1

2y

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
Facultad de Ciencias

TESELACIONES

T E S I S

Que para obtener el Título de Licenciado
en Matemáticas presenta :

CLAUDIA MARGARITA ACUÑA SOTO

México, D.F. marzo, 1991

INTRODUCCION

El presente trabajo, está diseñado para servir como apoyo en la docencia del nivel medio básisco en geometría .

El objeto de estudio en el que se centra , es el diseño de teselas o mosaicos que , con una sola figura o motivo , llenan el plano sin traslapes ni agujeros .

En el tratamiento que se le ha dado a este material, se han omitido intencionalmente casi todas las demostraciones, se eliminaron aquellas que requieren de la teoría axiomática de transformaciones en el plano , información que no esta al alcance de los estudiantes de secundaria, en su lugar se presentan justificaciones accesibles al nivel, aprovechando la aparente naturalidad de algunos resultados.

Las teselaciones y sus propiedades geométricas intrínsecas, así como una buena cantidad de métodos de diseño de teselas , nos permiten ampliar y diversificar el uso de los conceptos geométricos en este nivel escolar ; procuramos rescatar, en este trabajo, el aspecto lúdico de la creación de formas estéticas .

La simetría , los movimientos en el plano y casi todos los objetos geométricos se transforman en elementos constructores de nuevas formas, son pasos antecedente para la creación de mosaicos que cubren el plano y lo decoran.

Claudia Margarita Acuña Soto

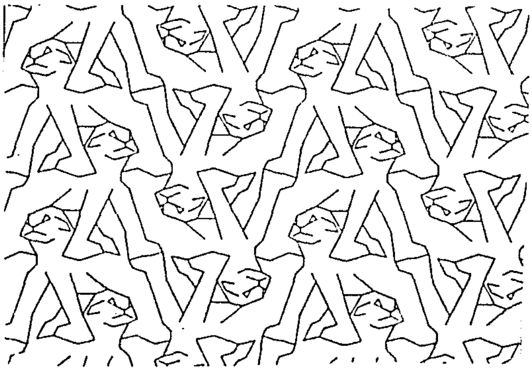
1. ¿QUE ES UNA TESELA?

Un mosaico, un tablado o una teselación es un conjunto de figuras planas que cubren el plano, de manera que no queden espacios sin cubrir y sin que las figuras se sobrepongan unas con otras.*

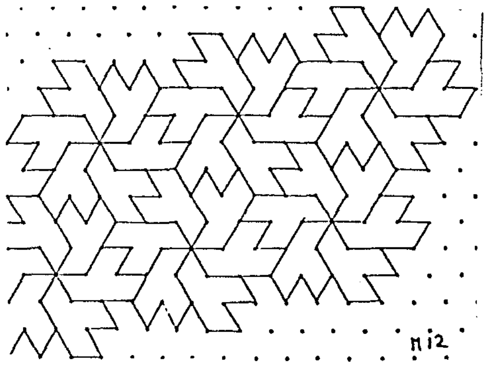
Los motivos, figuras o teselas con los que se cubre el plano, son de muy diferentes tipos y se pueden usar uno o varios distintos en cada teselación. **

Dependiendo del número de teselas involucradas en cada teselación, se llaman monohédricas (1 tesela), dihédricas (2 teselas) etc.

Para apreciar la gran diversidad de teselaciones que existen, aquí tenemos algunos ejemplos:



Tomado de (1)

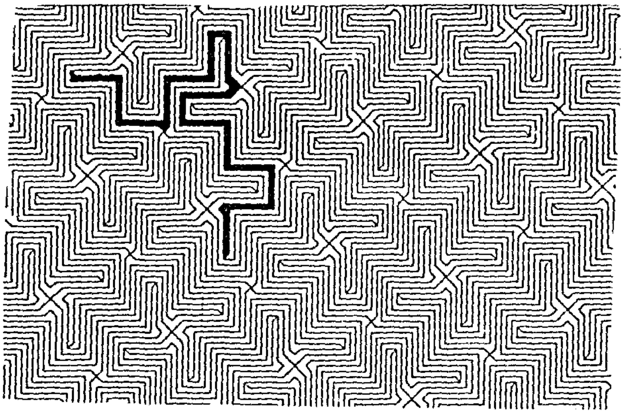


Tomado de (1)

* Un plano teselado $\mathcal{T}$ es una familia numerable de conjuntos cerrados $\mathcal{T}=\{T_1, T_2, \ldots\}$ los cuales cubren el plano sin hoyos ni traslapes.

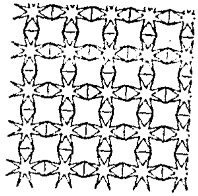
** En este trabajo, una tesela es un disco topológico cerrado según (3).

Este es un mosaico monohédrico, observe la tesela marcada.

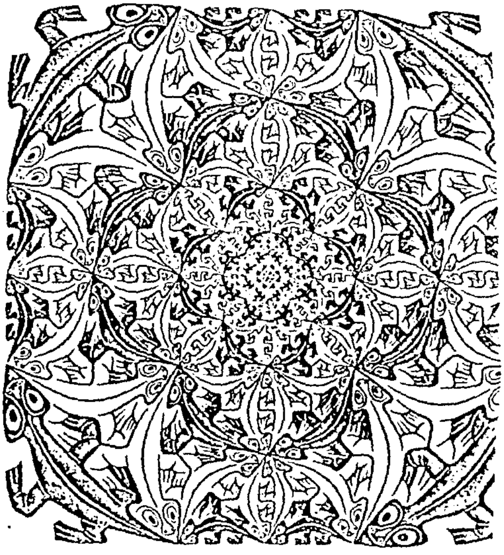


Tomado de (1)

Trihédrica
Dos tipos de estrellas y triángulos equiláteros



Tomado de (3)

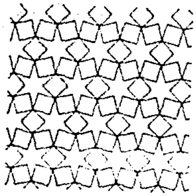


Tomado de (2)

En ésta teselación tenemos un número infinito de teselas, ésto se debe a la posibilidad infinita de variar el tamaño.

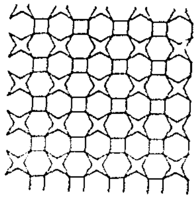
Dihédrica:

Trihédricas:



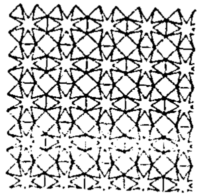
Aquí tenemos cuadrados y estrellas de seis puntas.

Tomado de (3)



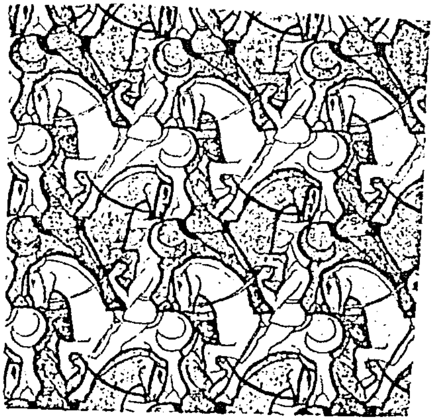
Cuadrados y estrellas de cuatro puntas y hexágonos.

Tomado de (3)

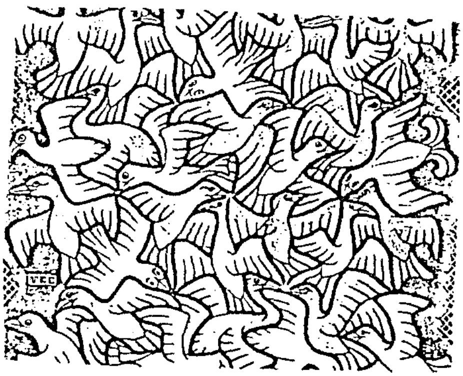


Triángulos equiláteros, cuadrados y estrellas de ocho puntas

Tomado de (3)



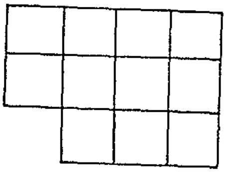
Un jinete que va y regresa. M. C. Escher



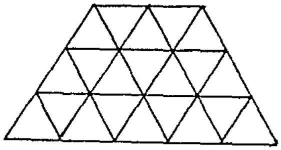
En ésta, todas las teselas son distintas. M. C. Escher

Como se puede ver, las teselas pueden ser de muy variadas formas y al cubrir el plano, cada una de ellas embona su contorno al de las vecinas.

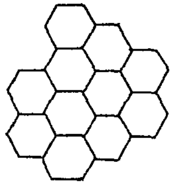
En este trabajo analizaremos sólamente las teselaciones monohédricas, las más sencillas son las que se forman a partir de los polígonos regulares, y de éstos únicamente tres son los que pueden cubrir el plano bajo las condiciones de una teselación.



Cuadrados



Triángulos equiláteros



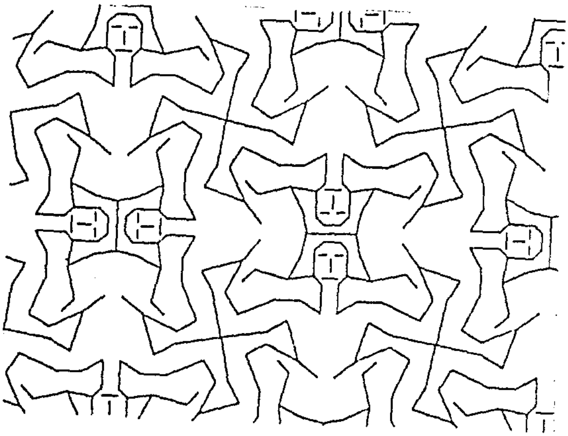
Hexágonos

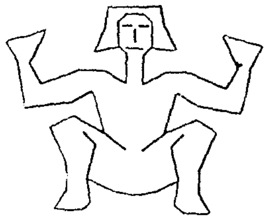
La pregunta que surge de inmediato es sobre la posibilidad de construir teselaciones con otro tipo de polígonos o incluso con otras teselas que pudieran ir siendo cada vez más complejas.

Antes de responder afirmativamente a esta pregunta y de dedicarnos de lleno al diseño de teselas, vamos a trabajar diréctamente con una teselación, tomando copias congruentes de la tesela e identificando secuencias y posiciones relativas de esta.

El método con el que contamos para construir una teselación dada la tesela, es el de armarla, de la misma manera como se procede con un rompecabezas: el método de ensayo y error. Es fundamental, para asegurar que una tesela cubra el plano, no sólo hacer coincidir los bordes de algunas de ellas, sino distinguir claramente la regularidad con que lo hacen.

Por ejemplo, en la siguiente tesela se ve rápidamente cómo embonan unos con otros y la secuencia que tienen.

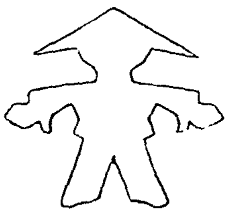




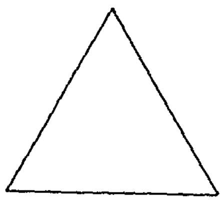
M. C. Escher.

Sugerimos construir las teselaciones correspondientes a las siguientes teselas; resulta más cómodo dibujar la tesela sobre cartón para utilizarla como un patrón, que elaborar una gran cantidad de teselas congruentes para armar el rompecabezas.

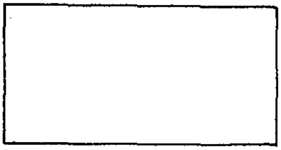
(1)
Triángulo rectángulo



(2)
Un chino

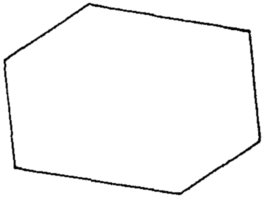


(3)
Triángulo equilátero



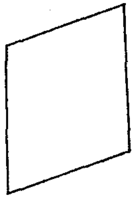
(4)

Un rectángulo



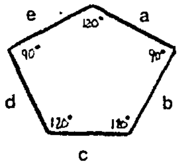
(5)

Un parhexágono
lados opuestos paralelos e iguales



(6)

Un paralelogramo

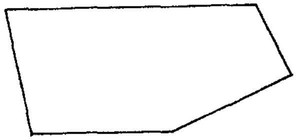


(7)

Un pentágono con
a = b = d = c

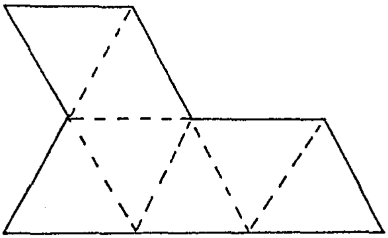
(8)

Un pájaro



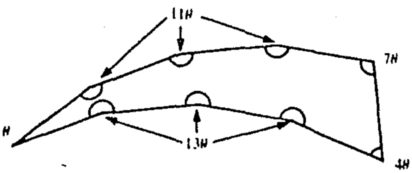
(9)

Un pentágono con dos lados paralelos



(10)

Un heptadiamante (formado de siete triángulos equiláteros).

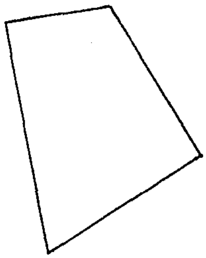


$\theta = \pi/12 = 15°$

(11)

En esta figura todos los lados son iguales y los ángulos son como se indica

Tomado de (3)



(12)

Cuadrilátero escaleno.

Cada una de las teselas propuestas cubre el plano. Ahora, sería interesante abordar el problema de diseñar teselas, observando en detalle las teselaciones más comunes, aquellas que aparecen frecuentemente en pisos y paredes, es decir, las formadas con cuadrados y hexágonos; vemos que las razones para cubrir el plano son:

a) Es posible con estas teselas, unir varias alrededor de un vértice de manera que la suma de los ángulos interiores de las teselas sea igual a 360° y

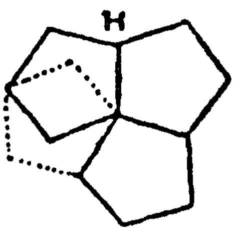
b) Podemos aparejar lados iguales , con lados iguales.

Los triángulos equiláteros, los cuadrados y los hexágonos son los únicos polígonos regulares que teselan.

Los polígonos regulares restantes podrían cumplir con la condición b) pero no con la a), porque, sus ángulos internos no son divisores de 360°.

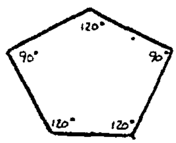
Un pentágono regular, por ejemplo tiene un ángulo interior de 108°, de ahí que uniendo 3 se cubre un ángulo de 324° y si unimos 4 de éstos tenemos uno de 432°. Los únicos ángulos interiores de polígonos regulares que también son divisores enteros de 360°, son 60°, 90°, y 120°.

Tenemos algunos pentágonos irregulares que teselan como el pentágono de nuestra lista de rompecabezas , la suma de los ángulos en cada vértice es de 360°.



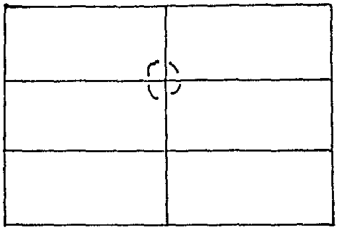
Tomado de (3)

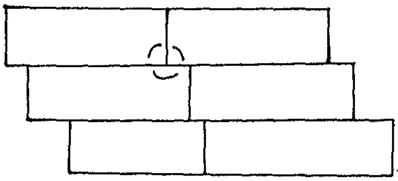
Johanes Kepler;
Harmonica Mundi

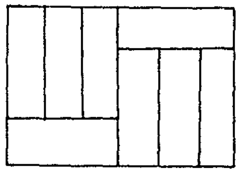


Tomado de (1)

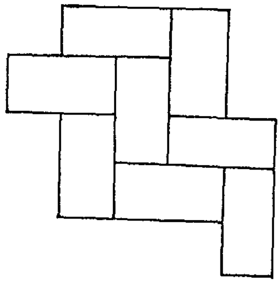
Otros polígonos que teselan porque cumplen las condiciones a) y b) son los rectángulos; tenemos ahora dos pares de lados iguales, los cuales, en principio deseamos hacer coincidir. Si no exigimos un apareamiento lado-lado, éstas son otras posibilidades:





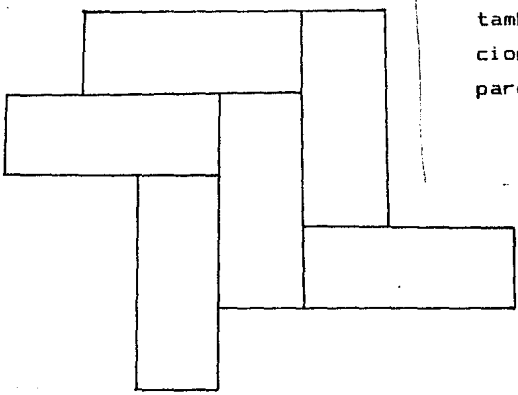


largo = 3 ancho



largo = 2 ancho

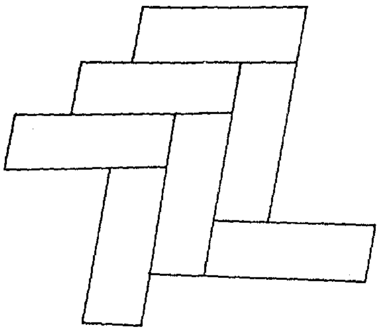
Tampoco es indispensable que haya una relación entre largo y ancho como podemos ver enseguida:

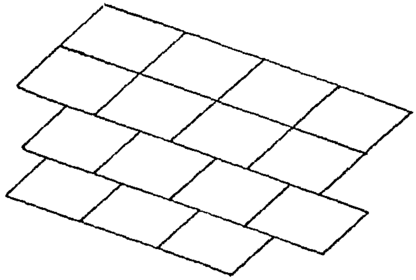


Naturalmente los paralelogramos también cumplen con las condiciones , éstos cuentan con dos pares de lados iguales

Y los ángulos que se unen en los vèrtices son suplementarios dos a dos: aquí cumplimos la condición angular. Igual que con los rectángulos, además de ser éste el caso general de aquel, podemos hacer el siguiente arreglo si no hay condición lado-lado.

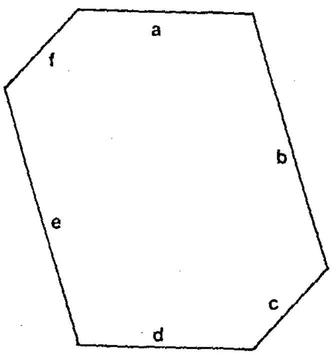
O con desplazamientos de bandas de paralelogramos.





Por último justificaremos por qué los parhexágonos teselan el plano.

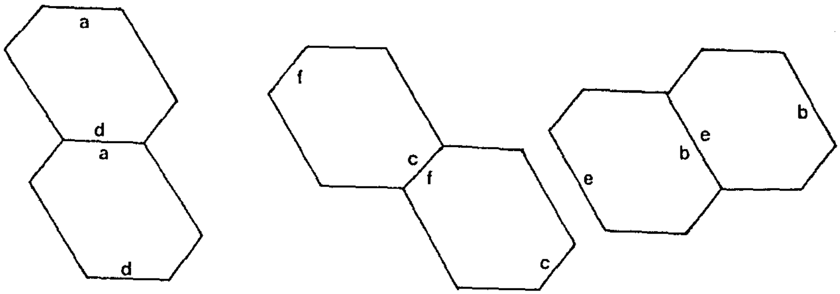
Estas figuras constan de 6 lados, los respectivamente opuestos son paralelos e iguales.



El hexágono regular es un caso de parhexágono, en general se cumple: $a=d$; $a \parallel d$; $b=e$; $b \parallel e$; $c=f$; $c \parallel f$.

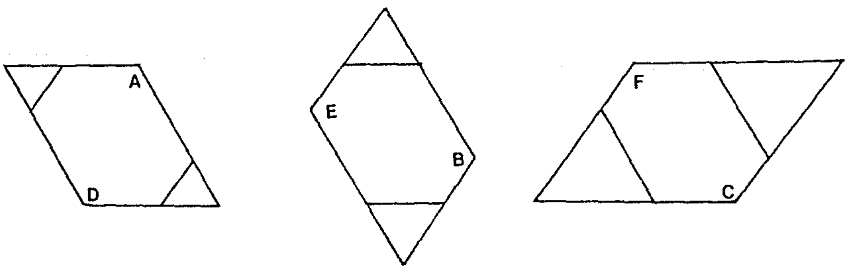
Un parhexágono tesela, ésto quiere decir que las copias congruentes a él pueden ser colocadas de manera que los lados congruentes coincidan y la suma de los ángulos interiores sea 360°.

Con respecto a los lados, podemos deslizar una copia de la figura alrededor de ésta, como se muestra aquí.

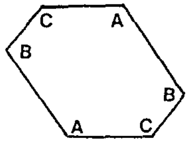


Esto se debe a la igualdad de los lados opuestos.

¿Qué hay sobre la suma de ángulos internos?. Por un momento tomemos el parhexágono y prolonguemos dos pares de lados opuestos.

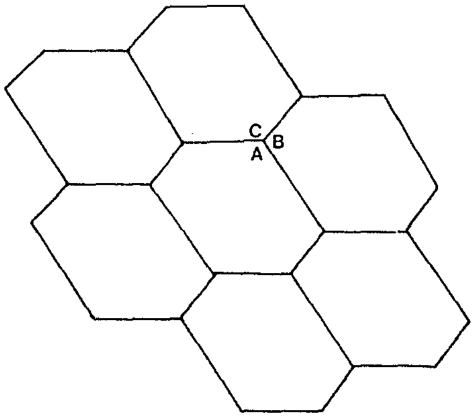


Dado que con las prolongaciones , tenemos tres paralelogramos, los ángulos opuestos son iguales en cada caso , ésto se resume en el esquema siguiente:



Sabiendo que la suma de los ángulos internos de un pentágono suman 720° y que aquí tenemos $2(\measuredangle A+\measuredangle B+\measuredangle C) = 720°$, entonces los ángulos internos de un parhexágono suman 360° en cada vértice.

Entonces alrededor de cada vértice , tenemos:

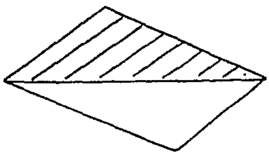


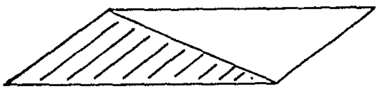
Dado que se cumplen las condiciones a) y b), decimos que los parhexágonos teselan el plano.

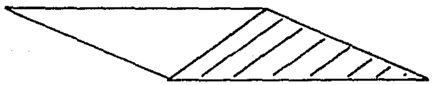
USANDO RESULTADOS ANTERIORES

En la serie de ejemplos-rompecabezas presentados al inicio de este trabajo, propusimos a los triángulos rectángulos y a los equiláteros como teselas, ¿qué pasa con el resto de los triángulos?, ¿cubren el plano? Éste, por ejemplo:

La solución es inmediata si con un par de triángulos formamos paralelogramos. Esto es posible haciendo un semigiro (180°) con centro en el punto medio de cualquiera de los lados del triángulo.

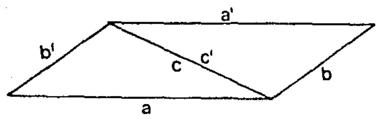






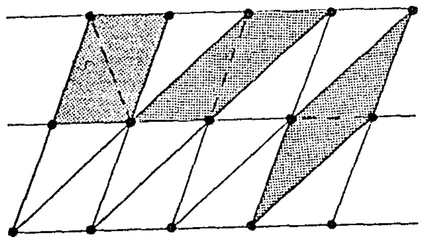
Por cierto, ¿ a qué se debe que, si el triángulo es isósceles haya sólo dos paralelogramos distintos?.

Para justificar porqué la figura que resulta del triángulo original y el rotado es un paralelogramo diremos que: Si una recta es girada 180°, entonces la original y la rotada son paralelas.



Así, el cuadrilátero formado por el contorno es un paralelogramo que, como ya vimos, cubre el plano. A partir de lo anterior podemos afirmar que cualquier triángulo llena el plano.

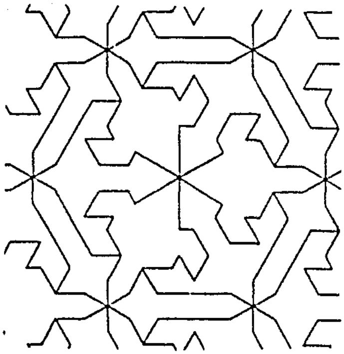
Aunque con este método se forman tres paralelogramos distintos (dos con isósceles y uno con equiláteros), cuando se forma la teselación con los triángulos involucrados en todos los casos, la teselación es exáctamente la misma.



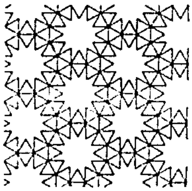
Tomado de (7)

Este tipo de teselaciones también pueden transformarse con bandas de paralelogramos que se deplazan, siempre que no existan restricciones que obliguen a mantener lado con lado.

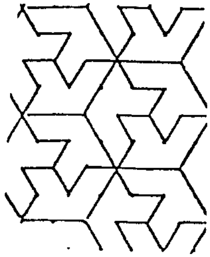
Antes de continuar haremos una consideración sobre el significado que tiene la congruencia en teselaciones, por ejemplo:



Tomado de (1)

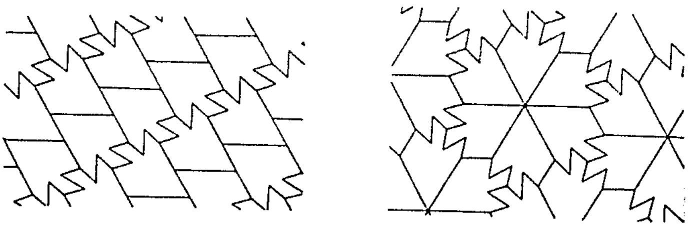


Tomado de (3)



Tomado de (1)

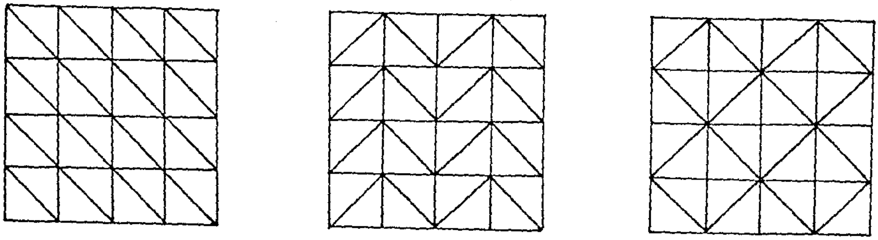
Estas teselaciones son claramente distintas, para obtener teselaciones congruentes es necesario contar con la misma tesela, sin embargo esto no es suficiente como podemos ver enseguida.



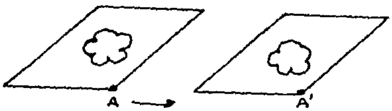
Tomado de (3)

Si con la misma tesela sólamente se puede formar una teselación diremos que la teselación es monomórfica.

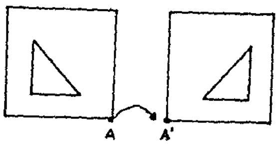
Veamos este otro ejemplo :



Necesitamos entonces ,que también las teselas estén colocadas con la misma disposición, dos teselaciones son congruentes si es posible tomar una copia de una y colocarla sobre la otra, de manera que éstas coincidan ya sea desplazándola, rotándola o volteándola, o incluso con una combinación de estos movimientos.



desplazamos (trasladamos)

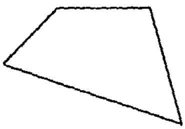


volteamos (reflejamos)

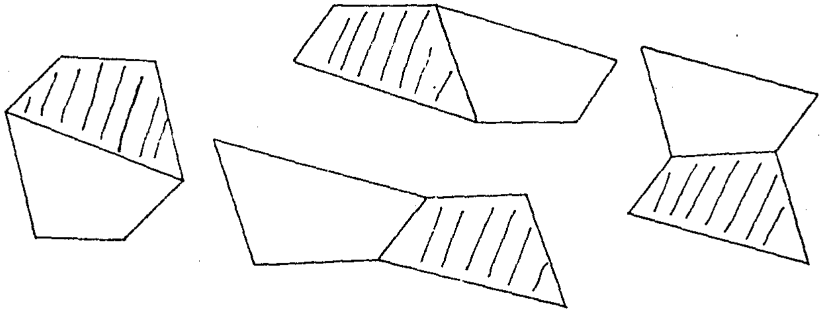
rotamos (giramos)

Y si lo que tenemos son dos teselaciones que difieren en escala, entonces diremos que son iguales pero no congruentes.

Ahora que ya hemos visto cómo cualquier triángulo tesela, nos preguntamos por la situación de los cuadriláteros no paralelogramos. Por ejemplo éste cuadrilátero escaleno:

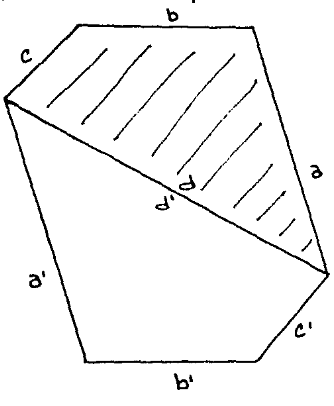


Utilizando la idea de girar la figura 180 alrededor del punto medio de cualquiera de sus lados obtenemos cuatro parhexágonos, uno por lado, éstos son distintos.



Justificar que la unión de dos cuadriláteros es un parhexágono es bastante sencillo.

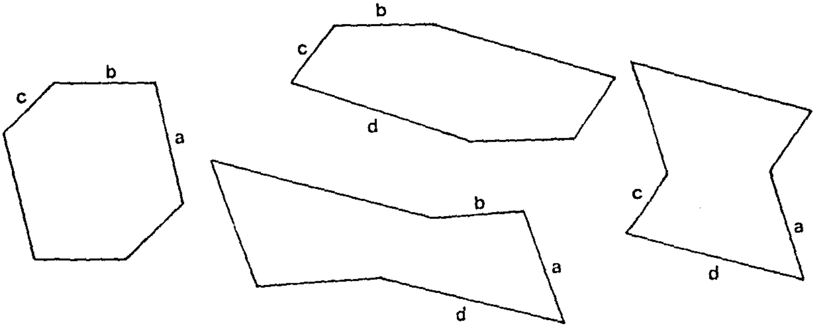
Primero veremos que los lados opuestos son iguales, estó es inmediato ya que la figura solamente ha sido girada 180 y la disposición de los lados opuestos nos permite decir que:



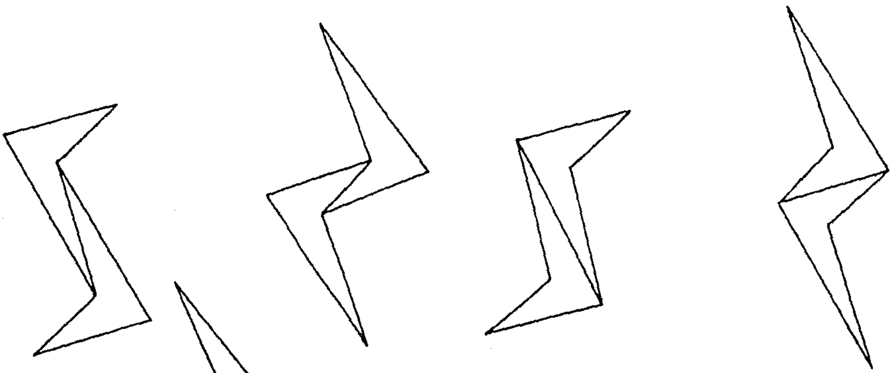
$a=a'$; $b=b'$; $c=c'$; $d=d'$.

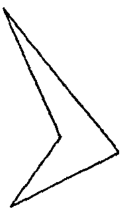
Que los lados opuestos sean paralelos es inmediato ya que antes hemos dicho que una recta rotada 180 y la recta original son paralelas .

Entonces: un cuadrilátero y su rotado forman un parhexágono y éstos, como sabemos, teselan, de ahí que todo cuadrilátero tesele , como en este ejemplo.



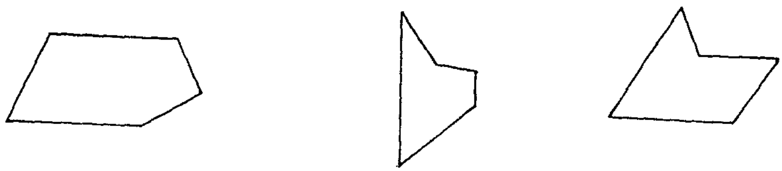
Como caso curioso deseamos analizar la situación de los cuadriláteros cóncavos, como en este ejemplo :



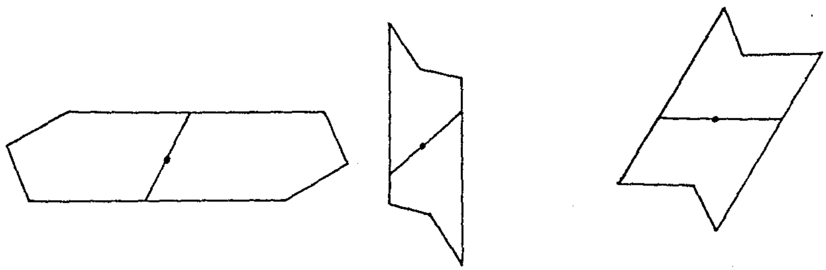


También en este caso tenemos parhexágonos. Les sugerimos cubrir el plano con un parhexágono formado con un cuadrilátero cóncavo.

Algunos otros polígonos que se relacionan con los parhexágonos son los pentágonos con lados paralelos, como estos:



La forma de justificar que este tipo de pentágonos cubre el plano, es con la idea de hacer un semigiro con centro en el punto medio del lado que une los lados paralelos.



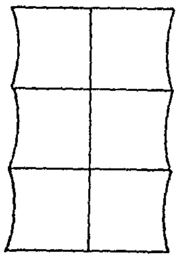
Los lados paralelos se tornan colineales después del semigiro y pueden ser considerados como uno solo. Estos pentágonos no son los únicos (además de nuestro ejemplo-rompecabezas 7) que teselan, pero todo pentágono con dos lados paralelos, tesela el plano.

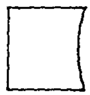
2. MODIFICANDO TESELAS

a) Modificando los bordes

En esta parte del trabajo, veremos cómo diseñar teselas que cubran el plano a partir de teselas anteriores. La modificación de los lados de teselaciones conocidas, nos aporta una gran cantidad de recursos de diseño, por ejemplo, bien sabemos que un cuadrado tesela, hemos hablado ya de la igualdad de sus lados y de la suma de sus ángulos internos en los vértices, pero la igualdad en los lados no significa que éstos deban ser rectos, es posible deformarlos, de manera que aparezcan curvas o líneas quebradas o cualquier diseño sobre el contorno, pero como es natural, las deformaciones deben cumplir algunos requisitos, por ejemplo:

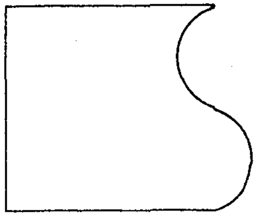
En esta figura, diseñada a partir de un cuadrado, podríamos obtener la siguiente configuración:



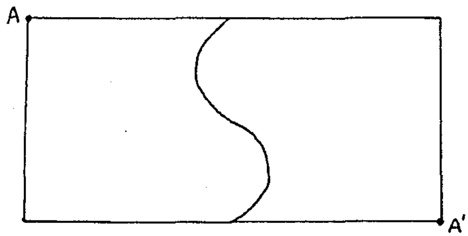


Observe que en los lados curvos no es posible hacer embonar una figura de este tipo, de manera que si la teselación fuese monohédrica, ésta figura no cubre el plano. Sin embargo, esto no quiere decir que las curvas no tengan futuro en las modificaciones de los lados, más bien , necesitamos hacer uso de un recurso mejor pensado.

Veamos esta otra:

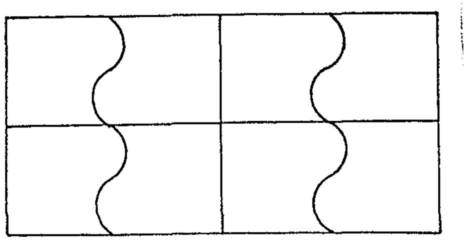


Es muy parecida a la anterior pero tiene una diferencia esencial. El borde curvo embona sobre sí mismo, haciendo un semigiro en el punto medio del lado curvo.



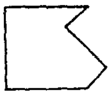
A llega a A' con un semigiro , cuyo centro de rotación es el punto medio del lado deformado

Este efecto se logra con una deformación simétrica del borde curvo, en esta tesela, también diseñada a partir de un cuadrado.

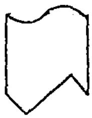


Analicemos las siguientes teselas:

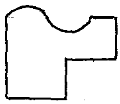
Es posible deformar uno, dos, tres o cuatro lados del cuadrado simétricamente con la seguridad de que la tesela cubre el plano.



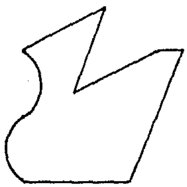
(1)



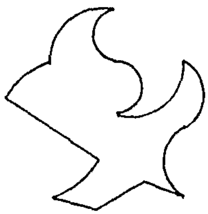
(2)



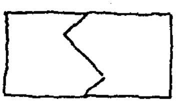
(3)



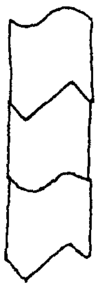
(4)



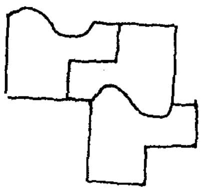
(5)



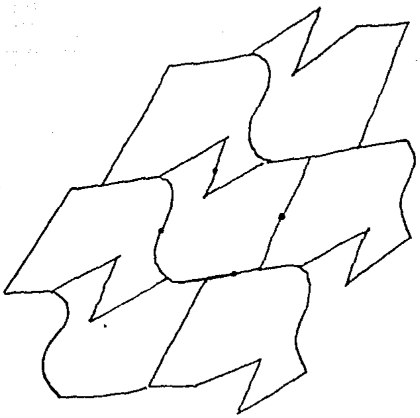
Una teselación con (1)



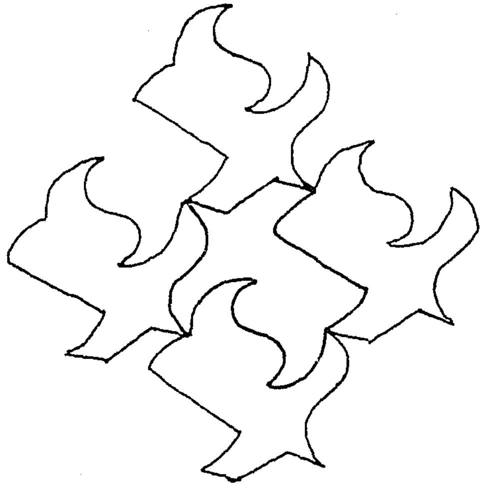
Con (2)



Con (3)



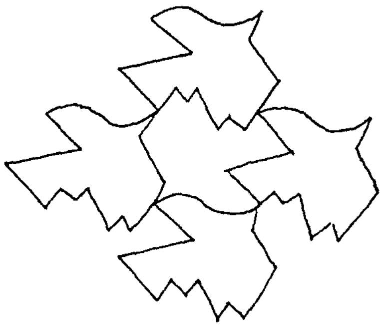
Con (4)



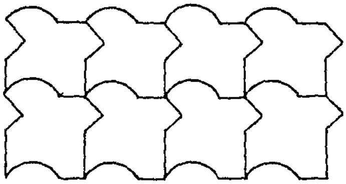
Con (5)

Se hace un semigiro de la tesela, en los puntos marcados

Otro ejemplo:



Para cubrir el plano con este tipo de teselas es suficiente hacerlas girar 180° alrededor del centro de simetría, éste se localiza en el punto medio del lado modificado, como ya hemos dicho, si se desea conservar algunos lados originales rectos, es posible cubrir el plano con un semigiro en esos lados también, o con un deslizamiento.

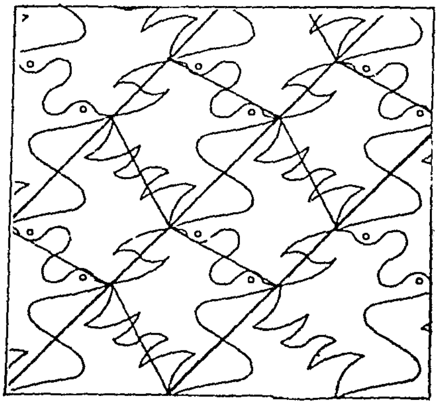


Aquí la restricción está en modificar de igual forma los lados paralelos .

Si hacemos la misma modificación en los lados paralelos del cuadrado, como en la siguiente teselación, es posible incluir modificaciones que no sean necesariamente simétricas, por ejemplo, vea a la izquierda:

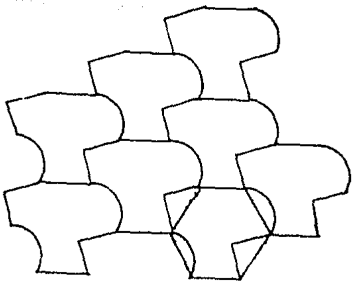
Una observación que podemos hacer de inmediato, es que el área de la tesela modificada es la misma que la de la tesela original.

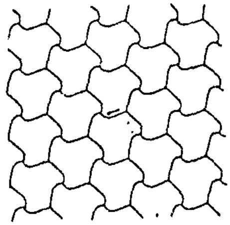
Las modificaciones simétricas en los lados y las que se hacen sobre las rectas paralelas pueden ser inmediatamente adaptadas para los paralelogramos, y en general para las teselasiones de cuadriláteros (Ver 1*).



Tomado de (1)

En el caso de los hexágonos las modificaciones de cualquier tipo, son colocadas sobre las familias de los lados paralelos.

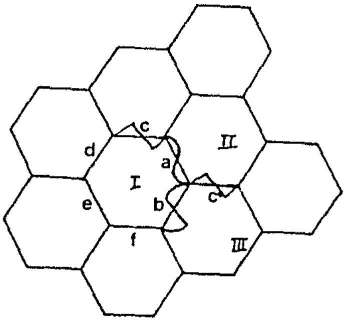




Tomado de (3)

Las teselas así modificadas, cubren el plano con deslizamientos; aunque las modificaciones usadas sean simétricas

Si deseamos usar exclusívamente semigiros para llenar el plano apoyándonos en los lados con modificaciones simétricas . tendriamos la siguiente situación:



Supongamos que las deformaciones sobre los lados de la tesela son simètricos, pero distintas unas de otras. Y supongamos también que vamos a rotar la tesela marcada con I . Si giramos sobre el lado a esta coincide con la II de manera que c coincide con c' , entonces la tesela III está formada de manera que los lados *b* y *c* son consecutivos , cosa que no sucede en la tesela I , ésto, lo único que nos dice es que hay algunas restricciones que debemos tener en cuenta, si la teselación es momohèdrica.

Si la tesela cumple con el hecho de que $a=e$; $b=d$; y $c=f$ podemos llenar el plano con semigiros en los puntos medios, de los lados. Si observamos la teselación resultante, es la misma que cuando hicimos las modificaciones sobre los lados paralelos y utilizamos únicamente deslizamientos, pero en este caso, usamos semigiros: no podemos por ello, admitir deformaciones que no sean simétricas. En cambio usando únicamente deslizamientos, podemos usar cualquier tipo de deformación.

Si combinamos giros y deslizamientos, la situación con respecto a las deformaciones es distinta. Sugerimos analizarla .

Además, sugerimos reflexionar sobre los siguiente aspectos :

En la teselación con deformaciones simétricas, de hexágonos regulares donde llenamos el plano sólamente con semigiros, ¿es posible que el lado *e* y el *a* sean distintos en una tesela como la usada anteriormente ?. ¿Por qué? (vea 2*)

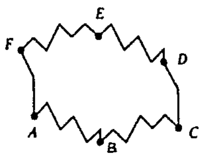
Cuáles serían las restricciones para rediseñar parhexágonos .

a) Si vamos a utilizar deslizamientos exclusívamente.

b) Si vamos a usar únicamente semigiros (vea 3*)

La siguiente tesela, ¿cubre el plano?

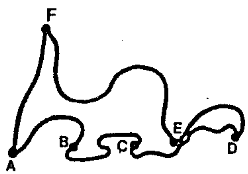
$\widehat{FA}$ es una traslación de $\widehat{CD}$
$\widehat{FE}$ de $\widehat{BC}$ y $\widehat{ED}$ de $\widehat{AB}$ (vea 4*)



Tomado de (3)

Observe que toda tesela que cumpla éstas condiciones, tiene asociado un parhexágono formado por la unión consecutiva de los vértices A, B, C, D, E, y F.

La tesela siguiente, cubre el plano.
$\widehat{ED}$ es una traslación de $\widehat{AB}$,
$\widehat{AF}$, $\widehat{FE}$, $\widehat{DC}$, $\widehat{CB}$ son deformaciones con centro de simétria.



Tomado de (8)

Hasta aquí, para cubrir el plano, utilizamos dos tipos de movimientos:semigiros y deslizamientos, las condiciones establecidas anteriormente, forman el llamado Criterio de Conway para teselar el plano criterio que detallaremos más adelante .

Siguiendo con el método de rediseñar los lados, de redes de lados paralelos como las triangulares, hexagonales, etc, tenemos otro recurso que sugiere nuevas posibilidades. La tesela que no cubre el plano, de la que antes hablábamos, diseñada a partir de un cuadrado,

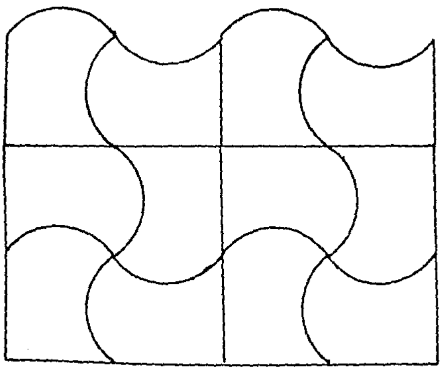
puede cubrir el plano

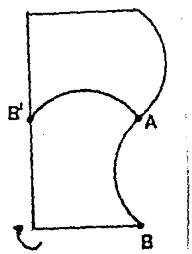
si la remodelamos así:

Los arcos marcados son idénticos

Mantengamos fijo el vértice marcado con la letra A y giremos la tesela hasta hacer embonar los bordes curvos, tenemos:

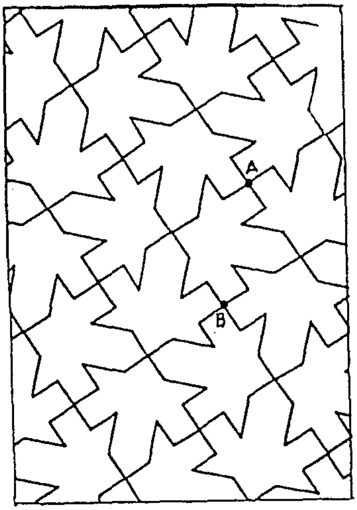
El punto B llega hasta B' con una rotación de 90° con centro en A y la teselación completa podría ser ésta:



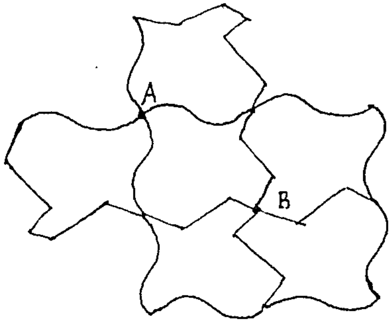


Observe que no es la única tesela posible.

Mas aún, que tal si hacemos dos modificaciones de este tipo, giramos los trazos modificados en los vértices opuestos A y B



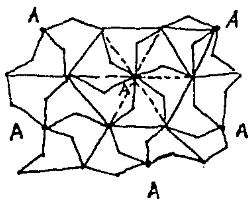
Tomado de (1)

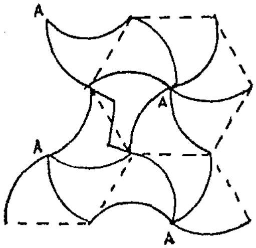


A partir de un cuadrado, giramos la deformación en los vètices A y en B o podemos verlos como girados en los otros dos vértices.

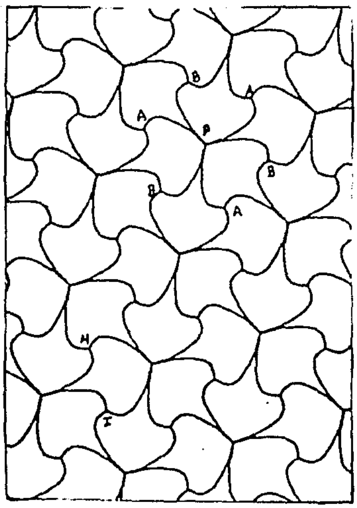
También, una teselación de triángulos equiláteros puede ser rediseñada con este método, por ejemplo:

La tesela de esta teselación modificada,tiene cinco lados rectos,se trata de un pentágono que no tiene lados paralelos.





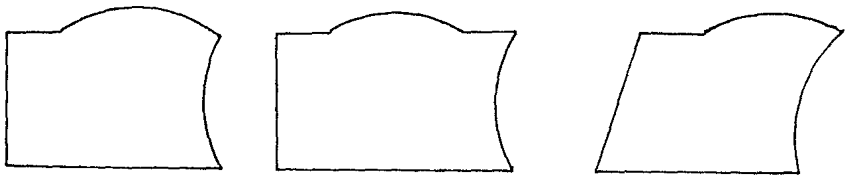
Aquí giramos la modificación en A, en los lados de contacto podemos usar una modificación simétrica.



Tomado de (1)

Aquí tenemos un conjunto de rombos que se agrupan de seis en seis alrededor de un punto P y donde las deformaciones gi ran con centro en A , B y en P .
Podemos pensar también en un rombo donde las deformaciones rotan en los vèr tices marcados con H e I

Este tipo de deformaciones también puede ser aplicado en cuadriláteros distintos de los cuadrados y los rombos, por ejemplo los rectángulos, y en general a los paralelogramos como éstos que presentamos a continuación:

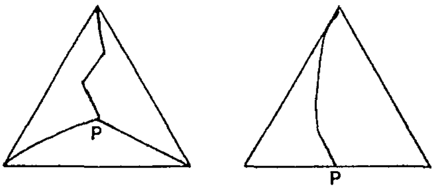


Sugerimos diseñar sus propias teselas con los métodos aquí propuestos.

b) DESPLEGANDO TESELAS

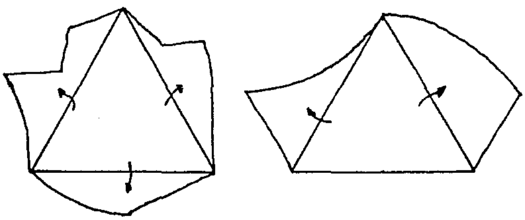
Sabemos, con seguridad, que los triángulos equiláteros cubren el plano, ahora nos apoyaremos nuevamente en ellos para rediseñar teselas pero a partir de un método bastante peculiar (9).

!Obsérvese!: Tomemos un triángulo equilátero, después elijamos un punto que llamaremos P, en el interior o en el contorno de éste, después unimos cada vértice y el punto con algún trazo, de manera que que el triágulo queda dividido en dos o tres partes.



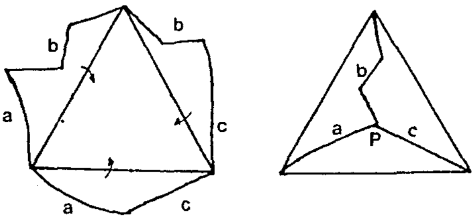
Después, cortemos las líneas dibujadas y doblemos las partes hacia afuera:

Ambas figuras llenan el plano con rotaciones con centro en cada vértice.



Las razones por las cuales esta tesela cubre el plano son bien sencillas.

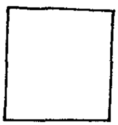
Para constatar que los bordes de esta tesela embonan unos con otros (perfectamente) es suficiente con regresar la figura a su posición inicial, Veamos:



Llamaremos a, b, y c a las curvas que unen al punto P y los vértices. Observe la figura. Cuando rotamos en cada vértice los lados iguales se colocan unos sobre otros, y en cada vértice caben tres de estas figuras porque la nueva tesela tiene una amplitud de dos veces el ángulo del triángulo. ¿Por qué? (vea 7*)

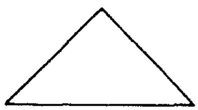
Como no hay restricciones de elaboración de este tipo de teselas y la elección de P es completamente arbitraria, así como el diseño de las líneas que unen a P con los vértices, éste es un método que puede enriquecer nuestros recursos de diseño de teselas.

Las teselas que pueden ser base para este tipo de modificaciones deben cumplir con que el doble de los ángulos internos sea un divisor entero de 360°, ése es el caso de los siguientes polígonos:

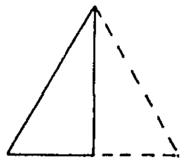


Cuadrado

Rectángulo

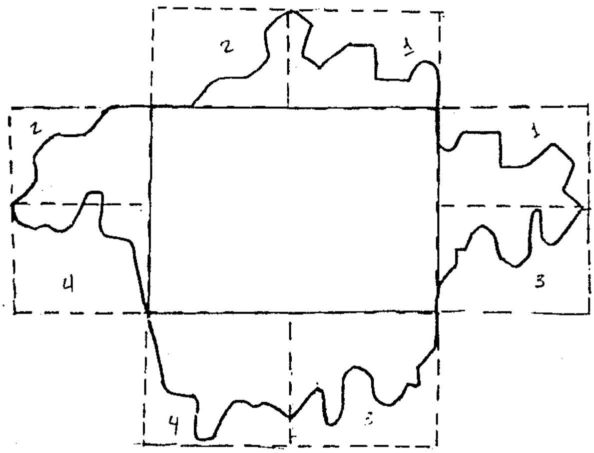


Triángulo isósceles y rectángulo



La mitad de un equilátero

En cada caso es suficiente elegir el punto P, trazar los nuevos lados para después "desdoblar" la figura. Éste es otro ejemplo:

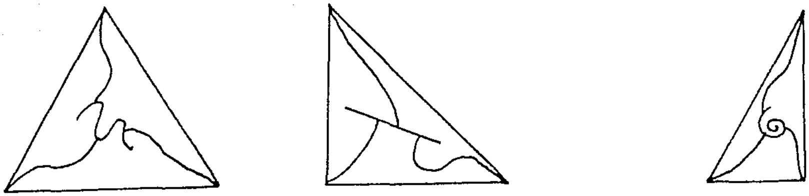


Tomado de (P)

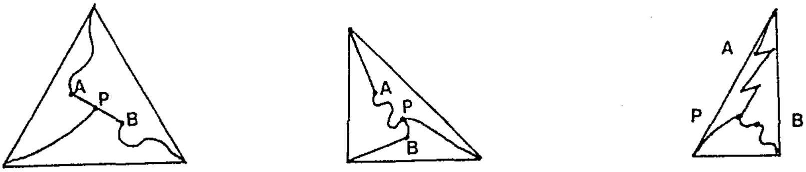
La zonas marcadas embonan con las del mismo número, hasta las líneas punteadas.

Investigando sobre la posibilidad de sustituir el punto P por una recta o una curva, podemos decir que:

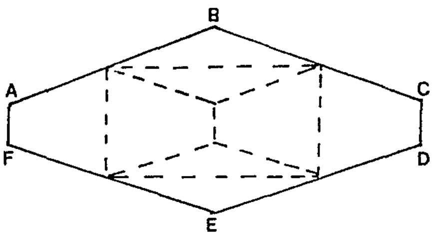
En el caso de los triángulos, la situación es equivalente a aquella donde se elige un punto, dado que la recta o curva (que por cierto en ningún caso puede tocar el contorno) puede ser incorporada a las curvas originales para colocar al punto P precisamente en la que podemos considerar, la intersección de las tres curvas, por ejemplo:



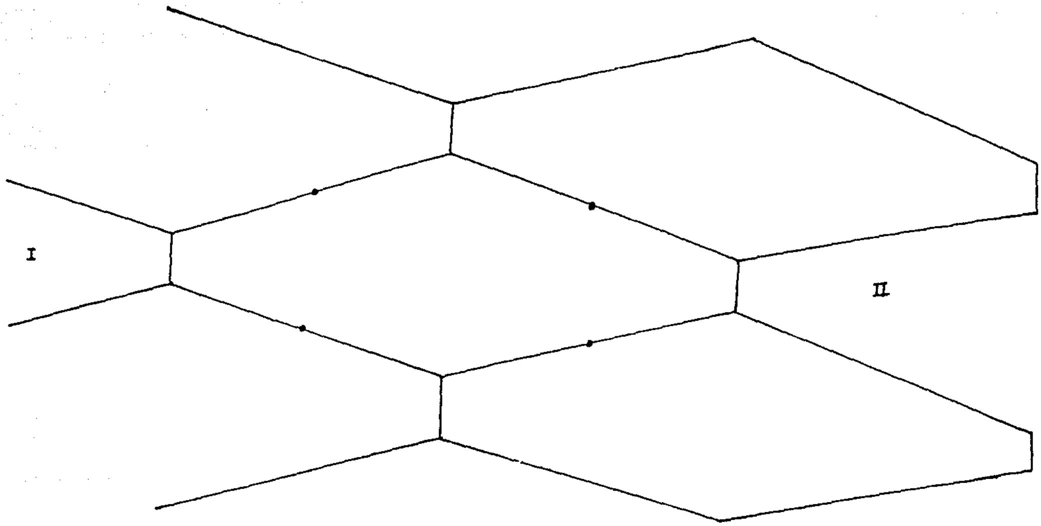
¿Qué tipo de consideraciones adicionales deberíamos tomar para aplicar este método en los siguientes casos ?(vea 6*)



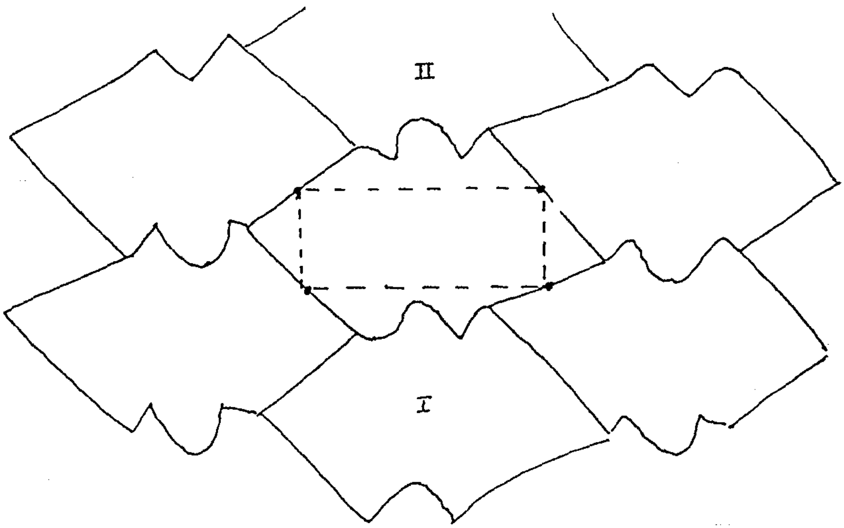
En el caso de los cuadrados y rectángulos también es posible sustituir al punto P por una recta o una curva de manera que la tesela resultante del corte y desdoblamiento, cubre el plano, solo hay que agregar que es suficiente girar en los vértices de la tesela original para cubrir el plano.



Por cierto ABCDEF es un parhexágono. ¿Por qué? (vea 7*).



Las teselas I y II no quedan cubiertas con los giros en los vértices del rectángulo que también lo son de la tesela original , sin embargo girando las teselas producto de los giros de ésta obtenemos la I y II, algo parecido sucede con este otro ejemplo.



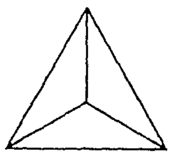
c) Cortando Teselas

Otro procedimiento útil en el diseño de teselas que se obtienen a partir de teselas conocidas, es el cortar a éstas ,en partes de igual área e idèntica forma .

El tipo de divisiones que preferimos son aquellas que nos proporcionan teselas diferentes de las originales.

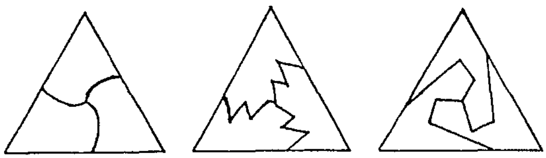
Por ejemplo, está lejos de nuestro interés dividir un cuadrado en cuadrados, incluso en rectángulos, etc.

Para mostrar este método, tomemos por ejemplo un triángulo equilátero, los segmentos de bisectrices que van del vértice al punto de intersección, lo cortan en 3 partes iguales, y si bien, ésta división es bastante simple, la podemos rediseñar con divisiones de lo más diversas. De hecho, se puede diseñar una deformación sobre el segmento de bisectriz y girarla 120° y 240° ,alrededor del centro, con la única condición de que el diseño sobre la bisectriz no se sobreponga al ser rotado con ningún otro.

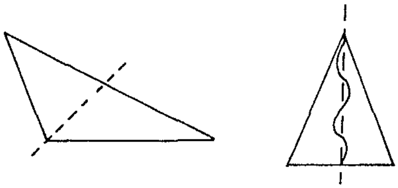


Que las bisectrices corten al triángulo equilátero en 3 partes iguales, no es la única opción, de hecho podemos tomar cualquier semirecta que pase por el centro (Ortocentro, baricentro, etc), diseñar prácticamente cualquier cosa y rotar el diseño 120° y 240° .

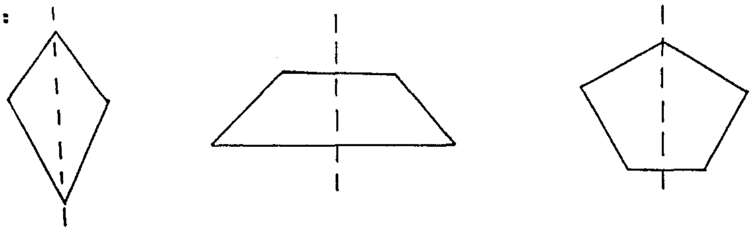
El resultado también es una división en 3 teselas congruentes, que giradas embonan unas con otras; sobre las modificaciones en los bordes, nos podemos remitir al material anterior.



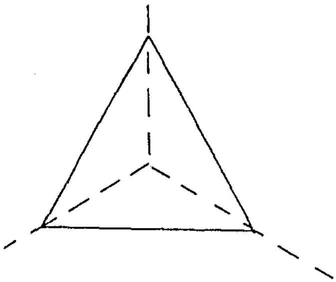
Esta situación tan propicia para el diseño, no se conserva con otros triángulos que no sean equiláteros. A cualquiera lo podemos dividir en dos partes de igual área, pero éstas no son congruentes como sucede en el caso de los escalenos; una mejor aproximación serían los isósceles que pueden dividirse en dos partes congruentes, pero es imposible introducir en estos cualquier diseño que no sea una recta.



Esta situación es semejante con otros polígonos como éstos, por ejemplo:



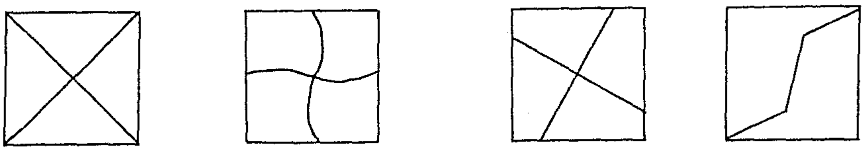
La diferencia esencial entre èstos polígonos y el triángulo equilátero, que se traduce en un corte que divide en dos partes congruentes sin diseños por un lado y por otro en cortes que admiten diseños múltiples, es que, en la primera situación, la tesela no tiene simetrías centrales y en el segundo caso, sí. Si roto o giro al



triángulo equilátero 120° y 240° alrededor del centro , este embona consigo mismo, a diferencia de esto, en los otros casos no podemos encontrar ningún ángulo que nos permita rotar la figura y hacerla coincidir consigo misma.

La presencia de simetrías centrales en los polígonos, nos permite hacer cortes como los que hasta aquí hemos visto.

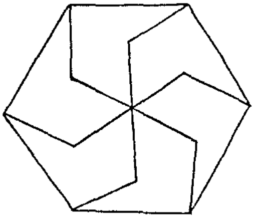
Un cuadrado, por ejemplo, puede ser dividido en cuatro partes iguales bajo la misma lógica; en este caso, tenemos 3 rotaciones, la de 90°, 180° y 270°, y, en principio podemos dividir a la tesela en 4 partes iguales, o en dos si rotamos 180°.



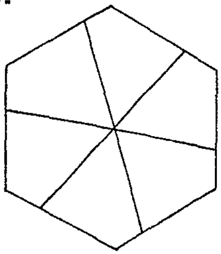
triángulo *cuadrilátero* *pentágono con un ángulo recto*

También, aquí es suficiente hacer un diseño del centro hasta el borde (cuidando de no encimar los diseños) y rotando 90°, 180° y 270°

El otro polígono regular, que es una tesela que cubre el plano y admite rotaciones, es el hexágono, podemos proponer un diseño y luego rotarlo 60°, 120°, 180°, 240° y 300°.

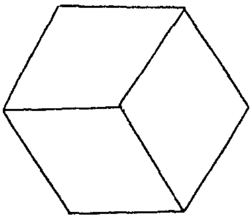


pentágonos sin lados paralelos

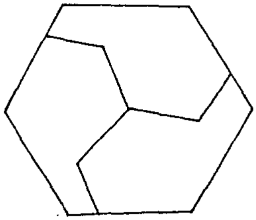


Heptágonos

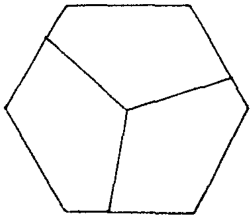
Es claro que podemos utilizar solamente 2 de las rotaciones y girar el diseño 120° y 240° o simplemente 180° .



Este dá la sensación de volumen.

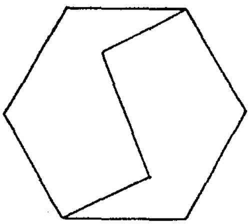


heptágonos



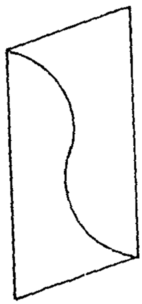
Pentágono que no tiene lados paralelos.

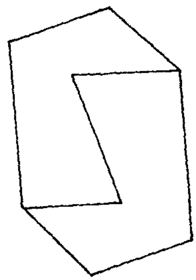
Hexágonos

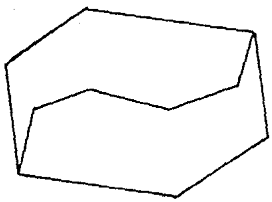


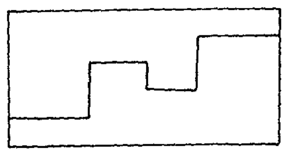
Los rectángulos y los parhexágonos, aunque tienen que ver con los cuadrados y los hexágonos regulares, al ser alargados pierden algunas simetrías centrales, lo mismo sucede con los paralelogramos: todas estas figuras tiene únicamente dos de estas simetrías, la que resulta de rotar 180°y la identidad.

A continuación proponemos algunos diseños:









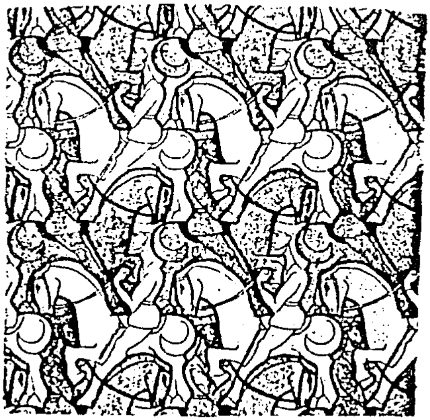
Observe que cualquier recta que pase por el centro del paralelogramo o del parhexágono (ubicado en la intersección de las diagonales), corta a unos y otros en dos partes iguales; ésta es la situación inversa a la que nos referimos al construir paralelogramos y parhexágonos para llenar el plano.

d) UNIENDO TESELAS

En secciones anteriores, la unión de teselas nos ha servido para justificar que un triángulo o cuadrilátero arbitrarios teselan. Ahora ampliaremos las posibilidades de este recurso.

Cuando una tesela se forma a partir de otra, es posible que varien el tipo de movimientos necesarios para llenar el plano, como en estos ejemplos:

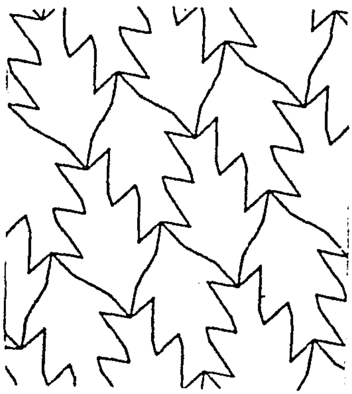
Para pasar de las teselas claras a las obscuras, es necesario levantar y voltear.



Tomado de (2)

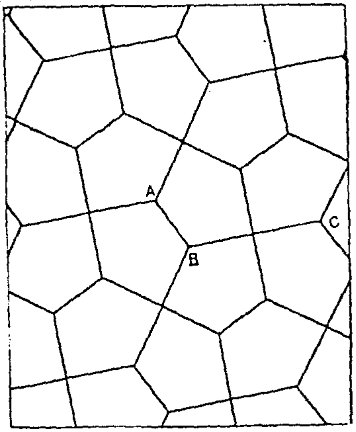
Pero si unimos una tesela clara y una obscura, solo necesitamos deslizamientos para llenar.

Para llegar de una tesela en un sentido a la de otra, necesitamos un semigiro.



Tomado de (1)

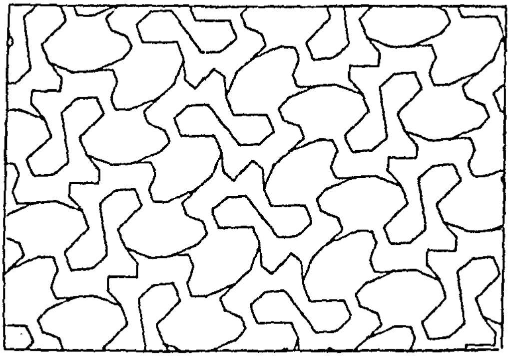
Pero si unimos dos teselas de este otro tipo, de sentidos opuestos, excluimos las rotaciones.



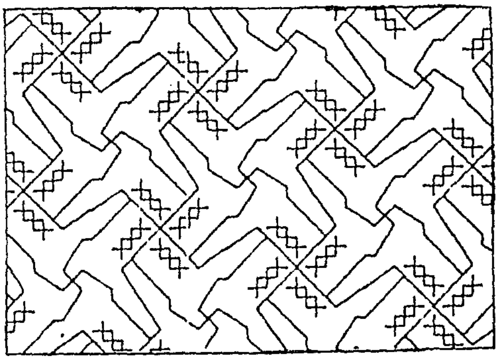
Tomado de (1)

Estos pentágonos unidos de 4 en 4 en AB forman un parhexágono que tesela únicamente con deslizamientos. O podemos pensar también en una figura de 12 lados si los pentágonos se unen en la recta BC.

Le sugerimos investigar cuántas teselas (y cuáles) debe unir para llenar con deslizamientos exclusivamente en las siguientes teselaciones .



Tomado de (1)



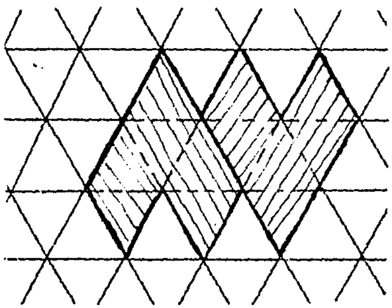
Tomado de (1)

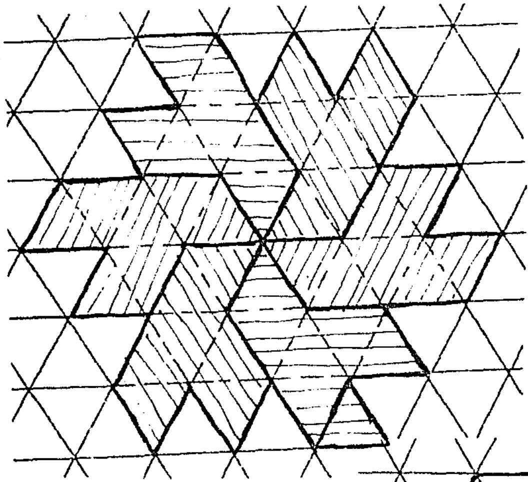
Pudiera parecer que una vez formada la teselación, simplemente elegimos un cierto número de teselas y este conjunto debe teselar, pero esto no es necesariamnente cierto, veremos algunos ejemplos más adelante.

Otra manera de plantear el problema sería, dada una tesela, y uniones de esta, cuáles de ellas teselan?; bajo esta óptica es desarrollado el siguiente material.

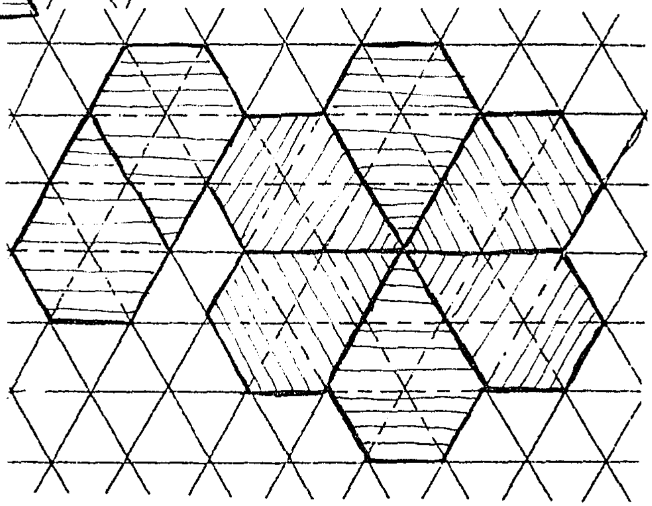
De las teselaciones posibles a unir, la de los triángulos equiláteros, cuadrados y hexágonos regulares ha sido estudiada por lo menos desde 1953, (1) en ese año fueron bautizados con los nombres de polydiamonds, polyominos y polyhexes; aquí, nos referiremos a ellos como poliamantes, polióminos y polihexágonos (17). Presentamos a continuación algunas teselaciones de este tipo:

Un hexadiamante



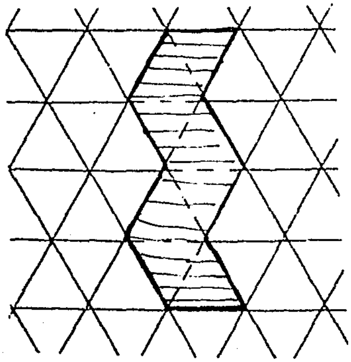


Un Heptadiamante

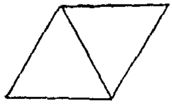


Un heptadiamante →

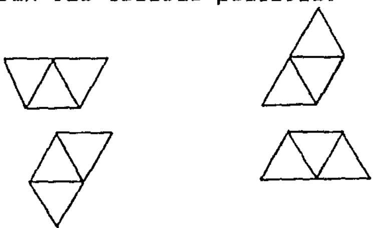
← Un octodiamante



Las teselas formadas a partir de las uniones de triángulos , cuadrados o hexágonos plantean dentro de la matemática algunos problemas que solo han sido parcialmente resueltos . Por ejemplo, si unimos dos triángulos el número de teselas que se puede formar con ellos es solo una ;



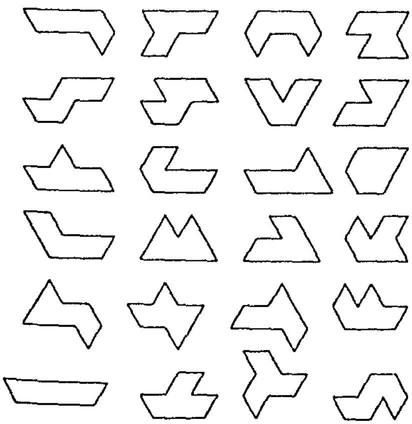
Las teselas formada con tres triángulos , se forman a partir de la anterior, más un triángulo ,que sólamente puede ser colocado en la periferia y , está tiene cuatro posibilidades de manera que cuatro serían las teselas posibles.



Una observación detallada nos permite ver que en realidad solo hay una porque es suficiente con girar , voltear o deslizar para hacerlas coincidir

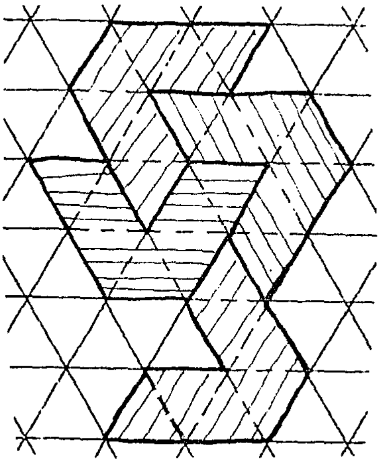
Con números muy grandes de triángulos sabemos cuantas teselas existirían potencialmente , pero solo en algunos casos se sabe con certeza el número exacto de teselas distintas , lo mismo sucede con las uniones de cuadrádos y de hexágonos . (ver 3 cap. 9.4)

Proponemos a continuación la serie de heptamantes posibles 24 en total, 23 de ellos teselan y uno no, éste es el que apa rece en el 7o. lugar.

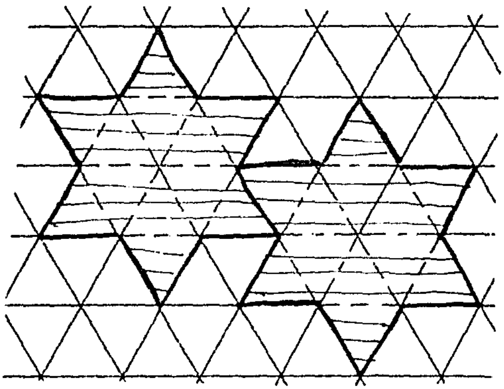


Tomado de (3)

Estos son algunos ejemplos de teselaciones con heptamantes

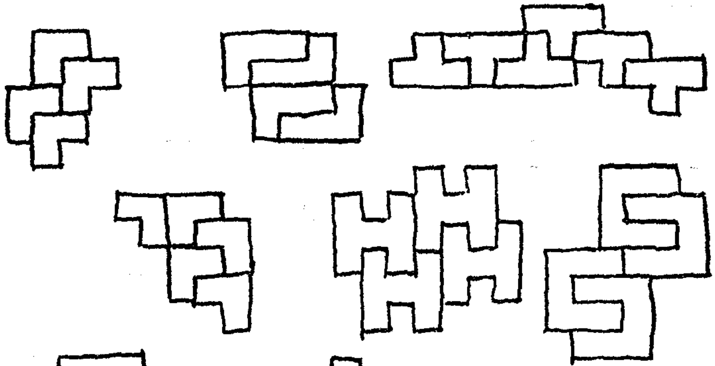


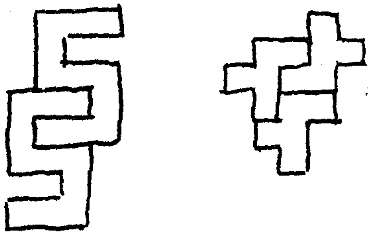
Observe esta teselación, está constrida a partir de la 7a tesela de hepta mantes , no es posible embonar una quinta figura, inténtelo.

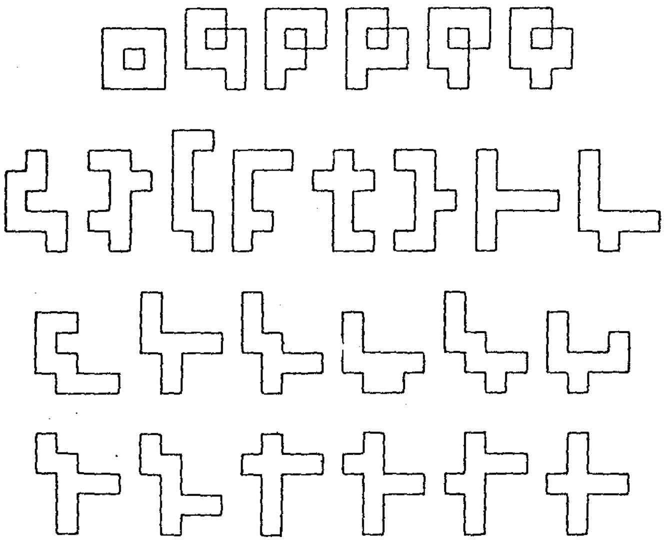


Esta unión de 12 triángulos equiláteros (dodecamantes) tampoco es muy afortunada.

Polióminos que teselan





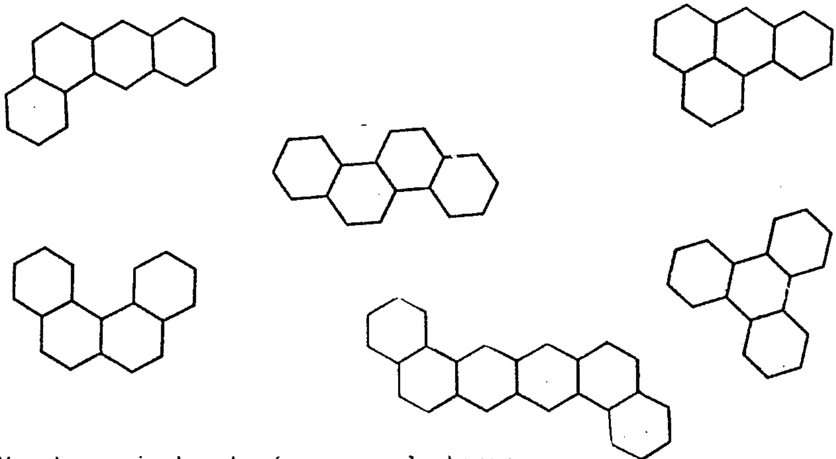


Actualamente se han reportado 26 octóminos que no teselan de los 369 que existen , los primeros 6 no son teselas (vea 4).

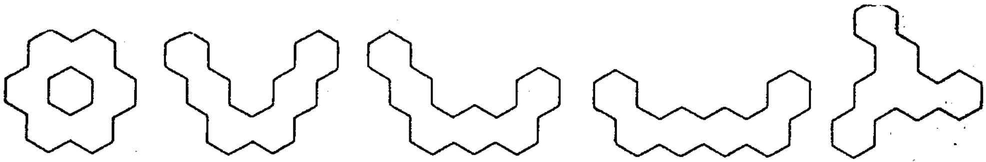
Tomado de (4)

Se han encontrado el número de teselas distintas para uniones de hasta 9 triángulos , hasta con 8 cuadrádos y hasta 6 hexágonos . (vea 3 cap.9.4)

Con hexágonos, èstas son algunas alternativas que teselan.



Y estos seis hexahexágonos no lo hacen



Tomado de (4)

Este trabajo de clasificación de teselas del tipo mostrado, a partir de la propiedad de llenar o no el plano es un trabajo que se ha venido haciendo "a pié" ya que no se cuenta con un algoritmo general, hasta donde tenemos referencia (1987 (3))

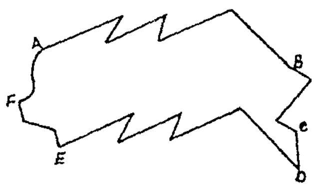
Hav sin embargo, un criterio que resulta eficiente en un buen número de casos, éste es el criterio de Conway del que ya habíamos hablado.

Antes de pasar a describirlo formalmente haremos referencia a algunas propiedades de las teselas que nos permiten asegurar que èstas cubren el plano.

Ya antes vimos a una buena cantidad de polígonos que teselan de manera que si una de ellas tiene forma , por ejemplo de cuadrado de parhexágono o paralelogramo sin duda alguna afirmaremos que cubre el plano, de la misma manera lo haremos si quienes tienen esta forma son dos o mas teselas unidas ,a reserva de como estèn colocadas en el interior, podemos decir que ése conjunto cubre el plano únicamente con traslaciones ; el criterio de Conway consiste precisamente ,en aprovechar la peculiaridad de cierta figura que tesela con semigiros exclusivamente , èsto se traduce en teselar con deslizamientos, ¿porque? La figura en cuestión tiene las siguientes características :

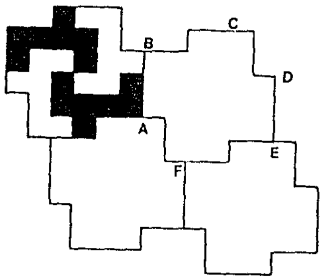
Sean A,B,C,D,E y F los puntos sobre el contorno, $\widehat{AB}$ es una traslación de $\widehat{ED}$; $\widehat{BC}$, $\widehat{CD}$, $\widehat{EF}$, FA son arcos con simetría central.

(Vea la sugerencia de la pág. 25)



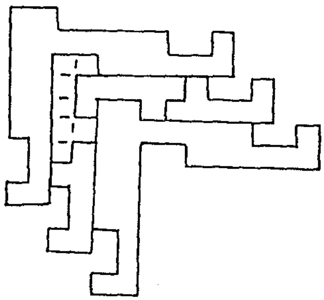
Esta sería la versión en una tesela

Aquí tenemos un conjunto de teselas que cumplen con las mismas restricciones , se trata de 4 heptóminos (en blanco y negro)



Tomado de (8)

Aquí tenemos otro ejemplo



Tomado de (8)

Si la nueva tesela , formada por la unión de las anteriores se ajusta al criterio, entonces es posible demostrar que el conjunto tesela periódicamente .

Si el conjunto de teselas no cumple las condiciones del criterio de Conway, no podemos afirmar por ello si tesela o no.(vea 4)

Pasaremos ahora a formular el criterio de Conway como lo propene (8)

Una tesela T puede cubrir el plano con semigiros si existen seis puntos consecutivos $v_1, \ldots v_6$, al menos tres distintos , sobre el contorno de T (se dice consecutivos en el sentido de circular alrededor del contorno) los cuales satisfacen las siguientes condiciones:

i) $\widehat{v_1 v_2}$ es congruente a $\widehat{v_5 v_4}$ por una traslación τ en la cual $\tau(v_1)=v_5$ y $\tau(v_2)=v_4$

ii) $\widehat{v_2 v_3}$, $\widehat{v_3 v_4}$, $\widehat{v_5 v_6}$ y $\widehat{v_6 v_1}$ son arcos con centro de simetría

Los v_i son vèrtices de una teselación formada por T la cual , es generada por semigiros alrededor de los puntos medios de los segmentos con centro de simetría y por supuesto alrededor de alguno de los v_i.

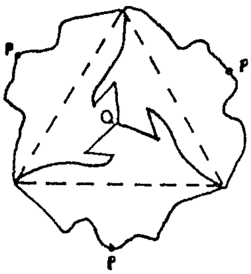
Este criterio fué concretado a partir del estudio de 108 heptóminos, y es aplicable a cualquier conjunto de figuras que cumpla los requisitos.

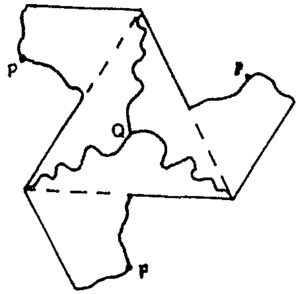
Sugerencia:

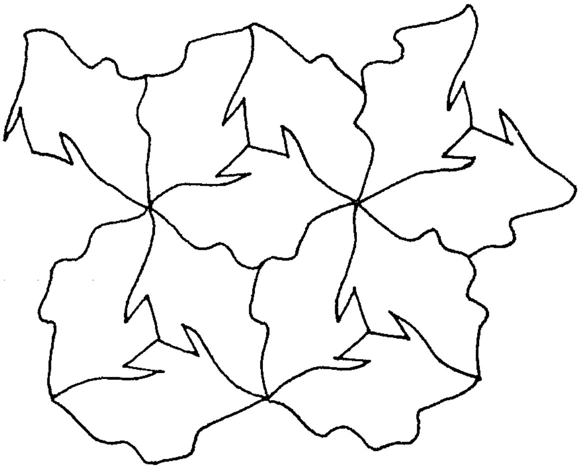
Para ver una descripción detallada de polidiamantes (Hasta con 9 triángulos), polióminos (hasta con 8 cuadrados) y polihexágonos (hasta 6 hexágonos)(vea 3 cap. 9)

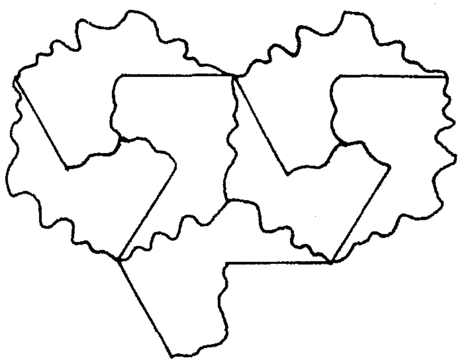
Estas teselas cubren el plano con giros sobre los vèrtices del triángulo y su área es igual a dos veces el área de este.

Ahora tomemos nuevamente la tesela y diseñemos un trazo desde el centro al que ahora llamaremos Q , despues rotemos 120° y 240° , si cortamos este último diseño tendriamos tres teselas idènticas que cubren con rotaciones en P y Q .







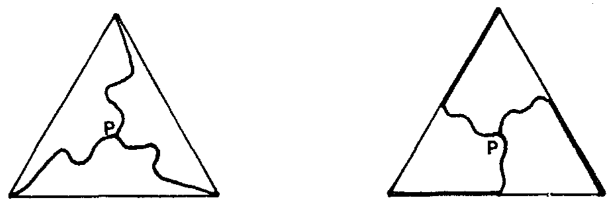


3. CONSTRUCCIONES PARTICULARES DE TESELAS

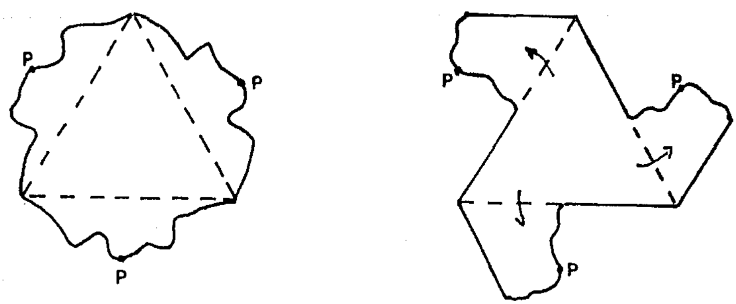
a) DOBLADO DOBLE

En este apartado deseamos comentar algunas construcciones particulares de teselas.

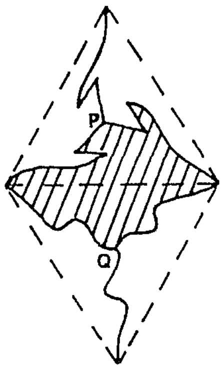
El siguiente mètodo se apoya en una combinación de métodos anteriores y nuevos recursos . Tomemos un triángulo equilátero , diseñemos un trazo del centro del triángulo , al que llamaremos P hasta el vèrtice , este puede incluir un segmento del contorno , y lo giramos 120° y 240° , por ejemplo:

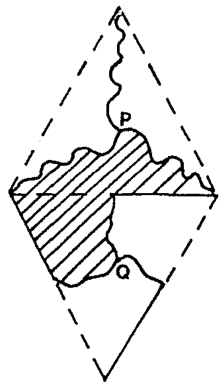


Despues , desplegamos los cortes



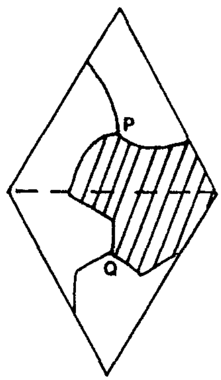
Estas teselas pueden pensarse como diseñadas a partir de dos triángulos equiláteros contiguos , en donde los trazos se conectan en 4 vèrtices , dos de ellos son los centros de rotación (centros de los triángulos) y los dos restantes son los vèrtices del triángulo.

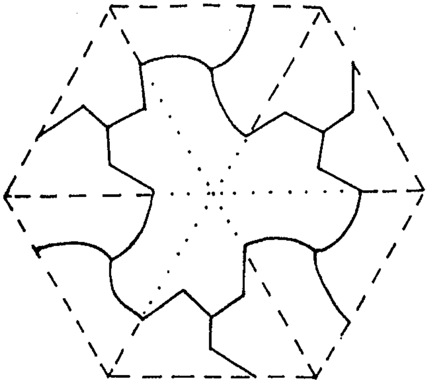




Los trazos en los dos triángulos , que van del centro al contorno se unen en los vèrtices , pero esto no es necesario , como podemos ver enseguida:

El trazo de P hasta el contorno debe unirse con el que viene de Q , y de esta manera tenemos una parte de la tesela que debe ser completada con los triángulos adyacentes, las partes faltantes forman una curva cerrada

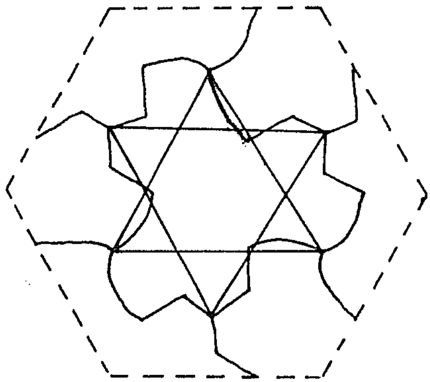


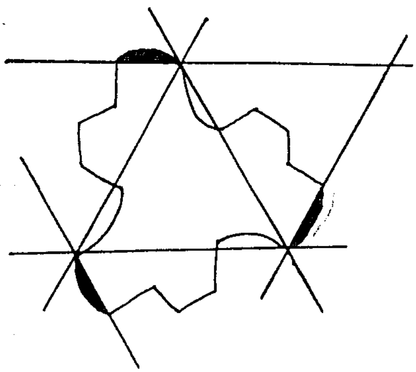


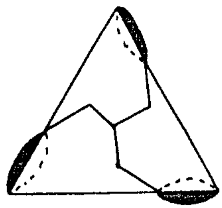
La tesela completa tiene un área igual a dos triángulos de los utilizados en el diseño ¿porque?

Para comparar la tesela con este tipo de triángulos , unámos 3 centros de simetría del mismos tipo (3 puntos P ó tres puntos Q), el triángulo resultante es congruente con los usados como base.

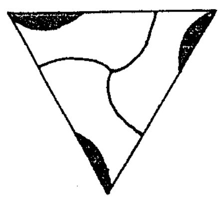
Si doblamos la tesela sobre si misma siguiendo como pauta el triángulo dibujado , èsta lo cubre exáctamente en dos ocasiones , ésto es a lo que llamamos un doble doblado.







1er doblés

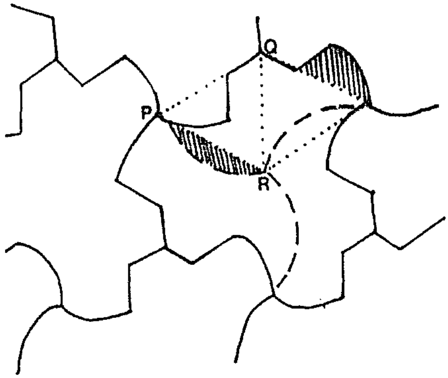


2o doblés

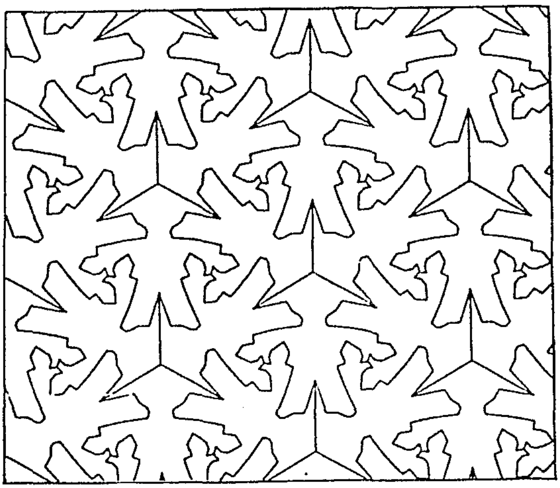
El área sombreada corresponde a la parte del segundo doblés

Más aún , diseñemos ahora un trazo cualquiera desde el centro de la tesela , que es el centro del triángulo que tiene como vèrtices a los puntos P o los Q,hacia *cualquier* punto del contorno ,rotemos 120° y 240° , como supondrá el lector , cada una de las partes es una tesela que tiene área igual a 2/3 del triángulo base.

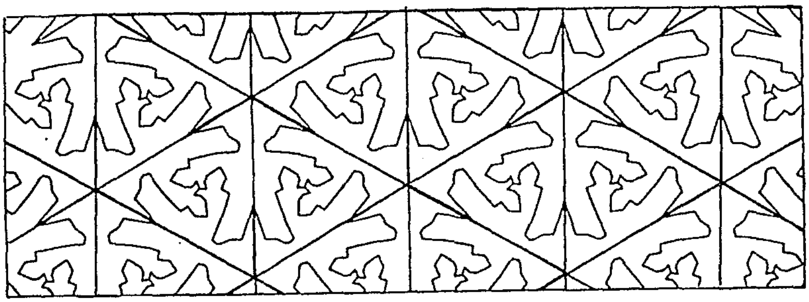
A esta pequeña tesela tambien se le puede hacer un doble doblès, pero en este caso se debe hacer sobre el triángulo formado por los vèrtices P , Q y el centro de la tesela al que llamaremos R.



El procedimiento anterior es el que se ha utilizado para diseñar algunas de las famosas teselas del holandes C.M. Escher , una de estas es la que presentamos a continuación ,que es comunmente conocida con el nombre de Los Chinos.

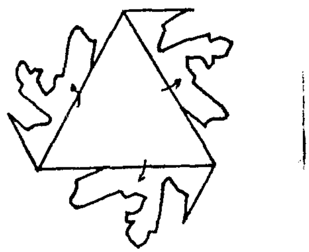


La red de triágulos con los que se va a trabajar puede ser colocada en tres diferentes posiciones , una de ellas es la punta del sombrero del chino,otra su mano derecha y por último su mano izquierda, que aunque son simètricas , son centros de simetría distintos , en otras palabras no podemos hacer coincidir una y otra a travès de rotaciones o deslizamientos , es necesario un espejo para lograrlo.

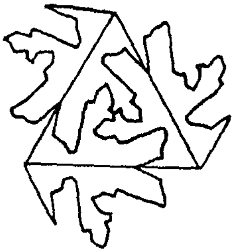


El diseño parte de los triángulos equiláteros

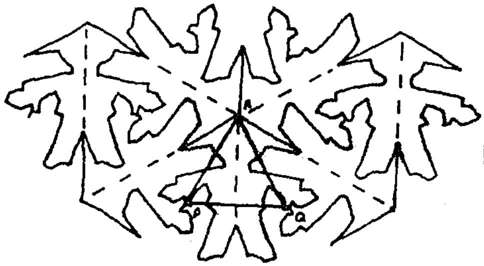
1o Hacemos un trazo del centro al contorno.



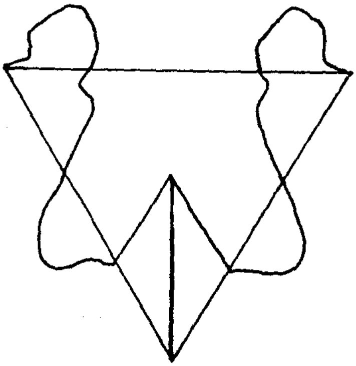
2o Cortamos y desplegamos, esta tesela tiene área de dos triángulos

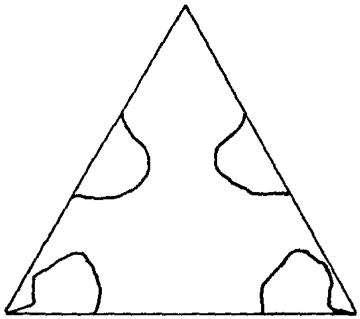


3o Hacemos un nuevo diseño, en este caso es idéntico al anterior, con esta tesela se cubren dos triángulos exácta mente.



4o Cada uno de los chinos cubre dos triángulos que tienen vértices en P , Q y R.

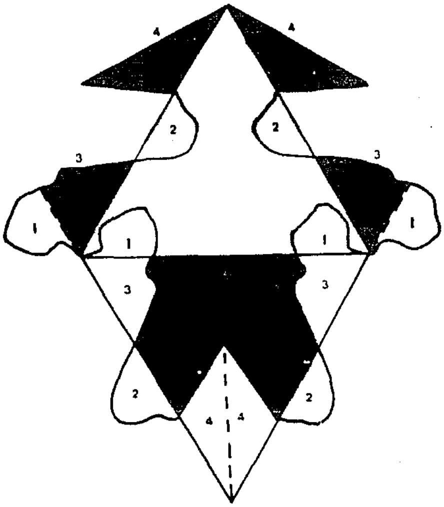




5o El primer doblés sobre ése triángulo se veria así

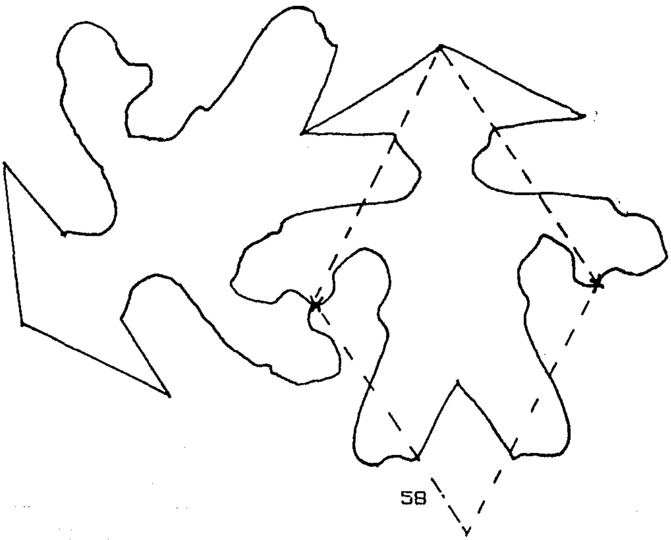
do Y el segundo así

Las áreas obscuras de este chino llenan exáctamente un triángulo y las claras otro , las partes correspondientes embonan en los números marcados



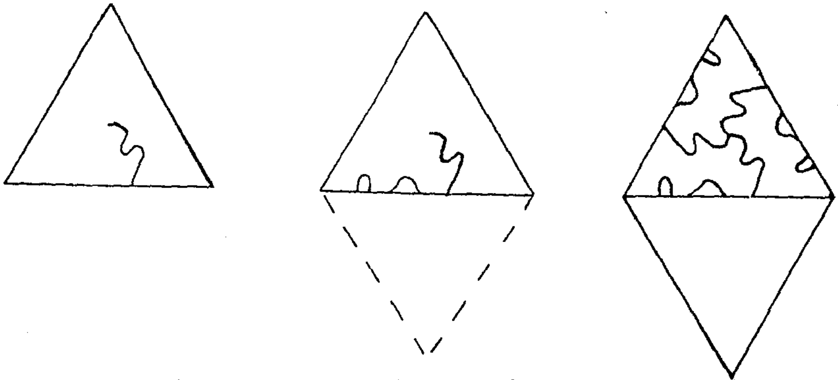
Tomado de (5)

Esta relación tambien puede ser observada si mantenemos una tesela fija y hacemos rotar una copia de ella sobre los puntos marcados con una cruz .



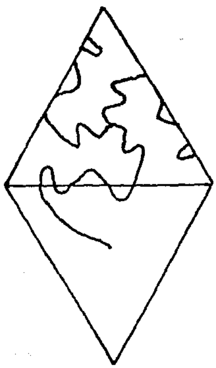
Los diseños de las teselas , basándose en los dos triángulos tiene beneficios adicionales , por ejemplo:

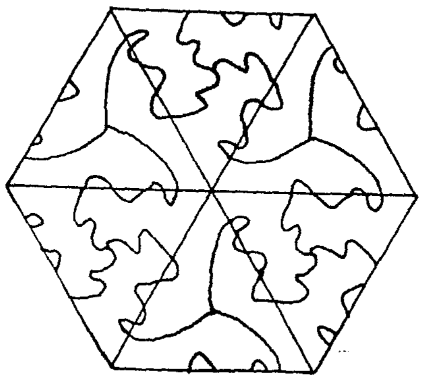
Si antes hacíamos un diseño en el primer triángulo para despues rotarlo , ahora podemos colocar tambien "agregados" o trazos que no parten necesariamente del centro del triángulo , estos agregados deben tambien ser rotados .



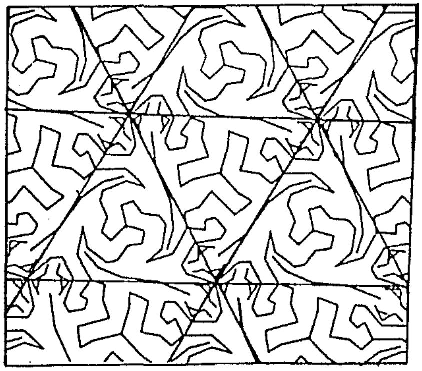
1o Se traza desde P 2o Con los agregados 3o Se rotan juntos

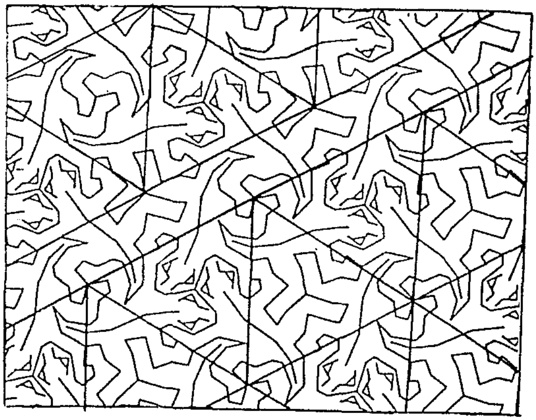
Los diseños que elijamos para el segundo triángulo deben formar con el trazo anterior y los agregados ,una línea continua que a estas alturas ya debe verse como iniciada en uno de los centros de rotación para luego terminar en el otro, así obtenemos una parte de tesela , que solo quedará completa con la participación de los triángulos contiguos.



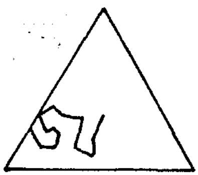


Este es el mètodo que se ha seguido para la elaboración de las Salamandras de M.C. Escher, de quien ya hemos hablado antes; observe las distintas redes de triángulos que pueden ser colocadas sobre la teselación , en cada caso,se colocan sobre los distintos centros de simetría y de hecho tenemos tres versiones del proceso.

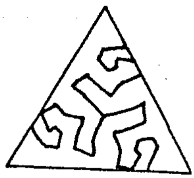




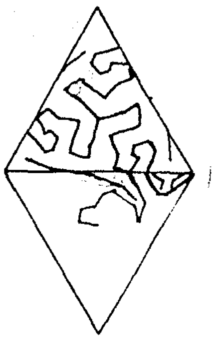
Bajo la alternativa de la primera red , éstos serían los pasos a seguir :



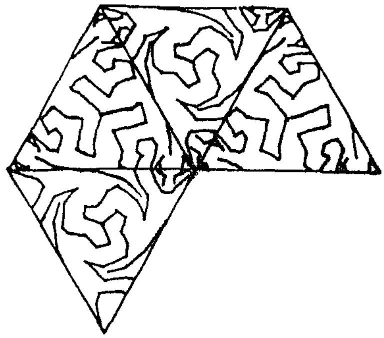
1o Un trazo del centro al contorno con agregados



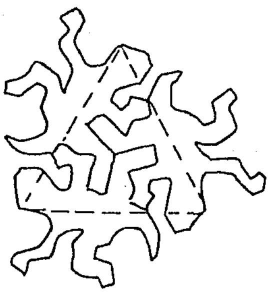
2o Rotamos el trazo



3o elaboramos el trazo del segundo



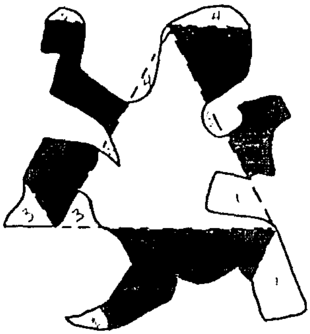
4o Observe que en este caso son suficientes cuatro triángulos para completar la tesela



5o La tesela , formada por tres salamandras ,cubre 2 triángulos

6o Y cada una de ellas cubre dos triángulos formados por los centros de rotación. (Las cabezas , las rodillas y los talones).

Por último presentamos la salamandra con áreas claras y obscuras que indican las áreas de los dos distintos triángulos.

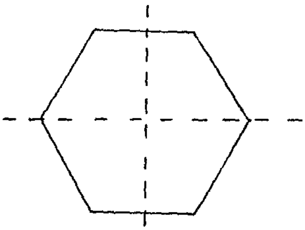


Tomado de (5)

b) . CORTANDO PARHEXAGONOS

Los cortes sobre teselas que hasta ahora hemos hecho, se han apoyado en las simetrías centrales de éstas, usaremos ahora otro criterio.

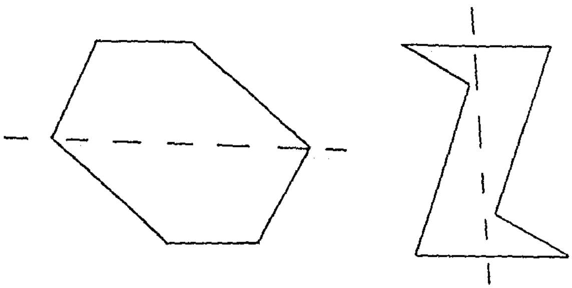
Si tomamos un hexágono regular y deseamos cortar de manera que éste quede dividido en cuatro partes iguales, un procedimiento podría ser éste:



Primero en dos partes iguales y después una nueva división.

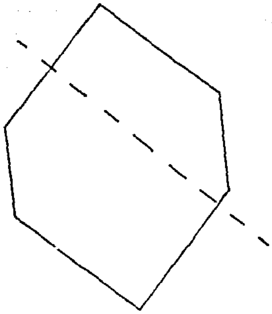
Este segundo corte es posible porque las dos mitades tienen simetría axial.

Cosa que no ocurre por ejemplo en los parhexágonos restantes (recuérdese que un hexágono regular es un parhexágono). Veamos:



Las mitades que obtenemos no son simétricas y no las podemos dividir en dos partes congruentes.

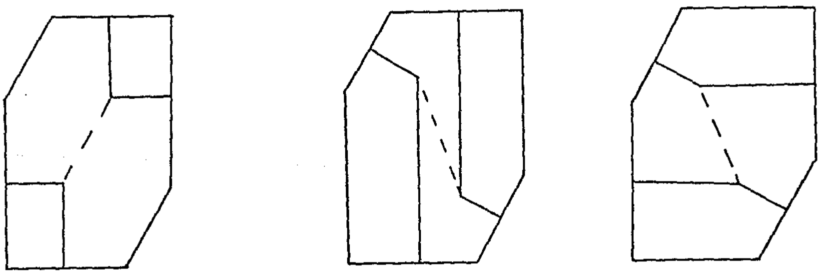
Además de los cortes en los hexágonos regulares, esto es posible hacerlo en parhexágonos con dos pares de lados iguales.



Aunque hay que decir que no todo corte es adecuado como éste.

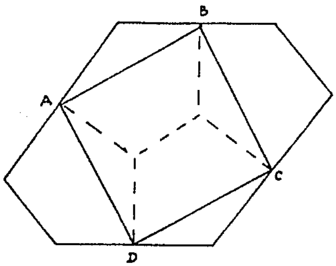
Para parhexágonos con 3 parejas distintas de lados tenemos la alternativa de utilizar las mediatrices (perpendiculares en el punto medio), porque nos permiten, en un caso encontrar 2 parejas de figuras congruentes y en otro, más afortunado, hasta 4 de éstas.

Tomemos pues un parhexágono y dibujemos 2 parejas de mediatrices, hay 3 opciones.



Las mediatrices se intersectan por parejas (¿Por qué?) . Si unimos los puntos de intersección, dividimos la tesela en 2 parejas de figuras congruentes, ésto se puede justificar porque la recta de unión pasa por el centro de simetría del parhexágono; en la primera figura tenemos cuadriláteros y, hexágonos y pentágonos en las otras dos, de estas la del extremo derecho tiene mayores posibilidades que las otras debido a la relativa semejanza de las partes.

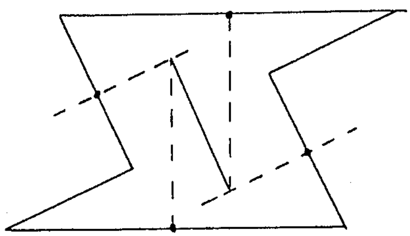
La condición que nos asegura que un corte de este tipo nos dá como resultado 4 pentágonos congruentes,es el hecho de que los 4 puntos de intersección de mediatrices y lados nos forme un cuadrado (6), esto es:



ABCD es un cuadrado.

Los parhexágonos que cumplan esta condición pueden ser cortados en 4 pentágonos congruentes.

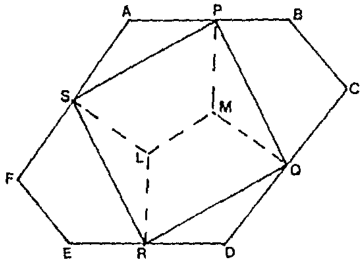
También hay parhexágonos convexos que pueden ser cortados con este método.



Tomado de (5)

Veremos que si:

ABCDEF es un parhexágono y PQRS forma un cuadrado, entonces podemos dividir al par hexágono en 4 partes iguales.



Demostración:

Sabemos que:

1) AP=PB=ER=RD P y R son puntos medios

2) BC=EF

3) FS=SA=DR=RE , S y R son puntos medios

4) SP=PQ=QR=RS, ya que SPQR es un cuadrado

Entonces:

$\Delta SAP = \Delta QDR$

$\Delta SLR = \Delta QMP$

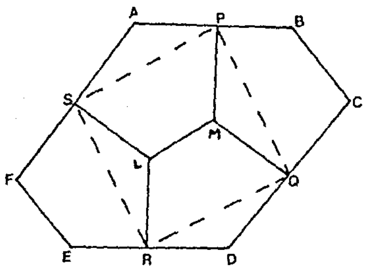
▱SREF=▱QPBC

▱SLMP=▱QMLR

$\Delta SLR = \Delta QRD$

▱SREF=▱QRLM *

Ahora veremos que si los cuatro pentágonos son congruentes PQRS es un cuadrado



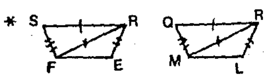
Deseamos ver que los ángulos del cuadrilátero en PQRyS son rectos y SP=PQ=QR=RS.

Sabemos por un lado que $\Delta SAP = \Delta QMP = \Delta QDR = \Delta SLR$, entonces SP=PQ=QR=RS.

Por otro, $AP \perp PM$; $QD \perp QM$; $RD \perp RL$ y $AS \perp LS$.

Como $\measuredangle APS = \measuredangle MPQ \Rightarrow \measuredangle SPQ$ es recto de la misma manera, $\measuredangle PQR = \measuredangle QRS = \measuredangle RSP = 90^\circ$.

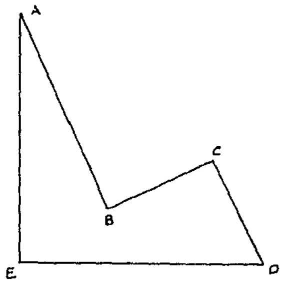
Así tenemos que PQRS es un cuadrado



FE=ML

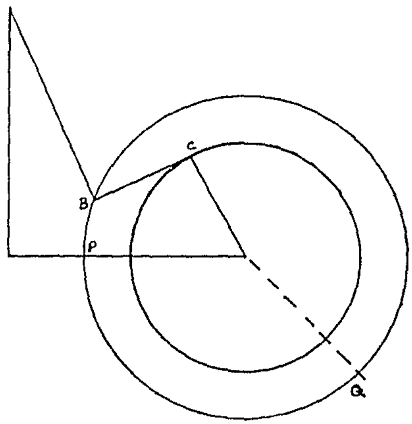
A partir de la manera como se hacen los cortes, es decir, utilizando las mediatrices y observando que el pentágono construido cuenta con dos lados iguales, es posible contar con una construcción que nos permita obtener pentágonos que cubran el plano y en particular la unión de cuatro de ellos (elejidos adecuadamente) completan un parhexágono.

La construcción podría ser la siguiente:



Tomado de (5)

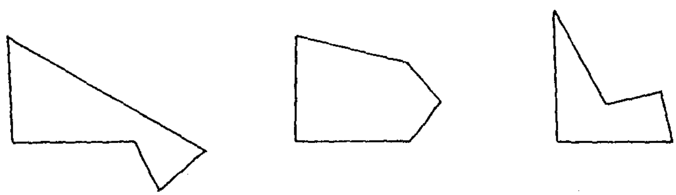
Esta tesela tiene restricciones sobre los lados y ángulos marcados pero hay un lado que puede cambiar: AB.



Tomado de (5)

De hecho las soluciones se encuentran pensando en un punto B que se desliza sobre una circunferencia de radio $\sqrt{2}b$, donde b=BC=CD, B varía con la única restricción de no transformar el pentágono en uno cruzado de, P a Q .

En particular tenemos estas tres teselas



Tomado de (5)

c) TESELACIONES CON PENTAGONOS

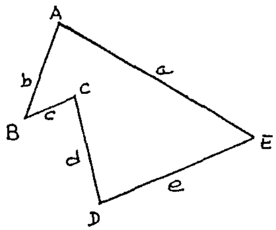
Los pentágonos han estado presentes a lo largo de nuestra exposición, algunos con un par de lados paralelos, otros no, cóncavos y convexos, con dos ángulos rectos y dos parejas de lados congruentes, como los construidos en el anterior apartado , en fin, hemos manejado una gran variedad de teselas de cinco lados. Ahora procederemos a analizarlos, a partir de ciertos requerimientos específicos que permiten variar la tesela, por ejemplo: el pentágono que pres_entamos está diseñado bajo las siguientes indicaciones : (10)

$a=e+c$

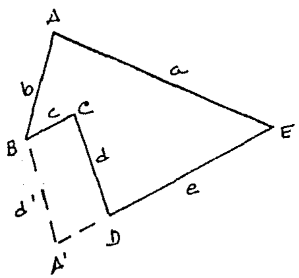
$b=d$

$\measuredangle A=\measuredangle D = 360^\circ - \measuredangle C$

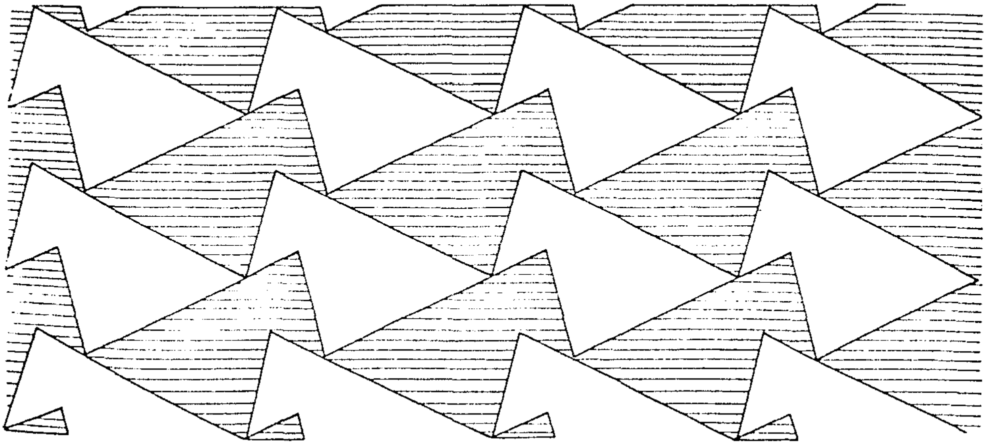
(ésto es $e \parallel c$)



Toda tesela pentagonal que cumpla con estos requisitos cubre el plano, para encontrar otras variantes a la misma observemos lo siguiente:

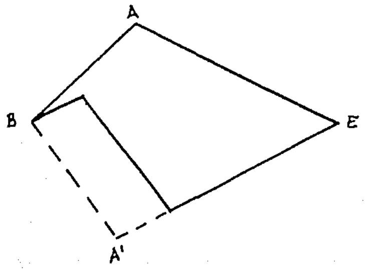


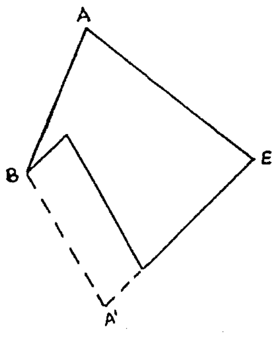
Si trazamos $d' \parallel d$ y $c' \parallel c$ tenemos que, la tesela original es igual al cuadrilátero A E A' B con dos parejas de lados iguales ($b=d$, $a=c+e$) y $\measuredangle A = \measuredangle A'$, del cual se ha retirado el paralelogramo B C D A'.



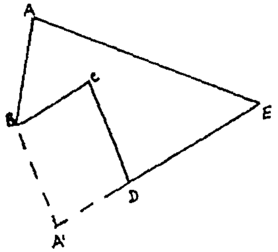
Tomado de (10)

Podemos modificar el cuadrilátero AEA' B, en este caso el paralelogramo BCDA, queda definido en lo que respecta a d y al ∡ A, no así el lado c, que también puede ser variado una vez elegido AEA' B. Variando AEA' B tenemos, por ejemplo:

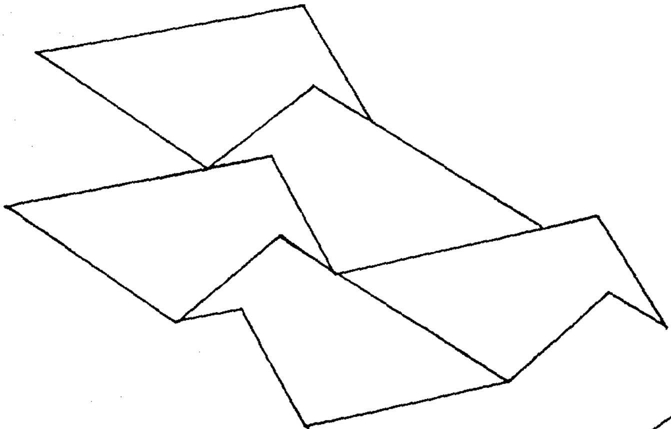


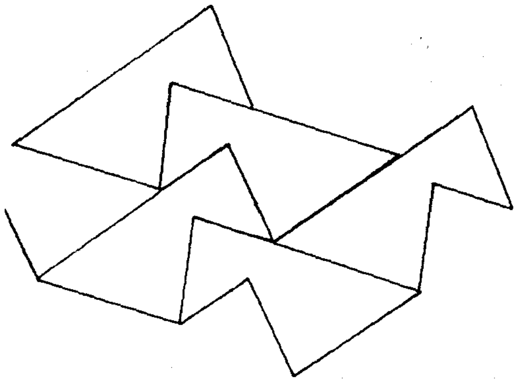


Variando BCDA'

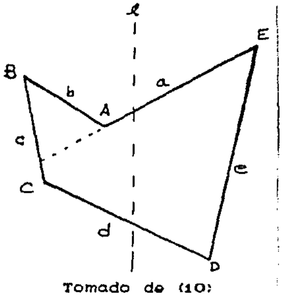


Estas son algunas teselaciones con la tesela modificada





Otro pentágono cóncavo que tesela y que está definido por ciertos requisitos es éste (10):

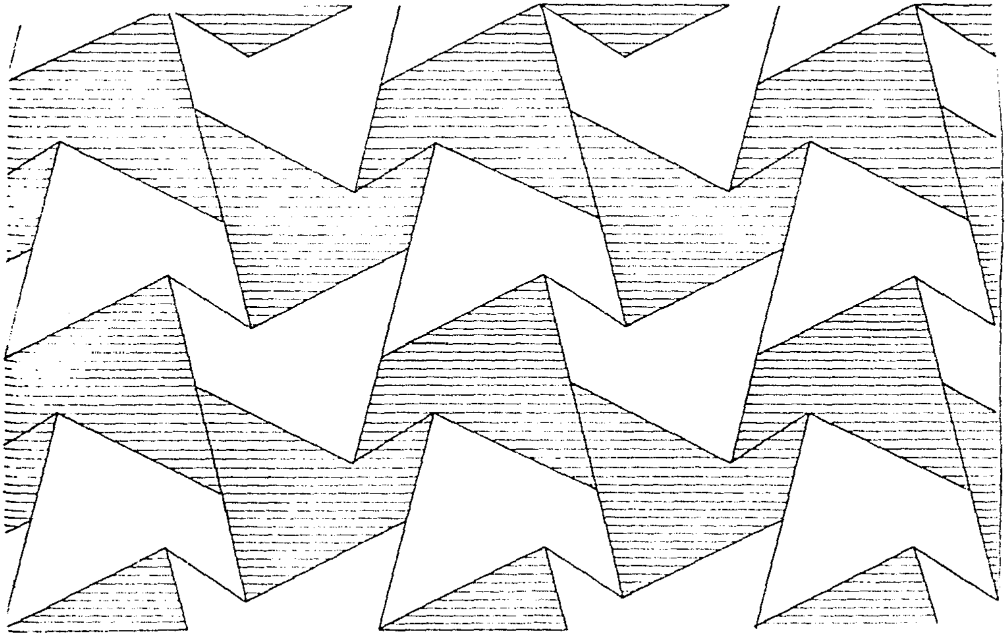


Tomado de (10)

a = d

E + C = 180 .

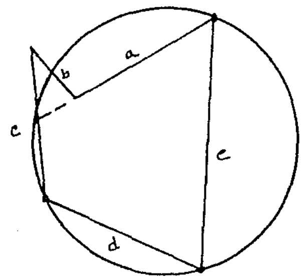
Les sugerimos analizar las posibles modificaciones a la tesela, un dato que puede ser importante es que si prolongamos la recta a hasta intersectar a BC, el punto de intersección c junto con C,D y E son concíclicos es decir están sobre una circunferencia. Esta es la teselación correspondiente:



Observe como la reflexión de la recta c en la bisectriz de a y d es paralela a la recta e.

Se dice que el par de rectas a,b es antiparalela del par c,d si se cumple la condición mencionada.

Esta condición es equivalente a que los cuatro puntos de intersección de las rectas del par a,b con el par c,d sean conciclicos.(Ver Shively.)



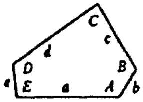
Presentamos a continuación una lista de los pentágonos conve xos que teselan ,en esta lista tambièn aparecen las condiciones bajo las cuales èstas quedan determinadas.

Desde 1918 se ha hecho un trabajo de inspección para completar la lista de pentágonos convexos distintos que teselan , es decir, si en nuestro primer ejemplo construimos nuevas teselas a partir de una primera , ésta y las variaciones pertenecen a una misma clase, es decir cumplen las mismas condiciones.

En aquel entonces se dió una lista de 5 pentágonos que representaban clases distintas y por supuesto èsta lista se considera ba completa (11) sin embargo en 1975 se agregarón 3 pentágonos más (12) actualmente la lista asciende a 13 y es posible que no esté completa aún, éste es actualmente un problema abierto en matemáticas.

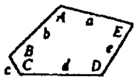
Esta es la lista :

$D + E = \pi$



$C + E = \pi$

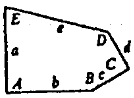
$a = d$



$A = C = D \; 2/3 \; \pi$

$a = b$

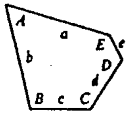
$d = c + e$



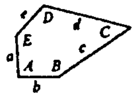
$A = C = 1/2 \; \pi$

$a = b$

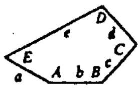
$c = d$



$$C = 2A = 2/3\,\pi$$
$$a = b$$
$$c = d$$

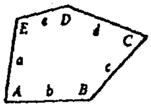


$$C + E = \pi$$
$$A = 2C$$
$$a = b = e\ ,\quad c = d$$

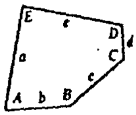


$$2B + C = 2\pi$$
$$2D = A = 2\pi$$
$$a = b = c = d$$

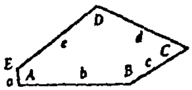
$$2A + B = 2\pi$$
$$2D + C = 2\pi$$
$$a = b = c = d$$



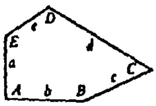
$2E + B = 2\pi$
$2D + C = 2\pi$
$a = b = c = d$



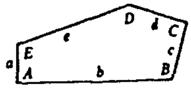
$E = 1/2\,\pi \quad , \quad A + D = \pi$
$2B - D = \pi$
$2C + D = 2\pi$
$a = e = b + d$



$A = 1/2\,\pi \quad , \quad C + E = \pi$
$2B + C = 2\pi$
$d = e = 2a + c$



$A = 1/2\,\pi \quad , \quad C + E = \pi$
$2B + C = 2\pi$
$2a = c + e = d$



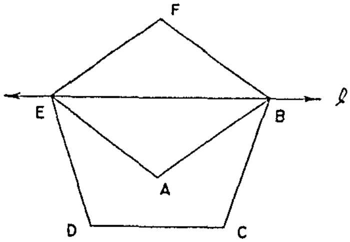
$A = C = 1/2\ \pi$

$B = E = \pi - 1/2\ D$

$c = d\ ,\ 2c = e$

Contrariamente a lo que sucede con los pentágonos , los hexágonos ya tienen su lista completa y esta sólamente tiene tres elementos consulte (12)

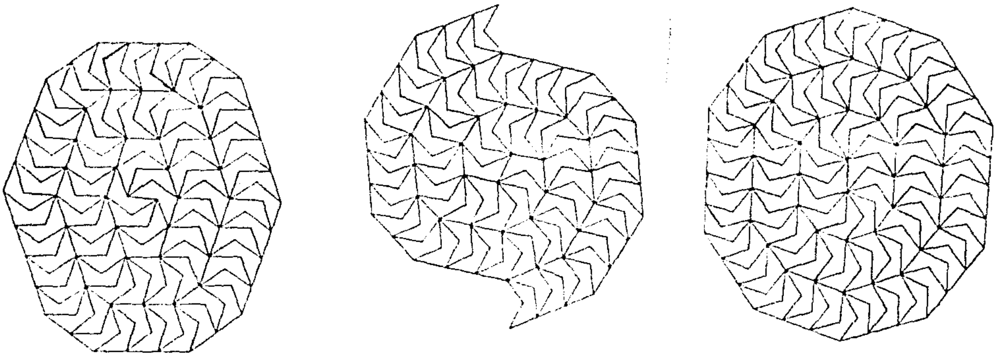
Veamos ahora algunos pentágonos cóncavos que teselan, tenemos éste, que nace a partir de un pentágono regular (13)



Tomado de (13)

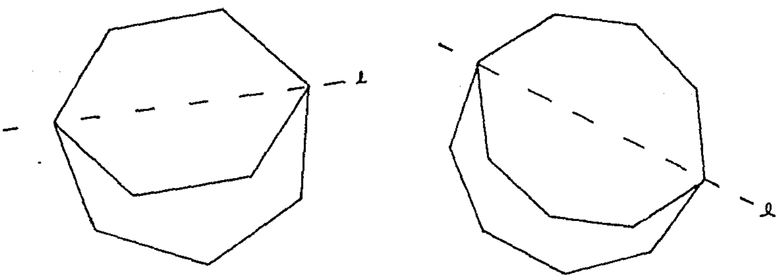
Reflejando el ΔEFB sobre la recta ℓ, tenemos el pentágono cóncavo ABCDE que tesela de una manera un tanto peculiar.

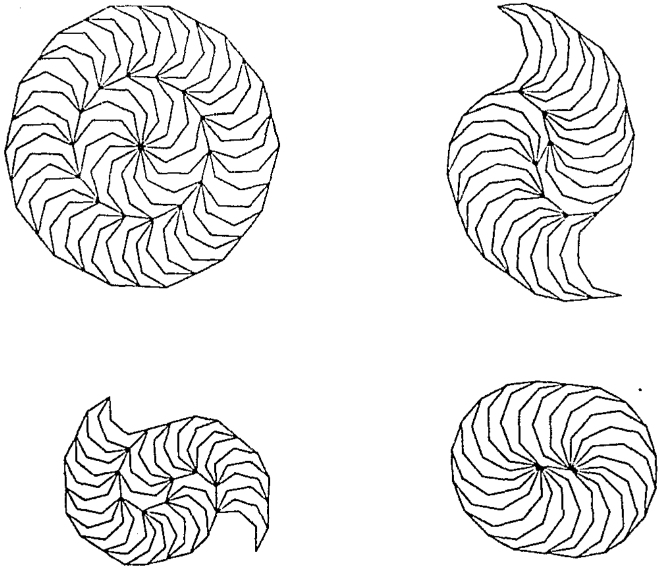
Con esta tesela es posible hacer teselaciones centrales y en espiral como éstas:



Tomado de (13)

De hecho es posible construir teselaciones de este tipo con este mismo mètodo utilizando polígonos de lados impares , si el número de lados es 2m+1 los lados reflejados serán 2m , intente usar polígonos de lados pares .

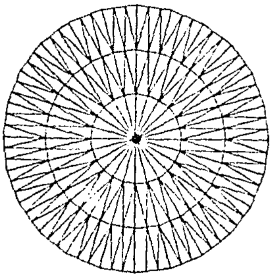


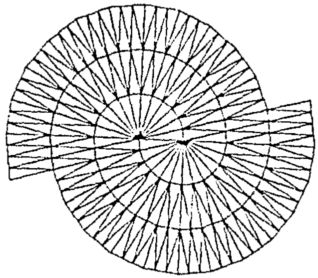


Tomado de (13)

d) TESELACIONES EN ESPIRAL

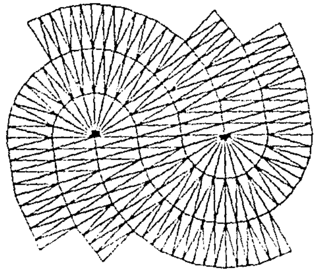
Existe un método para hacer una teselación espiral , en la última parte de la sección anterior ya tenemos un ejemplo . Ahora vamos a partir de triángulos isósceles para su construcción ésta podría ser una de ellas .





Tomado de (16)

Podemos hacer más vistosa la imagen si convertimas esta teselación en una de dos o más ramas eso es posible si se corta la espiral con una recta que pase por el centro, de manera que quede dividida en dos semiplanos, ¿es ésto posible ? ; después de este corte, es suficiente desplazar los semiplanos una, dos o el número de unidades deseadas (recuerde que la teselación es monohédrica).



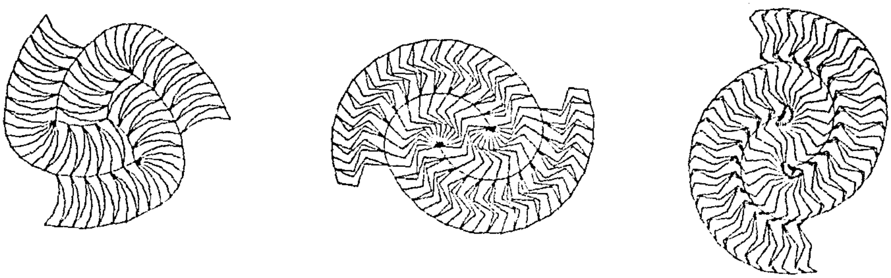
Tomado de (16)

Este método tiene algunas exepciones que pueden verse en (15).

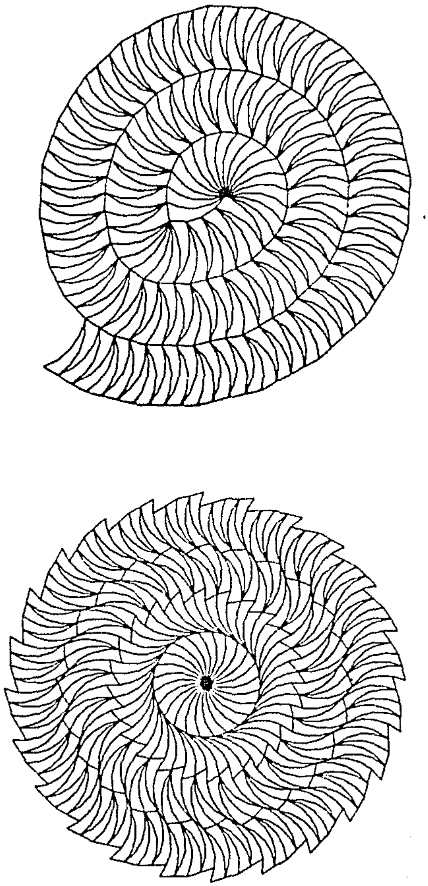
Los triángulos isósceles de las anteriores teselaciones pueden ser sustituidos por alguna de éstos. (16). Note que la tesela (*d*) es uno de nuestros ejemplos-rompecabezas. (Fig. 11)

(a) (b) (c) (d) (e)

Estas son algunas de sus teselaciones:



Tomado de (16)



Aquí tenemos una tesela, dispuesta en dos teselaciones espirales

BIBLIOGRAFIA Y REFERENCIAS

(1) Coloringes Noel 78; IREM de Paris

(2) El mundo de Escher

(3) Grumbaum and Shephard ; Tilings and Paterns; 1987

(4) Martin Gardner; More about tiling plane : possibilities of polyominoes polyamonds and polyhexes;Scientific American ;1975.

(5) Jeannine Cartron ; IREM de Poiters; Francia

(6) Alain Riou ; Pavage par des Pentagones ; Pentamino; IREM de Grenoble.

(7) Esnest Ranucci; Un pequeño Tesoro de mosaicos ;Sigma No. 5 ;1975 La Habana , Cuba.

(8) D. Schattschneider; Will it tile? try the Conway Criterion; Mathematics Magazine; Volumen 53; 1980

(9) Jeannine Cartron ; Activites-Geometriques en Classe de 4e a partir d'un Pavage de Escher les Chinois ; IREM de Poiters

(10) Equipo Pentamino; Pentamino No 5 ,6 y 7 IREM de Grenoble; 1978-79.

(11) Martin Gardner; On tessellations the plane with convex polygons tiles ; Scientific American 1975.

(12) Idem. (3) Capitulo 9.3.

(13) David R. Simons; Central Tessellations and equilateral pentagon MT 81 ; dic de 1977.

(14) Gillian Hatch; Tessellations with equilateral reflex poligons MT84; sep. 1978

(15) David R. Simons; MT 84; sep. 1978

(16) Idem. (3) Spirals Tilings; Cap. 9.5
(17) Martin Gardner 7ª Antología

RESPUESTAS A LAS PREGUNTAS *

(1*) Porque al igual que los cuadrados , en las deformaciones símetricas es posible hacer un semigiro en el punto medio de cada lado.

(2*) No, porque de lo contrario algunos lados deberían ser modificados de dos formas distintas.

(3*) a) modificaciones cualesquiera sobre las paralelas b) modificaciones simétricas en los lados paralelos

(4*) Si, se trata de un parhéxagono deformado que cumple (3*) a)

(5*) Porque esta nueva tesela se forma en cada vértice por el triángulo original y el desplegado , que tiene una amplitud idéntica al otro.

(6*) En el corte y desdoblamiento de estas teselas , la única parte de la curva que juega un papel en el diseño es el segmento de curva que aparece entre E y F , es decir participa en la construcción de la nueva tesela el mayor arco de la curva intersectada por los trazos de los vértices.

(7*) $\measuredangle FPA = 2\measuredangle SPQ$

$\measuredangle APQ = \measuredangle SRD$

$\measuredangle PFE = \measuredangle BCR$

(8*) Las soluciones , una vez que tenemos el valor de a , están sobre la circunferencia $2r > a$ donde a es una cuerda , se elije x otra cuerda sobre la circunferencia con la condición de que $x > a$, entonces ABCDE es un pentágono con los requisitos pedidos.

INDICE