2D
2 ?

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

Facultad de Ciencias

OPTIMIZACION DE COSECHAS EN MODELOS DE CRECIMIENTO CON ESTRUCTURA DE EDADES

T E S I S

Que para obtener el Título de

M A T E M A T I C O

p r e s e n t a

Juan Huitrón de la Rosa

MEXICO, D. F. 1991

CONTENIDO

INTRODUCCION

Los modelos matemáticos han jugado un papel muy importante en el desarrollo de la dinámica de poblaciones, ayudando a describir y comprender fenómenos y procesos relacionados con los tamaños y cambios de las poblaciones, asi como los procesos involucrados con estos cambios.

La introducción de técnicas demográficas a la ecología para la descripción detallada de las poblaciones, como son las tablas de vida y de fecundidad fue determinante para llegar al estudio de la dinámica de poblaciones estructuradas por edades

Los primeros intentos en esta direccion corresponden a los años cuarentas, con el modelo de crecimiento para poblaciones con individuos clasificados en clases de edad en forma discreta, diferenciados por su capacidad de influir en el crecimiento global de la población de acuerdo a su edad.

Mediante este modelo determinístico, se puede conocer a partir de una estructura de edades inicial y las tasas de sobrevivencia y fecundidad específicas de cada clase de edad, el número total de individuos existentes en cada intervalo de tiempo, su estructura de edades, asi como el comportamiento de la distribución de la población a largo plazo.

A partir de estos trabajos pioneros, se han abierto múltiples estudios, de acuerdo a sexo, tamaño, estado fisiológico, desarrollo, localización, etc. En este trabajo se considerará únicamente a la población femenina, suposición llamada dominancia demográfica de las hembras, que equivale a considerar la sobrevivencia de la población como reflejo de lo que sucede en la parte femenina.

Con el transcurso del tiempo la población puede ser creciente, decreciente o estática.

Si se tiene una población animal creciente, es de suma importancia determinar el rendimiento periódico que se obtiene por cada animal que se separa, ya sea para su venta, sacrificio o alguna otra razón; de tal manera que la distribución de la población se conserve en cada período.

Existen muchas formas de efectuar la separación, de las cuales se obtienen rendimientos por lo general distintos, por lo que hay que determinar cuál de estas separaciones genera un rendimiento óptimo.

El presente trabajo esta formado de la siguiente manera:

Modelo de crecimiento de Leslie.

En esta sección se dá la descripción del modelo de crecimiento de Leslie y se determina la distribución de la población en cualquier momento, a partir de una matriz de crecimiento L de Leslie y una distribución de edades inicial.

Se observa que bajo circunstancias particulares el comportamiento de la distribución de la población a largo plazo queda determinado por el valor propio positivo λ_0 y su correspondiente vector propio V de la matriz de crecimiento L de Leslie; de tal manera que el comportamiento es independiente de las condiciones iniciales.

Se analizan algunas propiedades del valor propio positivo λ_0.

Se describe lo que es la gráfica asociada a una matriz, así como algunas de sus propiedades.

Se proporcionan interpretaciones biológicas correspondientes al valor propio positivo dominante λ_0, así como a sus correspondientes vectores propios (derecho e izquierdo).

Finalmente se observa que el crecimiento de la población queda determinado por el valor propio dominante λ_0 (si $\lambda_0 = 1$, la población es estable; si $\lambda_0 > 1$, la población es creciente y si $\lambda_0 < 1$, la población es decreciente).

Modelo de explotación racional duradero.

Se analiza el efecto que tiene la separación de diferentes fracciones en las distintas clases de edad, utilizando el modelo de crecimiento de Leslie para una población animal creciente, de tal manera que el rendimiento sea duradero y que siempre la población mantenga la distribución de edades inicial.

Se define lo que es una política de separación racional duradera y se observa que hay una infinidad de éstas, que generan por lo general rendimientos distintos.

Rendimiento óptimo duradero.

Se mostrará que la política de separación óptima sujeta a una restricción lineal económica o ecológica la cual máximiza el rendimiento y su distribución de edades inicial no se altera, se obtiene separando una cierta fracción de individuos como rendimiento de una o dos clases de edad. Si se separan dos, sera una fracción de la clase más joven de éstas y completamente la otra.

Aplicación.

Se construye el algoritmo así como el programa que determina el vector de distribución de la población en equilibrio, el rendimiento óptimo duradero y el número de individuos que se separan de cada una de las distintas clases de edad. Finalmente se aplica a una población de ovejas domesticas de Nueva Zelanda.

Apéndice.

En este apartado se encuentran las demostraciones de ciertas proposiciones y teoremas.

1.- MODELO DE CRECIMIENTO DE LESLIE

1.1 DESCRIPCION DEL MODELO.

Este modelo es comunmente utilizado por demógrafos y biologos para el estudio de crecimiento y control de poblaciones. Fue desarrollado en los años cuarenta por Lewis (1942) y Leslie (1945 , 1948). y describe el crecimiento de una poblacion animal dividida en clases de edad de igual duración.

Se supone que la poblacion se ha dividido en n clases de edad y que cada clase tiene la misma duración de tiempo; esta cantidad se tomará como la unidad de tiempo en el modelo; por ejemplo en demografía es usual dividir a la población en grupos de edad de 5 años. Asi mismo se considerará que se tiene una población animal femenina, esto es, se esta suponiendo que la distribución de la población es un reflejo de lo que sucede en la clase femenina, o sea que la razón entre las hembras y los machos es constante y que para cada una de las distintas clases de edad de la población las tasas de mortandad y de sobrevivencia son las mismas para ambos sexos. Finalmente se supone que se conoce el número de individuos de cada una de las n clases de edad, en el tiempo t = 0 y éstas seran arregladas en forma vectorial como sigue.

$$X^{(0)} = \begin{bmatrix} X_1^{(0)} \\ X_2^{(0)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X_n^{(0)} \end{bmatrix}$$

el cual es llamado vector de distribución de edades inicial, dondes $X_i^{(0)}$ es el número de individuos que al instante $t = 0$ se encuentran en la clase de orden i.

Con el transcurso del tiempo, cambiará el número de individuos que hay en cada una de las clases de edad debido a los procesos biológicos (nacimientos, envejecimientos, muertes); estos procesos seran descritos de manera discreta en el tiempo, es decir el interes es por la distribución de la población en unidades de tiempo discretos, o sea al paso de 1,2,3, etc. unidades de tiempo.

Si se describen estos procesos cuantitativamente se podrá proyectar el vector de distribución de edades inicial hacia el futuro.

Con esta suposición, todos los individuos que estan en la clase $i+1$ al tiempo $t+1$, debieron estar en la clase de orden i al tiempo t. Tomando en consideración lo anterior, la proyección de la población estará descrita en base a los siguientes parámetros demográficos:

a_i : Al número promedio de hijas que una hembra de la clase i tiene durante el tiempo que permanece en dicha clase. $i = 1,2,...,n$.

b_i : A la probabilidad de que una hembra de la clase i sobreviva y pase a la clase $i+1$. $i = 1,2,...,n-1$.

Desde luego $a_i \geq 0$; $i = 1,2,...,n$ y $0 < b_i \leq 1$; $i = 1,2,...,n-1$.

Estos parámetros se supondran conocidos, usualmente se obtienen de tablas de fertilidad y vida respectivamente.

Una primera consideración que se tiene que hacer, es que por lo menos un valor a_i sea positivo para garantizar que ocurran nacimientos; a una clase a la que le corresponde un valor con tales caracteristicas, se le llamará clase fertil. Tambien se asumirá que $a_n \neq 0$, (se considera que la población es fértil en la última etapa de su vida, ya que las hembras que estan en una etapa post-reproductiva al tiempo t=0, no estarán presentes físicamente o en descendientes después de n unidades de tiempo; por lo que el análisis se concentra sólo hasta la última clase fértil). Así mismo el suponer $b_i > 0$ para $i = 1,2,...,n-1$, garantizará que por lo menos un individuo sobrevivirá más alla de la clase de orden i .

Ahora se define el vector de distribución de edades $X^{(k)}$ al tiempo $t = k$

$$X^{(k)} = \begin{bmatrix} X_1^{(k)} \\ X_2^{(k)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X_n^{(k)} \end{bmatrix}$$

donde $X_i^{(k)}$ es el número de individuos de la clase i que están presentes al tiempo $t = k$. Dado lo anterior se tiene que para el tiempo $t = k$, los individuos de la primera clase son únicamente los nacidos entre los tiempos $t = k-1$ y $t = k$, con lo cual

$$X_1^{(k)} = a_1 X_1^{(k-1)} + a_2 X_2^{(k-1)} + \cdots + a_n X_n^{(k-1)} \qquad (1.1.1)$$

es decir el número de individuos en la clase 1 al tiempo $t = k$, es igual a la suma de las contribuciones (hijas) que tiene cada individuo un instante antes.

El número de individuos en la clase $i+1$ al tiempo $t = k$ es igual al número de individuos de la clase i en el tiempo $t = k-1$ que han sobrevivido una unidad de tiempo, esto es:

$$X_{i+1}^{(k)} = b_i X_i^{(k-1)} \quad ; \quad i = 1,2,3,\ldots,n-1 \qquad (1.1.2)$$

Las ecuaciones (1.1.1) y (1.1.2) se pueden reescribir en términos matriciales como:

$$\begin{bmatrix} X_1^{(k)} \\ X_2^{(k)} \\ X_3^{(k)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X_n^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & b_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1^{(k-1)} \\ X_2^{(k-1)} \\ X_3^{(k-1)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X_n^{(k-1)} \end{bmatrix}$$

y en forma más compacta

$$X^{(k)} = L\,X^{(k-1)} \qquad \text{con} \quad k = 1,2,3,\ldots \tag{1.1.3}$$

donde la matriz de Leslie esta dada por

$$L = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & & \ldots & b_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \tag{1.1.4}$$

El interés es el conocer $X^{(1)}, X^{(2)}, X^{(3)}, \ldots,$ que por la ecuación (1.1.3) se tiene que:

$$X^{(1)} = LX^{(0)}, \quad X^{(2)} = LX^{(1)} = L^2X^{(0)}, \quad X^{(3)} = LX^{(2)} = L^3X^{(0)};$$

y en general:

$$X^{(k)} = LX^{(k-1)} = L^kX^{(0)} \tag{1.1.5}$$

Por lo que si se conoce la matriz de Leslie L y la distribución inicial $X^{(0)}$, se puede determimar la distribución de la población en cualquier tiempo futuro.

1.2.- COMPORTAMIENTO A LARGO PLAZO.

La ecuación (1.1.5) genera la distribución de las edades de la población en cualquier tiempo, pero no aporta de inmediato un cuadro general de la dinámica del proceso de crecimiento.

Aquí se verá que el comportamiento del vector de distribución por edades de la población a largo plazo, queda bajo circunstancias particulares determinado por el valor propio λ_1 y el correspondiente vector propio V de la matriz de crecimiento L de Leslie, y tal comportamiento será independiente de las condiciones iniciales.

Puesto que se estará trabajando con valores y vectores propios de la matriz L de Leslie, es necesario conocer algunas de las propiedades que éstos tienen.

Como es sabido los valores propios de L son las raíces del polinomio característico

$$P(\lambda) = \det(\lambda I - L) =$$

$$= \lambda^{n} - a_1 \lambda^{n-1} - a_2 b_1 \lambda^{n-2} - \ldots - a_{n-1} b_{n-2} b_{n-3} \ldots b_1 \lambda - a_n b_{n-1} \ldots b_1$$

Se observa primero que $\lambda = 0$, no es raíz de $P(\lambda)$, ya que $a_n b_{n-1} \ldots b_1 \neq 0$, puesto que $a_n \neq 0$ y $b_i > 0$ para $i = 1,2,3,\ldots,n-1$. Por lo que :

$$P(\lambda) = 0 \quad \text{si y sólo si} \quad q(\lambda) = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1.2.1)$$

donde

$$q(\lambda) = \frac{a_1}{\lambda} + \frac{a_2 b_1}{\lambda^2} + \ldots + \frac{a_n b_{n-1} \ldots b_1}{\lambda^n} \quad \ldots\ldots \quad (1.2.2)$$

GRAFICA DE LA FUNCION $q(\lambda)$

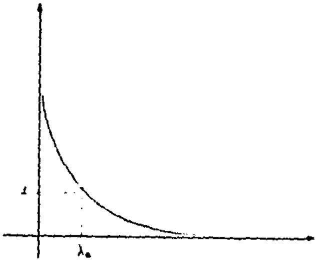


FIGURA 1.2.1

PROPOSICION 1.2.1

L tiene un único valor propio positivo λ_0, este valor propio es simple y tiene un vector propio derecho V (respectivamente izquierdo U) cuyas entradas son todas positivas. Además se pueden elegir U y V que satisfagan $\langle U,V\rangle = 1$. ($\langle U,V\rangle$ producto escalar de U y V vectores)

DEMOSTRACION.

Como ningún valor a_i, b_i es negativo, es claro que $q(\lambda)$ se comporta de la siguiente manera:

$$q(\lambda) \longrightarrow \infty \quad \text{si} \quad \lambda \longrightarrow 0 \quad \text{y} \quad q(\lambda) \longrightarrow 0 \quad \text{si} \quad \lambda \longrightarrow \infty ,$$

además como

$$q'(\lambda) = - \left[\frac{a_1}{\lambda^2} + \frac{a_2 b_1}{\lambda^3} + \dots + \frac{a_n b_{n-1} \dots b_1}{\lambda^{n+1}} \right] < 0$$

si $\lambda > 0$, es inmediato que $q(\lambda)$ es monotona decreciente y por el teorema del valor medio se tiene que existe un único $\lambda_0 > 0$ con $q(\lambda_0) = 1$, y puesto que $q'(\lambda_0) \neq 0$, se tiene que λ_0 es simple.

Soluciones de las ecuaciones $LV = \lambda_0 V$ y $U^t L = \lambda_0 U^t$ (U^t es el vector transpuesto de U) estan dadas respectivamente por :

$$U = \begin{bmatrix} a_2/\lambda_0 + a_3 b_2/\lambda_0^2 + \dots + a_n b_{n-1} \dots b_1/\lambda_0^{n-1} \\ \vdots \\ a_{n-1}/\lambda_0 + a_n b_{n-1}/\lambda_0^2 \\ a_n/\lambda_0 \end{bmatrix} \qquad (1.2.3)$$

$$V = \begin{bmatrix} 1 \\ b_1/\lambda_0 \\ b_2 b_1/\lambda_0^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{n-1} \ldots b_1/\lambda_0^{n-1} \end{bmatrix} \qquad (1.2.4)$$

cuyas entradas son siempre positivas. La condición $(U,V) = 1$ se logra al multiplicar por un escalar (a saber $1/(U,V)$) a alguno de los vectores.

DEFINICIONES.-

(I) A es una matriz no negativa si $a_{ij} \geq 0$; $\forall i$, $\forall j$.

(II) La gráfica asociada a una matriz no negativa $A = (a_{ij}) \in \mathfrak{M}_{n \times n}$ es una gráfica que tiene tantos nodos como el orden de la matriz y consta de aristas dirigidas con pesos a_{ij} si la arista va del nodo j al nodo i.

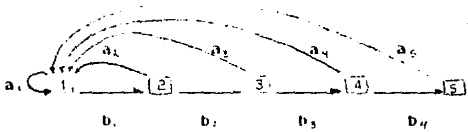
(III) A es irreducible si su gráfica asociada es fuertemente conexa; es decir si existe una trayectoria dirigida entre cualesquiera dos nodos.

(IV) A es primitiva si el máximo común divisor de las longitudes de los ciclos de la gráfica asociada es uno.

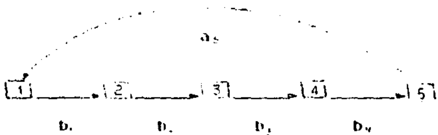
Ejemplo:

$$\text{Sea} \quad A : \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_4 & 0 \end{bmatrix}$$

ésta es no negativa y su gráfica asociada es:

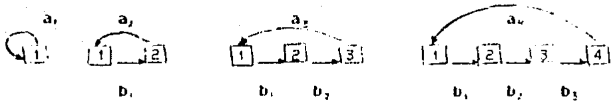


Como suponemos que $a_5 \neq 0$, la matriz es irreducible, ya que la trayectoria



visita todos los nodos y es un ciclo, por lo que conecta a cualquier par de nodos.

Otras trayectorias posibles que son ciclos :



posibles pués dependerá de que a_j sea o no diferente de cero. Las longitudes son 1, 2, 3, 4 y 5 respectivamente.

TEOREMA 1.2.2

(a) Cualquier valor propio λ de L cumple que $|\lambda| \leq \lambda_0$.
(b) Si además el m.c.d. $\{ j \,;\, a_j \neq 0 \} = 1$, (m.c.d. : es el máximo comun divisor) se tiene $|\lambda| < \lambda_0$ para cualquier otro valor propio $\lambda \neq \lambda_0$ de L. En particular si dos consecutivas a_j, a_{j+1} son diferentes de cero.

La demostración del Teorema anterior es una consecuencia del famoso TEOREMA DE PERRON - FROBENIUS ; el cual enunciamos.

"Si $\underline{A}$ es una matriz no negativa, irreducible y primitiva, entonces $\underline{A}$ tiene un valor propio positivo λ de multiplicidad uno, que es estrictamente dominante."

Al considerar la gráfica de la matriz de Leslie, es claro que $a_j > 0 \ \forall j$ si y sólo si existe un ciclo de longitud j.

Con la herramienta presentada se está en posibilidades de describir $X^{(k)}$ para tiempos k grandes. En todo lo siguiente se supondrá que λ_0 es un valor propio positivo y estrictamente dominante; también U y V serán vectores propios (izquierdo y derecho respectivamente) de L correspondientes a λ_0, con $\langle U,V\rangle = U^t V = 1$.

Se definen ahora las siguientes matrices

$$P_{n\times n} = V_{n\times 1} U^t_{1\times n} \quad y \quad Q_{n\times n} = I - P \qquad (1.2.5)$$

LEMA 1.2.3

P y Q tienen las siguientes propiedades:

(i) $P^2 = P$, $Q^2 = Q$.

(ii) $PLQ = QLP = 0$.

(iii) $PQ = QP$.

(iv) $L = PLP + QLQ$

(v) $L^n = PL^nP + QL^nQ = (PLP)^n + (QLQ)^n \quad \forall n \in N$

(vi) Si α es valor propio de QLQ, lo es de L

(y entonces $|\alpha| < \lambda_0$).

DEMOSTRACION

(I) $P^2 = (VU^t)(VU^t) = V(U^tV)U^t = VU^t = P.$

$Q^2 = (I-P)(I-P) = I - P - P + P^2 = I-P = Q.$

(II) $PLQ = (VU^t)L(I-P) = V(U^tL)(I-P) = V(\lambda_0 U^t)(I-P) =$

$= \lambda_0 P(I-P) = \lambda_0(P-P^2) = 0.$

$QLP = (I-P)L(VU^t) = (I-P)(LV)U^t = (I-P)\lambda_0 VU^t =$

$= \lambda_0(I-P)P = \lambda_0(P-P^2) = 0$

(III) $PQ = P(I-P) = (P-P^2) = (I-P)P = QP.$

(IV) Como $P+Q = I$, se tiene que $L = (P+Q)L = PL + QL =$

$= PL(P+Q) + QL(P+Q) = PLP + \cancel{PLQ}^{0} + \cancel{QLP}^{0} + QLQ =$

$= PLP + QLQ.$

(V) $L^n = (P+Q)L^n = PL^n + QL^n = PL^n(P+Q) + QL^n(P+Q) =$

$= PL^nP + PL^nQ + QL^nP + QL^nQ = PL^nP + (\cancel{PLQ})^{0\,n} +$

$+ (\cancel{QLP})^{0\,n} + QL^nQ = PL^nP + QL^nQ = (PLP)^n + (QLQ)^n$

(VI) Si $QLQX = \alpha X$ para algún $X \neq 0$, entonces $PLPX = 0$,

en efecto

$$\alpha(PLP)X = PLP(\alpha X) = PLP(QLQX) = PL(PQ)(LQX) =$$

$$= PL(QP)(LQX) = (PLQ)(PLQ)(X) = 0.$$

Por lo tanto $LX = PL\overset{0}{P}X + QLQX$, por (IV), y

$LX = QLQX = \alpha X$, entonces α es valor propio de L.

Por lo que $|\alpha| < \lambda_0$.

TEOREMA 1.2.4

Para cualquier $X \in R^n$; $\lim_{n \to \infty} (1/\lambda_0^n) L^n X = PX$ (1.2.6)

DEMOSTRACION

$$L^n X = (PLP)^n X + (QLQ)^n X = (VU^t LP)^n X + (QLQ)^n X =$$

$$= [V(U^t L)P]^n X + (QLQ)^n X = (V\lambda_0 U^t P)^n X + (QLQ)^n X =$$

$$= (\lambda_0 P^2)^n X + (QLQ)^n X = (\lambda_0 P)^n X + (QLQ)^n X =$$

$$= \lambda_0^n PX + (QLQ)^n X = \lambda_0^n (PX + [(1/\lambda_0) QLQ]^n X)$$

Ahora se utilizara el siguiente

LEMA 1.2.5

$[(1/\lambda_0) QLQ]^n \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Luego $\forall X \in R^n$, $\lim_{n \to \infty} (1/\lambda_0^n) L^n X = PX$

COROLARIO 1.2.6

Si L es una matriz primitiva (si el m.c.d. de las longitudes de los ciclos de la gráfica asociada es 1) y λ_0 es el valor propio dominante, entonces

$$\lim_{n \to \infty} (1/\lambda_0^{\,n}) L^n = P.$$

Donde $P = VU^t$, U y V vectores propios izquierdo y derecho de L correspondientes a λ_0, con $(U,V) = 1$.

OBSERVACION

P es una matriz cuyas columnas son múltiplos positivos de V; es decir de la forma $P = [\, C_1 V \mid C_2 V \mid \dots \mid C_n V \,]$, y se tiene que para cualquier $X \in R^n$ con coordenadas no negativas, $Y = PX = (\sum_{j=1}^{n} C_j X_j) V$, donde $C_j \in R^+$ unión $\{0\}$.

Luego los valores relativos de las componentes Y_i de $\underline{Y}$ son independientes de X, ya que :

$$\frac{Y_i}{\sum_{k=1}^{n} Y_k} = \frac{(\sum_{j=1}^{n} C_j X_j) V_i}{\sum_{k=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n} C_j X_j) V_k} = \frac{V_i}{\sum_{k=1}^{n} V_k} \qquad (1.2.7)$$

Por lo que aplicando esto último al problema de describir

$$X^{(K)} = L^{K} X^{(0)}, \quad \text{se tiene que:}$$

$$\lim_{K \to \infty} (1/\lambda_0)^{K} X^{(k)} = \lim_{K \to \infty} (1/\lambda_0)^{K} L^{K} X^{(0)} = PX^{(0)}$$

$$\lim_{K \to \infty} (1/\lambda_0)^{K} X^{(k)} = \left(\sum_{j=1}^{n} C\, X^{(0)} \right) V = \alpha V \quad ; \ldots \quad (1.2.8)$$

Luego el vector de distribución $X^{(K)} \simeq \lambda_0^{K} \alpha V$ (1.2.9)

y

$$\frac{X^{(K)}}{\sum_{j=1}^{n} X_j^{(K)}} \xrightarrow[K \to \infty]{} \frac{V}{\sum_{j=1}^{n} V_j} \qquad (1.2.10)$$

En (1.2.9) el comportamiento de $X^{(K)}$ en el límite muestra una dependencia de la condición inicial $X^{(0)}$, pues α depende de éste; en la ecuación (1.2.10), después de (normalizar) se muestra que la distribución en el límite es independiente de $X^{(0)}$.

Esta razón, hace llamar a V VECTOR DE DISTRIBUCION DE EDADES ESTABLE.

La ecuación (1.2.9) también cobra sentido para K+1,

$$X^{(K+1)} \approx \lambda_0^{K+1} \alpha Y,$$

por lo que combinando estas dos, obtenemos que

$$X^{(K+1)} \approx \lambda_0 X^{(K)} \qquad (1.2.11)$$

para valores de K grandes, lo que significa que cada vector de distribución de edades es un múltiplo escalar del vector de distribución de edades inmediato anterior, siendo el factor el valor propio dominante λ_0. Con lo cual la proporción de individuos en cada una de las distintas clases de edad, se vuelve constante, y estas proporciones en el límite se determinan a partir del vector propio Y.

Ahora es muy fácil interpretar al vector de distribución de edades estable

$$Y = \begin{bmatrix} 1 \\ b_1/\lambda_0 \\ b_2 b_1/\lambda_0^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{n-1} \ldots b_1/\lambda_0^{n-1} \end{bmatrix}$$

Como $\underline{V_1}$ es la clase 1, que consta de recien nacidos, se supondrá que éstos permanecen vivos durante la primera unidad de tiempo, por lo que su valor proporcional con respecto a los que nacen será 1.

Ahora bien $V_j = b_{j-1} \ldots b_1 / \lambda_0^{j-1}$ representará la proporción de individuos que sobreviven de la clase 1 a la clase j-1, con respecto al total de individuos creados por individuo durante j-1 unidades de tiempo (este número es λ_0^{j-1}); esto para $j = 2, 3, 4, \ldots, n$.

Puesto que

$$\lim_{k \to \infty} \frac{1}{\lambda_0^k} L^k = P$$

$$P = VU^t = \begin{bmatrix} U^t \\ (b_1/\lambda_0) U^t \\ (b_2 b_1/\lambda_0^2)\, U^t \\ \vdots \\ (b_{n-1} \ldots b_1/\lambda_0^{n-1})\, U^t \end{bmatrix}$$

es claro que

$$\lim_{k \to \infty} (1/\lambda_0^k)(L^k)_{1j} = U_j$$

donde $(L^k)_{1j}$ es el elemento j-ésimo del primer renglon de L^k.

Además como

$$X_1^{(k)} = \sum_{j=1}^{n} (L^k)_{1j} X_j^{(0)} \quad \text{y} \quad \lim_{k \to \infty} X_1^{(k)}/\lambda_0^k = \alpha V_1$$

se tiene que

$$(L^k)_{1j} \approx \lambda_0^k U_j \qquad \text{y} \qquad X_1^{(k)} \approx \lambda_0^k \sum_{j=1}^{n} U_j X_j^{(0)}$$

por lo que U_j se puede interpretar como la contribución al primer grupo de edad que hace un individuo de la j-ésima clase de edad en un tiempo k específico. Esto motiva llamar a U_j el VALOR REPRODUCTIVO EVENTUAL para el primer intervalo de edad de un individuo de la j-ésima clase de edad.

El concepto de valor reproductivo es introducido como parámetro poblacional y es definido como el valor que tienen en términos de su descendencia futura los individuos de determinada edad, y puede medirse como el número promedio de hijos que todavía le quedan por procrear a un individuo de cada clase de edad.

El valor reproductivo es máximo en la edad en que comienza la reproducción; puesto que todavía está intacto el potencial reproductivo. Los valores reproductivos de los individuos jovenes en edad pre-reproductiva son menores que este valor máximo, debido a la posibilidad de morir antes de llegar a la edad reproductiva; por lo que sólo una proporción de estos se reproducirá y cada uno tiene un valor promedio menor. Como es de esperarse el valor reproductivo de los individuos en edades post-reproductivas es cero.

Al vector $U^t = (U1, U2, \ldots, Un)$ de (1.2.3) se le conoce como el VECTOR DE VALORES REPRODUCTIVOS; y estamos en condiciones de interpretar cada una de sus entradas.

El valor reproductivo de la primera clase de edad es tomado como la unidad, es decir $U_1 = 1$, y los demás valores se tomarán en función de éste.

El valor reproductivo de la segunda clase de edad

$$v_2 = a_2/\lambda_0 + a_3b_2/\lambda_0^2 + \dots + a_nb_{n-1}\dots b_2/\lambda_0^{n-1}$$

es la suma de la proporción de hijos que tiene un individuo en esa clase de edad con respecto a la contribución total en una unidad de tiempo (este sumando es a_2/λ_0), más la proporción de hijos que tendrá cuando haya pasado a la siguiente clase de edad con respecto a lo dejado totalmente por la población al haber pasado dos unidades de tiempo (este es a_3b_2/λ_0^2), más la proporción de hijos que tenga cuando hayan pasado las tres unidades de tiempo que se requieren para pasar a la clase 3 con respecto a la contribución total de toda la población al haber pasado tres unidades de tiempo (esta sera $a_4b_3b_2/\lambda_0^3$), etc.

Así sucesivamente se pueden interpretar cada v_j, hasta llegar a $v_n = a_n/\lambda_0$, que dá la contribución proporcional de un individuo de la clase n a los nuevos individuos (o clase 1) con respecto a la totalidad de incremento de la población durante esa unidad de tiempo.

Para finalizar esta seccion, hablaremos un poco de λ_0.

La ecuación (1.2.3) $X^{(K)} \approx \lambda_0^{k} \alpha V$, nos dice que:

(I) La población crecerá si $\lambda_0 > 1$.

(II) La población decrecerá si $\lambda_0 < 1$.

(III) La población quedará estable si $\lambda_0 = 1$.

Recordemos que $\lambda_0 = 1$ es valor propio de L si y sólo si $q(\lambda_0 = 1) = 1$, es decir si y sólo si

$a_1 + a_2 b_1 + \ldots + a_n b_{n-1} \ldots b_1 = 1$.

Al número

$R = a_1 + a_2 b_1 + a_3 b_2 b_1 + \ldots + a_n b_{n-1} \ldots b_1$, se le conoce como la tasa neta de reproducción de la población (y demográficamente se interpreta como el promedio de hijos que un individuo tiene durante su esperanza de vida).

Tambien se puede observar que $\lambda_0 > 1$ si y sólo si $R > 1$ y que $\lambda_0 < 1$ si y sólo si $R < 1$.

2.- MODELO DE EXPLOTACION RACIONAL DURADERO.

El modelo de crecimiento de Leslie para el crecimiento de una población dividida en clases de edad, se aplicará para la elaboración de un modelo de explotación racional y duradera correspondiente a una población animal creciente. Así mismo se analizará el efecto que tiene la explotación de diferentes fracciones en las distintas clases de edad.

DEFINICION.

Una política de explotación racional (separación de algunos individuos de la población para su venta, sacrificio o algun otro fin) es duradera, si el rendimiento períodico que se obtiene de una población animal creciente, es el mismo al termino de cada periodo y la distribución de las edades de la población se conserva al separar dicho rendimiento.

Debido al crecimiento de la población, esta no se agotará ya que sólo se separará el excedente.

2.1.- DESCRIPCION DEL MODELO.

Se supone que se tiene una población animal creciente con una determinada distribución de edades incial y un período de crecimiento descrito por una matriz de Leslie. Al final de este período, debido al crecimiento se obtiene como rendimiento una cierta fracción de cada una de las distintas clases de edad, la cual es separada, de tal manera que la población tenga la misma distribución de edades que la original.

La duración del período de separación de los animales que conforman el rendimiento, debe ser breve con respecto al de crecimiento (durante el período de separación, el crecimiento o los cambios de la población son despreciables).

Repitiendo este procedimiento después de cada separación, se obtiene un rendimiento duradero.

Sea

$$X = \begin{bmatrix} X1 \\ X2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Xn \end{bmatrix}$$

el vector de la distribución de las edades de la población al inicio del período de crecimiento, donde X_i (i = 1,2 3,...,n) es el número de individuos que se encuentran en la clase de orden i , es decir, que no se separan como rendimiento.

Al igual que en el modelo de crecimiento de Leslie, el período de crecimiento tendrá la misma duración en cada una de las distintas clases de edad.

Si el crecimiento de la población es descrito por la matriz L de Leslie, entonces el vector de la distribución de las edades al final del período de crecimiento inmediatamente antes de hacer la separación, está dado por LX.

Ahora sea $0 \leq h_i \leq 1$ (i = 1,2,3,...,n), la fracción de individuos que se van a separar de la i-ésima clase de edad. Formemos con estos n números la matriz diagonal

$$H = \begin{bmatrix} h_1 & & & & \\ & h_2 & & O & \\ & & \cdot & & \\ & O & & \cdot & \\ & & & & h_n \end{bmatrix}$$

la cual es llamada MATRIZ DE SEPARACION RACIONAL, donde $h_i = 0$, $h_i = 1$ ó $0 < h_i < 1$, significan que no se separa ningun individuo, se separan todos ó se separa una cierta fracción de la i-esima clase de edad.

Como (LX) es el número de individuos que se encuentran en la población en la clase de orden i inmediatamente antes de la separación, $h_i(LX)_i$ que es la entrada de orden i del vector

$$HLX = \begin{bmatrix} h_1(LX)_1 \\ h_2(LX)_2 \\ \vdots \\ h_n(LX)_n \end{bmatrix}$$

será el número de individuos que se separan de la clase de orden i.

De acuerdo a la definición de política de explotación racional duradera tenemos que

$$LX - HLX = X \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (2.1.1)$$

que es equivalente a

$$(I - H)LX = X \qquad (2.1.2)$$

Como se puede observar X debe ser el vector propio de la matriz (I-H)LX correspondiente al valor propio dado por la unidad. Así mismo la matriz (I-H)L tiene la misma forma que la de una matriz de Leslie

$$\begin{bmatrix} (1-h_1)a_1 & (1-h_1)a_2 & (1-h_1)a_3 & \cdots & (1-h_1)a_{n-1} & (1-h_1)a_n \\ (1-h_2)b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & (1-h_3)b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & & (1-h_n)b_{n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

En el capítulo anterior se vio que una matriz de Leslie tiene como valor propio a la unidad si y sólo si, su tasa neta de reproducción es igual a uno.

Calculando la tasa neta de reproducción de la matriz (I-H)L, e igualándola a la unidad tenemos que

$$(1-h_1)\,[a_1 + a_2 b_1(1-h_2) + a_3 b_2 b_1(1-h_2)(1-h_3) + \cdots +$$
$$+ a_n b_{n-1} b_{n-2} \ldots b_1(1-h_2)(1-h_3)\ldots(1-h_n)] = 1 \qquad (2.1.3)$$

Por lo que un rendimiento duradero se obtiene sólo para aquellos valores $h_1, h_2, \ldots, h_n$, $(0 \leq h_i \leq 1)$ que satisfagan la ecuación (2.1.3).

Si se cumple la restricción anterior, la matriz $(I-H)L$ tiene como valor propio a $\lambda_0 = 1$ con multiplicidad uno (El valor propio de una matriz de Leslie tiene multiplicidad uno).

Un vector propio correspondiente a λ_0, es decir una solución vectorial distinta de cero de $(I-H)LX = X$, es

$$
X_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ (1-h_2)b_1 \\ (1-h_2)(1-h_3)b_1b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ (1-h_2)(1-h_3)\ldots(1-h_n)b_1b_2\ldots b_{n-1} \end{bmatrix} \qquad (2.1.4)
$$

el cual determina la fracción de individuos que permanecen en cada una de las distintas clases de edad después de haber hecho la separación, siguiendo una política de explotación racional duradera. Cualquier otra solución X_i de $(I-H)LX = X$, es un múltiplo de X_0. Esto genera una ambiguedad en el número total de individuos que permanecen en la población después de hacer la separación; ésta puede eliminarse por medio de alguna condición auxiliar, que por lo general es de caracter económico o ecológico. Un ejemplo de este tipo de restricciones podría ser; para una población sostenida económicamente, la población máxima que se podría mantener, determinaría la constante por la cual habría que multiplicar Xo para obtener el valor apropiado X de

$$(I-H)LX = X.$$

Como se puede observar existen muchas maneras de seleccionar los valores $0 \leq h_i \leq 1$ con $i = 1,2,3,\ldots,n$ que dan origen a un rendimiento duradero, pero ya una vez seleccionados, el valor Xo detemina en forma única la distribución de la población después de la separación.

2.2.- SEPARACION UNIFORME

Es común suponer que la población está distribuida uniformemente, (En muchas poblaciones es difícil distinguir o capturar animales de una determinada edad.) por lo que es factible suponer que si los animales se capturan al azar, la separación en cada clase de edad sea la misma, esto es:

$$h = h_1 = h_2 = h_3 = \ldots = h_n \qquad (2.2.1)$$

entonces $(I-H)LX = X$ equivale a que

$$(1-h)L\lambda = X$$

$$LX = (1/(1-h))X$$

por lo que $1/(1-h)$ debe ser el valor propio único positivo λ_0 de la matriz de crecimiento L de Leslie.

$$\lambda_0 = 1 / (1-h) \qquad (2.2.2)$$

con lo cual la fracción que se separa en cada una de las distintas clases de edad esta dada por

$$h = 1 - 1/\lambda_0 \qquad (2.2.3)$$

El vector propio X_0 correspondiente al valor propio $\lambda_0 = 1 / (1-h)$, es en este caso igual al de la matriz L, o sea proporcional a

$$X_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ b_1(1-h) \\ b_1 b_2 (1-h)^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_1 b_2 \dots b_{n-1}(1-h)^{n-1} \end{bmatrix} \qquad (2.2.4)$$

OBSERVACION

$\lambda_0 = 1/(1-h) > 1$, puesto que la población es creciente.

Entre mayor sea λ_0, mayor será la fracción de individuos que se pueden separar de la población sin que ésta se agote.

2.3.- SEPARACION DE LA CLASE DE MENOR EDAD.

En determinadas poblaciones los individuos más jovenes son los que tienen mayor valor económico, siendo esta la razón por la que habría que separar los individuos de la primera clase de edad para su venta, es decir, se establece la siguiente condición

$$h_1 = h$$
$$h_2 = h_3 = \dots = h_n = 0 \qquad (2.3.1)$$

con lo cual la expresión (2.1.3) se simplifica a

$$(1-h)\,[\,a_1 + a_2 b_1 + a_3 b_2 b_1 + \dots + a_n b_{n-1} b_{n-2} \dots b_1\,] = 1$$

o lo que es lo mismo $(1-h)R = 1$, donde R es la tasa neta de reproducción.

La fracción de individuos que se separan de la primera clase de edad está dada por:

$$h = 1 - 1/R \qquad (2.3.2)$$

Si $R > 1$, se obtiene una política de explotación racional y duradera, lo cual es congruente por que $R > 1$ significa que la población es creciente.

El vector Xo de la distribución de las edades después de la separación es proporcional al vector

$$Xo = \begin{bmatrix} 1 \\ b_1 \\ b_1 b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_1 b_2 \dots b_{n-1} \end{bmatrix} \qquad (2.3.3)$$

3.- RENDIMIENTO OPTIMO DURADERO

3.1.- DESCRIPCION DEL MODELO

Como se pudo observar en el capítulo anterior, existen muchas políticas de explotación racional duraderas, las cuales dependen de la selección de h_i (i = 1,2,...,n) y que por lo general generan rendimientos diferentes.

La idea principal de esta sección es determinar de todas estas políticas, aquella que proporcione el rendimiento óptimo. Dicha política es llamada POLITICA DE SEPARACION OPTIMA Y DURADERA y su rendimiento, RENDIMIENTO OPTIMO DURADERO.

Tomando una población creciente determinada por una matriz L de crecimiento de Leslie, con vector de distribución de edades en equilibrio dado por X, donde cada entrada X_i (i =1,2,3,...,n) es el número de individuos que se encuentran en la clase de orden i, inmediatamente antes de hacer la separación.

Una unidad de tiempo más tarde, inmediatamente antes de hacer la separación, el vector de la distribución de edades de la población está dada por LX.

Teniendo que la población está en equilibrio si

$$LX - HLX = X$$

donde las componentes del vector HLX son el número de individuos que se separan en cada una de las distintas clases de edad.

Denotando a Y_i con $i = 1,2,3,\ldots,n$ como el ingreso económico obtenido por cada individuo separado de la clase de orden i; y al vector $Y = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)^t$ como el vector rendimiento. El ingreso económico obtenido de toda la separación está dado por: $\Upsilon = \langle Y, HLX \rangle$, donde Υ es llamado rendimiento de la separación. Una política de separación es óptima si Υ es el máximo ingreso económico de la población correspondiente a la separación.

OBSERVACION

Cualquier múltiplo de una solución X de LX-HLX = X, X = (I-H)LX ,es nuevamente una solución, con lo que el rendimiento de la población puede ser arbitrariamente grande si se elige un múltiplo sumamente grande de dicha solución. Por esta razon se introduce una restricción $\langle C,X \rangle = 1$ que normalice tal solución, donde $C = (C1,C2,C3,\ldots,Cn)^t$ es un vector restricción, usualmente éste es de carácter ecológico o económico. Los siguientes son algunos ejemplos de restricciones:

1) Si se decide que el número total de individuos de la población en equilibrio esté dado por N, tomamos $C_i = 1/N$, con $i = 1,2,3,\ldots,n$. Para $N = 1$, el rendimiento Υ puede ser interpretado como el ingreso obtenido por cada individuo separado.

2) Si el promedio de peso de un individuo de la i-ésima clase de edad está dado por W_i, y si se decide tener en equilibrio el peso total de la población dado por W, se toma $C_i = W_i/W$, $i = 1,2,3,\ldots,n$. Con $W = 1$, el rendimiento Υ es interpretado como el ingreso obtenido por unidad de peso de los individuos separados.

3) Si tomamos $C_i = Y_i$, $i = 1,2,3,\ldots,n$. (C,X) nos da el valor económico de la población en equilibrio. El rendimiento Υ sujeto a la restricción $(Y,X) = 1$, es el ingreso económico obtenido por cada peso del posible ingreso inherente en la población en equilibrio de los individuos no separados; por lo que $\Upsilon = (Y,HLX) = (Y,LX) - (Y,X)$ puede ser interpretado como la tasa económica de crecimiento de la población en equilibrio.

4) Si se decide sostener económicamente a la población entre cada separación, tomando C_i igual al costo incurrido en cada período de tiempo para cada individuo de la i-ésima clase de edad. Con $\langle C,X\rangle = 1$, el rendimiento Y puede ser interpretado como el ingreso obtenido por cada peso de costo de crianza para aumentar la población.

5) Si la población es auto - suficiente, cualquier costo de separación puede ser tomado encuenta a través de un vector de restricción C. Si se define a h_i con $(i = 1,2,...,n)$ como el costo de separar a un individuo de la clase i, y a $h = (h1,h2,...,hn)^t$ como un costo de separación. Entonces el costo total de separar está dado por:

$$\langle h, HLX\rangle = \langle h,(L-I)X\rangle = \langle (L^t - I)h, X\rangle$$

con $C = (L^t - I)h$, el costo por separar es $\langle C,X\rangle$.

Si $\langle C,X\rangle = 1$, el rendimiento Y es el ingreso por cada peso del costo de separación.

DEFINICIONES

I) Dada una matriz de crecimiento L de Leslie y un vector de restricción C; una política de separación factible $[\, H \,,\; X \,]$ es una matriz diagonal H de separación y un vector de la distribución de la población en equilibrio dado por $X \geq 0$ (todas sus entradas son mayores o iguales a cero), satisfaciendo :

a) $LX - HLX = X$

b) $\langle C,X \rangle = 1$

II) Una política de separación de dos clases de edad es una política de separación factible $[\, H \,,\; X \,]$ donde las entradas de la matriz diagonal H estan dadas por:

$$h_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq I \neq J \\ \theta & \text{si } i = I \\ 1 & \text{si } i = J \end{cases}$$

$$\text{con } 1 \leq I < J \leq n+1 \quad \text{y} \quad 0 < \theta \leq 1$$

Se puede observar que una política de separación de dos clases de edad, consiste en separar una fracción θ de individuos de la i-ésima clase de edad y todos los individuos de la clase de orden j.

3.2.-PROBLEMA FUNDAMENTAL

Dada una matriz de crecimiento L, un vector de restricciones (económicas o ecológicas) C y un vector de rendimiento Υ, encontrar una política de separación factible la cual maximice el rendimiento Υ : $\langle Y, HLX\rangle$, sobre todas las políticas de separación factibles [H , X].

El resultado significativo de esta sección es, que una política de separación óptima la cual maximiza el rendimiento Υ : $\langle Y, HLX\rangle$, se encuentra entre las políticas de separación de dos clases de edad.

A continuación se demostrará el resultado anterior y se elaborarán condiciones para el vector restricción C para garantizar que el problema está bien definido.

Veamos primero dos casos particulares correspondientes a las políticas de separación de dos clases de edad.

1) Si $\theta = 1$, toda la I-ésima clase de edad es separada, por lo que los individuos no sobreviven a la J-ésima clase de edad. Esta sería una política de separación de una clase de edad, pero es conveniente considerarla como un caso degenerado de una política de separación de dos clases de edad.

2) Si $J = n+1$, es interpretado como la ausencia de separación de una segunda clase de edad, ésta también es una política de separación de una clase de edad, en la cual unicamente la fracción θ de la clase de edad I es separada; éste será considerado también como un caso degenerado de una política de separación de dos clases de edad.

Considerando la condición $LX - HLX = X$, de una política de separación factible

$$LX - HLX = (I-H)LX = X \tag{3.2.1}$$

y tomando $\mu_i = (1-h_i)$, la ecuación anterior puede ser escrita como:

$$\mu_1 \, (a_1 X_1 + a_2 X_2 + \, . \, . \, . \, + a_n X_n) = X_1$$

$$\begin{aligned} \mu_2 b_1 X_1 &= X_2 \\ \mu_3 b_2 X_2 &= X_3 \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ \mu_n b_{n-1} X_{n-1} &= X_n \end{aligned} \qquad (3.2.2)$$

Resolviendo recursivamente las últimas (n-1) ecuaciones, tenemos:

$$\begin{aligned} X_2 &= \mu_2 b_1 X_1 \\ X_3 &= \mu_2 \mu_3 b_1 b_2 X_1 \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ X_n &= \mu_2 \mu_3 \ldots \mu_n b_1 b_2 \ldots b_{n-1} X_1 \end{aligned} \qquad (3.2.3)$$

Sustituyendo estas ecuaciones en la primera de (3.2.2) y dividiendo todo por X_1, nos queda

$$a_1 \mu_1 + a_2 b_1 \mu_1 \mu_2 + \ldots + a_n b_1 b_2 \ldots b_{n-1} \mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n = 1 \qquad (3.2.4)$$

Sustituyendo $X_2, X_3, \ldots, X_n$ en la restricción $\langle C, X \rangle = 1$, y despejando X_1, obtenemos :

$$X_1 = 1/(C_1 + C_2 b_1 \mu_2 + \ldots + C_n b_1 b_2 \ldots b_{n-1} \mu_2 \mu_3 \ldots \mu_n) \qquad (3.2.5)$$

Ahora se verá al rendimiento $\Upsilon = \langle Y, HLX \rangle = \langle Y, LX - X \rangle = \langle Y, (L - I)X \rangle = \langle (L - I)Y, X \rangle$, donde las componentes del vector $(L^t - I)Y$, estan dadas por:

$$d_i = Y_1 a_i + Y_{i+1} b_i - Y_i \; ; \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n \qquad (3.2.6)$$

donde $Y_{n+1} = b_n = 0$; con lo que el rendimiento Υ puede ser escrito como :

$$\Upsilon = d_1 X_1 + d_2 X_2 + \ldots + d_n X_n \qquad (3.2.7)$$

sustituyendo $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ de las ecuaciones (3.2.5) y (3.2.3) respectivamente, obtenemos la siguiente ecuación denotada por (3.2.8).

$$\Upsilon = \frac{d_1 + d_2 b_1 \mu_2 + d_3 b_1 b_2 \mu_2 \mu_3 + \ldots + d_n b_1 b_2 \ldots b_{n-1} \mu_2 \mu_3 \ldots \mu_n}{C_1 + C_2 b_1 \mu_2 + C_3 b_1 b_2 \mu_2 \mu_3 + \ldots + C_n b_1 b_2 \ldots b_{n-1} \mu_2 \mu_3 \ldots \mu_n}$$

Definiendo a

$$\alpha_i = d_i b_1 b_2 \ldots b_{i-1} = (Y_1 a_i + Y_{i+1} b_i - Y_i) b_1 b_2 \ldots b_{i-1}$$

$$\beta_i = C_i b_1 b_2 \ldots b_{i-1}$$

$$i = 1, 2, 3, \ldots, n \qquad (3.2.9)$$

sustituyendo (3.2.9) en (3.2.8) y multiplicando y dividiendo todo por μ_1, tenemos

$$\Upsilon = \frac{\alpha_1\mu_1 + \alpha_2\mu_1\mu_2 + \ldots + \alpha_n\mu_1\mu_2\ldots\mu_n}{\beta_1\mu_1 + \beta_2\mu_1\mu_2 + \ldots + \beta_n\mu_1\mu_2\ldots\mu_n} \qquad (3.2.10)$$

Si tomamos

$$\xi_i = \mu_1\mu_2 \ldots \mu_n \ ; \quad i = 1,2,3,\ldots,n \qquad (3.2.11)$$

$$\begin{aligned} \xi &= (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r)^t \\ \alpha &= (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)^t \\ \beta &= (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)^t \end{aligned} \qquad (3.2.12)$$

El rendimiento Υ puede ser escrito como:

$$\Upsilon = \frac{(\alpha, \xi)}{(\beta, \xi)} \qquad (3.2.13)$$

Para maximizar el rendimiento Υ, hay que determinar los valores de ξ.

A partir de este momento vamos a generar resultados significativos que determinaran que la política de separación óptima se encuentra entre las de dos clases de edad.

Las demostraciones de algunos resultados aparecen en el apéndice por ser tan extenzas. La razón por la de no anotar la demostración en esta sección, es para no perder la idea principal del resultado.

De la ecuación (3.2.4), se tiene que los valores de μ_i, $i = 1,2,3,\ldots,n$, están determinados por el siguiente conjunto

$$M = \{(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n) \mid 0 \le \mu_i \le 1 \; ; \; (a_1\mu_1 + a_2 b_1 \mu_1 \mu_2 + \ldots + a_n b_1 \ldots b_{n-1} \mu_1 \ldots \mu_n) = 1 \}$$

Si se toma $y_i = a_i b_1 b_2 \ldots b_{i-1}$ con $i = 1,2,3,\ldots,n$

$$y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^t \qquad (3.2.14)$$

Los valores de ξ quedan determinados por el conjunto

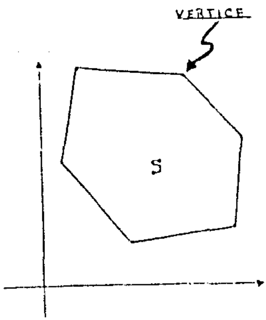
$$S = \{ \xi \mid 0 \le \xi_n \le \xi_{n-1} \le \ldots \le \xi_1 \le 1 \; ; \; \langle y, \xi \rangle = 1 \}$$

PROPOSICION 3.2.1

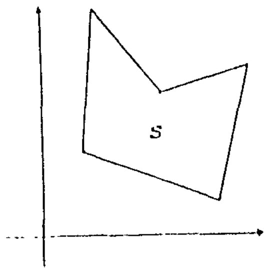
El conjunto S es un poliedro convexo en R^n.

(La demostración se encuentra en el apéndice)

Para el caso $n = 2$



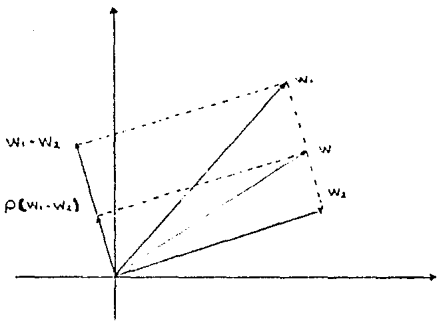
POLIEDRO CONVEXO



POLIEDRO NO CONVEXO

(Un conjunto de vectores en R^n es convexo, si para cualesquiera dos vectores W_1, W_2 del conjunto, el vector $W = \rho W_1 + (1-\rho)W_2$ también pertenece al conjunto, con $0 < \rho < 1$).

Geometricamente $W = \rho W_1 + (1-\rho)W_2$, en R^2, es el vector que se encuentra sobre el segmento de recta que une los extremos de los vectores W_1 y W_2. Por lo que el conjunto convexo es aquel en el que el segmento de recta que une a cualesquiera dos puntos del conjunto, pertenece también al conjunto.



$$W = W_2 + \rho(W_1 - W_2) = \rho W_1 + (1-\rho)W_2$$

Definamos

$$\begin{aligned} E_i &= Y_1 + Y_2 + Y_3 + \ldots + Y_i \\ &= a_1 + a_2 b_1 + a_3 b_1 b_2 + \ldots + a_i b_1 b_2 \ldots b_{i-1} \qquad (3.2.15) \end{aligned}$$

E_i $\begin{cases} \text{es el número esperado de hijos que tiene un indivi-} \\ \text{duo que sobrevive hasta la clase de orden } i. \end{cases}$

Dos particulares clases de edad serán escogidas. El reemplazar la clase de edad r , cuando el número de hijos esperados de un individuo es primero mayor o igual a uno; y la sobrante clase de edad s, cuando el número acumulado esperado de hijos, primero excede a uno. En otras palabras

$$E_{r-1} < 1 \qquad\qquad E_{s-1} \leq 1$$
$$E_{r} \geq 1 \qquad\qquad E_{s} > 1$$

en situaciones más realistas, $r = s$. Esto nos dice que hay una s para la cual se tiene que $E_{s-1} \leq 1$ y $E_s > 1$.

PROPOSICION 3.2.2

S es no vacío si y sólo si $E_n \geq 1$.

El caso $E_n = 1$ no será considerado, ya que si se cumple, el conjunto S tiene unicamente un punto correspondiente a una matriz de separación cero, puesto que $E_n = 1 = a_1 + a_2 b_1 + a_3 b_1 b_2 + \ldots + a_n b_1 b_2 \ldots b_{n-1}$ es la llamada tasa de reproduccion que se vio en la sección anterior.

Recordemos que una poblacion es de crecimiento nulo si y sólo si su tasa neta de reproduccion es igual a la unidad, por lo que sólo consideraremos el caso importante que es cuando el número esperado de hijos nacidos de un individuo durante su período de vida, es mayor a la unidad.

Demostración

$\Rightarrow)$ Sea S no vacio

entonces existe $\xi \in S$ tal que

$$0 \leq \xi_n \leq \xi_{n-1} \leq \ldots \leq \xi_1 \leq 1 \quad y \quad (\gamma, \xi) = 1$$

$$\Rightarrow \quad 1 = (\gamma, \xi) = \gamma_1 \xi_1 + \gamma_2 \xi_2 + \ldots + \gamma_n \xi_n \leq \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_n = E_n$$

por lo tanto $E_n \geq 1$

$\Leftarrow)$ Sea $E_n \geq 1$

$\Rightarrow \quad 1 \geq 1/E_n \geq 0$

$\Rightarrow \quad \xi = (1/E_n, 1/E_n, \ldots, 1/E_n) \in S$, ya que

$$0 \leq 1/E_n = \xi_n \leq 1/E_n = \xi_{n-1} \leq \ldots \leq 1/E_n = \xi_1 \leq 1$$

y como

$$(\gamma, \varepsilon) = \frac{\gamma_1}{E_n} + \frac{\gamma_2}{E_n} + \dots + \frac{\gamma_n}{E_n} = \frac{E_n}{E_n} = 1$$

por lo que S es no vacio, ya que por lo menos tiene al vector ε .

Analicemos ahora qué condiciones se deben cumplir para que (β, ε) este bien definido.

(β, ε) debe ser mayor que cero, puesto que

$$\Upsilon = (\alpha, \varepsilon) \;/\; (\beta, \varepsilon).$$

Sea

$$\begin{aligned} B_i &= \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \dots + \beta_i \\ &= C_1 + C_2 b_1 + C_3 b_1 b_2 + \dots + C_i b_1 b_2 \dots b_{i-1} \qquad (3.2.16) \\ & \qquad i = 1, 2, 3, \dots, n \end{aligned}$$

Veamos una posible interpretacion de B_i.

Si C_i es definido como el costo de mantener un individuo durante la i-ésima clase de edad, entonces B_i puede ser interpretado como el costo esperado por criar a un individuo desde que nació hasta cuando estuvo en la clase de orden i.

PROPOSICION 3.2.3

$$\text{Si } \xi_n > 1 \text{ y } \begin{cases} B_i \geq 0 & i = 1,2,\ldots,r-1 \\ B_i > 0 & i = r,r+1,\ldots,n \end{cases}$$

entonces $\langle \beta,\xi \rangle > 0$.

Demostración

tenemos que para cualquir $\xi \in S$

$$\begin{aligned}
\langle \beta,\xi \rangle &= \beta_1\xi_1 + \beta_2\xi_2 + \ldots + \beta_{n-1}\xi_{n-1} + \beta_n\xi_n \\
&= B_1\xi_1 + (B_2-B_1)\xi_2 + \ldots + (B_{n-1} - B_{n-2})\xi_{n-1} + (B_n-B_{n-1})\xi_n \\
&= B_1(\xi_1-\xi_2) + B_2(\xi_2-\xi_3) + \ldots + B_{n-1}(\xi_{n-1} - \xi_n) + B_n\xi_n \\
&\geq B_r(\xi_r - \xi_{r+1}) + B_{r+1}(\xi_{r+1} - \xi_{r+2}) + \ldots + B_{n-1}(\xi_{n-1} - \xi_n) + B_n\xi_n
\end{aligned}$$

Ahora como $B_i > 0$ para $i = r, r+1, \ldots, n$. Entonces alguno de los siguientes factores

$$(\xi_r - \xi_{r+1}),\ (\xi_{r+1} - \xi_{r+2}),\ \ldots,\ (\xi_{n-1} - \xi_n),\ \xi_n$$

debe ser mayor que cero.

Supongamos que son iguales a cero, entonces

$$\xi_r = \xi_{r+1} = \xi_{r+2} = \ldots = \xi_{n-1} = \xi_n = 0$$

entonces

$$\langle y,\xi\rangle = y_1\xi_1 + y_2\xi_2 + \ldots + y_{r-1}\xi_{r-1} \le y_1 + y_2 + \ldots + y_{r-1} = \xi_{r-1} < 1$$

lo cual contradice el hecho de que $\langle y,\xi\rangle = 1$.

Entonces algun $(\xi_i - \xi_{i+1})$ para $i = r, r+1, \ldots, n-1$ o ξ_n es mayor que cero. Y como $\beta_i > 0$ para $i = r, r+1, \ldots, n$, entonces $\langle\beta,\xi\rangle > 0$.

Despuès de haber analizado cuando $\langle\beta,\xi\rangle > 0$, y visto que S es no vacio, podemos enunciar el siguiente.

TEOREMA 3.2.4

Si S es no vacio y $\langle\beta,\xi\rangle > 0$ para todo $\xi \in S$, entonces $\langle\alpha,\xi\rangle/\langle\beta,\xi\rangle$ alcanza su valor máximo en un vértice de S.

(ξ es un vértice de S si no se puede representar como combinación convexa de cualesquiera dos puntos $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}$ de S)

Demostración

Tenemos que $\Upsilon(\xi) = (\alpha,\xi) / (\beta,\xi)$ es contínua en el poliedro convexo S, entonces $\Upsilon(\xi)$ alcanza su valor máximo $\underline{m}$ en un punto $n \in S$.

Definamos la función lineal

$L(\xi) = (\alpha,\xi) - m (\beta,\xi)$.

Es lineal por que

$$L(\lambda\xi) = (\alpha,\lambda\xi) - m (\beta,\lambda\xi) = \lambda (\alpha,\xi) - m\lambda (\beta,\xi)$$
$$= \lambda ((\alpha,\xi) - m (\beta,\xi)) = \lambda L(\xi)$$

$$L(\xi_1 + \xi_2) = (\alpha,\xi_1+\xi_2) - m (\beta,\xi_1+\xi_2)$$
$$= (\alpha,\xi_1) + (\alpha,\xi_2) - m (\beta,\xi_1) - m (\beta,\xi_2)$$
$$= (\alpha,\xi_1) - m (\beta,\xi_1) + (\alpha,\xi_2) - m (\beta,\xi_2)$$
$$= L(\xi_1) + L(\xi_2)$$

Donde $L(\xi) \leq 0$ $\forall \xi \in S$, ya que si $L(\xi) > 0$ $\forall \xi \in S$, entonces $(\alpha,\xi) / (\beta,\xi) > m$, lo cual es una contradicción, ya que $\underline{m}$ es el máximo valor que alcanza $\Upsilon(\xi)$ en el punto $n \in S$.

Asi mismo $L(\xi)$ alcanza su valor máximo en un vértice $\zeta \in S$

(Sean $\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \ldots, \bar{\xi}_p$ los puntos vértice de S y $\zeta \in S$ el punto en el cual $L(\xi)$ alcanza su valor máximo representado por v, es decir $L(\zeta) \geq L(\xi)$ para toda $\xi \in S$.

1) si ζ es vértice, entonces ya acabamos.

2) si ζ no es vertice, entonces ζ se puede representar como combinación lineal de los puntos vértice $\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \ldots, \bar{\xi}_p$, esto es

$\zeta = \sum \alpha_i \bar{\xi}_i$ con $\alpha_i \geq 0$ y $\sum \alpha_i = 1$, y como $L(\xi)$ es lineal, entonces:

$L(\zeta) = L(\sum \alpha_i \bar{\xi}_i) = \alpha_1 L(\bar{\xi}_1) + \alpha_2 L(\bar{\xi}_2) + \ldots + \alpha_p L(\bar{\xi}_p) = v$
donde v es el valor máximo de $L(\xi)$ para toda $\xi \in S$.

Sea $L(\xi_m)$ con $1 \leq m \leq p$ el valor máximo de $L(\bar{\xi}_i)$; $i = 1, 2, \ldots, p$, entonces

$L(\zeta) \leq \alpha_1 L(\xi_m) + \alpha L(\xi_m) + \ldots + c_p L(\xi_m) = L(\xi_m)$

pero teníamos que $L(\zeta) \geq L(\xi)$ para toda $\xi \in S$, entonces $L(\zeta) = L(\xi_m) = v$, y por lo tanto $L(\xi)$ alcanza su valor maximo en un vértice $\zeta \in S$.)

Como $L(\xi) \leq 0$ para toda $\xi \in S$, entonces $L(\zeta) \leq 0$ y $L(n) = \langle\alpha, n\rangle - m\,\langle\beta, n\rangle = \langle\alpha, n\rangle - \Upsilon(n)\,\langle\beta, n\rangle$

$$= \langle\alpha, n\rangle - (\langle\alpha, n\rangle / \langle\beta, n\rangle)\,\langle\beta, n\rangle = 0.$$

por lo tanto $L(n) = L(\zeta)$ y $\Upsilon(\zeta) = m$,por ser contínua; con lo cual Υ alcanza su valor máximo en un vértice de S.

El siguiente resultado identifica los vertices de S .

PROPOSICION 3.2.5

Si $E_n > 1$, los vértices de S son precisamente los puntos de la forma

$$\xi_i = \begin{cases} 1 & i = 1, 2, \ldots, I-1 \\ \rho & i = I, I+1, \ldots, J-1 \\ 0 & i = J, J+1, \ldots, n \end{cases} \qquad (3.2.17)$$

donde $1 \leq I \leq s < J \leq n+1$ y $\rho = \dfrac{1 - E_{I-1}}{E_{J-1} - E_{I-1}}$

(Demostración en el apéndice)

TEOREMA 3.2.

Los vértices de S corresponden a una política de separación de dos clases de edad, con separación en las clases I y J, donde $1 \leq I \leq s < J \leq n+1$ y la primera fracción de separación está dada por :

$$\theta = \frac{E_{J-1} - 1}{E_{J-1} - E_{I-1}} \qquad (3.2.18)$$

Demostración

Tenemos que un punto de S es vértice si

$$\xi_i = \begin{cases} 1 & i = 1,2,\ldots,I-1 \\ \rho & i = I,I+1,\ldots,J-1 \\ 0 & i = J,J+1,\ldots,n \end{cases}$$

donde $1 \leq I \leq s < J \leq n+1$ y $\rho = \dfrac{1 - E_{I-1}}{E_{J-1} - E_{I-1}} = 1-\theta$

con $\xi_i = \mu_1\mu_2 \ldots \mu_i$ y $\mu_i = 1 - h_i$.

Por lo que $\xi_i = 1 = (1-h_1)(1-h_2)\ldots(1-h_{I-1})$ se cumple para $h_1 = h_2 = \ldots = h_{I-1} = 0$.

$\varepsilon_i = \rho = 1-\theta = (1-h_I)(1-h_{I+1}) \ldots (1-h_{J-1})$ se cumple

para $h_I = \theta$ y $h_{I+1} = h_{I+2} = \ldots = h_{J-1} = 0$.

y $\varepsilon_i = 0 = (1-h_J)(1-h_{J+1}) \ldots (1-h_n)$ se cumple

para $h_J = 1$ y $h_{J+1} = h_{J+2} = \ldots = h_n = 0$.

Con lo cual tenemos que :

$$h_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq I \neq J \\ \theta & \text{si } i = I \\ 1 & \text{si } i = J \end{cases} \qquad (3.2.19)$$

con $1 \leq I < J \leq n+1$ y $0 < \theta \leq 1$,

la cual corresponde a una política de separación de dos clases de edad, en la cual se separa la fracción $\theta = (E_{J-1} - 1) / (E_{J-1} - E_{I-1})$ de la clase de orden I y todos los individuos de la clase J.

Englobando todo lo anterior, tenemos el siguiente

TEOREMA 3.3.7

Si $E_n > 1$ y $\langle\beta,\xi\rangle > 0 \;\; \forall \xi \in S$, el problema esta bien definido y una política de separación óptima , es una política de separación de dos clases de edad, con

separación de las clases de edad de orden i y j, con
$(1 \leq i \leq j \leq n+1)$ donde la primera fracción de separación está dada por :

$$\theta = \frac{E_{j+1} - 1}{E_{j+1} - E_{i+1}}$$

El teorema anterior nos dice que una política de recolección óptima y duradera es una política de separación de dos clases de edad, en donde se separa la fraccion θ de la clase de edad mas joven y todos los individuos de la clase de mayor edad que se eligio.

Ahora sólo nos falta por determinar el rendimiento Y , el número de individuos que se van a separar de las clases i y j y cual es el vector de la distribucion de la población en equilibrio.

PROPOSICION 3.2.6

Si se especifica una restricción $\langle C, X\rangle = 1$, el rendimiento Y está dado por

$$\frac{(E_{J-1} - 1)Y_I b_1 b_2 \ldots b_{I-1} + (1 - E_{I-1})Y_J b_1 b_2 \ldots b_{J-1}}{(E_{J-1} - 1)B_{I-1} + (1 - E_{I-1})B_{J-1}} \quad (3.2.20)$$

(Demostración en el apéndice)

PROPOSICION 3.2.9

El véctor X de la distribución de la población en equilibrio esta dado por

$$X = 1/[\theta(B_{I-1}) + (1-\theta)B_{J-1}] \begin{bmatrix} 1 \\ b_1 \\ b_1 b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_1 b_2 \ldots b_{I-2} \\ b_1 b_2 \ldots b_{I-1}(1-\theta) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_1 b_2 \ldots b_{J-2}(1-\theta) \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.2.21)$$

(Demostración en el apéndice)

PROPOSICION 3.2.10

El número de individuos separados de las clases de edad I y J estan dadas respectivamente por

$$(HLX)_I : \frac{\theta b_1 b_2 \ldots b_{I-1}}{\theta B_{I-1} + (1-\theta) B_{J-1}}$$

$$(HLX)_J : \frac{(1-\theta) b_1 b_2 \ldots b_{J-1}}{\theta B_{I-1} + (1-\theta) B_{J-1}}$$

(Demostración en el apéndice)

4.- APLICACION

4.1.- ALGORITMO

Después de haber analizado y concluido que el rendimiento óptimo y duradero de una población animal creciente, se encuentra en una política de separación de dos clases de edad. El procedimiento para determinar el rendimiento óptimo duradero es el siguiente:

1) proporcionar los datos n, a_i, b_i, C_i y Y_i, donde

n Es el número de clases de edad en que esta dividida la población.

a_i Es el número promedio de individuos que tiene un individuo durante el tiempo que permanece en la clase de orden i.

b_i Es la probabilidad de que un individuo de la clase de orden i sobreviva y pase a la clase de de orden $i+1$.

C_i Es la restricción económica o ecológica correspondiente a la clase de orden i.

Y_i Es el rendimiento económico por cada individuo que pertenece a la i-ésima clase de edad.

2) Determinar si la población es creciente, es decir, checar si $E_n > 1$, donde E_i es el número esperado de individuos nacidos de uno que sobrevive hasta la i-ésima clase de edad. Si $E_n < 1$, LA POBLACION NO ES CRECIENTE, POR LO CUAL NO SE PUEDEN SEPARAR INDIVIDUOS. Si la población es creciente, determinar la clase de orden s para la cual $E_{s-1} \leq 1$ y $E_s > 1$.

3) Comparar los rendimientos económicos $Y_{(i,j)}$ (rendimiento económico que se obtiene al separar una cierta fracción de individuos de la clase de orden i y todos los miembros de la j-ésima clase de edad) donde $1 \leq i \leq s$ y $s < j < n+1$; para determinar cual es el máximo de éstos.

4) determinar el porcentaje de individuos que se separan de la clase de orden I, así como el número al cual corresponde dicho porcentaje.

5) Determinar el número de individuos que se separan de la clase de orden J.

6) Finalmente determinar el vector de la distribución de la población en equilibrio.

A continuación aparece el programa que realiza los pasos anteriores.

```
C
C    4.2.- PROGRAMA QUE DETERMINA EL RENDIMIENTO MAXIMO DE
C          DE UNA POBLACION  CON ESTRUCTURA DE EDADES.
C       ******************************************************
C
C                        VARIABLES
C
      INTEGER*4 I,N,K,S,P,AA1,AA2
      DOUBLE PRECISION A(100),B(101),C(100),Y(100),E(101),B1(101)
      DOUBLE PRECISION B2(100),Y2(20,21),Y3(20,21),HLX1(50),HLX2(50)
      DOUBLE PRECISION X(100),HLX3(50),HLX4(50),HLX5(50),W
      DOUBLE PRECISION AA,H(50),HLX(50),Y1(20,21),FACTOR,FACTOR1
C
C                    DEFINICIONES
C
C     N     ES EL NUMERO DE CLASES DE EDADES EN QUE ESTA
C           DIVIDIDA LA POBLACION.
C
C     A(I)  ES EL NUMERO DE INDIVIDUOS NACIDOS DE UN
C           INDIVIDUO DURANTE EL TIEMPO QUE PERMANECE
C           EN LA CLASE  DE ORDEN I.
C           A(I) >= 0   ;   I = 1,2, ... ,N
C
C     B(I)  ES LA PROBABILIDAD DE QUE UN INDIVIDUO DE LA
C           CLASE DE ORDEN I, SOBREVIVA Y PASE A LA CLASE
C           DE ORDEN (I+1).
C           0 < B(I) <= 1   ;   I = 1,2, ... ,N-1
            B(0)=1
            B2(0)=B(0)
            B(N)=0
C
C     C(I)  ES LA RESTRICCION (ECONOMICA O ECOLOGICA) --
C           CORRESPONDIENTE A LA CLASE DE ORDEN I.
C           C(I) >= 0   ;   I = 1,2, ... ,N
C
C     Y(I)  ES EL RENDIMIENTO ECONOMICO POR CADA INDIVI-
C           DUO QUE PERTENECE A LA CLASE DE ORDEN I.
C           Y(I) >= 0   ;   I = 1,2, ... ,N
            Y(N+1)=0
C
C     B1(I)  = C(1)+C(2)B(1)+C(3)B(2)B(1)+...+C(I)B(I-1)...B(1).
      B1(0)=0
C
C     E(I) ES EL NUMERO ESPERADO DE INDIVIDUOS NACIDOS DE
C          UNO QUE SOBREVIVE HASTA LA I-ESIMA CLASE DE EDAD.
C
C     E(I)  = A(1)+A(2)B(1)+A(3)B(2)B(1)+...+A(N)B(N-1)...B(1).
      E(0)=0
      E(1)=A(1)
C
```

```
C
C     Y1(I,J) ES EL RENDIMENTO ECONOMICO OBTENIDO AL SEPARAR
C             UNA CIERTA FRACCION DE INDIVIDUOS DE LA CLASE
C             DE ORDEN I Y TODOS LOS DE LA J-ESIMA CLASE.
C
C           E(J-1)Y(I)B(I-1)...B(1)+[1-E(I-1)]Y(J)B(J-1)...B(1)
C     Y(I,J)=-----------------------------------------------------
C                 [E(J-1)-1]B1(I-1)  +  [1-E(I-1)]B1(J-1)
C
C           PARA  1 <= I <= S < J <= N+1.
C
C     H(I) ES EL PORCENTAJE DE INDIVIDUOS QUE SE SEPARAN
C          DE LA CLASE DE ORDEN I.
C
C     H(I) = [E(J-1)-1] / [E(J-1) - E(I-1)].
C
C     HLX(I) ES EL NUMERO DE INDIVIDUOS QUE SE SEPARAN
C            DE LA CLASE DE ORDEN I.
C
C              H(I)B(I-1)B(I-2)...B(1)
C     HLX(I) = ----------------------------
C              H(I)B1(I-1) + [1-H(I)]B1(J-1)
C
      DISPLAY"DEFINICIONES "
      DISPLAY" "
      DISPLAY"A(I) ES EL NUMERO PROMEDIO DE HIJOS QUE TIENE UN"
      DISPLAY"     INDIVIDUO DURANTE EL TIEMPO QUE PERMANECE EN "
      DISPLAY"     LA CLASE  DE ORDEN I. A(I) MAYOR O IGUAL A CERO"
      DISPLAY" "
      DISPLAY"B(I) ES LA PROBABILIDAD DE QUE UN INDIVIDUO DE LA"
      DISPLAY"     CLASE DE ORDEN I. SOBREVIVA Y PASE A LA CLASE"
      DISPLAY"     DE ORDEN (I+1). 0 <= B(I) <= 1 ; I = 1,2, ... ,N-1"
      DISPLAY" "
      DISPLAY"C(I) ES LA RESTRICCION (ECONOMICA O ECOLOGICA) --"
      DISPLAY"     CORRESPONDIENTE A LA CLASE DE ORDEN I."
      DISPLAY"     C(I) MAYOR O IGUAL A CERO."
      DISPLAY" "
      DISPLAY"Y(I) ES EL RENDIMIENTO ECONOMICO POR CADA INDIVI-"
      DISPLAY"     DUO QUE PERTENECE A LA CLASE DE ORDEN I."
      DISPLAY"     Y(I) MAYOR O IGUAL A CERO."
      DISPLAY" "
C
C                         D A T O S
C
      DISPLAY "PROPORCIONAR EL NUMERO DE CLASES DE EDADES EN QUE "
      DISPLAY "ESTA DIVIDIDA LA POBLACION  Y PRESIONAR  (RETURN)"
      ACCEPT N
```

```
      WRITE (30,100)N
100   FORMAT(7X,"POBLACION DIVIDIDA EN ",I3, " CLASES DE EDADES",//)
      WRITE (30,101)
101   FORMAT(7X,"A(I) ES EL NUMERO PROMEDIO DE HIJOS QUE TIENE UN"
     +,/,12X,"INDIVIDUO DURANTE EL TIEMPO QUE PERMANECE EN "
     +,/,12X,"LA CLASE  DE ORDEN I.",/)
      WRITE (30,102)
102   FORMAT(7X,"B(I) ES LA PROBABILIDAD DE QUE UN INDIVIDUO DE LA "
     +,/,12X,"CLASE DE ORDEN I SOBREVIVA Y PASE A LA CLASE "
     +,/,12X,"DE ORDEN (I+1).",/)
      WRITE (30,103)
103   FORMAT(7X,"C(I) ES LA RESTRICCION (ECONOMICA O ECOLOGICA)--"
     +,/,12X,"CORRESPONDIENTE A LA CLASE DE ORDEN I.",/)
      WRITE (30,104)
104   FORMAT(7X,"Y(I) ES EL RENDIMIENTO ECONOMICO POR CADA INDIVI-"
     +,/,12X,"DUO QUE PERTENECE A LA DE LA CLASE DE ORDEN I.",//)
      WRITE (30,110)
110   FORMAT(7X,"LOS CUALES ESTAN DADOS RESPECTIVAMENTE POR:",/
     +,/,10X,"A(I)",9X,"B(I)",9X,"C(I)",9X,"Y(I)")
      DISPLAY" "
      DISPLAY"PROPORCIONAR A(I),B(I),C(I) Y Y(I), RESPECTIVAMENTE"
      DISPLAY"SEPARADOS POR COMAS Y PRESIONAR  (RETURN)."
      DISPLAY" "
      DO 1 I=1,N
      DISPLAY "PARA  I=",I
      ACCEPT A(I),B(I),C(I),Y(I)
      E(1)= A(1)
      B(0)=1
      B2(0)=B(0)
      B1(1)= C(1)
      WRITE (30,200)A(I),B(I),C(I),Y(I),I
200   FORMAT(/,F12.3,2X,F12.3,2X,F12.3,2X,F12.3,3X,";  PARA I=",I3,)
      IF (A(I).LT.0)GOTO 60
      IF (B(I).LT.0.OR.B(I).GT.1)GOTO 60
      IF (C(I).LT.0)GOTO 60
      IF (Y(I).LT.0)GOTO 60
1     CONTINUE
      IF(B(N).NE.0) GOTO 60
      WRITE(30,300)
300   FORMAT(7X,"E(I) ES EL NUMERO ESPERADO DE INDIVIDUOS NACIDOS DE"
     +,/,12X,"UNO QUE SOBREVIVE HASTA LA I-ESIMA CLASE DE EDAD",/)
      WRITE (30,500)E(1)
500   FORMAT (7X,"E(  1)=",F12.3,/)
      IF (E(1).GT.1) S=1
      DO 2 K=2,N
      FACTOR=1
      DO 3 I=1,J
      FACTOR = FACTOR*B(I-1)
3     CONTINUE
```

```
      B1(K) = C(K) * FACTOR + B1(K-1)
      B2(K-1) = FACTOR
      E(K) = A(K) * FACTOR + E(K-1)
      IF (E(K).GE.1.AND.E(K-1).LT.1) S=K
      WRITE (30,600)K,E(K)
600   FORMAT(7X,"E(",I3,")=",F12.3,/)
2     CONTINUE
      IF (E(N).LE.1) GOTO 50
      P = S*(N-S+1)
      WRITE (30,700)S,P
700   FORMAT(/,7X,"CLASE DE EDADES PARA LA CUAL E(I) ES POR PRIMERA"
     +,/,7X,"VEZ MAYOR QUE LA UNIDA :",I3,/,/
     +,/,7X,"NUMERO DE COMPARACIONES QUE SE HACEN PARA"
     +,/,7X,"DETERMINAR EL RENDIMIENTO MAXIMO :",I3,/,/)
      AA=0
      WRITE (30,890)
890   FORMAT(7X,"Y1(I,J) ES EL RENDIMENTO ECONOMICO OBTENIDO"
     +,/,15X,"AL SEPARAR UNA CIERTA FRACCION DE INDIVIDUOS"
     +,/,15X,"DE LA CLASE I Y TODOS LOS DE LA J-ESIMA CLASE",/)
      DO 6 I=1,S
      DO 7 J=S+1,N+1
      Y2(I,J)=((E(J-1)-1)*Y(I)*B2(I-1)+(1-E(I-1))*Y(J)*B2(J-1))
      Y3(I,J)=((E(J-1)-1)*B1(I-1)+(1-E(I-1))*B1(J-1))
      Y1(I,J)=Y2(I,J)/Y3(I,J)
      WRITE (30,900)I,J,Y1(I,J)
900   FORMAT(7X,"Y1(",I3,",",I3,")=",F12.3,)
      IF (AA.GE.Y1(I,J)) GOTO 17
      AA=Y1(I,J)
      AA1=I
      AA2=J
17    CONTINUE
7     CONTINUE
6     CONTINUE
      WRITE(30,901)AA1,AA2,AA
901   FORMAT (7X,"RENDIMIENTO MAXIMO : Y1(",I3,",",I3,")="
     +,F12.3,/)
      H(AA1)=(E(AA2-1)-1)/(E(AA2-1)-E(AA1-1))
      HLX3(AA1)=(H(AA1)*B2(AA1-1))
      HLX4(AA1)=(H(AA1)*B1(AA1-1)+(1-H(AA1))*B1(AA2-1))
      HLX(AA1)=HLX3(AA1)/HLX4(AA1)
      Z=H(AA1)*100
      WRITE(30,902)AA1,Z
902   FORMAT(7X,"PORCENTAJE QUE SE SEPARA DE LA CLASE",I3,":"
     +,F12.2,2X,"POR CIENTO",/)
      WRITE(30,903)AA1,HLX(AA1)
903   FORMAT(7X,"INDIVIDUOS QUE SE SEPARAN DE LA CLASE",I3,":",F12.3,/

      H(AA1)=(E(AA2-1)-1)/(E(AA2-1)-E(AA1-1))
      HLX1(AA2)=(1-H(AA1))*B2(AA2-1)
      HLX5(AA2)=HLX1(AA2)/HLX4(AA1)
      WRITE(30,904)AA2,HLX5(AA2)
904   FORMAT(7X,"INDIVIDUOS QUE SE SEPARAN DE LA CLASE",I3,":",F12.3,/
```

```
      WRITE(30,905)
905   FORMAT(7X,"VECTOR DE LA POBLACION EN EQUILIBRIO",/)
      W=(H(AA1)*B1(AA1-1)+(1-H(AA1))*B1(AA2-1))
      IF (AA1.EQ.1) GOTO 20
      DO 8  I=1,(AA1-1)
      X(I)=B2(I-1)/W
      WRITE(30,906)I,X(I)
906   FORMAT(12X,"X(",I3,")=",F12.3,/)
8     CONTINUE
20    DO 9 I=AA1,(AA2-1)
      X(I)=((1-H(AA1))*B2(I-1))/W
      WRITE(30,907)I,X(I)
907   FORMAT(12X,"X(",I3,")=",F12.3,/)
9     CONTINUE
      IF (AA2.GT.N) GOTO 40
      DO 10 I=AA2,N
      X(I)=0
      WRITE(30,908)I,X(I)
908   FORMAT(12X,"X(",I3,")=",F12.3,/)
10    CONTINUE
      STOP
50    WRITE(30,1000)
1000  FORMAT(7X,"LA POBLACION NO ES CRECIENTE, POR LO QUE NO"
     +,/,7X,"SE PUEDEN SEPARAR INDIVIDUOS")
      DISPLAY"LA POBLACION NO ES CRECIENTE,POR LO QUE NO"
      DISPLAY"SE PUEDEN SEPARAR INDIVIDUOS."
      STOP
60    DISPLAY"DATOS MAL PROPORCIONADOS; "
      DISPLAY" "
      DISPLAY" A(I) DEBE SER MAYOR O IGUAL QUE CERO."
      DISPLAY" "
      DISPLAY" 0 < B(I) <= 1  PARA  I = 1,2, ... ,N-1."
      DISPLAY" "
      DISPLAY" C(I) DEBE SER MAYOR O IGUAL A CERO."
      DISPLAY" "
      DISPLAY" Y(I) DEBE SER MAYOR O IGUAL A CERO."
      DISPLAY" "
      DISPLAY" B(N) DEBE SER IGUAL A CERO POR DEFINCION."
      WRITE(30,999)
999   FORMAT(/,7X,"DATOS MAL PROPORCIONADOS; "
     +,//," A(I) DEBE SER MAYOR O IGUAL QUE CERO."
     +,//," 0 < B(I) <= 1  PARA  I = 1,2, ... ,N-1."
     +,//," C(I) DEBE SER MAYOR O IGUAL A CERO."
     +,//," Y(I) DEBE SER MAYOR O IGUAL A CERO."
     +,//," B(N) DEBE SER IGUAL A CERO POR DEFINCION.")
40    STOP
      END
```

4.3.- EJEMPLO

(G. Caughley, Parameters for Seasonally Breeding Populations , Ecology Vol. 48, 1967 , pag. 834-839.).

Para una determinada especie de ovejas domésticas de Nueva Zelanda, con período de crecimiento de un año, edad máxima de vida de 12 años y la siguiente matriz de crecimiento.

$$
L = \begin{bmatrix}
.000 & .045 & .391 & .472 & .484 & .546 & .543 & .502 & .468 & .459 & .433 & .421 \\
.845 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & .975 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & .965 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & .950 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & .926 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .895 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .850 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .786 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .691 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .561 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .370 & 0
\end{bmatrix}
$$

y el valor económico de cada individuo es igual a la unidad y se decide mantener en equilibrio a una población de 1000 animales; es decir

Y_i : 1 para i : 1,2, ... ,12

c_i : .001 para i : 1,2, ... ,12

Obtener el rendimiento óptimo duradero.

POBLACION DIVIDIDA EN 12 CLASES DE EDADES

A(I) ES EL NUMERO PROMEDIO DE HIJOS QUE TIENE UN INDIVIDUO DURANTE EL TIEMPO QUE PERMANECE EN LA CLASE DE ORDEN I.

B(I) ES LA PROBABILIDAD DE QUE UN INDIVIDUO DE LA CLASE DE ORDEN I SOBREVIVA Y PASE A LA CLASE DE ORDEN (I+1).

C(I) ES LA RESTRICCION (ECONOMICA O ECOLOGICA)-- CORRESPONDIENTE A LA CLASE DE ORDEN I.

Y(I) ES EL RENDIMIENTO ECONOMICO POR CADA INDIVIDUO QUE PERTENECE A LA DE LA CLASE DE ORDEN I.

LOS CUALES ESTAN DADOS RESPECTIVAMENTE POR:

A(I)	B(I)	C(I)	Y(I)		
.000	.845	.001	1.000	;	PARA I= 1
.045	.975	.001	1.000	;	PARA I= 2
.391	.965	.001	1.000	;	PARA I= 3
.472	.950	.001	1.000	;	PARA I= 4
.484	.926	.001	1.000	;	PARA I= 5
.546	.895	.001	1.000	;	PARA I= 6
.543	.850	.001	1.000	;	PARA I= 7
.502	.786	.001	1.000	;	PARA I= 8
.468	.691	.001	1.000	;	PARA I= 9
.459	.561	.001	1.000	;	PARA I= 10
.433	.370	.001	1.000	;	PARA I= 11
.421	.000	.001	1.000	;	PARA I= 12

```
E(I) ES EL NUMERO ESPERADO DE INDIVIDUOS NACIDOS DE
     UNO QUE SOBREVIVE HASTA LA I-ESIMA CLASE DE EDAD

E(  1)=        .000

E(  2)=        .038

E(  3)=        .360

E(  4)=        .735

E(  5)=       1.101

E(  6)=       1.483

E(  7)=       1.823

E(  8)=       2.090

E(  9)=       2.286

E( 10)=       2.418

E( 11)=       2.488

E( 12)=       2.514


CLASE DE EDADES PARA LA CUAL E(I) ES POR PRIMERA
VEZ MAYOR QUE LA UNIDA :  5


NUMERO DE COMPARACIONES QUE SE HACEN PARA
DETERMINAR EL RENDIMIENTO MAXIMO : 40
```

```
Y1(I,J) ES EL RENDIMENTO ECONOMICO OBTENIDO
        AL SEPARAR UNA CIERTA FRACCION DE INDIVIDUOS
        DE LA CLASE I Y TODOS LOS DE LA J-ESIMA CLASE

Y1(  1,  6)=     189.698
Y1(  1,  7)=     225.432
Y1(  1,  8)=     244.349
Y1(  1,  9)=     248.171
Y1(  1, 10)=     242.430
Y1(  1, 11)=     232.955
Y1(  1, 12)=     222.919
Y1(  1, 13)=     216.054
Y1(  2,  6)=     181.641
Y1(  2,  7)=     191.424
Y1(  2,  8)=     192.748
Y1(  2,  9)=     186.859
Y1(  2, 10)=     176.762
Y1(  2, 11)=     165.874
Y1(  2, 12)=     156.228
Y1(  2, 13)=     150.129
Y1(  3,  6)=     178.080
Y1(  3,  7)=     177.853
Y1(  3,  8)=     173.632
Y1(  3,  9)=     165.497
Y1(  3, 10)=     155.125
Y1(  3, 11)=     144.860
Y1(  3, 12)=     136.187
Y1(  3, 13)=     130.826
Y1(  4,  6)=     177.758
Y1(  4,  7)=     176.834
Y1(  4,  8)=     173.163
Y1(  4,  9)=     166.853
Y1(  4, 10)=     159.091
Y1(  4, 11)=     151.529
Y1(  4, 12)=     145.155
Y1(  4, 13)=     141.206
Y1(  5,  6)=     178.238
Y1(  5,  7)=     178.319
Y1(  5,  8)=     176.558
Y1(  5,  9)=     173.475
Y1(  5, 10)=     169.720
Y1(  5, 11)=     166.092
Y1(  5, 12)=     163.015
Y1(  5, 13)=     161.093
RENDIMIENTO MAXIMO : Y1(  1,  9)=     248.171

PORCENTAJE QUE SE SEPARA DE LA CLASE  1:        52.15  POR CIENTO

INDIVIDUOS QUE SE SEPARAN DE LA CLASE  1:     179.350

INDIVIDUOS QUE SE SEPARAN DE LA CLASE  9:      68.822
```

VECTOR DE LA POBLACION EN EQUILIBRIO

```
X(  1)=    164.565
X(  2)=    139.057
X(  3)=    135.581
X(  4)=    130.836
X(  5)=    124.294
X(  6)=    115.096
X(  7)=    103.011
X(  8)=     87.559
X(  9)=       .000
X( 10)=       .000
X( 11)=       .000
X( 12)=       .000
```

5.- APENDICE

5.1.- DEMOSTRACIONES

PROPOSICION 3.2.1

El conjunto S es un poliedro convexo.

Hay que checar que para cualesquiera dos puntos

$W_1 = (W_1^{(1)}, W_2^{(1)}, \ldots, W_n^{(1)})$ y $W_2 = (W_1^{(2)}, W_2^{(2)}, \ldots, W_n^{(2)}) \in S$

y $0 < \lambda < 1$, $W = \lambda W_1 + (1-\lambda)W_2 \in S$.

Lo cual es equivalente a que

$$(W_1, W_2, \ldots, W_n) = (\lambda W_1^{(1)} + (1-\lambda)W_1^{(2)},\ \lambda W_2^{(1)} + (1-\lambda)W_2^{(2)}, \ldots,$$
$$\lambda W_n^{(1)} + (1-\lambda)W_n^{(2)}) \in S.$$

O sea hay que demostrar que:

$0 \leq W_n \leq W_{n-1} \leq \ldots \leq W_2 \leq W_1 \leq 1$ y $\langle Y, W \rangle = 1$.

Demostremos primero que $0 \leq W_n$ y $W_1 \leq 1$.

$$W_1 = \lambda W_1^{(1)} + (1-\lambda)W_1^{(2)} \leq \lambda + (1-\lambda) = 1$$

Como $W_n^{(1)} \geq 0$ y $W_n^{(2)} \geq 0$, entonces

$$W_n = \lambda W_n^{(1)} + (1-\lambda)W_n^{(2)}\ ) = \lambda(0) + (1-\lambda)(0) = 0.$$

Ahora se demostrará que $W_n \le W_{n-1} \le \ldots \le W_2 \le W_1$

Por inducción.

Se verá primero que $W_2 \le W_1$

$$W_2 = \lambda W_2^{(1)} + (1-\lambda)W_2^{(2)} \le \lambda W_1^{(1)} + (1-\lambda)W_1^{(2)} = W_1 .$$

Se supone que $W_{n-1} \le W_{n-2}$ y se demostrará que

$W_n \le W_{n-1}$

$$W_n = \lambda W_n^{(1)} + (1-\lambda)W_n^{(2)} \le \lambda W_{n-1}^{(1)} + (1-\lambda)W_{n-1}^{(2)} = W_{n-1}$$

Por lo que : $0 \le W_n \le W_{n-1} \le \ldots \le W_1 \le 0.$

Ahora se demostrará que : $\langle y, W\rangle = 1.$

$$\begin{aligned}\langle y, W\rangle &= y_1 W_1 + y_2 W_2 + \ldots + y_n W_n \\ &= \lambda(y_1 W_1^{(1)} + y_2 W_2^{(1)} + \ldots + y_n W_n^{(1)}) + (1-\lambda)(y_1 W_1^{(2)} + \\ &\quad + y_2 W_2^{(2)} + \ldots + y_n W_n^{(2)}) \\ &= \lambda(1) + (1-\lambda)(1) = 1\end{aligned}$$

Por lo que : $W = \lambda W_1 + (1-\lambda)W_2 \in S.$

PROPOSICION 3.2.5

Si $E_n > 1$, los vértices de S son precisamente los puntos de la forma

$$\varepsilon_i = \begin{cases} 1 & \text{para } i = 1,2,\ldots,I-1 \\ \rho & \text{para } i = I, I+1, \ldots, J-1 \\ 0 & \text{para } i = J, J+1, \ldots, n \end{cases} \qquad (3.2.17)$$

Donde $1 \leq I \leq s \leq J \leq n+1$ y $\rho = \dfrac{(1 - E_{I-1})}{E_{J-1} - E_{I-1}}$

$\Rightarrow$)

Se demostrará que si $\varepsilon \in S$ y es vértice, entonces es de la forma (3.2.17). Lo cual es eqivalente a demostrar que:

si $\varepsilon \in S$ y no es de la forma (3.2.17), entonces no es vértice.

Se comprobará que si $\varepsilon \in S$ y no es de la forma (3.2.17), entonces existen η y $\zeta \in S$ tal que $\varepsilon \neq \eta \neq \zeta$ y

$$\varepsilon = \lambda\zeta + (1-\lambda)\eta \quad \text{con} \quad 0 < \lambda < 1.$$

Se supone sin pérdida de generalidad que:

$$0 = \varepsilon_n = \varepsilon_{n-1} = \ldots = \varepsilon_{m+p+1} < \varepsilon_{m+p} = \varepsilon_{m+p-1} = \ldots =$$
$$= \varepsilon_{m+t+1} = \alpha < \varepsilon_{m+t} \leq \varepsilon_{m+t-1} \leq \ldots \leq \varepsilon_{m+1} \leq \varepsilon_m =$$
$$= \varepsilon_{m-1} = \ldots = \varepsilon_1 = 1$$

con $p > t$.

Así mismo consideremos los casos para cuando $E_{m+t} > 1$ y para cuando $E_{m+t} <= 1$.

Caso 1) $E_{m+t} > 1$

Si $E_{m+t} > 1$ entonces $1 > (1 - E_m)/(E_{m+t} - E_m)$

Sea $\partial = (1 - E_m)/(E_{m+t} - E_m) < 1$

Si elegimos $0 < \mu < 1$ tal que $\beta = \alpha/\mu$ y

$\eta_{m+i} = [\xi_{m+i} - (1-\mu)\partial] / \mu$ con $i = 1,2,3,\ldots,t$,

entonces $\xi = \mu\eta + (1-\mu)\zeta$, donde η y $\zeta \in S$ y están dados por

$$\eta_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 1,2,\ldots,m \\ [\xi_i - (1-\mu)\partial] / \mu & \text{si } i = m+1,m+2,\ldots,m+t \\ \beta & \text{si } i = m+t+1,m+t+2,\ldots,m+p \\ 0 & \text{si } i = m+p+1,m+p+2,\ldots,n \end{cases}$$

$$\zeta_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 1,2,\ldots,m \\ \partial & \text{si } i = m+1,m+2,\ldots,m+t \\ 0 & \text{si } i = m+t+1,m+t+2,\ldots,n \end{cases}$$

Lo que hay que checar es que η y $\zeta \in S$, o sea

$\langle y,\eta\rangle = 1 = \langle y, \zeta\rangle$, $0 \leq \eta_n \leq \eta_{n-1} \leq \ldots \leq 1$,

$0 \leq \zeta_n \leq \zeta_{n-1} \leq \ldots \leq 1$ y que $\varepsilon = \mu\eta + (1-\mu)\zeta$

con $0 < \mu < 1$.

Primero se verá que $1 \geq \eta_1 \geq \eta_2 \geq \ldots \geq \eta_n \geq 0$

Sólo hay que checar que:

$1 \geq \eta_{m+1} \geq \eta_{m+2} \geq \ldots \geq \eta_{m+t} \geq \eta_{m+t+1} \geq 0$

o sea: $1 \geq \eta_{m+1} \geq \eta_{m+2} \geq \ldots \geq \eta_{m+t} \geq \beta \geq 0$

Se demostrará que $1 \geq \eta_{m+1} = [\varepsilon_{m+1} - (1-\mu)\partial] / \mu$

Se supone que $1 < [\varepsilon_{m+1} - (1-\mu)\partial] / \mu$, entonces

$$\mu < \varepsilon_{m+1} - (1-\mu)\partial$$

$$(1-\mu)\partial < \varepsilon_{m+1} - \mu < 0$$

$$\partial - \mu\partial < 0$$

$\partial < \mu\partial < \partial$, lo cual es una contradicción.

Por lo que $1 \geq \eta_{m+1} = [\varepsilon_{m+1} - (1-\mu)\partial] / \mu$

Ahora se verá que $\eta_{m+1} \geq \eta_{m+2} \geq \ldots \geq \eta_{m+t}$.

Se tiene que: $\varepsilon_{m+1} \geq \varepsilon_{m+2} \geq \dots \geq \varepsilon_{m+t}$, entonces

$$\eta_{m+1} = [\varepsilon_{m+1} - (1-\mu)\partial] / \mu \geq [\varepsilon_{m+2} - (1-\mu)\partial] / \mu =$$

$$= \eta_{m+2} \geq \dots \geq [\varepsilon_{m+t} - (1-\mu)\partial] / \mu = \eta_{m+t} .$$

Con lo cual $\eta_{m+1} \geq \eta_{m+2} \geq \dots \geq \eta_{m+t}$.

A continuación se verá que $\eta_{m+t} \geq \eta_{m+t+1} \geq 0$, o sea

$$[\varepsilon_{m+t} - (1-\mu)\partial] / \mu \geq \beta = \alpha/\mu \geq 0$$

Se tiene que:

1) $\lim\limits_{\mu \to 1} \eta_{m+t} = \lim\limits_{\mu \to 1} [\varepsilon_{m+t} - (1-\mu)\partial] / \mu = \varepsilon_{m+t}$

2) $\lim\limits_{\mu \to 1} \beta = \lim\limits_{\mu \to 1} \alpha/\mu = \alpha$

3) $\varepsilon_{m+t} > \alpha$.

Juntando estos tres resultados se obtiene que:

$$\lim_{\mu \to 1} (\eta_{m+t} - \beta) = \varepsilon_{m+t} - \alpha > 0$$

entonces por continuidad existe $\partial > 0$ tal que para toda $\mu \in (1-\partial, 1+\partial)$, $\eta_{m+t} - \beta > 0$; tomando cualquier μ que esté en el intervalo $(1-\partial, 1)$, se tiene que :

$\eta_{m+t} > \beta = \eta_{m+t+1}$ y como $\alpha > 0$ y $0 < \mu < 1$, $\beta = \alpha/\mu > 0$ con lo cual se cumple la propiedad monotona de S .

Para que $\eta \in S$ falta checar que $\langle y,\eta\rangle = 1$.

Tenemos que $\xi \in S$, entonces

$$1 = \langle y,\xi\rangle = E_m + y_{m+1}\xi_{m+1} + \ldots + y_{m+t}\xi_{m+t} + \alpha(E_{m+p} - E_{m+t})$$

entonces

$$y_{m+1}\xi_{m+1} + \ldots + y_{m+t}\xi_{m+t} = 1 - E_m - \alpha(E_{m+p} - E_{m+t})$$

sustituyendo este resultado en $\langle y,\eta\rangle$, tenemos que :

$$\langle y,\eta\rangle = E_m + (1/\mu)[y_{m+1}\xi_{m+1} + \ldots + y_{m+t}\xi_{m+t} - (1-\mu)\partial$$
$$(y_{m+1} \ldots y_{m+t}) + \alpha(E_{m+p} - E_{m+t})]$$

$$= E_m + (1/\mu)\,\frac{[1 - E_m - (1-\mu)\ (1-E_m)\ (E_{m+t} - E_m)]}{(E_{m+t} - E_m)}$$

$$= E_m + (1/\mu)\ [\mu(1-E_m)] = 1.$$

por lo tanto $\langle y,\eta\rangle = 1$ y $\eta \in S$.

Ahora hay que checar lo mismo para ζ , o sea que :

$\langle y, \zeta\rangle = 1$ y $1 \geq \zeta_1 \geq \ldots \geq \zeta_n$ para que ζ esté en S .

Primero se analizará la propiedad monotona. Sólo basta checar que $1 \geq \zeta_{m+1} \geq 0$, o lo que es lo mismo, que ;

$$1 \geq \partial \geq 0$$

Se sabe que $\partial = (1 - E_m) / (E_{m+1} - E_m) < 1$, por lo que sólo queda por revisar que $\partial \geq 0$.

Suponiendo que $\partial = (1-E_m) / (E_{m+1} - E_m)$, entonces $1 / (E_{m+1} - E_m) < E_m / (E_{m+1} - E_m)$, con lo que $1 < E_m$, lo cual es una contradicción ya que $E_{m+1} \geq 1$

Por lo tanto $1 \geq \partial \geq 0$ y se cumple dicha propiedad.

Se revisará ahora que $\langle \gamma, \zeta \rangle = 1$

$$\langle \gamma, \zeta \rangle = E_m + \partial (E_{m+1} - E_m)$$

$$= E_m + \frac{(1-E_m)}{E_{m+1} - E_m} (E_{m+1} - E_m) = 1$$

por lo que $\zeta \in S$.

Dado lo anterior se ha visto que $\epsilon \neq \gamma \neq \zeta$ y están en S.

Sólo queda por ver que $\epsilon = \mu\eta + (1-\mu)\zeta$

$$
\begin{array}{llllll}
\mu\eta_1 & + (1-\mu)\zeta_1 & = \mu(1) + (1-\mu)(1) & = & 1 & = \varepsilon_1 \\
\mu\eta_2 & + (1-\mu)\zeta_2 & = \mu(1) + (1-\mu)(1) & = & 1 & = \varepsilon_2 \\
 & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
\mu\eta_m & + (1-\mu)\zeta_m & = \mu(1) + (1-\mu)(1) & = & 1 & = \varepsilon_m \\
\mu\eta_{m+1} & + (1-\mu)\zeta_{m+1} & = \mu[\varepsilon_{m+1} - (1-\mu)\partial] / \mu + (1-\mu)\partial & & & = \varepsilon_{m+1} \\
\mu\eta_{m+2} & + (1-\mu)\zeta_{m+2} & = \mu[\varepsilon_{m+2} - (1-\mu)\partial] / \mu + (1-\mu)\partial & & & = \varepsilon_{m+2} \\
 & \vdots & \vdots & & & \vdots \\
\mu\eta_{m+t} & + (1-\mu)\zeta_{m+t} & = \mu[\varepsilon_{m+t} - (1-\mu)\partial] / \mu + (1-\mu)\partial & & & = \varepsilon_{m+t} \\
\mu\eta_{m+t+1} & + (1-\mu)\zeta_{m+t+1} & = \mu\beta + (1-\mu)\,0 & = \mu\alpha/\mu & = \alpha & = \varepsilon_{m+t+1} \\
\mu\eta_{m+t+2} & + (1-\mu)\zeta_{m+t+2} & = \mu\beta + (1-\mu)\,0 & = \mu\alpha/\mu & = \alpha & = \varepsilon_{m+t+2} \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\mu\eta_{m+p} & + (1-\mu)\zeta_{m+p} & = \mu\beta + (1-\mu)\,0 & = \mu\alpha/\mu & = \alpha & = \varepsilon_{m+p} \\
\mu\eta_{m+p+1} & + (1-\mu)\zeta_{m+p+1} & = \mu(0) + (1-\mu)(0) & = & 0 & = \varepsilon_{m+p+1} \\
\mu\eta_{m+p+2} & + (1-\mu)\zeta_{m+p+2} & = \mu(0) + (1-\mu)(0) & = & 0 & = \varepsilon_{m+p+2} \\
 & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
\mu\eta_n & + (1-\mu)\zeta_n & = \mu(0) + (1-\mu)(0) & = & 0 & = \varepsilon_n
\end{array}
$$

Por lo tanto $\varepsilon = \mu\eta + (1-\mu)\zeta$ con $0 < \mu < 1$ y como $\varepsilon \neq \eta \neq \zeta$, entonces ε no es vértice.

Caso 2) $E_{m+t} <: 1$

Sea $\partial : (1 - E_{m+t}) / (E_{m+p} - E_{m+t})$ y eligiendo $0 < \mu < 1$ tal que:

$\eta_{m+i} : [\varepsilon_{m+i} - (1-\mu)] / \mu$ con $i : 1,2,3,\ldots,t$

$\beta \quad : [\, \alpha - (1-\mu)\partial \,] / \mu$

y demostremos que $\varepsilon : \mu\eta + (1-\mu)\zeta$ con η y ζ en S.

Donde

$$\eta_i \; : \begin{cases} 1 & \text{para} \quad i : 1,2, \ldots ,m \\ [\varepsilon_i - (1-\mu)] & \text{para} \quad i : m+1,\ m+2,\ \ldots\ ,\ m+t \\ \beta & \text{para} \quad i : m+t+1, m+t+2,\ \ldots\ ,m+p \\ 0 & \text{para} \quad i : m+p+1, m+p+2,\ \ldots\ ,n \end{cases}$$

$$\zeta_i \; : \begin{cases} 1 & \text{para} \quad i : 1,2,\ \ldots\ ,\ m+t \\ \partial & \text{para} \quad i : m+t+1, m+t+2,\ \ldots\ ,m+p \\ 0 & \text{para} \quad i : m+p+1, m+p+2,\ \ldots\ ,n \end{cases}$$

Chequemos primero que $\eta \in S$, es decir que $\langle Y, \eta \rangle : 1$ y que $1 >: \eta_1 >: \eta_2 >: \ldots >: \eta_n$.

Para la propiedad monotona sólo hay que checar que:

$$1 \geq \eta_{m+1} \geq \eta_{m+2} \geq \dots \geq \eta_{m+t} \geq \eta_{m+t+1} \geq 0 .$$

Primero se verá que $1 \geq \eta_{m+1}$.

Se supone que $1 < \eta_{m+1} \iff 1 < [\xi_{m+1} - (1-\mu)] / \mu$

$$\iff \mu < \xi_{m+1} - 1 + \mu$$

$$\iff 1 < \xi_{m+1}$$

lo cual es una contradicción, ya que $0 \leq \xi_i \leq 1$ con $i = 1,2,\dots n$. Por lo tanto $1 \geq \eta_{m+1}$.

Ahora se verificará que $\eta_{m+1} \geq \eta_{m+2} \geq \dots \geq \eta_{m+t}$.

Se tiene que: $\xi_{m+1} \geq \xi_{m+2} \geq \dots \geq \xi_{m+t}$, lo cual implica que:

$$\eta_{m+1} = [\xi_{m+1} - (1-\mu)]/\mu \geq [\xi_{m+2} - (1-\mu)]/\mu = \eta_{m+2} \geq$$

$$\geq \dots \geq [\xi_{m+t} - (1-\mu)]/\mu = \eta_{m+t}.$$

Por lo tanto $\eta_{m+1} \geq \eta_{m+2} \geq \dots \geq \eta_{m+t}$.

A continuación se verá que $\eta_{m+t} \geq \eta_{m+t+1} = \beta$

Se tiene que:

1) $\lim\limits_{\mu \to 1} \eta_{m+t} = \lim\limits_{\mu \to 1} [\xi_{m+t} - (1-\mu)]/\mu = \xi_{m+t}$

2) $\lim\limits_{\mu \to 1} \beta = \lim\limits_{\mu \to 1} [\alpha - (1-\mu)\partial]/\mu = \alpha$

3) $\xi_{m+t} > \alpha$.

Juntando estos tres resultados, se obtiene que :

$\lim\limits_{\mu \to 1} (\eta_{m+t} - \beta) = \xi_{m+t} - \alpha > 0$ y por continuidad

existe $\partial > 0$ tal que $\forall \mu \in (1-\partial, 1+\partial)$, $(\eta_{m+t} - \beta) > 0$

tomando cualquier $\mu \in (1-\partial, 1)$, se tiene que $\eta_{m+t} > \beta$.

Finalmente se verá que $\eta_{m+t+1} = \beta \geq 0$.

Se supone que $\beta < 0$.

Se tiene que $1 = (y, \xi) < E_{m+t} + \alpha(E_{m+p} - E_{m+t})$, entonces $\partial = (1 - E_{m+t}) / (E_{m+p} - E_{m+t}) < \alpha < 1$, lo cual implica que $\partial < \alpha < 1$. Si $\beta < 0$, entonces $[\alpha - (1-\mu)\partial]/\mu < 0$, lo cual es equivalente a que $\alpha - (1-\mu)\partial \leq 0$, si y sólo si $\alpha < (1-\mu)\partial < (1-\mu)$, entonces $\mu < 0$, pero ésto contradice el hecho de que $0 < \mu < 1$. Por lo tanto $\beta \geq 0$ y se cumple la propiedad monotona de S .

Ahora se demostrará que $\langle y, \eta \rangle = 1$.

Se tiene de $\langle y, \varepsilon \rangle = 1$, que:

$$(\varepsilon_{m+1} y_{m+1} + \ldots + \varepsilon_{m+t} y_{m+t}) = 1 - E_m - \alpha(E_{m+p} - E_{m+t})$$

$$\langle y, \eta \rangle = E_m + 1/\mu \, [\, \varepsilon_{m+1} y_{m+1} + \ldots + \varepsilon_{m+t} -$$

$$- (1-\mu)(E_{m+t} - E_m) + \alpha (E_{m+p} - E_{m+t}) -$$

$$- (1-\mu)(E \quad - E \quad)(1 - E \quad)/(E \quad - E \quad)\,]$$

$$\langle y, \eta \rangle = E_m + 1/\mu \, [\, 1 - E_m - (1-\mu)(1-E_m)\,]$$

$$= E_m + 1/\mu \, [\, (1-E_m)(1 - (1-\mu))\,]$$

$$= E_m + 1/\mu \, [\, (1-E_m)\mu \,] = E_m + 1 - E_m = 1$$

con lo que $\langle y, \eta \rangle = 1$ y por lo tanto $\eta \in S$.

Ahora se verificará que $\zeta \in S$.

Primero se verá que $1 \geq \zeta_1 \geq \zeta_2 \geq \ldots \geq \zeta_n \geq 0$, donde sólo hay que checar que $1 \geq \zeta_{m+p} \geq 0$, o sea que $1 \geq \partial \geq 0$. Anteriormente se había visto que $1 > \partial$, por lo que sólo falta checar que $\partial \geq 0$.

Suponiendo que $\partial < 0$, o sea $(1-E_{m+t})/(E_{m+p} - E_{m+t}) < 0$ y como $(E_{m+p} - E_{m+t}) > 0$, entonces $1 - E_{m+t} < 0$, pero ésto contradice que $E_{m+t} \leq 1$, por lo tanto $\partial \geq 0$.

A continuación se demostrará que $\langle y, \zeta \rangle = 1$.

$$(\gamma, \xi) = E_{m+t} + \partial\,(E_{m+p} - E_{m+t})$$
$$= E_{m+t} + [\,(1-E_{m+t})/(E_{m+p} - E_{m+t})\,]\,(E_{m+p} - E_{m+t})$$
$$= E_{m+t} + 1 - E_{m+t} = 1$$

por lo tanto $\xi \in S$.

Finalmente veamos que $\xi = \mu\eta + (1-\mu)\zeta$.

$$\mu\eta_1 + (1-\mu)\zeta_1 = \mu\,(1) + (1-\mu)\,(1) = 1 = \xi_1$$
$$\mu\eta_2 + (1-\mu)\zeta_2 = \mu\,(1) + (1-\mu)\,(1) = 1 = \xi_2$$
$$\vdots$$
$$\mu\eta_m + (1-\mu)\zeta_m = \mu\,(1) + (1-\mu)\,(1) = 1 = \xi_m$$
$$\mu\eta_{m+1} + (1-\mu)\zeta_{m+1} = \mu[\xi_{m+1} - (1-\mu)]/\mu + (1-\mu)(1) = \xi_{m+1}$$
$$\mu\eta_{m+2} + (1-\mu)\zeta_{m+2} = \mu[\xi_{m+2} - (1-\mu)]/\mu + (1-\mu)(1) = \xi_{m+2}$$
$$\vdots$$
$$\mu\eta_{m+t} + (1-\mu)\zeta_{m+t} = \mu[\xi_{m+t} - (1-\mu)]/\mu + (1-\mu)(1) = \xi_{m+t}$$
$$\mu\eta_{m+t+1} + (1-\mu)\zeta_{m+t+1} = \mu[\alpha-(1-\mu)\partial]/\mu + (1-\mu)\partial = \xi_{m+t+1}$$
$$\mu\eta_{m+t+2} + (1-\mu)\zeta_{m+t+2} = \mu[\alpha-(1-\mu)\partial]/\mu + (1-\mu)\partial = \xi_{m+t+2}$$
$$\vdots$$
$$\mu\eta_{m+t+p} + (1-\mu)\zeta_{m+t+p} = \mu[\alpha-(1-\mu)\partial]/\mu + (1-\mu)\partial = \xi_{m+t+p}$$
$$\mu\eta_{m+t+p+1} + (1-\mu)\zeta_{m+t+p+1} = \mu(0) + (1-\mu)0 = 0 = \xi_{m+t+p+1}$$
$$\vdots$$
$$\mu\eta_n + (1-)\zeta_n = \mu(0) + (1-\mu)0 = 0 = \xi_n$$

Con lo cual $\varepsilon = \mu\eta + (1-\mu)\zeta$, con $0 < \mu < 1$ y η, ζ y ε diferentes . Por lo que ε no es vértice de S.

(<=)

Suponiendo que $\varepsilon \in S$ y es de la forma (3.2.17) y que está sobre la recta que une los puntos $\eta, \zeta \in S$, o sea que $\varepsilon = \lambda\zeta + (1-\lambda)\eta$ con $0 < \lambda < 1$, y se demostrará que η, ζ y ε son iguales, lo cual implica que ε es vértice.

Si $\eta, \zeta \in S$, entonces

$(y, \zeta) = 1$ y $0 <= \zeta_n <= \zeta_{n-1} <= \ldots <= \zeta_1 <= 1$

$(y, \eta) = 1$ y $0 <= \eta_n <= \eta_{n-1} <= \ldots <= \eta_1 <= 1$

Tomando

$\zeta_1 = \zeta_2 = \ldots = \zeta_{r-1}$ $\qquad$ $\eta_1 = \eta_2 = \ldots = \eta_{r-1}$

$\zeta_r = \zeta_{r+1} = \ldots = \zeta_{j-1}$ $\qquad$ $\eta_r = \eta_{r+1} = \ldots = \eta_{j-1}$

$\zeta_j = \zeta_{j+1} = \ldots = \zeta_n = 0$ $\qquad$ $\eta_j = \eta_{j+1} = \ldots = \eta_n = 0$.

Se demostrará que $\varepsilon = \eta = \zeta$; osea que $\varepsilon_i = \eta_i = \zeta_i$, con $i = 1,2,3,\ldots,n$.

Sólo hay que checar que :

$$\eta_1 = 1 = \zeta_1 \quad \text{y} \quad \eta_I = \zeta_I = \rho$$

Si se supone que $\zeta_1 < 1$, entonces $\zeta_I > \rho$

se tiene que :

$$1 = (\gamma, \zeta) = \gamma_1\zeta_1 + \gamma_2\zeta_2 + \dots + \gamma_n\zeta_n =$$
$$= \zeta_1(\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_{I-1}) + \zeta_I(\gamma_I + \gamma_{I+1} + \dots + \gamma_{J-1})$$

$$1 = \zeta_1(E_{I-1}) + \zeta_I(E_{J-1} - E_I) < E_{I-1} + \zeta_I(E_{J-1} - E_I)$$

entonces $\rho = (1 - E_{I-1})/(E_{J-1} - E_I) < \zeta_I$.

Analogamente si $\eta_1 < 1$, entonces $\eta_I > \rho$.

Juntando estos dos últimos resultados se tiene que :

$\xi_I = \rho = \lambda\zeta_I + (1-\lambda)\eta_I > \lambda\rho + (1-\lambda)\rho = \rho$, lo cual es una contradicción .

Por lo tanto $\eta_1 = \zeta_1 = 1$ y $\eta_I = \zeta_I = \rho$.

Entonces $\xi = \eta = \zeta$ y ξ es vértice de S.

PROPOSICION 3.2.8

Si se especifica una restricción $(C,X) = 1$, el rendimiento Υ está dado por :

$$\Upsilon = \frac{(E_{J-1} - 1)Y_I b_1 b_2 \ldots b_{I-1} + (1 - E_{I-1})Y_J b_1 b_2 \ldots b_{J-1}}{(E_{J-1} - 1) B_{I-1} + (1 - E_{I-1}) B_{J-1}}$$

Tenemos de la ecuación (3.2.9)

$\alpha_i = (Y_1 a_i + Y_{i+1} b_i - Y_i) b_1 b_2 \ldots b_{i-1}$

$B_i = \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_i$

que

$$\Upsilon = \frac{\alpha_1 \mu_1 + \alpha_2 \mu_1 \mu_2 + \ldots + \alpha_n \mu_1 \mu_2 \mu_3 \ldots \mu_n}{\beta_1 \mu_1 + \beta_2 \mu_1 \mu_2 + \ldots + \beta_n \mu_1 \mu_2 \mu_3 \ldots \mu_n} = \frac{A}{Z}$$

Veamos primero a A

$$\begin{aligned}
A &= \alpha_1 \mu_1 + \alpha_2 \mu_1 \mu_2 + \ldots + \alpha_n \mu_1 \mu_2 \mu_3 \ldots \mu_n \\
&= \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{I-1} + \alpha_I(1-\theta) + \alpha_{I+1}(1-\theta) + \ldots + \alpha_{J-1}(1-\theta) \\
&= \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{J-1} - \theta(\alpha_I + \alpha_{I+1} + \ldots + \alpha_{J-1}) \\
&= (Y_1 a_1 + Y_2 b_1 - Y_1) + (Y_1 a_2 + Y_3 b_2 - Y_2) b_1 + \ldots + \\
&\quad + (Y_1 a_{J-1} + Y_J b_{J-1} - Y_{J-1}) b_1 b_2 \ldots b_{J-2} - \\
&\quad - \theta\, [(Y_1 a_I + Y_{I+1} b_I - Y_I) b_1 b_2 \ldots b_{I-1} + \ldots + \\
&\quad + (Y_1 a_{J-1} + Y_{J} b_{J-1} - Y_{J-1}) b_1 b_2 \ldots b_{J-1}]
\end{aligned}$$

$$A = Y_1(E_{J-1} - 1) + Y_J b_1 b_2 \dots b_{J-1} - \theta Y_1(E_{J-1} - E_{I-1}) +$$
$$+ \theta Y_I b_1 b_2 \dots b_{I-1} - \theta Y_J b_1 b_2 \dots b_{J-1}$$

$$= Y_1(E_{J-1} - 1) - Y_1(E_{J-1} - 1) + \frac{(E_{J-1} - 1)}{(E_{J-1} - E_{I-1})} Y_I b_1 b_2 \dots b_{I-1} -$$
$$- \frac{(E_{J-1} - 1)}{(E_{J-1} - E_{I-1})} Y_J b_1 b_2 \dots b_{J-1} + Y_J b_1 b_2 \dots b_{J-1}$$

$$A = \frac{(E_{J-1} - 1) Y_I b_1 b_2 \dots b_{I-1} + (1 - E_{I-1}) Y_J b_1 b_2 \dots b_{J-1}}{(E_{J-1} - E_{I-1})}$$

Ahora analicemos a Z

$$Z = \beta_1 \mu_1 + \beta_2 \mu_1 \mu_2 + \beta_3 \mu_1 \mu_2 \mu_3 + \dots + \beta_n \mu_1 \mu_2 \mu_3 \dots \mu_n$$
$$= \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_{I-1} + \beta_I(1-\theta) + \beta_{I+1}(1-\theta) + \dots +$$
$$+ \beta_{J-1}(1-\theta)$$

$$Z = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_{J-1} - \theta(\beta_I + \beta_{I+1} + \dots + \beta_{J-1})$$
$$= B_{J-1} - \theta(B_{J-1} - B_{I-1})$$
$$= B_{J-1} - [(E_{J-1} - 1)/(E_{J-1} - E_{I-1})](B_{J-1} - B_{I-1})$$

$$Z = \frac{B_{J-1}(1 - E_{I-1}) + B_{I-1}(E_{J-1} - 1)}{(E_{J-1} - E_{I-1})}$$

Por lo tanto $Y = A / Z$, está dado por

$$Y = \frac{(E_{J-1} - 1)Y_I b_1 b_2 \ldots b_{I-1} + (1 - E_{I-1})Y_J b_1 b_2 \ldots b_{J-1}}{B_{I-1}\,(E_{J-1} - 1) + B_{J-1}(1 - E_{I-1})}$$

PROPOSICION 3.2.9

El vector X de la población en equilibrio está dado por

$$X = 1 \,/\, [\, \theta(B_{I-1}) + (1-\theta)B_{J-1} \,] \begin{bmatrix} 1 \\ b_1 \\ b_1 b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_1 b_2 \ldots b_{I-2} \\ b_1 b_2 \ldots b_{I-1}(1-\theta) \\ b_1 b_2 \ldots b_I \ (1-\theta) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_1 b_2 \ldots b_{J-2}(1-\theta) \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se tiene que $\mu_i = (1 - h_i)$, $h_I = \theta$, $h_j = 1$ y $h_i = 0$ para $i \neq I \neq j$ y que X_1 esta dado por :

$$
\begin{aligned}
X_1 &= 1 / \beta_1 + \beta_2\mu_2 + \beta_3\mu_2\mu_3 + \dots + \beta_n\mu_2\mu_3 \dots \mu_n \\
&= 1 / \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_{I-1} + \beta_I(1-\theta) + \dots + \beta_{j-1}(1-\theta) \\
&= 1 / B_{I-1} + (B_{j-1} - B_{I-1}) - \theta(B_{j-1} + B_{I-1}) \\
&= 1 / B_{j-1}(1-\theta) + \theta(B_{I-1})
\end{aligned}
$$

por lo tanto $X_1 = 1 / \theta(B_{I-1}) + (1-\theta) B_{j-1}$. Y como se sabe que $\mu_j = 0$, $\mu_I = (1-\theta)$ y $\mu_i = 1$ para $i \neq I \neq j$.

$$
\begin{array}{lll}
X_2 & = \mu_2 b_1 X_1 & = b_1 X_1 \\
X_3 & = \mu_2\mu_3 b_1 b_2 X_1 & = b_1 b_2 X_1 \\
\vdots & & \vdots \\
X_{I-1} & = \mu_2\mu_3 \dots \mu_{I-1} b_1 b_2 \dots b_{I-2} X_1 & = b_1 b_2 \dots b_{I-2} X_1 \\
X_I & = \mu_2\mu_3 \dots \mu_I b_1 b_2 \dots b_{I-1} X_1 & = b_1 b_2 \dots b_{I-1}(1-\theta) X_1 \\
\vdots & & \vdots \\
X_{j-1} & = \mu_2\mu_3 \dots \mu_{j-1} b_1 b_2 \dots b_{j-2} X_1 & = b_1 b_2 \dots b_{j-2}(1-\theta) X_1 \\
X_j & = \mu_2\mu_3 \dots \mu_j b_1 b_2 \dots b_{j-1} X_1 & = 0 \\
\vdots & & \vdots \\
X_n & = \mu_2\mu_3 \dots \mu_n b_1 b_2 \dots b_{n-1} X_1 & = 0
\end{array}
$$

sustituyendo X_1 en cada una de las ecuaciones, se cumple la proposición.

PROPOSICION 3.2.10

El número de individuos separados de las clases de edad I y J están dados respectivamente por :

$$(HLX)_I = (\theta b_1 b_2 \ldots b_{I-1}) \,/\, [\theta B_{I-1} + (1-\theta)B_{J-1}]$$

$$(HLX)_J = [(1-\theta) b_1 b_2 \ldots b_{J-1}] \,/\, [\theta B_{I-1} + (1-\theta)B_{J-1}]$$

Se tiene que HLX es el número de individuos que se separan de cada una de las distintas clases de edades, donde :

L está dada por :

$$\begin{bmatrix}
a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{n-1} & a_n \\
b_1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\
0 & b_2 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & b_3 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & & & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & b_{I-2} & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{I-1} & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & & \ddots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & b_{J-2} & & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & b_{J-1} & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & & & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & b_{n-1} & 0
\end{bmatrix}$$

H está dada por

$$\left[\begin{array}{cccccccccccc} 0 &&&&&&&&&&& \\ & 0 &&&&&&&&&& \\ && \ddots &&&&&&&&& \\ &&& 0 &&&&&&&& \\ &&&& \theta &&&&&&& \\ &&&&& 0 &&&&&& \\ &&&&&& \ddots &&&&& \\ &&&&&&& 0 &&&& \\ &&&&&&&& 1 &&& \\ &&&&&&&&& 0 && \\ &&&&&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&&&&& 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ (\text{I- ésimo renglon}) \\ \\ \\ \\ (\text{ J-ésimo renglon }) \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

y X está dado por la proposicion (3.2.9); con lo cual

HLX está dada por

$$\frac{1}{\theta B_{I-1} + (1-\theta) B_{J-1}} \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \theta b_1 b_2 \ \dots \ b_{I-2} b_{I-1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ (1-\theta) b_1 b_2 \ \dots \ b_{J-2} b_{J-1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \text{I-ésima componente} \\ \\ \\ \\ \text{J-ésima componente} \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

Por lo tanto

$$(HLX)_I = \frac{\theta D_1 D_2 \dots D_{I-2} D_{I-1}}{\theta B_{I-1} + (1-\theta) B_{J-1}}$$

$$(HLX)_J = \frac{(1-\theta) D_1 D_2 \dots D_{J-2} D_{J-1}}{\theta B_{I-1} + (1-\theta) B_{J-1}}$$

BIBLIOGRAFIA

Law Richard, 1979 HARVEST OPTIMIZATION IN POPULATIONS WHIT AGE DISTRIBUTIONS. The American Naturalist. Vol 114

Chis Rorres Howard Anton, 1979 APLICACIONES DE ALGEBRA LINEAL. Editorial Limusa, México.

C. Rorres. OPTIMAL SUSTAINABLE YIELD OF A RENAWABLE RESOURCE. Biometries, Vol. 32, 1976.

Saul I. Gass. PROGRAMACION LINEAL (METODOS Y APLICACIONES). Cia. Editorial Continental, S.A. de C.V., México. Cuarta impresión febrero de 1983.

Kenneth Hoffman, Ray Unze. ALGEBRA LINEAL. Editorial Dossat, S.A. Madrid.

P.H. Leslie, on the uses of matrices in certain population mathematics, Biometrika 33, 183 - 212 (1945).

P.H. Leslie, Some further notes on the use of matrices in population mathematics, Biometrika 35, 213 - 245 (1948).