CAPITULO 2 CALCULAMOS
C  $\alpha$  Y  $f(\alpha)$ .

```

```

IMPLICIT REAL*8 (A-G,O-Z)
DIMENSION JCONT(100000),X(420000),L(600),CONT(100000)

```

C FIJAMOS EL NUMERO DE INTERVALOS Y SU LONGITUD

```

LMAX = 0
NUMINT = 100000
I = 1
Q = 0.0D0
DIST = 1.0D00/DFLOAT(NUMINT)
A = 0.0D00
B = DIST

```

C SE CALCULA EL NUMERO DE PUNTOS EN CADA INTERVALO

```

DO 10, J = 1, ITOTPUN
20 IF ((A.LE.X(J)).AND.(X(J).LT.B)) THEN
      ICONT = ICONT + 1
      GO TO 110
    ELSE
      A = B
      B = B + DIST
    END IF

```

C CUANTOS INTERVALOS HAY QUE INTERSECTAN AL CONJUNTO Y CUANTOS PUNTOS HAY EN CADA UNO DE ELLOS

```

      IF (ICONT.GT.0) THEN

```

```

        JCONT(I) = ICONT
        L(ICONT) = L(ICONT) + 1
        I = I + 1
        ICONT = 0
    END IF
    GO TO 20
10 CONTINUE

    IF (ICONT.GT.0) THEN
        JCONT(I) = ICONT
        L(ICONT) = L(ICONT) + 1
    END IF

    LMAX = I - 1      IR = 0
    IRR = 0
    DO IH = 1, 500
        IR = IH * L(IH)
        IRR = IRR + IR
        IF (L(IH).GT.0) THEN
            WRITE(30,*)IH," NUM. INT CON IH PUNTOS ",L(IH)
        END IF
    END DO
    WRITE(30,*)"TOTAL DE PUNTOS EN L(IH)", IRR

C   CONVERTIMOS TODAS LAS VARIABLES A VARIABLES EN DOBLE
C   PRECISION

    ANUMINT = DLOG(DFLOAT(NUMINT))
    TOTPUN = DLOG(DFLOAT(ITOTPUN))
    ALMAX = DLOG(DFLOAT(LMAX))

C   CALCULAMOS LA DIMENSION FRACTAL

    DO = ALMAX / ANUMINT
    TOTNUM = TOTPUN / ANUMINT

C   CALCULAMOS  $\tau(q)$ 

    DO J = 1,160
        Q = -40.5DO + (0.5DO *DFLOAT(J))
        SUM = 0.0DO
        SUM1 = 0.0DO
        DO I= 1, LMAX
            CONT(I) = DFLOAT(JCONT(I))
            SUM = SUM + CONT(I)**Q
            SUM1 = SUM1 + (CONT(I)**Q)*DLOG(CONT(I))
        END DO
        TAU = (Q * TOTPUN - DLOG(SUM)) / ANUMINT

C   CALCULAMOS D(q)

```

```
IF ((Q.LT.1).OR.(Q.GT.1)) THEN
  DEQ = TAU / (Q - 1)
END IF

C  CALCULAMOS  $\alpha$  Y  $f(\alpha)$ 

  ALFA = TOTNUM - (SUM1 / (ANUMINT *SUM))
  FALFA = Q * ALFA - TAU
END DO

END
```

## 5. CONCLUSIONES

La función  $f(\alpha)$  ha sido utilizada para caracterizar conjuntos fractales en los cuales la distribución de puntos es irregular, conjuntos que actualmente se les denomina multifractales.

Según varios autores<sup>[1]</sup>, el análisis de algunos resultados experimentales a través de la función  $f(\alpha)$ , ha sido fundamental para asociar el producto de las observaciones a modelos teóricos simples. Sin embargo, y en función de los elementos presentados en el capítulo anterior, un hecho salta a la vista, y es que hace falta hacer un llamado de atención al uso que se ha dado a esta función para clasificar resultados experimentales.

En esta tesis estudiamos dos sistemas que desde el punto de vista físico son diferentes: el mapeo del círculo, que es un sistema disipativo, y el billar de Sinai modificado, que proviene de un sistema Hamiltoniano.

El elemento esencial del trabajo fue el cálculo de la función  $f(\alpha)$  para la frontera entre las cuencas de atracción del primero y para la intersección de una curva con la frontera entre las cuencas de atracción del segundo. Contrario a lo que ingenuamente se pudiera esperar, los resultados obtenidos indican que dicha función, para ciertos valores de los parámetros, es prácticamente la misma en ambos casos.

Esto podría deberse a que, ciertas propiedades dinámicas inherentes a los dos sistemas sean esencialmente equivalentes - en el sentido de que el escalamiento del conjunto frontera entre las cuencas sea el mismo - en cuyo caso las curvas  $f(\alpha)$  deberían de ser exactamente iguales y las pequeñas diferencias que se observan en la gráfica (figura 8 del capítulo anterior) se deben a las aproximaciones consideradas. Otra razón que explicaría los resultados obtenidos sería considerar que aun cuando los dos sistemas no tengan la misma dinámica - esto es, que el conjunto de puntos frontera de cada sistema presente distinto escalamiento - las diferencias entre las funciones  $f(\alpha)$  son tan pequeñas que probablemente las aproximaciones numéricas no son suficientemente adecuadas para distinguir entre ambas. Cabe también pensar que las restricciones que se impusieron al billar de Sinai a fin de poderlo comparar con el mapeo del círculo, transformaron el problema en uno que, frente a nuestra caracterización es equivalente al mapeo del círculo. Más concretamente, al fijar una de las posiciones de los puntos iniciales así como el ángulo con que es lanzada la partícula inicialmente, tal vez reduce el problema a un mapeo del círculo.

En el primer caso, los resultados de la caracterización por medio de la función  $f(\alpha)$  parecen implicar que modelos físicamente distintos pueden poseer las mismas propiedades de escalamiento. Por esta razón, si bajo esta caracterización estos fenómenos están en la misma clase, este intento de clasificación pierde utilidad.

En el segundo caso, la indistinguibilidad de las dos funciones  $f(\alpha)$  puede explicarse por las limitaciones computacionales, ya que es imposible realizar la operación de pasar a un límite infinito. Sin embargo y hasta donde fue razonable hacerlo en este trabajo, al variar el número de puntos frontera en los cálculos realizados no se encontraron cambios significativos.

Por último, la posibilidad que sugiere el tercer caso, nos da una pauta para seguir analizando el problema del billar de Sinai, haciendo distintos cortes transversales para verificar realmente su dinámica se asemeja a la de un mapeo del círculo.

Por otra parte, podemos señalar que si se quieren comparar situaciones físicas experimentales entre ellas o situaciones experimentales con modelos teóricos hay que tomar en cuenta, además de las consideraciones previas que intervienen en el cálculo de la función  $f(\alpha)$ , una serie de incertidumbres de carácter experimental que van en detrimento de la confiabilidad de una caracterización a través de esta función. Nuestros resultados indican que el uso de las curvas  $f(\alpha)$  para distinguir entre procesos experimentales o entre estos procesos y modelos teóricos puede ser inadecuado.

Podemos concluir que la similitud de las curvas  $f(\alpha)$  de la frontera de las cuencas de atracción, no es un criterio adecuado para discernir entre la dinámica de estos sistemas, que no solamente son distintos físicamente sino que también desde el punto de vista matemático, ya que uno de ellos no preserva el área mientras que en el caso del billar de Sinai modificado el conjunto de puntos frontera es un conjunto de puntos invariante de un sistema que preserva el área.

#### REFERENCIAS

- [1] U. Frish and G. Parisi, Turbulence and Predictability in Geophysical Fluid Dynamics and Climate Dynamics (editors M. Ghil, R. Benzi and G. Parisi, North Holland, New York, 84-88); M.H. Jensen, L.P. Kadanoff, A. Libchaber, I. Procaccia and J. Stavans, Phys. Rev. Lett. 55, 2798(1985); J.A. Glazier, M.H. Jensen, A. Libchaber and J. Stavans, Phys. Rev. A 34, 1621 (1986); D. Bensimon, M.H. Jensen and L. P. Kadanoff, Phys. Rev. A 33, 3622 (1986).
- [2] M. Holschneider, J. Stat. Phys., 50 (1988) 963.
- [3] A. Arneodo, G. Grasseau and M. Holschneider, Phys. Rev. Lett. 61 (1988) 2281.