

"ESTABILIDAD ESTRUCTURAL
Y
LINEAS DE CURVATURA"

TESIS PROFESIONAL
MATEMÁTICO.

José Fernando Arriaga Cervantes

FALLA DE ORIGEN

Marzo 1991.



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice.

Introducción.	1
Teorema de Estabilidad Estructural para puntos umbilicales	4
Anexos	
A.1 El espacio $\text{Imm}^{r,s}(M, \mathbb{R}^2)$	76
A.2 Configuración Principal de la Inmersión	78
A.3 Teorema de Hartman-Grobman para difeomorfismos	91
A.4 Teorema de Hartman-Grobman para flejos	113
A.5 Lema de Hadamard	114
Bibliografía	115

Introducción.

Uno de los conceptos centrales en el ámbito de los sistemas dinámicos es el de estabilidad estructural. ¿Cuándo una "forma" permanece la misma si aquello que la determina sufre pequeñas perturbaciones? Tal es la pregunta. Y en el contexto en el que ésta brota se precisan las ideas de "forma", "permanecer la misma" y de "pequeña perturbación". Tales contextos abarcan siempre ideas topológicas.

En este trabajo el contexto en el que surge la pregunta incluye, por un lado, la "geometría de inmersiones" en la cual se dota a una 2-variedad compacta, conexa y orientable de una "forma" que es la configuración principal de la inmersión para la variedad; y por otro, el espacio topológico $\text{Imm}^{\text{f.s.}}(M, \mathbb{R}^3)$ donde cobra sentido la noción de "pequeña perturbación" a partir del concepto de cercanía de una inmersión. En este espacio topológico se comparan las inmersiones, que determinan la

"forma" y a través del concepto de equivalencia Topológica se comparan las "formas" para saber si "permanecen las mismas".

En el trabajo se presenta la demostración de un teorema de estabilidad estructural relativo a tales inmersiones y a los puntos umbilicales de la misma. Este teorema es de carácter local y da condiciones de suficiencia para que una inmersión sea estructuralmente estable en uno de sus puntos umbilicales. Fue presentado por Sotomayor y Gutiérrez en [2] y es parte de un esfuerzo por establecer condiciones de suficiencia y necesidad para la estabilidad estructural de inmersiones atendiendo a aspectos relativos a sus curvaturas principales. Tales aspectos son los puntos umbilicales y las foliaciones principales maximal y minimal de la inmersión y constituyen la configuración principal de la misma.

En el Anexo se presentan los desarrollos de los mapas

teóricos necesarios para ubicar el teorema dentro del contexto de la "geometría de las Inmersiones" y entender la problemática de la estabilidad estructural. (Inm^{r,1}(M, \mathbb{R}^n), la Configuración Principal de la Inmersión, y Estabilidad Estructural en puntos).

Aparece también la demostración del Teorema de Hartman-Arobman para difeomorfismos en razón de la importancia que reviste en el campo de los sistemas dinámicos y de que desempeña un papel crucial en la demostración del teorema de estabilidad estructural que llevamos a cabo en el trabajo.

Teorema de Estabilidad Estructural en puntos umbilicales.

Sea M una 2-variedad compacta, convexa y orientable de clase C^∞ . Recordemos que una inmersión $\alpha: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una función cuya diferencial $D\alpha(p)$ en cada punto $p \in M$ es inyectiva. Como se puede ver en el Anexo (A.2), a la variedad M se le asocia, a través de la inmersión α una estructura geométrica llamada Configuración Principal.

Si definimos $\alpha_1(p) = D\alpha(p)(\partial/\partial u_1(p))$ y $\alpha_2(p) = D\alpha(p)(\partial/\partial u_2(p))$,

el mapeo de Gauss es $N_\alpha: M \rightarrow S^2$

$$N_\alpha(p) = \frac{\alpha_1(p) \times \alpha_2(p)}{\|\alpha_1(p) \times \alpha_2(p)\|},$$

y su diferencial en p : $DN_\alpha(p): T_{\alpha(p)} M \rightarrow T_{N_\alpha(p)} S^2$.

$DN_\alpha(p)$ es un mapeo lineal auto-adjunto y sus valores propios $k_1(p)$ y $k_2(p)$ determinan las direcciones de mayor y menor curvatura sobre $\alpha(M)$ en $\alpha(p)$. Tales valores se llaman curvaturas principales máxima y mínima de M en p , asociadas a α .

Si las curvaturas máxima y mínima coinciden en un punto p , éste se llama punto umbilical. El conjunto de puntos umbilicales de M según la inmersión α se denota por U_α .

Los vectores propios asociados en cada punto a $k_1(p)$ y $k_2(p)$ son ortogonales e indican las direcciones de curvatura máxima y mínima en M según α . Se conocen como las direcciones de curvatura principal, y las foliaciones asociadas a tales direcciones se denotan por \mathcal{F}_1 y \mathcal{F}_2 . Así, dada M y α se tiene lo que se llama la configuración principal $\mathcal{P}_\alpha = (\mathcal{U}_\alpha, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$.

Por otro lado, si $\text{Inm}^{r,s}(M, \mathbb{R}^3)$ es el espacio topológico de inmersiones de M en \mathbb{R}^3 dotado de la topología compacto-abierta y considerando los órdenes hasta de orden $s \leq r$, tenemos la siguiente definición de estabilidad estructural para las inmersiones en puntos.

Definición. Una inmersión $\alpha \in \text{Inm}^{r,s}(M, \mathbb{R}^3)$, $s \leq r$, es C^s -ESTRUCTURALMENTE ESTABLE PRINCIPAL EN UN PUNTO $p \in M$, si para toda vecindad $\mathcal{U}(p)$ de p en M existe una vecindad $\mathcal{V}(\alpha)$ de α en $\text{Inm}^{r,s}(M, \mathbb{R}^3)$ tal que para toda $\beta \in \mathcal{V}(\alpha)$ existen un punto $q = q(p) \in \mathcal{U}(p)$ y un homeomorfismo h entre vecindades $W(p)$ y $W(q)$ de p y q en M

$$h: W(p) \longrightarrow W(q) \quad \text{tal que}$$

(i) $h(p) = q$

(ii) h aplica $f'_\alpha|_W(p)$ sobre $f'_\alpha|_W(q)$

(iii) h aplica $f'_\alpha|_W(p)$ sobre $f'_\alpha|_W(q)$.

TEOREMA. Una inmersión $\alpha \in \text{Imm}^r(M, \mathbb{R}^3)$, $r \geq 1$ es C^3 -EEP en un punto $p \in M$ si se satisface la siguiente condición D , llamada también condición de Darboux:

Existen una parametrización de α entorno a $p \in M$

$$(u, v) : (M, p) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$$

y una isometría en \mathbb{R}^3

$$T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{tal que } T(\alpha(p)) = 0$$

$$y \quad (T \circ \alpha)(u, v) = (u, v; \frac{k}{2}(u^2 + v^2) + \frac{a}{6}u^3 + \frac{b}{2}uv^2 +$$

$$\frac{c}{6}v^3 + r(u, v)), \quad \text{donde}$$

$$r(u, v) = o((u^2 + v^2)^2) \quad y$$

$$\gamma) \quad b(b-a) \neq 0$$

$\delta)$ Se satisface una cualquiera de las siguientes desigualdades:

$$D_1: \left(\frac{c}{2b}\right)^2 + 2 < \frac{a}{b}$$

$$D_2: \quad 1 < \frac{a}{b} < \left(\frac{c}{2b}\right)^2 + 2 \quad (a \neq 2b)$$

$$D_3: \quad 0 < \frac{a}{b} < 1.$$

Primera parte.

Lo primero que vamos a hacer es encontrar las ecuaciones diferenciales de las líneas de curvatura asociadas a la inmersión α a través de las coordenadas dadas por la parametrización (u, v) y la isometría T . Por el carácter local de la parametrización, las ecuaciones diferenciales que encontraremos son las que determinan la configuración principal entorno al punto $p \in M$, que está representado como el origen de coordenadas en \mathbb{R}^2 . Además, en vista de que α es una inmersión, la isometría T la podemos elegir de modo que el plano tangente a $\alpha(M)$ en $T(\alpha(p)) = (0, 0)$ sea $\mathbb{R}^2(u, v)$ el plano de los parámetros de α . Así podemos escribir

$$T(\alpha(u, v)) = (u, v; h(u, v)) \quad \text{donde}$$

$$h(u, v) = \frac{k}{2}(u^2 + v^2) + \frac{a}{6}u^3 + \frac{b}{2}uv^2 + \frac{c}{6}v^3 + r(u, v), \quad \textcircled{1}$$

$$\text{donde } r(u, v) = o((u^2 + v^2)^2).$$

En la representación de h , k es la curvatura principal de la inmersión α en el punto umbilical p . En la representación no aparece el término en uv , en razón de que es posible que la isometría Γ incluya una rotación que haga desaparecer el coeficiente correspondiente.

En lo que sigue vamos a escribir α en vez de $(\Gamma \circ \alpha)$ con el fin de simplificar la notación.

Para encontrar las ecuaciones diferenciales de las líneas de curvatura de α entorno al punto p es necesario conocer los primeros y segundos coeficientes fundamentales asociados a la inmersión. Una vez conocidos dichos coeficientes escribiremos los tres términos

$E_\alpha f_\alpha - e_\alpha F_\alpha$, $E_\alpha g_\alpha - e_\alpha G_\alpha$ y $g_\alpha F_\alpha - f_\alpha G_\alpha$,
para finalmente obtener la ecuación requerida.

$$(E_\alpha f_\alpha - e_\alpha F_\alpha) du^2 + (E_\alpha g_\alpha - e_\alpha G_\alpha) du dv + (g_\alpha F_\alpha - f_\alpha G_\alpha) dv^2 = 1$$

Escribimos a continuación los coeficientes fundamentales de la inmersión α asociados a su representación $T(\alpha(u, v))$.

$$E_\alpha = 1 + \left(\frac{\partial}{\partial u} h(u, v) \right)^2$$

$$F_\alpha = \frac{\partial}{\partial u} h(u, v) \frac{\partial}{\partial v} h(u, v)$$

$$G_\alpha = 1 + \left(\frac{\partial}{\partial v} h(u, v) \right)^2$$

$$e_\alpha = \frac{\partial^2}{\partial u^2} h(u, v) \sqrt{\left(\frac{\partial}{\partial u} h(u, v) \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial v} h(u, v) \right)^2 + 1}$$

$$f_\alpha = \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} h(u, v) \sqrt{\left(\frac{\partial}{\partial u} h(u, v) \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial v} h(u, v) \right)^2 + 1}$$

$$g_\alpha = \frac{\partial^2}{\partial v^2} h(u, v) \sqrt{\left(\frac{\partial}{\partial u} h(u, v) \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial v} h(u, v) \right)^2 + 1}$$

Ahora bien, en el caso particular dado por la representación tenemos las siguientes derivadas parciales:

$$\frac{\partial}{\partial u} h(u, v) = ku + \frac{a}{2} u^2 + \frac{b}{2} v^2 + \frac{\partial}{\partial u} r(u, v)$$

$$\frac{\partial}{\partial v} h(u, v) = kv + \frac{c}{2} v^2 + buv + \frac{\partial}{\partial v} r(u, v)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2} h(u, v) = k + au + \frac{\partial^2}{\partial u^2} r(u, v)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} h(u, v) = bv + \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} r(u, v)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial v^2} h(u, v) = k + cv + \frac{\partial^2}{\partial v^2} r(u, v)$$

de donde podemos obtener:

$$F_x f_x - e_x F_x = (bv + M_1(u, v)) \left(\left(\frac{\partial}{\partial u} h(u, v) \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial v} h(u, v) \right)^2 + 1 \right)^{-1/2}$$

$$F_x g_x - e_x G_x = ((b-a)u + cv + M_2(u, v)) \left(\left(\frac{\partial}{\partial u} h(u, v) \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial v} h(u, v) \right)^2 + 1 \right)^{-1/2}$$

$$F_x g_x - f_x G_x = (bv + M_3(u, v)) \left(\left(\frac{\partial}{\partial u} h(u, v) \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial v} h(u, v) \right)^2 + 1 \right)^{-1/2}$$

donde $M_i(u, v) = o(u^2 + v^2)$ con $i = 1, 2, 3$.

De modo que la ecuación diferencial de las líneas de curvatura, expresada en términos de los coeficientes del polinomio $h(u, v)$ es

$$\frac{(bv + M_1(u, v))dv^2 - ((b-a)u + cv + M_2(u, v))dvdu - (bv + M_3(u, v))du^2}{\left(\left(\frac{\partial}{\partial u} h(u, v) \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial v} h(u, v) \right)^2 + 1 \right)^{1/2}} = 0$$

equivalente a la ecuación:

$$(bv + M_1(u, v))dv^2 - ((b-a)u + cv + M_2(u, v))dvdu - (bv + M_3(u, v))du^2 = 0 \quad (3)$$

Haciendo $M_i(u, v) \equiv 0$, $i=1,2,3$, obtenemos una ecuación diferencial que aproxima a la original:

$$bv \, dv^2 - ((b-a)u + cv) \, du \, dv - b \, v \, du^2 = 0$$

Esta ecuación también se puede escribir del siguiente modo:

$$bv \left(\frac{dv}{du} \right)^2 - ((b-a)u + cv) \left(\frac{dv}{du} \right) - bv = 0 \quad \text{--- (4)}$$

Vamos a analizar la última ecuación tanto para distinguir algunas propiedades del campo vectorial asociado a la misma, como para obtener las soluciones que son líneas rectas. Estas soluciones jugarán un papel importante en la segunda parte de la demostración. Supondremos, entonces, que se satisface la condición ϵ) de la condición 0 del Teorema.

De la ecuación diferencial obtenemos

$$\frac{dv}{du} = \frac{(b-a)u + cv \pm \sqrt{((b-a)u + cv)^2 + 4b^2v^2}}{2bv} \quad \text{--- (5)}$$

Además la ecuación ⑤ es homogénea:

$$f(u, v) = \frac{(b-a)u + cv \pm \sqrt{((b-a)u + cv)^2 + 4b^2v^2}}{2bv}$$

$$f(\delta u, \delta v) = \frac{(b-a)(\delta u) + c(\delta v) \pm \sqrt{((b-a)(\delta u) + c(\delta v))^2 + 4b^2(\delta v)^2}}{2b(\delta v)}$$

$$= \frac{\delta((b-a)u + cv) \pm \sqrt{\delta^2((b-a)u + cv)^2 + 4b^2\delta v^2}}{\delta(2bv)}$$

$$= \frac{\delta((b-a)u + cv) \pm \delta \sqrt{(b-a)u + cv)^2 + 4b^2v^2}}{\delta(2bv)}$$

$$= \frac{(b-a)u + cv \pm \sqrt{((b-a)u + cv)^2 + 4b^2v^2}}{2bv}$$

$$= f(u, v).$$

De la homogeneidad de la ecuación original que las isoclinas asociadas son líneas rectas. Veamos cuáles son las soluciones de la forma $v = tu$, es decir, las soluciones rectas que parten del origen.

Aprovechando la homogeneidad de la ecuación podemos

hacer $u=1$, $x = v = \frac{dx}{du}$. Así,

$$x = \frac{b-a + cx \pm \sqrt{((b-a) + cx)^2 + 4b^2x^2}}{2bx}$$

$$2bx^2 - (b-a) - cx = \pm \sqrt{((b-a) + cx)^2 + 4b^2x^2}$$

$$(2bx^2 - (b-a) - cx)^2 = ((b-a) + cx)^2 + 4b^2x^2$$

$$4b^2x^4 + c^2x^2 + (b-a)^2 + 4bcx^2 - 4bx^2(b-a) + 2(cx(b-a)) =$$

$$(b-a)^2 + 2(b-a)cx + c^2x^2 + 4b^2x^2, \text{ de donde}$$

$$4b^2x^4 - 4bcx^3 - 4b(b-a)x^2 - 4b^2x^2 = 0$$

$$4b^2x^4 - 4bcx^3 + (4ab - 8b^2)x^2 = 0$$

$$4x^2(b^2x^2 - bcx + ab - 2b^2) = 0, \text{ y tener}$$

$$\begin{cases} x=0 \\ x_i = \frac{c}{2b} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2b}\right)^2 - \frac{a}{b} + 2} \end{cases}, i=1,2.$$

En suma las soluciones rectas expresadas en la forma $r = tu$ corresponden a $t=0$, $t=\tau_1$ o $t=\tau_2$,

$$\text{con } \tau_1 = \frac{c}{2b} - \sqrt{\left(\frac{c}{2b}\right)^2 - \frac{a}{b} + 2}$$

$$\tau_2 = \frac{c}{2b} + \sqrt{\left(\frac{c}{2b}\right)^2 - \frac{a}{b} + 2}.$$

Hacemos notar también que $\frac{dr}{du} \neq 0$ a lo largo de la línea $u=0$:

$$\text{Si } u=0, \quad \frac{dr}{du} = \frac{cr \pm (cr)^2 + 4b^2 r^2}{2br} = \frac{cr}{2br} \pm \left(\frac{cr}{2br}\right)^2 + 1 \neq 0.$$

Volvamos en lo que sigue a involucrar, por primera vez en la demostración del Teorema, a las desigualdades D_1 , D_2 , D_3 que aparecen en la parte 8) de la condición D.

La forma de hacer esto es a través de la relación angular que guardan entre sí las soluciones rectas de las ecuaciones diferenciales 5.1 y 5.2.

Definamos $l_0 = \{(u, v) \mid u > 0, v = 0\}$

$l_1 = \{(u, v) \mid v = \gamma_1 u, u > 0\}$

$l_2 = \{(u, v) \mid v = \gamma_2 u, u > 0\}$

donde
$$\gamma_1 = \frac{c}{2b} - \sqrt{\left(\frac{c}{2b}\right)^2 - \frac{a}{b} + 2}$$

$$\gamma_2 = \frac{c}{2b} + \sqrt{\left(\frac{c}{2b}\right)^2 - \frac{a}{b} + 2}$$

Sea θ el ángulo formado por los semirrayos l_1 y l_2 .

Demostraremos que si $\gamma_1 \gamma_2 > -1$, el ángulo $\theta > \pi/2$;

a demás, si $\gamma_1 \gamma_2 < -1$, el ángulo $\theta < \pi/2$.

Supongamos entonces que $\gamma_1 \gamma_2 > -1$. En tal caso

$$1 + \gamma_1 \gamma_2 > 1 + (-1) = 0. \quad \text{Como } \operatorname{tg} \theta = \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{1 + \gamma_1 \gamma_2} \quad \square$$

$$\gamma_2 - \gamma_1 = 2 \sqrt{\left(\frac{c}{2b}\right)^2 - \frac{a}{b} + 2} > 0, \quad \text{tenemos}$$

$$\operatorname{tg} \theta > 0, \quad \text{de donde } \theta \in (0, \pi/2) \cup (\pi, 3\pi/2).$$

Ahora bien, si $\gamma_1 \gamma_2 > 1$ se presentan los

siguientes dos casos: $-1 < \gamma_1 \gamma_2 < 0$

$$0 < \gamma_1 \gamma_2 < 1$$

En el primer caso ($-1 < r_1, r_2 < 0$) las signos de las pendientes r_1 y r_2 son desiguales; en el segundo caso ($0 < r_1, r_2$) las pendientes r_1 y r_2 tienen signos iguales.

Si $r_1 > 0$ y $r_2 > 0$, entonces $\theta \in (0, \pi/2)$.

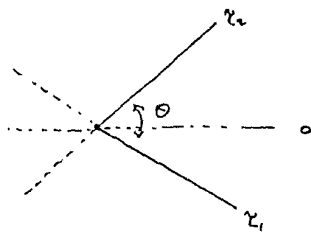
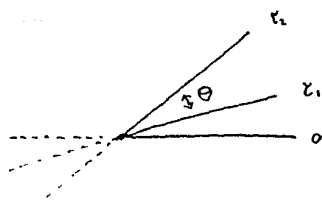
Si $r_1 < 0$ y $r_2 > 0$, entonces también $\theta \in (0, \pi/2)$.

Si $r_1 < 0$ y $r_2 < 0$, entonces $\theta \in (0, \pi/2)$

No se puede dar el caso $r_1 > 0$ y $r_2 < 0$. En efecto,

$$\text{si } r_1 = \frac{c}{2b} - \sqrt{\left(\frac{c}{2b}\right)^2 - \frac{a}{b} + c} > 0 \Rightarrow \frac{c}{2b} > \sqrt{\left(\frac{c}{2b}\right)^2 - \frac{a}{b} + c} > 0 \text{ y}$$

$$\text{entonces } r_2 = \frac{c}{2b} + \sqrt{\left(\frac{c}{2b}\right)^2 - \frac{a}{b} + c} > 0.$$



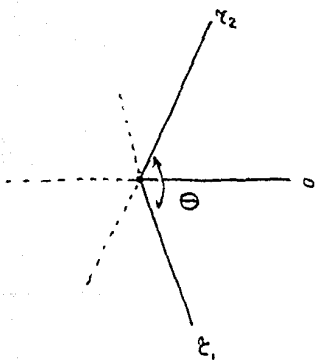
$$\theta < \frac{\pi}{2}$$

Por otro lado, si $r_1 r_2 < -1$, $1 + r_1 r_2 < 1 + (-1) = 0$.

Como $r_2 - r_1 = 2 \sqrt{\left(\frac{c}{2b}\right)^2 - \frac{a}{b} + c^2} > 0$,

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{r_2 - r_1}{1 + r_1 r_2} < 0, \text{ de donde } \theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right).$$

Como $r_1 r_2 < -1$ implica que las pendientes son de signos diferentes, $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.



$$\theta > \frac{\pi}{2}$$

Es importante hacer notar que la condición δ) y en particular el tipo D_1, D_2, D_3 de desigualdades, no dependen ni de la carta (u, v) ni de la isometría T . De hecho considerar otra carta coordenada (u', v') y otra isometría T' , daría lugar a otra expresión para la función h que aparece en la representación de $T'(x(u, v))$:

$$h' = \frac{k'}{2} ((u')^2 + (v')^2) + \frac{a'}{6} (u')^3 + \frac{b'}{2} u' (v')^2 + \frac{c'}{6} (v')^3 + r(u', v'),$$

$$\text{donde } r(u', v') = o((u')^2 + (v')^2),$$

para la cual habría asociada otra ecuación diferencial de líneas de curvatura principal.

Tal ecuación, no obstante, estaría relacionada con la obtenida para (u, v) y T , por un cambio de variable $(u, v) \rightarrow (u', v')$ que es una isometría. Esta isometría preserva las

relaciones 1), 2) y 3) ya que manda los semi-
rayos l_0, l_1, l_2 en los semirrayos correspondientes
 l'_0, l'_1, l'_2 .

Segunda Parte.

Los campos vectoriales asociados a las foliaciones principales son ortogonales. El conocimiento de una de ellas en la región $\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u > 0\}$ es suficiente para conocer ambas foliaciones en todo el plano. En particular en una vecindad del origen, que hemos asociado con el punto umbilical $p \in M$. De modo que nos proponemos aquí analizar una de las foliaciones en la región mencionada. La elección de la foliación dependerá de la trayectoria de singularidad asociada a la misma en tal región. Tal trayectoria aparece en la foliación debido a la continuidad y orientabilidad del campo vectorial de curvatura principal correspondiente. Más adelante llamaremos $v(s)$ a tal trayectoria.

Sean pues los campos vectoriales

$$Y = P(u, v) \frac{\partial}{\partial u} + Q(u, v) \frac{\partial}{\partial v} \quad) \quad \text{donde}$$

$$P(u, v) = P = 2(bv + M_1) \quad y$$

$$Q(u,v) = Q = (b-a)u + (v + M_2) - \rho \sqrt{[(b-a)u + (v + M_2)]^2 - 4(bv + M_1)(bv + M_2)}$$

donde $M_i = M_i(u, v) = o(u^2 + v^2)$, $i=1, 2, 3$;

$$\rho = \pm 1$$

La elección del factor ρ determinará el campo vectorial que se analizará. Tal elección dependerá de la condición

δ) del teorema. En efecto

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho = -1 \quad \text{si se cumplen } D_1 \text{ o } D_2, \text{ es} \\ \quad \text{dear, si } b-a < 0. \\ \rho = +1 \quad \text{si se cumple } D_3, \text{ o dear, si} \\ \quad b-a > 0. \end{array} \right.$$

Así, las foliaciones que analizaremos serán en los casos D_1 y D_2 , la foliación principal maximal y en el caso D_3 la minimal.

Calculemos ahora los componentes $P(u, v)$ y $Q(u, v)$ del campo sobre el eje $\{(u, v) \mid v=0\}$.

$$P(u,0) = 2b \cdot 0 + M_1(u,0) = M_1(u,0)$$

$$Q(u,0) = (b-a)u + c \cdot 0 + M_2(u,0) - \rho \sqrt{[(b-a)u + c \cdot 0 + M_2(u,0)]^2 + 4(b \cdot 0 + M_1(u,0))(b \cdot 0 + M_3(u,0))}$$

$$= (b-a)u + M_2(u,0) - \rho \sqrt{[(b-a)u + M_2(u,0)]^2 + 4M_1(u,0)M_3(u,0)}$$

Si consideramos $M_i(u,v) \equiv 0$, $i=1,2,3$, los componentes $P(u,v)$ y $Q(u,v)$ del campo vectorial se anulan sobre l_0 . En efecto, $P(u,0) = M_1(u,0) = 0$

$$Q(u,0) = (b-a)u + M_2(u,0) - \rho \sqrt{[(b-a)u + M_2(u,0)]^2 + 4M_1(u,0)M_3(u,0)}$$

$$= (b-a)u - \rho \sqrt{[(b-a)u]^2}$$

$$= (b-a)u - \rho |(b-a)u|$$

Notese entonces que

$$\begin{cases} P(u,0) = 0 \\ Q(u,0) = (b-a)u - \rho |(b-a)u|. \end{cases}$$

Continuaremos el análisis en función de las condiciones

D_1 , D_2 y D_3 .

Si se cumple $D_1 = D_2$ se tiene que $b-a < 0$.

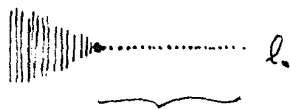
Si además $\mu > 0$, entonces

$$\begin{aligned} Q(\mu, 0) &= (b-a)\mu - (-1) |(b-a)\mu| \\ &= (b-a)\mu + |(b-a)\mu| \\ &= (b-a)\mu - (b-a)\mu \\ &= 0. \end{aligned}$$

Si $\mu < 0$, entonces

$$\begin{aligned} Q(\mu, 0) &= (b-a)\mu + (-(b-a)(-\mu)) \\ &= 2(b-a)\mu. \end{aligned}$$

Como $2(b-a)\mu \rightarrow 0$ si $\mu \rightarrow 0$, para el caso $D_1 = D_2$ tenemos entonces al origen el siguiente aspecto de parte de la foliación:



línea de singularidad.

$D_1 \quad , \quad D_2 \quad :$

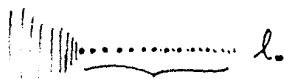
Al suponer que vale D_3 tenemos $b-a > 0$.

Si $u > 0$ entonces

$$Q(u, 0) = (b-a)u - |(b-a)u| = (b-a)u - (b-a)u = 0.$$

Además, si $u < 0$, $Q(u, 0) = 2(b-a)u$.

Tenemos así que un aspecto de la foliación es similar al que presentan los casos D_1 y D_2 , solo que ahora se trata de la foliación principal minimal.



línea de singularidades

D_3 : Foliación Principal Minimal.

Analizaremos ahora el nexo que hay entre las relaciones angulares de los semirradios l_1 y l_2 y las desigualdades D_1, D_2, D_3 de la condición D .

$$\textcircled{D_1} \quad \left(\frac{c}{2b}\right)^2 - \frac{a}{b} + 2 < 0 \quad \text{ni y sólo ni} \quad \left(\frac{c}{2b}\right)^2 + 2 < \frac{a}{b}.$$

Aquí, se satisface la condición la condición D_1 ni y sólo ni lo es la única solución real de la forma $v = tu$ de la ecuación diferencial 3 debido a que los números ξ_1 y ξ_2 no resultan reales.

$$\textcircled{D_2} \quad \text{Si } \left(\frac{c}{2b}\right)^2 + 2 - \frac{a}{b} > 0 \quad \text{y} \quad \xi_1 \xi_2 > -1, \quad \text{entonces} \\ \frac{a}{b} > 1.$$

En efecto

$$\left[\left(\frac{c}{2b}\right)^2 - \sqrt{\left(\frac{c}{2b}\right)^2 - \frac{a}{b} + 2} \right] \left[\left(\frac{c}{2b}\right)^2 - \sqrt{\left(\frac{c}{2b}\right)^2 - \frac{a}{b} + 2} \right] = \\ \frac{c^2}{4b^2} - \left(\frac{c^2}{4b^2} - \frac{a}{b} + 2 \right) = \frac{a}{b} - 2 > -1, \quad \text{de donde}$$

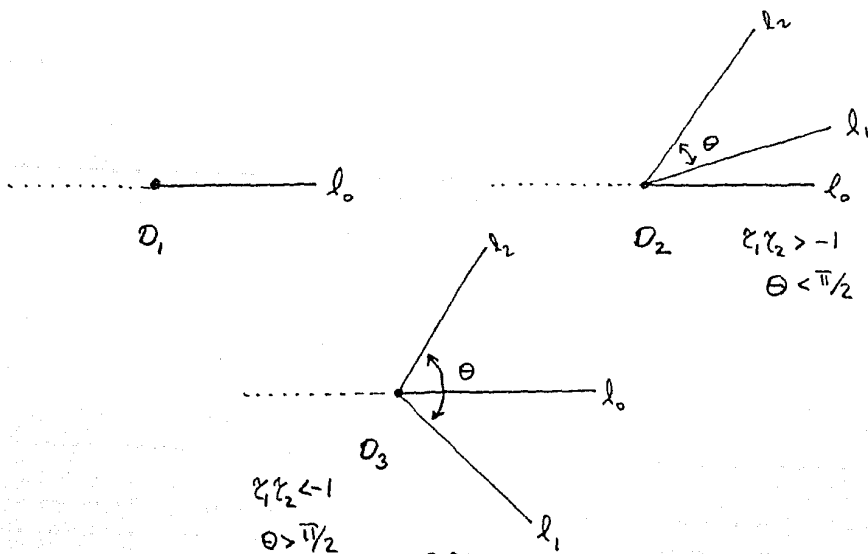
$$\frac{a}{b} > 1.$$

Ari, se satisfice la desigualdad D_2 si y sólo si los semirrayos l_1 y l_2 forman un ángulo menor que $\pi/2$.

(D₃) Si $(\frac{c}{2b})^2 + 2 - \frac{a}{b} > 0$ y $r_1 r_2 < -1$, entonces

$\frac{a}{b} < 1$. Ari, se satisfice la desigualdad

D_3 si y sólo si los semirrayos l_1 y l_2 forman un ángulo mayor que $\pi/2$.



Segunda Parte.

Interesa saber como es la foliacion asociada al campo vectorial Y seleccionado a traves del factor p y segun las condiciones D_1, D_2 o D_3 . Por lo pronto ya sabemos que $(0,0)$ es singularidad, la correspondiente al punto umbilical. Emplearemos la tecnica de "explosion" o "blowing-up" para conocer la foliacion asociada al campo Y seleccionado, en la vecindad de la singularidad.

Recordemos que la "explosion" no es otra cosa que un cambio de coordenadas adecuado que permite distinguir con mayor detalle las peculiaridades de la foliacion en la vecindad de una de sus singularidades.

Procedemos aqui a aplicar el cambio de coordenadas, es decir la "explosion". Para ello definamos los siguientes conjuntos:

$$A = \{ (s,t) \in \mathbb{R}^2 \mid s > 0, t \in \mathbb{R} \}$$

$$B = \{ (u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u > 0, v \in \mathbb{R} \}$$

y la siguiente función

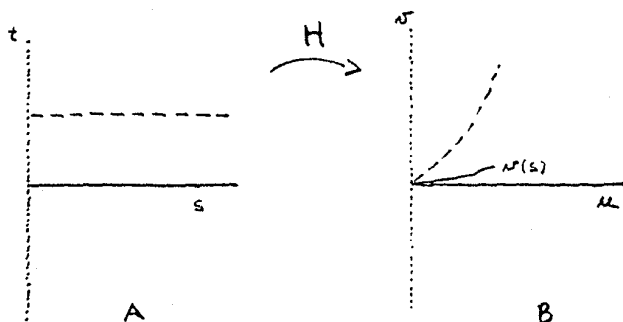
$$H: A \longrightarrow B$$

$$H(s, t) = (s, ts + \nu(s)) = (\mu, \nu)$$

Como se puede apreciar la explosión H difiere de las explosiones usuales que establecen la asociación

$$(s, t) \longrightarrow (s, ts) = (\mu, \nu)$$

La razón de esto radica en que en una vecindad de la singularidad $(0,0)$ aparece una trayectoria de singularidad $\nu(s)$ que va a ser asociada con la línea $\{(s, t) \mid s > 0, t = 0\}$.



la función $\nu(s)$ que aparece en la definición de H es la solución única de la ecuación $P(s, \nu(s)) = 0$, con

$w(0) = 0$. Nombramos $w(s)$ a tal función para enfatizar el hecho de que dependiendo de $s = u$, $w(s)$ determina la coordenada v del vector $(u, v) \in B$.

La existencia y unicidad de tal función queda asegurada por el Teorema de la función implícita. En efecto, dado que $P(u, v) = 2(bv + M_1(u, v))$ y $M(u, v) = 0(u^2 + v^2)$, se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial v} P(u, v) \big|_{(0,0)} = 2b + 2 \frac{\partial}{\partial v} M_1(u, v) \big|_{(0,0)} = 2b \neq 0.$$

Además, como $w(s)$ es tal que $P(s, w(s)) = 0$, entonces $P(s, w(s)) = 2(bw(s) + M_1(s, w(s))) = 0$

$$bw(s) = -M_1(s, w(s))$$

$$w(s) = -\frac{M_1(s, w(s))}{b}$$

Así, dado que $M_1(u, v) = 0(u^2 + v^2)$, al hacer $u^2 \rightarrow 0, v^2 \rightarrow 0$, se tiene que $w(s) \rightarrow 0$.

Además $w'(0) = 0$.

Vamos a dejar establecido que la función H es un difeomorfismo. Demostraremos primero que H es una función biyectiva, después que H es diferenciable y finalmente que H^{-1} también lo es.

Supongamos $H(s, t) = H(s_1, t_1)$. Entonces $(s, ts + v(s)) = (s_1, t_1 s_1 + v(s_1))$, de donde $s = s_1$, $ts + v(s) = t_1 s_1 + v(s_1)$ y así $t = t_1$. Así H es inyectiva.

Sea, por otro lado, $(u, v) \in B$. Entonces

$(u, v) = H(s, t)$ si $s = u$ y $t = \frac{v - v(s)}{u}$. En efecto

$$H(s, t) = H\left(s, \frac{v - v(s)}{u}\right) = \left(u, u \left(\frac{v - v(s)}{u}\right) + v(s)\right) = (u, v), \text{ de modo que}$$

H es suprayectiva y por consiguiente biyectiva.

Para hacer ver que H es diferenciable basta notar que $v(s)$ lo es, ya que la primera función componente de H es la función identidad en A y la segunda es la función $ts + v(s)$, que es diferenciable si $v(s)$ lo es.

Aplicando aquí también el Teorema de la función

implícita tenemos la diferenciable de $v(s)$. Así H es biyectiva y diferenciable. Resta demostrar que H^{-1} es diferenciable. Consideremos entonces la función H^{-1} :

$$H^{-1}: B \longrightarrow A$$

$$\begin{aligned} H^{-1}(u, v) &= \left(u, \frac{v - v(u)}{u} \right) \\ &= (H_1^{-1}(u, v), H_2^{-1}(u, v)). \\ &= (s, t). \end{aligned}$$

Por el mismo argumento empleado para demostrar la diferenciable de H , tenemos la diferenciable de H^{-1} . En suma tenemos que H es un difeomorfismo.

Calculemos DH^{-1} . Sabemos que $H^{-1}(u, v) = \left(u, \frac{v - v(u)}{u} \right)$, de modo que

$$\frac{\partial H_1^{-1}}{\partial u} = 1$$

$$\frac{\partial H_1^{-1}}{\partial v} = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_2^{-1}}{\partial \mu} &= \frac{-\mu v'(\mu) + v(\mu) - v}{\mu^2} = \frac{-s v'(s) + v(s) - v}{s^2} = \\ &= \frac{-v'(s)}{s} + \frac{1}{s} \cdot \frac{v(s) - v}{s} = -\frac{v'(s)}{s} + \frac{1}{s} (-v) \\ &= -\frac{v'(s)}{s} - \frac{v}{s} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial H_2^{-1}}{\partial v} = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{s}$$

Tenemos entonces la matriz DH^{-1}

$$DH_{H(s,t)}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{v'(s)}{s} - \frac{v}{s} & \frac{1}{s} \end{pmatrix}$$

Definimos el campo vectorial Z en la región A :

$$Z = DH_{H(s,t)}^{-1} Y(H(s,t)) = S \frac{\partial}{\partial s} + T \frac{\partial}{\partial t}$$

En lo que sigue calcularemos explícitamente los componentes $S(s,t)$ y $T(s,t)$ del campo Z , para después, empleando recursos del análisis funcional, expresarlo en la forma más conveniente para el resto del

andlínin. El campo vectorial $Y(H(s,t))$ tiene componentes $Y_1(H(s,t))$ y $Y_2(H(s,t))$ que se pueden escribir en términos de las funciones $P(u,v)$, $Q(u,v)$:

$$Y_1(H(s,t)) = P(H(s,t)) = P(s, st + \nu(s)) \\ = 2(b(st + \nu(s)) + M_1(s, st + \nu(s)))$$

$$Y_2(H(s,t)) = Q(H(s,t)) = Q(s, st + \nu(s)) \\ = (b-a)s + c(st + \nu(s)) + M_2(s, st + \nu(s)) \\ - P[(b-a)s + c(st + \nu(s)) + M_2(s, st + \nu(s))]^2 \\ + 4(b(st + \nu(s)) + M_1(st + \nu(s))(b(st + \nu(s)) + M_2(s, st + \nu(s)))$$

De modo que

$$DH_{H(s,t)}^{-1} Y(H(s,t)) = DH_{H(s,t)}^{-1} (P(H(s,t)), Q(H(s,t))) =$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(H(s,t)) \\ Q(H(s,t)) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} P(H(s,t)) \\ -\frac{P(H(s,t))\nu'(s)}{s} - t \frac{P(H(s,t))}{s} + \frac{1}{s} Q(H(s,t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S(s,t) \\ T(s,t) \end{pmatrix}$$

Tenemos entonces los componentes:

$$S(s,t) = 2(bst + b\nu(s) + M_1(s, st + \nu(s)))$$

$$T(s,t) = -\frac{P(H(s,t))\nu'(s)}{s} - \frac{P(H(s,t))}{s} t + \frac{Q(H(s,t))}{s}$$

El componente $T(s,t)$ lo podemos escribir de otro modo.

$$\text{Si escribimos } S_1 = (b-a)s + est + c\nu(s) + M_2(s, st + \nu(s))$$

$$\text{y } S_2 = 2(bst + b\nu(s) + M_3(s, st + \nu(s))),$$

$Q(H(s,t))$ adquiere la forma

$$Q(H(s,t)) = S_1 - \rho \sqrt{S_1^2 + SS_2}$$

Ahora bien

$$T(s,t) = \frac{1}{s} \left[-tP(H(s,t)) - \nu'(s)P(H(s,t)) + Q(H(s,t)) \right],$$

y como $P(H(s,t)) = S(s,t) = S$, tenemos:

$$T(s,t) = \frac{1}{s} \left[-tS - \nu'(s)S + S_1 - \rho \sqrt{S_1^2 + SS_2} \right]$$

$$\text{Sea } S(s,t) = 2 [bst + bv(s) + M_1(s, st + w(s))].$$

$$\text{Definiendo } v(s,t) = \int_0^1 \frac{\partial M_1}{\partial y}(s, rst + w(s)) dr,$$

obtenemos, a partir del lema de Hadamard:

$$S(s,t) = 2 [bst + bv(s) + M_1(s, w(s)) + st v(s,t)],$$

de donde

$$S(s,t) = 2 [bst + st v(s,t)], \text{ debido a que, por definición de } w(s), \quad bv(s) + M_1(s, w(s)) = 0.$$

$$\text{Además } v(0,0) = 0.$$

En suma, tenemos

$$S(s,t) = 2 [bst + st v(s,t)], \quad v(0,0) = 0.$$

Pasemos ahora a la función $S_1(s,t)$.

Sabemos que

$$S_1(s,t) = (b-a)s + cst + cw(s) + M_2(s, st + w(s)).$$

Empleando de nuevo una vez el lema de Hadamard podemos escribir:

$$M_2(s, st + v(s)) = M_2(s, v(s)) + st \int_0^1 \frac{\partial M_2}{\partial y}(s, rst + v(s)) dr.$$

Escribamos ahora

$$V'(s) = \int_0^1 v'(rs) dr. \quad \text{Tenemos}$$

$$M_2(s, v(s)) = s \int_0^1 \left[\frac{\partial M_2}{\partial x}(rs, rv(s)) + \frac{\partial M_2}{\partial y}(rs, rv(s)) V'(s) \right] dr,$$

y entonces

$$V_1^1(s) = \int_0^1 \frac{\partial M_2}{\partial x}(rs, rv(s)) dr$$

$$V_2^1(s) = \int_0^1 \frac{\partial M_2}{\partial y}(rs, rv(s)) dr$$

$$V_3^1(s, t) = \int_0^1 \frac{\partial M_2}{\partial y}(s, rst + v(s)) dr$$

tenemos:

$$cv(s) + M_2(s, st + v(s)) =$$

$$cv(s) + M_2(s, v(s)) + st \int_0^1 \frac{\partial M_2}{\partial y}(s, rst + v(s)) dr =$$

$$cv(s) + s V_1^1(s) + s V_2^1(s) V^1(s) + st V_3^1(s) =$$

$$cs V^1(s) + s V_1^1(s) + s V^1(s) V_2^1(s) + st V_3^1(s) =$$

$$s [c v'(s) + v_1^1(s) + v^1(s) v_2^1(s) + t v_3^1(s)] = s v_1(s, t), \text{ donde } v_1(0, 0) = 0.$$

Así $S_1(s, t)$ tiene la forma

$$S_1(s, t) = (b-a)s + cst + s v_1(s, t), \quad v_1(0, 0) = 0.$$

Finalmente examinemos la función $S_2(s, t)$:

$$S_2(s, t) = 2 [bst + b v(s) + M_3(s, st + v(s))].$$

Escribamos primero

$$M_3(s, st + v(s)) = M_3(s, v(s)) + st \int_0^1 \frac{\partial M_3}{\partial y}(s, rst + v(s)) dr$$

$$M_3(s, v(s)) = s \int_0^1 \left[\frac{\partial M_3}{\partial x}(rs, rv(s)) + \frac{\partial M_3}{\partial y}(rs, rv(s)) v^1(s) \right] dr$$

Haciendo

$$v_1^2(s) = \int_0^1 \frac{\partial M_3}{\partial x}(rs, rv(s)) dr$$

$$v_2^2(s) = \int_0^1 \frac{\partial M_3}{\partial y}(rs, rv(s)) dr$$

$$v_3^2(s, t) = \int_0^1 \frac{\partial M_3}{\partial y}(s, rst + v(s)) dr,$$

podemos escribir

$$b v(s) + M_3(s, st + v(s)) =$$

$$b v(s) + M_3(s, v(s)) + st \int_0^1 \frac{\partial M_3}{\partial y}(s, rst + v(s)) dr =$$

$$2bv(s) + sV_1^2(s) + sV_2^2(s)V^1(s) + stV_3^2(s,t) =$$

$$2bsV^1(s) + sV_1^2(s) + sV^1(s)V_2^2(s) + stV_3^2(s,t) =$$

$$s[2bV^1(s) + V_1^2(s) + V^1(s)V_2^2(s) + tV_3^2(s,t)] =$$

$$sV_2(s,t), \quad \text{con } V_2(0,0) = \frac{\partial V_2}{\partial t}(0,0) = 0.$$

Así tenemos

$$S_2(s,t) = 2bst + sV_2(s,t), \quad V_2(0,0) = \frac{\partial V_2}{\partial t}(0,0) = 0.$$

Además las funciones V , V_1 y V_2 son de clase C^1 en $(0,0)$.

En suma lo que tenemos es

$Y = P(M, v) \frac{\partial}{\partial M} + Q(M, v) \frac{\partial}{\partial v}$ el campo vectorial asociado a las foliaciones principales.

$H: A \rightarrow B$, $H^{-1}: B \rightarrow A$ la "explosión" y su inversa.

$DH_{H(s,t)}^{-1}$ la diferencial de la inversa de la "explosión"

$Z = DH_{H(s,t)}^{-1} Y(H(s,t)) = S \frac{\partial}{\partial s} + T \frac{\partial}{\partial t}$, el campo vectorial asociado al campo Y mediante la "explosión". Los componentes de Z son

$$S(s,t) = 2(bst + bv(s) + M_1(s, st + v(s)))$$

$$T(s,t) = \frac{1}{s} [-tS - v'(s)S + S_1 - p\sqrt{S_1^2 + SS_2}] \text{ donde}$$

$$S(s,t) = 2[bst + stV(s,t)] , \quad V(0,0) = 0$$

$$S_1(s,t) = (b-a)s + cst + sV_1(s,t) , \quad V_1(0,0) = 0$$

$$S_2(s,t) = 2bst + sV_2(s,t) , \quad V_2(0,0) = \frac{\partial V_2}{\partial t}(0,0) = 0 ,$$

V, V_1 y V_2 son de clase C^1 en $(0,0)$.

Definamos a partir del campo \vec{z} , el campo vectorial $\tilde{\vec{z}}$:

$$\tilde{\vec{z}}(s, t) = w(s, t) \vec{z} = \tilde{S} \frac{\partial}{\partial s} + \tilde{T} \frac{\partial}{\partial t}$$

donde

$$w(s, t) = \frac{1}{ts} \left[-tS - v'(s)S + S_1 + \rho \sqrt{S_1^2 + SS_2} \right]$$

Calculemos explícitamente \tilde{S} y \tilde{T} .

$$\tilde{S}(s, t) = w(s, t) S(s, t) =$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{ts} \left[-tS - v'(s)S + S_1 + \rho \sqrt{S_1^2 + SS_2} \right] \left[2(bst + stV(s, t)) \right] = \\ & = 2(b + V(s, t)) \left(-tS - v'(s)S + S_1 + \rho \sqrt{S_1^2 + SS_2} \right) \end{aligned}$$

Escribamos

$$\rho \sqrt{S_1^2 + SS_2} = (b-a)s R(s, t), \quad \text{de donde}$$

$$S_1^2 + SS_2 = (b-a)^2 s^2 R^2(s, t), \quad \text{y con } s \neq 0:$$

$$\frac{S_1^2 + SS_2}{(b-a)^2 s^2} = R^2(s, t)$$

Temos ai :

$$\frac{[(b-a)s + cst + sV_1]^2}{(b-a)^2 s^2} + \frac{2(bst + stV)(2bst + sV_2)}{(b-a)^2 s^2} = R^2(s, t)$$

Como

$$\frac{[(b-a)s + cst + sV_1]^2}{(b-a)^2 s^2} = \frac{(b-a)^2 s^2 + c^2 s^2 t^2 + s^2 V_1^2 + 2(b-a)s \cdot c \cdot st}{(b-a)^2 s^2}$$

$$+ \frac{2(b-a)s \cdot sV_1 + 2cst sV_1}{(b-a)^2 s^2} =$$

$$1 + \frac{c^2 t^2}{(b-a)^2} + \frac{V_1^2}{(b-a)^2} + 2 \frac{ct}{(b-a)} + 2 \frac{V_1}{(b-a)} + \frac{2ctV_1}{(b-a)^2} =$$

$$\left(1 + \frac{c}{b-a} t + \frac{V_1}{b-a}\right)^2, \quad \text{e}$$

$$\frac{2(bst + stV)(2bst + sV_2)}{(b-a)^2 s^2} = \frac{2s^2 t (b+V)(2bt + V_2)}{(b-a)^2 s^2}$$

$$= \frac{2t}{(b-a)^2} (b+V)(2bt + V_2)$$

Podemos escribir

$$R(s,t) = \sqrt{\left(1 + \frac{ct}{b-a} + \frac{v_1}{b-a}\right)^2 + \frac{2t}{(b-a)^2}(b+v)(2bt+v_2)}$$

y tener

$$\tilde{S}(s,t) = 2(b+v(s,t))[-tS - v' S + S_1 + (b-a)s R(s,t)]$$

Calculamos ahora \tilde{T} :

$$\tilde{T}(s,t) = w(s,t) T(s,t) =$$

$$\frac{1}{tS} [-tS - v'(s)S + S_1 + \rho \sqrt{S_1^2 + SS_2}] \left[\frac{1}{S} [-tS - v'(s)S + S_1 - \rho \sqrt{S_1^2 + SS_2}] \right]$$

$$= \left[-\frac{S}{S} - \frac{v'(s)S}{tS} + \frac{S_1}{tS} + \frac{\rho \sqrt{S_1^2 + SS_2}}{tS} \right] \left[-\frac{t}{S} S - \frac{v'(s)}{S} S + \frac{S_1}{S} - \frac{\rho \sqrt{S_1^2 + SS_2}}{S} \right]$$

$$= \frac{tS^2}{S^2} + \frac{v'(s)S}{S^2} - \frac{SS_1}{S^2} - \frac{\rho \sqrt{S_1^2 + SS_2}}{S^2} + \frac{v'(s)}{S^2} S^2 +$$

$$+ \frac{(v'(s))^2 S^2}{tS^2} - \frac{v'(s)SS_1}{tS^2} - \frac{\rho v'(s)S \sqrt{S_1^2 + SS_2}}{tS^2}$$

$$- \frac{SS_1}{S^2} - \frac{v'(s)SS_1}{tS^2} + \frac{(S_1)^2}{tS^2} + \frac{\rho S_1 \sqrt{S_1^2 + SS_2}}{tS^2} +$$

$$\frac{\rho S \sqrt{S_1^2 + SS_2}}{S^2} + \frac{v'(s)S \rho \sqrt{S_1^2 + SS_2}}{tS^2} - \frac{S_1 \rho \sqrt{S_1^2 + SS_2}}{tS^2} - \frac{\rho}{tS^2} (S_1^2 + SS_2) =$$

$$t \left(\frac{S}{s} \right)^2 + (v'(s))^2 \left(\frac{S}{st} \right) \left(\frac{S}{s} \right) + 2v'(s) \left(\frac{S}{s} \right)^2 - 2 \left(\frac{S}{s} \right) \left(\frac{S_1}{s} \right) - 2v'(s) \left(\frac{S}{st} \right) \left(\frac{S_1}{s} \right) - \left(\frac{S}{st} \right) \left(\frac{S_2}{s} \right) =$$

$$t \left(\frac{2(bst + stv(s,t))}{s} \right)^2 + (v'(s))^2 \left(\frac{2(bst + stv(s,t))}{st} \right) \left(\frac{2(bst + stv(s,t))}{s} \right) + 2v'(s) \left(\frac{2(bst + stv(s,t))}{s} \right)^2 - 2 \left(\frac{2(bst + stv(s,t))}{s} \right) \left(\frac{(b-a)s + cst + sv_1}{s} \right) - 2v'(s) \left(\frac{2(bst + stv(s,t))}{st} \right) \left(\frac{(b-a)s + cst + sv_1}{s} \right) - \left(\frac{2(bst + stv(s,t))}{st} \right) \left(\frac{2bst + sv_2}{s} \right) =$$

$$t(2(b+v)t)^2 + (v'(s))^2(2(b+v))(2(b+v)t) +$$

$$2v'(s)(2(t(b+v)^2)) - 2(2t(b+v))((b-a) + ct + v_1)$$

$$- 2v'(s)(2(b+v))((b-a) + ct + v_1) - (2(b+v))(2bt + v_2) =$$

$$\tilde{T}(s,t) = t(2(b+v)t)^2 + (v'(s))^2(2(b+v))^2 +$$

$$2v'(s)t^2(2(b+v))^2 - 2t(2(b+v))((b-a) + ct + v_1)$$

$$- 2v'(s)(2(b+v))((b-a) + ct + v_1)$$

$$- (2(b+v))(2bt + v_2).$$

A continuación vamos a analizar las singularidades del campo \tilde{Z} a lo largo del divisor asociado a la explosión, con el propósito de completar el análisis de la foliación asociada al campo Y en la vecindad del $(0,0)$.

Para tal efecto consideremos los valores del campo \tilde{Z} a lo largo del eje $S=0$. Mostraremos que

$$\tilde{S}(0,t) \equiv 0 \quad \text{y que}$$

$$\tilde{T}(0,t) \equiv 0 \quad \text{si y solo si} \quad t = \frac{c}{2b} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2b}\right)^2 - \frac{a}{b} + 2}$$

Esto significa, por un lado, que el campo levantado \tilde{Z} no atraviesa el divisor $S=0$, y que las singularidades del mismo coinciden con las inclinaciones Z_i , $i=1,2$, de las soluciones rectas de la ecuación homogénea asociada a la que estamos estudiando.

Demostremos, pues, que

$$i) \quad \tilde{S}(0,t) \equiv 0.$$

$$\tilde{S}(0,t) = 2(b + v(qt))[-tS(0,t) - v'(0)S(0,t) +$$

$$\begin{aligned}
& S_1(0,t) + (b-a) \cdot 0 \cdot R(0,t) \Big] = \\
& 2(b+v(0,t)) \Big[-tS(0,t) + S_1(0,t) \Big] = \\
& 2(b+v(0,t)) \Big[-t(2(b \cdot 0 \cdot t + 0 \cdot t \cdot v(0,t)) + \\
& \quad (b-a) \cdot 0 + 0 \cdot 0 \cdot t + 0 \cdot v_1(0,t)) \Big] = \\
& 2(b+v(0,t)) \Big[0 \Big] \equiv 0.
\end{aligned}$$

ii) $\tilde{T}(0,t) = 0$ ni y n'olo ni $t = \frac{c}{2b} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2b}\right)^2 - \frac{a}{b} + 2}$ o $t=0$.

$$\begin{aligned}
\tilde{T}(0,t) &= t(2(b+v(0,t))t)^2 + (v'(0))^2 (2(b+v))^2 + \\
& 2v'(0)t^2 (2(b+v))^2 - 2t(2(b+v(0,t)))((b-a) + ct \\
& + v_1(0,t)) - 2v'(0)(2(b+v))((b-a) + ct + v_1(0,t)) \\
& - 2((b+v))(2bt + v_2) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& t(2(b+v(0,t))t)^2 - 2t(2(b+v(0,t)))((b-a) + ct + \\
& v_1(0,t)) - 2((b+v(0,t)))(2bt + v_2) =
\end{aligned}$$

$$t(2bt)^2 - 2t(2b)(b-a + ct) - 2(b)(2bt) =$$

$$4b^2t^3 - 4tb(b-a + ct) - 4b^2t =$$

$$4bt [bt^2 - ct - 2b + a] = 0 \quad \text{ni y n'olo ni}$$

$$\begin{cases} t=0 \\ t = \frac{c}{2b} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2b}\right)^2 - \frac{a}{b} + 2} \end{cases}$$

En suma tenemos que el campo vectorial $\tilde{z}(s,t)$ se anula si

$$\begin{cases} s=0 \\ t=0, t=\tau_i, \text{ con} \end{cases}$$

$$\tau_i = \frac{c}{2b} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2b}\right)^2 - \frac{a}{b} + 2}, \quad i=1,2.$$

Evidentemente hay una relación entre las singularidades en el divisor de \tilde{z} y las soluciones rectas de la ecuación homogénea como habíamos dicho. De hecho se puede hacer notar la relación según los tres casos que presenta la condición D. Veamos:

$$D_1: \left(\frac{c}{2b}\right)^2 + 2 < \frac{a}{b}.$$

Aquí la única singularidad de \tilde{z} es el

divisor corresponde a $(0,0)$. Como sabemos, por este caso no hay soluciones reales distintas de l_0 que sean soluciones de la ecuación homogénea.

$$D_2: 1 < \frac{a}{b} < \left(\frac{c}{2b}\right)^2 + 2, \quad (a \neq 2b).$$

Aquí si hay raíces reales aparte del origen. Tienen

raíces $(0, \tau_1)$ y $(0, \tau_2)$ con

$$\tau_1 = \frac{c}{2b} - \sqrt{\left(\frac{c}{2b}\right)^2 - \frac{a}{b} + 2}$$

$$\tau_2 = \frac{c}{2b} + \sqrt{\left(\frac{c}{2b}\right)^2 - \frac{a}{b} + 2}$$

Cabe hacer la siguiente consideración relativa a los signos de τ_1 y τ_2 . Como se puede apreciar $\tau_2 > 0$.

Sin embargo el signo de τ_1 depende del valor de $\frac{a}{b}$ del siguiente modo.

La desigualdad $1 < \frac{a}{b} < \left(\frac{c}{2b}\right)^2 + 2$ ($a \neq 2b$)

se puede decomponer en las siguientes dos

desigualdades

$$D_2: \begin{cases} D_{2,1} & 1 < 2 < \frac{a}{b} < \left(\frac{c}{2b}\right)^2 + 2 \\ D_{2,2} & 1 < \frac{a}{b} < 2 < \left(\frac{c}{2b}\right)^2 + 2. \end{cases} \quad a \neq 2b$$

Supongamos que vale $D_{2,1}$. En tal caso $\varepsilon_1 > 0$.

$$\text{En efecto, } \varepsilon_1 = \frac{c}{2b} - \sqrt{\left(\frac{c}{2b}\right)^2 - \frac{a}{b} + 2} > 0$$

$$\frac{c}{2b} > \sqrt{\left(\frac{c}{2b}\right)^2 - \frac{a}{b} + 2}$$

$$\sqrt{\left(\frac{c}{2b}\right)^2} > \sqrt{\left(\frac{c}{2b}\right)^2 - \frac{a}{b} + 2},$$

ya que $D_{2,1}$ implica $-\frac{a}{b} + 2 < 0$.

Análogamente se puede demostrar que, si vale $D_{2,2}$, entonces $\varepsilon_1 < 0$.

Vemos así que en el caso D_2 son posibles dos signos diferentes para ε_1 .

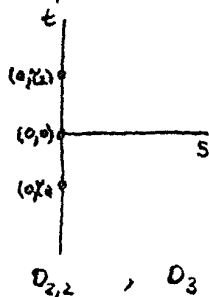
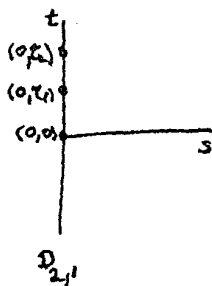
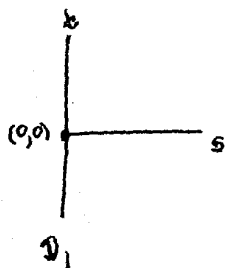
$$D_3 : \frac{a}{b} < 1.$$

Aquí se tiene que $\tau_1 < 0$.

En resumen tenemos el siguiente cuadro que involucra la condición D , las irregularidades de \tilde{Z} en el divisor y las raíces de τ .

D	Singularidades de \tilde{Z}	Signos de τ_i
D_1	$(0, 0)$	
$D_{1,2}$	$(0, 0), (0, \tau_1), (a, \tau_2)$	$\tau_1 > 0, \tau_2 > 0$
$D_{2,2}$	$(0, 0), (0, \tau_1), (0, \tau_2)$	$\tau_1 < 0, \tau_2 > 0$
D_3	$(0, 0), (0, \tau_1), (0, \tau_2)$	$\tau_1 < 0, \tau_2 > 0$

Tales relaciones corresponden a las siguientes ilustraciones:



A continuación vamos a calcular las derivadas parciales de las funciones componentes del campo \tilde{z} con respecto a las variables s y t , para después evaluarlas en las singularidades $(0,0)$, $(0, \tau_1)$, $(0, \tau_2)$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial s} &= 2 \frac{\partial V}{\partial s} [-tS - v'(s)S + S_1 + (b-a)s R(s,t)] + \\ & 2(b+v) \left[-t \frac{\partial S}{\partial s} - v''(s)S - v'(s) \frac{\partial S}{\partial s} + \frac{\partial S_1}{\partial s} + \right. \\ & \left. (b-a)R(s,t) + (b-a)s \frac{\partial R}{\partial s} \right] = \\ & 2 \frac{\partial V}{\partial s} [-tS - v'(s)S + S_1 + (b-a)s R(s,t)] + \\ & 2(b+v) \left[-t(b\tau + tV + s\tau \frac{\partial V}{\partial s}) - v''(s)S - \right. \\ & \left. v'(s) \left(2(b\tau + tV + s\tau \frac{\partial V}{\partial s}) + (b-a) + ct + v_1 + s \frac{\partial v_1}{\partial s} \right) \right. \\ & \left. + (b-a)R(s,t) + (b-a)s \frac{\partial R}{\partial s} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} &= 2 \frac{\partial V}{\partial t} [-tS - v'(s)S + S_1 + (b-a)s R(s,t)] + \\ & 2(b+v) \left[-S - t \frac{\partial S}{\partial t} - v'(s) \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S_1}{\partial t} + (b-a)S \frac{\partial R}{\partial t} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{T}}{\partial s} &= 4t^3 \cdot 2(b+v) \frac{\partial v}{\partial s} + 2v'(s)v''(s)(2(b+v))^2 t + \\
&v'(s)t \cdot 2(b+v) \frac{\partial v}{\partial s} + 2v''(s)t^2(2(b+v))^2 + \\
&4v''(s)t^2(2(b+v)) \frac{\partial v}{\partial s} - 2t \cdot 2 \frac{\partial v}{\partial s} ((b-a) + ct + v_1) - \\
&- 2t(2(b+v)) \frac{\partial v_1}{\partial s} - 2v''(s) [2(b+v)((b-a) + ct \\
&+ v_1)] - 2v'(s) (2 \frac{\partial v}{\partial s}) ((b-a) + ct + v_1) - \\
&- 2v'(s)(2(b+v)) (\frac{\partial v_1}{\partial s}) - 2 \frac{\partial v}{\partial s} (2bt + v_2) - \\
&- 2(b+v) (\frac{\partial v_2}{\partial s})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} &= 12t^2(b+v)^2 + 4t^3(2(b+v)) \frac{\partial v}{\partial t} + \\
&(v'(s))^2 [4(b+v) \frac{\partial v}{\partial t} t + 2(b+v)^2] + \\
&2v'(s) [2t(2(b+v))^2 + t^2(4(b+v)) \frac{\partial v}{\partial t}] \\
&- 2(2(b+v)((b-a) + ct + v_1) - 2t(2 \frac{\partial v}{\partial t}) ((b-a) + \\
&ct + v_1) - 2t(2(b+v))(c + \frac{\partial v}{\partial t}) - \\
&- 2v'(s) [2 \frac{\partial v}{\partial t} ((b-a) + ct + v_1) + 2(b+v)(c + \frac{\partial v}{\partial t})] - \\
&- 2 \frac{\partial v}{\partial t} (2bt + v_2) - 2(b+v) (2b + \frac{\partial v_2}{\partial t})
\end{aligned}$$

Ahora evaluemos las parciales anteriores en las singularidades $(0,0)$, $(0, r_1)$ y $(0, r_2)$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial S}(0,0) &= 2 \frac{\partial V}{\partial S}(0,0) \left[-0 S(0,0) - v'(0) S(0,0) + S_1(0,0) + \right. \\ &\quad \left. (b-a) \cdot 0 \cdot R(0,0) \right] + 2(b+v(0,0)) \left[-0(2b \cdot 0 + 0 \cdot v(0,0) + \right. \\ &\quad \left. 0 \cdot 0 \cdot \frac{\partial V}{\partial S}(0,0) - v''(0) S(0,0) - v'(0) (2(b \cdot 0 + 0 \cdot v(0,0) + \right. \\ &\quad \left. 0 \cdot 0 \frac{\partial V}{\partial S}(0,0) + ((b-a) + 0 \cdot c + v_1'(0,0) + 0 \frac{\partial v_1'}{\partial S}(0,0) + \right. \\ &\quad \left. (b-a) R(0,0) + (b-a) \cdot 0 \cdot \frac{\partial R}{\partial S}(0,0)) \right] = \\ &\quad 2b \left[(b-a) + (b-a) R(0,0) \right] = \end{aligned}$$

$$= 2b \left[(b-a) + (b-a) \sqrt{\left(1 + \frac{c}{b-a} \cdot 0 + \frac{v_1'(0,0)}{b-a}\right)^2 + \frac{2 \cdot 0}{(b-a)^2} (b+v(0,0) + (2b \cdot 0 + v_2'(0,0))} \right]$$

$$= 2b \left((b-a) + (b-a) \cdot 1 \right)$$

$$= 2b (2(b-a)) = 4(b-a)b. \quad \text{Es decir}$$

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial S}(0,0) = 4b(b-a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t}(0,0) &= 2v(0,0) \left[-0S(0,0) - v'(0)S(0,0) + S_t(0,0) + \right. \\ &\quad \left. (b-a) \cdot 0 \cdot R(0,0) \right] + 2(b+v(0,0)) \left[-S(0,0) - 0(2(b \cdot 0 + \right. \\ &\quad \left. 0 \cdot v(0,0) + 0 \cdot 0 \frac{\partial v}{\partial t}(0,0)) - v'(0) \frac{\partial S}{\partial t}(0,0) + \right. \\ &\quad \left. (0 \cdot 0 + 0 \cdot \frac{\partial v_1}{\partial t}(0,0) + (b-a) \cdot 0 \cdot \frac{\partial R}{\partial t}(0,0)) \right] = \\ &2 \frac{\partial v}{\partial t}(0,0) [0] + 2(b+v(0,0)) [0] = 0. \quad \text{A.ii} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial t}(0,0) = 0.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial s}(0,0) &= 2v''(0) [2(b+0)((b-a)+0+0)] - \\ &\quad 2b \frac{\partial v_2}{\partial s}(0,0) = \\ \frac{\partial \tilde{T}}{\partial s}(0,0) &= -2v''(0) [(2b)(b-a)] - 2b \frac{\partial v_2}{\partial s}(0,0). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t}(0,0) &= -2(2(b)((b-a) - 2(b)(2b)) = \\ &= -4b((b-a) + b) = -4b(2b-a). \quad \text{A.iii} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t}(0,0) = -4b(2b-a)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{S}}{\partial s}(0, \tau_i) &= 2 \frac{\partial v}{\partial s}(0, \tau_i) \left[-\tau_i S(0, \tau_i) - v'(0) S(0, \tau_i) + \right. \\
&+ S_1(0, \tau_i) + (b-a) \cdot 0 \cdot R(0, \tau_i) \left. \right] + 2(b+v(0, \tau_i)) \left\{ -\tau_i (\right. \\
&2b\tau_i + \tau_i v(0, \tau_i) + 0 \cdot \tau_i \cdot \frac{\partial v}{\partial s}(0, \tau_i) \left. \right) - v''(0) S(0, \tau_i) - \\
&v'(0) (2(b\tau_i + \tau_i v(0, \tau_i)) + 0 \cdot \tau_i \frac{\partial v}{\partial s}(0, \tau_i) + \\
&((b-a) + c\tau_i + v_1(0, \tau_i) + 0 \cdot \frac{\partial v_1}{\partial s}(0, \tau_i) + \\
&(b-a) R(0, \tau_i) + (b-a) \cdot 0 \cdot \frac{\partial R}{\partial s}(0, \tau_i) \left. \right\} = \\
&2b((b-a)(1+R(0, \tau_i)) + c\tau_i - 2b\tau_i^2). \quad \text{Et decir}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial s}(0, \tau_i) = 2b((b-a)(1+R(0, \tau_i)) + c\tau_i - 2b\tau_i^2).$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{S}}{\partial t}(0, \tau_i) &= 2 \frac{\partial v}{\partial t} \left[-\tau_i S(0, \tau_i) - v'(0) S(0, \tau_i) + S_1(0, \tau_i) \right. \\
&+ (b-a) \cdot 0 \cdot R(0, \tau_i) \left. \right] + \\
&2(b+v(0, \tau_i)) \left[-S(0, \tau_i) - \tau_i \frac{\partial S}{\partial t} - \right. \\
&v'(0) \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S_1}{\partial t} + (b-a) S(0, \tau_i) \frac{\partial R}{\partial t} \left. \right] = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t}(0, x_i) &= 12x_i^2(b+v(0, x_i))^2 + 4x_i^3(2(b+v(0, x_i))\frac{\partial v}{\partial t}(0, x_i) \\
&\quad + (v'(0))^2[4(b+v(0, x_i))\frac{\partial v}{\partial t}(0, x_i)x_i + 2(b+v(0, x_i))^2] + \\
&\quad + 2v'(0)[2x_i(2(b+v(0, x_i)))^2 + x_i^2(4(b+v(0, x_i))\frac{\partial v}{\partial t}(0, x_i) - \\
&\quad - 2(2(b+v(0, x_i))((b-a) + cx_i + v_1(0, x_i))) - 2x_i(\\
&\quad 2\frac{\partial v}{\partial t}(0, x_i))((b-a) + cx_i + v_1(0, x_i)) - 2x_i(2(b+v))((c + \frac{\partial v}{\partial t}(0, x_i)) - \\
&\quad - 2v'(0)[2\frac{\partial v}{\partial t}((b-a) + cx_i + v_1(0, x_i)) + 2(b+v(0, x_i))(\\
&\quad 2b + \frac{\partial v_2}{\partial t}(0, x_i))] = \\
&= 12x_i^2(b)^2 + 4x_i^3(2b\frac{\partial v}{\partial t}(0, x_i) - 2(2(b))((b-a) + cx_i) \\
&\quad - 2x_i(2\frac{\partial v}{\partial t}(0, x_i))((b-a) + cx_i) - 2x_i(2b)(c + \\
&\quad + \frac{\partial v}{\partial t}(0, x_i) - 2\frac{\partial v}{\partial t}(0, x_i)(2bx_i) - 2b(2b + \frac{\partial v_2}{\partial t}(0, x_i))) = \\
&= 12b^2x_i^2 + 8b\frac{\partial v}{\partial t}(0, x_i)x_i^3 - 4bcx_i - 4b(b-a) - \\
&\quad - 4(b-a)\frac{\partial v}{\partial t}(0, x_i)x_i - 4\frac{\partial v}{\partial t}(0, x_i)cx_i^2 - \\
&\quad - 4bcx_i - 4b\frac{\partial v}{\partial t}(0, x_i)x_i - 4b\frac{\partial v}{\partial t}(0, x_i)x_i - 4b^2 - \\
&\quad - 2b\frac{\partial v_2}{\partial t}(0, x_i) = \\
&12b^2x_i^2 - 8bcx_i + 4b(a-2b) + 8b\frac{\partial v}{\partial t}(0, x_i)x_i^3 -
\end{aligned}$$

$$-4c \frac{\partial V}{\partial t}(0, \tau_i) - 4b \frac{\partial V_1}{\partial t}(0, \tau_i) - \frac{4b}{\partial t}(0, \tau_i) -$$

$$-4(b-a) \frac{\partial V}{\partial t}(0, \tau_i) \tau_i = 4b [a - 2b - 2c\tau_i + 3b\tau_i^2]$$

Aui,

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial s}(0, \tau_i) = 4b [a - 2b - 2c\tau_i + 3b\tau_i^2].$$

Finalmente, debido a que $\frac{\partial \tilde{S}}{\partial t}(0, \tau_i) = 0$, no es necesario calcular la parcial $\frac{\partial \tilde{T}}{\partial s}(0, \tau_i)$.

Ahora ya podemos escribir las matrices jacobianas del campo \tilde{z} en las singularidades del divisor:

$$D\tilde{z}(0,0) = \begin{pmatrix} 4(b-a)b & 0 \\ -2v''(0)(2b)(b-a) & -4b(2b-a) \\ -2b \frac{\partial v_2}{\partial s}(0,0) & \end{pmatrix}$$

$$D\tilde{Z}(0, \xi_i) = \begin{pmatrix} 2b((b-a)(1+R(0, \xi_i)) + c\xi_i - 2b\xi_i^2) & 0 \\ \frac{\partial \tilde{T}}{\partial S}(0, \xi_i) & 4b[a - 2b - 2c\xi_i + 3b\xi_i^2] \end{pmatrix}$$

En lo que sigue vamos a efectuar el análisis de estas matrices jacobianas en términos de sus valores propios. De tal análisis se desprenden dos hechos fundamentales. Por un lado tenemos la hiperbolicidad de las matrices, por lo cual es factible aplicar el Teorema de Hartman-Grobman y llevar a cabo el análisis lineal $D\tilde{Z}$ sin menoscabo del análisis de \tilde{Z} , salvo conjugaciones topológicas. Por otro lado, tenemos también la dependencia de los foliaos lineales en $DZ(0,0)$, $DZ(0, \xi_1)$, $DZ(0, \xi_2)$ de las condiciones ϵ y δ) y por consiguiente de la foliación del campo \tilde{Z} entorno a sus

singularidades en el divisor, lo que nos dará la pauta para distinguir los tres tipos de configuración principal que son estructuralmente estables.

Comencemos con la matriz $D\tilde{Z}(0,0)$.

Los valores propios de esta matriz son

$$\lambda_1 = 4(b-a)b, \quad \lambda_2 = -4b(2b-a).$$

La matriz es hiperbólica siempre que se imponga válida la condición D del teorema. En efecto, en términos de las condiciones c) y d) se tiene que $4(b-a)b \neq 0$ y $-4b(2b-a) \neq 0$.

El hecho de que la matriz $D\tilde{Z}(0,0)$ sea hiperbólica nos permite afirmar, por el Teorema de Hartman-Grobman, que la foliación asociada al sistema lineal dado por tal matriz en torno al origen es topológicamente conjugada a la foliación asociada al campo \tilde{Z} entorno, también, del origen.

Desarrollaremos en lo que sigue el análisis de la foliación de $D\tilde{E}(0,0)$ en una vecindad del origen según la validez de las desigualdades asociadas a la condición δ .

$$\textcircled{D}_1: \left(\frac{c}{2b}\right)^2 + 2 < \frac{a}{b}.$$

Si $a > 0$, entonces $b > 0$, $b - a < 0$ y $2b - a < 0$.

Si $a < 0$, entonces $b < 0$, $b - a > 0$ y $2b - a > 0$.

Añi, en ambos casos tenemos

$$\lambda_1 = 4b(b-a) < 0$$

$$\lambda_2 = -4b(2b-a) > 0.$$

De donde, como los valores propios tienen signos opuestos, el origen es un PUNTO SILLA de la foliación de $D\tilde{E}(0,0)$.

$$\textcircled{D}_2: 1 < \frac{a}{b} < \left(\frac{c}{2b}\right)^2 + 2 \quad (a \neq 2b)$$

La desigualdad D_2 se desglosa en las siguientes dos:

$$\textcircled{D_{2,1}} : 2 < \frac{a}{b} < \left(\frac{c}{2b}\right)^2 + 2$$

$$\textcircled{D_{2,2}} : 1 < \frac{a}{b} < 2.$$

Supongamos que vale $D_{2,1}$.

Si $a > 0$, entonces $b > 0$, $b - a < 0$ y $2b - a < 0$.

Si $a < 0$, entonces $b < 0$, $b - a > 0$ y $2b - a > 0$.

Ahi, en ambos casos

$$\lambda_1 = 4b(b-a) < 0$$

$$\lambda_2 = -4b(2b-a) > 0.$$

De donde, como los valores propios tienen signos opuestos, el origen es un PUNTO SILLA de la foliación de $\tilde{D}\tilde{z}(0,0)$.

Supongamos que vale $D_{2,2}$.

Si $a > 0$, entonces $b > 0$, $b - a < 0$ y $2b - a > 0$.

Si $a < 0$, entonces $b < 0$, $b - a > 0$ y $2b - a < 0$.

Aquí, en ambos casos

$$\lambda_1 = 4b(b-a) < 0$$

$$\lambda_2 = -4b(2b-a) < 0$$

De donde, como los valores propios tienen signos iguales, el origen es un NODO de la foliada de $D\tilde{Z}(0,0)$.

③

$$0 < \frac{a}{b} < 1.$$

Si $a > 0$, entonces $b > 0$, $b-a > 0$ y $2b-a > 0$.

Si $a < 0$, entonces $b < 0$, $b-a < 0$ y $2b-a < 0$.

Aquí, en ambos casos

$$\lambda_1 = 4b(b-a) > 0$$

$$\lambda_2 = -4b(2b-a) < 0.$$

De donde como los valores propios tienen signos opuestos, el origen es un PUNTO SILLA de la foliada de $D\tilde{Z}(0,0)$.

Pasemos al análisis de las matrices $D\tilde{Z}(0, \chi_1)$ y $D\tilde{Z}(0, \chi_2)$.

Para conocer el signo del determinante de estas matrices consideraremos primero las siguientes simplificaciones:

tenemos $b\chi_i^2 - c\chi_i - 2b + a = 0$. Así

$$c\chi_i = b\chi_i^2 - 2b + a$$

$$a - 2b = -b\chi_i^2 + c\chi_i$$

Sustituyendo en $\frac{\partial \tilde{S}}{\partial s}(0, \chi_i)$ y en $\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t}(0, \chi_i)$

las dos expresiones anteriores obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{S}}{\partial s}(0, \chi_i) &= 2b[(b-a)(1+R) + c\chi_i - 2b\chi_i^2] \\ &= 2b[(b-a)(1+R) + b\chi_i^2 - 2b + a - 2b\chi_i^2] \\ &= 2b[(b-a)(1+R) + a - 2b - b\chi_i^2] \\ &= 2b[-b\chi_i^2 + (b-a)(1+R) + a - 2b]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t}(0, \chi_i) &= 4b[a - 2b - 2c\chi_i + 3b\chi_i^2] \\ &= 4b[-b\chi_i^2 + c\chi_i - 2c\chi_i + 3b\chi_i^2] \\ &= 4b\chi_i[-c + 2b\chi_i]\end{aligned}$$

De manera que el determinante de $D\tilde{z}(0, \gamma_i)$ es

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \tilde{S}}{\partial s}(0, \gamma_i) \cdot \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t}(0, \gamma_i) = \\ & = 8b^2 (-b\gamma_i^2 + (b-a)(1+R) - 2b+a)(\gamma_i(-c + 2b\gamma_i)) = \\ & = 8b^2 (-b\gamma_i^2 + (b-a) - 2b+a)(\gamma_i(-c + 2b\gamma_i)) = \\ & = 8b^2 (-b\gamma_i^2 - b)(-c\gamma_i + 2b\gamma_i^2) = \\ & = -8b^3 \cdot b\gamma_i(1 + \gamma_i^2)(-c + 2b\gamma_i). \end{aligned}$$

Así el signo del determinante depende de $-b\gamma_i$ y de $-c + 2b\gamma_i$.

Desarrollaremos aquí el análisis de las foliaciones de $D\tilde{z}(0, \tau_1)$ y $D\tilde{z}(0, \tau_2)$ en vecindades de $(0, \tau_1)$, $(0, \tau_2)$ respectivamente. Tal análisis lo efectuaremos involucrando a las desigualdades de la condición δ .

$$\textcircled{D_1}: \left(\frac{c}{2b}\right)^2 + 2 < \frac{a}{b}.$$

Como sabemos, para este caso no aparecen las singularidades $(0, \tau_1)$ y $(0, \tau_2)$ de \tilde{z} en el divisor.

$$\textcircled{D_{2,1}}: 2 < \frac{a}{b} < 2 + \left(\frac{c}{2b}\right)^2.$$

Ya hicimos ver que en este caso se tiene

$$\tau_1 > 0 \quad \text{y} \quad \tau_2 > 0.$$

Para $\tau_1 > 0$ tenemos

$$-b\tau_1 < 0$$

$$-c + 2b\tau_1 < 0, \quad \text{ya que } \tau_1 < \frac{c}{2b}.$$

Aquí, $\det(D\tilde{z}(0, r_1)) = (-br_1)(8b^3(1+r_1^2))(-c+2br_1) > 0$,
de donde, en $(0, r_1)$ la foliación $D\tilde{z}(0, r_1)$
presenta un NODO, si $r_1 > 0$

Para $r_2 > 0$ tenemos

$$-br_2 < 0$$

$$-c + 2br_2 > 0, \text{ ya que } r_2 > \frac{c}{2b}$$

Aquí, $\det(D\tilde{z}(0, r_2)) = (-br_2)(8b^3(1+r_2^2))(-c+2br_2) < 0$,
de donde en $(0, r_2)$ la foliación $D\tilde{z}(0, r_2)$
presenta un PUNTO SILLA, si $r_2 > 0$.

$$\textcircled{D_{2,2}}: 1 < \frac{a}{b} < 2$$

Ya hicimos ver que en este caso $r_1 < 0$ y $r_2 > 0$.

Para $r_1 < 0$ tenemos

$$-br_1 > 0$$

$$-c + 2br_1 < 0, \text{ ya que } r_1 < \frac{c}{2b}$$

Aui, $\det(D\tilde{z}(0, \gamma_1)) = (-b\gamma_1)(8b^2(1+\gamma_1^2))(-c+2b\gamma_1) < 0$,
de donde, en $(0, \gamma_1)$ la foliación $D\tilde{z}(0, \gamma_1)$
presenta un PUNTO SILLA, si $\gamma_1 < 0$.

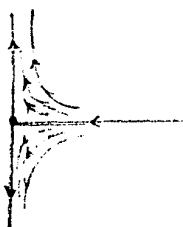
Para $\gamma_2 > 0$, ya vimos que la foliación $D\tilde{z}(0, \gamma_2)$
presenta un PUNTO SILLA.

$$D_3: \quad \frac{a}{b} < 1.$$

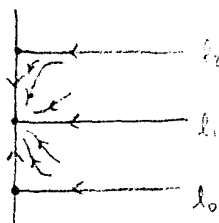
Para este caso tenemos $\gamma_1 < 0$ y $\gamma_2 > 0$, de
donde $D\tilde{z}(0, \gamma_1)$ presenta punto silla, lo
mismo que $D\tilde{z}(0, \gamma_2)$.

En suma tenemos el siguiente cuadro

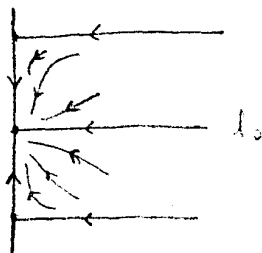
Condición D	(0,0)	(0, γ_1)	(0, γ_2)	figura
D_1	SILLA			A
$D_{2,1}$	SILLA	NODO	SILLA	$B_{2,1}$
$D_{2,2}$	NODO	SILLA	SILLA	$B_{2,2}$
D_3	SILLA	SILLA	SILLA	C



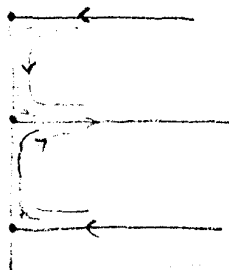
A



$B_{2,1}$

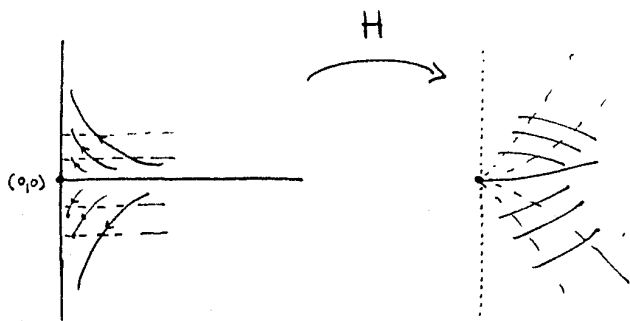


$B_{2,2}$

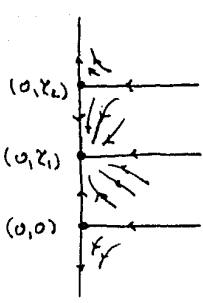


C

Aplicaremos ahora el mapeo H a las órbitas de \tilde{Z} para conocer las configuraciones principales entorno a $p \in M$ en el plano $\mathbb{R}^2(\mu, \nu)$. Ya sabemos por el teorema de Hartman-Grobman que las foliaciones asociadas a \tilde{Z} y a $D\tilde{Z}$ en las singularidades de \tilde{Z} son topológicamente equivalentes. Por razones de continuidad la equivalencia topológica vale hasta donde las foliaciones se pueden extender. Así, también vale aplicar H a las órbitas de $D\tilde{Z}$. La apariencia que presenta la imagen de A bajo H en $B \subset \mathbb{R}^2(\mu, \nu)$ es como se ilustra a continuación. Las figuras corresponden a los casos D_1 , $D_{2,1}$, $D_{2,2}$ y D_3 .

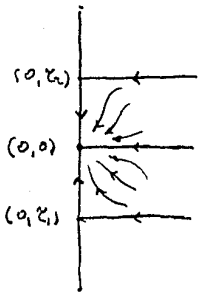
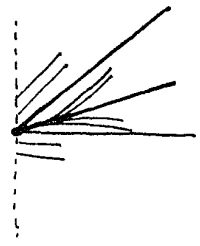


D_1
- 70 -



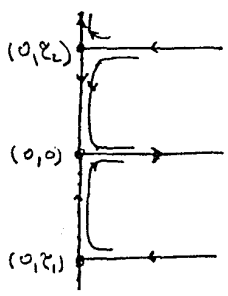
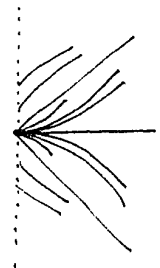
H

$D_{2,1}$



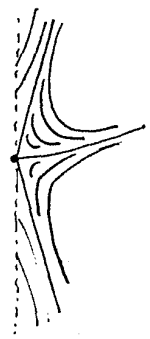
H

$D_{2,2}$

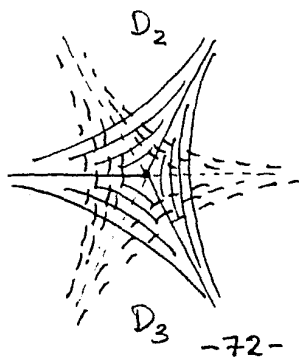
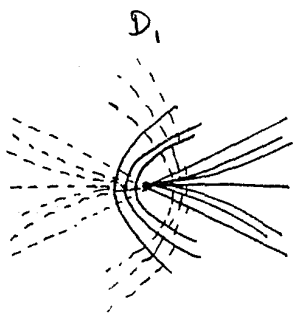
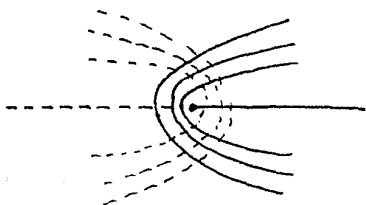


H

D_3



Ahora bien, debido a que las foliaciones \mathcal{F}_m y \mathcal{F}_x son ortogonales, se puede concluir que las configuraciones presentan los siguientes aspectos en la forma más simétrica posible:



Finalmente, concluimos el Teorema estableciendo la C^3 -FEP de la inmersión α cuando ésta satisface la condición D.

Proemos:

- i) localmente la vecindad $\mathcal{V}(\alpha) \subset \text{Imm}^{r^5}(M, \mathbb{R}^3)$ de α , relativa al punto $p \in \mathcal{V}_\alpha \subset M$ queda determinada por los parámetros a, b, c .
- ii) la condición D no depende ni de la carta (u, v) ni de la isometría T . Es decir, el tipo de configuración asociado a $p \in M$ es invariante bajo representaciones de α .
- iii) las condiciones $\varepsilon)$ y $\delta)$ de D son condiciones abiertas (de desigualdad) sobre los parámetros a, b, c , de modo que la configuración asociada a $p \in M$ cambia de manera continua si se consideran inmersiones β suficientemente cercanas a α en $\mathcal{V}(\alpha)$.
- iv) El número, tanto como el ángulo θ que forman entre sí, de las líneas l_0, l_1, l_2 , que son las reparametrizaciones unitarias, dependen de manera continua de la inmersión α .

v) La equivalencia topológica entre \mathcal{F}_α y \mathcal{F}_β y entre \mathcal{F}_α y \mathcal{F}_β se puede establecer aprovechando la equivalencia topológica $D\tilde{\mathcal{E}}_\alpha \cong D\tilde{\mathcal{E}}_\beta$ y el hecho de que el mapas H son difeomorfismos de $A \subset \mathbb{R}^2(s,t)$ en $B \subset \mathbb{R}^2(u,v)$.

Con esto queda demostrado el teorema.

Anexos

- A.1 El espacio $\text{Imm}^{r,s}(M, \mathbb{R}^3)$
- A.2 Configuración Principal de la Inmersión.
- A.3 Teorema de Hartman-Grobman para difeomorfismos
- A.4 Teorema de Hartman-Grobman para flujos
- A.5 Lema de Hadamard.

A.1 El espacio $\text{Imm}^r(M, \mathbb{R}^3)$.

Sea M una 2-variedad diferenciable de clase C^∞ , compacta, conexa y orientada. Definimos a continuación el concepto de inmersión con el cual asociaremos a M una superficie regular en \mathbb{R}^3 .

Definición. Una función $\alpha: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ de clase C^r , $1 \leq r \leq \infty$ es una IMMERSIÓN de clase C^r de M en \mathbb{R}^3 , si para todo punto $p \in M$, la diferencial

$$D\alpha_p: T_p M \longrightarrow T_{\alpha(p)} \mathbb{R}^3$$

es inyectiva.

Sea $\text{Imm}^r(M, \mathbb{R}^3) = \left\{ f: M \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid f \text{ es inmersión de clase } C^r \text{ de } M \text{ en } \mathbb{R}^3 \right\}$.

Si $C^r(M, \mathbb{R}^3) = \left\{ f: M \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid f \in C^r, 1 \leq r \leq \infty \right\}$
naturalmente $\text{Imm}^r(M, \mathbb{R}^3) \subset C^r(M, \mathbb{R}^3)$.

En lo que sigue haremos de estos conjuntos espacios topológicos.

Dotemos a $C^r(M, \mathbb{R}^3)$ de la topología compacto-abierta considerando las derivadas hasta de orden $s \leq r$. Obtenemos así el espacio topológico

$$C^{r,s}(M, \mathbb{R}^3).$$

Es natural preguntarse por el aspecto topológico del conjunto $\text{Imm}^r(M, \mathbb{R}^3)$ en tal espacio.

En base a un Teorema que Hirsch demuestra en [3, pag. 36] y que reformulemos aquí para el caso de la 2 -variedad M y el espacio \mathbb{R}^3 :

"Teorema: El conjunto $\text{Imm}^r(M, \mathbb{R}^3)$ es abierto en $C^{r,s}(M, \mathbb{R}^3)$ en la topología compacto-abierta para $1 \leq s \leq r$ ", podemos considerar el espacio topológico $\text{Imm}^{r,s}(M, \mathbb{R}^3)$ con $1 \leq s \leq r$ como el conjunto $\text{Imm}^r(M, \mathbb{R}^3)$ dotado de la topología relativa a la de $C^{r,s}(M, \mathbb{R}^3)$.

A.2 Configuración Principal de la Inmersión.

Sea M una 2-variedad diferenciable de clase C^∞ , compacta, conexa y orientada. Sea $p \in M$ y $\alpha \in \text{Inm}^r(M, \mathbb{R}^3)$. Las imágenes de M bajo las inmersiones que consideramos están contenidas en \mathbb{R}^3 . Y en \mathbb{R}^3 tenemos una estructura métrica proporcionada por el producto interno o escalar usual: tal es la estructura euclidiana de \mathbb{R}^3 . En base a esta estructura consideraremos las estructuras métricas de la variedad M correspondientes a las inmersiones α . De tales estructuras dependerán, como veremos, las diferentes "geometrías" o "configuraciones principales" asociadas a la variedad.

Consideremos un sistema local de coordenadas alrededor de p :

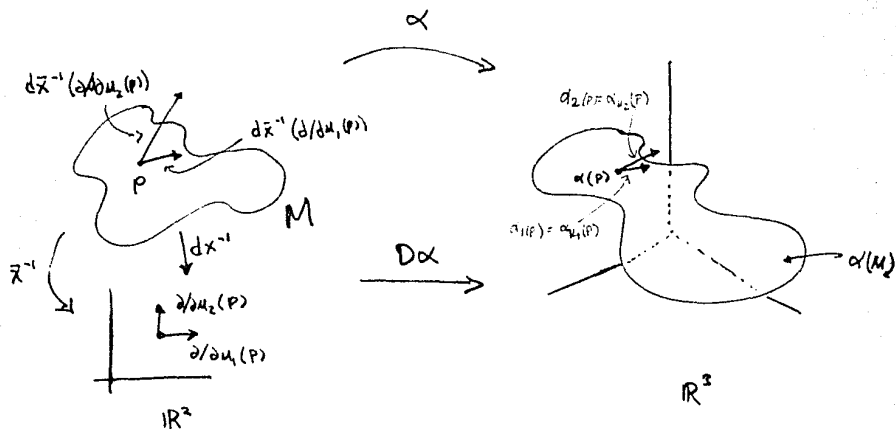
$$\bar{x}: V(p) \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\bar{x}(p) = (x_1(p), x_2(p))$$

Consideremos también los vectores $\alpha_1(p) = \alpha_{x_1}(p)$ y $\alpha_2(p) = \alpha_{x_2}(p)$ definidos como:

$$\alpha_1(p) = \alpha_{u_1}(p) = D\alpha_p \left(d\bar{x}^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial u_1}(p) \right) \right)$$

$$\alpha_2(p) = \alpha_{u_2}(p) = D\alpha_p \left(d\bar{x}^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial u_2}(p) \right) \right).$$



Si $T_{\alpha(p)} \alpha(M)$ es el espacio tangente a $\alpha(p)$ de $\alpha(M)$, la función $I_{\alpha,p} : T_{\alpha(p)} \alpha(M) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$I_{\alpha,p}(w) = \langle w, w \rangle_{\alpha(p)} = \|w\|^2 \geq 0,$$

es una forma cuadrática en $T_{\alpha(p)} \alpha(M)$ y se conoce como la PRIMERA FORMA FUNDAMENTAL asociada a M a través de la inmersión α .

Como $\{\alpha_1(p), \alpha_2(p)\}$ es base de $T_{\alpha(p)}\alpha(M)$, existen reales w_1, w_2 tales que $w \in T_{\alpha(p)}\alpha(M)$ se puede escribir como $w = w_1 \alpha_1(p) + w_2 \alpha_2(p)$.

$$\begin{aligned} \text{Entonces } I_{\alpha, p}(w) &= \langle w, w \rangle_{\alpha(p)} = \\ &= \langle w_1 \alpha_1(p) + w_2 \alpha_2(p), w_1 \alpha_1(p) + w_2 \alpha_2(p) \rangle_{\alpha(p)} = \\ &= w_1^2 \langle \alpha_1(p), \alpha_1(p) \rangle_{\alpha(p)} + 2w_1 w_2 \langle \alpha_1(p), \alpha_2(p) \rangle_{\alpha(p)} + \\ &\quad w_2^2 \langle \alpha_2(p), \alpha_2(p) \rangle_{\alpha(p)} \\ &= w_1^2 E_\alpha(\bar{x}(p)) + 2w_1 w_2 F_\alpha(\bar{x}(p)) + w_2^2 G_\alpha(\bar{x}(p)), \end{aligned}$$

donde $\langle \alpha_1(p), \alpha_1(p) \rangle_{\alpha(p)} = E_\alpha(\bar{x}(p))$

$\langle \alpha_1(p), \alpha_2(p) \rangle_{\alpha(p)} = F_\alpha(\bar{x}(p))$

$\langle \alpha_2(p), \alpha_2(p) \rangle_{\alpha(p)} = G_\alpha(\bar{x}(p)).$

Las funciones $E_\alpha(\bar{x}(p))$, $F_\alpha(\bar{x}(p))$ y $G_\alpha(\bar{x}(p))$ son diferenciables en vecindades ordenadas correspondientes de las funciones de parametrización \bar{x} de M y se conocen como los PRIMEROS COEFICIENTES FUNDAMENTALES de M correspondientes a la immersion α .

Sea $\| \cdot \| : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

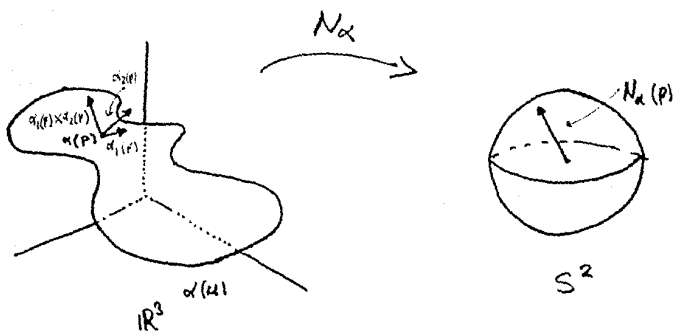
$\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$ la norma euclídea en \mathbb{R}^3 .

Vamos a asociar a cada inmersión $\alpha \in \text{Imm}^r(M, \mathbb{R}^3)$

un mapeo llamado MAPEO DE GAUSS de α :

$$N_\alpha : M \longrightarrow S^2$$

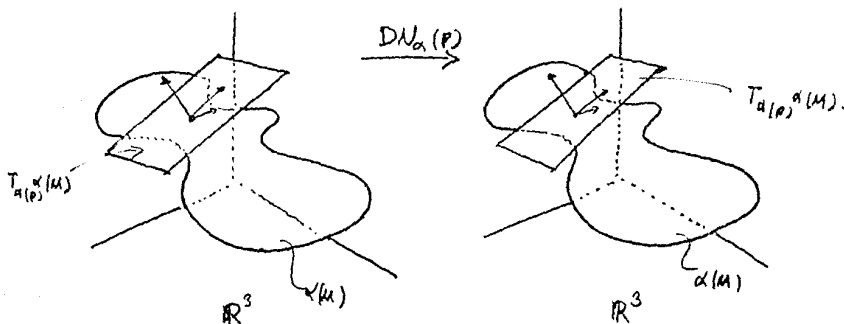
$$N_\alpha(p) = \frac{\alpha_1(p) \times \alpha_2(p)}{\| \alpha_1(p) \times \alpha_2(p) \|}$$



Por las propiedades del producto vectorial y el carácter inyectivo del mapeo $D\alpha$, el mapeo de Gauss N_α de α es un mapeo diferenciable.

Además en cada punto $p \in M$ la diferencial $DN_\alpha(p)$ es un mapeo lineal autoadjunto. Notemos que los planos tangentes $T_{\alpha(p)} \alpha(M)$ y $T_{N_\alpha(p)} S^2$ son planos paralelos, en vista de que ambos tienen el mismo vector normal $N_\alpha(p)$. Así es posible escribir

$$DN_\alpha(p) : T_{\alpha(p)} \alpha(M) \longrightarrow T_{N_\alpha(p)} S^2.$$



Veamos que en efecto $DN_\alpha(p)$ es un mapeo lineal autoadjunto.

Como $DN_\alpha(p)$ es lineal, es suficiente verificar que

$$\langle DN_\alpha(p)(\alpha_1(p)), \alpha_2(p) \rangle = \langle \alpha_1(p), DN_\alpha(p)(\alpha_2(p)) \rangle,$$

donde $\{\alpha_1(p), \alpha_2(p)\}$ es base de $T_{\alpha(p)} \alpha(M)$.

Si $\gamma(t) = \alpha(\bar{x}^{-1}(u_1(t), u_2(t)))$ es una curva parametrizada en $\alpha(M)$ con $\gamma(0) = \alpha(p)$, se tiene

$$DN_{\alpha}(p)(\gamma'(0)) = \frac{d}{dt} N_{\alpha}(\gamma(t)) \Big|_{t=0} =$$

$$DN_{\alpha}(p)(\alpha_1(p))(u_1'(0)) + DN_{\alpha}(p)(\alpha_2(p))(u_2'(0)).$$

En particular $DN_{\alpha}(p)(\alpha_1(p)) = N_{\alpha_1}(p) \in T_{\alpha(p)} \alpha(M)$

γ $DN_{\alpha}(p)(\alpha_2(p)) = N_{\alpha_2}(p) \in T_{\alpha(p)} \alpha(M).$

Así es suficiente demostrar que

$$\langle N_{\alpha_1}, \alpha_2(p) \rangle = \langle \alpha_1(p), N_{\alpha_2} \rangle$$

Sabemos que $\langle N_{\alpha}(p), \alpha_1(p) \rangle = 0$ y $\langle N_{\alpha}(p), \alpha_2(p) \rangle = 0.$

Así $\langle N_{\alpha_2}(p), \alpha_1(p) \rangle + \langle N_{\alpha}(p), \frac{d\alpha_1(p)}{d\mu_2} \rangle = 0$

$$\langle N_{\alpha_1}(p), \alpha_2(p) \rangle + \langle N_{\alpha}(p), \frac{d\alpha_2(p)}{d\mu_1} \rangle = 0,$$

de donde

$$\langle N_{\alpha_1}(p), \alpha_2(p) \rangle = - \langle N_{\alpha}(p), \frac{d\alpha_1(p)}{d\mu_2} \rangle = \langle N_{\alpha_2}(p), \alpha_1(p) \rangle$$

Tenemos así que $DN_{\alpha}(p)$ es un mapeo lineal autoadjunto.

Esto nos permite definir una forma cuadrática en $T_{\alpha(p)} \alpha(M)$:

$$Q_{\alpha,p} : T_{\alpha(p)} \alpha(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$Q_{\alpha,p}(v) = \langle DN_{\alpha}(p)v, v \rangle$$

De hecho definiremos la SEGUNDA FORMA FUNDAMENTAL:

$$\Pi_{\alpha, p} : T_{\alpha(p)} \alpha(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\Pi_{\alpha, p}(v) = -Q_{\alpha, p}(v) = -\langle DN_{\alpha}(p)v, v \rangle$$

Calculamos ahora los segundos coeficientes fundamentales.

Si $v \in T_{\alpha(p)} \alpha(M)$, $v = v_1 \alpha_1(p) + v_2 \alpha_2(p)$, y

$$DN_{\alpha}(p)v = DN_{\alpha}(p)(v_1 \alpha_1(p) + v_2 \alpha_2(p)) = v_1 DN_{\alpha}(p)(\alpha_1(p)) + v_2 DN_{\alpha}(p)(\alpha_2(p)),$$

$$\Pi_{\alpha, p}(v) = -\langle DN_{\alpha}(p)v, v \rangle = \langle v_1 N_{\alpha, 1} + v_2 N_{\alpha, 2}, v_1 \alpha_1 + v_2 \alpha_2 \rangle$$

$$= -\left[v_1^2 \langle N_{\alpha, 1}, \alpha_1 \rangle + v_1 v_2 \langle N_{\alpha, 1}, \alpha_2 \rangle + v_2 v_1 \langle N_{\alpha, 2}, \alpha_1 \rangle + v_2^2 \langle N_{\alpha, 2}, \alpha_2 \rangle \right] =$$

$$e_{\alpha}(v_1^2) + 2f_{\alpha}(v_1 v_2) + g_{\alpha}(v_2^2),$$

donde

$$e_{\alpha} = -\langle N_{\alpha, 1}, \alpha_1 \rangle$$

$$f_{\alpha} = -\langle N_{\alpha, 1}, \alpha_2 \rangle = -\langle N_{\alpha, 2}, \alpha_1 \rangle$$

$$g_\alpha = - \langle N_{\alpha,2}, \alpha_2 \rangle$$

De hecho podemos escribir $e_\alpha(\bar{x}(p))$, $f_\alpha(\bar{x}(p))$ y $g_\alpha(\bar{x}(p))$ para las funciones que se conocen como SEGUNDOS COEFICIENTES FUNDAMENTALES de M correspondientes a la inmersión α . Tales funciones son diferenciables en vecindades parametrizadas de \bar{x} .

Calculamos ahora los coeficientes de la matriz $DN_\alpha(p)$.

Como $N_{\alpha,1}(p) \in T_{\alpha(p)} \alpha(M)$ y $N_{\alpha,2}(p) \in T_{\alpha(p)} \alpha(M)$,

$$N_{\alpha,1}(p) = a_{11} \alpha_1(p) + a_{21} \alpha_2(p)$$

$$N_{\alpha,2}(p) = a_{12} \alpha_1(p) + a_{22} \alpha_2(p).$$

Así

$$\begin{aligned} -e_\alpha(\bar{x}(p)) &= \langle N_{\alpha,1}(p), \alpha_1(p) \rangle = \langle a_{11} \alpha_1(p) + a_{21} \alpha_2(p), \alpha_1(p) \rangle = \\ &= a_{11} E_\alpha(\bar{x}(p)) + a_{21} F_\alpha(\bar{x}(p)). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -f_\alpha(\bar{x}(p)) &= \langle N_{\alpha,1}(p), \alpha_2(p) \rangle = \langle a_{11} \alpha_1(p) + a_{21} \alpha_2(p), \alpha_2(p) \rangle = \\ &= a_{11} F_\alpha(\bar{x}(p)) + a_{21} G_\alpha(\bar{x}(p)) \end{aligned}$$

$$-f_{\alpha}(\bar{x}(p)) = \langle N_{\alpha_1, 2}(p), \alpha_1(p) \rangle = \langle a_{12}\alpha_1(p) + a_{22}\alpha_2(p), \alpha_1(p) \rangle = \\ = a_{12}E_{\alpha}(\bar{x}(p)) + a_{22}F_{\alpha}(\bar{x}(p))$$

$$-g_{\alpha}(\bar{x}(p)) = \langle N_{\alpha_1, 2}(p), \alpha_2(p) \rangle = \langle a_{12}\alpha_1(p) + a_{22}\alpha_2(p), \alpha_2(p) \rangle = \\ = a_{12}F_{\alpha}(\bar{x}(p)) + a_{22}G_{\alpha}(\bar{x}(p)).$$

Les matrices relatives se peuvent écrire en forme matriciel:

$$-\begin{pmatrix} e_{\alpha} & f_{\alpha} \\ f_{\alpha} & g_{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}^{\alpha} & a_{21}^{\alpha} \\ a_{12}^{\alpha} & a_{22}^{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{\alpha} & F_{\alpha} \\ F_{\alpha} & G_{\alpha} \end{pmatrix} \quad \text{y a}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{\alpha} & a_{21}^{\alpha} \\ a_{12}^{\alpha} & a_{22}^{\alpha} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} e_{\alpha} & f_{\alpha} \\ f_{\alpha} & g_{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{\alpha} & F_{\alpha} \\ F_{\alpha} & G_{\alpha} \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{1}{E_{\alpha}G_{\alpha} - F_{\alpha}^2} \begin{pmatrix} e_{\alpha} & f_{\alpha} \\ f_{\alpha} & g_{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_{\alpha} & -F_{\alpha} \\ -F_{\alpha} & E_{\alpha} \end{pmatrix}$$

de donde

$$a_{11}^{\alpha} = \frac{f_{\alpha}F_{\alpha} - e_{\alpha}G_{\alpha}}{E_{\alpha}G_{\alpha} - F_{\alpha}^2}$$

$$a_{12}^{\alpha} = \frac{g_{\alpha}F_{\alpha} - f_{\alpha}G_{\alpha}}{E_{\alpha}G_{\alpha} - F_{\alpha}^2}$$

$$a_{21}^{\alpha} = \frac{e_{\alpha} F_{\alpha} - f_{\alpha} E_{\alpha}}{E_{\alpha} G_{\alpha} - F_{\alpha}^2}$$

$$a_{22}^{\alpha} = \frac{f_{\alpha} F_{\alpha} - g_{\alpha} E_{\alpha}}{E_{\alpha} G_{\alpha} - F_{\alpha}^2}$$

Estos coeficientes caracterizan la diferencial $DN_{\alpha}(P)$ y las ecuaciones que los determinan se llaman ecuaciones de Weingarten.

$$DN_{\alpha}(P) = \begin{pmatrix} a_{11}^{\alpha} & a_{12}^{\alpha} \\ a_{21}^{\alpha} & a_{22}^{\alpha} \end{pmatrix}$$

A continuación vamos a definir los conceptos geométricos que nos interesan en este trabajo. Estos son relativos a la idea de curvatura y se definen en términos del mapa $DN_{\alpha}(P)$.

Para la inmersión α tenemos la siguiente función:

$$K_{\alpha}: M \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$K_{\alpha}(P) = \det DN_{\alpha}(P)$$

$$H_\alpha: M \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$H_\alpha(p) = -\frac{1}{2} \text{traza } DN_\alpha(p)$$

A la función K_α se le conoce como CURVATURA GAUSSIANA de M y a la función H_α como CURVATURA MEDIA de M . Evidentemente ambas curvaturas corresponden a la inmersión α . Las expresiones de $K_\alpha(p)$ y $H_\alpha(p)$ en términos de los coeficientes fundamentales son las siguientes:

$$K_\alpha(p) = \frac{e_\alpha g_\alpha - f_\alpha^2}{E_\alpha G_\alpha - F_\alpha^2} (p)$$

$$H_\alpha(p) = \frac{e_\alpha G_\alpha - 2f_\alpha F_\alpha + g_\alpha E_\alpha}{E_\alpha G_\alpha - F_\alpha^2} (p)$$

Un punto $p \in M$ es un PUNTO UMBILICAL de α si los valores propios del mapeo $DN_\alpha(p)$ son iguales.

El conjunto de puntos umbilicales de la inmersión α se denota por U_α .

Si los valores propios del mapeo $DN_\alpha(p)$ son distintos, están dados por

$$R_{\alpha,i}(p) = H_\alpha(p) \pm \sqrt{H_\alpha^2(p) - K_\alpha(p)}, \quad i=1,2.$$

Los valores $R_{\alpha,1}(p)$ y $R_{\alpha,2}(p)$ se conocen como las CURVATURAS PRINCIPALES MÁXIMA y MÍNIMA, de α , respectivamente.

Debido al carácter auto-adjunto del mapeo $DN_\alpha(p)$, los vectores propios asociados a los valores propios $R_{\alpha,1}(p)$ y $R_{\alpha,2}(p)$ definen campos vectoriales ortogonales que se conocen como CAMPOS DE DIRECCIONES PRINCIPALES, uno MÁXIMAL, asociado a la curvatura principal máxima y el otro MÍNIMAL, asociado a la curvatura principal mínima. Las curvas integrales de tales campos se conocen como LÍNEAS

DE CURVATURA PRINCIPAL, una MAXIMAL y otra MINIMAL. Las ecuaciones diferenciales de tales

líneas son:

$$(E_{\alpha} f_{\alpha} - e_{\alpha} F_{\alpha}) du^2 + (E_{\alpha} g_{\alpha} - e_{\alpha} G_{\alpha}) du dv + (F_{\alpha} g_{\alpha} - f_{\alpha} G_{\alpha}) dv^2 = 0.$$

Llamaremos $\mathcal{F}_{\alpha}^{\max}$ a la familia de las líneas de curvatura principal maximal y $\mathcal{F}_{\alpha}^{\min}$ a la familia de las líneas de curvatura principal minimal.

Finalmente, dada M y $\alpha \in \text{Imm}^r(M, \mathbb{R}^3)$,

definimos la CONFIGURACION PRINCIPAL P_{α} DE LA INMERSION α como

$$P_{\alpha} = (V_{\alpha}, \mathcal{F}_{\alpha}^{\max}, \mathcal{F}_{\alpha}^{\min}).$$

A.3 El teorema de Hartman - Grobman para difeomorfismos.

Sea E un espacio de Banach con norma $\|\cdot\|$.

Un mapeo lineal invertible $L: E \rightarrow E$ es

hiperbólico si todo λ valor propio de L tiene

$$\operatorname{Re} \lambda \neq 0.$$

Si $0 \in V \subset E$ y $f: V \rightarrow E$ es un difeomorfismo sobre su imagen, decimos que 0 es un

punto fijo hiperbólico de f si

i) $f(0) = 0$

ii) $Df_0: E \rightarrow E$ es hiperbólico.

Una característica importante relativa a la dinámica que genera un mapeo lineal hiperbólico

$L: E \rightarrow E$ es la descomposición en suma directa

del espacio E en subespacios invariantes E_s y E_u

$$E = E_s \oplus E_u,$$

y la existencia de una norma $\|\cdot\|_2$ en E ,

equivalente a la norma $\|\cdot\|$ tal que si

$$L_s = L|_{E_s} \quad \text{y} \quad L_u = L|_{E_u}, \quad \text{entonces}$$

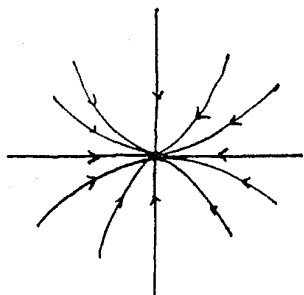
$\|L_S\| < 1$ y $\|L_u^{-1}\| < 1$, donde se considera la norma de los operadores relativa a la norma $\|\cdot\|_2$.

Los puntos fijos hiperbólicos pueden ser de los siguientes tipos, según sean los subespacios E_S y E_u .

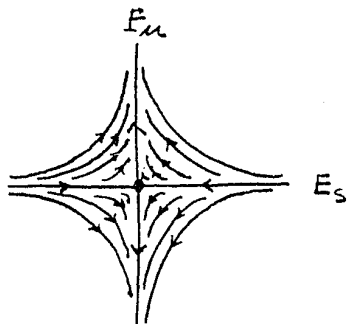
Un punto fijo hiperbólico 0 de f es:

(1) NODO si $E = E_S$ o $E = E_u$ para Df_0 .

(2) SILLA si $E \neq E_S$ ni $E = E_u$ para Df_0 .



NODO $E = E_S$



SILLA.

El resultado básico relativo al comportamiento de puntos fijos hiperbólicos afirma que el mapeo en una vecindad de un punto fijo de tal tipo es topológicamente conjugado a la derivada del mapeo en el mismo punto. Tal resultado se conoce como el Teorema de Hartman-Grobman y, como se puede apreciar, establece la posibilidad de la linealización de un flujo en torno a puntos fijos hiperbólicos. Enunciamos a continuación tal teorema y después la demostración del mismo. Tal demostración se apoyará en un par de proposiciones que también demostramos.

Teorema de Hartman-Grobman.

Sea V una vecindad de O en un espacio de Banach E y sea $f: V \rightarrow E$ un difeomorfismo de clase C^1 sobre su imagen, de modo que O sea punto fijo hiperbólico de f .

Entonces existe una vecindad U de O contenida

en V y un homeomorfismo h de V sobre una
vecindad de 0 en E tal que

$$hL(z) = fh(z), \text{ para todo } z \in V, \text{ donde}$$
$$L = (Df)_0.$$

Como dijimos la demostración se apoya en dos proposiciones.

Las enunciaremos aquí y a continuación
presentaremos sus respectivas demostraciones.

Proposición 1.

Para todo automorfismo lineal hiperbólico L de un
espacio de Banach E , existe una constante $\varepsilon > 0$ tal
que para todo mapeo acotado continuo Φ en E con
constante de Lipschitz $\text{Lip}(\Phi) < \varepsilon$, existe un
mapeo único $h_\Phi \in C_b^0(E)$ tal que

$$(id + h_\Phi) \circ L = (L + \Phi) \circ (id + h_\Phi) \dots \text{---} \textcircled{A}$$

Proposición 2.

Sea V una vecindad de 0 en un espacio de Banach E ,
y sea $\phi: V \rightarrow E$ un mapeo de clase C^1 tal que

$$(1) \phi(0) = 0$$

$$(2) (D\phi)_0 = 0$$

Entonces, para toda $\varepsilon > 0$ existe un subconjunto
abierto W de V que contiene a 0 y un mapeo

$\tilde{\phi}: E \rightarrow E$ que satisface

$$(1) \tilde{\phi}|_W = \phi|_W$$

$\tilde{\phi}$ es acotado con $Lip(\tilde{\phi}) < \varepsilon$.

Demostración de la Proposición 1.

En primer término estableceremos que la ecuación
funcional

$$(L + \psi) \circ (\text{id} + h) = (\text{id} + h) \circ (L + \phi) \dots \dots \textcircled{B}$$

tiene solución única $h_{\psi, \phi} \in C_a^0(E)$ siempre que

ψ y $\phi \in C_b^0(E)$ tengan constantes de Lipschitz suficientemente pequeñas. Para establecer esto requerimos el siguiente procedimiento:

(1) Demostremos que resolver (B) es equivalente a resolver la ecuación funcional

$$\mathcal{L}_\phi(h) = \phi - \psi(\text{id} + h) \dots \dots \dots \textcircled{C}$$

donde

$$\mathcal{L}_\phi(h) = Lh - h(L + \phi).$$

(2) Demostremos que \mathcal{L}_ϕ es invertible y que por lo tanto resolver (B) es equivalente a resolver

$$h = \mathcal{L}_\phi^{-1}(\phi - \psi(\text{id} + h)) \dots \dots \dots \textcircled{D}$$

(3) Demostremos que (D) tiene solución única, haciendo uso que \mathcal{L}_ϕ^{-1} es una contracción.

Para demostrar (1) no nos falta más que realizar un cálculo directo.

$$\text{Tenemos } (L + \psi) \circ (\text{id} + h) = (\text{id} + h) \circ (L + \phi)$$

$$\text{de donde } L(\text{id} + h) + \psi(\text{id} + h) = \text{id} \circ (L + \phi) + h \circ (L + \phi)$$

$$\text{y } L + Lh + \psi \circ (\text{id} + h) = L + \phi + h \circ (L + \phi)$$

$$\text{y } Lh + \psi \circ (\text{id} + h) = \phi + h \circ (L + \phi)$$

$$\text{y } Lh - h \circ (L + \phi) = \phi - \psi \circ (\text{id} + h).$$

$$\text{Escribimos } \mathcal{L}_\phi(h) = Lh - h \circ (L + \phi).$$

Para demostrar (2) usaremos el siguiente resultado clásico del análisis funcional: "Si H es un operador hiperbólico, entonces $H - \text{id}$ es invertible". De modo que exhibiremos un operador \mathcal{L}_ϕ^* de tal modo que

$$i) \quad \mathcal{L}_\phi^* - \text{id} = \mathcal{L}_\phi$$

$$ii) \quad \mathcal{L}_\phi^* \text{ sea hiperbólico.}$$

$$\text{Definamos } \mathcal{L}_\phi^*(v) = L \circ v \circ (L + \phi)^{-1}.$$

$$\text{Haremos ver que } \mathcal{L}_\phi = (\mathcal{L}_\phi^* - \text{id}) \circ \alpha_{(L+\phi)},$$

$$\text{donde } \alpha_k(v) = v \circ k.$$

$$\text{Sea } (\mathcal{L}_\phi^* - \text{id}) \circ \alpha_{(L+\phi)}(h) =$$

$$(\mathcal{L}_\phi^* - \text{id}) \circ h \circ (L+\phi) =$$

$$L \circ (h \circ (L+\phi)) \circ (L+\phi)^{-1} - \text{id} \circ (h \circ (L+\phi)) =$$

$$L \circ h \circ ((L+\phi) \circ (L+\phi)^{-1}) - h \circ (L+\phi) =$$

$$L \circ h - h \circ (L+\phi) = \mathcal{L}_\phi(h).$$

$$\text{Así } \mathcal{L}_\phi = (\mathcal{L}_\phi^* - \text{id}) \circ \alpha_{(L+\phi)}.$$

Esto significa que el operador funcional \mathcal{L}_ϕ coincide con el operador $\mathcal{L}_\phi^* - \text{id}$ en las "coordenadas" $L+\phi$. Demostremos ahora que \mathcal{L}_ϕ el operador \mathcal{L}_ϕ^* es hiperbólico. Para ello descompondremos el operador en base a la descomposición del espacio de Banach E generada por el operador L .

Dado L se tiene que

$$E = E_s \oplus E_u, \text{ donde}$$

L es invariante en E_s y en E_u respectivamente,

y si $L_s = L|_{E_s}$ y $L_u = L|_{E_u}$, entonces

L_s y L_u^{-1} tienen norma menor que 1, con

respecto a una norma $\| \cdot \|_2$ equivalente a la del mismo espacio de Banach E . Es decir, $\|L_S\| < 1$ y $\|L_M\| < 1$, con respecto a $\| \cdot \|_2$.

Consideremos el conjunto $\mathcal{L}_b^0(E, E)$ de funciones continuas acotadas de E en E . A partir de la descomposición $E = E_M \oplus E_S$, se puede descomponer $\mathcal{L}_b^0(E, E)$ del siguiente modo:

$$\mathcal{L}_b^0(E, E) = \mathcal{L}_b^0(E, E_S) \oplus \mathcal{L}_b^0(E, E_M).$$

En efecto, sea $f \in \mathcal{L}_b^0(E, E)$. Para todo $x \in E$ tenemos

$$f(x) \in E \text{ y así } f(x) = (f(x))_S + (f(x))_M.$$

Definamos

$$f_S: E \longrightarrow E_S$$

$$f_S(x) = (f(x))_S,$$

y

$$f_M: E \longrightarrow E_M$$

$$f_M(x) = (f(x))_M.$$

Entonces $f \in \mathcal{L}_b^0(E, E)$ se escribe como

$$f = f_S + f_M.$$

Considérons a continuación el operador \mathcal{L}_ϕ^* . La descomposición que daremos es el otro lo siguiente:

$$\mathcal{L}_\phi^S = \mathcal{L}_\phi^{*S} = \mathcal{L}_\phi^* | \mathcal{C}_b^0(E, E_S)$$

$$\mathcal{L}_\phi^M = \mathcal{L}_\phi^{*M} = \mathcal{L}_\phi^* | \mathcal{C}_b^0(E, E_M), \quad \text{todo lo cual}$$

podemos escribir:

$$\mathcal{L}_\phi^S(N_S) = L_S \circ v_S \circ (L + \phi)^{-1}$$

$$\mathcal{L}_\phi^M(N_M) = L_M \circ v_M \circ (L + \phi)^{-1},$$

donde evidentemente

$$N_S \in \mathcal{C}_b^0(E, E_S), \quad L_S = L | E_S$$

$$N_M \in \mathcal{C}_b^0(E, E_M), \quad L_M = L | E_M.$$

Ahora bien:

$$\|\mathcal{L}_\phi^{*S}(N_S)\| = \|L_S \circ v_S \circ (L + \phi)^{-1}\| \leq \|L_S\| \leq \lambda < 1.$$

Así que

$$\|\mathcal{L}_\phi^S\| < 1$$

Análogamente

$$\|\mathcal{L}_\phi^{*M}(N_M)\| = \|L_M \circ v_M \circ (L + \phi)^{-1}\| \leq \|L_M\| \leq \lambda < 1.$$

Por consiguiente \mathcal{L}_ϕ^* es hiperbólico, y así

$$\mathcal{L}_\phi = \mathcal{L}_\phi^* - \text{id} \text{ es invertible.}$$

Para demostrar (3), es decir, que \mathcal{L}_ϕ^{-1} es un operador de contracción, nos' necesitab' establecer las desigualdades

$$\frac{1}{\|\mathcal{L}\|+1} \leq \|\mathcal{L}_\phi^{-1}\| \leq \frac{1}{\min(1-\lambda, \lambda^{-1}-1)}.$$

Como $\|\alpha_{(L+\phi)^{-1}}\| = 1$ en las coordenadas $L+\phi$, será suficiente encontrar $\|(\mathcal{L}_\phi^* - \text{id})^{-1}\|$ para establecer las desigualdades anteriores. Para simplificar escribamos $H = \mathcal{L}_\phi^*$. Tenemos

$$\begin{aligned} (1+\lambda)\|x_s\| &\geq \|x_s\| + \|H_s x_s\| \geq \|x_s - H_s x_s\| \\ &\geq \|x_s\| - \|H_s x_s\| \geq (1-\lambda)\|x_s\|, \text{ y así} \end{aligned}$$

deir

$$(1+\lambda)\|x_s\| \geq \|x_s - H_s x_s\| \geq (1-\lambda)\|x_s\|,$$

de donde

$$(1-\lambda) \|x_s\| \geq \|x_s - H_s x_s\|^{-1} \geq \frac{1}{(1+\lambda) \|x_s\|},$$

y finalmente

$$\frac{1}{(1+\lambda) \|x_s\|} \leq \| (H_s x_s - x_s)^{-1} \| \leq \frac{1}{(1-\lambda) \|x_s\|}.$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} (\|L_m\| + 1) \|x_m\| &\geq \|H_m x_m\| + \|x_m\| \geq \|H_m x_m - x_m\| \\ &\geq \|H_m x_m\| - \|x_m\| \geq (\lambda^{-1} - 1) \|x_m\|, \text{ en} \end{aligned}$$

destr

$$(\|L_m\| + 1) \|x_m\| \geq \|H_m x_m - x_m\| \geq (\lambda^{-1} - 1) \|x_m\|,$$

de donde

$$(\lambda^{-1} - 1) \|x_m\| \geq \|H_m x_m - x_m\|^{-1} \geq \frac{1}{(\|L_m\| + 1) \|x_m\|}$$

y finalmente

$$\frac{1}{(\|L_m\| + 1) \|x_m\|} \leq \|H_m x_m - x_m\|^{-1} \leq \frac{1}{(\lambda^{-1} - 1) \|x_m\|}$$

Maximizando, y tomando en cuenta que $H = \mathcal{L}_\phi^*$ y que $\|L\| = \|L\|$, obtenemos

$$\frac{1}{\max(\|L\|+1, \lambda+1)} \leq \|(\mathcal{L}_\phi^* - \text{id})^{-1}\| \leq \frac{1}{\min(1-\lambda, \lambda^{-1}-1)}.$$

Esto lo podemos escribir como

$$\frac{1}{\max(\|L\|+1, \lambda+1)} \leq \|\mathcal{L}_\phi^{-1}\| \leq \frac{1}{\min(1-\lambda, \lambda^{-1}-1)}$$

Quieren a demostrar, ahora, que \mathcal{L}_ϕ^{-1} es una contracción. De hecho demostraremos que \mathcal{L}_ϕ^{-1} es contracción si $\text{Lip } \psi < \|\mathcal{L}_\phi^{-1}\|^{-1}$.

Tenemos la ecuación (D) :

$$h = \mathcal{L}_\phi^{-1} (\phi - \psi \circ (\text{id} + h)).$$

Escribimos $\mu(h) = \mathcal{L}_\phi^{-1} (\phi - \psi \circ (\text{id} + h))$, de modo que (D) adquiere la forma

$$h = \mu(h) \dots \dots \textcircled{D'}$$

$$\begin{aligned}
& \text{Téngase } \| \mu(v) - \mu(w) \| = \\
& = \| \mathcal{L}_\phi^{-1}(\phi - \psi \circ (\text{id} + v)) - \mathcal{L}_\phi^{-1}(\phi - \psi \circ (\text{id} + w)) \| \\
& = \| \mathcal{L}_\phi^{-1}(\psi \circ (\text{id} + w) - \psi \circ (\text{id} + v)) \| \\
& \leq \| \mathcal{L}_\phi^{-1} \| \text{Lip } \psi \| w - v \|.
\end{aligned}$$

De modo que $\| \mu(v) - \mu(w) \| < \| v - w \|$ si $\text{Lip } \psi < \| \mathcal{L}_\phi^{-1} \|^{-1}$.

Como $\min(1-\lambda, \lambda^{-1}-1) \leq \| \mathcal{L}_\phi^{-1} \|^{-1}$, si $\text{Lip } \psi < \min(1-\lambda, \lambda^{-1}-1)$

μ tiene un único punto fijo, $h_{\psi\phi}$, que resuelve la ecuación (D') y así resuelve las ecuaciones (D) , (C) y (B) .

Podemos ahora demostrar la propiedad. Es decir, la existencia de un mapeo único $h_\psi \in C_b^0(E, E)$ tal que $(\text{id} + h_\psi) \circ L = (L + \psi) \circ (\text{id} + h_\psi)$, bajo supuestos adecuados de L y ψ .

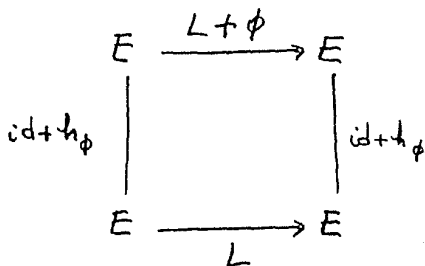
Escribamos la ecuación (B) :

$$(L + \psi) \circ (\text{id} + h) = (\text{id} + h) \circ (L + \phi).$$

Haciendo $\Psi \equiv 0$ en (B) y escribiendo la solución $h_{\Psi\phi} = h_\phi$, tenemos

$$L \circ (\text{id} + h_\phi) = (\text{id} + h_\phi) \circ (L + \phi) \dots \dots \dots \textcircled{E}$$

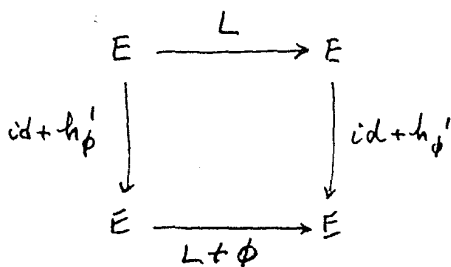
Esta relación funcional la podemos representar con el siguiente diagrama:



Por otro lado, haciendo $\phi \equiv 0$ e intercambiando

" Ψ " por " ϕ " y escribiendo la solución $h_{\Psi\phi} = h'_\phi$,

$$\text{Tenemos } (L + \phi) \circ (\text{id} + h'_\phi) = (\text{id} + h'_\phi) \circ L \dots \textcircled{F}$$



Componemos los diagramas del siguiente modo:

$$\begin{array}{ccc}
 E & \xrightarrow{L+\phi} & E \\
 \downarrow \text{id}+h_\phi & & \downarrow \text{id}+h_\phi \\
 E & \longrightarrow & E \\
 \downarrow \text{id}+h'_\phi & & \downarrow \text{id}+h'_\phi \\
 E & \xrightarrow{L+\phi} & E
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 E & \xrightarrow{L} & E \\
 \downarrow \text{id}+h'_\phi & & \downarrow \text{id}+h'_\phi \\
 E & \longrightarrow & E \\
 \downarrow \text{id}+h_\phi & & \downarrow \text{id}+h_\phi \\
 E & \xrightarrow{L} & E
 \end{array}$$

Así,

$$(L+\phi) \circ (\text{id}+h'_\phi) \circ (\text{id}+h_\phi) = (\text{id}+h'_\phi) \circ (\text{id}+h_\phi) \circ (L+\phi)$$

y

$$L \circ (\text{id}+h_\phi) \circ (\text{id}+h'_\phi) = (\text{id}+h_\phi) \circ (\text{id}+h'_\phi) \circ L$$

Esto significa que $(\text{id}+h'_\phi) \circ (\text{id}+h_\phi)$ conjuza

$L+\phi$ consigo misma y $(\text{id}+h_\phi) \circ (\text{id}+h'_\phi)$

conjuza L consigo misma.

Aquí tenemos

$$(\text{id} + h_{\phi}') \circ (\text{id} + h_{\phi}) = \text{id}$$

$$(\text{id} + h_{\phi}) \circ (\text{id} + h_{\phi}') = \text{id},$$

de modo que cada una es un homeomorfismo.

Como se puede apreciar, la ecuación funcional (F), cuya solución es h_{ϕ}' , tiene la misma forma que la ecuación (A) de la proposición 1.

Como $(\text{id} + h_{\phi}')$ es homeomorfismo, la proposición 1 queda así demostrada.

Demostración de la Proposición 2.

Para construir la función $\tilde{\phi}$ requeriremos de una función de salto α que a continuación definiremos. La existencia de tal función de salto es un resultado básico de la topología diferencial.

$$\text{Sea } \alpha: \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$$
$$\alpha(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } |t| \geq 1 \end{cases}$$

y tal que $|D\alpha| \leq 2$. La función α es una función de salto de clase C^∞ .

Además, por hipótesis ϕ y $D\phi$ son funciones continuas. Así, dado $\varepsilon > 0$, existe $\rho > 0$

tal que si $\|z\| < \rho$:

$$\|\phi(z)\| < \varepsilon/3$$

$$\|(D\phi)_z\| < \varepsilon/3.$$

A continuación definiremos la función $\tilde{\phi}$:

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}: E &\longrightarrow E \\ \tilde{\phi}(z) &= \begin{cases} \alpha\left(\frac{1}{\rho}\|z\|\right)\phi(z) & \text{si } \|z\| \leq \rho \\ 0 & \text{si } \|z\| > \rho \end{cases} \end{aligned}$$

Se tiene

$$(1) \quad \tilde{\phi}(z) = \phi(z) \quad \text{para } \|z\| < \rho/2$$

(2) $\tilde{\phi}$ es acotada

$$(3) \quad \text{Lip}(\tilde{\phi}) \leq \sup \|D\phi\| < \frac{2}{3} \varepsilon < \varepsilon.$$

Veremos

$$(1) \quad \tilde{\phi}(z) = \alpha\left(\frac{1}{\rho}\|z\|\right)\phi(z) \quad \text{si } \|z\| \leq \rho$$

Se tiene $\|z\| < \rho/2 \leq \rho$, de modo que

$$\frac{1}{\rho}\|z\| < \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\rho}{2} = \frac{1}{2}, \quad \text{y así}$$

$$\alpha\left(\frac{1}{\rho}\|z\|\right) = 1.$$

En suma, si $\|z\| < \rho/2$,

$$\tilde{\phi}(z) = \alpha\left(\frac{1}{\rho}\|z\|\right)\phi(z) = 1 \cdot \phi(z) = \phi(z).$$

(2) $\tilde{\phi}(z)$ es acotada ya que ϕ es acotada en una bola pequeña.

(3) inmediato.

Así la función $\tilde{\phi}$ satisface la tesis de la Proposición 2, que queda así demostrada.

Demostración del Teorema de Hartman-Grobman.

Sea $\phi: V \rightarrow E$

$$\phi(z) = f(z) - L(z), \quad \text{donde } L(z) = Df_0(z)$$

Claramente, en virtud de que 0 es un punto fijo hiperbólico de f , se tiene

$$\phi(0) = f(0) - L(0) = 0 - Df_0(0) = 0$$

Además $D\phi_0 = 0$, ya que

$$D\phi_0 = Df_0 - D(Df_0) = 0$$

De modo que la función ϕ satisface las hipótesis de la Proposición 2. Entonces se puede

afirmar que dado $\varepsilon > 0$, existen un subconjunto abierto W de V que contiene a 0 y una función $\tilde{\phi}: E \rightarrow E$ que satisface

$$(1) \quad \tilde{\phi}|_W = \phi|_W$$

$$(2) \quad \tilde{\phi} \text{ es acotada}$$

$$(3) \quad \text{Lip}(\tilde{\phi}) < \varepsilon.$$

Y podemos escribir $\tilde{f} = L + \tilde{\phi}$, donde la función \tilde{f} es una extensión de f en alguna bola de 0 .

Tomando entonces una bola suficientemente pequeña entorno a 0 , podemos constatar que la función $\tilde{\phi}$ satisface las hipótesis de la Proposición 1. Así, existe un único homeomorfismo acotado $\tilde{h}_{\tilde{\phi}} \in \mathcal{C}_b^0(E)$

Tal que

$$(\text{id} + \tilde{h}_{\tilde{\phi}}) \circ L = (L + \tilde{\phi}) \circ (\text{id} + \tilde{h}_{\tilde{\phi}}).$$

Si escribimos el homeomorfismo $h = \text{id} + \tilde{h}_\phi \Rightarrow$
 $L + \tilde{\phi} = \tilde{f}$, tenemos la ecuación (A) resultante
por el homeomorfismo h :

$$h \circ L = \tilde{f} \circ h.$$

Finalmente, restringiendo la bola a torno al origen,
de modo que $\tilde{f} = \tilde{f}$, tenemos que en tal
bola abstrata del origen:

$h \circ L = \tilde{f} \circ h$, que es lo que
queríamos demostrar.

A.4 Teorema de Hartman-Grobman para flujos.

Sea $Y: V \rightarrow E$ de clase C^1 con $Y(0)=0$. Sean $L=(DY)_0$ y Y_t y L_t los flujos inducidos por Y y L respectivamente. Supongamos que L_1 es un operador hiperbólico. Entonces existe un homeomorfismo $h: E \rightarrow E$ y una vecindad $U \subset V$ del origen tal que h manda las trayectorias de Y en U en las trayectorias de L .

dem. ver [5].

A.5 Lema de Hadamard.

Si $f \in C^r$ es tal que $f(0) = f'(0) = 0$, entonces existe una función $g \in C^{r-1}$ tal que en una vecindad de $x=0$,
 $f(x) = xg(x)$.

dem. Tenemos $f(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx) dt$. Haciendo $y = tx$

obtenemos $\int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx) dt = \int_0^1 \frac{d}{dy} f(y) \cdot x dt = x \int_0^1 \frac{df}{dy}(y) dt$,

de donde se sigue el lema si definimos $g(x) = \int_0^1 \frac{df}{dy}(y) dt$. //

Veamos como se aplica el lema a uno de los casos del teorema de estabilidad estructural. El otro caso es análogo.

Si hacemos $\bar{M}_1(s, st) = M_1(s, st + v(s)) - M_1(s, v(s))$, como

$\bar{M}_1(0,0) = \frac{\partial M_1}{\partial y}(0,0) = 0$, podemos escribir:

$$\bar{M}_1(s, st) = st G(s, st), \quad \text{y de hecho } G(s, st) = \int_0^1 \frac{\partial \bar{M}_1}{\partial y}(s, rst + v(s)) dr,$$

donde $y = rst$.

Pero $\frac{\partial \bar{M}_1}{\partial y}(s, rst + v(s)) = \frac{\partial M_1}{\partial y}(s, rst + v(s))$, dado que la función

$M_1(s, v(s))$ no depende de st . Así, definimos

$$U(s, t) = \int_0^1 \frac{\partial M_1}{\partial y}(s, rst + v(s)) dr, \quad \text{para tener}$$

$$M_1(s, st + v(s)) = M_1(s, v(s)) + st \int_0^1 \frac{\partial M_1}{\partial y}(s, rst + v(s)) dr.$$

Bibliografía

- [1] Carmo, Manoel P. do, Differential geometry of curves and surfaces, Prentice-Hall, Inc. 1976, USA.
- [2] Gutiérrez, C., Sotomayor, J. Structurally Stable Configurations of Lines of Principal Curvature, en Asterisque Vol. 98-99, 1982.
- [3] Hirsch, Morris, Differential Topology, Springer-Verlag, 1976, USA.
- [4] Nitecki, Zbigniew, Differentiable Dynamics, An Introduction to the Orbit Structure of Diffeomorphisms, The M.I.T. Press, Cambridge, Massachusetts, 1971.
- [5] Palis, Jacob Jr. ed. Seminários de Sistemas Dinâmicos IMPA, 1971